Chuyên đề 1 PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ
BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \longrightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \longrightarrow a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \longrightarrow a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
5. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
6. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
7. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
8. $\left(a+b+c\right)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

A. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Nhắc lại:

1) Một số phép biến đổi tương đương phương trình thường sử dụng

a) **Chuyển vế** một biểu thức từ vế này sang vế kia (nhớ đổi dấu của biểu thức).
b) **Nhân hoặc chia hai vế** của phương trình với một hằng số (khác 0) hoặc với một biểu thức (khác không).
c) **Thay thế** một biểu thức bởi một biểu thức khác bằng với biểu thức đó.

Lưu ý:
+ Chia hai vế của phương trình cho biểu thức chứa ẩn đề phòng mất nghiệm.
+ Bình phương hai vế của phương trình đề phòng dư nghiệm.

2) Các bước giải một phương trình

Bước 1: Tìm điều kiện (nếu có) của ẩn số để hai vế của pt có nghĩa
Bước 2: Sử dụng các phép **biến đổi tương đương** để biến đổi pt đến một pt **đã biết cách giải**
Bước 3: Giải pt và chọn nghiệm phù hợp (nếu có)
Bước 4: Kết luận

3. Các phương pháp giải phương trình đại số thường sử dụng

a) **Phương pháp 1**: Biến đổi phương trình đã cho về phương trình □đã biết cách giải

b) **Phương pháp 2**: Biến đổi phương trình đã cho về dạng tích số : A.B = 0; A.B.C = 0.

Định lý: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$; $A.B.C=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{array}\right.$

c) **Phương pháp 3**: Đặt ẩn phụ đưa phương trình đã cho về dạng đã biết cách giải.

PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

I. Giải và biện luận phương trình bậc nhất:

1. Dạng : $\boxed{ax+b=0 \ (1)}$ $\begin{cases} x: \text{ẩn số} \\ a,b: \text{tham số} \end{cases}$

2. Giải và biện luận:

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ ax = -b (2)

Biện luận:

- Nếu a $\neq 0$ thì (2) $\Leftrightarrow x=-\frac{b}{a}$
- Nếu a = 0 thì (2) trở thành 0.x = -b
  - * Nếu b $\neq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm
  - * Nếu b = 0 thì phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x

Tóm lại :

- a $\neq 0$: phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{b}{a}$
- a = 0 và b $\neq 0$: phương trình (1) vô nghiệm
- a = 0 và b = 0 : phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x

3. Điều kiện về nghiệm số của phương trình:

Định lý: Xét phương trình ax + b = 0 (1) ta có:

- (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ a $\neq 0$
- (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$
- (1) nghiệm đúng với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$

II. Giải và biện luận phương trình bậc hai:

1. Dạng: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \quad \textbf{(1)}}$ $\begin{cases} x: \text{ẩn số} \\ a, b, c: \text{tham số} \end{cases}$

2. Giải và biện luận phương trình :

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Nếu a $= 0$ thì (1) là phương trình bậc nhất : bx + c = 0

- b $\neq 0$: phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{c}{b}$
- b $= 0$ và c $\neq 0$: phương trình (1) vô nghiệm
- b $= 0$ và c $= 0$: phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x

Trường hợp 2: Nếu a $\neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai có

Biệt số $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b' = \dfrac{b}{2}$)

Biện luận:

☞ Nếu $\Delta < 0$ thì pt (1) vô nghiệm

☞ Nếu $\Delta = 0$ thì pt (1) có nghiệm số kép $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ ($x_1 = x_2 = -\dfrac{b'}{a}$)

☞ Nếu $\Delta > 0$ thì pt (1) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ($x_{1,2} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}$)

LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải phương trình: $\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{3}{4}$

Bài 2: Giải phương trình: $\dfrac{-4}{(x-2)^2}(-6 - x) + \dfrac{x+2}{x-2} = 5$

3. Điều kiện về nghiệm số của phương trình bậc hai:

Định lý : Xét phương trình : $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

☞ Pt (1) vô nghiệm	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$
☞ Pt (1) có nghiệm kép	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$
☞ Pt (1) có hai nghiệm phân biệt	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$
☞ Pt (1) có hai nghiệm	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$
☞ Pt (1) nghiệm đúng với mọi x	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Đặc biệt

Nếu pt(1) có hệ số a,c thoả a.c < 0 thì pt(1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho phương trình $3mx^2 + 6mx - m + 1 = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Kết quả: $m < 0 \vee m > \frac{1}{4}$

Bài 2: Cho phương trình $\frac{3x+2}{x+2} = x + m$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Kết quả: $m < 1 \vee m > 9$

4. Định lý VIÉT đối với phương trình bậc hai:

☞ **Định lý thuận**: Nếu phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$\boxed{\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}}$$

☞ **Định lý đảo** : Nếu có hai số x, y mà $x + y = S$ và $x.y = P$ $(S^2 \geq 4P)$ thì x, y là nghiệm của phương trình

$$\boxed{X^2 - S.X + P = 0}$$

☞ **Ý nghĩa của định lý VIÉT:**

Cho phép tính giá trị các biểu thức đối xứng của các nghiệm (tức là biểu thức chứa x_1, x_2 và không thay đổi giá trị khi ta thay đổi vai trò x_1,x_2 cho nhau .Ví dụ: $A = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + \dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$) mà không cần giải pt tìm x_1, x_2 , tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng ….

Chú ý:

☞ Nếu pt (1) có các hệ số thoả mãn a+b+c=0 thì pt (1) có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{c}{a}$

☞ Nếu pt (1) có các hệ số thoả mãn a-b+c=0 thì pt (1) có hai nghiệm là $x_1 = -1$ và $x_2 = -\dfrac{c}{a}$

LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho phương trình $\dfrac{3x+2}{x+2} = mx \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$.

Kết quả: $m = \dfrac{3}{2}$

Bài 2: Cho phương trình $\dfrac{3x+2}{x+2} = x + m \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_2 - x_1 = 3$.

Kết quả: $m = 10$

Bài 3: Cho phương trình $\dfrac{2x+3}{x-2} = 2x + m \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\dfrac{1}{(x_1-2)^2} = \dfrac{1}{(x_2-2)^2}$.

Kết quả: $m = -2$

5. Dấu nghiệm số của phương trình bậc hai:

Dựa vào định lý Viét ta có thể suy ra định lý sau:

Định lý: Xét phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0 \quad (1) \quad (a \neq 0)$

☞ Pt (1) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

☞ Pt (1) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

☞ Pt (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ $P < 0$

II. Phương trình trùng phương:

1.Dạng : $ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$

2.Cách giải:

☞ Đặt ẩn phụ : $x^2 = t$ $(t \geq 0)$. Ta được phương trình: $at^2 + bt + c = 0$ (2)
Giải pt (2) tìm t. Thay t tìm được vào $x^2 = t$ để tìm x.
Tùy theo số nghiệm của phương trình (2) mà ta suy ra được số nghiệm của phương trình (1)

LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho phương trình $x^4 + 2(m+1)x^2 + 2m + 3 = 0 \quad (1)$
Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 2: Cho phương trình $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \quad (1)$
Tìm m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt nhỏ hơn 2 .

Kết quả: $\begin{cases} -\dfrac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$

Bài 3: Cho phương trình $x^4 - (3m+2)x^2 + 3m = -1 \quad (1)$
Tìm m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2x_3x_4 = 4$.

Kết quả: $m = \dfrac{1}{3}$

Bài 4: Cho phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m + 1 = 0 \quad (1)$
Tìm m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = x_2 - x_1$.

Kết quả: $m = 4 \vee m = -\dfrac{4}{9}$

III . Phương trình bậc ba:

1. Dạng: $ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (1) \quad (a\neq 0)$

2 .Cách giải: Áp dụng khi biết được một nghiệm của phương trình (1)

☞**Bước 1**: Nhẩm một nghiệm của phương trình (1). Giả sử nghiệm là $x = x_0$

☞**Bước 2**: Sử dụng phép **CHIA ĐA THỨC** hoặc sơ đồ **HOÓCNE** để phân tích vế trái thành nhân tử và đưa pt (1) về dạng tích số :

$$(1) \Leftrightarrow (x-x_0)(Ax^2+Bx+C)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_0 \\ Ax^2+Bx+C=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Sơ đồ Hoocne:

	a	b	c	d
x_0	A	B	C	0 (số 0)

Trong đó:

$$a=A, \quad x_0.A+b=B, \quad x_0.B+c=C, \quad x_0.C+d=0$$

☞**Bước 3**: Giải phương trình (2) tìm các nghiệm còn lại (nếu có)

Chú ý

Ta có thể áp dụng phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử bằng kỷ thuật sử dụng sơ đồ HOÓCNE, để giải các phương trình đa thức bậc cao (với điều kiện nhẩm được một nghiệm của đa thức).

Ví dụ: Giải phương trình $x^4-8x^3+6x^2+24x+9=0$

LUYỆN TẬP

Bài 1: Giải phương trình: a) $3x^3-16x^2+23x-6=0$ b) $x^3+3x^2-2x-4=0$

Bài 2: Cho phương trình $x^3-3x^2+(m+2)x-2m=0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt.

Bài 3: Cho phương trình $x^3-(2m-3)x^2+(2-m)x+m=0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có 3 nghiệm âm phân biệt.

Bài 4: Cho phương trình: $x^3-3mx^2+(3m-1)x+6m-6=0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 thỏa mãn hệ thức $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2x_3=20$.

Kết quả: $m=2, m=-\frac{2}{3}$

Bài 5: Cho phương trình: $x^3+3x^2+mx-1=x+m+2 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho biểu thức

$$T=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3x_1^2x_2^2x_3^2-5 \text{ đạt GTNN}$$

Kết quả: $\min T = \frac{11}{3}$ khi $m = \frac{11}{3}$

IV. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN QUY VỀ BẬC HAI BẰNG PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ

1.Dạng I:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

☞ Đặt ẩn phụ : t = x^2

2. Dạng II.

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = k \quad (k \neq 0) \text{ trong đó } a+b = c+d$$

☞ Đặt ẩn phụ : t = (x+a)(x+b)

3.Dạng III:

$$(x+a)^4 + (x+b)^4 = k \quad (k \neq 0)$$

☞ Đặt ẩn phụ : t = $x + \frac{a+b}{2}$

4.Dạng IV:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$$

Chia hai vế phương trình cho x^2

☞ Đặt ẩn phụ : t = $x \pm \frac{1}{x}$

LUYỆN TẬP

Giải các phương trình sau:

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
2. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$
3. $(x^2 + 3x - 4)(x^2 + x - 6) = 24$
4. $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$
5. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

B. BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Nhắc lại:

Các phép ***biến đổi tương đương bất phương trình*** thường sử dụng:

1) **Chuyển vế** một biểu thức của bpt từ vế này sang vế kia (nhớ đổi dấu biểu thức)
2) **Nhân hoặc chia hai vế** của bpt với một hằng số hoặc một biểu thức khác 0

   Ghi nhớ quan trọng:

   + ***Âm*** thì ***đổi chiều***
   + ***Dương*** thì ***không đổi chiều***
3) **Thay thế** một biểu thức trong bpt bởi một biểu thức khác bằng với biểu thức đó.

I. Bất phương trình bậc nhất:

1. Dạng :

$$ax + b > 0 \quad (1) \quad (\text{hoặc } \geq, <, \leq)$$

2. Giải và biện luận:

Ta có : $(1) \Leftrightarrow ax > -b \quad (2)$

Biện luận:

- Nếu $a > 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$
- Nếu $a < 0$ thì $(2) \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$
- Nếu $a = 0$ thì (2) trở thành : $0.x > -b$
  - * $b \leq 0$ thì bpt vô nghiệm
  - * $b > 0$ thì bpt nghiệm đúng với mọi x

II. Dấu của nhị thức bậc nhất:

1. Dạng:

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$$

2. Bảng xét dấu của nhị thức:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
ax+b		**Trái dấu với a**	0	**Cùng dấu với a**	

III. Dấu của tam thức bậc hai:

1. Dạng:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)}$$

2. Bảng xét dấu của tam thức bậc hai:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	Cùng dấu a	

$\Delta = 0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		Cùng dấu a	0	Cùng dấu a	

$\Delta > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		Cùng dấu a	0	Trái dấu a	0	Cùng dấu a	

Chú ý:

- Nếu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì tam thức luôn có thể phân tích thành

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

- Mọi tam thức bậc hai f(x) = ax^2+bx+c (a≠0) điều có thể biểu diễn thành

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}}$$

3. Điều kiện không đổi dấu của tam thức:

Định lý: Cho tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

- $f(x) > 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$
- $f(x) < 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$
- $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases}$

LUYỆN TẬP

Bài 1: Cho $f\left(x\right)=\left(m+2\right)x^2-2\left(m+2\right)x-3m+1$

Tìm m để $f\left(x\right)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Kết quả: $-2\leq m\leq -\frac{1}{4}$

Bài 2: Cho $f\left(x\right)=3\left(m-1\right)x^2-6\left(m-1\right)x+3\left(2m-3\right)$

Tìm m để $f\left(x\right)\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Kết quả: $m\leq -1$

IV. Bất phương trình bậc hai:

1. Dạng: $\boxed{ax^2+bx+c>0 \quad (\text{ hoặc } \geq, <, \leq)}$

2. Cách giải: Xét dấu tam thức bậc hai ở vế trái rồi chọn nghiệm thích hợp.

V. So sánh một số α với các nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

Định lý:

$$\left[\begin{array}{l}\text{Tam thức có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa} \\ \qquad x_1<\alpha<x_2\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\, a.f(\alpha)<0 \,\right]$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Tam thức có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa} \\ \qquad x_1<x_2<\alpha\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\Delta>0 \\ a.f(\alpha)>0 \\ \dfrac{S}{2}-\alpha<0\end{cases}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l}\text{Tam thức có hai nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa} \\ \qquad \alpha<x_1<x_2\end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases}\Delta>0 \\ a.f(\alpha)>0 \\ \dfrac{S}{2}-\alpha>0\end{cases}\right]$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

<u>Bài 1</u>: Cho phương trình: $\dfrac{-2x+1}{x+1}=-x+m$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $\left(x_1-x_2\right)^2=4$

Kết quả: $m=1,m=-7$

<u>Bài 2</u>: Cho phương trình: $\dfrac{x+2}{2x-2}=x+m$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn

$$x_1^2+\left(x_1+m\right)^2+x_2^2+\left(x_2+m\right)^2=\frac{37}{2}$$

Kết quả: $m=2,m=-\dfrac{5}{2}$

<u>Bài 3</u>: Cho phương trình: $(x-3)\left(x^2+3x+6-m\right)=0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Kết quả: $\begin{cases} m>\dfrac{15}{4} \\ m\neq 24 \end{cases}$

<u>Bài 4</u>: Cho phương trình: $x^3-2(m+1)x^2+(7m-2)x+4-6m=0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có 3 nghiệm dương phân biệt.

Kết quả: $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{3}<m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$

<u>Bài 5</u>: Cho phương trình: $x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Kết quả: $\begin{cases} m>-\dfrac{1}{2} \\ m\neq 0 \end{cases}$

<u>Bài 6</u>: Cho phương trình: $\dfrac{-x^2+x+m}{x+m}=x-1$ (1)

Tìm để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Kết quả: $\left[\begin{array}{l} m<-6-4\sqrt{2} \\ m>-6+4\sqrt{2} \end{array}\right.$

<u>Bài 7</u>: Cho phương trình: $3x^2+4(m-1)x+m^2-4m+1=0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

Kết quả: $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=5 \end{array}\right.$

Bài 8: Cho phương trình: $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + \frac{2}{3} = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 15$

Kết quả: $(m < -1 \vee m > 1)$

Bài 9: Cho phương trình $x^2 - 2x + 1 - m = 0$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2|.(m+1) = 4$

Bài 10: Cho phương trình $\frac{x+1}{2x-1} = kx$ (1)

Tìm k để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$

Bài 11: Cho phương trình $\frac{2x-2}{x+1} = 2x + m$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1 - x_2)^2 = 1$

Bài 12: Cho phương trình $\frac{x-1}{x+m} = x + 2$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 2$

Bài 13: Cho phương trình $\frac{2x+4}{1-x} = m(x-1) + 1$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $(1+m^2).\left[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2\right] = 90$

Bài 14: Cho phương trình $\frac{-x+1}{2x-1} = x + m$ (1)

Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho biểu thức

$A = -\frac{1}{(2x_1-1)^2} - \frac{1}{(2x_2-1)^2}$ đạt giá trị lớn nhất.

--------------------------------Hết-----------------------------

Chuyên đề 2 HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ
TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

I. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

1. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

a. Dạng :
$$\boxed{\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}} \quad (1)$$

Cách giải đã biết: Phép thế, phép cộng ...

b. Giải và biện luận phương trình : Quy trình giải và biện luận

Bước 1: Tính các định thức :

- $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$ (gọi là định thức của hệ)
- $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ (gọi là định thức của x)
- $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ (gọi là định thức của y)

Bước 2: Biện luận

- Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$
- Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$ thì hệ vô nghiệm
- Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ có **vô số nghiệm** hoặc **vô nghiệm**

Ví dụ: Giải bằng máy tính hệ: $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 15 = 0 \end{cases}$

Ví dụ:

Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 1 \\ mx + y = 3 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $xy < 0$.

3. Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

Dạng :
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Cách giải: Sử dụng phép cộng để khử một ẩn đưa về hệ bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ: Giải bằng máy tính hệ: $\begin{cases} 20+4x-8y+z=0 \\ 50-10x-10y+z=0 \\ 40-12x+4y+z=0 \end{cases}$

II. Hệ phương trình bậc hai hai ẩn:

1. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn:

Cách giải: **Giải bằng phép thế**

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x-y-8=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=5 \end{cases}$

2. Hệ phương trình đối xứng :

1. Hệ phương trình đối xứng loại I:

a.Định nghĩa: Đó là hệ chứa hai ẩn x,y mà khi ta thay đổi vai trò x,y cho nhau thì hệ phương trình không thay đổi.

b.Cách giải:

> **Bước 1**: Đặt x+y=S và xy=P với $S^2 \geq 4P$ ta đưa hệ về hệ mới chứa hai ẩn S,P.
> **Bước 2**: Giải hệ mới tìm S,P . Chọn S,P thoả mãn $S^2 \geq 4P$.
> **Bước 3**: Với S,P tìm được thì x,y là nghiệm của phương trình :
> $X^2 - SX + P = 0$ (định lý Viét đảo).

Chú ý: Do tính đối xứng, cho nên nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ.

Ví dụ : Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy(x+y)=2 \\ x^3+y^3+x+y=4 \end{cases}$

2. Hệ phương trình đối xứng loại II:

a.Định nghĩa: Đó là hệ chứa hai ẩn x,y mà khi ta thay đổi vai trò x,y cho nhau thì phương trình nầy trở thành phương trình kia của hệ.

b. Cách giải:

> - Trừ vế với vế hai phương trình và biến đổi về dạng phương trình tích số.
> - Kết hợp một phương trình tích số với một phương trình của hệ để suy ra nghiệm của hệ .

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+2=3xy^2 \\ y^2+2=3yx^2 \end{cases}$

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2}. \end{cases}$

III. Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai:

a. Dạng : $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$

b. Cách giải:

Đặt ẩn phụ $\frac{x}{y} = t$ hoặc $\frac{y}{x} = t$. Giả sử ta chọn cách đặt $\frac{x}{y} = t$.

Khi đó ta có thể tiến hành cách giải như sau:

Bước 1: Kiểm tra xem (x,0) có phải là nghiệm của hệ hay không ?

Bước 2: Với $y \neq 0$ ta đặt $\frac{x}{y} = t \Leftrightarrow x = ty$. Thay vào hệ ta được hệ mới chứa 2 ẩn t,y .Từ 2 phương trình ta khử y để được 1 phương trình chứa t .

Bước 3: Giải phương trình tìm t rồi suy ra x,y.

Ví dụ : Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = -1 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$

CÁC HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÁC

Ta có thể sử dụng các phương pháp sau

1. Sử dụng phép thế

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y(x+y) + 1 = 0 \\ (x^2+1)(x+y-2) + y = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy = x + 2 \\ (2y^2 + 5)x + 13x^2 = 26 \end{cases}$

2. Sử dụng phép cộng

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 2x^2y = 3 \\ x^2 + y^2 + y = 3 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 1:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + y^4 + 6x^2y^2 = 41 \\ xy\left(x^2 + y^2\right) = 10 \end{cases}$

3. Đặt ẩn phụ

Ví dụ 1: (A-2012)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy - 4x - y + 2 = 0 \\ x^2 - 2x = y^2 - 8y + 18 \end{cases}$

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x+y+1) - 3 = 0 \\ (x+y)^2 - \dfrac{5}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 4:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + 1 = 7y \\ x^2y^2 + xy + 1 = 13y^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^4 + 4x^2 + y^2 - 4y = 2 \\ x^2y + 2x^2 + 6y = 23 \end{cases}$.

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y + x^3y + xy^2 + xy = -\dfrac{5}{4} \\ x^4 + y^2 + xy(1+2x) = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$ $(x, y \in R)$.

4. Biến đổi về dạng tích số

Ví dụ 1: (D-2012)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases}$ $(x,\ y \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2\left(xy + x + y\right) = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$

Ví dụ 3:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1. \end{cases}$

Ví dụ 4:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1 \\ 3x + y = y^2 + 3 \end{cases}$

Ví dụ 5:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 - 2(x+y) = 0 \\ xy(x^2+y^2) + 2 = (x+y)^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

5. Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Ví dụ 1 :

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 = y + 6 \\ y^3 = x + 6 \end{cases}$

Ví dụ 2:

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

------------------------------Hết------------------------------

CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 3x^2 - 4x + 1 \\ xy + x + 1 = x^2 \end{cases}$

Bài 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$

Bài 3: Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$

Kết quả: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + 4x^2 + y^2 - 4y = 2 \\ x^2y + 2x^2 + 6y = 23 \end{cases}$

Kết quả: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

---------------------------Hết------------------------

Chuyên đề 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. Định nghĩa và các tính chất cơ bản :

1. Định nghĩa: $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$

2. Tính chất :

$$|A| \geq 0 \ , \quad |A|^2 = A^2$$

Lưu ý: $\sqrt{A^2} = |A|$

II. Các định lý cơ bản :

a) **Định lý 1 :** Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

b) **Định lý 2 :** Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$

III. Các phương trình và bất phương trình chứa giá trị tuyệt đối cơ bản & cách giải :

Phương pháp chung để giải loại này là KHỬ DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI bằng định nghĩa hoặc nâng lũy thừa.

* **Dạng 1 :** $|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2$, $\quad |A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$

* **Dạng 2 :** $|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 = B^2 \end{cases}$, $\quad |A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = \pm B \end{cases}$, $\quad |A| = B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \\ \begin{cases} A < 0 \\ -A = B \end{cases} \end{array} \right.$

* **Dạng 4:** $|A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ A^2 < B^2 \end{cases}$, $\quad |A| < B \Leftrightarrow \begin{cases} B > 0 \\ -B < A < B \end{cases}$, $\quad |A| < B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ A < B \end{cases} \\ \begin{cases} A < 0 \\ -A < B \end{cases} \end{array} \right.$

* **Dạng 5:** $|A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B < 0 \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A^2 > B^2 \end{cases} \end{array} \right.$, $\quad |A| > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B < 0 \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A < -B \vee A > B \end{cases} \end{array} \right.$

IV. Các cách giải phương trình chứa giá trị tuyệt đối thường sử dụng :

*** Phương pháp 1 :** **Biến đổi về dạng cơ bản**

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\left|x^2 - x - 2\right| = \left|x^2 + 2x\right|$ 2) $\left|x^2 - 4x + 3\right| = x + 3$ 3) $\dfrac{|2x+4|}{\sqrt{x^2+1}} = 2$

*** Phương pháp 2 :** **Sử dụng phương pháp chia khoảng**

Ví dụ : Giải phương trình sau : $|x - 1|(2x - 1) = 3$ (1)

V. Các cách giải bất phương trình chứa giá trị tuyệt đối thường sử dụng :

*** Phương pháp 1 :** **Biến đổi về dạng cơ bản**

Ví dụ : Giải bất phương trình sau : $\left|x^2 - 5x\right| < 6$ (1)

*** Phương pháp 2 :** **Sử dụng phương pháp chia khoảng**

Ví dụ : Giải bất phương trình sau : $\left|x^2 - 2x\right| + x^2 - 4 > 0$ (1)

-

CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 1:
Giải các phương trình sau:

1) $|x-2|+|2x-1|=|x+3|$

Kết quả: $x=3 \vee x=0$

2) $\dfrac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}=2$

Kết quả: $x=5$

3) $4|x+2|=(4-x)(x+6)$

Kết quả: $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1-\sqrt{33} \end{array}\right.$

4) $2\left|x^2+2x-5\right|=x-1$

Kết quả: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{-2+\sqrt{113}}{4} \end{array}\right.$

Bài 2:
Giải các bất phương trình sau:

1) $\left|x-6\right|<x^2-5x+9$

Kết quả: $x<1 \vee x>3$

2) $\left|x-1\right|+\left|x-2\right|>x+3$

Kết quả:

3) $\dfrac{\left|x-3\right|}{x^2-5x+6}\le 2$

Kết quả:

------------------------------------Hết-----------------------------------

Chuyên đề 4

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. Các điều kiện và tính chất cơ bản :

* $\sqrt{A}$ có nghĩa khi $A \geq 0$
* $\sqrt{A} \geq 0$ với $A \geq 0$
* $\sqrt{A^2} = |A|$ & $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$
* $\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$ với $A \geq 0$
* $\sqrt{A.B} = \sqrt{A}.\sqrt{B}$ khi $A, B \geq 0$
* $\sqrt{A.B} = \sqrt{-A}.\sqrt{-B}$ khi $A, B \leq 0$

II. Các định lý cơ bản : (quan trọng)

a) **Định lý 1 :** Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$

b) **Định lý 2 :** Với $A \geq 0$ và $B \geq 0$ thì $A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$

c) **Định lý 3:** Với A và B bất kỳ thì $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$

III. Các phương trình và bất phương trình căn thức cơ bản & cách giải :

Phương pháp chung để giải loại này là **KHỬ CĂN THỨC** bằng **phép nâng lũy thừa.**

* **Dạng 1 :** $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 & (\text{hoặc } B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

* **Dạng 2 :** $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$

* **Dạng 3 :** $\sqrt{A} < B \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

* **Dạng 4:** $\sqrt{A} > B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} B \geq 0 \\ A > B^2 \end{cases} \end{array} \right.$

IV. Các cách giải phương trình căn thức thường sử dụng :

* Phương pháp 1 : Biến đổi về dạng cơ bản

Ví dụ 1 : Giải phương trình sau : $\sqrt{3x^2-9x+1}+x-2=0$

Ví dụ 2 :

Giải phương trình: $\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1=0 \quad (x\in\mathbb{R})$.

Ví dụ 3 :

Giải phương trình sau: $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+1}=4$.

* Phương pháp 2 : Đặt điều kiện (nếu có) và nâng luỹ thừa để khử căn thức

Ví dụ : Giải phương trình sau : $\sqrt{2x+9}-\sqrt{4-x}=\sqrt{3x+1} \qquad (1)$

* Phương pháp 3 : Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình hoặc hệ pt đại số

Phương pháp:

Bước 1: Đặt ẩn phụ, nêu điều kiện của ẩn phụ (nếu có).

Bước 2: Chuyển PT đã cho về PT chứa ẩn phụ. Giải PT chứa ẩn phụ. Đối chiếu với điều kiện ẩn phụ đã nêu để tìm nghiệm thích hợp của PT này.

Bước 3: Tìm nghiệm của PT ban đầu theo hệ thức khi đặt ẩn phụ.

Ví du 1 :

Giải các phương trình sau :

1) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$

Ví du 2 :

Giải phương trình $3\sqrt{2+x}-6\sqrt{2-x}+4\sqrt{4-x^2}=10-3x \quad (x\in\mathbb{R})$.

Ví dụ 3 :

Giải phương trình $(x+4)^2-6\sqrt{x^3+3x}=13$.

* Phương pháp 4 : Biến đổi phương trình về dạng tích số : A.B = 0 hoặc A.B.C = 0

Ví dụ 1 : Giải các phương trình sau :

1) $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

2) $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

Ví du 2 : Giải các phương trình sau :

1) $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$

2) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$

3) $\sqrt{x^2+2x+22}+\sqrt{x}=x^2+2x+3$

4) $x^2+9x+20=2\sqrt{3x+10}$

5) $2x^2-11x+21=\sqrt[3]{4x-4}$

V. Các cách giải bất phương trình căn thức thường sử dụng :

*** Phương pháp 1 : Biến đổi về dạng cơ bản**

Ví dụ 1:

Giải các bất phương trình sau :

1) $\sqrt{x^2-4x+3}<x+1$ 2) $\sqrt{(x+1)(4-x)}>x-2$

Ví du 2:

Giải bất phương trình $2(x-2)(\sqrt{x+1}+1)<5x-x^2$.

*** Phương pháp 2 : Đặt điều kiện (nếu có) và nâng luỹ thừa để khử căn thức**

Ví dụ : Giải bất phương trình sau :

$$\sqrt{x+11}-\sqrt{2x-1}\geq\sqrt{x-4} \qquad (1)$$

*** Phương pháp 3 : Đặt ẩn phụ chuyển về bất phương trình đại số (hoặc bpt căn cơ bản)**

Ví dụ 1: (B-2012)

Giải bất phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$.

Ví dụ 2:

Giải bất phương trình $x\sqrt{x}+\dfrac{7-2x}{\sqrt{x}}>4\sqrt{x+\dfrac{4}{x}-2}$.

*** Phương pháp 4 : Biến đổi phương trình về dạng tích số hoặc thương**

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

1) $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0$ 2) $\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}<1$

VI. Hệ phương trình có chứa căn thức :

Các phương pháp thường sử dụng:

1. Sử dụng phép thế

2. Sử dụng phép cộng

4. Biến đổi về dạng tích số

5. Sử dụng tính chất đơn điệu của hàm số

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{3x+y}+\sqrt{5x+4y}=5\\ 12\sqrt{5x+4y}+x-2y=35\end{cases}$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4 \\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4 \end{cases}$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2+y^2-5xy-7x+3y+2=0 \\ x^3+\sqrt{x-1}=y^3+\sqrt{y-1} \end{cases}$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x} \end{cases}$

CÁC BÀI TOÁN RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình sau

1) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}=\sqrt{x-9}$

Kết quả: $x=10$

2) $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2(x+1)$

Kết quả: $x=\pm 1$

3) $\sqrt{2+x}+\sqrt{6-x}+\sqrt{(2+x)(6-x)}=8$

Kết quả: $x=2$

4) $\dfrac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{3}{x}$

Kết quả: $x=1 \vee x=\dfrac{9}{16}$

5) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$

Kết quả: $x=-1$

Bài 2: Giải các bất phương trình sau

1) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}\le\sqrt{x-9}$

Kết quả: $9\le x\le 10$

2) $\dfrac{\sqrt{2\left(x^2-16\right)}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{7-x}{\sqrt{x-3}}$

Kết quả: $x\ge 10-\sqrt{34}$

3) $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1$

Kết quả: $\left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{52}\le x<-5 \\ x>1 \end{array}\right.$

4) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$

Kết quả: $1\le x\le 2 \vee x\ge 10$

5) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18}$

Kết quả: $x>\dfrac{17}{3}$

-----------------------**Hết**---------------------

Chuyên đề 5: BẤT ĐẲNG THỨC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Số thực dương, số thực âm:

- Nếu x là số thực dương, ta ký hiệu $x > 0$
- Nếu x là số thực âm, ta ký hiệu $x < 0$
- Nếu x là số thực dương hoặc x= 0, ta nói x là số thực không âm, ký hiệu $x \geq 0$
- Nếu x là số thực âm hoặc x= 0, ta nói x là số thực không dương, ký hiệu $x \leq 0$

Chú ý:

- Phủ định của mệnh đề "$a > 0$" là mệnh đề "$a \leq 0$"
- Phủ định của mệnh đề "$a < 0$" là mệnh đề "$a \geq 0$"

II. Khái niệm bất đẳng thức:

1. Định nghĩa 1: Số thực a gọi là lớn hơn số thực b, ký hiệu $a > b$ nếu a-b là một số dương, tức là $a-b > 0$. Khi đó ta cũng ký hiệu $b < a$

Ta có: $$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

- Nếu a>b hoặc a=b, ta viết $a \geq b$. Ta có:

$$a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a - b \geq 0$$

2. Định nghĩa 2:

Giả sử A, B là hai biểu thức bằng số

Mệnh đề : " A lớn hơn B ", ký hiệu : $A > B$

" A nhỏ hơn B ", ký hiệu : $A < B$

" A lớn hơn hay bằng B " ký hiệu $A \geq B$

" A nhỏ hơn hay bằng B " ký hiệu $A \leq B$

được gọi là một bất đẳng thức

Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng

III. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức :

1. Tính chất 1: $$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$$

2. Tính chất 2: $$a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$$

Hệ quả 1: $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$

Hệ quả 2: $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$

3. Tính chất 3: $$\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$$

4. Tính chất 4: $$a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc & \text{nếu } c > 0 \\ ac < bc & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$$

Hệ quả 3: $a > b \Leftrightarrow -a < -b$

<u>Hệ quả 4</u>: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c > 0 \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} & \text{nếu } c < 0 \end{cases}$

5. <u>Tính chất 5</u>: $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

6. <u>Tính chất 6</u>: $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

7. <u>Tính chất 7</u>: $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow a^n > b^n$

8. <u>Tính chất 8</u>: $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

<u>Hệ quả 5</u>: Nếu a và b là hai số dương thì :

$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$

Nếu a và b là hai số không âm thì :

$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$

IV. <u>Bất đẳng thức liên quan đến giá trị tuyệt đối</u> :

1. <u>Định nghĩa</u>: $|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ $(x \in R)$

2. <u>Tính chất</u> : $|x| \geq 0$, $|x|^2 = x^2$, $x \leq |x|$, $-x \leq |x|$

3. Với mọi $a, b \in R$ ta có :

- $|a+b| \leq |a| + |b|$
- $|a-b| \leq |a| + |b|$
- $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0$
- $|a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0$

V. <u>Bất đẳng thức trong tam giác</u> :

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

- $a > 0, b > 0, c > 0$
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$
- $|a-b| < c < a+b$
- $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$

VI. <u>Các bất đẳng thức cơ bản</u> :

a. <u>Bất đẳng thức Cauchy</u>:

Cho **hai số không âm a; b** ta có :

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi a=b

<u>Tổng quát</u> :

Cho **n số không âm $a_1, a_2, ... a_n$** ta có :

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}}$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

b. Bất đẳng thức Bunhiacốpski :

Cho **bốn số thực a,b,x,y** ta có :

$$(ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi ay = bx

Tổng quát :

Cho hai bộ số $(a_1, a_2, ... a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ta có :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng

c) **Bất đẳng thức cơ bản:** Cho hai số dương a,b ta luôn có:

$$\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi a=b

Các phương pháp cơ bản chứng minh bất đẳng thức :

Ta thường sử dụng các phương pháp sau

1. Phương pháp 1: Phương pháp biến đổi tương đương

Biến đổi tương đương bất đẳng thức cần chứng minh đến một bất đẳng thức đã biết rằng đúng .

Ví du1:

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ với mọi số thực a,b,c
2. $a^2 + b^2 + 1 \ge ab + a + b$ với mọi a,b

Ví dụ 2:

Cho hai số a,b thỏa điều kiện a+b ≥ 0, chứng tỏ rằng: $\frac{a^3+b^3}{2} \ge (\frac{a+b}{2})^3$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu x>0 thì $(x+1)^2(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + 1) \ge 16$

2. Phương pháp 2: Phương pháp tổng hợp

Xuất phát từ các bất đẳng thức đúng đã biết dùng suy luận toán học để suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC có các cạnh a,b,c, chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Ví dụ 2: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x + y = \frac{5}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{4x} \ge 5$$

Ví dụ 3: Cho x,y,z là các số dương. Chứng minh rằng: $3x + 2y + 4z \ge \sqrt{xy} + 3\sqrt{yz} + 5\sqrt{zx}$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với mọi mọi x,y dương ta có: $x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge 2(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

Ví dụ 5: Cho tam giác ABC có các cạnh a,b,c, chứng minh :

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\ge 0$$

Ví dụ6: Cho x,y,z và xyz=1. Chứng minh rằng : $x^3+y^3+z^3\ge x+y+z$

Ví dụ 7: Cho x, y, z > 0 và x+y+z=xyz. Chứng minh rằng : $xyx\ge 3\sqrt{3}$

Ví dụ 8: Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng : $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\ge 9$

Ví dụ 9: Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng :

$$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge 10$$

Ví dụ 10: Cho a,b,c >0 và abc=1. Chứng minh rằng :

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3$$

3. **Phương pháp 3: Sử dụng đạo hàm xét các tính chất của hàm số**

Ví dụ 1: Chứng minh bất đẳng thức: sinx < x với mọi x > 0

Ví dụ 2: Chứng minh bất đẳng thức: $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ với mọi x > 0

Ví dụ 3: Chứng minh bất đẳng thức: $\sin x+tgx>2x$ với mọi $x\in(0;\frac{\pi}{2})$

Ví dụ 4: Với $0<x<\frac{\pi}{2}$, chứng minh $2^{2\sin x}+2^{tgx}>2^{\frac{3}{2}x+1}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho các số dương x,y,z thỏa mãn xyz=1. Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$$

Khi đẳng thức xảy ra?

Bài 2: Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=4$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1$$

Bài 3: Với a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn đẳng thức $ab+bc+ca=abc$, chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{bc}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ca}\ge\sqrt{3}$$

Chuyên đề 6

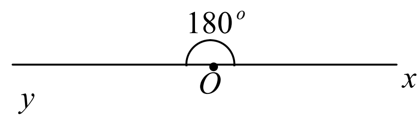
ÔN TẬP LƯỢNG GIÁC
PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC
TÓM TẮT GIÁO KHOA

A. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. Đơn vị đo góc và cung:

1. Độ:

$$\boxed{\text{Góc } 1^0 = \frac{1}{180} \text{ góc bẹt}}$$



2. Radian: (rad)

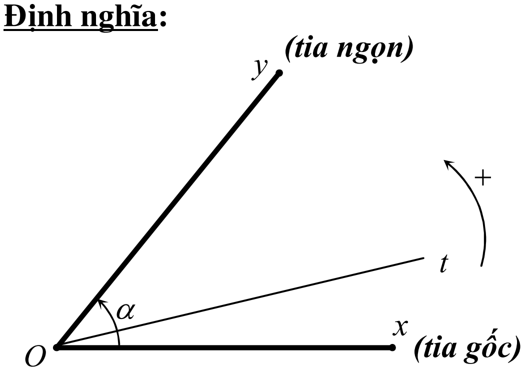
$$\boxed{180^0 = \pi \text{ rad}}$$

3. Bảng đổi độ sang rad và ngược lại của một số góc (cung) thông dụng:

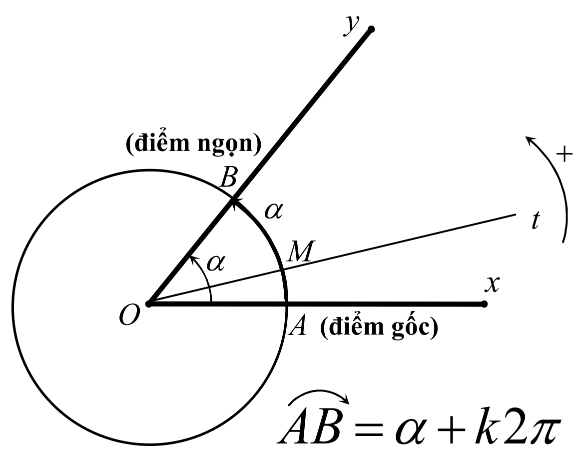
Độ	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

II. Góc lượng giác & cung lượng giác:

1. Định nghĩa:



$(Ox, Oy) = \alpha + k2\pi \;\; (k \in Z)$



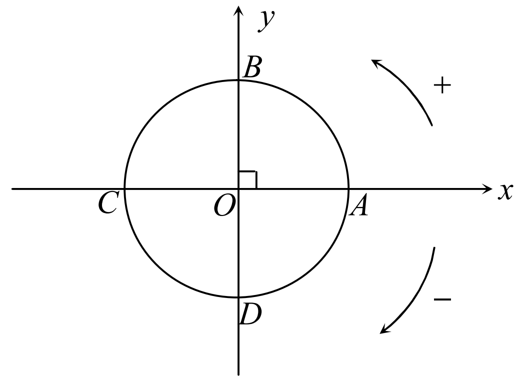
$$\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi$$

2. Đường tròn lượng giác:

Số đo của một số cung lượng giác đặc biệt: $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi$

M

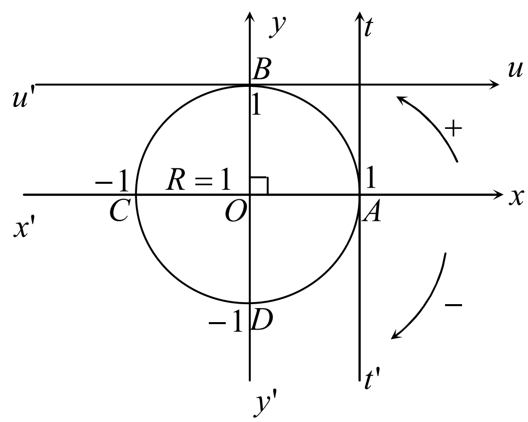
A	$\rightarrow$	$2k\pi$
B	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
C	$\rightarrow$	$\pi + 2k\pi$
D	$\rightarrow$	$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
A,C	$\rightarrow$	$k\pi$
B,D	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2} + k\pi$



III. Định nghĩa hàm số lượng giác:

1. Đường tròn lượng giác:

- A: điểm gốc
- x'Ox : trục côsin (trục hoành)
- y'Oy : trục sin (trục tung)
- t'At : trục tang
- u'Bu : trục cotang



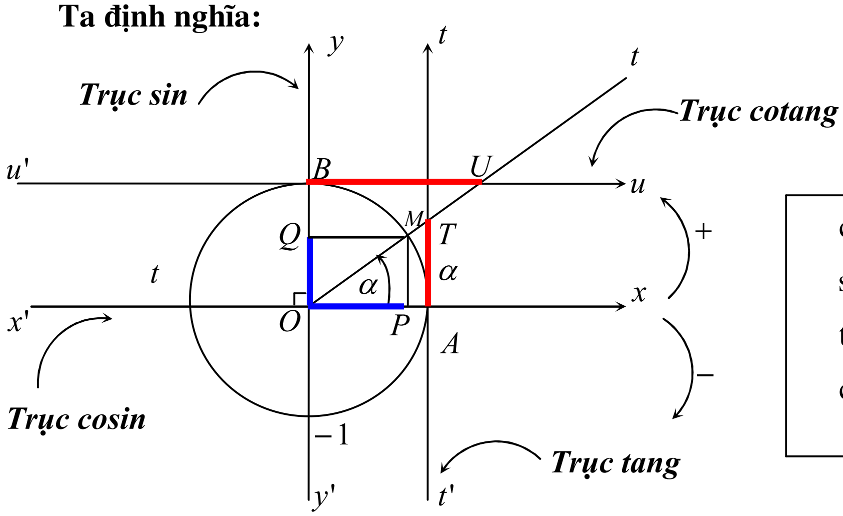
2. Định nghĩa các hàm số lượng giác:

a. Định nghĩa: Trên đường tròn lượng giác cho AM= α .

Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên x'Ox và y'Oy

T, U lần lượt là giao điểm của tia OM với t'At và u'Bu

Ta định nghĩa:



$\cos\alpha = \overline{OP}$

$\sin\alpha = \overline{OQ}$

$\tan\alpha = \overline{AT}$

$\cot\alpha = \overline{BU}$

b. Các tính chất :

- Với mọi α ta có :

$$-1 \le \sin\alpha \le 1 \text{ hay } |\sin\alpha| \le 1$$
$$-1 \le \cos\alpha \le 1 \text{ hay } |\cos\alpha| \le 1$$

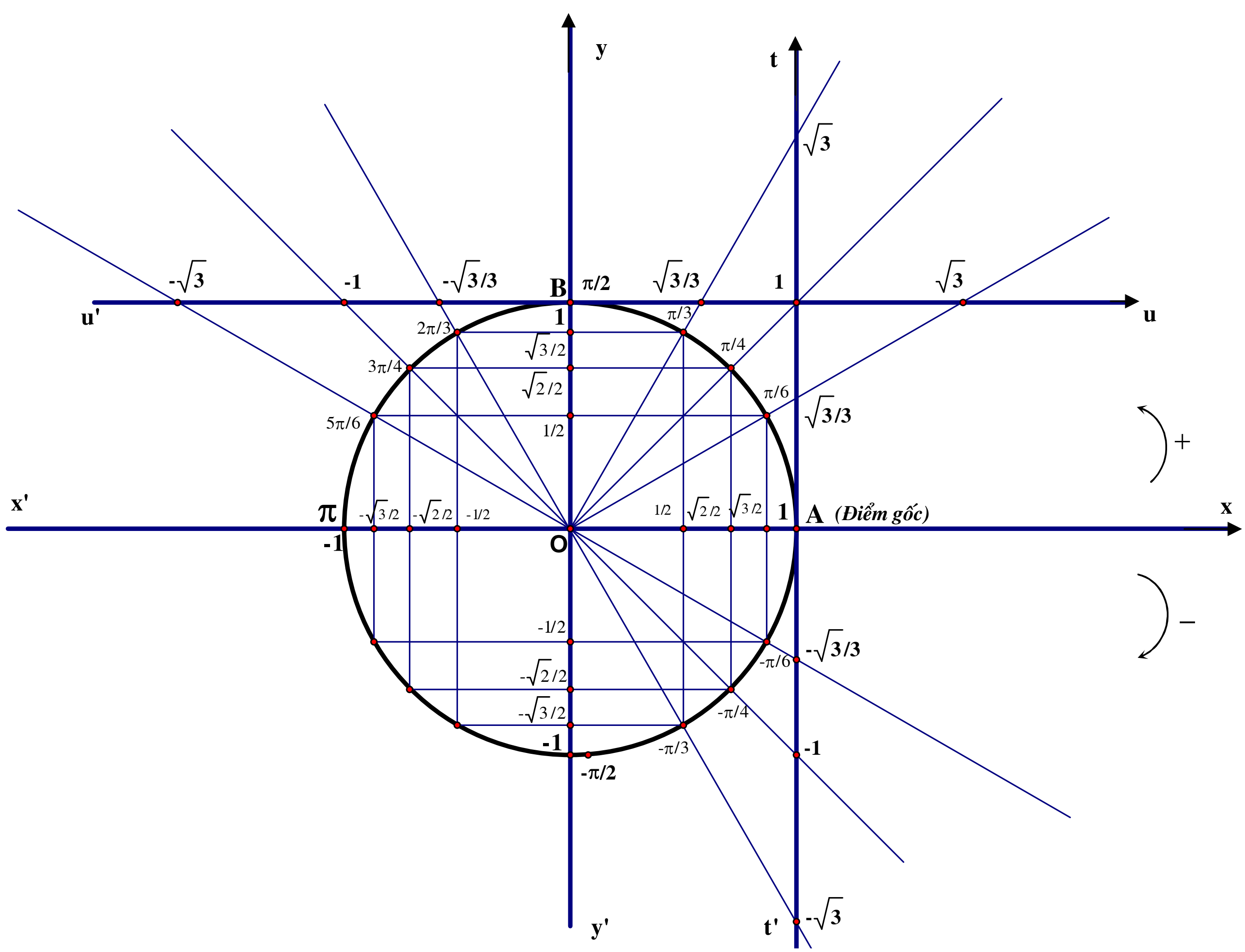
- $\tan\alpha$ xác định $\forall \alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
- $\cot\alpha$ xác định $\forall \alpha \ne k\pi$

c. Tính tuần hoàn

$$\begin{array}{lcl} \sin(\alpha + k2\pi) & = & \sin\alpha \\ \cos(\alpha + k2\pi) & = & \cos\alpha \\ \tan(\alpha + k\pi) & = & \tan\alpha \\ \cot(\alpha + k\pi) & = & \cot\alpha \end{array} \qquad (k \in Z)$$

IV. Giá trị các hàm số lượng giác của các cung (góc) đặc biệt:

Ta nên sử dụng đường tròn lượng giác để ghi nhớ các giá trị đặc biệt



Góc / Hslg	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0	360^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0
$\cot\alpha$	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ	kxđ

V. Hàm số lượng giác của các cung (góc) có liên quan đặc biệt:

Đó là các cung :

1. **Cung đối nhau** : α và $-\alpha$ (tổng bằng 0) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $-\frac{\pi}{6}$,...)
2. **Cung bù nhau** : α và $\pi-\alpha$ (tổng bằng π) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{5\pi}{6}$,...)
3. **Cung phụ nhau** : α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (tổng bằng $\frac{\pi}{2}$) (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{\pi}{3}$,...)
4. **Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$** : α và $\frac{\pi}{2}+\alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{2\pi}{3}$,...)
5. **Cung hơn kém π** : α và $\pi+\alpha$ (Vd: $\frac{\pi}{6}$ & $\frac{7\pi}{6}$,...)

1. Cung đối nhau:

$$\begin{aligned}
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\
\tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \\
\cot(-\alpha) &= -\cot\alpha
\end{aligned}$$

Đối cos

2. Cung bù nhau :

Bù sin

$$\begin{aligned}
\cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha \\
\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha \\
\tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha \\
\cot(\pi-\alpha) &= -\cot\alpha
\end{aligned}$$

3. Cung phụ nhau :

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \tan\alpha$$

Phụ chéo

4. Cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\tan\alpha$$

Hơn kém $\frac{\pi}{2}$
sin bằng cos
cos bằng trừ sin

5. Cung hơn kém π :

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

Hơn kém π
tang , cotang

VI. Công thức lượng giác:

1. Các hệ thức cơ bản:

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$\tan\alpha\,.\,\cot\alpha = 1$$

2. Công thức cộng :

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-\sin\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha.\cos\beta+\sin\beta.\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\sin\beta.\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$$

3. Công thức nhân đôi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

4 Công thức nhân ba:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos^3\alpha = \frac{\cos 3\alpha + 3\cos\alpha}{4}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$$

5. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \quad \tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

6.Công thức tính $\sin\alpha, \cos\alpha, tg\alpha$ theo $t = \tan\frac{\alpha}{2}$

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \tan\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng :

$$\cos\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha.\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

8. Công thức biến đổi tổng thành tích :

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\tan\alpha-\tan\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

9. Các công thức thường dùng khác:

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$$
$$\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})$$

$$\cos^4\alpha+\sin^4\alpha=\frac{3+\cos4\alpha}{4}$$
$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\frac{5+3\cos4\alpha}{8}$$

B. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Các bước giải một phương trình lượng giác

Bước 1: Tìm điều kiện (nếu có) của ẩn số để hai vế của pt có nghĩa
Bước 2: Sử dụng các phép **biến đổi tương đương** để biến đổi pt đến một pt **đã biết cách giải**
Bước 3: Giải pt và chọn nghiệm phù hợp (nếu có)
Bước 4: Kết luận

I. Định lý cơ bản: (Quan trọng)

$$\sin u=\sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v+k2\pi \\ u = \pi-v+k2\pi \end{array}\right.$$

$$\cos u=\cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v+k2\pi \\ u = -v+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$$

$$\tan u=\tan v \Leftrightarrow u = v+k\pi \qquad (u;v \neq \frac{\pi}{2}+k\pi)$$

$$\cot u=\cot v \Leftrightarrow u = v+k\pi \qquad (u;v \neq k\pi)$$

(u; v là các biểu thức chứa ẩn và $k \in Z$)

II. Các phương trình lượng giác cơ bản:

1. Dạng 1: **sinx = m ; cosx = m ; tanx = m ; cotx = m** ($\forall m \in R$)

*** Gpt : sinx = m (1)**

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(1) vô nghiệm
- Nếu $|m| \le 1$ thì ta đặt m = $\sin\alpha$ và ta có

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = (\pi - \alpha) + k2\pi \end{array}\right.$$

*** Gpt : cosx = m (2)**

- Nếu $|m| > 1$ thì pt(2) vô nghiệm
- Nếu $|m| \le 1$ thì ta đặt m = $\cos\beta$ và ta có

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta + k2\pi \\ x = -\beta + k2\pi \end{array}\right.$$

*** Gpt: tanx = m (3)** (pt luôn có nghiệm $\forall m \in R$)

- Đặt m = $\tan\gamma$ thì

$$(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan\gamma \Leftrightarrow x = \gamma + k\pi$$

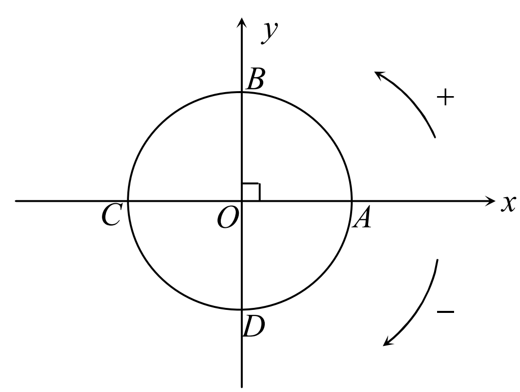
*** Gpt: cotx = m (4)** (pt luôn có nghiệm $\forall m \in R$)

- Đặt m = $\cot\delta$ thì

$$(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot\delta \Leftrightarrow x = \delta + k\pi$$

<u>Các trường hợp đặc biệt</u>:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sin x = -1 & \Leftrightarrow & x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin x = 0 & \Leftrightarrow & x = k\pi \\ \sin x = 1 & \Leftrightarrow & x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ \cos x = -1 & \Leftrightarrow & x = \pi + k2\pi \\ \cos x = 0 & \Leftrightarrow & x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \cos x = 1 & \Leftrightarrow & x = k2\pi \end{array}}$$



Bài tập rèn luyện

1) $\cos 10x + 2\cos^2 4x + 6\cos 3x.\cos x = \cos x + 8\cos x.\cos^3 3x$ $(x = k2\pi)$

1) $\cos 3x.\cos^3 x + \sin 3x.\sin^3 x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ $(x = \pm\dfrac{\pi}{8} + k\pi)$

2) $2\tan x + \cot x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{2}{\sin 2x}$ $(x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi)$

3) $3\dfrac{\tan x + \sin x}{\tan x - \sin x} = 4\cos^2\dfrac{x}{2}$ $(x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi)$

4) $\dfrac{\cos^3 2x}{\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{3} + \sin 4x$ $(x = \pm\dfrac{\pi}{12} + k\pi)$

5) $\dfrac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3\cos x + \sin x$ $(x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi)$

2. <u>Dạng 2</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l} a\sin^2 x + b\sin x + c = 0 \\ a\cos^2 x + b\cos x + c = 0 \\ a\tan^2 x + b\tan x + c = 0 \\ a\cot^2 x + b\cot x + c = 0 \end{array}} \qquad (a \neq 0)$$

<u>Cách giải</u>:

Đặt ẩn phụ : t = sinx (t = cosx; t = tanx; t = cotx)
Ta được phương trình : $at^2 + bt + c = 0$ (1)
Giải phương trình (1) tìm t, rồi suy ra x
<u>Chú ý</u> : Phải đặt điều kiện thích hợp cho ẩn phụ (nếu có)

Bài tập rèn luyện

1) $5\left(\dfrac{\sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} + \sin x\right) = \cos 2x + 3$ $(x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi)$

2 $4\cos^5 x\sin x - 4\sin^5 x\cos x = \sin^2 4x$ $(x = \dfrac{k\pi}{4}, x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2})$

3) $\dfrac{\cos 2x + 3\cot 2x + \sin 4x}{\cot 2x - \cos 2x} = 2$ $(x = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi, x = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi)$

4) $\dfrac{\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right)\cos x - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$ $(x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi)$

3. Dạng 3:

$$a\cos x + b\sin x = c \quad (1) \qquad (a;b \neq 0)$$

(Phương trình bậc nhất đối với cosx và sinx)

Cách giải:

- Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$ thì pt

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (2)$$

- Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha$ và $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$ với $\alpha \in [0;2\pi)$ thì :

$$(2) \Leftrightarrow \cos x.\cos\alpha + \sin x.\sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (3)$$

Pt (3) có dạng 1. Giải pt (3) tìm x.

Chú ý :

Pt $a\cos x + b\sin x = c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2 \geq c^2$

Bài tập rèn luyện

1) $3\sin 4x - \sqrt{3}\cos 12x = 1 + 4\sin^3 4x$ $\quad (x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{6}; x = \frac{7\pi}{72} + \frac{k\pi}{6})$

2) $3\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$ $\quad (x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = k2\pi)$

3) $4\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin 4x = 1$ $\quad (x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})$

4) $\frac{1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = 8\sin x$ $\quad (x = \frac{\pi}{6} + k\pi; x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2})$

5) $2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\left(\cos 2x - \cos x\right) + 1$ $\quad (x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k\pi)$

d. Dạng 4:

$$a\sin^2 x + b\sin x.\cos x + c\cos^2 x = 0 \quad (a;c \neq 0) \quad (1)$$

(Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với sin và cos)

Cách giải 1:

Áp dụng công thức hạ bậc : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ và $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

và công thức nhân đôi : $\sin x.\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ thay vào (1) ta sẽ biến đổi pt (1) về dạng 3

Cách giải 2: (Quy về pt theo tang hoặc cotang)

Chia hai vế của pt (1) cho $\cos^2 x$ ta được pt:

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

Đây là pt dạng 2 đã biết cách giải.

Chú ý: Trước khi chia phải kiểm tra xem $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ có phải là nghiệm của (1) không?

Ví dụ : Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x.\cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$$

Nói thêm:

Phương trình dạng đẳng cấp bậc ba: $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$ hoặc các đẳng cấp cao hơn sẽ thực hiện theo cách giải 2.

d. Dạng 5:

$$a(\cos x + \sin x) + b\sin x.\cos x + c = 0 \quad (1)$$

Cách giải :

- Đặt $t = \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x - \dfrac{\pi}{4})$ với $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

  Do $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + 2\sin x.\cos x \Rightarrow \text{sinx.cosx} = \dfrac{t^2-1}{2}$
- Thay vào (1) ta được phương trình :

  $$at + b\frac{t^2-1}{2} + c = 0 \quad (2)$$
- Giải (2) tìm t . Chọn t thỏa điều kiện rồi giải pt: $\sqrt{2}\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) = t$ tìm x.

Chú ý : Ta giải tương tự cho pt có dạng : $a(\cos x-\sin x)+b\sin x.\cos x+c=0$

4. Các phương pháp giải phương trình lượng giác thường sử dụng :

a. Phương pháp 1: Biến đổi pt đã cho về một trong các dạng pt lượng giác cơ bản đã biết

Ví dụ 1: (B-2012)

Giải phương trình $2(\cos x+\sqrt{3}\sin x)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$.

Ví du 2: Giải phương trình:

1) $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x-\dfrac{3}{2}=0$

2) $\sin 3x-\sqrt{3}\cos 3x=2\sin 2x$

3) $\tan x-\sqrt{3}=\dfrac{1}{\cos x}$

b. Phương pháp 2: Biến đổi pt đã cho về dạng tích số

Cơ sở của phương pháp là dựa vào các định lý sau đây:

$$A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=0\\B=0\end{array}\right. \quad \text{hoặc} \quad A.B.C=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}A=0\\B=0\\C=0\end{array}\right.$$

Ví du 1 : (A-2012)

Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$.

Ví du 2 : (D-2012)

Giải phương trình: $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$.

Ví du 3 : Giải các phương trình :

a. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$

b. $2\sin^3 x+\cos 2x-\cos x=0$

c. Phương pháp 3: Biến đổi pt về dạng có thể đặt ẩn số phụ

Một số dấu hiệu nhận biết :

- **Phương trình chứa cùng một một hàm số lượng giác (cùng cung khác lũy thừa)**

Ví dụ : Giải các phương trình :

a. $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$

b. $4\cos^3 x-\cos 2x-4\cos x+1=0$

- **Phương trình có chứa** $(\cos x\pm\sin x)$ và sinx.cosx

Ví dụ : Giải phương trình : $1+\sin^3 x+\cos^3 x=\dfrac{3}{2}\sin 2x$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Giải các phương trình lượng giác sau

1) $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)$

2) $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$

3) $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x\cos x$

Bài 2: Giải các phương trình lượng giác sau

1) $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$

2) $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

3) $\left(\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$

Bài 3: Giải các phương trình lượng giác sau

1) $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$

2) $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4$

3) $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$

Bài 4: Giải các phương trình lượng giác sau

1) $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$

2) $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$

3) $\cos^4 x+\sin^4 x+\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{3}{2}=0$

Bài 5: Giải các phương trình lượng giác sau

1) $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\sin 2x$

2) $5\sin x-2=3(1-\sin x)\tan^2 x$

3) $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x$

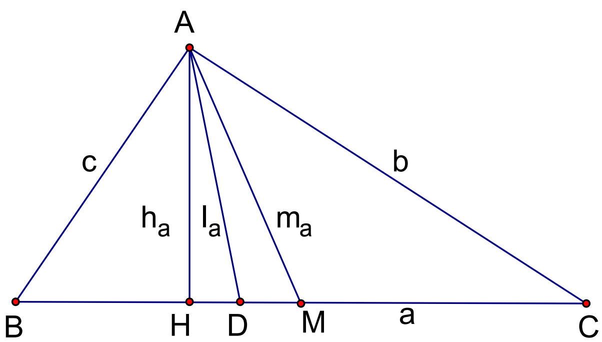
-----------------------------------Hết----------------------------------

Chuyên đề 7: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Các ký hiệu:

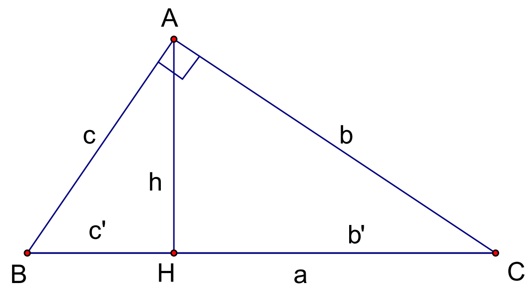
- A, B, C: là các góc đỉnh A, B, C
- a, b, c : là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C
- h_a, h_b, h_c : là độ dài các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C
- m_a, m_b, m_c : là độ dài các đường trung tuyến kẻ từ A, B, C
- l_a, l_b, l_c : là độ dài các đường phân giác trong kẻ từ A, B, C
- R : là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- r : là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC
- $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$: là nữa chu vi tam giác ABC
- S : là diện tích tam giác ABC



II. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông :

Trong tam giác vuông ABC . Gọi b', c' là độ dài các hình chiếu các cạnh góc vuông lên cạnh huyền ta có các hệ thức:

1. $b^2 = a.b'$ & $c^2 = a.c'$
2. $a^2 = b^2 + c^2$
3. $h^2 = b'.c'$
4. $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$
5. $a.h = b.c$
6. $\begin{cases} b = a.\sin B = a.\cos C \\ c = a.\sin C = a.\cos B \end{cases}$
7. $\begin{cases} b = c.tgB = c.\cot gC \\ c = b.tgC = b.\cot gB \end{cases}$

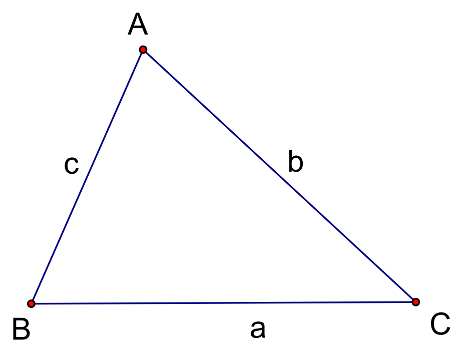


II. Các hệ thức lượng trong tam giác thường

1. Định lý hàm số CÔSIN:

Trong tam giác ABC ta luôn có :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



Ghi nhớ: Trong một tam giác, bình phương mỗi cạnh bằng tổng bình phương hai cạnh kia trừ đi hai lần tích hai cạnh ấy với côsin của góc xen giữa chúng.

Hệ quả: Trong tam giác ABC ta luôn có :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad , \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

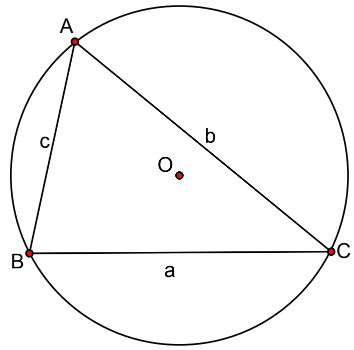
2. Định lý hàm số SIN:

Trong tam giác ABC ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Hệ quả: Với mọi tam giác ABC, ta có:

$$a = 2R\sin A, \qquad b = 2R\sin B, \qquad c = 2R\sin C$$

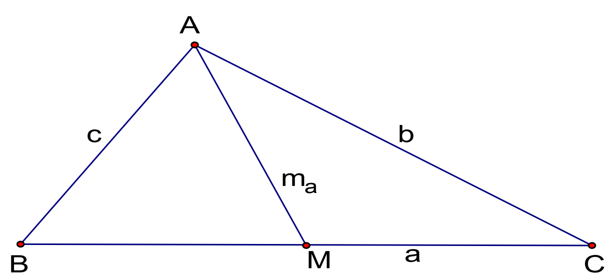


Ghi nhớ:
Trong một tam giác, tỷ số giữa một cạnh của tam giác và sin của góc đối diện với cạnh đó bằng đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

3. Định lý về đường trung tuyến:

Trong tam giác ABC ta có :

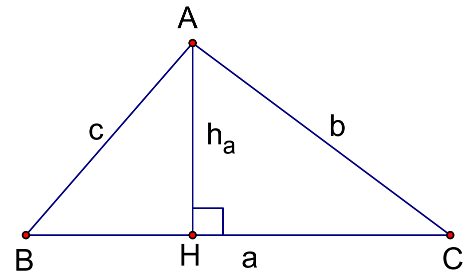
$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$
$$m_c^2 = \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$



4. Định lý về diện tích tam giác:

Diện tích tam giác ABC được tính theo các công thức sau:

1. $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
2. $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$
3. $S = \frac{abc}{4R}$
4. $S = pr$
5. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



5. Định lý về đường phân giác:

$$l_a = \frac{2bc.\cos\frac{A}{2}}{b+c}; l_b = \frac{2ac.\cos\frac{B}{2}}{a+c}; l_c = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

Để chứng minh đẳng thức lượng giác A=B ta có thể thực hiện theo một trong các phương pháp sau

Phương pháp 1: Biến đổi vế này thành vế kia

Phương pháp 2: Xuất phát từ một một hệ thức đúng đã biết để suy ra đẳng thức cần chứng minh

VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}$

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C = \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C$ (ΔABC không vuông)

b) $\text{tg}\frac{A}{2}.\text{tg}\frac{B}{2} + \text{tg}\frac{B}{2}.\text{tg}\frac{C}{2} + \text{tg}\frac{C}{2}.\text{tg}\frac{A}{2} = 1$

Dạng 2: **CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC**

I. Bất đẳng thức trong tam giác :

Nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì :

- $a > 0, b > 0, c > 0$
- $|b-c| < a < b+c$
- $|c-a| < b < c+a$
- $|a-b| < c < a+b$
- $a > b > c \Leftrightarrow A > B > C$

II. Các bất đẳng thức cơ bản :

1. Bất đẳng thức Cauchy:

Cho **hai số không âm a; b** ta có :

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi a=b

<u>Tổng quát</u> :

Cho **n số không âm $a_1,a_2,...a_n$** ta có :

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}}$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 =...= a_n$

2 . <u>Bất đẳng thức Bunhiacốpski :</u>

Cho **bốn số thực a,b,x,y** ta có :

$$\boxed{(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)}$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi ay = bx

<u>Tổng quát</u> :

Cho hai bộ số $(a_1,a_2,...a_n)$ và $(b_1,b_2,...,b_n)$ ta có :

$$\boxed{(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2 \leq (a_1{}^2+a_2{}^2+...+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+...+b_n{}^2)}$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$ với quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử cũng bằng

3) <u>Bất đẳng thức cơ bản</u>:

a) Cho hai số dương x, y ta luôn có: $\boxed{\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})}$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi x = y

b) Với mọi số thực x, y ta luôn có: $\boxed{x^2+y^2 \geq 2xy}$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi x = y

III. <u>Bất đẳng thức JENSEN</u> :

1) Nếu hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp hai f"(x) < 0 $\forall x \in (a;b)$ (f là hàm lồi) thì

Với mọi $x_1, x_2,..., x_n \in (a;b)$ ta có:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \leq f(\frac{x_1+x_2+...x_n}{n}) \qquad (n \geq 2)$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

2) Nếu hàm số y=f(x) có đạo hàm cấp hai f"(x) > 0 $\forall x \in (a;b)$ (f là hàm lõm) thì

Với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)$ ta có:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)}{n} \ge f\left(\frac{x_1+x_2+...x_n}{n}\right) \qquad (n \ge 2)$$

Dấu "=" xãy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$

Để chứng minh đẳng thức lượng giác A < B (>, ≤, ≥) ta có thể thực hiện theo một trong các phương pháp sau:

Phương pháp 1: Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh đến đến một bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Phương pháp 2: Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản đã biết (Cô si, BCS,...) để suy ra bất đẳng thức cần chứng minh

VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin A+\sin B+\sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}+tg\frac{C}{2} \ge \sqrt{3}$

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) $\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$

b) $tgA+tgB+tgC \ge 3\sqrt{3}$

c) $tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2} \le \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Dạng 3: **NHẬN DẠNG TAM GIÁC**

KIỂU ĐỀ TOÁN 1:

$$\left[\begin{array}{c}\text{Cho tam giác ABC thỏa mãn}\\ \text{"Điều kiện cho trước"}\end{array}\right] \underset{\text{THÌ}}{\Rightarrow} \left[\Delta ABC\begin{cases}\text{là tam giác vuông}\\ \text{là tam giác vuông cân}\\ \text{là tam giác cân}\\ \text{là tam giác đều}\\ \text{là tam giác có góc đặc biệt....}\end{cases}\right]$$

KIỂU ĐỀ TOÁN 2:

$$\begin{bmatrix}\text{Cho tam giác ABC thỏa mãn}\\ \text{"Điều kiện cho trước"}\end{bmatrix} \underset{\text{CẦN VÀ ĐỦ}}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix}\Delta ABC\begin{cases}\text{là tam giác vuông}\\ \text{là tam giác vuông cân}\\ \text{là tam giác cân}\\ \text{là tam giác đều}\\ \text{là tam giác có góc đặc biệt....}\end{cases}\end{bmatrix}$$

"Điều kiện cho trước" có thể là:

- Đẳng thức lượng giác về góc
- Đẳng thức lượng giác + độ dài (cạnh, trung tuyến, phân giác,...)
- Đẳng thức độ dài
- Hệ đẳng thức

1) Nhận dạng tam giác vuông

Phương pháp: Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi "Điều kiện cho trước" đến một đẳng thức mà từ đó ta dể dàng kết luận được tính chất của tam giác

2) Nhận dạng tam giác cân

Phương pháp: Sử dụng các phép biến đổi tương đương hoặc hệ quả để biến đổi "Điều kiện cho trước" đến một đẳng thức mà từ đó ta dể dàng kết luận được tính chất của tam giác

3) Nhận dạng tam giác đều

Ngoài phương pháp đã nêu trên ta có thể giải quyết bài toán theo cách sau

Phương pháp sử dụng bất đẳng thức: Gồm 2 bước (áp dụng khi "Điều kiện cho trước" có dạng đẳng thức A = B

Bước 1: CM bất đẳng thức $A \ge B$ hoặc $A \le B$ (1)

Bước 2: Lập luận để đẳng thức ở (1) xãy ra mà khi đẳng thức (1) xảy ra thì tam giác ABC đều

VÍ DỤ MINH HỌA:

Ví dụ 1: Tam giác ABC có $\dfrac{\sin A + \cos B}{\sin B + \cos A} = tgA$. Chứng minh rằng Δ ABC vuông

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu ΔABC thỏa mãn điều kiện $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = 0$ thì tam giác đó là tam giác vuông

Ví dụ 3: Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác cân

1) $\mathrm{tgA} + \mathrm{tgB} = 2.\cot g\dfrac{C}{2}$ 2) $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \cot g\dfrac{A}{2}.\cot g\dfrac{C}{2}$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng nếu tam giác ABC thoả mãn một trong các điều kiện sau là tam giác đều

1) $\cos A.\cos B.\cos C = \dfrac{1}{8}$

2) $\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A} + \dfrac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B} + \dfrac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C} = \sqrt{3}$

3) $\cos A + \cos B + \cos C = \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}$

4) $\dfrac{1}{\cos A} + \dfrac{1}{\cos B} + \dfrac{1}{\cos C} = \dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\frac{C}{2}}$

Ví dụ 5: Xác định dạng của tam giác ABC biết:

1) $a + b = \mathrm{tg}\dfrac{C}{2}(a.\mathrm{tgA} + b.\mathrm{tgB})$

2) $\dfrac{b}{\cos B} + \dfrac{c}{\cos C} = \dfrac{a}{\sin B.\sin C}$

3) $\cos B + \cos C = \dfrac{b+c}{a}$

4) $\dfrac{a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C}{a+b+c} = \dfrac{1}{2}$

Ví dụ 6: Hãy tính các góc của tam giác ABC nếu trong tam giác đó ta có :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{9}{4} + 3\cos C + \cos^2 C$$

Ví dụ 7: Tính các góc của tam giác ABC biết rằng

$$\begin{cases} 4p(p-a) \le bc \\ \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{8} \end{cases}$$

trong đó BC = a, AB = c, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

--------------------------------Hết---------------------------

Chuyên đề 8: HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LÔGARÍT

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ CHỨA MŨ VÀ LOGARÍT

TRỌNG TÂM KIẾN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ MŨ

1. Các định nghĩa:

- $a^n = \underbrace{a.a...a}_{\text{n thừa số}} \quad (n \in Z^+, n \ge 1, a \in R)$
- $a^1 = a \quad \forall a$
- $a^0 = 1 \quad \forall a \ne 0$
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \quad (n \in Z^+, n \ge 1, a \in R/\{0\})$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0; m, n \in N)$
- $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

2. Các tính chất :

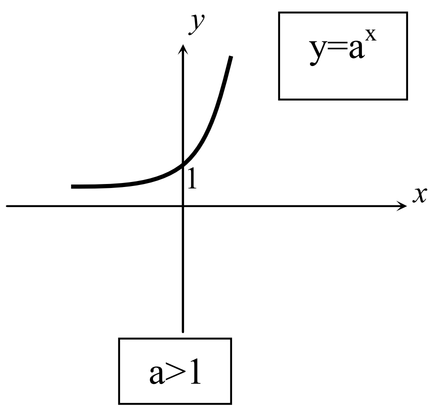
- $a^m.a^n = a^{m+n}$
- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$
- $(a.b)^n = a^n.b^n$
- $(\dfrac{a}{b})^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

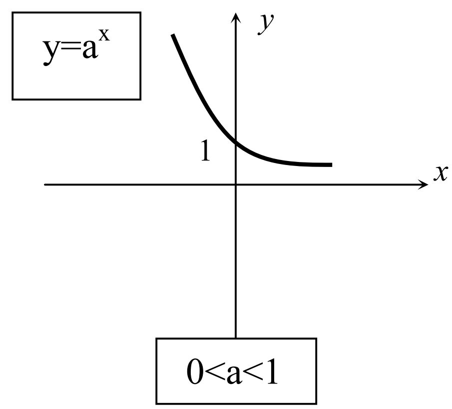
3. <u>Hàm số mũ</u>: Dạng : $\mathbf{y = a^x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$)

- Tập xác định : $\mathbf{D = R}$
- Tập giá trị : $\mathbf{T = R^+}$ ($\mathbf{a^x > 0}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}$)
- Tính đơn điệu:

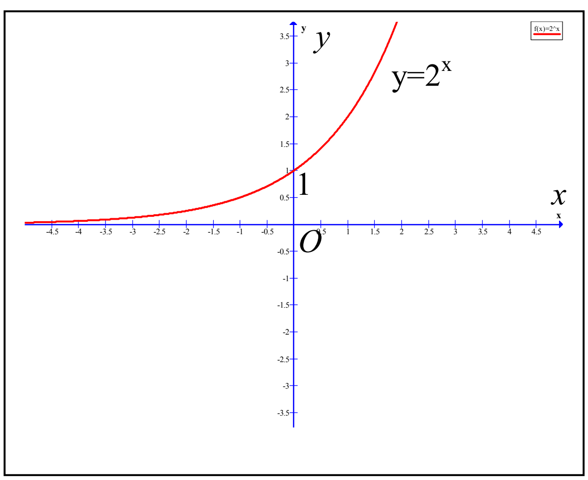
  * $a > 1$: $\mathbf{y = a^x}$ đồng biến trên R

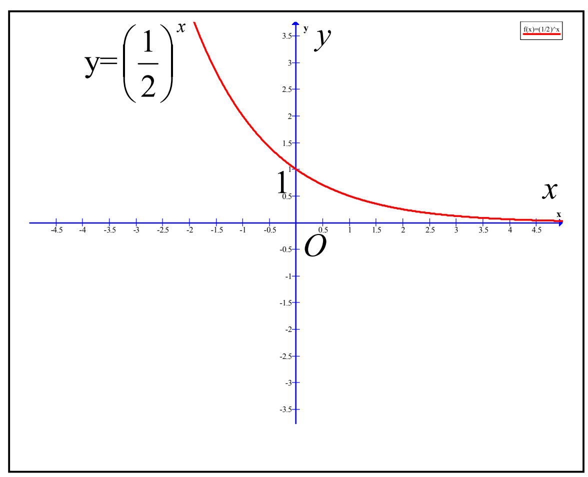
  * $0 < a < 1$: $\mathbf{y = a^x}$ nghịch biến trên R
- Đồ thị hàm số mũ :





<u>Minh họa</u>:





- Đạo hàm của hàm số mũ:

  $\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$

  $\left(e^u\right)' = e^u.u'$ (với u là một hàm số) $\left(a^u\right)' = a^u.\ \ln a\ .\ u'$ (với u là một hàm số)

II. KIẾN THỨC CƠ BẢN VỀ HÀM SỐ LÔGARÍT

1. Định nghĩa: Với a > 0 , a ≠ 1 và N > 0

$$\log_a N = M \overset{dn}{\Leftrightarrow} a^M = N$$

Điều kiện có nghĩa: $\log_a N$ có nghĩa khi $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ N > 0 \end{cases}$

2. Các tính chất :

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^M = M$
- $a^{\log_a N} = N$
- $\log_a (N_1.N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$
- $\log_a \left(\dfrac{N_1}{N_2}\right) = \log_a N_1 - \log_a N_2$
- $\log_a N^\alpha = \alpha.\log_a N$ Đặc biệt : $\log_a N^2 = 2.\log_a |N|$

3. Công thức đổi cơ số :

- $\log_a N = \log_a b.\log_b N$
- $\log_b N = \dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

* **Hệ quả**:

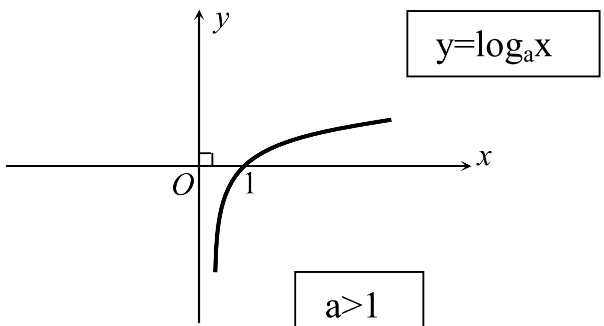
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ và $\log_{a^k} N = \dfrac{1}{k}\log_a N$

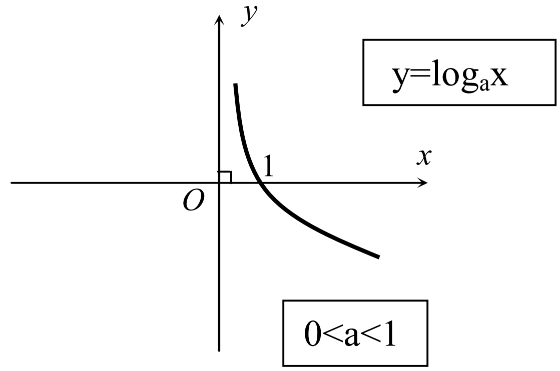
4. Hàm số logarít: Dạng $\mathbf{y = \log_a x}$ $(a > 0, a \neq 1)$

- Tập xác định : $D = R^+$
- Tập giá trị $T = R$
- Tính đơn điệu:

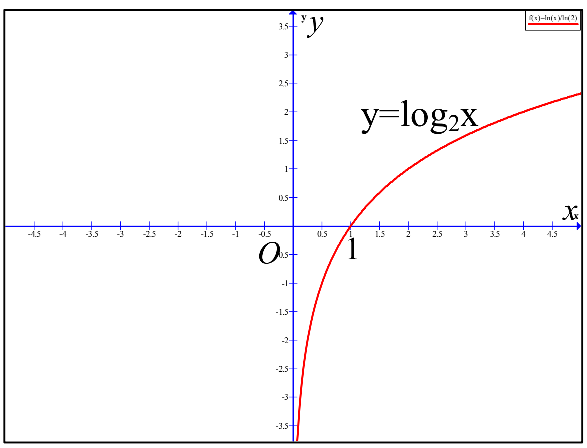
  * $a > 1$: $\mathbf{y = \log_a x}$ đồng biến trên R^+

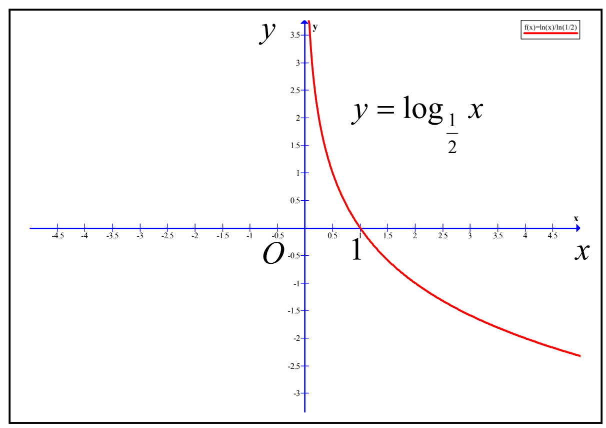
  * $0 < a < 1$: $\mathbf{y = \log_a x}$ nghịch biến trên R^+
- Đồ thị của hàm số lôgarít:





Minh họa:





- Đạo hàm của hàm số lôgarit:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{và} \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad \text{và} \quad (\ln|u|)' = \frac{u'}{u} \quad \text{(với u là một hàm số)}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \quad \text{và} \quad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a} \quad \text{và} \quad (\log_a|u|)' = \frac{u'}{u.\ln a} \quad \text{(với u là một hàm số)}$$

5. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN:

1. Định lý 1: Với $0 < a \neq 1$ thì : $a^M = a^N \Leftrightarrow M = N$

2. Định lý 2: Với $0 < a < 1$ thì : $a^M < a^N \Leftrightarrow M > N$ (nghịch biến)

3. Định lý 3: Với $a > 1$ thì : $a^M < a^N \Leftrightarrow M < N$ (đồng biến)

4. Định lý 4: Với $0 < a \neq 1$ và $M > 0; N > 0$ thì : $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$

5. Định lý 5: Với $0 < a < 1$ thì : $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M > N$ (nghịch biến)

6. Định lý 6: Với $a > 1$ thì : $\log_a M < \log_a N \Leftrightarrow M < N$ (đồng biến)

III. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ THƯỜNG SỬ DỤNG:

Dạng cơ bản: $a^x = m$ (1)

- $m \leq 0$: phương trình (1) vô nghiệm
- $m > 0$: $a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$

1. Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng : $a^M = a^N$ (Phương pháp đưa về cùng cơ số)

Ví du 1 : Giải các phương trình sau :

1) $\mathbf{9^{x+1} = 27^{2x+1}}$

2) $2^{x^2-3x+2} = 4$

3) $3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^{x+1} - \frac{1}{2}.9^{x+1}$

Ví du 2 : Giải các phương trình sau

1) $\mathbf{16^{\frac{x+10}{x-10}} = 0,125.8^{\frac{x+5}{x-15}}}$

2) $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}}$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\mathbf{3^{2x+8} - 4.3^{x+5} + 27 = 0}$

2) $\mathbf{6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0}$

3) $5.2^x = 7.\sqrt{10^x} - 2.5^x$

4) $\mathbf{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4}$

5) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$

6) $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

7) $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$

8) $2.2^{2x} - 9.14^x + 7.7^{2x} = 0$

9) $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}-6=0$

10) $4^{3+2\cos x}-7.4^{1+\cos x}-2=0$

Bài tập rèn luyện:

1) $(2+\sqrt{3})^x+(2-\sqrt{3})^x=4$ $(x\pm 1)$

2) $8^x+18^x=2.27^x$ (x=0)

3) $125^x+50^x=2^{3x+1}$ (x=0)

4) $25^x+10^x=2^{2x+1}$ (x=0)

5) $(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x=6$ $(x=\pm 2)$

6) $27^x+12^x=2.8^x$ (x=0)

3 Phương pháp 3: Biến đổi phương trình về dạng tích số A.B=0,..

Ví dụ : Giải phương trình sau :

1) $8.3^x+3.2^x=24+6^x$

2) $2^{x^2+x}-4.2^{x^2-x}-2^{2x}+4=0$

3) $5^{2x+1}+7^{x+1}-175^x-35=0$

4) $x^2.2^{x-1}+2^{|x-3|+6}=x^2.2^{|x-3|+4}+2^{x+1}$

5) $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$

4. Phương pháp 4: Lấy lôgarít hai vế theo cùng một cơ số thích hợp nào đó
(Phương pháp lôgarít hóa)

Ví dụ : Giải phương trình

1) $3^{x-1}.2^{x^2}=8.4^{x-2}$

2) $5^x.8^{\frac{x-1}{x}}=500$

5. Phương pháp 5: Nhẩm nghiệm và sử dụng tính đơn điệu để chứng minh nghiệm duy nhất (thường là sử dụng công cụ đạo hàm)

* Ta thường sử dụng các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khỏang (a;b) thì phương trình f(x) = C có không quá một nghiệm trong khỏang (a;b). (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0)=C$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = C)
- **Tính chất 2 :** Nếu hàm f tăng trong khỏang (a;b) và hàm g là hàm một hàm giảm trong khỏang (a;b) thì phương trình f(x) = g(x) có nhiều nhất một nghiệm trong khỏang (a;b) . (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = g(x))

Phương pháp chiều biến thiên hàm số

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $3^x+4^x=5^x$

2) $2^x=1+3^{\frac{x}{2}}$

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2x+1$

4) $2^{\sqrt{3-x}}=-x^2+8x-14$

5) $3.25^{x-2}+(3x-10).5^{x-2}+3-x=0$

Bài tập rèn luyện:

1) $2.2^x+3.3^x=6^x-1$ (x=2) 2) $2^x=3-x$ (x=1)

IV. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT THƯỜNG SỬ DỤNG:

Dạng cơ bản: $\log_a x = m$ (1)

- $\forall m \in \mathbb{R}: \log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m$

1. Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng : $\log_a M = \log_a N$ (đồng cơ số)

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\log_2 \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x - 1)$

2) $\log_2[x(x-1)] = 1$

3) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\mathbf{\log_x(x+6) = 3}$

2) $\mathbf{\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)}$

3) $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2 + \log_{\frac{1}{2}}(x+4) = \log_2(3-x)$ ($x = -\sqrt{11}; x = -1 + \sqrt{14}$)

4) $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$ $\left(x = 3;\ x = -3 + 2\sqrt{3}\right)$

5) $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$ $\left(x = 2;\ x = 1 - \sqrt{33}\right)$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về phương trình đại số.

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\frac{6}{\log_2 2x} + \frac{4}{\log_2 x^2} = 3$

2) $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$

3) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$

4) $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$

5) $\log_x(125x).\log_{25}^2 x = 1$

6) $\log_x 2.\log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$

7) $\log_{5x}\frac{5}{x} + \log_5^2 x = 1$

8) $(x-2)^{\log_3 9(x-2)} = 9(x-2)^3$

3 Phương pháp 3: Biến đổi phương trình về dạng tích số A.B=0,..

Ví dụ : Giải phương trình sau : $\mathbf{\log_2 x + 2.\log_7 x = 2 + \log_2 x.\log_7 x}$

4. Phương pháp 4: Nhẩm nghiệm và sử dụng tính đơn điệu để chứng minh nghiệm duy nhất. (thường là sử dụng công cụ đạo hàm)

* Ta thường sử dụng các tính chất sau:

- **Tính chất 1:** Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khỏang (a;b) thì phương trình f(x) = C có không quá một nghiệm trong khỏang (a;b). (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = C$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = C)
- **Tính chất 2 :** Nếu hàm f tăng trong khỏang (a;b) và hàm g là hàm một hàm giảm trong khỏang (a;b) thì phương trình f(x) = g(x) có nhiều nhất một nghiệm trong khỏang (a;b) . (do đó nếu tồn tại $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = g(x))

Phương pháp chiều biến thiên hàm số

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\mathbf{\log_2(x^2-x-6)+x=\log_2(x+2)+4}$
2) $\log_2\left(x+3^{\log_6 x}\right)=\log_6 x$
3) $\log_2\left(1+\sqrt{x}\right)=\log_3 x$

V. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ THƯỜNG SỬ DỤNG:

1. Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng cơ bản : $a^M < a^N$ $(\le, >, \ge)$

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

1) $2^{3-6x} > 1$
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4x-11} > 2^{x^2+6x+8}$

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

1) $\mathbf{3^{\sqrt{x^2-2x}} \ge (\frac{1}{3})^{x-|x-1|}}$
2) $\mathbf{\frac{1}{2^{\sqrt{x^2-2x}}} \ge 2^{x-1}}$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về bất phương trình đại số.

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

1) $9^x < 2.3^x + 3$
2) $5^{2x+1} > 5^x + 4$

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\mathbf{2^{2x}-3.(2^{x+2})+32<0}$
2) $\mathbf{2^x+2^{3-x}\le 9}$
3) $3^{2x+4}+45.6^x-9.2^{2x+2}\le 0$
4) $\mathbf{(\frac{1}{3})^{\frac{2}{x}}+3.(\frac{1}{3})^{\frac{1}{x}+1}>12}$
5) $\sqrt{8+2^{1+x}-4^x}+2^{1+x}>5 \quad (0<x\le 2)$
6) $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\ge\left|2^x-1\right|+2^{x+1} \quad (x\le 2)$

VI. CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT THƯỜNG SỬ DỤNG:

1. Phương pháp 1: Biến đổi phương trình về dạng cơ bản : $\log_a M < \log_a N \ (\le, >, \ge)$

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

1) $\log_2(x^2+x-2) > \log_2(x+3)$
2) $\log_{0,5}(4x+11) < \log_{0,5}(x^2+6x+8)$
3) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-6x+5)+2\log_3(2-x) \ge 0$
4) $\log_{\frac{1}{2}} x+2\log_{\frac{1}{4}}\left(x-1\right)+\log_2 6 \le 0$
5) $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \dfrac{x+1}{x-1} \ge 0$

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau :

1) $\mathbf{\log_x(5x^2-8x+3) > 2}$
2) $\mathbf{\log_{\frac{2}{3}} \log_3 |x-3| < 1}$
3) $\mathbf{\log_{3x-x^2}(3-x) > 1}$
4) $\mathbf{\log_x(\log_9(3^x-9)) \le 1}$
5) $\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right) \le 1$
6) $\log_5(4^x+144)-4\log_5 2 < 1+\log_5(2^{x-2}+1)$
7) $\log_{\frac{1}{4}}\left(4^x+4\right) \ge \log_{\frac{1}{2}}\left(2^{2x+1}-3.2^x\right)$

2. Phương pháp 2: Đặt ẩn phụ chuyển về bất phương trình đại số

Ví dụ : Giải bất phương trình sau :

1) $\log_2^2 x+\log_2 x-2 \le 0$
2) $x^{\log_2 x+4} < 32$
3) $6^{\log_6^2 x}+x^{\log_6 x} \le 12$
4) $\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} x}+\log_4 x^2-2 > 0$

Ví dụ : Giải các phương trình sau :

1) $\mathbf{\log_2(3^x+2)+2.\log_{3^x+2} 2-3 > 0}$
2) $\mathbf{\log_{2x} 64+\log_{x^2} 16 \ge 3}$
3) $\dfrac{(\log_2 x)^2+3}{\log_2 x+3} > 2 \qquad (\dfrac{1}{8} < x < \dfrac{1}{2})$

VII. HỆ PHƯƠNG TRÌNH:

Ví dụ : Giải các hệ phương trình

1) $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{2-y}=1 \\ 3\log_9(9x^2)-\log_3 y^3=3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\dfrac{1}{y}=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2^{3x}=5y^2-4y \\ \dfrac{4^x+2^{x+1}}{2^x+2}=y \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2^x.4^y=64 \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=5 \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (\sqrt{3})^{x-y}=(\frac{1}{3})^{x-2y} \\ \log_2(x-y)+\log_2(x-y)=4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (\sqrt{x+1}-1)3^y=\dfrac{3\sqrt{4-x}}{x} \\ y+\log_3 x=1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3^{-x}.2^y=1152 \\ \log_{\sqrt{5}}(x+y)=2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x-4|y|+3=0 \\ \sqrt{\log_4 x}-\sqrt{\log_2 y}=0 \end{cases}$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

DẠNG 1: Các bài toán giải phương trình và bất phương trình

Bài 1: Giải các phương trình

1) $2^{3x} - 6.2^{x} - \dfrac{1}{2^{3(x-1)}} + \dfrac{12}{2^{x}} = 1$ (x=1)

2) $\log_4(x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x} + \log_8(4+x^3)$ ($x = 2; x = 2 - 2\sqrt{6}$)

3) $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2)$ (x=49)

4) $\log_5 x = \log_7(x+2)$ (x=5)

5) $5.2^{3|x-1|} - 3.2^{5-3x} + 7 = 0$ (x=1)

6) $\log_{\sqrt{2x-1}}|2x-3| = 2\log_8 4 + \log_2 \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ($x = \dfrac{5}{2}$)

7) $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x - 3} = \dfrac{1}{x}$ (x=1,x=2,x=4)

8) $2x^{\log_2 x} + 2x^{-3\log_8 x} - 5 = 0$ ($x = \dfrac{1}{2}, x = 2$)

9) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$ ($x = \dfrac{1}{4}, x = 2$)

10) $1 + 2\log_x 2.\log_4(10-x) = \dfrac{2}{\log_4 x}$ (x=2,x=8)

Bài 2: Giải các bất phương trình

1) $3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9^{\sqrt{x+4}} > 0$ (x>5)

2) $9^{\sqrt{x^2-2x}-x} - 7.3^{\sqrt{x^2-2x}-x-1} \le 2$ ($-\dfrac{1}{4} \le x \le 0 \vee x \ge 2$)

3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6-2x^3+1}} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$ ($x < -1 \vee 0 < x < 1 \vee x > 1$)

4) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{3x} - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{x-1} - 128 \ge 0$ ($x \le -\dfrac{4}{3}$)

5) $\log_5(1-2x) < 1 + \log_{\sqrt{5}}(x+1)$ ($-\dfrac{2}{5} < x < \dfrac{1}{2}$)

6) $\sqrt{2 - |\log_2 x|} > \log_2 x$ ($\dfrac{1}{4} \le x < 2$)

7) $\log_x \log_9(3^x - 9) < 1$ ($x > \log_3 10$)

8) $\dfrac{1}{\log_4(x^2+3x)} < \dfrac{1}{\log_2(3x-1)}$ ($\dfrac{2}{3} < x < 1$)

9) $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x+3)^2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)^3}{x+1} > 0$ (-2 < x <-1)

Bài 3 : Tìm tập xác định của các hàm số sau:

1. $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3-2x-x^2}{x+2}}$ 2. $y=2^{\sqrt{|x-3|-|8-x|}}+\sqrt{\dfrac{-\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{x^2-2x-8}}}$

DẠNG 2: Sử dụng công cụ đại số giải các bài toán có chứa tham số

Bài 1: Với giá trị nào của m thì phương trình sau có nghiệm: $4^x-4m.(2^x-1)=0$ ($m<0\vee m\geq 1$)

Bài 2: Cho phương trình: $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$

Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1\neq x_2$ sao cho $x_1+x_2=3$ (m=4)

Bài 3: Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm trái dấu: $(m+3).16^x+(2m-1)4^x+m+1=0$

($-1<m<-\dfrac{3}{4}$)

BÀI TẬP RÈN LUYỆN (GIẢI MẪU)

Bài 1: Giải phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ 7-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-1 \\ x<7 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<7$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-1\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}(7-x)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=\frac{1}{2}(7-x)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-1=49-14x+x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+14x-50=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-17 \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $x=3$

Bài 2: Giải phương trình: $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2\neq 0 \\ 4-x>0 \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x<4 \\ x>-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6<x<4 \\ x\neq -2 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow 3\log_{\frac{1}{4}}|x+2|-3=3\log_{\frac{1}{4}}(4-x)+3\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}|x+2|-1=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(4|x+2|)=\log_{\frac{1}{4}}[(4-x)(x+6)]$$

$$\Leftrightarrow 4|x+2|=(4-x)(x+6)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x+2)=(4-x)(x+6) \\ 4(x+2)=-(4-x)(x+6) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x-16=0 \\ x^2-2x-32=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \vee x=-8 \\ x=1\pm\sqrt{33} \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $x=2 \vee x=1-\sqrt{33}$

Bài 3: Giải phương trình: $\log_2(x+2)+\log_4(x-5)^2+\log_{\frac{1}{2}}8=0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 5 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(x+2)+\log_2|x-5|=\log_2 8$$
$$\Leftrightarrow \log_2\left[(x+2)|x-5|\right]=\log_2 8$$
$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5|=8$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>5 \\ (x+2)(x-5)=8 \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x<5 \\ (x+2)(5-x)=8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>5 \\ x^2-3x-18=0 \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x<5 \\ x^2-3x-2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>5 \\ x=-3 \vee x=6 \end{cases} \\ \begin{cases} -2<x<5 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình (1) là $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Bài 4: Giải phương trình: $\log_2|x-2|+\log_2|x+5|+\log_{\frac{1}{2}}8=0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ x+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq -5 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_2\left|(x-2)(x+5)\right|=\log_2 8$$
$$\Leftrightarrow \left|(x-2)(x+5)\right|=8$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)(x+5)=8 \\ (x-2)(x+5)=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+3x-18=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \vee x=6 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $\left[\begin{array}{l} x=-3 \vee x=6 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Bài 5: Giải phương trình: $\log_4(x-1)+\dfrac{1}{\log_{2x+1}4}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x+2}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ 2x+1>0 \\ 2x+1\neq 1 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x\neq 0 \\ x>-2 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(2x+1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[(x-1)(2x+1)\right]=\log_2\left[2(x+2)\right]$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1)=2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-3x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta có nghiệm của pt(1) là $x=\dfrac{5}{2}$

Bài 6: Giải phương trình: $4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x>0$

Khi đó: $4^{\log_2 2x}-x^{\log_2 6}=2.3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 4^{1+\log_2 x}-x^{\log_2 6}=2.3^{2(1+\log_2 x)}$

Đặt $t=\log_2 x \Rightarrow x=2^t$, phương trình (2) trở thành:

$$4^{1+t}-\left(2^t\right)^{\log_2 6}=2.3^{2(1+t)}\Leftrightarrow 4.4^t-\left(2^{\log_2 6}\right)^t=18.9^t$$

$$\Leftrightarrow 4.4^t-6^t=18.9^t\Leftrightarrow 4-\left(\frac{3}{2}\right)^t=18\left[\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 18\left[\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]^2+\left(\frac{3}{2}\right)^t-4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{4}{9}\\ \left(\frac{3}{2}\right)^t=-\frac{1}{2}\quad (\text{loai})\end{array}\right.\Leftrightarrow t=-2$$

Với $t=-2$ ta được nghiệm của phương trình (1) là : $x=\frac{1}{4}$

Bài 7: Giải phương trình: $(2-\log_3 x).\log_{9x}3-\frac{4}{1-\log_3 x}=1\qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ 9x\neq 1\\ \log_3 x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\neq\frac{1}{9}\\ x\neq 3\end{cases}$

Khi đó:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{2-\log_3 x}{\log_3(9x)}-\frac{4}{1-\log_3 x}=1\Leftrightarrow\frac{2-\log_3 x}{2+\log_3 x}-\frac{4}{1-\log_3 x}=1\quad (2)$$

Đặt $t=\log_3 x\quad (t\neq -2; t\neq 1)$, phương trình (2) trở thành:

$$\frac{2-t}{2+t}-\frac{4}{1-t}=1\Leftrightarrow t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=4\end{array}\right.$$

- Với $t=-1$ ta được pt : $\log_3 x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$
- Với $t=4$ ta được pt : $\log_3 x=4\Leftrightarrow x=81$

So với điều kiện ta được nghiệm của pt(1) là $x=\frac{1}{3};\quad x=81$

Bài 8: Giải phương trình: $\log_3(3^x-1).\log_3(3^{x+1}-3)=6\quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $3^x-1>0\Leftrightarrow 3^x>1\Leftrightarrow x>0$

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\log_3(3^x-1).\left[1+\log_3(3^x-1)\right]=6$

Đặt: $t = \log_3(3^x - 1)$, pt trở thành: $t(t+1) = 6 \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right.$

- Với $t = -3$: $\log_3(3^x - 1) = -3 \Leftrightarrow 3^x - 1 = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^x = \frac{28}{27} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{28}{27}$
- Với $t = 2$: $\log_3(3^x - 1) = 2 \Leftrightarrow 3^x - 1 = 9 \Leftrightarrow 3^x = 10 \Leftrightarrow x = \log_3 10$

Các nghiệm tìm được thỏa điều kiện.

Vậy pt(1) có hai nghiệm là $x = \log_3 \frac{28}{27}$; $x = \log_3 10$

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{\log_x \sqrt{7x}}.\log_7 x = 1 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\log_x(7x)}.\log_7 x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\log_7 x}\right)}.\log_7 x = 1$

Đặt $t = \log_7 x$, pt trở thành: $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right)}.t = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right).t^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0 \\ t^2 + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1$

- Với $t = 1$: $\log_7 x = 1 \Leftrightarrow x = 7$ (thỏa điều kiện)

Vậy pt(1) có nghiệm là $x = 7$

Bài 10: Giải phương trình: $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \neq 1 \\ x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \\ x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{2x-1}\left[(2x-1)(x+1)\right] + 2\log_{x+1}(2x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_{2x-1}(x+1) + 2\frac{1}{\log_{2x-1}(x+1)} = 4$$

Đặt $t = \log_{2x-1}(x+1)$, pt trở thành: $t + \dfrac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

- Với $t = 1$: $\log_{2x-1}(x+1) = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa điều kiện)
- Với $t = 2$: $\log_{2x-1}(x+1) = 2 \Leftrightarrow x + 1 = (2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (\text{loai}) \\ x = \dfrac{5}{4} & \end{array}\right.$

Vậy pt(1) có tập nghiệm là $S = \left\{2; \dfrac{5}{4}\right\}$

Bài 11: Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$

Khi đó:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq \log_{\frac{1}{2}} 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 2}{x} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\left[\begin{array}{l} 2 - \sqrt{2} \leq x < 1 \\ 2 < x \leq 2 + \sqrt{2} \end{array}\right.$

Bài 12: Giải bất phương trình: $\log_{0,7}\left(\log_6 \dfrac{x^2 + x}{x + 4}\right) < 0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \log_6 \dfrac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \\ \dfrac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + x}{x + 4} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -2 \\ x > 2 \end{array}\right.$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_{0,7}\left(\log_6 \frac{x^2+x}{x+4}\right) < \log_{0,7} 1 \Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1$$

$$\Leftrightarrow \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > \log_6 6 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4} > 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{array}\right.$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\left[\begin{array}{l} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{array}\right.$

Bài 13: Giải bất phương trình: $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \le 2 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 4x-3>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \le 2 + \log_3(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(4x-3)^2 \le \log_3\left[9(2x+3)\right]$$

$$\Leftrightarrow (4x-3)^2 \le 9(2x+3)$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \le 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{8} \le x \le 3$$

So với điều kiện ta được nghiệm của bpt(1) là $\frac{3}{4} < x \le 3$

Bài 14: Giải bất phương trình: $9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \le 3 \quad (1)$

Bài giải:

Ta có: $9^{x^2-2x} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2} \le 3 \Leftrightarrow 9^{x^2-2x} - 2.3^{x^2-2x} - 3 \le 0$

Đặt $t = 3^{x^2-2x} \quad (t>0)$, bpt trở thành: $t^2 - 2t - 3 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 3$

Do $t > 0$ nên ta chỉ nhận $0 < t \le 3$

Với $0 < t \le 3$: $\quad 0 < 3^{x^2-2x} \le 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \le 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2}$

Vậy bpt(1) có tập nghiệm là $S = \left[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right]$

Bài 15: Giải bất phương trình: $\log_5\left(4^x+144\right)-4\log_5 2<1+\log_5\left(2^{x-2}+1\right)$ (1)

Bài giải:

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow \log_5\left(4^x+144\right)-\log_2 16<\log_5\left[5\left(2^{x-2}+1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(4^x+144\right)<\log_5\left[80\left(2^{x-2}+1\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4^x+144<80\left(2^{x-2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4^x-20.2^x+64<0$$

$$\Leftrightarrow 4<2^x<16\Leftrightarrow 2<x<4$$

Vậy bpt(1) có tập nghiệm là $S=(2;4)$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Giải bất phương trình:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_2\frac{2x+3}{x+1}\right)\ge 0$$

Bài 2: Giải phương trình:

$$3+\frac{1}{\log_3 x}=\log_x\left(9x-\frac{6}{x}\right)$$

Bài 3: Giải phương trình:

$$2\log_2(2x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(9x-1)=1$$

Bài 4: Giải bất phương trình:

$$3^{2x+1}-2^{2x+1}-5.6^x\le 0$$

Bài 5: Giải bất phương trình:

$$2^{2x^2-4x-2}-16.2^{2x-x^2-1}-2\le 0$$

-----------------------------Hết---------------------------------

Chuyên đề 9: ĐẠI SỐ TỔ HỢP

I.KHÁI NIỆM VỀ GIAI THỪA:

1.**Định nghĩa**: Với $n \in N$ và $n > 1$

> Tích của n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n được gọi là n - giai thừa. Ký hiệu : n!

Ta có :

$$\boxed{n! = 1.2...n} \qquad (1)$$

* Quy ước : $0! = 1$ và $1! = 1$

2. Một số công thức:

* $n! = (n-1)!.n$ * $\frac{n!}{k!} = (k+1)(k+2)...n \quad (n \geq k)$ * $\frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)(n-k+2)...n$

II. CÁC QUY TẮC CƠ BẢN VỀ PHÉP ĐẾM:

1. QUY TẮC CỘNG:

Ví dụ 1. Một trường THPT được cử một học sinh đi dự trại hè toàn quốc. Nhà trường quyết định chọn một học sinh tiên tiến trong lớp 11A hoặc lớp 12B. Hỏi nhà trường có bao nhiêu cách chọn, nếu biết rằng lớp 11A có 31 học sinh tiên tiến và lớp 12B có 22 học sinh tiên tiến ?

Giải

Nhà trường có hai phương án chọn. Phương án thứ nhất là chọn một học sinh tiên tiến của lớp 11A, phương án này có 31 cách chọn. Phương án thứ hai là chọn một học sinh tiên tiến của lớp 12B, phương án hai này có 22 cách chọn. Vậy nhà trường có cả thảy

$$31 + 22 = 53 \text{ cách chọn.}$$ □

ĐỊNH NGHĨA (SGK NC)

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Có n cách thực hiện phương án A và m cách thực hiện phương án B. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n + m$ cách.

TỔNG QUÁT

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, ..., A_k$. Có n_1 cách thực hiện phương án A_1, n_2 cách thực hiện phương án A_2,... và n_k cách thực hiện phương án A_k. Khi đó công việc có thể được thực hiện bởi $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ cách.

ĐỊNH NGHĨA (SGK CB)

Một công việc được hoàn thành bởi một trong hai hành động. Nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

2. QUY TẮC NHÂN:

Ví dụ: An muốn rủ Bình đến chơi nhà Cường. Từ nhà An đến nhà Bình có 4 con đường. Từ nhà Bình đến

nhà Cường có 6 con đường đi. Hỏi An có bao nhiêu cách đi đến nhà Cường

Giải

Với mỗi cách đi từ nhà An đến nhà Bình sẽ có 6 cách đi tiếp từ nhà Bình đến nhà Cường. Vì có 4 cách đi từ nhà An đến Bình nên có cả thảy 4 . 6 = 24 cách đi từ nhà An qua nhà Bình đến nhà Cường. □

ĐỊNH NGHĨA (SGK NC)

Giả sử một công việc nào đó bao gồm hai công đoạn A và B. Công đoạn A có thể làm theo n cách. Với mỗi cách thực hiện công đoạn A thì công đoạn B có thể làm theo m cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo nm cách.

TỔNG QUÁT

Giả sử một công việc nào đó bao gồm k công đoạn $A_1, A_2, ..., A_k$. Công đoạn A_1 có thể thực hiện theo n_1 cách, công đoạn A_2 có thể thực hiện theo n_2 cách, ..., công đoạn A_k có thể thực hiện theo n_k cách. Khi đó công việc có thể thực hiện theo $n_1n_2\ldots n_k$ cách.

ĐỊNH NGHĨA (SGK CB)

Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc.

III. HOÁN VỊ:

Ví dụ: Từ các chữ số 1;2;3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau.

1.Định nghĩa :

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).
Mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một **hoán vị** của n phần tử đó

n phần tử

Hoán vị
- Nhóm có thứ tự
- Đủ mặt n phần tử của A

ĐỊNH NGHĨA (SGK NC)

Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự, ta được một **hoán vị** các phần tử của tập A (gọi tắt là một hoán vị của A).

ĐỊNH NGHĨA (SGK CB)

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập hợp A được gọi là một ***hoán vị*** của n phần tử đó.

2.Định lý :

Ký hiện số hoán vị của n phần tử là P_n , ta có công thức:

$$\boxed{P_n = n!} \qquad (2)$$

IV.CHỈNH HỢP:

Ví dụ: Từ các chữ số 1;2;3 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau.

1.Định nghĩa:

Cho tập hợp A gồm n phần tử . **Mỗi bộ gồm k** $(1 \leq k \leq n)$ **phần tử sắp thứ tự của tập hợp A** được gọi là một **chỉnh hợp chập k của n phần tử** của A.

n phần tử

Chỉnh hợp

- Nhóm có thứ tự
- Gồm k phần tử được lấy từ n phần tử của A

ĐỊNH NGHĨA (SGK NC)

Cho tập hợp A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy ra k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự, ta được một **chỉnh hợp** chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một chỉnh hợp chập k của A).

ĐỊNH NGHĨA (SGK CB)

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một ***chỉnh hợp chập k của n phần tử*** đã cho.

2.Định lý:

Ký hiệu số chỉnh hợp chập k của n phần tử là A_n^k , ta có công thức:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}} \qquad (3)$$

V. TỔ HỢP:

Ví dụ: Cho tập hợp A=$\{1,2,3\}$.Viết tất cả các tập con của A gồm 2 phần tử

1.Định nghĩa:

Cho tập hợp A gồm n phần tử .**Mỗi tập con của gồm k phần tử** ($1 \le k \le n$) **của A** được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử đã cho.

n phần tử

Tổ hợp

- Nhóm không có thứ tự
- Gồm k phần tử được lấy từ n phần tử của A

ĐỊNH NGHĨA (SGK NC)

Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \le k \le n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một **tổ hợp** chập k của n phần tử của A (gọi tắt là một tổ hợp chập k của A).

ĐỊNH NGHĨA (SGK CB)

Giả sử tập A có n phần tử ($n \ge 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một ***tổ hợp chập k của n phần tử*** đã cho.

2. Định lý :

Ký hiệu số tổ hợp chập k của n phần tử là C_n^k , ta có công thức:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad (4)$$

CHÚ Ý

• Ta quy ước $C_n^0 = 1$ (coi $\varnothing$ là tổ hợp chập 0 của tập hợp có n phần tử). Với quy ước này công thức (4) cũng đúng với $k = 0$. Vậy công thức (4) đúng với mọi số nguyên k thoả mãn $0 \le k \le n$.

Hai tính chất cơ bản của số C_n^k

a) Tính chất 1

Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \le k \le n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

b) Tính chất 2 (hằng đẳng thức Pa-xcan)

Cho các số nguyên n và k với $1 \le k \le n$. Khi đó

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

<u>LƯU Ý QUAN TRỌNG</u>:

Các bài toán về giải tích tổ hợp thường là những bài tóan về những hành động như :
lập các số từ các số đã cho ,sắp xếp một số người hay đồ vật vào những vị trí nhất định ,
lập các nhóm người hay đồ vật thỏa mãn một số điều kiện đã cho v.v...

1. Nếu những hành động này gồm nhiều giai đọan thì cần tìm số cách chọn cho mỗi giai đọan rồi áp dụng quy tắc nhân.
2. Những bài toán mà kết quả thay đổi nếu ta thay đổi vị trí của các phần tử , thì đây là những bài toán liên quan đến hoán vị và chỉnh hợp.
3. Đối với những bài toán mà kết quả được giữ nguyên khi ta thay đổi vị trí của các phần tử thì đây là những bài toán về tổ hợp.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

I. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÉP ĐẾM:

Bài 1:Từ 7 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể thành lập được bao nhiêu số chẵn , mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi. KQ: 1260

Bài 2: Một tổ gồm 8 nam và 6 nữ . Cần lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 nữ . Hỏi có bao nhiêu cách chọn. KQ: 840

Bài 3: Cho hai đường thẳng song song (d_1) , (d_2) . Trên (d_1) lấy 17 điểm phân biệt , trên (d_2) lấy 20 điểm phân biệt . Tính số tam giác có các đỉnh là 3 điểm trong số 37 điểm đã chọn trên (d_1) và (d_2) . KQ:5950

Bài 4: Từ một tập thể gồm 12 học sinh ưu tú , người ta cần cử một đoàn đi dự trại hè quốc tế trong đó có một trưởng đoàn , 1 phó đoàn và 3 đoàn viên . Hỏi có bao nhiêu cách cử ? KQ: 15840

Bài 5: Với 6 chữ số phân biệt 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số có các chữ số phân biệt trong đó mỗi số điều phải có mặt số 6. KQ: 1630

Bài 6: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau từng đôi sao cho tất cả các chử số đều khác không và có mặt đồng thời các chữ số 2, 4, 5. KQ: 1800

Bài 7: Một hộp đựng 4 viên bi đỏ , 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng . Người ta chọn ra 4 viên bi từ hộp đó . Hỏi có bao nhiêu cách chọn để trong số bi lấy ra không đủ cả 3 màu. KQ:645

Bài 8: Cho 8 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7 .Từ 8 chữ số số trên có thể lập được bao nhiêu số , mỗi số gồm 4 chữ số đôi một khác nhau và mỗi số đều không chia hết cho 10. KQ: 1260

Bài 9: Hỏi từ 10 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 có thể lập được bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau sao cho trong các chữ số đó có mặt số 0 và số 1. KQ:42000

Bài 10: Có bao nhiêu số chẵn gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi một trong đó có chữ số đầu tiên là số lẻ? KQ: 42000

Bài 11: Có bao nhiêu số gồm 6 chữ số khác nhau từng đôi một trong đó có đúng 3 chữ số lẻ và 3 chữ số chẵn (chữ số đầu tiên phải khác không). KQ:64800

Bài 12: Có 5 nhà toán học nam , 3 nhà toán học nữ và 4 nhà vật lý nam . Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ , cần có cả nhà toán học và nhà vật lý . Hỏi có bao nhiêu cách. KQ:90

Bài 13: Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho các số này chia hết cho 5 và có đúng 3 chữ số lẻ?

Bài 14: Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho luôn có mặt hai chữ số 0 và 3?

Bài 15: Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho chữ số thứ ba chia hết cho 3 và chữ số cuối chẵn?

Bài 16: Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số có sáu chữ số khác nhau sao cho các số này chia hết cho 2 và có đúng 3 chữ số lẻ?

Bài 17: Một trường trung học có 8 thầy dạy toán, 5 thầy dạy vật lý, và ba thầy dạy hóa học. Chọn từ đó ra một đội có 4 thầy dự đại hội. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để có đủ ba bộ môn?

Bài 18: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, chữ số 0 có mặt đúng 2 lần, chữ số 1 có mặt đúng một lần, hai chữ số còn lại phân biệt

CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU-TƠN

Công thức nhị thức Niu-tơn

Ta đã biết các hằng đẳng thức

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Các hệ số trong khai triển $(a+b)^2$ theo thứ tự từ trái qua phải là $1 = C_2^0$; $2 = C_2^1$; $1 = C_2^2$ tức là $(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2$.

Các hệ số trong khai triển $(a+b)^3$ theo thứ tự từ trái qua phải là $1 = C_3^0$; $3 = C_3^1$; $3 = C_3^2$; và $1 = C_3^3$ tức là $(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3$.

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng :

$$\boxed{\begin{aligned}(a+b)^n &= C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n\\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k \ \text{(quy ước } a^0 = b^0 = 1).\end{aligned}}$$

Công thức này được gọi là **công thức nhị thức Niu-tơn** (gọi tắt là **nhị thức Niu-tơn**).

Ví dụ:

Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x-3y)^{200}$.

Tính hệ số của x^5y^8 trong khai triển $(x+y)^{13}$.

Tính hệ số của x^7 trong khai triển $(1+x)^{11}$.

Tính hệ số của x^9 trong khai triển $(2-x)^{19}$.

Khai triển $(3x+1)^{10}$ cho tới x^3.

Tìm hệ số của x^7 trong khai triển của $(3-2x)^{15}$.

Tính hệ số của $x^{25}y^{10}$ trong khai triển của $(x^3+xy)^{15}$.

Biết rằng hệ số của x^{n-2} trong khai triển $\left(x-\frac{1}{4}\right)^n$ bằng 31. Tìm n.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1:

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số phân biệt sao cho trong mỗi số đều có mặt các chữ số 1, 2, 3?

Bài 2:

Cho tập $E = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Từ các chữ số của tập E lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau?

Bài 3:

Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số, các chữ số đôi một khác nhau sao cho chữ số đầu và chữ số cuối của mỗi số đó đều là số chẵn?

Bài 4:

Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Hỏi từ tập A lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số khác nhau sao cho mỗi số đó đều lớn hơn 2011.

Bài 5:

Tìm số nguyên dương n thỏa mãn

$$C_n^1 3 - 2C_n^2 3^2 + 3C_n^3 3^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n 3^n = 33792.$$

Bài 6:

Khai triển và rút gọn biểu thức $1 - x + 2(1-x)^2 + ... + n(1-x)^n$ thu được đa thức $P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$. Tính hệ số a_8 biết rằng n là số nguyên dương thoả mãn

$$\frac{1}{C_n^2} + \frac{7}{C_n^3} = \frac{1}{n}.$$

Bài 7:

Xác định số hạng không phụ thuộc x khi khai triển biểu thức $\left[\frac{1}{x} - (x + x^2)\right]^n$, với n là số nguyên dương thoả mãn $C_n^3 + 2n = A_{n+1}^2$.

Bài 8:

Tìm hệ số của x^3 trong khai triển biểu thức $[1 - 2x(1-3x)]^n$, với n là số nguyên dương thỏa mãn $n\mathrm{C}_{n+1}^n - \mathrm{C}_n^{n-2} = \mathrm{A}_{n-1}^2 - 7$.

Chuyên đề 10: XÁC SUẤT

KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Biến cố

a) Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà :

– Kết quả của nó không đoán trước được ;

– Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T.

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là **không gian mẫu** của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga).

b) Biến cố

Biến cố A **liên quan đến phép thử** T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tuỳ thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một **kết quả thuận lợi cho** A.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A. Khi đó người ta nói **biến cố A được mô tả bởi tập** Ω_A.

– *Biến cố chắc chắn* là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử T. Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được kí hiệu là Ω.

– *Biến cố không thể* là biến cố không bao giờ xảy ra khi phép thử T được thực hiện. Rõ ràng không có một kết quả thuận lợi nào cho biến cố không thể. Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$ và được kí hiệu là $\varnothing$.

2. Xác suất của biến cố

Trong cuộc sống hàng ngày, khi nói về biến cố ta thường nói biến cố này có nhiều khả năng xảy ra, biến cố kia có ít khả năng xảy ra, biến cố này có nhiều khả năng xảy ra hơn biến cố kia. Toán học đã định lượng hoá các khả năng này bằng cách gán cho mỗi biến cố một số không âm, nhỏ hơn hay bằng 1 gọi là *xác suất của biến cố đó*. Xác suất của biến cố A được kí hiệu là $P(A)$. Nó đo lường khả năng khách quan sự xuất hiện của biến cố A.

a) Định nghĩa cổ điển của xác suất

ĐỊNH NGHĨA

Giả sử phép thử T có không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn và các kết quả của T là đồng khả năng. Nếu A là một biến cố liên quan với phép thử T và Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì **xác suất** của A là một số, kí hiệu là $\mathrm{P}(A)$, được xác định bởi công thức

$$\boxed{\mathrm{P}(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}.}$$

Như vậy, việc tính xác suất của biến cố A trong trường hợp này được quy về việc đếm số kết quả có thể của phép thử T và số kết quả thuận lợi cho A.

CHÚ Ý

Từ định nghĩa trên ta suy ra

- $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$;
- $\mathrm{P}(\Omega) = 1$, $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

- Để xác định không gian mẫu của một phép thử T ta liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra của T
- Để tính số phần tử của một biến cố A ta dùng các quy tắc đếm cơ bản, công thức hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp
- Để tính xác suất P(A) của một biến cố A ta thực hiện các bước

Bước 1 : Đếm số phần tử của không gian mẫu ;

Bước 2 : Đếm số phần tử của tập A ;

Bước 3 : Tính P(A) theo công thức : $\mathrm{P(A)} = \dfrac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$.

CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

1. Quy tắc cộng xác suất

a) Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là **hợp của hai biến cố** A và B.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $A \cup B$ là $\Omega_A \cup \Omega_B$.

Một cách tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Có ít nhất một trong các biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ xảy ra", kí hiệu là $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k$, được gọi là **hợp của k biến cố** đó.

b) Biến cố xung khắc

Cho hai biến cố A và B. Hai biến cố A và B được gọi là **xung khắc** nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.

Hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc nếu và chỉ nếu $\Omega_A \cap \Omega_B = \varnothing$.

c) Quy tắc cộng xác suất

Để tính xác suất của biến cố hợp, ta cần đến quy tắc cộng xác suất sau đây :

Nếu hai biến cố A và B xung khắc thì xác suất để A hoặc B xảy ra là

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \qquad (1)$$

Quy tắc cộng xác suất cho nhiều biến cố được phát biểu như sau :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đôi một xung khắc. Khi đó

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k). \qquad (2)$$

d) Biến cố đối

Cho A là một biến cố. Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là **biến cố đối** của A.

Nếu Ω_A là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho $\overline{A}$ là $\Omega \setminus \Omega_A$. Ta nói A và $\overline{A}$ là hai biến cố đối nhau.

ĐỊNH LÍ

Cho biến cố A. Xác suất của biến cố đối $\overline{A}$ là

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (3)$$

2. Quy tắc nhân xác suất

a) Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu là AB, được gọi là **giao của hai biến cố** A và B.

Nếu Ω_A và Ω_B lần lượt là tập hợp các kết quả thuận lợi cho A và B thì tập hợp các kết quả thuận lợi cho AB là $\Omega_A \cap \Omega_B$.

Một cách tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$. Biến cố "Tất cả k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$ đều xảy ra", kí hiệu là $A_1A_2 ... A_k$, được gọi là **giao của k biến cố** đó.

b) Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

Nhận xét. Nếu hai biến cố A, B độc lập với nhau thì A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B ; $\overline{A}$ và $\overline{B}$ cũng độc lập với nhau.

Một cách tổng quát :

Cho k biến cố $A_1, A_2, ..., A_k$; k biến cố này được gọi là **độc lập** với nhau nếu việc xảy ra hay không xảy ra của mỗi biến cố không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của các biến cố còn lại.

c) Quy tắc nhân xác suất

Để tính xác suất của biến cố giao, ta cần đến quy tắc nhân xác suất sau đây.

Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì

$$P(AB) = P(A)P(B). \qquad (4)$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: (B-2012)

Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

Bài 2:

Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên một lần 3 viên bi. Tính xác suất trong hai trường hợp sau:

1/ Lấy được 3 viên bi màu xanh.

2/ Lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh.

Bài 3:

Từ một hộp chứa 6 quả cầu trắng và 4 quả cầu đen, lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc ra 4 quả. Tính xác suất sao cho :

a) Bốn quả lấy ra cùng màu.

b) Có ít nhất 1 quả trắng.

Bài 4: Tung 2 con xúc xắc đồng chất.

1) Tìm xác xuất của biến cố có tổng số chấm là 8.

2) Tìm xác xuất của biến cố có tổng số chấm là số lẻ hoặc chia hết cho 3.

Kết quả: 1) $\frac{5}{36}$ 2) $\frac{2}{3}$

Bài 5: Một tổ học sinh có 6 nam và 5 nữ.

1) Tìm xác suất lấy ra 4 học sinh đi lao động sao cho trong đó có 1 nữ.

2) Tìm xác suất lấy ra 4 học sinh đi lao động sao cho trong đó có không quá 3 nữ.

Kết quả: 1) $\frac{10}{33}$ 2) $\frac{65}{66}$

Bài 6: Một đơn vị vận tải có 10 xe ô tô, trong đó có 6 xe tốt. Điều một cách ngẫu nhiên 3 xe đi công tác. Tìm xác suất để trong 3 xe đó có ít nhất một xe tốt.

Kết quả: $\frac{29}{30}$

Bài 7: Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chọn một nhóm 4 người để trực nhật.

1) Hỏi có bao nhiêu cách chọn khác nhau.

2) Tính xác suất để khi chọn ngẫu nhiên một nhóm 4 người ta được nhóm có đúng 1 nữ.

Kết quả: 1) 495 2) $\frac{28}{55}$

Bài 8: Một tổ gồm 9 học sinh nam và 3 học sinh nữ. Cần chia tổ thành 3 nhóm, mỗi nhóm 4 người đi làm 3 công việc khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau ? Tính xác suất để khi chia ngẫu nhiên ta được mỗi nhóm có đúng 1 nữ.

Kết quả: $\frac{16}{55}$

Bài 9: Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để lấy được:

1) 3 bóng tốt.

2) Ít nhất 2 bóng tốt.

3) Ít nhất 1 bóng tốt.

Kết quả: 1) $\frac{7}{44}$ 2) $\frac{7}{11}$ 3) $\frac{21}{22}$

Bài 10: Trong một chiếc hộp kín có chứa 10 quả cầu trắng và 8 quả cầu đỏ. Giả thiết rằng kích thước và trọng lượng của tất cả các quả các quả cầu nói trên là y hệt nhau. Lấy hú họa ra 5 quả cầu. Tìm xác suất của biến cố: trong 5 quả cầu được lấy ra có đúng 3 quả cầu đỏ.

Kết quả: 5/17

Bài 11: Một hộp có 12 viên bi, trong đó có 4 viên màu đỏ và 8 viên màu xanh. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tìm xác suất để:

1) Cả 3 viên bi đều màu xanh.
2) Cả ba viên bi đều màu đỏ.
3) Có đúng một viên bi màu xanh.
4) Có ít nhất một viên bi màu xanh.

Kết quả: 1) 56/220 2) 4/220 3) 48/220 4) 216/220.

Bài 12: Hai xạ thủ cùng bắn một phát vào bia. Xác suất trúng đích của người thứ nhất là 0,9, của người thứ hai là 0,7. Tính các xác suất sau đây:

1) Cả hai phát đều trúng.
2) Ít nhất một phát trúng.
3) Chỉ một phát trúng.

Kết quả: 1) $0,63$ 2) $0,97$ 3) $0,34$.

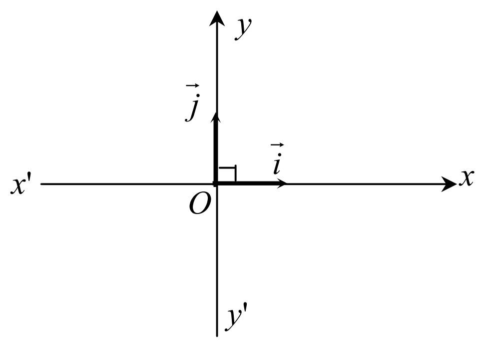
……………………**HẾT**……………………

Chuyên đề 11: ÔN TẬP HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG MẶT PHẲNG

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG
TỌA ĐỘ ĐIỂM - TỌA ĐỘ VÉC TƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Hệ trục toạ độ ĐỀ-CÁC trong mặt phẳng :

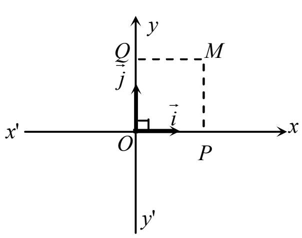


- $x'Ox$: trục hoành
- $y'Oy$: trục tung
- O : gốc toạ độ
- $\vec{i},\vec{j}$: véc tơ đơn vị ($|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ và $\vec{i}\perp\vec{j}$)

Quy ước : Mặt phẳng mà trên đó có chọn hệ trục toạ độ Đề-Các vuông góc Oxy được gọi là mặt phẳng Oxy và ký hiệu là : mp(Oxy)

II. Toạ độ của một điểm và của một véc tơ:

1. Định nghĩa 1: Cho $M\in mp(Oxy)$. Khi đó véc tơ $\overrightarrow{OM}$ được biểu diễn một cách duy nhất theo $\vec{i},\vec{j}$ bởi hệ thức có dạng : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

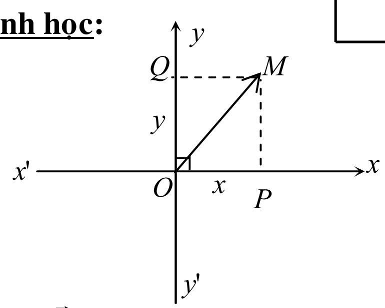


Cặp số (x;y) trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của điểm M.

Ký hiệu: M(x;y) (x: hoành độ của điểm M; y: tung độ của điểm M)

$$M(x;y)\overset{đ/n}{\Leftrightarrow}\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

- **Ý nghĩa hình học:**

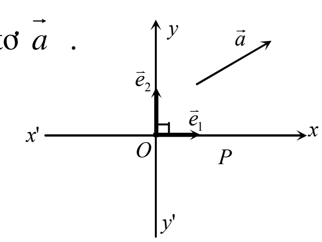


$$x=\overline{OP}\quad\text{và}\quad y=\overline{OQ}$$

2. Định nghĩa 2: Cho $\vec{a}\in mp(Oxy)$. Khi đó véc tơ $\vec{a}$ được biểu diễn một cách duy nhất theo $\vec{i},\vec{j}$ bởi hệ thức có dạng : $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ với $a_1,a_2\in\mathbb{R}$.

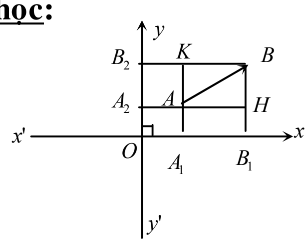
Cặp số ($a_1;a_2$) trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của véc tơ $\vec{a}$.

Ký hiệu: $\vec{a}=(a_1;a_2)$



$$\vec{a}=(a_1;a_2)\overset{đ/n}{\Leftrightarrow}\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$$

- **Ý nghĩa hình học:**

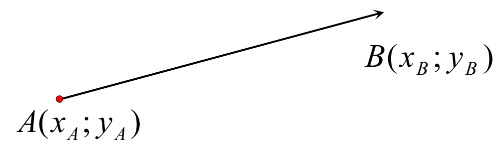


$$a_1 = \overline{A_1B_1} \quad \text{và} \quad a_2 = \overline{A_2B_2}$$

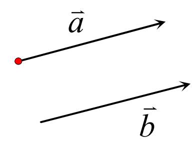
III. Các công thức và định lý về toạ độ điểm và toạ độ véc tơ :

Định lý 1: Nếu $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thì

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$$



Định lý 2: Nếu $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$ thì



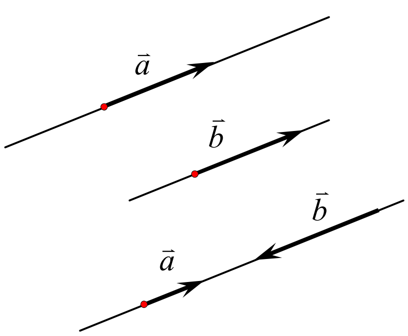
- $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$
- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$
- $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2) \qquad (k \in \mathbb{R})$

IV. Sự cùng phương của hai véc tơ:

Nhắc lại

- Hai véc tơ cùng phương là hai véc tơ nằm trên cùng một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song .
- **Định lý về sự cùng phương của hai véc tơ:**

Định lý 3 : Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$



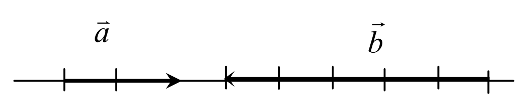
$$\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \exists! k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \vec{a} = k.\vec{b}$$

Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì số k trong trường hợp này được xác định như sau:

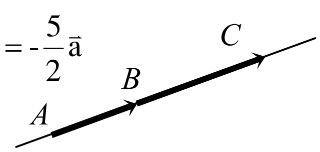
$k > 0$ khi $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$

$k < 0$ khi $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$

$$|k| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$



$$\vec{a} = -\frac{2}{5}\vec{b} \quad , \quad \vec{b} = -\frac{5}{2}\vec{a}$$



Định lý 4 : A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$

(Điều kiện 3 điểm thẳng hàng)

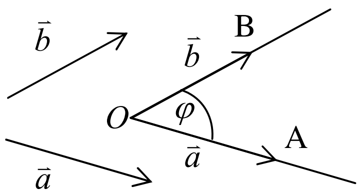
Định lý 5: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có :

$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0$ (Điều kiện cùng phương của 2 véc tơ

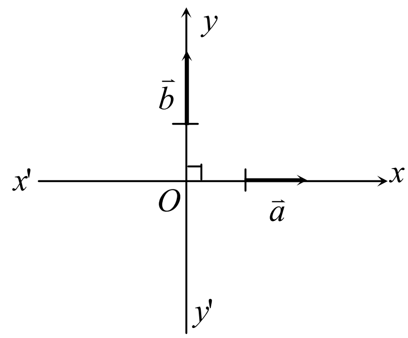
$$\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2) \\ \vec{b} = (b_1; b_2) \end{cases} \qquad \text{VD:} \quad \begin{cases} \vec{a} = (1;2) \\ \vec{b} = (2;4) \end{cases}$$

V. Tích vô hướng của hai véc tơ:

Nhắc lại:



$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$
$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

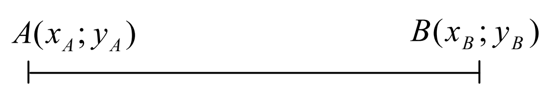


Định lý 6: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có :

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ (Công thức tính tích vô hướng theo tọa độ)

Định lý 7: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ta có :

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (Công thức tính độ dài véc tơ)



Định lý 8: Nếu $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ thì

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ (Công thức tính khoảng cách 2 điểm)

Định lý 9: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có :

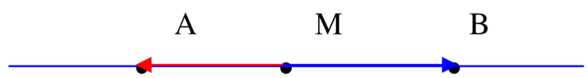
$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ (Điều kiện vuông góc của 2 véc tơ)

Định lý 10: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ ta có

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$ (Công thức tính góc của 2 véc tơ)

VI. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số k:

Định nghĩa: Điểm M được gọi là chia đoạn AB theo tỷ số k (k $\neq 1$) nếu như : $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}$



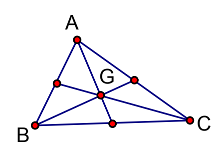
Định lý 11 : Nếu $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$ và $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}$ (k $\neq 1$) thì

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A-k.x_B}{1-k} \\ y_M=\dfrac{y_A-k.y_B}{1-k} \end{cases}$$

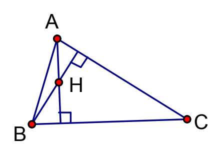
Đặc biệt : M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$

VII. Một số điều kiện xác định điểm trong tam giác :

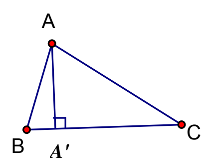
1. G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \end{cases}$



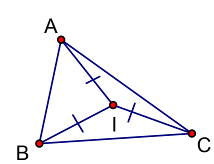
2. H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$



3. A' là chân đường cao kẻ từ A $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}\perp\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA'} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \end{cases}$

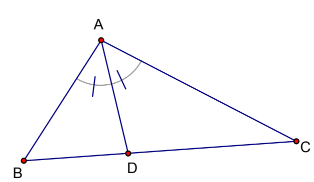


4. I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA=IB \\ IA=IC \end{cases}$

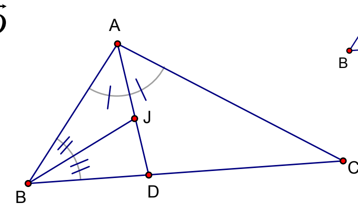


5. D là chân đường phân giác trong của góc A của ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}=-\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{DC}$

6. D' là chân đường phân giác ngoài của góc A của ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{D'B}=\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{D'C}$



7. J là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{JA}=-\dfrac{AB}{BD}.\overrightarrow{JD}$

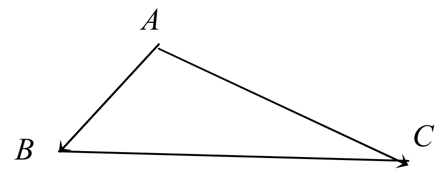


VIII. Kiến thức cơ bản thường sử dụng khác:

Công thức tính diện tích tam giác theo toạ độ ba đỉnh :

Định lý 12: Cho tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{AB}=(a_1;a_2)$ và $\overrightarrow{AC}=(b_1;b_2)$ ta có :

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.\left|a_1b_2-a_2b_1\right|}$$



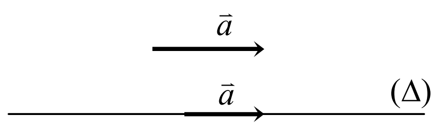
ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

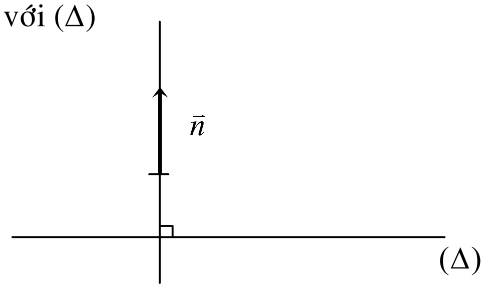
A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Các định nghĩa về VTCP và VTPT (PVT) của đường thẳng:

$$\vec{a} \text{ là VTCP của đường thẳng } (\Delta) \overset{dn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \text{ có giá song song hoặc trùng với } (\Delta) \end{cases}$$

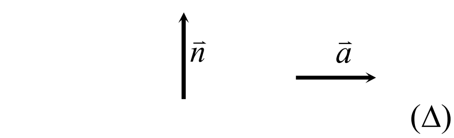
$$\vec{n} \text{ là VTPT của đường thẳng } (\Delta) \overset{dn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \text{ có giá vuông góc với } (\Delta) \end{cases}$$





*** Chú ý:**

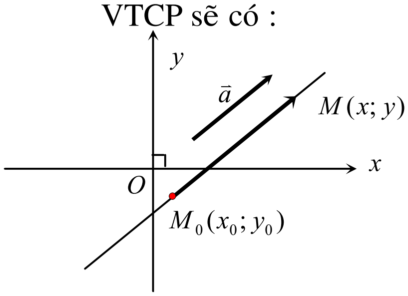
- Nếu đường thẳng (Δ) có VTCP $\vec{a} = (a_1; a_2)$ thì có VTPT là $\vec{n} = (-a_2; a_1)$
- Nếu đường thẳng (Δ) có VTPT $\vec{n} = (A; B)$ thì có VTCP là $\vec{a} = (-B; A)$



II. Phương trình đường thẳng :

1. Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng :

a. Định lý : Trong mặt phẳng (Oxy). Đường thẳng (Δ) qua $M_0(x_0;y_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1; a_2)$ làm VTCP sẽ có :

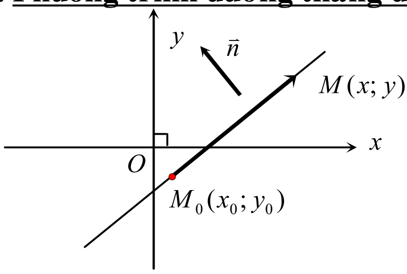


Phương trình tham số là : $(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + t.a_1 \\ y = y_0 + t.a_2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Phương trình chính tắc là : $(\Delta): \dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2}$

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng :

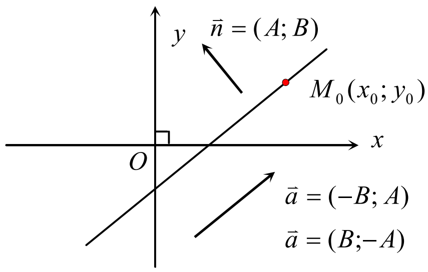
a. <u>Phương trình đường thẳng đi qua một điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(A;B)$ là</u>:



$$\boxed{(\Delta): A(x-x_0)+B(y-y_0)=0} \qquad (A^2+B^2\neq 0)$$

b. <u>Phương trình tổng quát của đường thẳng</u> :

<u>Định lý</u> : Trong mặt phẳng (Oxy). Phương trình đường thẳng (Δ) có dạng :



$$\boxed{\text{Ax + By + C = 0} \quad \text{với } A^2+B^2\neq 0}$$

<u>Chú ý</u>:

Từ phương trình (Δ):Ax + By + C = 0 ta luôn suy ra được :

1. VTPT của (Δ) là $\vec{n}=(A;B)$
2. VTCP của (Δ) là $\vec{a}=(-B;A)$ hay $\vec{a}=(B;-A)$
3. $M_0(x_0;y_0)\in(\Delta)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+C=0$

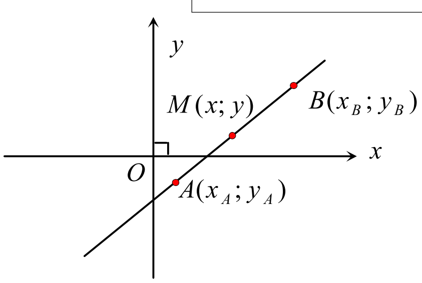
Mệnh đề (3) được hiểu là :

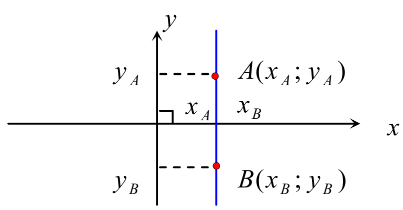
Điều kiện cần và đủ để một điểm nằm trên đường thẳng là tọa độ điểm đó nghiệm đúng phương trình của đường thẳng .

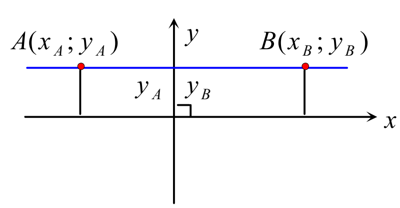
3. <u>Các dạng khác của phương trình đường thẳng</u> :

a. <u>Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$</u> :

$$(AB): \frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} \qquad (AB): x=x_A \qquad (AB): y=y_A$$





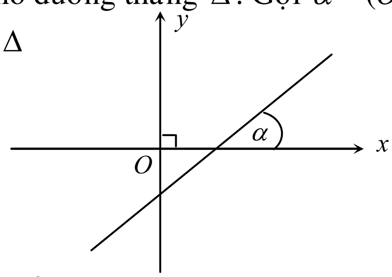


b. <u>Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn</u>:

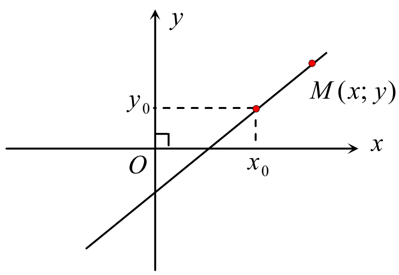
Định lý: Trong mp(Oxy) phương trình đường thẳng (Δ) cắt trục hoành tại điểm A(a;0) và trục tung tại điểm B(0;b) với a, b $\neq$ 0 có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

c. Phương trình đường thẳng đi qua một điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có hệ số góc k:

Định nghĩa: Trong mp(Oxy) cho đường thẳng Δ. Gọi $\alpha=(Ox,\Delta)$ thì $k=tg\alpha$ được gọi là hệ số góc của đường thẳng Δ



Định lý 1: Phương trình đường thẳng Δ qua $M_0(x_0;y_0)$ có hệ số góc k là :



$$\boxed{\mathbf{y - y_0 = k(x - x_0)}} \qquad \mathbf{(1)}$$

Chú ý 1: Phương trình (1) không có chứa phương trình của đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc Ox nên khi sử dụng ta cần để ý xét thêm đường thẳng đi qua M_0 và vuông góc Ox là $\mathbf{x = x_0}$

Chú ý 2: Nếu đường thẳng Δ có phương trình $y=ax+b$ thì hệ số góc của đường thẳng là $k=a$

Định lý 2: Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 ta có :

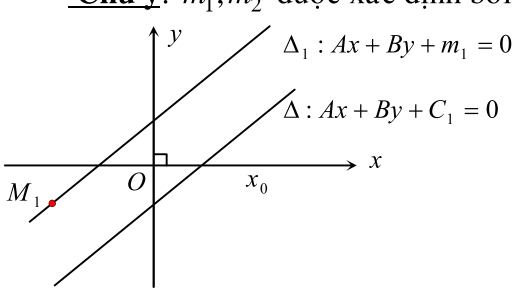
- $\Delta_1 // \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1=k_2$
- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \quad \Leftrightarrow \quad k_1.k_2=-1$

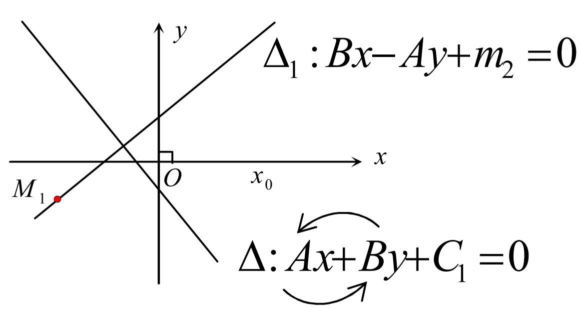
c. Phương trình đt đi qua một điểm và song song hoặc vuông góc với một đt cho trước:

i. Phương trinh đường thẳng (Δ_1) //(Δ): Ax+By+C=0 có dạng: Ax+By+m_1=0

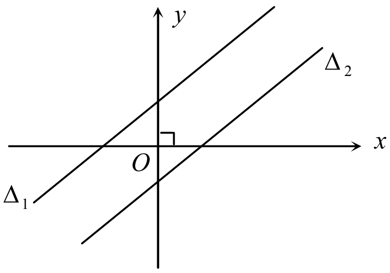
ii. Phương trinh đường thẳng (Δ_1) $\perp(\Delta)$: Ax+By+C=0 có dạng: Bx-Ay+m_2=0

Chú ý: $m_1;m_2$ được xác định bởi một điểm có tọa độ đã biết nằm trên $\Delta_1;\Delta_2$

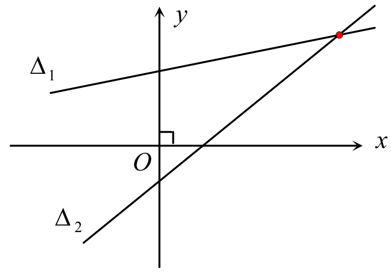




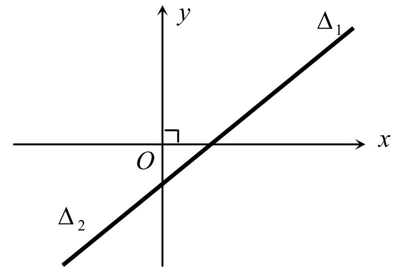
III. Vị trí tương đối của hai đường thẳng :



$\Delta_1 \,//\, \Delta_2$



Δ_1 cắt Δ_2



$\Delta_1 \equiv \Delta_2$

Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng : $\begin{matrix}(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ (\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0\end{matrix}$

Vị trí tương đối của (Δ_1) và (Δ_2) phụ thuộc vào số nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases} \quad (1)$$

<u>Chú ý</u>: Nghiệm duy nhất (x;y) của hệ (1) chính là tọa độ giao điểm M của (Δ_1) và (Δ_2)

<u>Định lý 1</u>:

i.	Hệ (1) vô nghiệm	$\Leftrightarrow$	$(\Delta_1)//(\Delta_2)$
ii.	Hệ (1) có nghiệm duy nhất	$\Leftrightarrow$	(Δ_1) cắt (Δ_2)
iii.	Hệ (1) có vô số nghiệm	$\Leftrightarrow$	$(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$

<u>Định lý 2</u>: Nếu $A_2; B_2; C_2$ khác 0 thì

i.	(Δ_1) cắt (Δ_2)	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$
ii.	$(\Delta_1) \,//\, (\Delta_2)$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$
iii.	$(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$	$\Leftrightarrow$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

IV. <u>Góc giữa hai đường thẳng</u>

1.Định nghĩa: Hai đường thẳng a, b cắt nhau tạo thành 4 góc. Số đo nhỏ nhất trong các số đo của bốn góc đó được gọi là *góc giữa hai đường thẳng a và b* (hay *góc hợp bởi hai đường thẳng a và b*). Góc giữa hai đường thẳng a và b đước kí hiệu là (a,b)

Khi a và b song song hoặc trùng nhau, ta nói rằng góc của chúng bằng 0^0

2. Công thức tính góc giữa hai đường thẳng theo VTCP và VTPT

a) Nếu hai đường thẳng có VTCP lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{v}$ thì

$$\cos(a,b) = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \frac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}$$

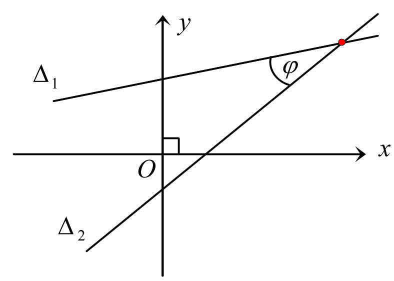
b) Nếu hai đường thẳng có VTPT lần lượt là $\vec{n}$ và $\overrightarrow{n'}$ thì

$$\cos(a,b) = \left|\cos\left(\vec{n},\overrightarrow{n'}\right)\right| = \frac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n'}\right|}$$

Định lý : Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng : $\begin{matrix}(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0\\(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0\end{matrix}$

Gọi φ $(0^0 \le \varphi \le 90^0)$ là góc giữa (Δ_1) và (Δ_2) ta có :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}.\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$



Hệ quả:

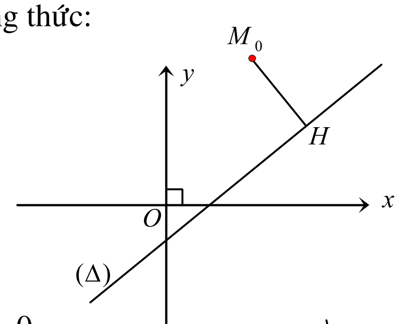
$$\boxed{(\Delta_1) \perp (\Delta_2) \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$

V. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng :

Định lý 1: Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng $(\Delta): Ax + By + C = 0$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$

Khoảng cách từ M_0 đến đường thẳng (Δ) được tính bởi công thức:

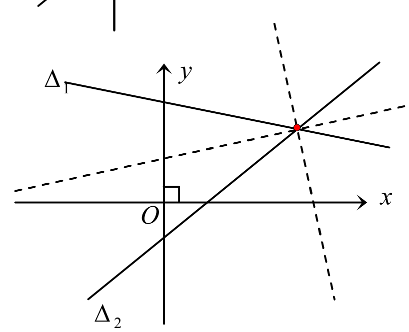
$$\boxed{d(M_0;\Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$



Định lý 2: Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng : $\begin{matrix}(\Delta_1): A_1x + B_1y + C_1 = 0\\(\Delta_2): A_2x + B_2y + C_2 = 0\end{matrix}$

Phương trình phân giác của góc tạo bởi (Δ_1) và (Δ_2) là :

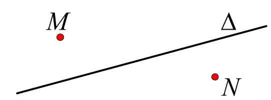
$$\boxed{\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$



Định lý 3: Cho đường thẳng $(\Delta_1): Ax + By + C = 0$ và hai điểm $M(x_M;y_M)$, $N(x_N;y_N)$ không nằm trên (Δ). Khi đó:

- Hai điểm M , N nằm cùng phía đối với (Δ) khi và chỉ khi
$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) > 0$$

- Hai điểm M , N nằm khác phía đối với (Δ) khi và chỉ khi
$$(Ax_M + By_M + C)(Ax_N + By_N + C) < 0$$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: (A-2012)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình vuông *ABCD*. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *BC*, *N* là điểm trên cạnh *CD* sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng *AN* có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm *A*.

Bài 2: (D-2012)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình chữ nhật *ABCD*. Các đường thẳng *AC* và *AD* lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng *BD* đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật *ABCD*.

Bài 3:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Đêcac vuông góc *Oxy*, xét tam giác *ABC* vuông tại *A*, phương trình đường thẳng *BC* là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh *A* và *B* thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

Bài 4:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc *Oxy* cho hình chữ nhật *ABCD* có tâm $I\left(\frac{1}{2};0\right)$, phương trình đường thẳng *AB* là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh *A* có hoành độ âm.

Bài 5:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc *Oxy* cho tam giác *ABC* có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^0$. Biết $M(1;-1)$ là trung điểm cạnh *BC* và $G\left(\frac{2}{3};\ 0\right)$ là trọng tâm tam giác *ABC*. Tìm tọa độ các đỉnh *A*, *B*, *C*.

Bài 6:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;\ 2)$ và $B\left(-\sqrt{3};\ -1\right)$. Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.

Bài 7:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(1; 1), B(4; −3). Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

Bài 8:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1;\ 0); B(4;\ 0); C(0; m)$ với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

Bài 9:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng

$$d_1: x - y = 0 \quad \text{và} \quad d_2: 2x + y - 1 = 0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1, đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.

Bài 10:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng:

$$d_1: x + y + 3 = 0, \quad d_2: x - y - 4 = 0, \quad d_3: x - 2y = 0.$$

Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2.

Bài 11:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm $A(2;2)$ và các đường thẳng:

$$d_1: x + y - 2 = 0, \quad d_2: x + y - 8 = 0.$$

Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Bài 12:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy xác định tọa độ đỉnh C của tam giác ABC biết rằng hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng AB là điểm $H(-1;-1)$, đường phân giác trong của góc A có phương trình $x - y + 2 = 0$ và đường cao kẻ từ B có phương trình $4x + 3y - 1 = 0$.

Bài 13:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB.

Bài 14:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(-1;4)$ và các đỉnh B, C thuộc đường thẳng $\Delta: x - y - 4 = 0$. Xác định toạ độ các điểm B và C, biết diện tích tam giác ABC bằng 18.

Bài 15:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;0)$ là trung điểm của cạnh AB. Đường trung tuyến và đường cao qua đỉnh A lần lượt có phương trình là $7x - 2y - 3 = 0$ và $6x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Bài 16:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A có đỉnh $A(6; 6)$; đường thẳng đi qua trung điểm của các cạnh AB và AC có phương trình $x + y - 4 = 0$. Tìm toạ độ các đỉnh B và C, biết điểm $E(1; -3)$ nằm trên đường cao đi qua đỉnh C của tam giác đã cho.

Bài 17:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC vuông tại A, có đỉnh $C(-4; 1)$, phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 24 và đỉnh A có hoành độ dương.

Bài 18:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -7)$, trực tâm là $H(3; -1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2; 0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

Bài 19:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $A(0; 2)$ và Δ là đường thẳng đi qua O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ. Viết phương trình đường thẳng Δ, biết khoảng cách từ H đến trục hoành bằng AH.

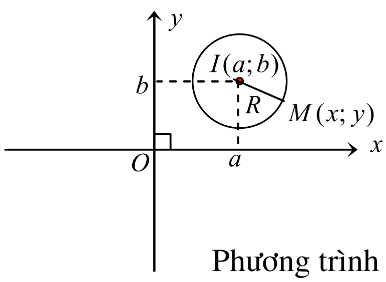
ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình đường tròn:

1. Phương trình chính tắc:

Định lý : Trong mp(Oxy). Phương trình của đường tròn (C) tâm I(a;b), bán kính R là :



$$\boxed{(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (1)}$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của đường tròn

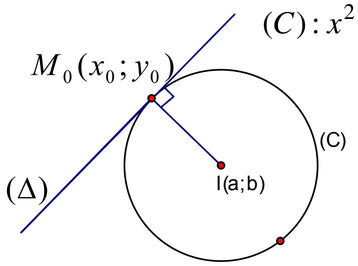
Đặc biệt: Khi I $\equiv$ O thì $(C): x^2 + y^2 = R^2$

2. Phương trình tổng quát:

Định lý : Trong mp(Oxy). Phương trình : $\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0}$ với $a^2 + b^2 - c > 0$ là phương trình của đường tròn (C) có tâm I(a;b), bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

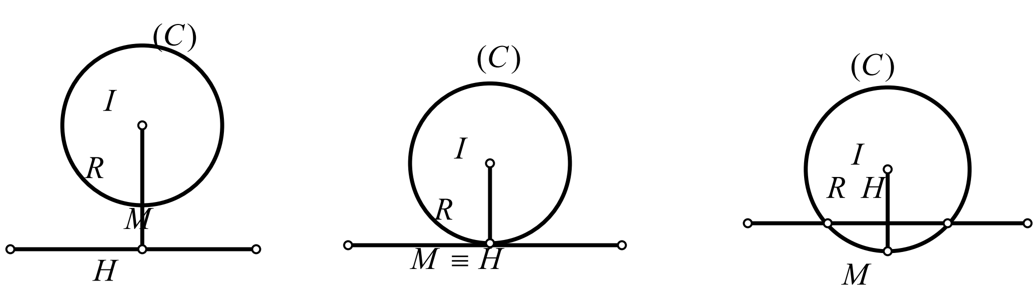
Định lý : Trong mp(Oxy). Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ là :



$$\boxed{(\Delta): x_0x + y_0y - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0}$$

VI. Các vấn đề có liên quan:

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:



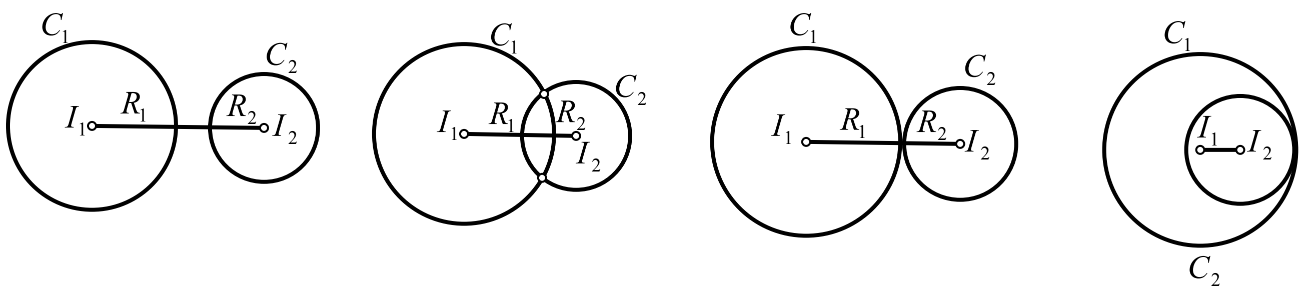
Định lý:

$(\Delta)\bigcap(C)=\varnothing$	$\Leftrightarrow$	$d(I;\Delta) > R$
(Δ) tiếp xúc (C)	$\Leftrightarrow$	$d(I;\Delta) = R$
(Δ) cắt (C)	$\Leftrightarrow$	$d(I;\Delta) < R$

Lưu ý: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ và đường thẳng $(\Delta): Ax+By+C=0$. Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (Δ) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \\ Ax+By+C=0 \end{cases}$$

2. Vị trí tương đối của hai đường tròn :



(C_1) và (C_2) không cắt nhau	$\Leftrightarrow$	$I_1I_2 > R_1+R_2$
(C_1) và (C_2) cắt nhau	$\Leftrightarrow$	$\lvert R_1-R_2\rvert < I_1I_2 < R_1+R_2$
(C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài nhau	$\Leftrightarrow$	$I_1I_2 = R_1+R_2$
(C_1) và (C_2) tiếp xúc trong nhau	$\Leftrightarrow$	$I_1I_2 = \lvert R_1-R_2\rvert$

Lưu ý: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

và đường tròn $(C'): x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0$.

Tọa độ giao điểm (nếu có) của (C) và (C’) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \\ x^2+y^2-2a'x-2b'y+c'=0 \end{cases}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: (B-2012)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$, $(C_2): x^2+y^2-12x+18=0$ và đường thẳng $d: x-y-4=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d.

Bài 2: (D-2012)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y+3=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d, cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB=CD=2$.

Bài 3:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho đường tròn

$(C): (x-1)^2+(y-2)^2=4$ và đường thẳng $d: x-y-1=0$.

Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d.

Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').

Bài 4:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;0)$ và $B(6;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.

Bài 5:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng T_1T_2.

Bài 6:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ và đường thẳng d: $x-y+3=0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên d sao cho đường tròn tâm M, có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C), tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

Bài 7:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có A(0; 2), B(–2; –2) và C(4; –2). Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N.

Bài 8:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng

$$d: 3x-4y+m=0.$$

Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Bài 9:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $\Delta: x+my-2m+3=0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Bài 10:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$ và hai đường thẳng $\Delta_1 : x - y = 0$, $\Delta_2 : x - 7y = 0$. Xác định toạ độ tâm K và tính bán kính của đường tròn (C_1); biết đường tròn (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng Δ_1, Δ_2 và tâm K thuộc đường tròn (C).

Bài 11:

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + y^2 = 1$. Gọi I là tâm của (C). Xác định toạ độ điểm M thuộc (C) sao cho $\widehat{IMO} = 30^\circ$.

Bài 12:

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng d_1: $\sqrt{3}x + y = 0$ và d_2: $\sqrt{3}x - y = 0$. Gọi (T) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B và C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (T), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Bài 13:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(2; \sqrt{3})$ và elip (E): $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Bài 14:

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(3; -7)$, trực tâm là $H(3; -1)$, tâm đường tròn ngoại tiếp là $I(-2; 0)$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết C có hoành độ dương.

ĐƯỜNG ELÍP TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

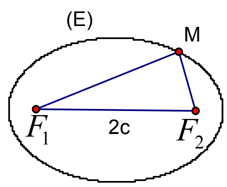
A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I.Định nghĩa:

Elíp (E) là tập hợp các điểm M có tổng khoảng cách đến hai điểm cố định F_1; F_2 bằng hằng số

* Hai điểm cố định F_1; F_2 được gọi là các tiêu điểm

* $F_1F_2 = 2c$ ($c > 0$) được gọi là tiêu cự

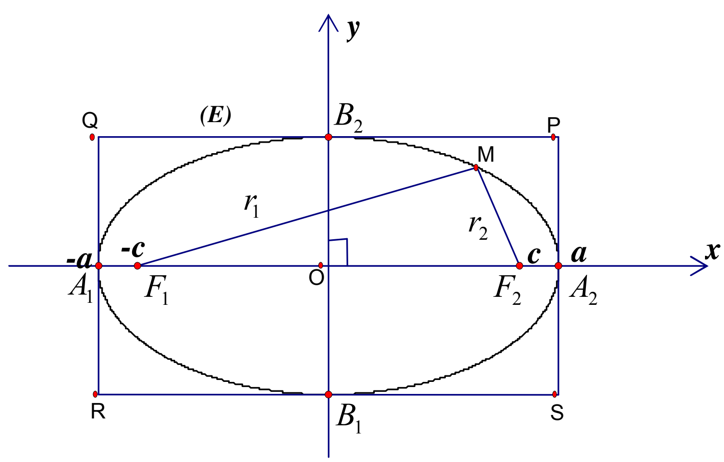


$$(E) = \{M / MF_1 + MF_2 = 2a\} \qquad (\text{ a>0 : hằng số và a>c })$$

II. Phương trình chính tắc của Elíp và các yếu tố:

1. Phương trình chính tắc:

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với} \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad (a > b) \quad (1)$$



2. Các yếu tố của Elíp:

*** Elíp xác định bởi phương trình (1) có các đặc điểm:**

- Tâm đối xứng O, trục đối xứng Ox; Oy
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$
- Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$
- Trục lớn nằm trên Ox; độ dài trục lớn $2a$ ($= A_1A_2$)
- Trục nhỏ nằm trên Oy; độ dài trục lớn $2b$ ($= B_1B_2$)
- Đỉnh trên trục lớn : $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$
- Đỉnh trên trục nhỏ :$B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$

- Bán kính qua tiêu điểm:

Với $M(x;y) \in (E)$ thì $\begin{cases} r_1 = MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x = a + ex \\ r_2 = MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x = a - ex \end{cases}$

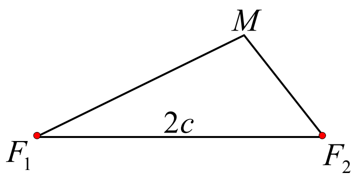
- Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a}$ $(0 < e < 1)$

- Đường chuẩn : $x = \pm \dfrac{a}{e}$

ĐƯỜNG HYPEBOL TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa:

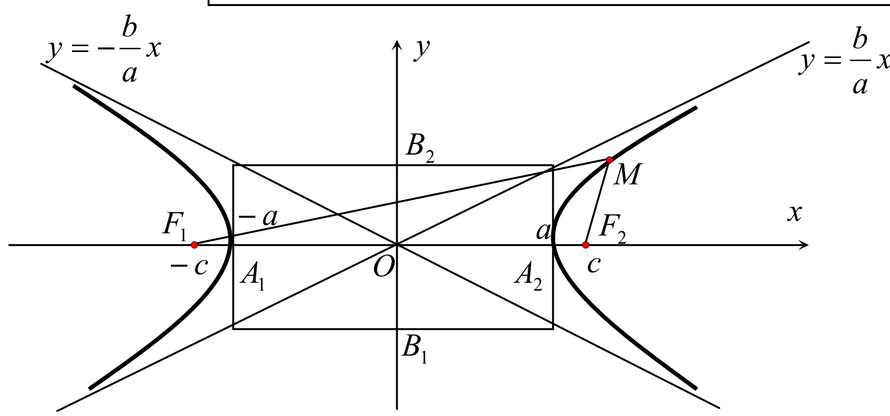


$$(H) = \{M / |MF_1 - MF_2| = 2a\} \qquad (a > 0 : \text{hằng số và } a < c) \ (1)$$

II. Phương trình chính tắc của Hypebol và các yếu tố:

1. Phương trình chính tắc:

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{với} \quad b^2 = c^2 - a^2 \qquad (1)$$



2. Các yếu tố của Hypebol:

*** Hypebol xác định bởi phương trình (1) có các đặc điểm:**

- Tâm đối xứng O, trục đối xứng Ox; Oy
- Tiêu điểm $F_1(-c;0)$; $F_2(c;0)$
- Tiêu cự $F_1F_2 = 2c$
- Trục thực nằm trên Ox; độ dài trục thực $2a$ ($= A_1A_2$)
- Trục ảo nằm trên Oy; độ dài trục ảo $2b$ ($= B_1B_2$)
- Đỉnh: $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$
- Phương trình tiệm cận : $y = \pm\frac{b}{a}x$
- Bán kính qua tiêu điểm:

Với $M(x;y) \in (H)$ thì :

$$\text{Với } x > 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = MF_1 = a + ex \\ r_2 = MF_2 = -a + ex \end{cases}$$

Với $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = MF_1 = -(a + ex) \\ r_2 = MF_2 = -(-a + ex) \end{cases}$

- Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a}$ $(e > 1)$
- Đường chuẩn : $x = \pm\dfrac{a}{e}$

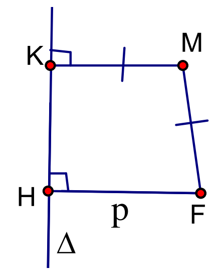
ĐƯỜNG PARABOL TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A.KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định nghĩa :

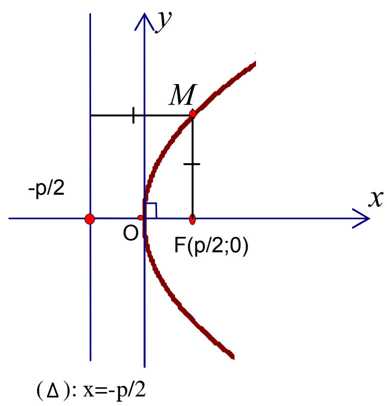
$$(P) = \{M / MF = d(M,\Delta)\}$$

* F là điểm cố định gọi là tiêu điểm
* (Δ) là đường thẳng cố định gọi là đường chuẩn
* HF = p > 0 gọi là tham số tiêu

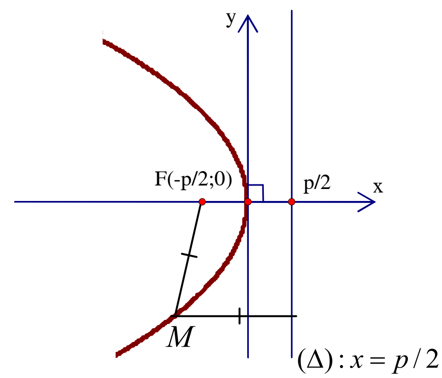


II. Phương trình chính tắc của parabol:

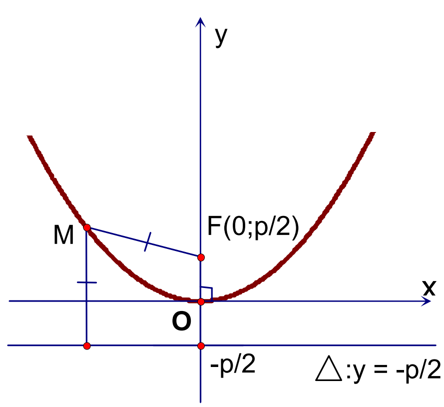
1) **Dạng 1:** Ptct: $y^2 = 2px$



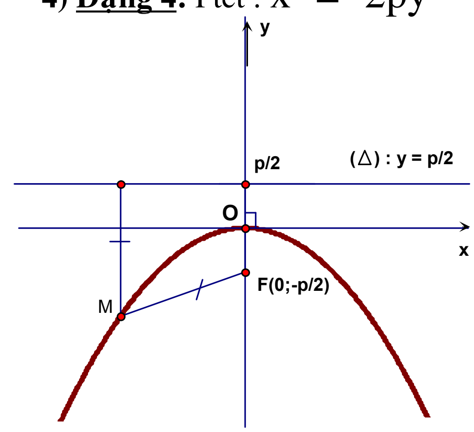
2) **Dạng 2:** Ptct: $y^2 = -2px$



3) **Dạng 3:** Ptct: $x^2 = 2py$



4) **Dạng 4:** Ptct : $x^2 = -2py$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: (A-2012)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $x^2+y^2=8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Bài 2: (B-2012)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho hình thoi $ABCD$ có $AC=2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2+y^2=4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc Ox.

Bài 3:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của elíp (E) biết rằng (E) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

Bài 4:

Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho điểm $A(2;\ \sqrt{3})$ và elip (E): $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. Gọi F_1 và F_2 là các tiêu điểm của (E) (F_1 có hoành độ âm); M là giao điểm có tung độ dương của đường thẳng AF_1 với (E); N là điểm đối xứng của F_2 qua M. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ANF_2.

Bài 5:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $C(2;0)$ và elíp $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 6:

Trong mặt phẳng với hệ trục *Oxy*, cho elip $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ có hai tiêu điểm F_1, F_2 lần lượt nằm bên trái và bên phải trục tung. Tìm tọa độ điểm M thuộc (E) sao cho $MF_1^2+7MF_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 7:

Trong mặt phẳng với hệ trục *Oxy*, cho parabol $(P): y^2=4x$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua tiêu điểm của (P), cắt (P) tại A và B sao cho $AB=4$.

Bài 8:

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho đường thẳng $d: 2x+y+3=0$ và elíp $(E): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$. Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với d và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1.

Bài 9:

Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho parabol $(P): y^2=4x$ có tiêu điểm F. Gọi M là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{FM}=-3\overrightarrow{FO}$; d là đường thẳng bất kì đi qua M, d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Chứng minh rằng tam giác OAB là tam giác vuông.

Bài 10:

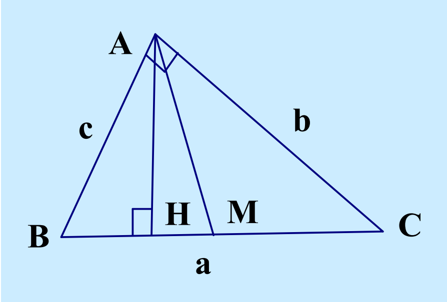
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy*, cho các đường thẳng $d: 2x+3y=0$ và $\Delta: \sqrt{13}x+18=0$. Viết phương trình chính tắc của hyperbol có một tiệm cận là d và một đường chuẩn là Δ.

---------------------------------Hết------------------------------

Chuyên đề 12: HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

ÔN TẬP 1. KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 9 - 10

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông: Cho ΔABC vuông ở A ta có :



a) Định lý Pitago : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $BA^2 = BH.BC; \;\; CA^2 = CH.CB$

c) AB. AC = BC. AH

d) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

e) BC = 2AM

f) $\sin B = \dfrac{b}{a}, \;\; \cos B = \dfrac{c}{a}, \;\; \tan B = \dfrac{b}{c}, \cot B = \dfrac{c}{b}$

g) b = a. sinB = a.cosC, c = a. sinC = a.cosB, $a = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{b}{\cos C}$,

b = c. tanB = c.cot C

2. Hệ thức lượng trong tam giác thường:

* Định lý hàm số Côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

* Định lý hàm số Sin: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

3. Các công thức tính diện tích:

a/ Công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}a.b\sin C = \frac{a.b.c}{4R} = p.r = \sqrt{p.(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Đặc biệt : ΔABC vuông ở A : $\boxed{S = \dfrac{1}{2}AB.AC}$

b/ Diện tích hình vuông : S = cạnh x cạnh

c/ Diện tích hình chữ nhật : S = dài x rộng

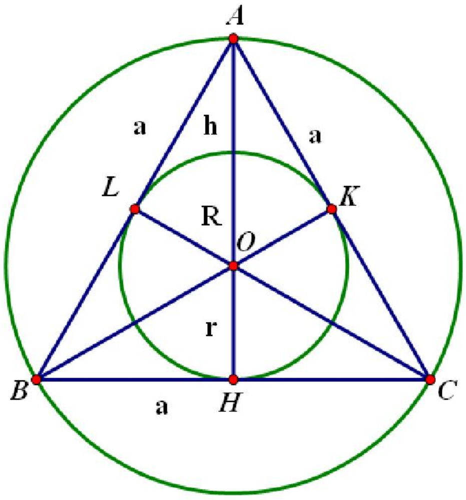
d/ Diên tích hình thoi : S = $\dfrac{1}{2}$(chéo dài x chéo ngắn)

d/ Diện tích hình thang : $S = \dfrac{1}{2}$(đáy lớn + đáy nhỏ) x chiều cao

e/ Diện tích hình bình hành : S = đáy x chiều cao

f/ Diện tích hình tròn : $S = \pi.R^2$

4. Các hệ thức quan trọng trong tam giác đều:



$h = \text{Cạnh}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$R = \text{Cạnh}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$r = \text{Cạnh}.\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

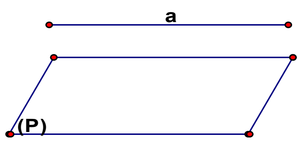
$S = (\text{Cạnh})^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

ÔN TẬP 2 KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC LỚP 11

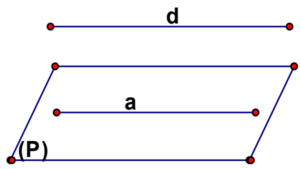
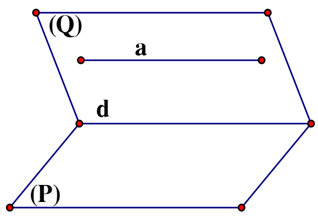
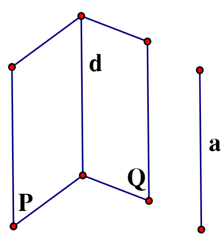
A.QUAN HỆ SONG SONG

§1.ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

I. Định nghĩa:

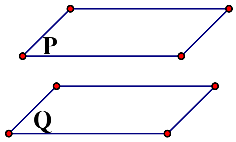
Đường thẳng và mặt phẳng gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$a//(P) \Leftrightarrow a \cap (P) = \varnothing$	

II.Các định lý:

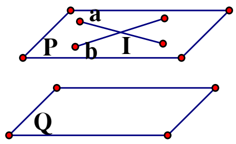
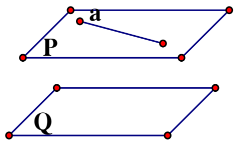
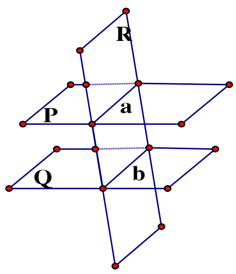
ĐL1: Nếu đường thẳng d không nằm trên mp(P) và song song với đường thẳng a nằm trên mp(P) thì đường thẳng d song song với mp(P)	$\begin{cases} d \not\subset (P) \\ d // a \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d//(P)$	
ĐL2: Nếu đường thẳng a song song với mp(P) thì mọi mp(Q) chứa a mà cắt mp(P) thì cắt theo giao tuyến song song với a.	$\begin{cases} a//(P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \end{cases} \Rightarrow d//a$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d \\ (P)//a \\ (Q)//a \end{cases} \Rightarrow d//a$	

§2.HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I. Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm nào chung.	$(P)//(Q) \Leftrightarrow (P)\cap(Q)=\varnothing$	

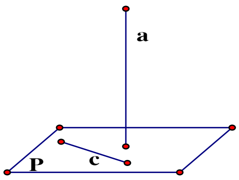
II.Các định lý:

ĐL1: Nếu mp(P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.	$\begin{cases} a,b\subset(P) \\ a\cap b=I \\ a//(Q), b//(Q) \end{cases} \Rightarrow (P)//(Q)$	
ĐL2: Nếu một đường thẳng nằm một trong hai mặt phẳng song song thì song song với mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ a\subset(P) \end{cases} \Rightarrow a//(Q)$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.	$\begin{cases} (P)//(Q) \\ (R)\cap(P)=a \\ (R)\cap(Q)=b \end{cases} \Rightarrow a//b$	

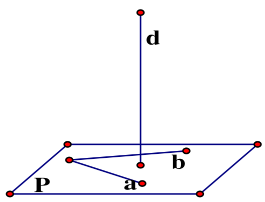
B.QUAN HỆ VUÔNG GÓC

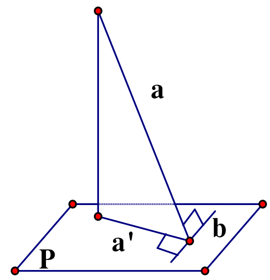
§1.ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

I.Định nghĩa:

Một đường thẳng được gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.	$a\perp mp(P) \Leftrightarrow a\perp b, \forall b\subset(P)$ Hệ quả: $\begin{cases} a\perp mp(P) \\ b\subset mp(P) \end{cases} \Rightarrow a\perp b$	

II. Các định lý:

ĐL1: Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mp(P) thì đường thẳng d vuông góc với mp(P).	$\begin{cases} d\perp a, d\perp b \\ a, b\subset mp(P) \\ a, b \text{ cắt nhau} \end{cases} \Rightarrow d\perp mp(P)$	

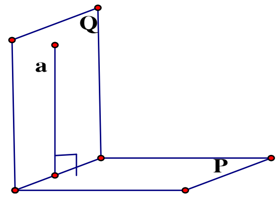
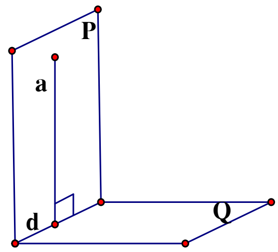
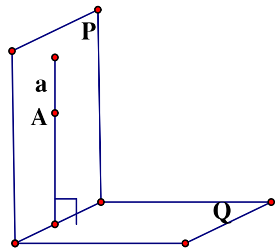
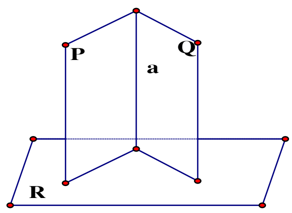
ĐL2: (Ba đường vuông góc) Cho đường thẳng a không vuông góc với mp(P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).	$a \not\perp mp(P), b \subset mp(P)$ $b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$	

§2.HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

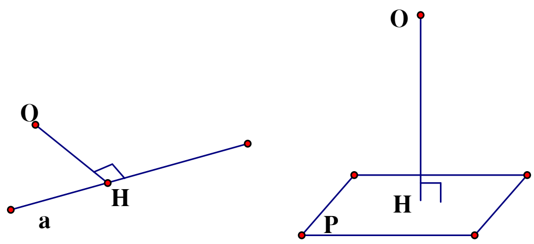
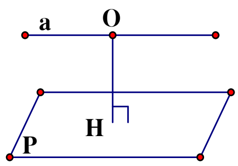
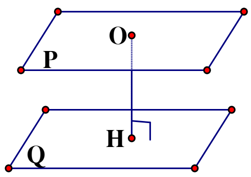
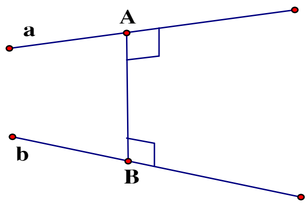
I.Định nghĩa:

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

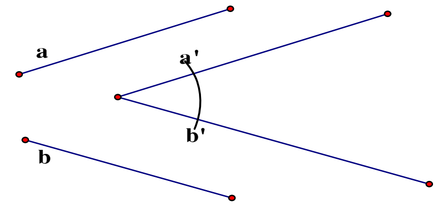
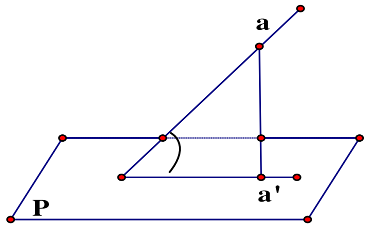
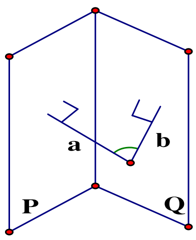
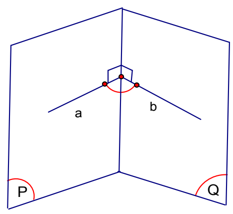
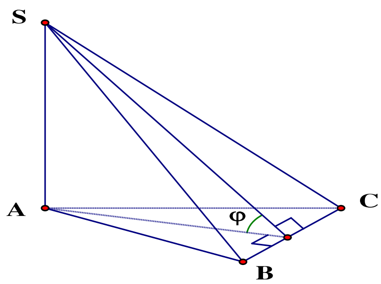
II. Các định lý:

ĐL1: Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.	$\begin{cases} a \perp mp(P) \\ a \subset mp(Q) \end{cases} \Rightarrow mp(Q) \perp mp(P)$	
ĐL2: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \\ a \subset (P), a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$	
ĐL3: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P)	$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ A \in a \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$	
ĐL4: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.	$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$	

§3.KHOẢNG CÁCH

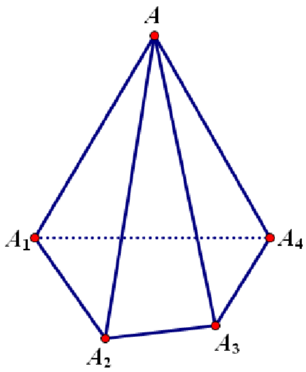
1. **Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng , đến 1 mặt phẳng**: Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a (hoặc đến mặt phẳng (P)) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên đường thẳng a (hoặc trên mp(P)) d(O; a) = OH; d(O; (P)) = OH	
2. **Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song**: Khoảng cách giữa đường thẳng a và mp(P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mp(P). d(a;(P)) = OH	
3. **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song**: là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. d((P);(Q)) = OH	
4.**Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau**: là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó. d(a;b) = AB a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại. b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.	

§4.GÓC

1. Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt cùng phương với a và b.	
2. Góc giữa đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) là góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên mp(P). ***Đặc biệt***: Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mp(P) là 90^0.	
3. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó. Hoặc là góc giữa 2 đường thẳng nằm trong 2 mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại 1 điểm	 
4. Diện tích hình chiếu: Gọi S là diện tích của đa giác (H) trong mp(P) và S' là diện tích hình chiếu (H') của (H) trên mp(P') thì $S' = S\cos\varphi$ trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P),(P').	

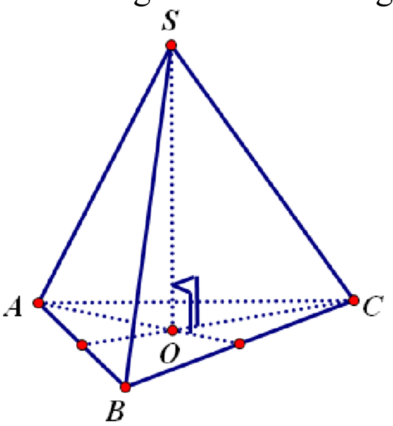
C. CÁC HÌNH ĐA DIỆN

§1. Hình chóp

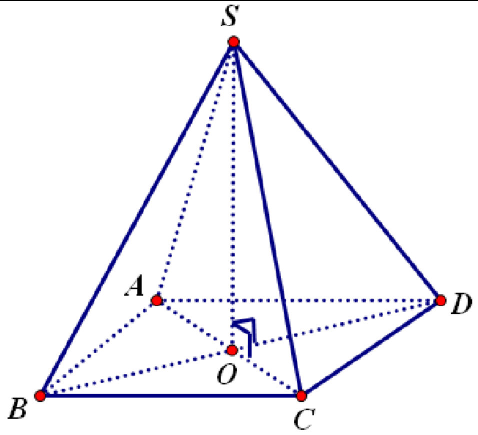
1. Hình chóp: Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2,..,A_n$ để được n tam giác: $SA_1A_2, SA_2A_3,...,SA_nA_1$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là hình chóp và được ký hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.	

2. Hình chóp đều:

- Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
- Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.



Hình chóp tam giác đều

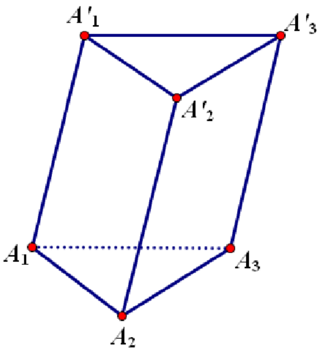


Hình chóp tứ giác đều

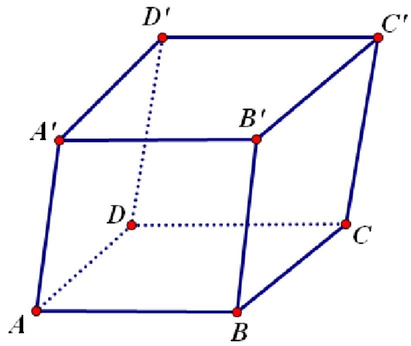
+ Trong một hình chóp đều thì
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

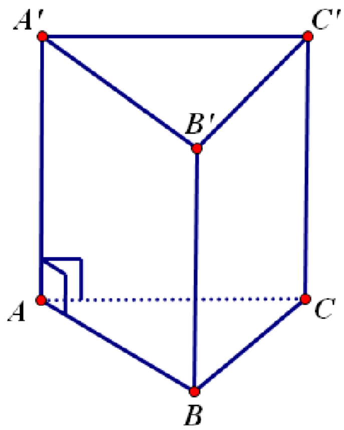
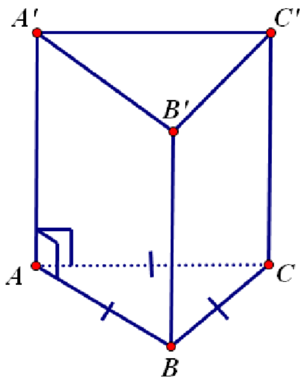
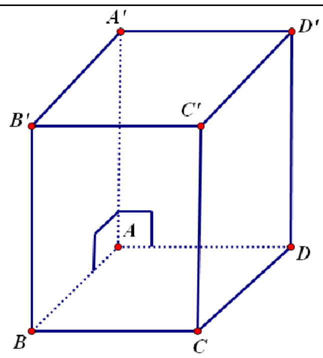
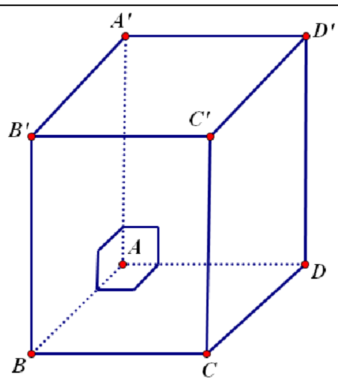
§2. Hình lăng trụ

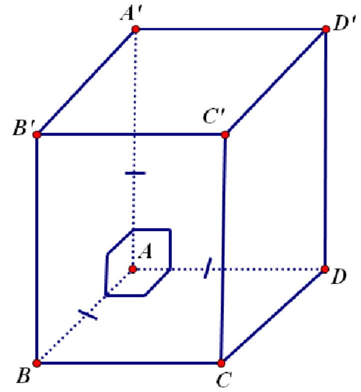
1. Hình lăng trụ:
Hình hợp bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$,...,$A_nA_1A'_1A'_2$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hình lăng trụ hoặc lăng trụ, và ký hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.
+ Trong một hình lăng trụ thì
- Các cạnh bên bằng nhau;
- Các mặt bên là các hình bình hành;
- Hai đáy là hai đa giác bằng nhau.



2. Hình hộp: là hình lăng trụ có đáy là ***hình bình hành***.
+ Trong một hình hộp thì
- Các mặt bên là các hình bình hành;
- Các đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.



<table>
<tr><td>3. <u>Hình lăng trụ đứng</u>: là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
+ Trong hình lăng trụ đứng thì
- Độ dài cạnh bên là chiều cao;
- Các mặt bên là các hình chữ nhật.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>4. <u>Hình lăng trụ đều</u>: là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
+ Trong hình lăng trụ đều thì
- Độ dài cạnh bên là chiều cao;
- Các mặt bên là các hình chữ nhật bằng nhau.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5. <u>Hình hộp đứng</u>: là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6. <u>Hình hộp chữ nhật</u>: là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.</td><td>
</td></tr>
</table>

7. <u>Hình lập phương</u>: là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau	

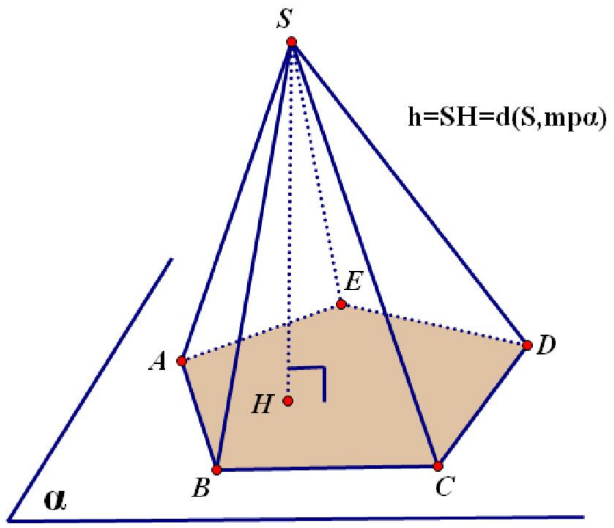
THỂ TÍCH CỦA KHỐI ĐA DIỆN

Thể tích của một khối đa diện hiểu theo nghĩa thông thường là số đo độ lớn phần không gian mà có chiếm chỗ. Từ xa xưa con người đã tìm cách đo thể tích của các khối vật chất trong tự nhiên. Đối với những vật thể lỏng, như khối nước trong một bể chứa, người ta có thể dùng những cái thùng có kích thước nhỏ hơn để đong. Đối với những vật rắn có kích thước nhỏ người ta có thể thả chúng vào một cái thùng đổ đầy nước rồi đo lượng nước trào ra ...Tuy nhiên trong thực tế có thể có nhiều vật thể không thể đo được bằng những cách trên. Chẳng hạn để đo thể tích của kim tự tháp Ai Cập ta không thể nhúng nó vào nước hay chia nhỏ nó ra được. Vì vậy người ta tìm cách thiết lập các công thức tính thể tích của một số khối đa diện đơn giản khi biết kích thước của chúng, rồi từ đó tìm cách tính thể tích của các khối đa diện phức tạp hơn.

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. Thể tích của khối chóp

1) Công thức tính thể tích khối chóp:

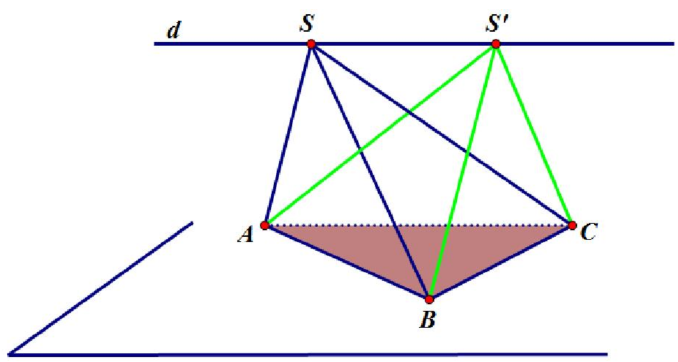


- **Định lý**: Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}.B.h}$$

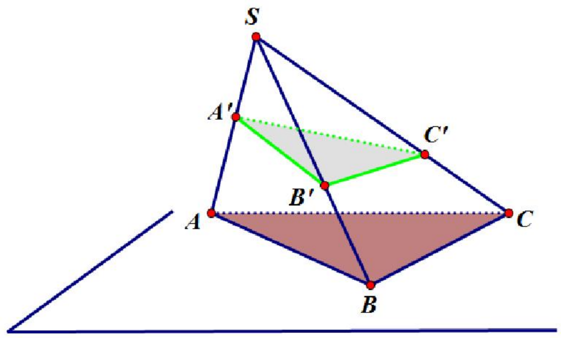
- **Một số vấn đề có liên quan đến thể tích khối chóp**

  Định lí 1: Thể tích khối chóp sẽ không thay đổi nếu đỉnh của nó di chuyển trên một đường thẳng song song với mặt phẳng chứa đáy.



Định lý 2: Cho khối chóp tam giác $S.ABC$. Trên ba đường thẳng SA,SB,SC lần lượt lấy ba điểm A',B',C' khác với S. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABC$ và $S.A'B'C'$. Ta luôn có:

$$\frac{V}{V'}=\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.A'B'C'}}=\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}$$



2) Các bài toán luyện tập đơn giản:

Bài 1:

Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $SA = AB = BC = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Bài 2:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy, cạnh bên SB bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối chóp S.ABCD.

Bài 3:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng đáy bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Bài 4:

Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $\widehat{BAC}=120^0$, tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Bài 5:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AD=CD=a$, $AB=3a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và cạnh bên SC tạo với mặt đáy một góc 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

3) Các bài toán luyện tập nâng cao:

Bài 1: (D-2012)

Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C=a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Bài 2: (B-2012)

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích của khối chóp $S.ABH$ theo a.

Bài 3: (A-2012)

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Bài 4:

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tính thể tích của khối chóp $S.ABM$ theo a.

Bài 5:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = SB$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Bài 6:

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng SP. Tính theo a thể tích của khối tứ diện $AMNP$.

Bài 7:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 90^o$, $AB = BC = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh rằng BCNM là hình chữ nhật và tính thể tích của khối chóp S.BCNM theo a.

Bài 8:

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Bài 9:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

Bài 10:

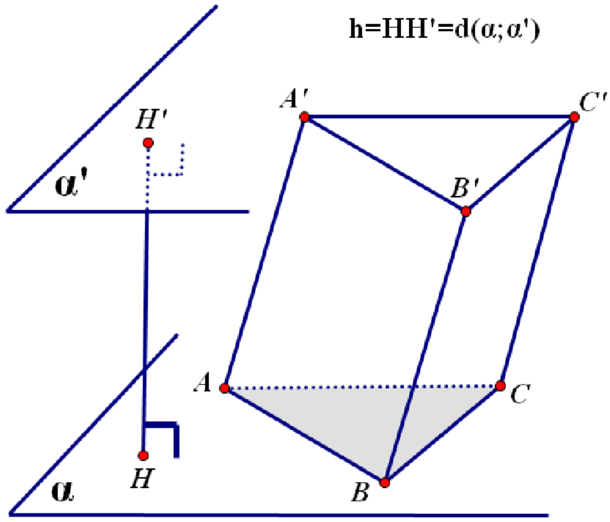
Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Bài 11:

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M và N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM.

II. Thể tích của khối lăng trụ

1) Công thức tính thể tích khối lăng trụ:



- **Định lý**: Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là:

$$\boxed{V = B.h}$$

1) Các bài toán luyện tập đơn giản:

Bài 1

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho

Bài 2

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA = BC = a$. Góc giữa đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

Bài 3

Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có cạnh bên bằng a, đáy ABC là tam giác đều, hình chiếu của A trên (A'B'C') trùng với trọng tâm G của ΔA'B'C'. Mặt phẳng (BB'C'C) tạo với (A'B'C') góc 60^0. Tính thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' theo a.

Bài 4

Cho khối lăng trụ đều ABC.A'B'C',có AA' >AB và A'B = 2a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' theo a.

2) Các bài toán luyện tập nâng cao:

Bài 1

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB = BC = a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Bài 2

Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^o. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

Bài 3

Cho hình lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có M là trung điểm cạnh AB, $BC = 2a$, $\angle ACB = 90^0$ và $\angle ABC = 60^0$, cạnh bên CC_1 tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 45^0, hình chiếu vuông góc của C_1 lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CM. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACC_1A_1).

Bài 4

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, BC = 4a, A'C = 2\sqrt{3}a \quad (a > 0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Biết $A'B$ vuông góc với mặt phẳng $(AB'M)$. Chứng minh tam giác $A'BC$ vuông và tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

Bài 5

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a\sqrt{2} \quad (a > 0)$, $\widehat{BAC} = 135^0$ và đường thẳng AB_1 tạo với mặt phẳng $\left(BCC_1B_1\right)$ góc 30^0. Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mp $\left(BCC_1B_1\right)$ và thể tích khối lăng trụ đã cho.

MẶT CẦU

Trong đời sống hằng ngày chúng ta thường thấy hình ảnh của mặt cầu thông qua hình ảnh bề mặt của quả bóng bàn, của viên bi, của mô hình quả địa cầu, của quả bóng chuyền...

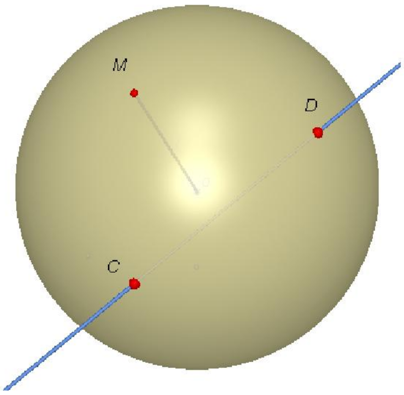
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

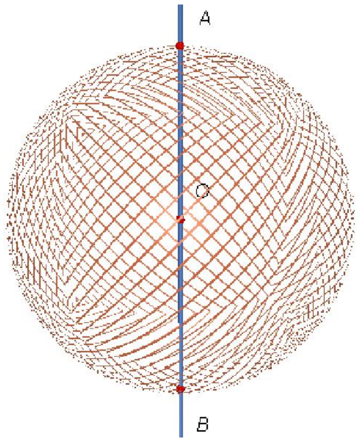
I. Mặt cầu và các khái niệm liên qua đến mặt cầu

1. Mặt cầu

- Tập hợp những điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng không đổi bằng R (R>0) được gọi là mặt cầu tâm O bán kính R. Ký hiệu: $S(O;R)$

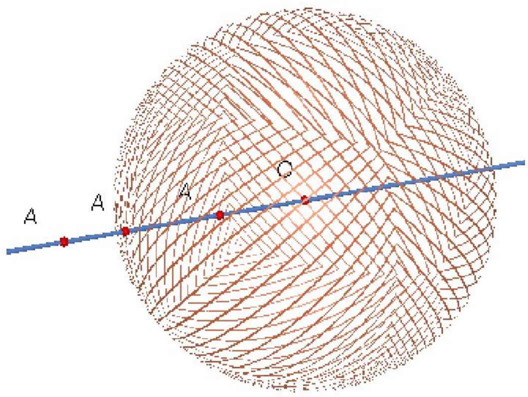
$$S(O;R) = \{M \mid OM = R\}$$





- Nếu hai điểm C, D nằm trên mặt cầu $S(O;R)$ thì đoạn thẳng CD được gọi là **dây cung** của mặt cầu đó.
- Dây cung AB đi qua tâm O được gọi là đường kính của mặt cầu. Khi đó độ dài đường kính bằng 2R.
- Một mặt cầu được xác định nếu biết ***tâm và bán kính*** của nó hoặc biết một ***đường kính*** của mặt cầu đó.

2. Điểm nằm trong và nằm ngoài mặt cầu.



Cho mặt cầu tâm O bán kính R và A là một điểm bất kỳ trong không gian.

- Nếu $OA = R$ thì ta nói điểm A ***nằm trên*** mặt cầu $S(O;R)$
- Nếu $OA < R$ thì ta nói điểm A ***nằm trong*** mặt cầu $S(O;R)$
- Nếu $OA > R$ thì ta nói điểm A ***nằm ngoài*** mặt cầu $S(O;R)$

Khối cầu: Tập hợp các điểm thuộc mặt cầu $S(O;R)$ cùng với các điểm nằm trong mặt cầu đó được gọi là **khối cầu** hoặc **hình cầu** tâm O bán kính R.

3. Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu

- Mặt cầu có bán kính R có diện tích là:

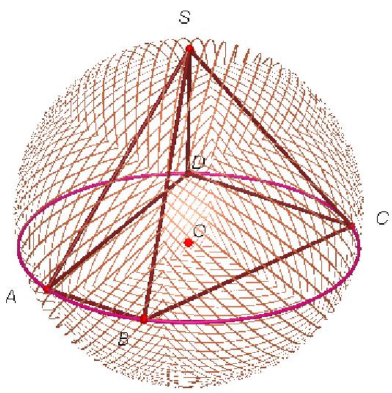
$$S = 4\pi R^2$$

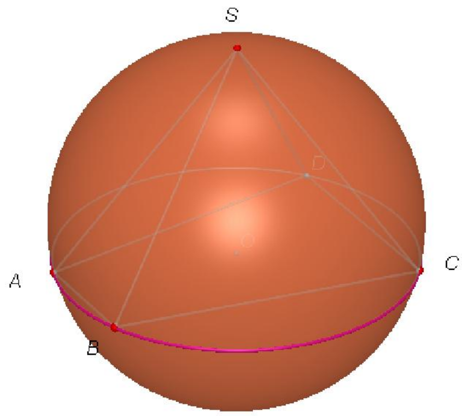
- Khối cầu bán kính R có bán kính là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

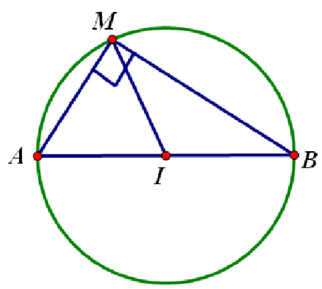
4. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

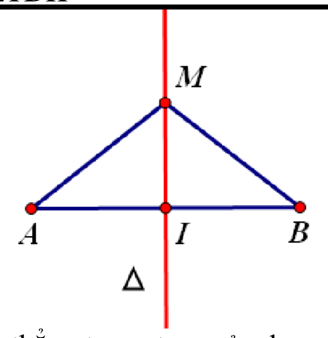
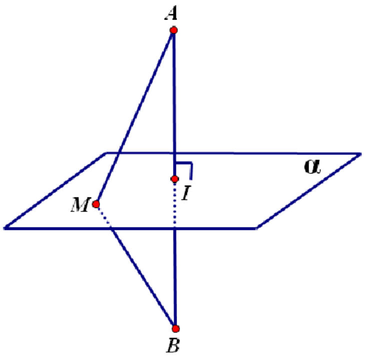
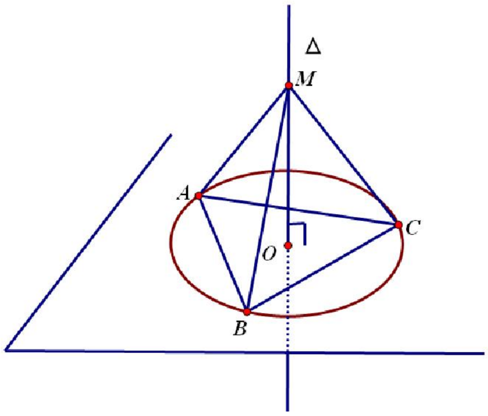
Định nghĩa: Mặt cầu ***đi qua mọi đỉnh*** của hình đa diện gọi là **mặt cầu ngoại tiếp** hình đa diện và hình đa diện gọi là nội tiếp mặt cầu đó.

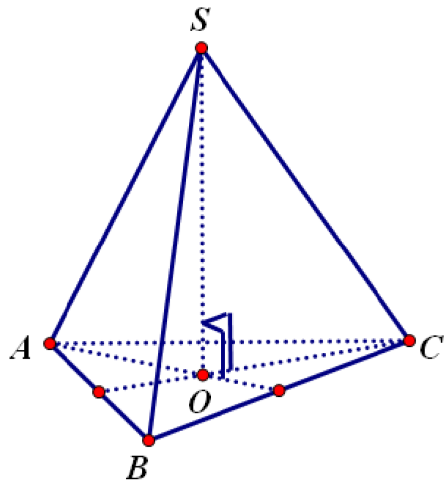
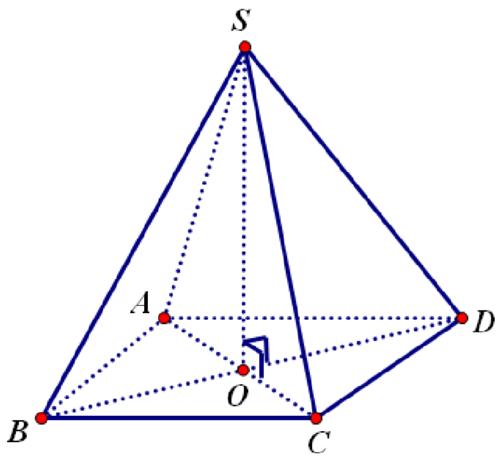




Một số kiến thức cơ bản có liên quan

 M: điểm nhìn đoạn AB dưới một góc vuông	$\begin{cases} \widehat{AMB} = 90^0 \\ \text{I la trung diem AB} \end{cases} \Rightarrow MI = \frac{AB}{2}$

 Δ: đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AB.	$M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB$
 α: mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB	$M \in \alpha \Leftrightarrow MA = MB$
 Δ: trục của tam giác ABC. **Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác được gọi là trục của đa giác.**	$M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB = MC$

Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều ?	Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều ?
	

II. Các bài toán luyện tập

Bài 1

Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $ABCD$, $SA = 2a$. Xác định tâm và tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $BC = 2a$, $SA = a$, $SA \perp \text{mp}(ABCD)$, SB hợp với mặt đáy một góc 45^0. Tính thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 3

Cho tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a$; $AB = AC= b$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$.

Bài 4

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Tính thể tích của hình lăng trụ và diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ theo a.

Bài 5

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

Bài 6

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó .

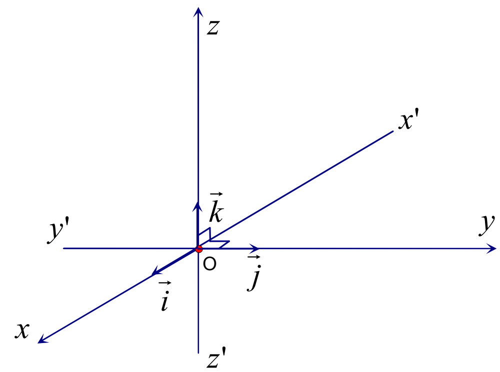
------------Hết------------

Chuyên đề 13: HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN
TỌA ĐỘ ĐIỂM - TỌA ĐỘ VÉC TƠ

I. Hệ trục toạ độ ĐỀ-CÁC trong không gian



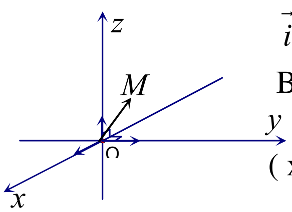
- $x'Ox$: trục hoành
- $y'Oy$: trục tung
- $z'Oz$: trục cao
- O : gốc toạ độ
- $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$: véc tơ đơn vị

  (hay $\vec{i};\vec{j};\vec{k}$: véc tơ đơn vị)

Quy ước : Không gian mà trong đó có chọn hệ trục toạ độ Đề-Các vuông góc Oxyz được gọi là không gian Oxyz và ký hiệu là : kg(Oxyz)

II. Toạ độ của một điểm và của một véc tơ:

1. Định nghĩa 1: Cho $M \in kg(Oxyz)$. Khi đó véc tơ $\overrightarrow{OM}$ được biểu diễn một cách duy nhất theo $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ bởi hệ thức có dạng : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + y\vec{k}$ với x,y,z $\in \mathbb{R}$.



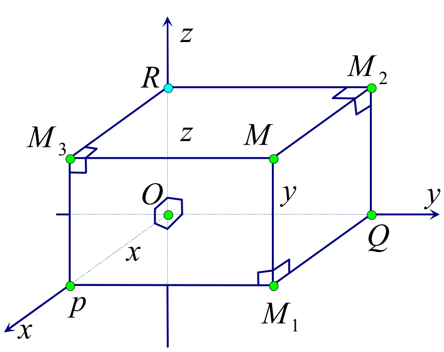
Bộ số (x;y;z) trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của điểm M.

Ký hiệu: M(x;y;z)

(x: hoành độ của điểm M; y: tung độ của điểm M, z: cao độ của điểm M)

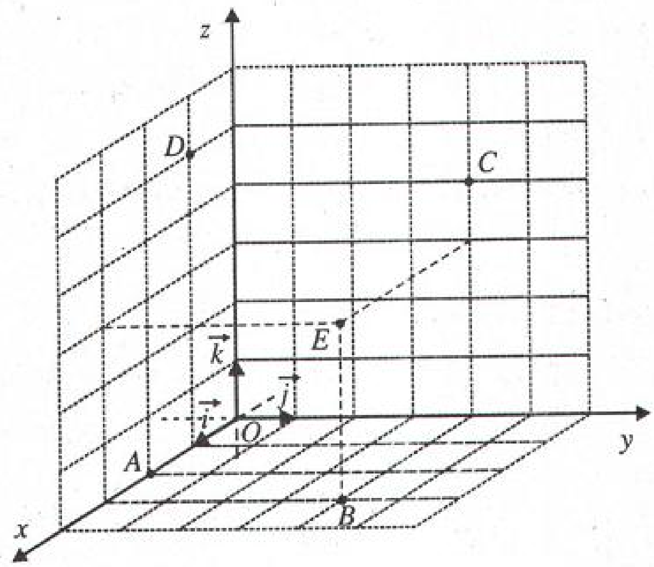
$$\boxed{M(x;y;z) \overset{đ/n}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

- **Ý nghĩa hình học:**



$$\boxed{x = \overline{OP} \quad ; \quad y = \overline{OQ} \quad ; \quad z = \overline{OR}}$$

Trên hình có một hệ trục toạ độ $Oxyz$ cùng với các hình vuông có cạnh bằng đơn vị.



a) Xác định toạ độ của các điểm A, B, C, D, E.

b) Dựng điểm P nếu $P = (3 ; 6 ; -3)$.

2. <u>Định nghĩa 2</u>: Cho $\vec{a} \in kg(Oxyz)$. Khi đó véc tơ $\vec{a}$ được biểu diễn một cách duy nhất theo $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ bởi hệ thức có dạng : $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ với $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Bộ số $(a_1;a_2;a_3)$ trong hệ thức trên được gọi là toạ độ của véc tơ $\vec{a}$.

<u>Ký hiệu</u>: $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

$$\boxed{\vec{a} = (a_1;a_2;a_3) \overset{đ/n}{\Leftrightarrow} \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}}$$

II. Các công thức và định lý về toạ độ điểm và toạ độ véc tơ :

<u>Định lý 1</u>: Nếu $A(x_A;y_A;z_A)$ và $B(x_B;y_B;z_B)$ thì

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)}$$

<u>Định lý 2</u>: Nếu $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2;b_3)$ thì

* $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
* $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
* $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
* $k.\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3) \qquad (k \in \mathbb{R})$

III. Sự cùng phương của hai véc tơ:

Nhắc lại

- Hai véc tơ cùng phương là hai véc tơ nằm trên cùng một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song .
- **Định lý về sự cùng phương của hai véc tơ:**

Định lý 3 : Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\boxed{\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \exists! k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \vec{a} = k.\vec{b}}$$

Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ thì số k trong trường hợp này được xác định như sau:

$k > 0$ khi $\vec{a}$ cùng hướng $\vec{b}$

$k < 0$ khi $\vec{a}$ ngược hướng $\vec{b}$

$$|k| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$$

Định lý 4 : $\boxed{A, B, C \text{ thẳng hàng } \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{AC}}$

Định lý 5: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có :

$$\boxed{\vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3}$$

IV. Tích vô hướng của hai véc tơ:

Nhắc lại:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}) \\ \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \\ \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \end{array}}$$

Định lý 6: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có :

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Định lý 7: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ta có :

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$$

Định lý 8: Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$ thì

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Định lý 9: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

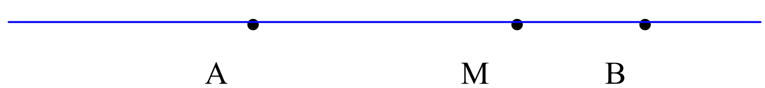
Định lý 10: Cho hai véc tơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ ta có :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}} . \sqrt{b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + b_3^{\ 2}}}$$

V. Điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số k:

Định nghĩa : Điểm M được gọi là chia đoạn AB theo tỷ số k ($k \neq 1$) nếu như :

$$\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$$



Định lý 11 : Nếu $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ và $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB}$ ($k \neq 1$) thì

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - k.x_B}{1-k} \\ y_M = \dfrac{y_A - k.y_B}{1-k} \\ z_M = \dfrac{z_A - k.z_B}{1-k} \end{cases}$$

Đặc biệt : M là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

Định lý 12: Cho tam giác ABC biết $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$

G là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A+z_B+z_C}{3} \end{cases}$

Ví dụ 1: Trong Kg(Oxyz) cho ba điểm A(3;1;0), B(-1;2;-1), C(2;-1;3)

Tìm điểm D sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành

Ví dụ 2: Trong Kg(Oxyz) cho ba điểm A(2;-1;6), B(-3;-1;-4), C(5;-1;0)

a. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông .

b. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC

c. Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ A

VI. Tích có hướng của hai véc tơ:

1. Định nghĩa: Tích có hướng của hai véc tơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là một véc tơ được ký hiệu : $\left[\vec{a};\vec{b}\right]$ có tọa độ là :

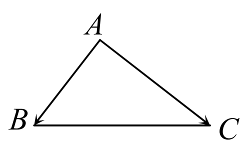
$$\boxed{\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)}$$

Cách nhớ:

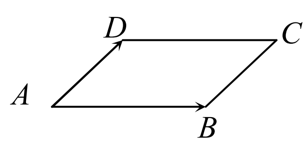
$$\begin{array}{l} \quad\ 1 \quad 2 \quad 3 \\ \vec{a}=(a_1;a_2;a_3) \\ \vec{b}=(b_1;b_2;b_3) \end{array}$$

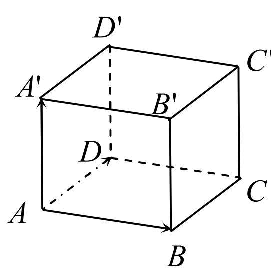
2. Tính chất:

- $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\perp\vec{a}$ và $\left[\vec{a};\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|$

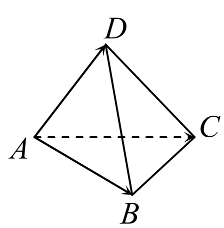


- $S_{\square ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right]\right|$





- $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$
- $V_{ABCD}=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$



- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}$ $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=\vec{0}$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
- A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG:

Bài 1: Cho bốn điểm A(-1;-2;4), B(-4;-2;0), C(3;-2;1), D(1;1;1)

a. Chứng minh rằng bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng

b. Tính diện tích tam giác ABC

c. Tính thể tích tứ diện ABCD

Bài 2: Tính thể tích tứ diện ABCD biết A(-1;-2;0), B(2;-6;3), C(3;-3;-1), D(-1;-5;3)

Bài 3:

Trong không gian toạ độ Oxyz, cho bốn điểm $A(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $B(-1\ ;\ 0\ ;\ 2)$, $C(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$ và $D(2\ ;\ 1\ ;\ -2)$.

a) Chứng minh rằng bốn điểm đó không đồng phẳng.

b) Tính độ dài đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

c) Tính góc CBD và góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

d) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh D.

Bài 4:

a) Tìm toạ độ điểm M thuộc Ox sao cho M cách đều hai điểm $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$ và $B(-3\ ;\ -3\ ;\ 2)$.

b) Cho ba điểm $A(2\ ;\ 0\ ;\ 4)$, $B(4\ ;\ \sqrt{3}\ ;\ 5)$ và $C(\sin 5t\ ;\ \cos 3t\ ;\ \sin 3t)$. Tìm t để AB vuông góc với OC (O là gốc toạ độ).

Bài 5:

Cho bốn điểm $A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $B(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $C(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ và $D(-2\ ;\ 1\ ;\ -2)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình tứ diện.

b) Tính góc tạo bởi các cạnh đối của tứ diện đó. Tính thể tích tứ diện $ABCD$ và độ dài đường cao của tứ diện kẻ từ đỉnh A.

Bài 6:

Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = h$, đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AC = b$, $BC = a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a) Tính độ dài MN.

b) Tìm sự liên hệ giữa a, b, h để MN vuông góc với SB.

Bài 7: Cho tứ diện ABCD với $A(2;-1;6), B(-3;-1;-4), C(5;-1;0), D(1;2;1)$. Chứng minh tam giác ABC vuông. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và thể tích tứ diện ABCD.

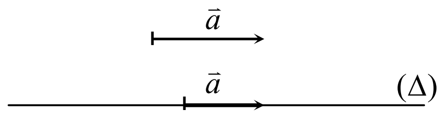
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. Các định nghĩa:

1. Véc tơ chỉ phương (VTCP) của đường thẳng:

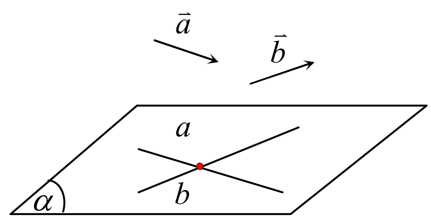
$$\vec{a} \text{ là VTCP của đường thẳng } (\Delta) \overset{dn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \text{ có giá song song hoặc trùng với } (\Delta) \end{cases}$$



Chú ý:

- Một đường thẳng có vô số VTCP, các véc tơ này cùng phương với nhau.
- Một đường thẳng (Δ) hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một VTCP của nó.

2. Cặp VTCP của mặt phẳng:



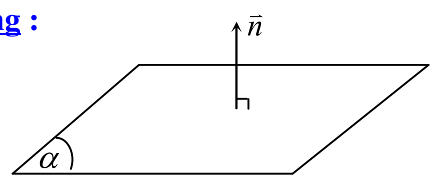
Cho mặt phẳng α xác định bởi hai đường thẳng cắt nhau a và b . Gọi $\vec{a}$ là VTCP của đường thẳng a và $\vec{b}$ là VTVP của đường thẳng b. Khi đó :

Cặp $(\vec{a},\vec{b})$ được gọi là cặp VTCP của mặt phẳng α

Chú ý :

- Một mặt phẳng α hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp VTCP của nó.

3. Véc tơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng :



$$\vec{n} \text{ là VTPT của mặt phẳng } \alpha \overset{dn}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \text{ có giá vuông góc với mp}\alpha \end{cases}$$

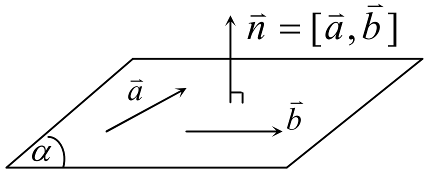
Chú ý :

- Một mặt phẳng có vô số VTPT, các véc tơ này cùng phương với nhau.
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm thuộc nó và một cặp VTPT của nó.

4. Cách tìm tọa độ một VTPT của mặt phẳng khi biết cặp VTCP của nó:

Định lý: Giả sử mặt phẳng α có cặp VTCP là : $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$ thì mpα có một VTPT là :

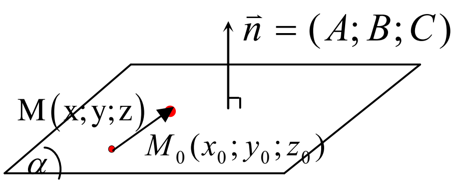
$$\vec{n} = \left[\vec{a}; \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$



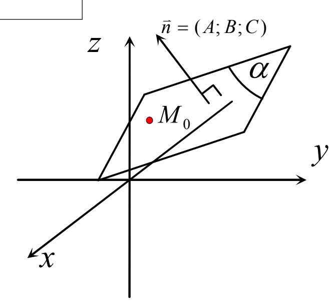
Ví dụ: Tìm một VTPT của mặt phẳng α biết α đi qua ba điểm A(-2;0;1), B(0;10;3), C(2;0;-1)

II. Phương trình của mặt phẳng :

Định lý 1: Trong Kg(Oxyz) . Phương trình mặt phẳng α đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có một VTPT $\vec{n} = (A; B; C)$ là:



$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



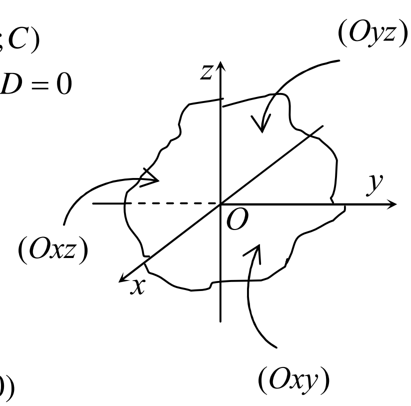
Định lý 2: Trong Kg(Oxyz) . Phương trình dạng :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ với } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

là phương trình tổng quát của một mặt phẳng .

Chú ý :

- Nếu $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ thì (α) có một VTPT là $\vec{n} = (A; B; C)$
- $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \Leftrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$



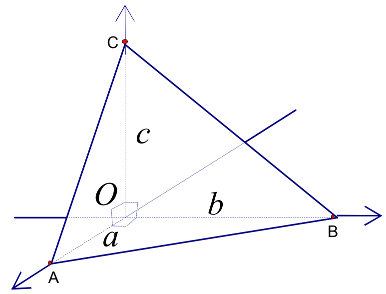
Các trường hợp đặc biệt:

1. Phương trình các mặt phẳng tọa độ:

- (Oxy):z = 0
- (Oyz):x = 0
- (Oxz):y = 0

2. Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn:

- Phương trình mặt phẳng cắt các trục Ox, Oy, Oz tại $\begin{cases} A(a;0;0) \\ B(0;b;0) \\ C(0;0;c) \end{cases}$ (a,b,c $\neq$ 0) là: $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$



Ví dụ 1: Trong Kg(Oxyz) cho ba điểm A(3;1;0), B(-1;2;-1), C(2;-1;3)
Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

Ví dụ 2: Trong Kg(Oxyz) cho $A(1;2;3), B(2;-3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

Ví dụ 3: Trong Kg(Oxyz) cho hai mặt phẳng $(P): x+2y+3z+4=0$ và $(R): 3x+2y-z-1=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) đi qua $A(1;1;1)$ đồng thời vuông góc với cả (P) và (Q).

Ví dụ 4: Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC có giá trị nhỏ nhất.

III. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng :

1. Một số quy ước và ký hiệu:

Hai bộ n số : $\begin{cases}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\\(b_1, b_2, \ldots, b_n)\end{cases}$ được gọi là tỷ lệ với nhau nếu có số $t \neq 0$ sao cho $\begin{cases}a_1 = tb_1\\a_2 = tb_2\\.\\.\\a_n = tb_n\end{cases}$

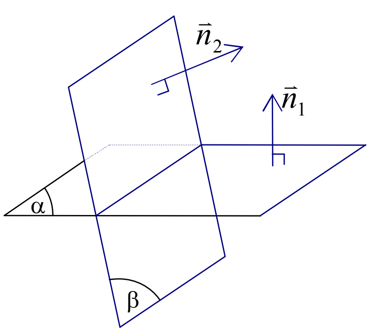
Ký hiệu: $a_1 : a_2 : \ldots : a_n = b_1 : b_2 : \ldots : b_n$ hoặc $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$

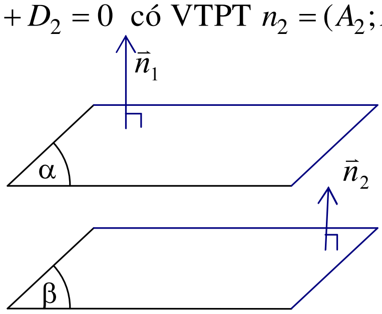
2. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng:

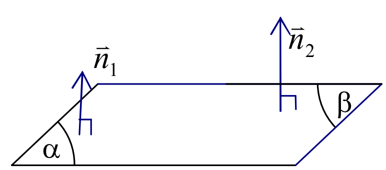
Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho hai mặt phẳng α, β xác định bởi phương trình :

$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$

$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có VTPT $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$







(α) cắt (β) $\Leftrightarrow$ $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ (hay: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ *hoặc* $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ *hoặc* $\frac{C_1}{C_2} \neq \frac{A_1}{A_2}$)

$(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$

$(\alpha) \equiv (\beta) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$

Đặc biệt:

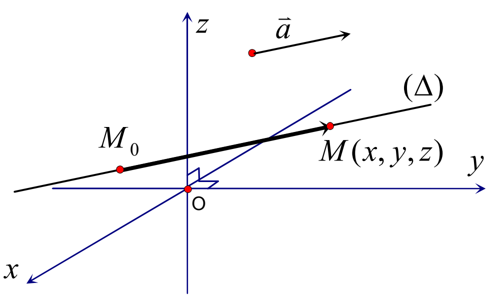
$$\boxed{\alpha \perp \beta \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$

ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

I. Phương trình của đường thẳng:

1. Phương trình tham số của đường thẳng:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) . Phương trình tham số của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ làm VTCP là :



$$\boxed{(\Delta): \begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})}$$

2. Phương trình chính tắc của đường thẳng:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) . Phương trình chính tắc của đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$ làm VTCP là :

$$\boxed{(\Delta): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}}$$

Ví du 1:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;2;1)$, $B(0;2;5)$

Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua A và B.

Ví du 2:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$ và trọng tâm $G(0;2;-1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm C và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

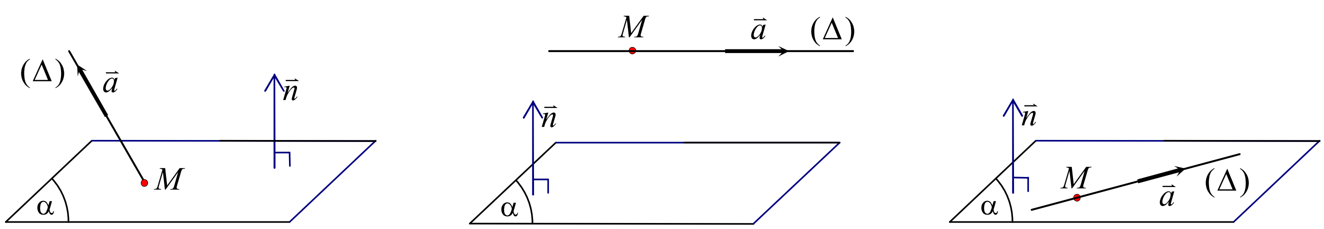
Ví du 3:

Cho điểm M(-2;1;1) và đường thẳng $(d):\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1-t \\ z=3+t \end{cases}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M và vuông góc với đường thẳng (d).

Ví dụ 4: Cho điểm M(1;2;3) và đường thẳng $(d):\frac{x}{1}=\frac{z}{-1}=\frac{z}{1}$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm M và đường thẳng (d)

II. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng :



Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho :

đường thẳng $(\Delta):\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$

và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$

Khi đó :

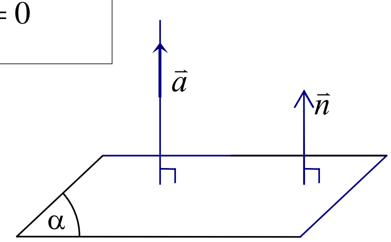
$$(\Delta) \text{ cắt } (\alpha) \Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3 \neq 0$$

$$(\Delta) // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases}$$

$$(\Delta) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

Đặc biệt:

$$(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow a_1:a_2:a_3=A:B:C$$



Chú ý: Muốn tìm giao điểm M của (Δ) và (α) ta giải hệ phương trình : $\begin{cases} pt(\Delta) \\ pt(\alpha) \end{cases}$ tìm x,y,z

Suy ra: M(x,y,z)

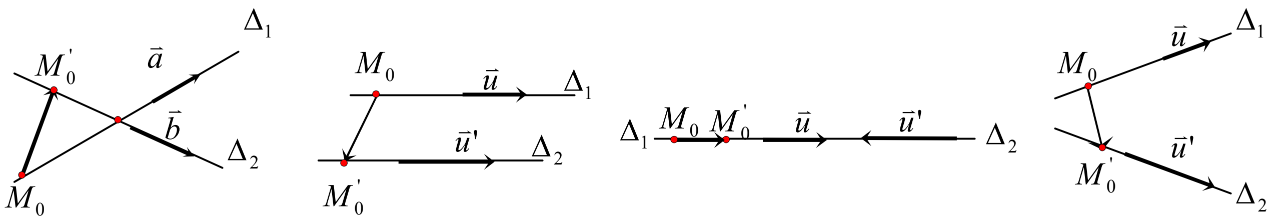
Ví dụ 1: Cho hai điểm A(0;0;-3) , B(2;0;-1) và mặt phẳng (P): 3x - 8y + 7z -1 = 0

Tìm toạ độ giao điểm I của đường thẳng AB và mặt phẳng (P).

Ví dụ 2: Cho điểm M(1;1;1) và mặt phẳng (P) có phương trình: $x+2y-3z+14=0$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P).

Ví dụ 3: Cho đường thhẳng $(d): \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-2}{-4}$ và mặt phẳng $(P): x - 3y - 4m^2z + m = 0$. Tìm m để đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P).

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng :



Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ có VTCP $\vec{u} = (a;b;c)$ và qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$

$(\Delta_2): \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$ có VTCP $\vec{u'} = (a';b';c')$ và qua $M_0'(x_0';y_0';z_0')$

- (Δ_1) và (Δ_2) đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0$
- (Δ_1) cắt (Δ_2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} = 0 \\ a:b:c \neq a':b':c' \end{cases}$
- $(\Delta_1) // (\Delta_2)$ $\Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' \neq (x_0'-x_0):(y_0'-y_0):(z_0'-z_0)$
- $(\Delta_1) \equiv (\Delta_2)$ $\Leftrightarrow a:b:c = a':b':c' = (x_0'-x_0):(y_0'-y_0):(z_0'-z_0)$
- (Δ_1) và (Δ_2) chéo nhau $\Leftrightarrow \left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'} \neq 0$

Chú ý: Muốn tìm giao điểm M của (Δ_1) và (Δ_2) ta giải hệ phương trình : $\begin{cases} pt(\Delta_1) \\ pt(\Delta_2) \end{cases}$ tìm x,y,z

Suy ra: M(x,y,z)

III. Góc trong không gian:

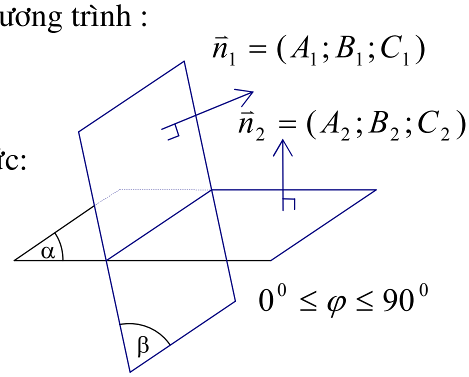
1. Góc giữa hai mặt phẳng:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho hai mặt phẳng α, β xác định bởi phương trình :

$$(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha) \& (\beta)$ ta có công thức:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}}$$



Ví dụ: Cho hai mặt phẳng $(P): x + y + \sqrt{2} = 0 \& (Q): -x + z + \sqrt{3} = 0$. Xác định góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

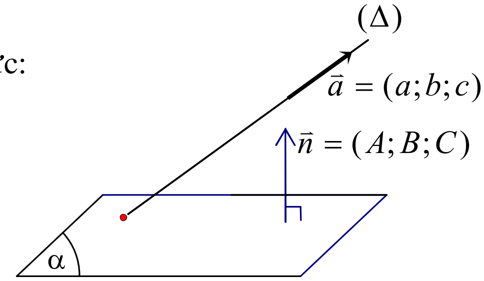
2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(\Delta)\,\&\,(\alpha)$ ta có công thức:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$



$0^0 \le \varphi \le 90^0$

3.Góc giữa hai đường thẳng :

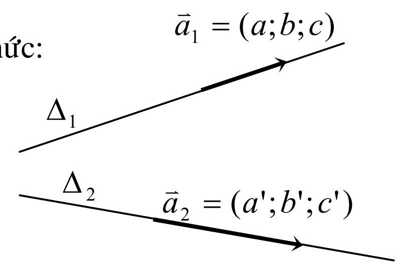
Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng :

$$(\Delta_1): \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$(\Delta_2): \frac{x-x_0}{a'} = \frac{y-y_0}{b'} = \frac{z-z_0}{c'}$$

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(\Delta_1)\,\&\,(\Delta_2)$ ta có công thức:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}}$$



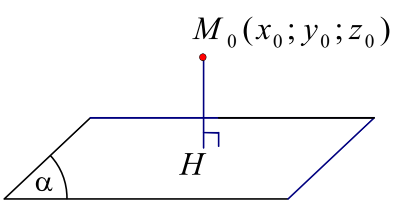
$0^0 \le \varphi \le 90^0$

IV. Khoảng cách:

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$

Khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính bởi công thức:



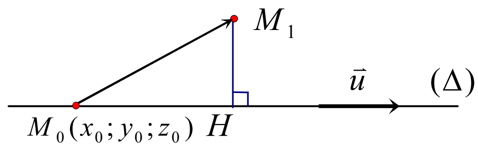
$$\boxed{d(M_0;\Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Ví dụ: Cho hình tứ diện ABCD biết tọa độ các đỉnh A(2,3,1) ; B(4,1,-2) ; C(6,3,7) ; D(-5,-4,8)

Tính độ dài đường cao hình tứ diện xuất phát từ D.

2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_1 đến (Δ) được tính bởi công thức:



$$d(M_1,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1};\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Ví dụ: Cho đường thẳng : $(d):\frac{x}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{1}$ và điểm A(1;2;1)

Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d).

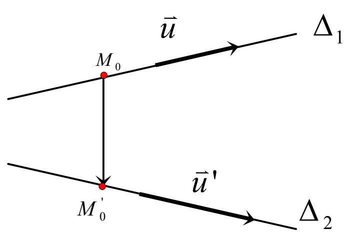
3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho hai đường thẳng chéo nhau :

(Δ_1) có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ và qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$

(Δ_2) có VTCP $\vec{u'}=(a';b';c')$ và qua $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)$

Khi đó khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2) được tính bởi công thức



$$d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\vec{u};\vec{u'}\right]\right|}$$

Ví dụ: Cho hai đường thẳng :

$$(d_1):\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2} \text{ và } (d_2):\begin{cases}x=9+6t\\ y=-2t\\ z=2-t\end{cases}$$

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: (A-2012)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 2: (B-2012)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;0;3)$, $M(1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM.

Bài 3: (D-2012)

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{1}$ và hai điểm $A(1, -1, 2)$, $B(2, -1, 0)$. Xác định tọa độ điểm M sao cho tam giác AMB vuông tại M.

Bài 4:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng d: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$.
Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox.

Bài 5:

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$ và (Q): $x - y + z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) vuông góc với (P) và (Q) sao cho khoảng cách từ O đến (R) bằng 2.

Bài 6:

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và Δ_2: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1.

Bài 7:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ.

Bài 8:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;0)$, $B(1;2;2)$, $C(1;1;0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 20 = 0$. Xác định toạ độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P).

Bài 9:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 3 = 0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$.

Bài 10:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2; 1; 1)$, $B(-3; -1; 2)$. Tìm toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$.

Bài 11:

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, trong đó b, c dương và mặt phẳng (P): $y - z + 1 = 0$. Xác định b và c, biết mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) và khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng $\dfrac{1}{3}$.

Bài 12:

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM.

Bài 13:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P).

Bài 14:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

Bài 15:

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 0; 1)$, $B(0; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$.

Bài 16:

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $x - 2y + z = 0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC = \sqrt{6}$.

Bài 17:

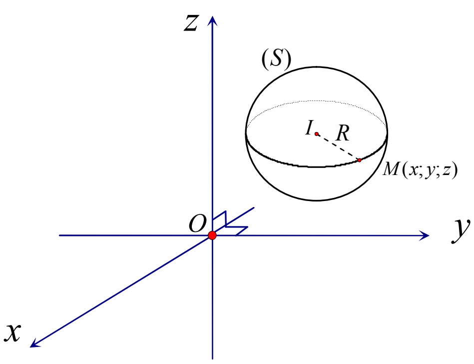
Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN

I. Phương trình mặt cầu:

1. Phương trình chính tắc:

Định lý : Trong Kg(Oxyz). Phương trình của mặt cầu (S) tâm I(a;b;c), bán kính R là :



$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (1)$$

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của mặt cầu

Đặc biệt: Khi I ≡O thì $(C):x^2+y^2+z^2=R^2$

2. Phương trình tổng quát:

Định lý : Trong Kg(Oxyz). Phương trình :

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$$

với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình của mặt cầu (S) có tâm I(a;b;c), bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

Ví dụ: Cho 4 điểm A(-1;-2;0), B(2;-6;3), C(3;-3;-1), D(-1;-5;3)

Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Xác định tâm và bán kính của mặt cầu

II. Giao của mặt cầu và mặt phẳng:

Định lý: Trong Kg(Oxyz) cho mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) có phương trình :

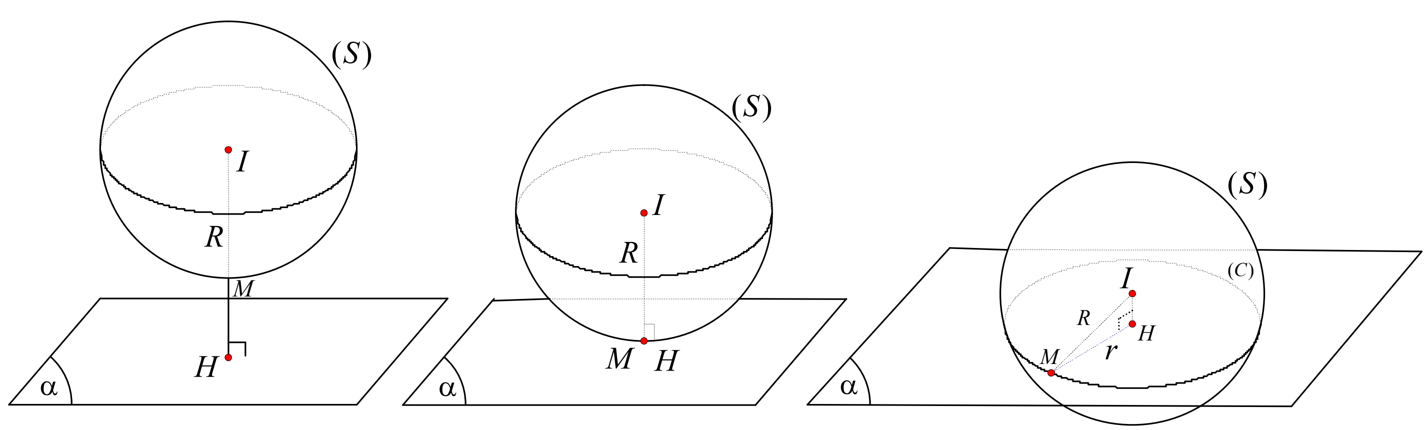
$$(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$$

$$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Gọi d(I;α) là khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) đến mặt phẳng α

Ta có :

1. (α) cắt mặt cầu (S) ⇔ d(I;α) < R
2. (α) tiếp xúc mặt cầu (S) ⇔ d(I;α) =R
3. (α) không cắt mặt cầu (S) ⇔ d(I;α) > R



Chú ý:

Khi α cắt mặt cầu (S) thì sẽ cắt theo một đường tròn (C). Đường tròn (C) này có:

- Phương trình là: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \end{cases}$
- Tâm là hình chiếu vuông góc của tâm mặt cầu trên mặt phẳng α
- Bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,\alpha)}$

Ví dụ: Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$. Viết phương trình tiếp diện của mặt cầu tại điểm M(0;1;-2).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: (A-2012)

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz,* cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0;0;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

Bài 2: (B-2012)

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d.

Bài 3: (D-2012)

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+10=0$ và điểm $I(2, 1, 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Bài 4:

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+2z=0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng Δ, bán kính bằng 1 và tiếp xúc với mặt phẳng (P).

Bài 5:

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(2; 0; 1), B(1; 0; 0), C(1; 1; 1) và mặt phẳng (P): $x+y+z-2=0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Bài 6:

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; 2; -3)$ và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{26}$.

Bài 7:

Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+4=0$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{AB}{6}$, có tâm thuộc đường thẳng AB và (S) tiếp xúc với (P).

Bài 8:

Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;\ 0;\ -2)$ và đường thẳng Δ: $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$. Tính khoảng cách từ A đến Δ. Viết phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$.

Bài 9:

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y - z - 4 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Chuyên đề 14: GIỚI HẠN – LIÊN TỤC – ĐẠO HÀM

A. Giới hạn

1. Các giới hạn cơ bản:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$ (C là hằng số)

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ($f(x_0)$ phải xác định)

3) $\lim\limits_{x \to \infty} C = C$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{C}{x^k} = 0$

Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k **nguyên dương**

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ với k là **số lẻ**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ với k là **số chẵn.**

2. Các quy tắc tính giới hạn:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$

Quy tắc 1: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = ?$ được cho trong bảng sau:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$	Dấu của L	$\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right]$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

(Quy tắc nầy vẫn đúng cho các trường hợp sau: $x \to x_0^+; x \to x_0^-; x \to +\infty; x \to -\infty$)

Quy tắc 2: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \in I \backslash \{x_0\}$,

trong đó I là một khoảng nào đó chứa x_0 thì $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của g(x)	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

(Quy tắc nầy vẫn đúng cho các trường hợp sau: $x \to x_0^+; x \to x_0^-; x \to +\infty; x \to -\infty$)

3. Các ví dụ:

Ví dụ 1: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3 + 3x^2 - 4x + 2\right)$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + 3x^2 + 4\right)$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^4 + 2x^2 + 3\right)$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{3}{2}\right)$

Ví dụ 2: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x+1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2-x}{2x+1}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2x+1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{2-x}{2x+1}$

Ví dụ 3: Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2 - 2x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 - 3x - 1}{x-2} - 2x\right]$

a) $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2}$

B. Liên tục

Các định nghĩa:

- **Định nghĩa 1**: Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$.
  Hàm số f được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- **Định nghĩa 2**: Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng $(a;b)$.
  Hàm số f được gọi là liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng $(a;b)$
- **Định nghĩa 3**: Giả sử hàm số f(x) xác định trên đoạn $[a;b]$.
  Hàm số f được gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$

Định lý:

1) Tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số liên tục tại một điểm là những hàm số liên tục tại điểm đó.
2) Hàm **đa thức** và hàm **phân thức hữu tỷ** (thương của hai đa thức) **liên tục trên tập xác định** của chúng (tức là liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định của chúng).
3) Các hàm **lượng giác** $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ **liên tục trên tập xác định** của chúng.

C. Đạo hàm

1) Định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm:

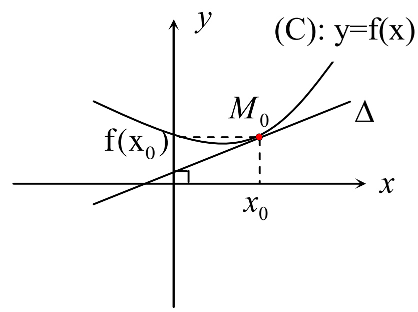
Cho hàm số y=f(x) xác định trên khoảng (a;b) và $x_0 \in (a;b)$.

Đạo hàm của hàm số y=f(x) tại điểm x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$ là giới hạn hữu hạn (nếu có) của $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

- Cho hàm số y=f(x) có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. (C) là đồ thị của hàm số $M_0(x_0;f(x_0)) \in (C)$ và Δ là tiếp tuyến của (C) tại M



a) Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

- Đạo hàm của hàm số y=f(x) tại điểm x_0 là hệ số góc k của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$

$$k = f'(x_0) \qquad (k = \tan\alpha \text{ với } \alpha = (ox;\Delta))$$

b) Phương trình tiếp tuyến:

- Nếu hàm số y=f(x) có đạo hàm tại x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là:

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

hay: $y - y_0 = k(x-x_0)$ **trong đó :** $\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ k = f'(x_0) \end{cases}$

3. Các quy tắc tính đạo hàm:

Đạo hàm của tổng hiệu tích thương các hàm số

a. Đạo hàm của tổng (hiệu): $(u \pm v)' = u' \pm v'$

b. Đạo hàm của tích:

$(u.v)' = u'.v + u.v'$ Đặc biệt $(C.u)' = C.u'$ Với C là hằng số.

c. Đạo hàm của thương:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2} \text{ Đặc biệt } \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-1}{v^2} \text{ và } \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C.v'}{v^2}$$

d. Đạo hàm của hàm số hợp:

Cho hai hàm số $y = f(u)$ và $u = g(x)$ khi đó $y = f[g(x)]$ được gọi là hàm hợp của hai hàm số trên, khi đó: $y'_x = y'_u.u'_x$

3. Đạo hàm của các hàm số cơ bản:

$(C)' = 0$ (C là hằng số) $(x)' = 1$ $(C.x)' = C$	**Với u là một hàm số**
$(x^n)' = n.x^{n-1}$ $(n \in N, n \ge 2)$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u'\cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = (1+\tan^2 u).u'$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -(1+\cot^2 u).u'$
$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{a.d - c.b}{(cx+d)^2}$	$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\right)' = \frac{a.a_1x^2 + 2a.b_1x + b.b_1 - a_1.c}{(a_1x+b_1)^2}$

- Đạo hàm của hàm số mũ:

$(e^x)' = e^x$ $\qquad$ $(a^x)' = a^x.\ln a$

$(e^u)' = e^u.u'$ (với u là một hàm số) $\qquad$ $(a^u)' = a^u.\ \ln a\ .u'$ (với u là một hàm số)

- Đạo hàm của hàm số lôgarit:

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ và $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ và $(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$ (với u là một hàm số)

$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ và $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x\ln a}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$ và $(\log_a |u|)' = \frac{u'}{u.\ln a}$ (với u là một hàm số)

RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

Ví dụ 1 : Tìm đạo hàm của các hàm số sau

1) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 11$ $\qquad$ 2) $y = \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{3}{2}$

3) $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ $\qquad$ 4) $y = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x+1}$

Ví dụ 2 : Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = 2\sin x + \sin 2x$ 2) $y = 3\cos 2x + 2\cos x$

3) $y = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x$ 4) $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x$

Ví dụ 3 : Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 5}$ 2) $y = x + 1 - \sqrt{4 - x^2}$

3) $y = (3 - x)\sqrt{x^2 + 1}$ 4) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Ví dụ 4: Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y = x\sqrt{4 - x}$ 2) $y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3) $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x}$ 4) $y = x + \sqrt{2 - x^2}$

Ví dụ 5: Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ khi biết

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$ 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

3) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ 4) $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 1}$

Ví dụ 6: Tính $f'(x)$ và lập bảng xét dấu của $f'(x)$ khi biết

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ 2) $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 6$

3) $f(x) = \frac{3x + 1}{1 - x}$ 4) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

Ví dụ 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số

1) $y = x^3 - 3x + 2$ tại điểm trên (C) có hoành độ bằng 2.

2) $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm trên (C) có tung độ bằng 8.

3) $y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ tại giao điểm của (C) với trục tung.

Ví dụ 8 : Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số

1) $y = x^3 - 3x + 2$ biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng 9.

2) $y = x^4 - 2x^2$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 24x$.

3) $y = \frac{2x + 3}{2x - 1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{2}x$.

C. VI PHÂN

Nếu hàm số f có đạo hàm f' thì tích $f'(x).\Delta x$ gọi là vi phân của hàm số $y = f(x)$, ký hiệu là $df(x) = f'(x).\Delta x$ (1) . Đặc biệt với hàm số $y = x$ ta có $dx = (x)'.\Delta x = \Delta x$ nên (1) có thể viết thành:

$$df(x) = f'(x).dx$$

--------------------Hết----------------------

Chuyên đề 15: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

Bài 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Trong bài này chúng ta sẽ ứng dụng đạo hàm để xét tính đơn điệu (tức là tính đồng biến và nghịch biến) của hàm số. Đồng thời sẽ xét các ứng dụng của tính đơn điệu trong việc chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình.

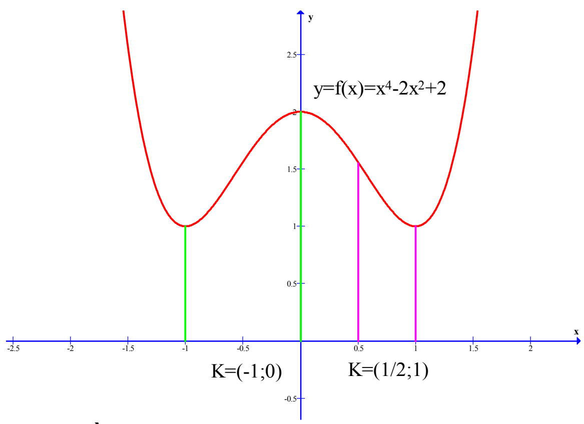
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nữa khoảng và f là hàm số xác định trên K.

I) ĐỊNH NGHĨA

- Hàm số f được gọi là ***đồng biến (tăng)*** trên K nếu
  $$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- Hàm số f được gọi là ***nghịch biến (giảm)*** trên K nếu
  $$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Minh họa:



- Nếu hàm số ***đồng biến*** trên K thì đồ thị ***đi lên*** từ trái sang phải
- Nếu hàm số ***nghịch biến*** trên K thì đồ thị ***đi xuống*** từ trái sang phải
- Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K được gọi chung là ***hàm số đơn điệu*** trên K.

II) CÁC ĐỊNH LÝ

1) Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

a) Nếu hàm số $f(x)$ ***đồng biến*** trên K thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$

b) Nếu hàm số $f(x)$ ***nghịch biến*** trên K thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$

- [f(x) đồng biến trên K] $\Rightarrow$ [$f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$]
- [f(x) nghịch biến trên K] $\Rightarrow$ [$f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$]

2) Định lý 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

a) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ ***đồng biến*** trên K

b) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ ***nghịch biến*** trên K

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $f(x)$ ***không đổi*** trên K

- [$f'(x) > 0$ với mọi $x \in K$] $\Rightarrow$ [f(x) đồng biến trên K]
- [$f'(x) < 0$ với mọi $x \in K$] $\Rightarrow$ [f(x) nghịch biến trên K]
- [$f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$] $\Rightarrow$ [f(x) không đổi trên K]

Chú ý quan trọng:

Khoảng K trong định lý trên có thể được thay bởi một đoạn hoặc một nữa khoảng. Khi đó phải bổ sung giả thiết **"Hàm số liên tục trên đoạn hoặc nữa khoảng đó".** Cụ thể

- Nếu hàm số ***liên tục*** trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x)>0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f đồng biến trên ***đoạn*** $[a;b]$
- Nếu hàm số ***liên tục*** trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm $f'(x)<0$ trên khoảng $(a;b)$ thì hàm số f nghịch biến trên ***đoạn*** $[a;b]$

3) Định lý 3: (Định lý mở rộng) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.

a) Nếu $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.

b) Nếu $f'(x)\le 0$ với mọi $x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Tính đơn điệu của hàm số bậc ba

4) Định lý 4: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\ne 0)$, ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

a) Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\ne 0)$ ***đồng biến*** trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c\ge 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

b) Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\ne 0)$ ***nghịch biến*** trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c\le 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

B. THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

I. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

1.Dạng 1: Xét chiều biến thiên của hàm số.

Ví dụ 1: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

a) $y=f(x)=x^3-x^2-x+3$ b) $y=f(x)=-x^3-3x^2+9x+11$

c) $y=f(x)=\dfrac{x^4}{4}-2x^2+6$ d) $y=f(x)=-x^4+4x^2-3$

e) $y=f(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$ f) $y=f(x)=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

Ví dụ 2: Xét chiều biến thiên của các hàm số sau

a) $y=x+\sqrt{2-x^2}$ b) $y=x\sqrt{4-x}$

c) $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ d) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

2.Dạng 2: Định tham số để hàm số đơn điệu trên một miền K cho trước.

Ví dụ 1: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+(m+6)x-(2m+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-4$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x)=x^3-(m+1)x^2+(2m-1)x+m^2-2$

a) Đồng biến trên $\mathbb{R}$

b) Đồng biến trên nữa khoảng $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của tham số a sao cho hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+(2a^2+3a+1)x-3a$

a) Nghịch biến trên $\mathbb{R}$

b) Nghịch biến trên mỗi nữa khoảng $(-\infty;-1]$ và $[3;+\infty)$

Ví dụ 4: Tìm các giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x)=-x^3+3x^2+3mx-1$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ **(Khối A-2013)**

II. CÁC DẠNG TOÁN NÂNG CAO

1.Dạng 1: Sử dụng tính đơn điệu chứng minh bất đẳng thức.

a) Ví dụ 1: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

i) $\sin x < x$ với mọi $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

ii) $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$ với mọi $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

b) Ví dụ 2: Chứng minh các bất đẳng thức sau:

i) $2\sin x+\tan x > 3x$ với mọi $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

ii) $\sin x+\tan x > 2x$ với mọi $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

2.Dạng 2: Sử dụng tính đơn điệu giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình.

Bổ sung các tính chất của tính đơn điệu

- **Tính chất 1**: Giả hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a;b)$ và $u;v \in (a;b)$ ta có:
$$f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v$$
- **Tính chất 2**: Giả hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a;b)$ và $u;v \in (a;b)$ ta có:
$$f(u)<f(v) \Leftrightarrow u<v$$
- **Tính chất 3**: Giả hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ và $u;v \in (a;b)$ ta có:
$$f(u)<f(v) \Leftrightarrow u>v$$
- **Tính chất 4**: Nếu hàm số $y=f(x)$ ***đồng biến*** trên $(a;b)$ và $y=g(x)$ làm ***hàm hằng*** hoặc là một hàm số ***nghịch biến*** trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$

Dựa vào tính chất trên ta suy ra:

Nếu có $x_0 \in (a;b)$ sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ thì phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm ***duy nhất*** trên $(a;b)$

a) Ví dụ 1: Giải phương trình $\sqrt{x+9}+\sqrt{2x+4}=5$

b) Ví dụ 2: Giải phương trình $x-\cos x-\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

c) Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{x^2+15}=3x-2+\sqrt{x^2+8}$

d) Ví dụ 4: Giải bất phương trình $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<\sqrt{5-2x}$

e) Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\cot x-\cot y=x-y\\ 5x+8y=2\pi\end{cases}$ với $x,y \in (0;\pi)$

f) Ví dụ 6: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{1-y}-\sqrt{1-x}=0 \\ \sqrt{x}+\sqrt{1-y}=\sqrt{2} \end{cases}$

C. BÀI TẬP VỀ NHÀ

Bài 1: Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số sau

a) $y=f(x)=-x^3+3x^2+9x+5$ b) $y=f(x)=-x^4+2x^2+3$

c) $y=f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$ d) $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$

Bài 2: Lập bảng biến thiên của các hàm số sau

a) $y=x+\sqrt{4-x^2}$

b) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{9-x}$

c) $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(x+1)(8-x)}$

Bài 3: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}(a-1)x^3+ax^2+(3a-2)x+2$

Tìm a để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bài 4: Tùy theo m hãy xét sự biến thiên của hàm số $y=x^2(m-x)-m$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$

b) $\sin x+\cos x+\sqrt{2}x-1=0$

c) $4x^3+12x-8-\cos 3x+9\cos x=0$

Bài 6: Giải bất phương trình $x^2+x+6\sqrt{x+2}<18$

Bài 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x+1=y^3+y^2+y \\ 2y+1=z^3+z^2+z \\ 2z+1=x^3+x^2+x \end{cases}$

Bài 8: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng:

$$\sin A+\sin B+\sin C+\tan A+\tan B+\tan C>2\pi$$

------------------------Hết-----------------------

Bài 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

KHÁI NIỆM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

I) ĐỊNH NGHĨA: Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

- x_0 được gọi là một **ĐIỂM CỰC ĐẠI** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho

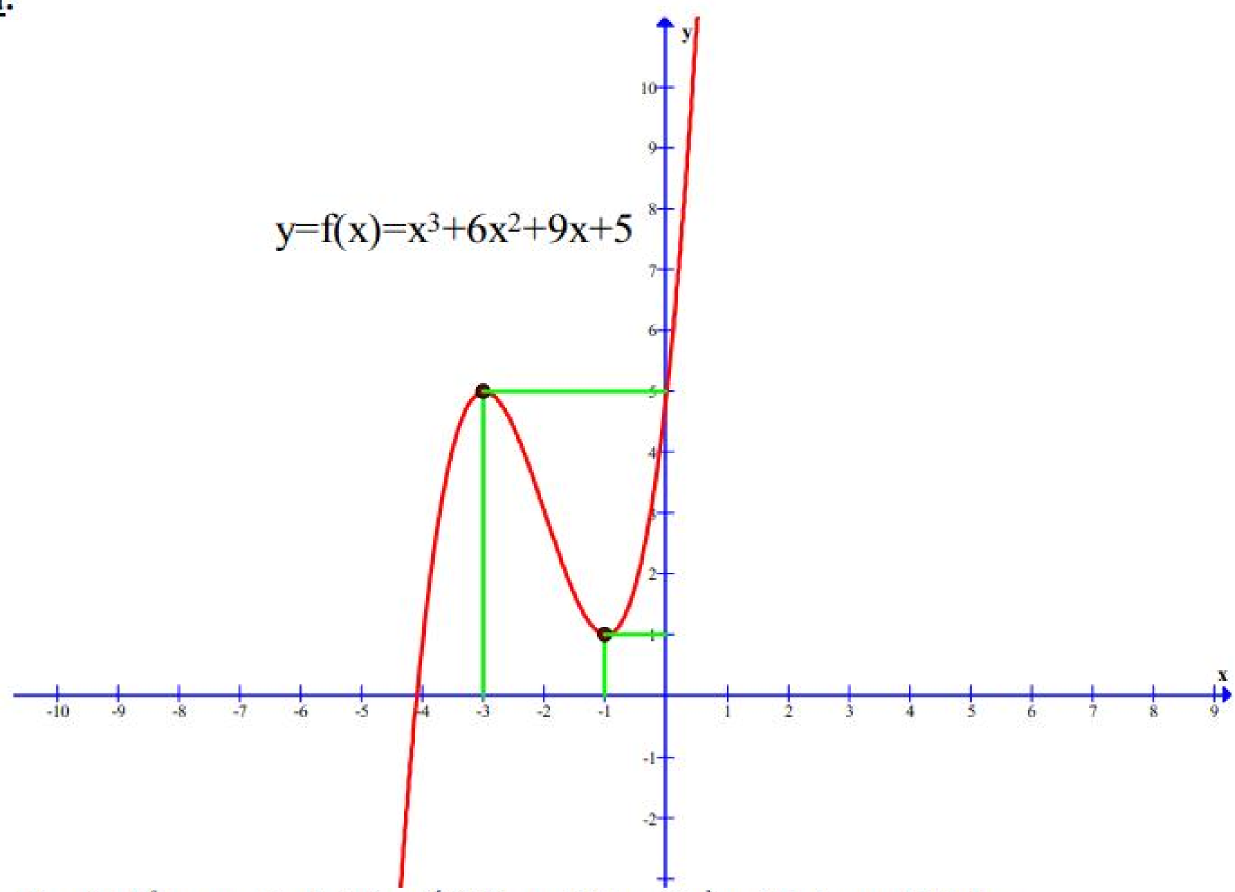
$$\begin{cases} (a;b) \subset D \\ f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (a;b) \setminus \{x_0\} \end{cases}$$

  Khi đó $f(x_0)$ được gọi là **GIÁ TRỊ CỰC ĐẠI** của hàm số f.

- x_0 được gọi là một **ĐIỂM CỰC TIỂU** của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 sao cho

$$\begin{cases} (a;b) \subset D \end{cases}$$

Minh họa:



- Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì người ta nói rằng **f đạt cực trị tại** x_0.
- Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $M(x_0;f(x_0))$ được gọi là **điểm cực trị của đồ thị hàm số f.**
- Giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số f nói chung không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập hợp D.
- Hàm số f có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp D.

II) CÁC ĐỊNH LÝ:

1) Định lý 1: (điều kiện cần để hàm số có cực trị)

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Ý nghĩa hình học: Nếu hàm số f đạt cực trị tại x_0 và nếu đồ thị của hàm số có tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; f(x_0))$ thì tiếp tuyến tại đó ***cùng phương*** (song song hoặc trùng) với ***trục hoành.***

2) Định lý 2: (điều kiện đủ thứ I để hàm số có cực trị)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó

a) Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$
thì hàm số $f(x)$ đạt ***cực tiểu*** tại điểm x_0.

b) Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0;b)$
thì hàm số $f(x)$ đạt ***cực đại*** tại điểm x_0.

x	a		x_0		b
f'(x)		−		+	
f(x)		↘	CT	↗	

x	a		x_0		b
f'(x)		+		−	
f(x)		↗	CĐ	↘	

3) Định lý 3: (điều kiện đủ thứ II để hàm số có cực trị)

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0) = 0$ và f có đạo hàm cấp hai khác không tại điểm x_0. Khi đó

a) Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt ***cực đại*** tại điểm x_0. .

b) Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số $f(x)$ đạt ***cực tiểu*** tại điểm x_0. .

B. THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

I. CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

1.Dạng 1: Tìm cực trị của hàm số

Ví dụ 1: Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y = f(x) = x^3 - x^2 - x + 3$ b) $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 11$

c) $y = f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 6$ d) $y = f(x) = -x^4 + 4x^2 - 3$

e) $y = f(x) = \dfrac{3x+1}{x+1}$ f) $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

Ví dụ 2: Tìm cực trị của các hàm số sau

a) $y = x + \sqrt{2 - x^2}$ b) $y = x\sqrt{4 - x}$

c) $y = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$

2. Dạng 2: Định tham số để hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 cho trước.

Ví dụ : Tìm các giá trị của tham số m để hàm số

a) $y = f(x) = -x^3 - (2m-1)x^2 + (m-5)x + 1$ đạt cực trị tại $x = 1$

b) $y = \frac{x^3}{3} + (m^2 - m + 2)x^2 + (3m^2+1)x + m$ đạt cực tiểu tại $x = -2$

CÁC BÀI TOÁN THI ĐẠI HỌC

Bài 1: (B-2014)

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1), với m là tham số thực.

Cho điểm $A(2;3)$. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A.

Bài 2: (B-2013)

Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ (1), với m là tham số thực.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Bài 3: (A-2012)

Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực.

Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Bài 4: (B-2012)

Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Bài 5: (D-2012)

Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2-1)x + \frac{2}{3}$ (1), với m là tham số thực.

Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

Bài 6:

Cho hàm số $y = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ (1), với m là tham số thực.

Tìm các giá trị của m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) có hoành độ dương.

Bài 7:

Cho hàm số: $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2-1)x - 3m^2 - 1$ (1), m là tham số.

Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc tọa độ O.

Bài 8:

Cho hàm số : $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1-m^2)x + m^3 - m^2$ (1) (m là tham số).

Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Bài 9:

Cho hàm số : $y = mx^4 + (m^2-9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số).

Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

Bài 10:

Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m$ (1), m là tham số.

Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA = BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

Bài 3: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I) ĐỊNH NGHĨA: Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

- Số M được gọi là GTLN của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\begin{cases} \text{i) } f(x) \le M \quad \forall x \in D \\ \text{ii) } \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$$

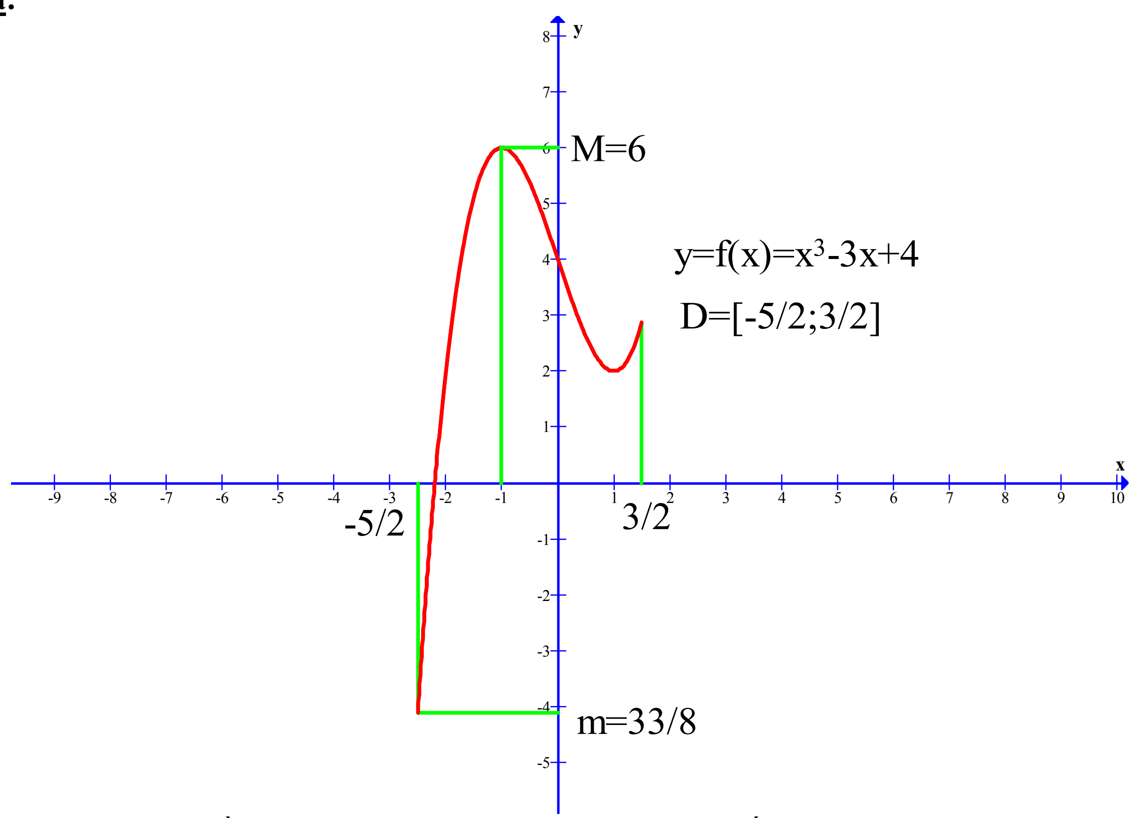
Ký hiệu: $M = \max\limits_{x \in D} f(x)$

- Số m được gọi là GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu các điều sau được thỏa mãn

$$\begin{cases} \text{i) } f(x) \ge m \quad \forall x \in D \\ \text{ii) } \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$$

Ký hiệu: $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$

Minh họa:



- **Quy ước:** Ta quy ước rằng khi nói GTLN hay GTNN của hàm số f mà không nói "trên tập D" thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN trên **TẬP XÁC ĐỊNH** của nó.
- Đối với GTLN và GTNN đối với hàm nhiều biến cũng có định nghĩa tương tự.

II) CÁC PHƯƠNG PHÁP THƯỜNG DÙNG ĐỂ TÌM GTLN & GTNN CỦA HÀM SỐ MỘT BIẾN:

1) Phương pháp 1 : Sử dụng bất đẳng thức (hay phương pháp dùng định nghĩa).

Một số kiến thức thường dùng:

a) $f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$

b) Bất đẳng thức Cô-si:

- Với hai số a, b không âm $(a,b\ge 0)$ ta luôn có: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\ge 2\sqrt{ab}$

  Dấu "=" xảy ra khi $a=b$

- Với ba số a, b, c không âm $(a,b,c\ge 0)$ ta luôn có: $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$

  Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$

c) Một số bất đẳng thức cơ bản thường dùng

1) $a^2+b^2\ge 2ab\Leftrightarrow ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$

2) $(a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$

3) $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)\Leftrightarrow a^2+b^2\ge\frac{(a+b)^2}{2}$

2) Phương pháp 2 : Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình (hay phương pháp miền giá trị).

Cơ sở lý thuyết của phương pháp: Cho hàm số xác định bởi biểu thức dạng $y=f(x)$

- ***Tập xác định*** của hàm số được định nghĩa là :

  $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)$ **có nghĩa**$\}$

- ***Tập giá trị*** của hàm số được định nghĩa là :

  $T=\{y\in\mathbb{R}\,|$ Phương trình $f(x)=y$ **có nghiệm** $x\in D\}$

Do đó nếu ta tìm được tập giá trị T của hàm số thì ta có thể tìm được GTLN và GTNN của hàm số đó.

Một số kiến thức thường dùng:

a) Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\ne 0)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta\ge 0$

b) Phương trình $a\cos x+b\sin x=c$ $(a,b\ne 0)$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2+b^2\ge c^2$

3) Phương pháp 3 : Sử dụng đạo hàm (hay phương pháp giải tích).

- **Điều kiện tồn tại GTLN và GTNN:**

  Định lý: Hàm số ***liên tục*** trên một đoạn $[a;b]$ thì đạt được GTLN và GTNN trên đoạn đó.

  (Weierstrass 2)

- **Phương pháp chung:** Muốn tìm GTLN và GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên miền D, ta lập **BẢNG BIẾN THIÊN** của hàm số trên D rồi dựa vào BBT suy ra kết quả.

- **Phương pháp riêng:**

  Trong nhiều trường hợp, có thể tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn mà không cần lập bảng biến thiên của nó. Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, có thể trừ một số hữu hạn điểm . Nếu $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc $(a;b)$ thì ta có quy tắc tìm GTLN và GTNN của hàm f trên đoạn $[a;b]$ như sau:

Quy tắc

1) Tìm các điểm $x_1, x_2, ..., x_m$ thuộc $(a;b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.
2) Tính $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_m), f(a), f(b)$.
3) So sánh các giá trị tìm được.
   - Số lớn nhất trong các giá trị đó là GTLN của f trên đoạn $[a;b]$
   - Số nhỏ nhất trong các giá trị đó là GTNN của f trên đoạn $[a;b]$

- **Chú ý:** Phải kiểm tra tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$, tránh áp dụng một cách hình thức.

B. THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

1) Phương pháp 1 : Sử dụng bất đẳng thức

Ví dụ 1: Tìm GTLN của hàm số $f(x) = -2x^2 + 8x + 1$

Ví dụ 2: Tìm GTNN của hàm số $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 12}$

Ví dụ 3: Tìm GTNN của các hàm số sau

a) $f(x) = x + \dfrac{2}{x-1}$ với $x \in (1;+\infty)$ b) $f(x) = |x-3| + \dfrac{7}{|x-3|}$

2) Phương pháp 2 : Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình

Ví dụ 1 : Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2}$

Ví dụ 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số $y = \dfrac{1 + \sin x}{2 + \cos x}$

3) Phương pháp 3 : Sử dụng đạo hàm

Ví dụ 1: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1) $y = 16x^2 - 2x + 12$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{4}\right]$ 2) $y = x^2 - \dfrac{9}{4}x$ trên đoạn $\left[1;\dfrac{4}{3}\right]$

3) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên đoạn $[-4,4]$ 4) $y = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4,0]$

5) $y = \dfrac{x-2}{x+2}$ trên đoạn $[0;2]$ 6) $y = \dfrac{x+3}{x+2}$ trên đoạn $[-1;2]$

7) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 3}{x+1}$ trên đoạn $[0;2]$ 8) $y = \dfrac{2x^2 + 5x + 4}{x+2}$ trên đoạn $[-1;1]$

Ví dụ 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số

1) $y = 2\sin x - \dfrac{4}{3}\sin^3 x$ trên đoạn $[0;\pi]$ 2) $y = \cos^4 x - 6\cos^2 x + 5$

3) $y = x^6 + 4(1-x^2)^3$ trên đoạn $[-1;1]$ 4) $y = \sin^4 x + \cos^4 x + 2$

Ví dụ 3: Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

1) $y = \sqrt{4x - x^2}$ 2) $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$ 3) $y = \sqrt{2+x} + \sqrt{4-x}$

4) $y = x + \sqrt{4 - x^2}$ 5) $y = (x+1)\sqrt{1-x^2}$ 6) $y = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

7) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x - \sqrt{4x - x^2}$ **(TN THPT 2014)**

8) $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21} - \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$ **(Khối D-2010)**

ỨNG DỤNG GTLN VÀ GTNN CỦA HÀM SỐ TRONG PT VÀ BPT

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

CƠ SỞ LÝ THUYẾT CỦA ỨNG DỤNG VÀ VÍ DỤ

Giả sử $f(x)$ là hàm số **liên tục** trên miền D và đạt **GTLN, GTNN** trên miền ấy. Ký hiệu: $\begin{cases} M = \max\limits_{x\in D} f(x) \\ m = \min\limits_{x\in D} f(x) \end{cases}$

Khi đó ta có các kết luận sau:

1) Phương trình $f(x) = a$ có nghiệm $x \in D \Leftrightarrow m \le a \le M$

Ví dụ 1: Tìm a để phương trình sau **có nghiệm** $\sqrt{2+x} + \sqrt{4-x} = a$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình sau **có nghiệm** $x - m + \sqrt{4-x^2} = 0$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau **có nghiệm** $(x-3)(x-1) + \sqrt{4x-x^2} - 2m + 1 = 0$

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình sau **có nghiệm** $x \in [-3;0]$

$$(x^2+2x)^2 - (m+1)(x^2+2x) + m + 1 = 0$$

2) Bất phương trình $f(x) \ge a$ **có nghiệm** $x \in D \Leftrightarrow a \le M$

Bất phương trình $f(x) \le a$ **có nghiệm** $x \in D \Leftrightarrow a \ge m$

Ví dụ : Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \ge a$

3) Bất phương trình $f(x) \ge a$ **nghiệm đúng với mọi** $x \in D \Leftrightarrow a \le m$

Bất phương trình $f(x) \le a$ **nghiệm đúng với mọi** $x \in D \Leftrightarrow a \ge M$

Ví dụ : Tìm m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;2]$

$$x - m + \sqrt{4-x^2} \le 0$$

B. THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

Bài 1: Cho phương trình $\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}-\sqrt{(2-x)(2+x)}=m \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Bài 2: Cho phương trình $2\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{6+x}\right)-\sqrt{(2+x)(6-x)}-3m+1=0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Bài 3: Cho phương trình $\left(x^2-1\right)^2+2x\sqrt{2-x^2}-3m+2=0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Bài 4: Cho phương trình $x+\sqrt{2-x^2}+x\sqrt{2-x^2}-5m-1=0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Bài 5: Cho phương trình $m\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}+2\right)=2\sqrt{1-x^4}+\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2} \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm

Bài 6: Cho phương trình $2\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\cos 4x+2\sin 2x+m=0 \quad (1)$

Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Bài 7: Cho bất phương trình $\sqrt{(x+4)(6-x)}\le x^2-2x+m \quad (1)$

Tìm m để bất phương trình (1) nghiệm nghiệm đúng với mọi $-4\le x\le 6$

-------------------------Hết---------------------------

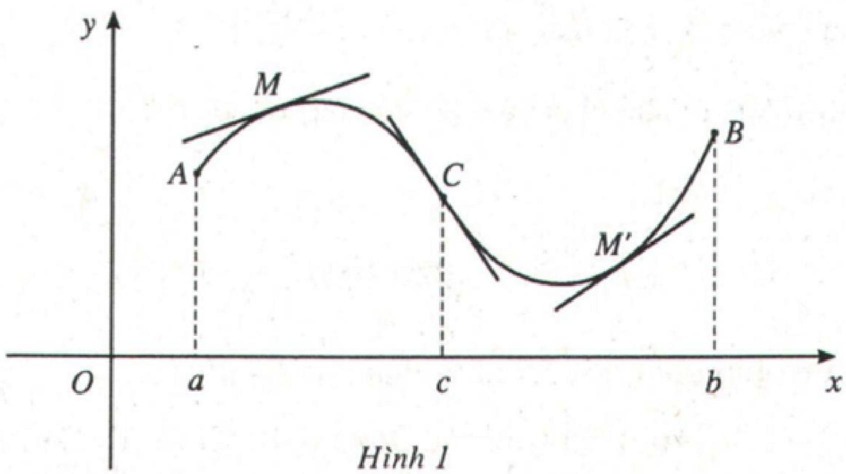
Bài 4: CUNG LỒI - CUNG LÕM VÀ ĐIỂM UỐN

TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Khái nhiệm về cung lồi, cung lõm và điểm uốn

Xét đồ thị ACB của hàm số $y = f(x)$ biểu diễn trên Hình 1

Giả sử đồ thị có tiếp tuyến tại mọi điểm.



Hình 1

- Tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{AC}$, tiếp tuyến luôn luôn ở **phía trên** của $\overset{\frown}{AC}$. Ta nói $\overset{\frown}{AC}$ là một **cung lồi.**
- Tại mọi điểm của cung $\overset{\frown}{CB}$, tiếp tuyến luôn luôn ở **phía dưới** của $\overset{\frown}{CB}$. Ta nói $\overset{\frown}{CB}$ là một **cung lõm.**
- Điểm C phân cách giữa cung lồi và cung lõm được gọi là **điểm uố**n của đồ thị. Tại điểm uốn tiếp tuyến đi xuyên qua đồ thị.

2. Dấu hiệu nhận biết lồi, lõm và điểm uốn

Định lý 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;b)$.

- Nếu $f''(x) < 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì đồ thị của hàm số **lồi** trên khoảng đó.
- Nếu $f''(x) > 0$ với mọi $x \in (a;b)$ thì đồ thị của hàm số **lõm** trên khoảng đó.

Định lý 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$

- Nếu $f''(x)$ **đổi dấu** khi x đi qua x_0 thì điểm $M_0(x_0;f(x_0))$ là **điểm uốn** của đồ thị hàm số đã cho.

3. Áp dụng

Ví dụ: Tìm khoảng lồi lõm và điểm uốn của đồ thị các hàm số sau

a) $y = -x^3 - 3x^2 + 2$ b) $y = x^4 - 2x^2 - 3$

------------------------Hết-----------------------

Bài 5: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

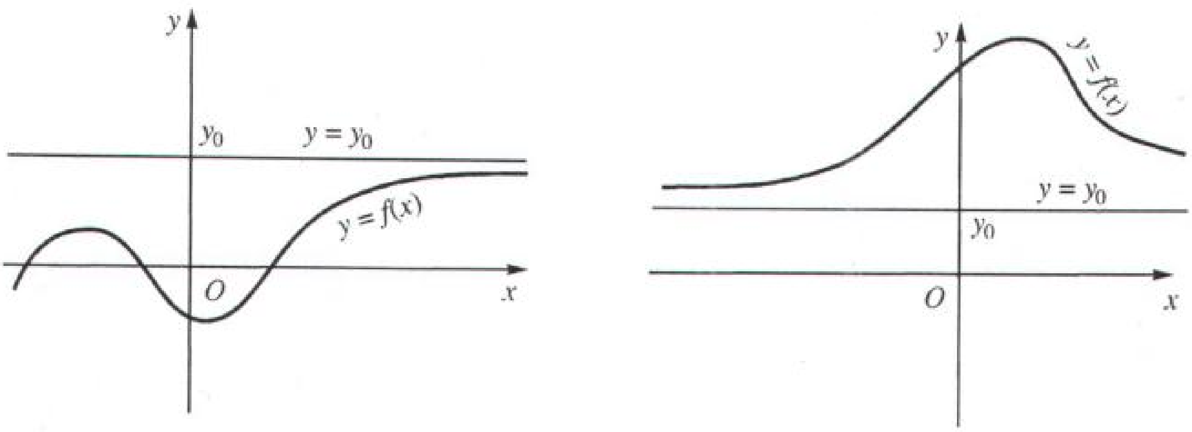
TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang

Định nghĩa 1

Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là **đường tiệm cận ngang** (gọi tắt là **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0.$$



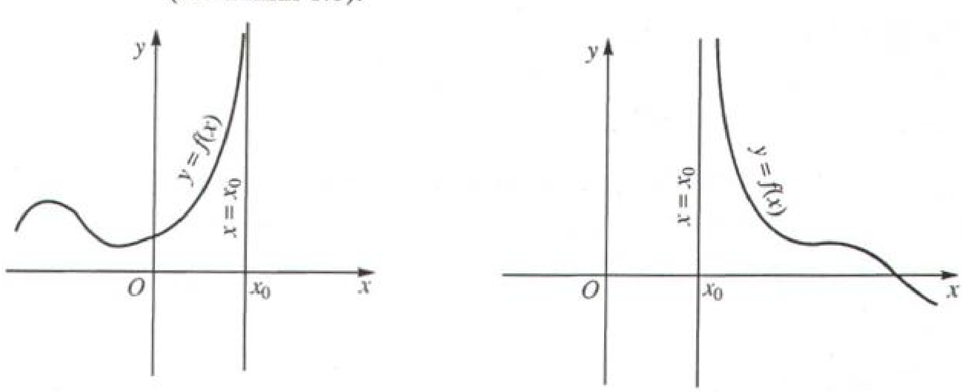
Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to +\infty$). *Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \to -\infty$).*

Định nghĩa 2

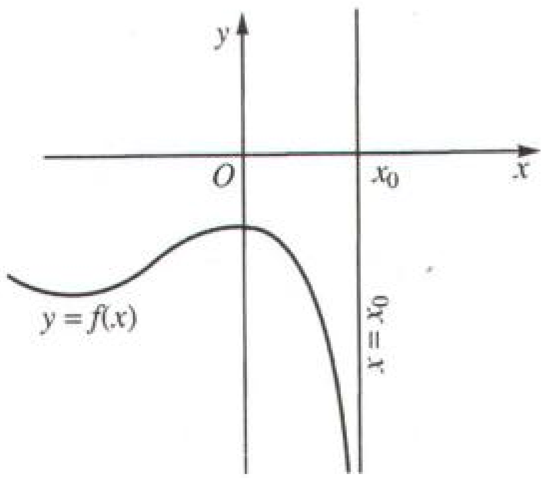
Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là **đường tiệm cận đứng** (gọi tắt là **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \;;\quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \;;$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \;;\quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

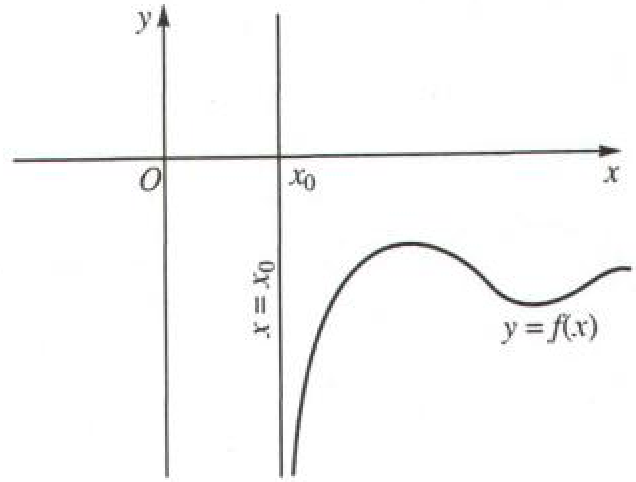
(Xem hình 1.8).



a) *b)*



c)



d)

a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^-$).

b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \to x_0^+$).

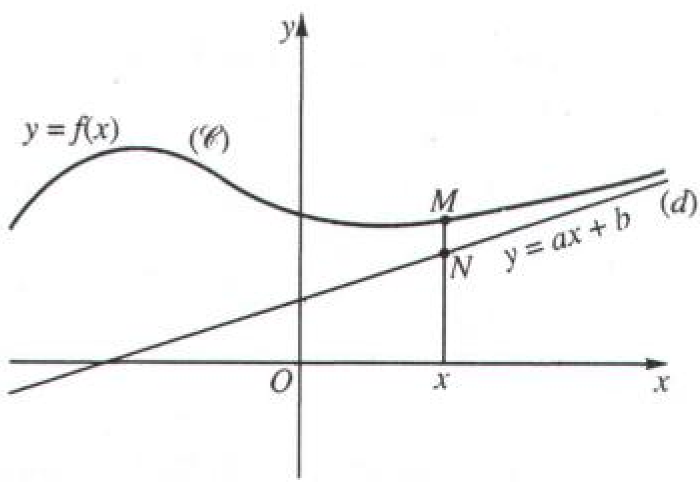
2. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa 3

Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (gọi tắt là **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

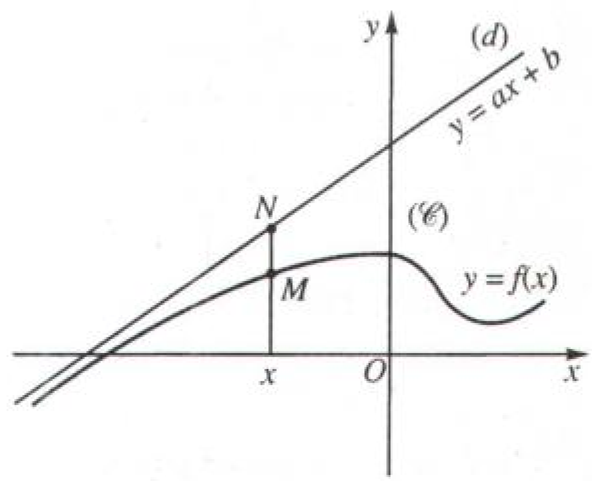
$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0,$$

hoặc $$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to +\infty$).

a)



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \to -\infty$).

b)

CHÚ Ý

Để xác định các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên ta có thể áp dụng các công thức sau :

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \; ; \qquad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$$

hoặc $$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \; ; \qquad b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - ax].$$

(Nếu $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang).

3. Áp dụng

Ví dụ : Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau

a) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ b) $y = \dfrac{1-2x}{x+2}$

c) $y = \dfrac{x^2-2x-3}{x-2}$ d) $y = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

-------------------------Hết-------------------------

Bài 6: KHẢO SÁT & VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Sơ đồ chung khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm đa thức

Dựa vào chương trình SGK + đáp án của BGD để biên soạn

Chương trình Cơ bản + Nâng cao

1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$

1) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

- a) Chiều biến thiên:
  + $y' = ?$
  $y' = 0 \Leftrightarrow x = ?$
  + Xét dấu y':

x	$-\infty$	?	$+\infty$
y'		?	

  - Kết luận về các khoảng đơn điệu của hàm số.
- b) Cực trị: kết luận về cực trị của hàm số.
- c) Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = ? \text{ và } \lim_{x\to+\infty} y = ?$$

(Chỉ nêu kết quả không cần giải thích chi tiết)

- d) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	?	$+\infty$
y'		?	
y		?	

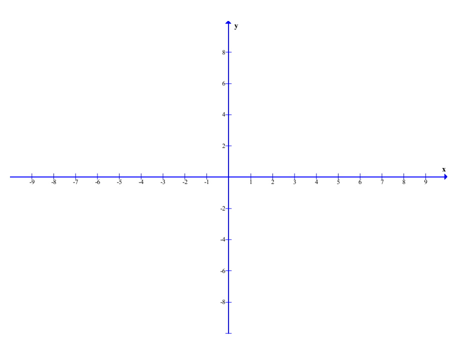
(Bảng biến thiên phải đầy đủ mọi chi tiết)

3) Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ:

+ Giao điểm với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = ?$

+ Giao điểm với Ox **(nếu có)**: $y = 0 \Leftrightarrow x = ?$



2. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \ (a \neq 0)$

1) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

2) Sự biến thiên:

- a) Chiều biến thiên:

  + $y' = ?$

  $y' = 0 \Leftrightarrow x = ?$

  + Xét dấu y'

x	$-\infty$? $+\infty$
y'	?

- Kết luận về các khoảng đơn điệu của hàm số.

- b) Cực trị: kết luận về cực trị của hàm số.
- c) Giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} y = ? \text{ và } \lim_{x \to +\infty} y = ?$$

(Chỉ nêu kết quả không cần giải thích chi tiết)

- d) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$? $+\infty$
y'	?
y	?

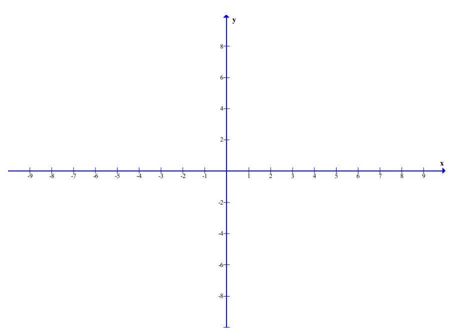
(Bảng biến thiên phải đầy đủ mọi chi tiết)

3) Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ:

+ Giao điểm với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = ?$

+ Giao điểm với Ox **(nếu có)**: $y = 0 \Leftrightarrow x = ?$



Sơ đồ chung khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm phân thức hữu tỷ

Dựa vào chương trình SGK + đáp án của BGD để biên soạn

Chương trình Cơ bản + Nâng cao

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(c \neq 0,\ ad - bc \neq 0\right)$

1) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

2) Sự biến thiên:

- a) Chiều biến thiên:

  $+\ y' = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; kết luận $y' < 0$ hoặc $y' > 0$ với mọi $x \neq -\dfrac{d}{c}$

  - Kết luận về các khoảng đơn điệu của hàm số
- b) Cực trị: hàm số không có cực trị
- c) Giới hạn và tiệm cận:

  $+ \lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^-} y = ?$ và $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{d}{c}\right)^+} y = ?$ $\Rightarrow x = -\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng

  $+ \lim\limits_{x \to -\infty} y = \dfrac{a}{c}$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \dfrac{a}{c}$ $\Rightarrow y = \dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang

  (Chỉ nêu kết quả không cần giải thích chi tiết)

- d) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\dfrac{d}{c}$	$+\infty$
y'	?	‖	?
y	?	‖	?

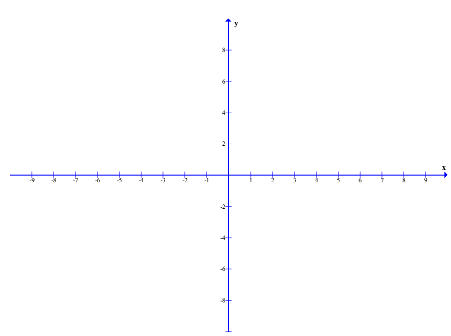
(Bảng biến thiên phải đầy đủ mọi chi tiết)

3) Đồ thị:

Giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ:

+ Giao điểm với Oy: $x = 0 \Rightarrow y = ?$

+ Giao điểm với Ox: $y = 0 \Leftrightarrow x = ?$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

1) $y = x^3 + 3x^2 - 4$ 2) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

3) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ 4) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

5) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ 6) $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

7) $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 2$ 8) $y = -x^3 + 3x + 1$

9) $y = 3x^2 - x^3$ 10) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 9$

Bài 2: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

1) $y = x^4 - 2x^2 - 3$ 2) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$

3) $y = -x^4 - 2x^2 + 3$ 4) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

5) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3$ 6) $y = \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{3}{2}$

7) $y = (x^2 - 1)^2$ 8) $y = 8x^2 - x^4$

Bài 3: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

1) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$ 2) $y = \frac{1 - x}{x + 2}$ 3) $y = \frac{4x + 1}{2x - 3}$

4) $y = \frac{1 - 2x}{-x - 2}$ 5) $y = \frac{-x - 2}{2 - x}$ 6) $y = \frac{3 - 2x}{x - 1}$

Bài 4: Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m^2 - 3m + 2)x + 4$

1) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại và điểm cực tiểu.
2) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có điểm cực đại và điểm cực tiểu ở về hai phía của trục tung.

Bài 5: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (m + 6)x - (2m + 1)$

Tìm m để đồ thị hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bài 7: CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN KHẢO SÁT HÀM SỐ

1.BÀI TOÁN 1 : ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CÓ MANG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

TÓM TẮT GIÁO KHOA

Phương pháp chung:

Để vẽ đồ thị của hàm số có mang dấu giá trị tuyệt đối ta có thể thực hiện như sau:
Bước 1: Xét dấu các biểu thức chứa biến bên trong dấu giá trị tuyệt đối .
Bước 2: Sử dụng định nghĩa giá trị tuyệt đối để khử dấu giá trị tuyệt đối
Phân tích hàm số đã cho thành các phần không có chứa dấu giá trị tuyệt đối
(Dạng hàm số cho bởi nhiều công thức)
Bước 3: Vẽ đồ thị từng phần rồi ghép lại(Vẽ chung trên một hệ trục tọa độ).

*** Các kiến thức cơ bản thường sử dụng:**

1. Định nghĩa giá trị tuyệt đối :

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu} \quad A \geq 0 \\ -A & \text{nếu} \quad A < 0 \end{cases}$$

3. Một số tính chất về đồ thị:

a) Đồ thị của hai hàm số y=f(x) và y=-f(x) đối xứng nhau qua trục hoành
b) Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng
c) Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng

* Hai dạng cơ bản

Bài toán tổng quát:

Từ đồ thị (C) :y=f(x), hãy suy ra đồ thị các hàm số sau: $\begin{cases} (C_1): y = |f(x)| \\ (C_2): y = f(|x|) \end{cases}$

Ví dụ:

Từ đồ thị (C) : $y = x^3 - 3x + 2$, hãy suy ra đồ thị các hàm số sau: $\begin{cases} (C_1): y = |x^3 - 3x + 2| \\ (C_2): y = |x^3| - 3|x| + 2 \end{cases}$

Dạng 1: Từ đồ thị $(C): y = f(x) \rightarrow (C_1): y = |f(x)|$

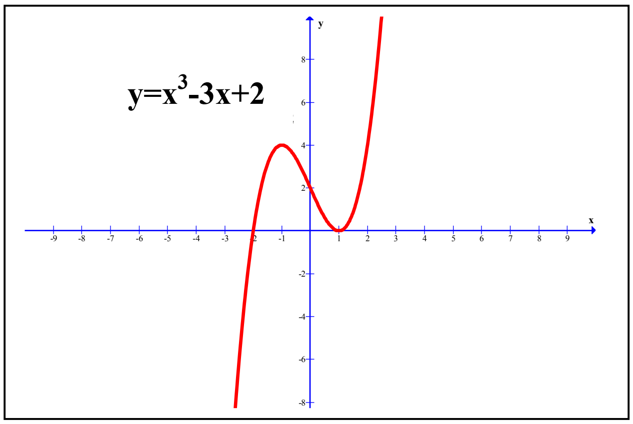
Cách giải

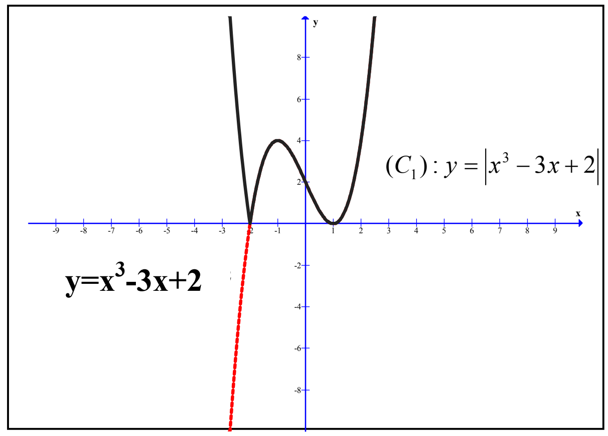
B1. Ta có : $(C_1): y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{nếu} \quad f(x) \geq 0 \quad (1) \\ -f(x) & \text{nếu} \quad f(x) < 0 \quad (2) \end{cases}$

B2. Từ đồ thị (C) đã vẽ ta có thể suy ra đồ thị (C_1) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên trục Ox (do (1))
- Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục Ox (do (2))
- Bỏ phần đồ thị (C) nằm phía dưới trục Ox ta sẽ được (C_1)

Minh họa





Dạng 2: Từ đồ thị $(C): y = f(x) \rightarrow (C_2): y = f(|x|)$ **(đây là hàm số chẵn)**

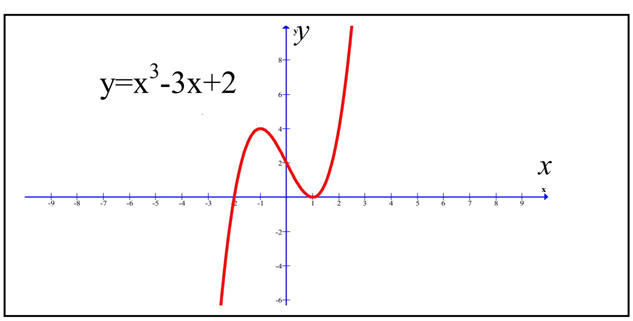
Cách giải

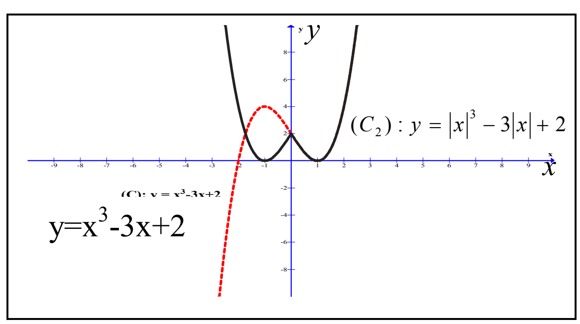
B1. Ta có : $(C_2): y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu} \quad x \geq 0 \quad (1) \\ f(-x) & \text{nếu} \quad x < 0 \quad (2) \end{cases}$

B2. Từ đồ thị (C) đã vẽ ta có thể suy ra đồ thị (C_2) như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy (do (1))
- Lấy đối xứng qua Oy phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy (do do tính chất hàm chẵn)
- Bỏ phần đồ thị (C) nằm phía bên trái trục Oy (nếu có) ta sẽ được (C_2)

Minh họa:





BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1: Cho hàm số : $y=-x^3+3x \quad (1)$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)
2. Từ đồ thị (C) đã vẽ, hãy suy ra đồ thị các hàm số sau:

   a) $y=\left|-x^3+3x\right|$ b) $y=-|x|^3+3|x|$

Bài 2: Cho hàm số : $y=\dfrac{x+1}{x-1} \quad (1)$

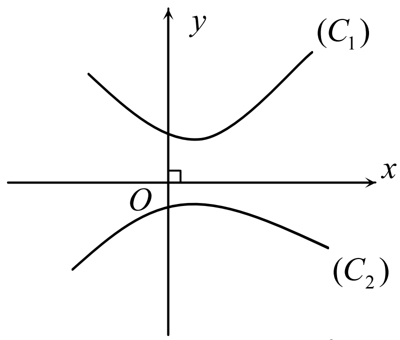
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1)
2. Từ đồ thị (C) đã vẽ, hãy suy ra đồ thị các hàm số sau:

   a) $y=\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ b) $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$ c) $y=\dfrac{|x+1|}{x-1}$ d) $y=\dfrac{x+1}{|x-1|}$

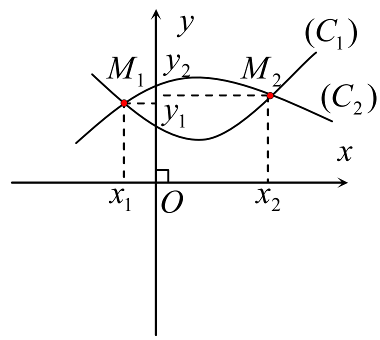
2.BÀI TOÁN 2 : SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HAI ĐỒ THỊ

Bài toán tổng quát:

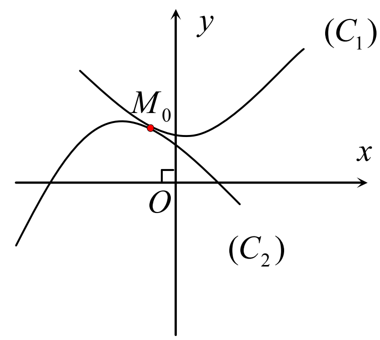
Trong mp(Oxy) . Hãy xét sự tương giao của đồ thị hai hàm số : $\begin{cases}(C_1): y = f(x)\\(C_2): y = g(x)\end{cases}$



(C_1) và (C_2) không có điểm chung



(C_1) và (C_2) cắt nhau



(C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau

Phương pháp chung:

* Thiết lập phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho:

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

* Tùy theo số nghiệm của phương trình (1) mà ta kết luận về số điểm chung của hai đồ thị (C_1) và (C_2) .

Lưu ý:
Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2).

Ghi nhớ: **Số nghiệm của pt (1) = số giao điểm của hai đồ thị (C_1) và (C_2).**

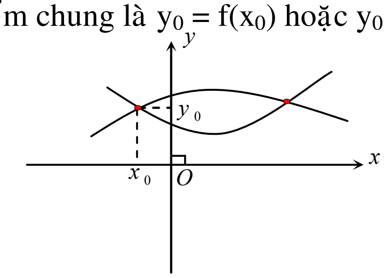
Chú ý 1 :

* (1) vô nghiệm ⇔ (C_1) và (C_2) không có điểm điểm chung

* (1) có n nghiệm ⇔ (C_1) và (C_2) có n điểm chung

Chú ý 2 :

* Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ điểm chung của (C_1) và (C_2).
Khi đó tung độ điểm chung là $y_0 = f(x_0)$ hoặc $y_0 = g(x_0)$.



Áp dụng:

Dạng 1: Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị

Bài 1: Tìm tọa độ giao điểm của đường cong (C): $y = x^2 + x - 2$ và đường thẳng $y = x + 2$

Bài 2: Tìm tọa độ giao điểm của hai đường cong (C): $y = x^2 - 4$ và (C'): $y = -x^2 - 2x$

Bài 3: Tìm tọa độ giao điểm của đường cong (C): $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + \frac{5}{3}$

Bài 4: Tìm tọa độ giao điểm của đường cong (C): $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ và đường thẳng $(d): y = -3x - 1$

Bài 5: Tìm tọa độ giao điểm của đường cong (C): $y = \sqrt{x}$ và đường thẳng $(d): y = x - 2$

Dạng 2: Tìm tham số để hai đồ thị cắt nhau tại 2(3, 4) điểm phân biệt

Bài 1 : Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+2}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=mx+2$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

Bài 2 : Cho hàm số $y=\dfrac{3-2x}{x-1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y=mx+2$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

Bài 3: Cho hàm số $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ (1)

Xác định m sao cho đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 4: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+m-2$ (1)

Xác định m sao cho đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Bài 5: Cho hàm số $y=x^4-mx^2+m-1$ (1)

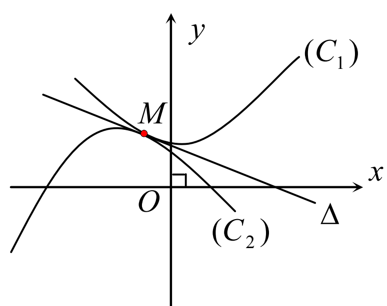
Xác định m sao cho đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt.

Dành riêng cho chương trình nâng cao

<u>Điều kiện tiếp xúc của đồ thị hai hàm số</u> :

<u>Định lý</u> : Cho hai đồ thị $\begin{cases}(C_1): y=f(x)\\(C_2): y=g(x)\end{cases}$

$$\boxed{(C_1) \text{ tiếp xúc với } (C_1) \Leftrightarrow \text{ hệ : } \begin{cases} f(x)=g(x)\\ f'(x)=g'(x)\end{cases} \text{ có nghiệm}}$$



Bài 1: Chứng minh rằng hai đường cong $(C): y=x^3+\dfrac{5}{4}x-2$ và $(C'): y=x^2+x-2$ tiếp xúc nhau.tại một điểm nào đó.

Bài 2: Tìm k để đường thẳng $(d): y=kx$ tiếp xúc với đường cong $(C): y=x^3+3x^2+1$

Bài 3: Tìm k để đường thẳng $(d): y=k(x-2)-7$ tiếp xúc với đường cong $(C): y=x^3-3x^2+2$

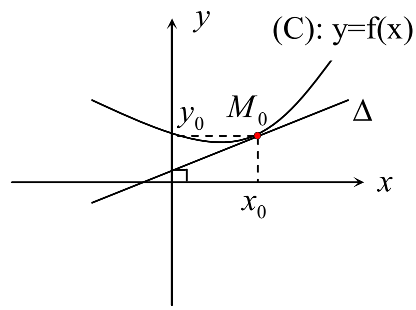
Bài 4: Tìm k để đường thẳng $(d): y=k(x+1)+3$ tiếp xúc với đường cong $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+1}$

Bài 5: Tìm k để đường thẳng $(d): y=k(x+5)$ tiếp xúc với đường cong $(C): y=\dfrac{x^2-x-1}{x+1}$

3.<u>BÀI TOÁN 3</u>: **TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG CONG**

a. Dạng 1:

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C):y = f(x) **tại** điểm $M_0(x_0;y_0) \in (C)$



Phương pháp:

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(x_0;y_0)$ có dạng:

$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$ hay $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

Trong đó : x_0 : hoành độ tiếp điểm

y_0: tung độ tiếp điểm và $y_0 = f(x_0)$

k : hệ số góc của tiếp tuyến và được tính bởi công thức : $k = f'(x_0)$

Áp dụng:

Bài 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm trên đồ thị có hoành độ $x = 1$. **(CĐ -2014)**

Bài 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ tại điểm trên đồ thị có hoành độ $x = 2$.

Bài 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ tại điểm trên đồ thị có hoành độ $x = -3$.

Bài 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{3x-2}{x+1}$ tại điểm trên đồ thị có tung độ $y = -2$.

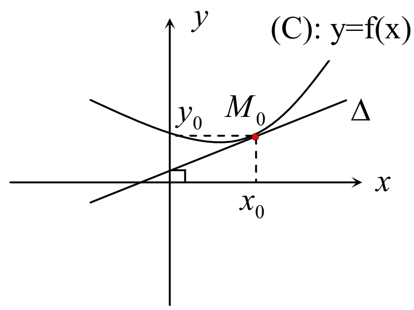
Bài 5: Cho hàm số $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số (1) tại điểm trên (C) có hoành x_0, biết rằng $y''(x_0) = 0$

Bài 6: Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 12$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C), khi biết tung độ tiếp điểm là $y = 12$.

Bài 7: Cho hàm số $y = \dfrac{-2x+3}{x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các giao điểm của (C) và đường thẳng $y = x - 3$ **(TN THPT 2014)**

b. Dạng 2:

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C): y=f(x) biết tiếp tuyến có **hệ số góc k** cho trước



Phương pháp: Ta có thể tiến hành theo các bước sau

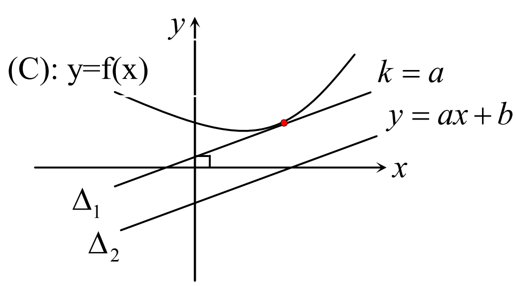
> **Bước 1**: Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C)
>
> **Bước 2**: Tìm x_0 bằng cách giải phương trình : $f'(x_0)=k$, từ đó suy ra $y_0=f(x_0)=?$
>
> **Bước 3**: Thay các yếu tố tìm được vào pt: $\mathbf{y - y_0 = k\ (x - x_0)}$ ta sẽ được pttt cần tìm.

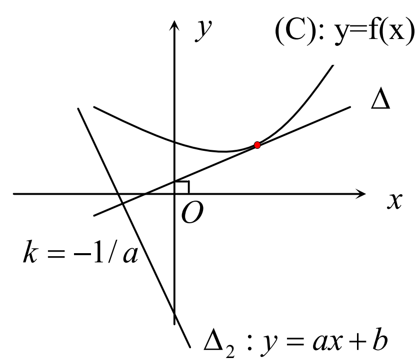
Bài 1: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=-9$

Bài 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -5

Bài 3: Cho hàm số $y=x^3-3x-2$, có đồ thị là (C). Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc bằng 9. **(Khối D-2014)**

Chú ý : Đối với dạng 2 người ta có thể cho hệ số góc k dưới dạng gián tiếp như : **tiếp tuyến song song, tiếp tuyến vuông góc với một đường thẳng cho trước** .





Khi đó ta cần phải sử dụng các kiến thức sau:

Định lý 1: Nếu đường thẳng (Δ) có phương trình dạng : y= ax+b thì hệ số góc của (Δ) là:

$$\boxed{k_\Delta = a}$$

Định lý 2: Trong mp(Oxy) cho hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2). Khi đó:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \Delta_1 // \Delta_2 & \Leftrightarrow & k_{\Delta_1}=k_{\Delta_2} \\ \Delta_1 \perp \Delta_2 & \Leftrightarrow & k_{\Delta_1}.k_{\Delta_2}=-1 \end{array}}$$

Áp dụng:

Bài 4: Cho đường cong (C): $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (d): y = 4x+2.

Bài 5: Cho đường cong (C): $y = \frac{2x+3}{2x-1}$

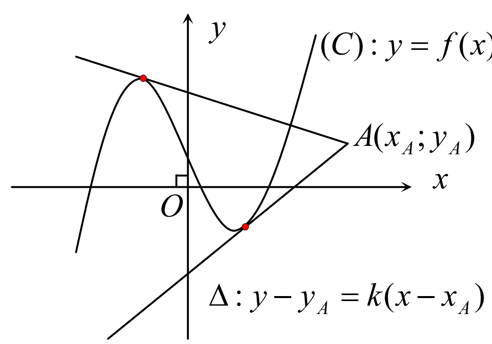
Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Bài 6: Cho đường cong (C): $y = \frac{-x-2}{2-x}$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): y = 4x + 2011$

c. Dạng 3:

Viết phương trình tiếp tuyến với (C): y=f(x) biết tiếp tuyến **đi qua** điểm $A(x_A;y_A)$



Phương pháp : Ta có thể tiến hành theo các bước sau

Bước 1: Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0) \in (C)$

$$(d): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad (*)$$

Bước 2: Định x_0 để (d) đi qua điểm $A(x_A;y_A)$. Ta có:

(d) đi qua điểm $A(x_A;y_A) \Leftrightarrow y_A = f'(x_0)(x_A - x_0) + f(x_0)$ (1)

Bước 3: Giải pt (1) tìm x_0. Thay x_0 tìm được vào (*) ta sẽ được pttt cần tìm.

Áp dụng:

Bài 7: Cho đường cong (C): $y = x^3 + 3x^2 + 4$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(0;-1)

Bài 8: Cho đường cong (C): $y = \frac{2x-5}{x-2}$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(-2;0).

Phương pháp dành cho chương trình nâng cao

Phương pháp: Ta có thể tiến hành theo các bước sau

Bước 1: Viết phương trình đường thẳng (Δ) qua A và có hệ số góc là k bởi công thức:

$$y - y_A = k(x - x_A) \Leftrightarrow y = k(x - x_A) + y_A \quad (*)$$

Bước 2: Định k để (Δ) tiếp xúc với (C). Ta có:

$$\Delta \text{ tiếp xúc (C)} \Leftrightarrow \text{hệ } \begin{cases} f(x)=k(x-x_A)+y_A \\ f'(x)=k \end{cases} \text{ có nghiệm} \quad (1)$$

Bước 3: Giải hệ (1) tìm k. Thay k tìm được vào (*) ta sẽ được pttt cần tìm.

Áp dụng:

Bài 9: Cho đường cong (C): $y = x^3 + 3x^2 + 4$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(0;-1)

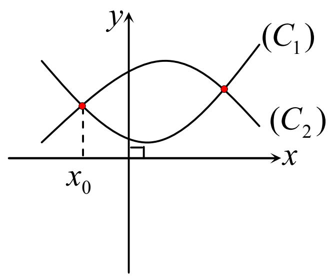
Bài 10: Cho đường cong (C): $y = \dfrac{2x-5}{x-2}$

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm A(-2;0).

4.BÀI TOÁN 4: BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG ĐỒ THỊ

Cơ sở của phương pháp:

Xét phương trình f(x) = g(x) (1)
Nghiệm x_0 của phương trình (1) chính là hoành độ giao điểm của (C_1):y=f(x) và (C_2):y=g(x)



Bài toán : Bằng đồ thị hãy biện luận theo m số nghiệm của phương trình dạng : $\boxed{f(x) = m \quad (*)}$

Phương pháp:

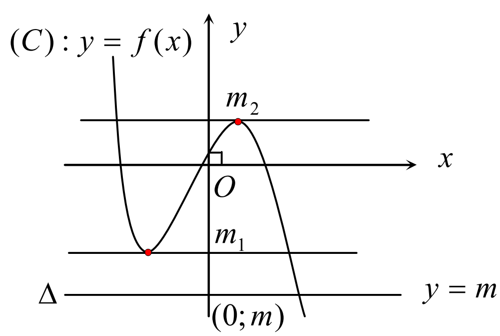
Bước 1: Xem (*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị:

- $(C): y = f(x)$: (C) là đồ thi cố đinh
- $(\Delta): y = m$: (Δ) là đường thẳng di động cùng phương Ox và cắt Oy tại M(0;m)

Bước 2: Vẽ (C) và (Δ) lên cùng một hệ trục tọa độ

Bước 3: Biện luận theo m số giao điểm của (Δ) và (C)
Từ đó suy ra số nghiệm của phương trình (*)

Minh họa:



Áp dụng:

Bài 1: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

2) Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $-x^3 + 3x^2 - 4 = m$

3) Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt: $x^3 - 3x^2 + 2 - m = 0$

Bài 2: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - 6x + 1$

2) Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $2x^3 - 6x + 1 - m = 0$

Bài 3: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 + 3x^2$

2) Dựa vào đồ thị (C), biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^3 + 3x^2 + m = 0$

Bài 4: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$

2) Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $x^4 - 2x^2 + m = 0$

Bài 5: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$

2) Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm lớn hơn 1

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 3m$$

Bài 6: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 3x^2 - x^3$

2) Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt: $3x^2 - x^3 + 3m = 0$

Bài 7: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = 8x^2 - x^4$

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\left|x^4 - 8x^2\right| = m$

Bài 8: 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \left(x^2 - 1\right)^2$

2) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $x^4 - x^2 + m = x^2 - 1$

-------------------Hết-----------------

5. BÀI TOÁN 5: HỌ ĐƯỜNG CONG

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x,m)$ (m là tham số)

Biện luận theo m số đường cong của họ (C_m) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ cho trước.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI:

Ta có :

Họ đường cong (C_m) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ $\Leftrightarrow$ $y_0 = f(x_0,m)$ (1)

Xem (1) là phương trình theo ẩn m.

Tùy theo số nghiệm của phương trình (1) ta suy ra số đường cong của họ (Cm) đi qua M_0

Cụ thể:

- Nếu phương trình (1) có n nghiệm phân biệt thì có n đường cong của họ (Cm) đi qua M_0
- Nếu phương trình (1) vô nghiệm thì mọi đường cong của họ (Cm) đều không đi qua M_0
- Nếu phương trình (1) nghiệm đúng với mọi m thì mọi đường cong của họ (Cm) đều đi qua M_0

Trong trường hợp này ta nói rằng M_0 là điểm cố định của họ đường cong (C_m)

TÌM ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA HỌ ĐƯỜNG CONG

BÀI TOÁN TỔNG QUÁT:

Cho họ đường cong $(C_m): y = f(x,m)$ (m là tham số)

Tìm điểm cố định của họ đường cong (C_m)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Bước 1: Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là điểm cố định (nếu có) mà họ (C_m) đi qua. Khi đó phương trình:

$$y_0 = f(x_0,m) \text{ nghiệm đúng } \forall \text{ m} \quad (1)$$

Bước 2: Biến đổi phương trình (1) về một trong các dạng sau:

Dạng 1: $Am + B = 0 \ \ \forall m$

Dạng 2: $Am^2 + Bm + C = 0 \ \ \forall m$

Áp dụng định lý: $Am + B = 0 \ \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$ (2)

$$Am^2 + Bm + C = 0 \quad \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Bước 3: Giải hệ (2) hoặc (3) ta sẽ tìm được $(x_0;y_0)$

Ví dụ:

6. BÀI TOÁN 6: TÌM CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRÊN ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C).

Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x$ bằng $\sqrt{2}$

(Khối A-2014)

Bài 2: Cho hàm số $y = \frac{x^2+3x+6}{x+2}$

Tìm trên đồ thị hàm số tất cả những điểm có các toạ độ là nguyên .

Bài 3: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$

Tìm trên đồ thị hàm số những điểm có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận nhỏ nhất

Bài 4: Cho hàm số $y = 2x(1-x^2)$

Gọi A, B là các giao điểm của (C) với trục hoành (khác gốc tọa độ O). Tìm các điểm I thuộc (C) sao cho tam giác IAB vuông tại I.

LUYỆN GIẢI ĐỀ THI ĐẠI HỌC

Bài 1:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.
2. Tìm m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt (H) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 2\sqrt{2}$.

Bài 2:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$.
2. Tìm số thực dương a để đường thẳng $y = a$ cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O.

Bài 3:

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + m + 2$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 0$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

Bài 4:

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) của hàm số đã cho.
2. Gọi I là giao điểm hai tiệm cận của (H). Viết phương trình tiếp tuyến của (H) sao cho khoảng cách từ I đến tiếp tuyến đó là lớn nhất.

Bài 5:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$.
2. Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $(x+2)^2 = \frac{m}{|x-1|}$.

Bài 6:

Cho hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - (3m+1)x^2 + 2(m+1)$, m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho khi $m = 0$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị lập thành một tam giác có trọng tâm là gốc toạ độ.

Bài 7:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (H) hàm số $y = \frac{-x+1}{x-2}$.
2. Tìm trên (H) các điểm A,B sao cho độ dài AB = 4 và đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng y = x.

Bài 8:

Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + \frac{1}{3}$ có đồ thị (C_m), m là tham số.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 2$.
2. Gọi A là giao điểm của (C_m) với trục tung. Tìm m sao cho tiếp tuyến của (C_m) tại A tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{1}{3}$.

Bài 9:

Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) đến tiếp tuyến bằng $2\sqrt{2}$.

Bài 10:

Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.
2. Tìm m để phương trình sau có đúng 8 nghiệm thực phân biệt

$$|2x^4 - 4x^2 + \frac{3}{2}| = m^2 - m + \frac{1}{2}.$$

Bài 11:

Cho hàm số $y = \frac{m-x}{x+2}$ có đồ thị là (H_m), với m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho khi $m = 1$.
2. Tìm m để đường thẳng $d: 2x + 2y - 1 = 0$ cắt (H_m) tại hai điểm cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích là $S = \frac{3}{8}$.

Bài 12:

Cho hàm số $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.
2. Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số (1) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{9}{2}x + 5$.

Bài 13:

Cho hàm số $y = x^4 - 2(m^2+1)x^2 + 1$ (*).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (*) khi $m = 0$.
2. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m hàm số (*) có 3 điểm cực trị . Với giá trị nào của m , khoảng cách từ điểm cực đại đến đường thẳng đi qua hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số (*) nhỏ nhất.

Bài 14:

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Với giá trị nào của m, đường thẳng $y = -x + m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác IAB đều.

Bài 15:

Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (*C*) biết tiếp tuyến tạo với hai đường tiệm cận của (*C*) một tam giác vuông cân.

Bài 16:

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (*C*) của hàm số.
2. Cho hai điểm $A(0\,;4)$ và $B\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{9}{4}\right)$. Hãy tìm tọa độ của điểm *M* thuộc đồ thị (*C*), sao cho tam giác *ABM* cân tại *M*.

----------------------------------Hết-----------------------------------

Chuyên đề 16: **NGUYÊN HÀM -TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG**

TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. ĐỊNH NGHĨA NGUYÊN HÀM :

* **Định nghĩa :** Hàm số F(x) gọi là ***nguyên hàm*** của f(x) trên (a , b) nếu : F'(x) = f(x) , $\forall x \in (a ; b)$

Nếu thay khoảng (a , b) bằng đoạn [a , b] thì ta phải có thêm : $\begin{cases} F'(a^+) = f(a) \\ F'(b^-) = f(b) \end{cases}$

* **Định lý :**

Cho F(x) là nguyên hàm của f(x) trên (a , b)

G(x) là nguyên hàm của f(x) trên (a,b) $\Leftrightarrow$ G(x) = F(x) + C

(C : hằng số)

. Nhận xét : Nếu hàm số f(x) có 1 nguyên hàm là F(x) thì nó có vô số nguyên hàm, tất cả các nguyên hàm đều có dạng F(x) + C và còn gọi là họ các nguyên hàm của hàm số f(x), ký hiệu : $\int f(x)dx$

Vậy : F(x) là 1 nguyên hàm của f(x) thì : $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

II. SỰ TỒN TẠI NGUYÊN HÀM :

Mọi hàm số ***liên tục*** trên [a,b] đều có ***nguyên hàm*** trên đoạn đó.

III. CÁC TÍNH CHẤT :

- $(\int f(x)dx)' = f(x)$
- $\int a.f(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a \neq 0)$
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int f(t)dt = F(t) + C \quad \Rightarrow \quad \int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C \quad (1)$

  Đặt u = u(x) thì du = u'(x)dx

  Vậy (1) $\Leftrightarrow \int f(t)dt = F(t) + C \Rightarrow \int f(u)du = F(u) + C$

* **Trường hợp đặc biệt :** u = ax +b

$$\int f(t)dx = F(t) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

IV. Bảng tính nguyên hàm cơ bản:

Bảng 1 **Bảng 2**

Hàm số f(x)	Họ nguyên hàm F(x)+C	Hàm số f(x)	Họ nguyên hàm F(x)+C
a (hằng số)	ax + C		
x^{α}	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$(ax+b)^{\alpha}$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$	$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	A^{ax+b}	$\frac{1}{A}.\frac{A^{ax+b}}{\ln a}+C$
e^x	e^x+C	e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
sinx	-cosx + C	sin(ax+b)	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
cosx	sinx + C	cos(ax+b)	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tanx + C	$\frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	-cotx + C	$\frac{1}{\sin^2(ax+b)}$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+C$	$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$
tanx	$-\ln\lvert\cos x\rvert+C$		
cotx	$\ln\lvert\sin x\rvert+C$		

Phương pháp 1: Sử dụng định nghĩa và tính chất kết hợp với bảng tính các nguyên hàm cơ bản

- Phân tích tích phân đã cho thành những tích phân đơn giản có công thức trong bảng nguyên hàm cơ bản
- Cách phân tích : Dùng biến đổi đại số như mũ, lũy thừa, các hằng đẳng thức ... và biến đổi lượng giác bằng các công thức lượng giác cơ bản.

Ví dụ: Tính

1) $I_1=\int \frac{1}{x^2-4}dx$ 2) $I_2=\int \frac{2x-9}{x^2-3x+2}dx$ 3) $I=\int \frac{2x^2-5x-3}{x^3+x^2-2x}dx$

4) $I_4=\int \frac{dx}{e^x+2}$

Ví dụ : Tìm họ nguyên hàm của các hàm số sau:

1. $f(x)=\cos^3 x+\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ 2. $f(x)=\frac{2x-5}{x^2-4x+3}$

Phương pháp 2: Phương pháp đổi biến số

Định lí cơ bản:

Nếu $\int f(u)du=F(u)+C$ và $u=u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\boxed{\int f(u(x))u'(x)dx=F(u(x))+C.}$$

Cách thực hiện: Tính $\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx$ bằng pp đổi biến số

Bước 1: Đặt $u=u(x)\Rightarrow du=u'(x)dx$

Bước 2: Tính $\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F\left[u(x)\right]+C$

Ví dụ: Tính $I=\int x\cos\left(3-x^2\right)dx$

Kỹ thuật: Sử dụng cách viết vi phân hóa trong tích phân

Ví dụ: Tính

1. $\int \cos^5 x\sin x dx$ 2. $\int \frac{\tan x}{\cos x}dx$ 3. $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$ 4) $\int \cos x.e^{3\sin x}dx$

5) $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x}dx$ 6) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$ 7) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ 8) $\int \frac{dx}{\sin x}$ 9) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

Phương pháp 3: Phương pháp tính nguyên hàm từng phần

Định lí cơ bản:

Nếu hai hàm số $u=u(x)$ và $v=v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx.}$$

Ví dụ: Tính

1) $I_1=\int (x+1)\sin x dx$ **2)** $I_2=\int (x-2)e^{2x}dx$ **3)** $I_3=\int x\ln x dx$

4) $I_4=\int \ln x dx$ **5)** $I=\int \left(x^2+1\right)\ln x dx$ **6)** $I_6=\int e^x\cos x dx$

I. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG CÁCH SỬ DỤNG ĐN VÀ CÁC TÍNH CHẤT TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa: Cho hàm số y=f(x) liên tục trên $[a;b]$. Giả sử F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) thì:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)}$$

(Công thức NewTon - Leipniz)

2. Các tính chất của tích phân:

- **Tính chất 1**: Nếu hàm số y=f(x) xác định tại a thì : $\int_a^a f(x)dx = 0$
- **Tính chất 2**: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- **Tính chất 3**: Nếu f(x) = c không đổi trên $[a;b]$ thì: $\int_a^b cdx = c(b-a)$
- **Tính chất 4**: Nếu f(x) liên tục trên $[a;b]$ và $f(x) \geq 0$ thì $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Tính chất 5**: Nếu hai hàm số f(x) và g(x) liên tục trên $[a;b]$ và $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a;b]$ thì
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$
- **Tính chất 6**: Nếu f(x) liên tục trên $[a;b]$ và $m \leq f(x) \leq M$ (m,M là hai hằng số) thì
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
- **Tính chất 7**: Nếu hai hàm số f(x) và g(x) liên tục trên $[a;b]$ thì
$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$
- **Tính chất 8**: Nếu hàm số f(x) liên tục trên $[a;b]$ và k là một hằng số thì
$$\int_a^b k.f(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$$
- **Tính chất 9**: Nếu hàm số f(x) liên tục trên $[a;b]$ và c là một hằng số thì
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
- **Tính chất 10**: Tích phân của hàm số trên $[a;b]$ cho trước không phụ thuộc vào biến số , nghĩa là : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$

Bài 1: Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3}dx$ 2) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$ 3) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx$ 4) $\int_0^1 \frac{4x+11}{x^2+5x+6}dx$

5) $\int_0^1 \frac{2x-5}{x^2-4x+4}dx$ 6) $\int_0^3 \frac{x^3}{x^2+2x+1}dx$ 7) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin^6 x+\cos^6 x)dx$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx$ 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 2x dx$ 11) 12) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$. 12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1+2\sin 2x}dx$ 14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{2\cos 3x+1}dx$ 15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{5-2\sin x}dx$ 16) $\int_{-2}^0 \frac{4}{x^2+2x-3}dx$

Bài 2:

1) $\int_{-3}^3 |x^2-1|dx$ 2) $\int_{-1}^4 |x^2-3x+2|dx$ 3) $\int_{-3}^5 (|x+2|-|x-2|)dx$

4) $\int_{\frac{1}{2}}^2 \sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}dx$ 5) $\int_0^3 |2^x-4|dx$ 6) $\int_0^2 |x^2-x|dx$

Bài 3:

1) Tìm các hằng số A,B để hàm số $f(x)=A\sin \pi x+B$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$f'(1)=2 \qquad \text{và} \qquad \int_0^2 f(x)dx=4$$

2) Tìm các giá trị của hằng số a để có đẳng thức : $\int_0^2 [a^2+(4-4a)x+4x^3]dx=12$

II. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ :

1) DẠNG 1: Tính $I=\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx$ bằng cách đặt $t=u(x)$

Công thức đổi biến số dạng 1:

$$\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

Cách thực hiện:

Bước 1: Đặt $t=u(x) \Rightarrow dt=u'(x)dx$

Bước 2: Đổi cận : $\left|\begin{array}{l} x=b \\ x=a \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} t=u(b) \\ t=u(a) \end{array}\right.$

Bước 3: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t ta được

$I=\int_a^b f[u(x)].u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$ (tiếp tục tính tích phân mới)

Bài 1: (B-2012)

Tính tích phân $I=\int_0^1 \frac{x^3}{x^4+3x^2+2}dx$.

Bài 2: Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin^2 x dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x(1+\sin^2 x)^3 dx$ 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx$

5) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$ 6) $\int_1^e \frac{1+\ln^2 x}{x}dx$ 7) $\int_0^1 x^5(1-x^3)^6 dx$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x+4\sin^2 x}}dx$ 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$ 10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x}+\cos x)\cos x dx$ 11) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x}dx$

2) DẠNG 2: Tính $I=\int_a^b f(x)dx$ bằng cách đặt $x=\varphi(t)$

Công thức đổi biến số dạng 2:

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

Cách thực hiện:

Bước 1: Đặt $x=\varphi(t)\Rightarrow dx=\varphi'(t)dt$

Bước 2: Đổi cận : $\left|\begin{matrix} x=b \\ x=a\end{matrix}\right. \Rightarrow \left|\begin{matrix} t=\beta \\ t=\alpha\end{matrix}\right.$

Bước 3: Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến t ta được

$I=\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$ (tiếp tục tính tích phân mới)

Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ 2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ 3) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

4) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1}dx$ 5) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 6) $\int_1^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$

II. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP VI PHÂN:

Tính các tích phân sau:

1) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ 2) $\int_{0}^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$ 3) $\int_{0}^{\frac{7}{3}} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$

4) $\int_{0}^{2} x^2\sqrt{x^3+1}dx$ 5) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ 6) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{1+3x}}$

III. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN:

Công thức tích phân từng phần:

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b v(x).u'(x)dx$$

Hay: $$\int_a^b udv = [u.v]_a^b - \int_a^b vdu$$

Cách thực hiện:

Bước 1: Đặt $\begin{cases} u = u(x) \\ dv = v'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = u'(x)dx \\ v = v(x) \end{cases}$

Bước 2: Thay vào công thức tích phân từng từng phần : $\int_a^b udv = [u.v]_a^b - \int_a^b vdu$

Bước 3: Tính $[u.v]_a^b$ và $\int_a^b vdu$

Bài 1: (D-2012)

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)dx.$$

Bài 2: (A-2012)

$$\text{Tính tích phân } I = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx.$$

Bài 3:

Tính các tích phân sau:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin 2x dx$ 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos^2 x dx$ 3) $\int_2^3 \ln(x^2-x)dx$ 4) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3}dx$

5) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx$ 7) $\int_1^e x\ln^2 x dx$ 8) $\int_0^{\pi} x\sin x\cos^2 x dx$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(2\cos^2 x-1)dx$ 10) $\int_0^1 (x+1)^2 e^{2x}dx$ 11) $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$ 12) $\int_0^1 (x-2)e^{2x}dx$

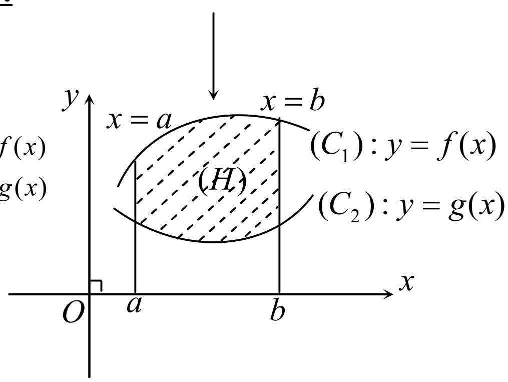
13) $\int_0^1 x\ln(1+x^2)dx$ 14) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$ 15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos^3 x)\sin x dx$ 16) $\int_0^2 (2x+7)\ln(x+1)dx$

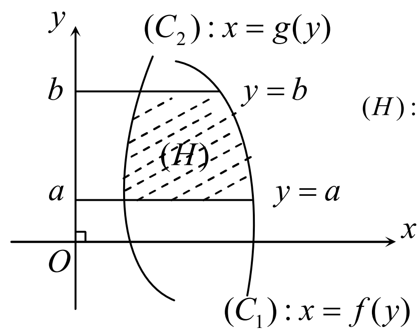
17) $\int_1^e x^3 \ln^2 x dx$ 18) $I = \int_1^3 \frac{1+\ln(x+1)}{x^2}dx$

IV .ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG:

Công thức:

$$(H): \begin{cases} (C_1): y = f(x) \\ (C_2): y = g(x) \\ \Delta_1: x = a \\ \Delta_2: x = b \end{cases}$$





$$(H): \begin{cases} (C_1): x = f(y) \\ (C_2): x = g(y) \\ \Delta_1: y = a \\ \Delta_2: y = b \end{cases}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \big[\underbrace{f(x)}_{y_{C_1}} - \underbrace{g(x)}_{y_{C_2}}\big]dx}$$

$$\boxed{S = \int_a^b \big[\underbrace{f(y)}_{x_{C_1}} - \underbrace{g(y)}_{x_{C_2}}\big]dy}$$

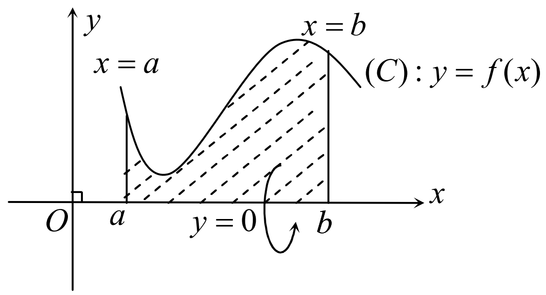
Tính diện tích của các hình phẳng sau:

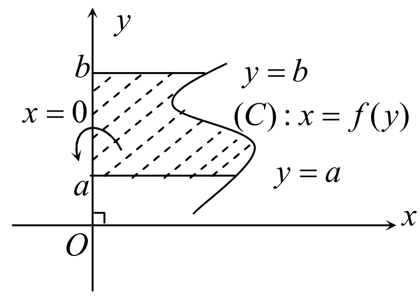
1) (H_1): $\begin{cases} y = \frac{-3x-1}{x-1} \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 2) (H_2): $\begin{cases} y = x^2 \\ x = -y^2 \end{cases}$ 3) (H_3) : $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$

4) (H_4): $\begin{cases} (C): y = \sqrt{x} \\ (d): y = 2 - x \\ (Ox) \end{cases}$ 5) (H_5): $\begin{cases} (C): y = e^x \\ (d): y = 2 \\ (\Delta): x = 1 \end{cases}$

V. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY.

Công thức:





$$V = \pi\int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

$$V = \pi\int_a^b \left[f(y)\right]^2 dy$$

<u>Bài 1</u>: Cho miền D giới hạn bởi hai đường : $y = x^2 + x - 5$; $x + y - 3 = 0$

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

<u>Bài 2</u>: Cho miền D giới hạn bởi các đường : $y = \sqrt{x}; y = 2 - x; y = 0$

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Oy

<u>Bài 3</u>: Cho miền D giới hạn bởi hai đường : $y = 4 - x^2; y = x^2 + 2$.

Tính thể tích khối tròn xoay được tạo nên do D quay quanh trục Ox

-----------------------------Hết------------------------------

Chuyên đề 17: SỐ PHỨC

A. SỐ PHỨC. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ PHỨC.

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Số phức **là một biểu thức dạng a + bi, trong đó a, b là các số thực và số i thỏa mãn** $i^2 = -1$.

   Kí hiệu $\boxed{z = a + bi}$

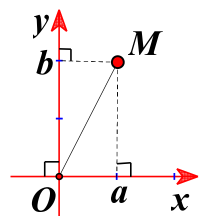
   - **i:** ***đơn vị ảo,*** • **a:** ***phần thực,*** • **b:** ***phần ảo.***

Chú ý:

- $z = a + 0i = a$ **được gọi là** số thực $(a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$
- $z = 0 + bi = bi$ **được gọi là** số ảo (**hay** số thuần ảo)
- $0 = 0 + 0i$ **vừa là số thực vừa là số ảo**

2. Biểu diễn hình học của số phức**:**

- **M(a;b) biểu diễn cho số phức z ⇔ z = a + bi**



3. Hai số phức bằng nhau. **Cho hai số phức** $z = a + bi$ **và** $z' = a' + b'i$ **với** $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}}$$

4. Cộng và trừ số phức. **Cho hai số phức** $z = a + bi$ **và** $z' = a' + b'i$ **với** $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z + z' = (a + a') + (b + b')i}$$

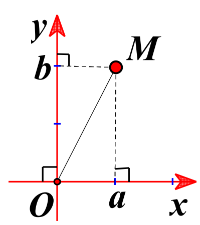
$$\boxed{z - z' = (a - a') + (b - b')i}$$

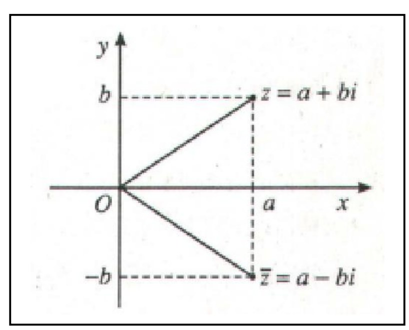
5. Nhân hai số phức. **Cho hai số phức** $z = a + bi$ **và** $z' = a' + b'i$ **với** $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z.z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i}$$

6. Môđun **của số phức z = a + bi**

- $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}} = |\overrightarrow{OM}|$





7. Số phức liên hợp **của số phức z = a + bi là** $\boxed{\bar{z} = a - bi}$

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z + \bar{z} = 2a$
- $z.\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$

8. Chia hai số phức.

Cho hai số phức $z = a + bi$ **và** $z' = a' + b'i$ **với** $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

○ **Thương của z' chia cho z** ($z \neq 0$) **:** $\boxed{\dfrac{z'}{z} = \dfrac{z'\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{z'\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{ac+bd}{a^2+b^2} + \dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i}$

B. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

1. Căn bậc hai **của số phức**

○ $z = 0$ **có một căn bậc hai là 0**

○ $z = a$ **là *số thực dương* có 2 căn bậc 2 là** $\pm\sqrt{a}$

○ $z = a$ **là *số thực âm* có 2 căn bậc hai là** $\pm\sqrt{|a|}.i$

2. Phương trình bậc nhất **ax + b = 0 (a, b, c** *là số phức* **cho trước, a** $\neq 0$**).**
Giải tương tự phương trình bậc nhất với hệ số thực

3. Phương trình bậc hai $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ **(a, b, c** *là số thực* **cho trước, a** $\neq 0$**).**

Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

○ $\Delta > 0$**: Phương trình có hai nghiệm phân biệt thực** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

○ $\Delta < 0$**: Phương trình có hai nghiệm phân biệt phức** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

○ $\Delta = 0$**: Phương trình có 1 nghiệm kép là** $x = -\dfrac{b}{2a}$

II. RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

Bài 1**:** Tìm phần thực, phần ảo của của các số phức sau

1) $z = (2+4i)(3-5i) + 7(4-3i)$ **2)** $z = 3 + 2i + (1+i)^2$

3) $z = 1 + 4i + (1-i)^3$ **4)** $z = (1-2i)(2+i)^2$

5) $z = (4-3i)^2 + (2+i)^2$

Bài 2**:** Tìm phần thực, phần ảo của của các số phức sau

1) $z = \dfrac{2+i}{3+2i}$ **2)** $z = \dfrac{3+i}{(1+i)(2-i)}$

3) $z = \dfrac{1-5i}{1+i} + (2-i)^2$ **4)** $z = \dfrac{1+3i}{1-i} - (1-2i)^2$

5) $z = \dfrac{2-3i}{4+5i}$ **6)** $z = \dfrac{2+3i}{(1+i)^2}$

Bài 3**:** Tìm môđun của các số phức sau

1) $z = 4 - 3i + (1-i)^3$ **2)** $z = \left(1-\sqrt{2}i\right)^2 + 3i$

3) $z = 1 - 3i + (1-2i)^2$ **4)** $z = \dfrac{3-i}{(1-i)(2+i)}$

5) $z = (4-3i)^2 + (1+2i)^3$

Bài 4**:**

1) $2x + yi - 3 + 2i = x - yi + 2 + 4i$ **2)** $(1-i)^2 - 2x(1-i) + y = 0$

3) $(x+yi)^2 = 5-12i$ **4)** $(1+i)(x+yi)+(1-i)^2 = 2-3i$

Bài 5: Giải các phương trình sau trên tập số phức

1) $2iz+3 = 5z+4i$ **2)** $(3-2i)z+1-i = 2+i$

3) $(3-2i)z+4+5i = 7-3i$ **4)** $\dfrac{z}{4-3i}+2-3i = 5-2i$

Bài 6: Giải các phương trình sau trên tập số phức

1) $3z^2+z+2=0$ **2)** $z^2-4z+7=0$

3) $2z^2-5z+4=0$ **4)** $z^2+z+7=0$

Bài 7: Giải phương trình sau trên tập số phức

1) $z^4-5z^2-6=0$ **2)** $z^4+7z^2-8=0$

3) $z^4-8z^2-9=0$ **4)** $z^4+6z^2+25=0$

Bài 8: Tìm tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

1) $|z+i| = |z-2-3i|$; **2)** $|z+3| \le 1$

3) $|z+3-4i| = 2$ **4)** $|z-1-i| < 1$

5) $|z-2+3i| = 5$

Bài 9: Cho số phức $z = \dfrac{(5+3i)^2-(2-i)^2}{(1-2i)^2}$. Hãy tính $|\bar{z}|$

Bài 10: Tìm số phức z thỏa mãn $(z+i-2)(3i-4) = 5i+6$

ĐỀ THI TRONG CÁC NĂM QUA

Bài 1. Giải phương trình $2x^2-5x+4=0$ trên tập số phức.

TN THPT – 2006 *Đáp số:* $x_1 = \frac{5}{4}+\frac{\sqrt{7}}{4}i$; $x_2 = \frac{5}{4}-\frac{\sqrt{7}}{4}i$

Bài 2. Giải phương trình $x^2-4x+7=0$ trên tập số phức.

TN THPT – 2007 (lần 1) *Đáp số:* $x_1 = 2+\sqrt{3}i$; $x_2 = 2-\sqrt{3}i$

Bài 3. Giải phương trình $x^2-6x+25=0$ trên tập số phức.

TN THPT – 2007 (lần 2) *Đáp số:* $x_1 = 3+4i$; $x_2 = 3-4i$

Bài 4. Tìm giá trị của biểu thức:

$$P = (1+\sqrt{3}i)^2+(1-\sqrt{3}i)^2$$

TN THPT – 2008 (lần 1) *Đáp số:* $P=-4$

Bài 5. Giải phương trình $x^2-2x+2=0$ trên tập số phức.

TN THPT – 2008 (lần 2) *Đáp số:* $x_1 = 1+i$; $x_2 = 1-i$

Bài 6. Giải phương trình $8z^2-4z+1=0$ trên tập số phức.

TN THPT – 2009 (CB) *Đáp số:* $x_1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$; $x_2 = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

Bài 7. Giải phương trình $2z^2+6z+5=0$ trên tập số phức.

TN THPT – 2010 (GDTX) *Đáp số:* $x_1 = -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$; $x_2 = -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

Bài 8. Cho hai số phức: $z_1 = 1+2i$, $z_2 = 2-3i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức z_1-2z_2.

TN THPT – 2010 (CB) *Đáp số: Phần thực – 3 ; Phần ảo 8*

Bài 9. Cho hai số phức: $z_1 = 2+5i$, $z_2 = 3-4i$. Xác định phần thực và phần ảo của số phức $z_1.z_2$.

TN THPT – 2010 (NC) *Đáp số: Phần thực 26 ; Phần ảo 7*

Bài 10. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

ĐH Khối A – 2009 (CB) *Đáp số: $A = 20$*

Bài 11. Tìm số phức z thỏa mãn $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$.

ĐH Khối B – 2009 (CB) *Đáp số: $z = 3 + 4i \vee z = 5$*

Bài 12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-(3-4i)|=2$.

ĐH Khối D – 2009 *Đáp số: đường tròn tâm I(3 ; – 4), bán kính R = 2.*

Bài 13. Cho số phức z thỏa mãn: $(1+i)^2(2-i)z=8+i+(1+2i)z$. Xác định phần thực và phần ảo của z.

CĐ Khối A,B,D – 2009 (CB) *Đáp số: Phần thực – 2 ; Phần ảo 5.*

Bài 14. Tìm phần ảo của số phức z, biết: $\overline{z}=(\sqrt{2}+i)^2(1-\sqrt{2}i)$.

ĐH Khối A – 2010 (CB) *Đáp số: $-\sqrt{2}$*

Bài 15. Cho số phức z thỏa mãn: $\overline{z}=\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm môđun của $\overline{z}+iz$.

ĐH Khối A – 2010 (NC) *Đáp số: $8\sqrt{2}$*

Bài 16. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện $|z-i|=|(1+i)z|$.

ĐH Khối B – 2010 (CB) *Đáp số: đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$*

Bài 17. Tìm số phức z thoả mãn điều kiện $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo.

ĐH Khối D – 2010 *Đáp số: $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 1 - i$; $z_2 = -1 - i$; $z_4 = -1 + i$.*

Bài 18. Cho số phức z thỏa mãn: $(2-3i)z+(4+i)\overline{z}=-(1+3i)^2$. Xác định phần thực và phần ảo của z.

CĐ Khối A,B,D – 2010 (CB) *Đáp số: Phần thực – 2 ; Phần ảo 5.*

Bài 19. Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)^2z+\overline{z}=4i-20$. Tính môđun của z.

CĐ Khối A – 2011 *Đáp số: $|z|=5$*

Bài 20. Cho số phức z thỏa mãn: $z^2-2(1+i)z+2i=0$. Tìm phần thực và phần ảo của $\dfrac{1}{z}$.

CĐ Khối A – 2011 *Đáp số: Phần thực $\dfrac{1}{2}$; Phần ảo $-\dfrac{1}{2}$.*

Bài 21. Tìm số phức z, biết: $z-(2+3i)\overline{z}=1-9i$

ĐH Khối D– 2011 (CB) *Đáp số: $z=2-i$*

Bài 22. Tìm số phức z, biết: $\overline{z}-\dfrac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0$

ĐH Khối B – 2011 (NC) *Đáp số: $-1-i\sqrt{3}; 2-i\sqrt{3}$*

Bài 23. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $z=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3$

ĐH Khối B – 2011 (NC) *Đáp số: $a=2; b=2$*

Bài 24. Tìm tất cả các số phức z, biết $z^2=|z|^2+\overline{z}$

ĐH Khối A – 2011 (CB) *Đáp số: $z=0; z=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$*

Bài 25. Tính môđun cua số phức số z, biết $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$

ĐH Khối A – 2011 (NC) *Đáp số: $|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$*

Bài 26: (A-2012)

Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\overline{z}+i)}{z+1} = 2-i$. Tính môđun của số phức $w = 1+z+z^2$.

Bài 27: (B-2012)

Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2.

Bài 28: (D-2012)

Cho số phức z thỏa mãn $(2+\text{i})z + \frac{2(1+2\text{i})}{1+\text{i}} = 7+8\text{i}$. Tìm mô-đun của số phức $w = z+1+\text{i}$.

Bài 29: (D-2012)

Giải phương trình $z^2 + 3(1+\text{i})z + 5\text{i} = 0$ trên tập hợp các số phức.

--------------------------Hết------------------------