PHƯƠNG TRÌNH & BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 1. Cho phương trình $\left(4^x-10.2^x+16\right)\sqrt{3x-m}=0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 7. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên a, $(a\ge 3)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $\left(a^{\log_{2021}x}+3\right)^{\log_{2021}a}=x-3$

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2003.

Câu 3. Gọi S là tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $mx^2+\log_2\left(mx^2\right)>2^{\log_2^2x}+\log_2^2x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập hợp S có đúng 8 phần tử ?

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 11.

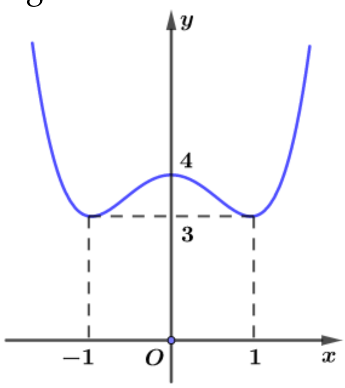
Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có 5 nghiệm nguyên?

A. 65021. **B.** 65022. **C.** 65023. **D.** 65024.

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình $2^m+2^{3m+2}=\left(x+\sqrt{9-x^2}\right)\left(5+x\sqrt{9-x^2}\right)$ có nghiệm?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. D. Vô số.

Câu 6. Cho hàm số bậc 4 có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m\in[-2021;2021]$ để phương trình $\log\dfrac{f(x)}{mx^2}+x\left[f(x)-mx\right]=mx^3-f(x)$ có hai nghiệm phân biệt dương ?



A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

Câu 7. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $2^{x^2+2x+3}-2^{m^2x^2+1}=\left(1-m^2\right)x^2+2x+2$ có hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 17. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 16.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc $[-20;20]$ để bất phương trình $\log_3x^2+a\sqrt{\log_3x^3}+a+1\le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên?

A. 22. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 24.

Câu 9. Có bao nhiêu số nguyên $m\le 2021$ để có nhiều hơn một cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m)\ge 1$ và $4x-3y+1=0$?

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10;10]$ để phương trình $e^{x+a}-e^{x}=\ln(1+x+a)-\ln(1+x)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2. **B.** 10. **C.** 1. **D.** 20.

Câu 11. Cho phương trình $x^{\log_{2020}\left(x^3\right)-a}=2021$ với a là số thực dương. Biết tích các nghiệm của phương trình là 32. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. $1\le a\le 2$. **B.** $3\le a\le 4$. **C.** $4<a\le 5$. **D.** $2\le a<3$.

Câu 12. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-20;20)$ để phương trình $\log_2 x+\log_3(m-x)=2$ có nghiệm thực

A. 15. **B.** 14. **C.** 24. **D.** 21.

Câu 13. Cho phương trình

$$2^m\cdot 2^{\sin^2 x}+3\cdot\frac{1}{9^{\cos x}+2}+m-\cos^2 x=8\cdot 4^{\cos x}+2(\cos x+1)+\left(\frac{1}{3}\right)^m\cdot 3^{\cos^2 x-1}\quad (1)$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình (1) có nghiệm thực?

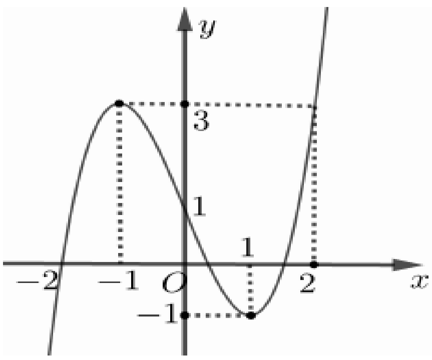
A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $\dfrac{\ln x}{x+1}+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{m}{x},\forall x>0,x\ne 1$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 0.

Câu 15. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để phương trình

$\log_2^3\left(f(x)+1\right)-\log_{\sqrt{2}}^2\left(f(x)+1\right)+(2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1}+2m=0$ có nghiệm $x\in(-1;1)$?



A. 7. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 6.

Câu 16. Cho phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m\in\left(2;\frac{7}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{7}{2}\right)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Câu 17. Cho phương trình $\sqrt{\log_3^2 x-4\log_3 x-5}=m(\log_3 x+1)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[27;+\infty)$.

A. $0\le m<1$. **B.** $0<m\le 2$. **C.** $0\le m\le 1$. **D.** $0<m<2$.

Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	2

Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}+\log_2\left[f^2(x)-4f(x)+5\right]=m$ có đúng hai nghiệm phân biệt bằng

A. 34. **B.** 50. **C.** 67. **D.** 83.

Câu 19. Biết rằng a là số thực dương để bất phương trình $a^x\ge 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in\left(0;10^2\right]$. **B.** $a\in\left(10^2;10^3\right]$. **C.** $a\in\left(10^4;+\infty\right)$. **D.** $a\in\left(10^{3};10^4\right]$.

Câu 20. Giả sử a,b là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương x,y,z thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log\left(x^2+y^2\right)=z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\frac{29}{2}$. **B.** $\frac{31}{2}$. **C.** $-\frac{31}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $\sqrt{16.3^x+m-4}=4.9^x-18.3^x+4-m$ có đúng một nghiệm ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Câu 22. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để phương trình

$3^{(x+1)^2}-27^{|x-m|}-1=\log_3\frac{|x-m|+1}{x^2+2x+4}$ có có đúng 3 nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -3. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{-5}{4}$. **D.** -2.

Câu 23. Cho phương trình $\log_2\left(mx^3-5mx^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{2+m}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$, với m là tham số. Số các giá trị x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m>-1$ là

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=x^2+2x$. Tìm m để phương trình $3^{f(x)-f(m)}=2\left(f(x)-f(m)\right)+1$ có nghiệm $x\in(0;1)$.

A. $(-3;1)\setminus\{-1\}$. **B.** $(-5;1)\setminus\{-1\}$. **C.** $m\in(-3;4)\setminus\{-1\}$ **D.** $m\in(-3;4)\setminus\{-2\}$

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 26. Gọi S là tập hợp các số nguyên $m\in[-2020;2020]$ để phương trình

$\log_2^2 x-\log_{\sqrt{2}}x=m-\sqrt{m+\log_2 x}$ có đúng hai nghiệm. Số phần tử của S bằng

A. 2021. **B.** 0. **C.** 2020. **D.** 1.

Câu 27. Trong tất cả các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(2x+2y+5)\ge 1$, có bao nhiêu giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 28. Tìm số các giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $x^2+\left(m^3-m\right)x\ge m\ln\left(x^2+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+x-2m}-2^{x^2-x-m+4}=2^{3x-m}-2^{x+4}$ có đúng hai phần tử?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 31. Gọi S tập hợp các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$m.3^{2x^2-7x+5}+3^{3-2x^2}=m+3^{8-7x}$$

có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình

$$x\log_3\left(x+1\right)=\log_9\left[9\left(x+1\right)^{2m}\right]$$

có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in\left(-1;0\right)$. **B.** $m\in\left(-2;0\right)$. **C.** $m\in\left(-1;+\infty\right)$. **D.** $m\in\left[-1;0\right)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.B	3.A	4.D	5.A	6.A	7.D	8.A	9.A	10.D
11.A	12.A	13.B	14.C	15.A	16.D	17.A	18.B	19.D	20.A
21.C	22.A	23.D	24.A	25.C	26.C	27.B	28.C	29.C	30.B
31.D	32.C								

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. Cho phương trình $\left(4^x-10.2^x+16\right)\sqrt{3x-m}=0$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 7. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\frac{m}{3}$.

$$\left(4^x-10.2^x+16\right)\sqrt{3x-m}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x-10.2^x+16=0\\ x=\frac{m}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=2\\ 2^x=8\\ x=\frac{m}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\\ x=\frac{m}{3}\end{array}\right..$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $1\le\frac{m}{3}<3\Leftrightarrow 3\le m<9$.

Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên a, $(a\ge 3)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn $\left(a^{\log_{2021}x}+3\right)^{\log_{2021}a}=x-3$

A. 2019. **B.** 2018. **C.** 2020. **D.** 2003.

Lời giải

Điều kiện có nghiệm: $x>3$.

$\left(a^{\log_{2021}x}+3\right)^{\log_{2021}a}=x-3\Leftrightarrow\left(x^{\log_{2021}a}+3\right)^{\log_{2021}a}=x-3$.

Đặt $t=x^{\log_{2021}a}+3$, $t>0$. Ta được:

$$\begin{cases}x^{\log_{2021}a}=t-3\\ t^{\log_{2021}a}=x-3\end{cases}\Rightarrow x^{\log_{2021}a}-t^{\log_{2021}a}=t-x\Leftrightarrow x^{\log_{2021}a}+x=t^{\log_{2021}a}+t.$$

Xét hàm số $f(X)=X^{\log_{2021}a}+X$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $x^{\log_{2021}a}+x=t^{\log_{2021}a}+t\Leftrightarrow x=t$.

Suy ra, ta có phương trình:

$$x=x^{\log_{2021}a}+3\Leftrightarrow x^{\log_{2021}a}=x-3\Leftrightarrow\log_{2021}a.\log_{2021}x=\log_{2021}(x-3)\Leftrightarrow\frac{\log_{2021}(x-3)}{\log_{2021}x}=\log_{2021}a$$

.(1)

Vì $a\ge3$ và $x>3$ nên $\frac{\log_{2021}(x-3)}{\log_{2021}x}=\log_{2021}a>0$ mà $\log_{2021}x>0$ suy ra

$0<\log_{2021}(x-3)<\log_{2021}x$, $\forall x>3$ nên $\frac{\log_{2021}(x-3)}{\log_{2021}x}<1$, $\forall x>3$.

Suy ra, điều kiện cần để phương trình có nghiệm là: $\log_{2021}a<1\Leftrightarrow 0<a<2021$.

Kết hợp với điều kiện $a\ge3$, suy ra $a\in\{3;4;5;....;2020\}$.

Ngược lại, nếu $3\le a<2021$, đặt $\log_{2021}a=m$, với $0<m<1$. Khi đó, phương trình (1) tương đương với $\frac{\log_{2021}(x-3)}{\log_{2021}x}=m\Leftrightarrow\log_x(x-3)=m\Leftrightarrow x-3=x^m\Leftrightarrow x-x^m-3=0$.

Xét hàm số $g(x)=x-x^m-3$ liên tục trên $[3;+\infty)$, $g(3)=-3^m<0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ nên phương trình $x-x^m-3=0$ có nghiệm $x\in(3;+\infty)$.

Vậy có 2018 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. Gọi S là tập hợp nghiệm nguyên của bất phương trình $mx^2+\log_2\left(mx^2\right)>2^{\log_2^2 x}+\log_2^2 x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tập hợp S có đúng 8 phần tử ?

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$ và $m>0$.

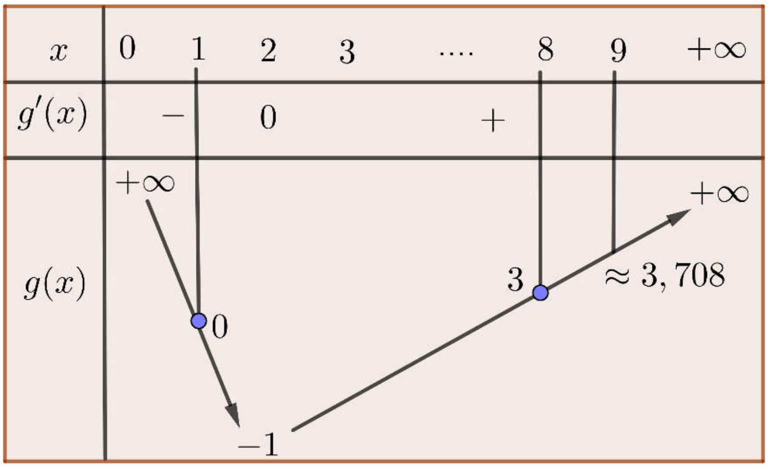
Bất phương trình tương đương với:

$$mx^2+\log_2\left(mx^2\right)>2^{\log_2^2 x}+\log_2\left(2^{\log_2^2 x}\right)\Leftrightarrow f\left(mx^2\right)>f\left(2^{\log_2^2 x}\right)\ (1)$$

Với hàm $f(t)=t+\log_2 t$, $t>0$. Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0$ với $t>0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Khi đó ta được:

$$(1)\Leftrightarrow mx^2>2^{\log_2^2 x}\Leftrightarrow \log_2 m+2\log_2 x>\log_2^2 x\Leftrightarrow \log_2 m>\log_2^2 x-2\log_2 x=g(x)$$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{2}{x\ln 2}\log_2 x-\dfrac{2}{x\ln 2}=\dfrac{2}{x\ln 2}(\log_2 x-1)$; $g'(x)=0\Leftrightarrow \log_2 x=1\Leftrightarrow x=2$ (nhận)



Để S có đúng 8 nghiệm nguyên (gồm các nghiệm là: 1; 2; 3; 4; …; 8) thì

$$3<\log_2 m\le 3,708\Leftrightarrow 8<m\le 13,068.$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn $m\in\{9;10;11;12;13\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có 5 nghiệm nguyên?

A. 65021. **B.** 65022. **C.** 65023. **D.** 65024.

Lời giải

❶ Trường hợp 1: $m\le 0$

Ta có: $2^{x^2}-m>0$ nên bất phương trình tương đương với

$$3^{x^2-x}\le 9\Leftrightarrow x^2-x-2\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 2.$$

Do $x\in\mathbb{Z}$ nên ta chọn $x\in\{-1;0;1;2\}$, có 4 giá trị nguyên là nghiệm (không thỏa đề bài).

❷ Trường hợp 2: $m=1$ (do $m\in\mathbb{Z}$)

$3^{x^2-x}-9=0\Leftrightarrow x^2-x=2\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$.

$2^{x^2}-m=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$3^{x^2-x}-9$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2^{x^2}-1$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy có các giá trị nguyên là nghiệm của bất phương trình gồm $\{-1;0;1;2\}$, tức là có 4 nghiệm nguyên (không thỏa đề bài).

❸ Trường hợp 3: $m \ge 2$ (do $m \in \mathbb{Z}$)

$2^{x^2} - m = 0 \Leftrightarrow x^2 = \log_2 m \Leftrightarrow x = -\sqrt{\log_2 m} \vee x = \sqrt{\log_2 m}$.

Do số nghiệm nguyên của bất phương trình là 5 nên ta có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-4	$-\sqrt{log_2 m}$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\sqrt{log_2 m}$	4	$+\infty$
$3^{x^2-x}-9$			$+$			0		$-$	0		$+$		
$2^{x^2}-m$		$+$	0		$-$			$-$		$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$		0		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, để bất phương trình có 5 nghiệm nguyên thì

$$3 \le \sqrt{\log_2 m} < 4 \Leftrightarrow 9 \le \log_2 m < 16 \Leftrightarrow 512 \le m < 65536 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên ta chọn $m \in \{512;513;....;65535\}$ tức là có $655035 - 512 + 1 = 65024$ giá trị nguyên của tham số m thỏa đề bài.

Câu 5. Có bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình $2^m + 2^{3m+2} = \left(x + \sqrt{9-x^2}\right)\left(5 + x\sqrt{9-x^2}\right)$ có nghiệm?

A. 2.   **B.** 3.   **C.** 1.   **D.** Vô số.

Lời giải

*Điều kiện xác định: $-3 \le x \le 3$.

Đặt $y = f(x) = x + \sqrt{9-x^2} \Rightarrow x\sqrt{9-x^2} = \dfrac{y^2-9}{2}$.

Ta có $y' = f'(x) = 1 + \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{\sqrt{9-x^2} - x}{\sqrt{9-x^2}}$.

Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 9 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = \dfrac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Bảng biến thiên $y = f(x) = x + \sqrt{9-x^2}$ trên $[-3;3]$

x	-3		$\frac{3\sqrt{2}}{2}$		3
y'		$+$	0	$-$	
y	-3	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	3

Suy ra $-3 \le y \le 3\sqrt{2}$ $\forall x \in [-3;3]$.

*Phương trình trở thành: $2^m + 2^{3m+2} = y.\left(5 + \dfrac{y^2 - 9}{2}\right) \Leftrightarrow 2^{m+1} + 2^{3m+3} = y\left(y^2 + 1\right)$

Đặt $t = 2^{m+1} \Rightarrow t^3 + t = y^3 + y$ (1).

Ta có (1)

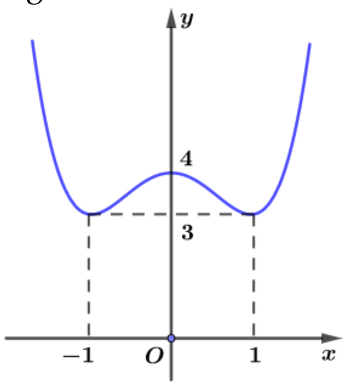
$\Leftrightarrow \left(t^3 - y^3\right) + \left(t - y\right) = 0 \Leftrightarrow \left(t - y\right)\left(t^2 + ty + y^2 + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(t - y\right)\left[\left(t + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4} + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow t = y$.

Vậy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -3 \le 2^{m+1} \le 3\sqrt{2}$. Suy ra $m \le \log_2\left(3\sqrt{2}\right) - 1$.

Vì m là số tự nhiên nên $m \in \{0;1\}$. Vậy có hai số tự nhiên m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 6. Cho hàm số bậc 4 có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m và $m \in [-2021;2021]$ để phương trình $\log\dfrac{f(x)}{mx^2} + x\left[f(x) - mx\right] = mx^3 - f(x)$ có hai nghiệm phân biệt dương ?



A. 2019. **B.** 2021. **C.** 2022. **D.** 2020.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy $f(x) \ge 3$ và $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $-1;0;1$ nên $f'(x) = ax\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow f(x) = \dfrac{a}{4}x^4 - \dfrac{a}{2}x^2 + b$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = b = 4 \\ f(1) = -\dfrac{a}{4} + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$.

Mặt khác, từ phương trình suy ra $m > 0$.

$PT \Leftrightarrow \log f(x) - \log mx^2 + xf(x) - mx^2 = mx^3 - f(x)$

$\Leftrightarrow \log f(x) + xf(x) + f(x) = \log mx^2 + x.\left(mx^2\right) + mx^2$

Cộng vào hai vế của phương trình trên với $\log(x+1)$ $\left(\forall x > 0\right)$ ta được :

$\log\left((x+1)f(x)\right) + (x+1)f(x) = \log\left((x+1)mx^2\right) + (x+1)mx^2$ (*)

Đặt $g(t) = \log t + t, \forall t > 0$. Dễ thấy hàm $g(t)$ luôn đồng biến $\forall t > 0$.

Từ (*) $\Rightarrow (x+1)f(x) = (x+1)mx^2 \Leftrightarrow f(x) = mx^2 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x^2} = m \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{4}{x^2} = m + 2$.

Xét hàm $h(x) = x^2 + \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 2x - \dfrac{8}{x^3}, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy PT đã cho có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow m+2>4 \Leftrightarrow m>2$.

Vì $m\in[-2021;2021]$ nên có 2019 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Câu 7. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $2^{x^2+2x+3}-2^{m^2x^2+1}=(1-m^2)x^2+2x+2$ có hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 17. **B.** 15. **C.** 18. **D.** 16.

Lời giải

Ta có: $2^{x^2+2x+3}-2^{m^2x^2+1}=(1-m^2)x^2+2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+2x+3}-(x^2+2x+3)=2^{m^2x^2+1}-(m^2x^2+1)$. (*)

Xét $f(t)=2^t-t$, với $t\geq 1$.

$f'(t)=2^t.\ln 2-1>0$,$\forall t\geq 1$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$.

Do đó, pt(*) $\Leftrightarrow f(x^2+2x+3)=f(m^2x^2+1)$

$\Leftrightarrow x^2+2x+3=m^2x^2+1$

$\Leftrightarrow (1-m^2)x^2+2x+2=0$. (1)

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-m^2\neq 0\\ \Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq\pm 1\\ 8m^2-4>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m\neq\pm 1\\ m<\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\vee m>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}.$$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in(-10;10)$ nên suy ra $m\in\{-9;-8;...;9\}\setminus\{-1;0;1\}$.

Vậy tập S có 16 phần tử.

Câu 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc $[-20;20]$ để bất phương trình $\log_3 x^2+a\sqrt{\log_3 x^3}+a+1\leq 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên?

A. 22. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 24.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\ \log_3 x^3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^3\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1$.

Với điều kiện trên, ta có:

$\log_3 x^2+a\sqrt{\log_3 x^3}+a+1\leq 0\Leftrightarrow 2\log_3 x+a\sqrt{3\log_3 x}+a+1\leq 0$.

Đặt $\sqrt{3\log_3 x}=t$, $(t\geq 0)\Rightarrow \log_3 x=\dfrac{t^2}{3}$.

Ta có bất phương trình $\dfrac{2}{3}t^2+at+a+1\leq 0\Leftrightarrow 3a\leq -\dfrac{2t^2+3}{t+1}$.

Nhận xét:

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{2t^2+3}{t+1}$ trên $[0;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=-\dfrac{2t^2+4t-3}{(t+1)^2}$. Giải phương trình $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2} & (l) \\ t=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2} & (n) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		$\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	-3	$\nearrow$	$4-2\sqrt{10}$	$\searrow$	$-\infty$

Bảng giá trị

x	1	2	3	$\ldots$	20	21
t	0	$\sqrt{3\log_3 2}$	$\sqrt{3}$	$\ldots$	$\sqrt{3\log_3 20}$	$\sqrt{3\log_3 21}$
$f(t)$	-3	$\dfrac{-6\log_3 2-3}{\sqrt{3\log_3 2}+1}$	$\dfrac{-9}{\sqrt{3}+1}$	$\ldots$	$-\dfrac{6\log_3 20+3}{\sqrt{3\log_3 20}+1}$	$-\dfrac{6\log_3 21+3}{\sqrt{3\log_3 21}+1}\approx -5,054$

Bất phương trình $\log_3 x^2+a\sqrt{\log_3 x^3}+a+1\le 0$ có không quá 20 nghiệm nguyên

$\Leftrightarrow 3a>-\dfrac{6\log_3 21+3}{\sqrt{3\log_3 21}+1} \Leftrightarrow a>-\dfrac{2\log_3 21+1}{\sqrt{3\log_3 21}+1}\approx -1,685$

Tập các giá trị của a thỏa đề là $\{-1;0;....;20\}$

Có 22 giá trị của a thỏa đề.

Cách 2:

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ \log_3 x^3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^3\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1$.

Với điều kiện trên, ta có:

$\log_3 x^2+a\sqrt{\log_3 x^3}+a+1\le 0 \Leftrightarrow 2\log_3 x+a\sqrt{3\log_3 x}+a+1\le 0 \quad (*)$

Đặt $\sqrt{3\log_3 x}=t$, $(t\ge 0)\Rightarrow \log_3 x=\dfrac{t^2}{3}$.

Do bất phương trình có không quá 20 nghiệm nguyên nên suy ra:

$1\le x<21 \Leftrightarrow 0\le t<\sqrt{3\log_3 21}$.

Ta có bất phương trình (*) $\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}t^2+at+a+1\le 0 \Leftrightarrow 3a\le -\dfrac{2t^2+3}{t+1}$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{2t^2+3}{t+1}$ trên $[0;+\infty)$, ta có:

$f'(t)=-\dfrac{2t^2+4t-3}{(t+1)^2}$. $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{2} & (l) \\ t=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2} & (n) \end{array}\right.$.

t	0		$\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$		$\sqrt{\log_3 21^3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(t)$	-3	$\nearrow$	$-2{,}32$	$\searrow$	$-5{,}054$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra yêu cầu bài toán tương đương với

$3a \ge -5 \Leftrightarrow a \ge -\dfrac{5}{3} \approx -1,67$.

Mà $a \in [-20;20]$ nên có 22 giá trị a thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 9. Có bao nhiêu số nguyên $m \le 2021$ để có nhiều hơn một cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m) \ge 1$ và $4x-3y+1=0$?

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2022.

Lời giải

Ta có: $\log_{x^2+y^2+4}(4x-2y+m) \ge 1 \Leftrightarrow 4x-2y+m \ge x^2+y^2+4$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x+2y+4-m \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 \le m+1 \quad (*)$.

Như vậy, $(*)$ là phương trình hình tròn (C) tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=\sqrt{m+1}$ (với $m>-1$)

Bài toán đưa về xét sự tương giao giữa đường thẳng $d: 4x-3y+1=0$ và hình tròn (C).

Để có nhiều hơn một cặp $(x;y)$ thì $d(I;d) < R$.

$\Leftrightarrow \dfrac{|4.2-3.(-1)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} < \sqrt{m+1} \Leftrightarrow \sqrt{m+1} > \dfrac{12}{5} \Leftrightarrow m+1 > \dfrac{144}{25} \Leftrightarrow m > \dfrac{119}{25} = 4,76$.

Kết hợp điều kiên $m \le 2021$, suy ra $5 \le m \le 2021$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-10;10]$ để phương trình $e^{x+a}-e^x = \ln(1+x+a)-\ln(1+x)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2. **B.** 10. **C.** 1. **D.** 20.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1+a>0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad (*)$.

Phương trình đã cho tương đương với $e^{x+a}-e^x-\left[\ln(1+x+a)-\ln(1+x)\right]=0$.

Đặt $f(x)=e^{x+a}-e^x$; $g(x)=\ln(1+x+a)-\ln(1+x)$; $P(x)=f(x)-g(x)$.

Với $a=0$ thì $P(x)=0$ (luôn đúng với mọi x thỏa mãn $(*)$).

Với $a>0$ thì $(*) \Leftrightarrow x>-1$, $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến với $x>-1$. Khi đó $P(x)$ đồng biến với $x>-1 \qquad (1)$.

Ta có: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+} P(x) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(e^{x+a} - e^x - \ln\dfrac{1+x+a}{1+x}\right) = \lim\limits_{x\to(-1)^+}\left[e^{x+a} - e^x - \ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right] = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^a - 1\right) - \ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right] = +\infty \end{cases}$ (2)

Kết hợp (1) và (2) thì phương trình $P(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Với $a<0$ thì $(*) \Leftrightarrow x > -1-a$, $g(x)$ đồng biến và $f(x)$ nghịch biến với $x>-1-a$. Khi đó $P(x)$ nghịch biến với $x>-1-a$ (3).

Ta có:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1-a)^+} P(x) = \lim\limits_{x\to(-1-a)^+}\left(e^{x+a} - e^x - \ln\dfrac{1+x+a}{1+x}\right) = \lim\limits_{x\to(-1-a)^+}\left[e^{x+a} - e^x - \ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^a - 1\right) - \ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right] = -\infty \end{cases} \quad (4)$$

Kết hợp (3) và (4) thì phương trình $P(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Kết hợp cả 3 trường hợp, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -10 \le a < 0 \\ 0 < a \le 10 \end{array}\right.$.

Vậy có tất cả 20 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 11. Cho phương trình $x^{\log_{2020}\left(x^3\right)-a} = 2021$ với a là số thực dương. Biết tích các nghiệm của phương trình là 32. Mệnh đề nào sau đây là đúng

A. $1 \le a \le 2$. **B.** $3 \le a \le 4$. **C.** $4 < a \le 5$. **D.** $2 \le a < 3$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$x^{\log_{2020}\left(x^3\right)-a} = 2021 \Leftrightarrow 3\log_{2020} x - a = \log_x 2021$

$\Leftrightarrow 3\log_{2020} x - a = \dfrac{\log_{2020} 2021}{\log_{2020} x} \Leftrightarrow 3\log_{2020}^2 x - a\log_{2020} x - \log_{2020} 2021 = 0.(1)$

Ta có: $x_1.x_2 = 32$. Áp dụng định lí Vi-et vào phương trình (1) ta có:

$\log_{2020} x_1 + \log_{2020} x_2 = \log_{2020}\left(x_1.x_2\right) = \log_{2020} 32 = \dfrac{a}{3}$

$\Leftrightarrow a \approx 1,366$.

Câu 12. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-20;20)$ để phương trình $\log_2 x + \log_3(m-x) = 2$ có nghiệm thực

A. 15. **B.** 14. **C.** 24. **D.** 21.

Lời giải

Cách 1: Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ m>x \end{cases}$.

Đặt: $t = \log_2\left(\dfrac{x}{4}\right) = \log_3\left(\dfrac{1}{m-x}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{4} = 2^t \\ \dfrac{1}{m-x} = 3^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4.2^t \\ m - x = \dfrac{1}{3^t} \end{cases} \Rightarrow m = \dfrac{1}{3^t} + 4.2^t \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Xét phương trình: $f(t) = \dfrac{1}{3^t} + 4.2^t \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

$f'(t) = -\dfrac{\ln 3}{3^t} + 4.\ln 2.2^t = 0 \Rightarrow t = \log_6\left(\dfrac{\ln 3}{4\ln 2}\right) \approx -\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\log_6\left(\frac{\ln 3}{4\ln 2}\right)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left[\log_6\left(\frac{\ln 3}{4\ln 2}\right)\right]$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm khi: $m \geq 4,56$.

Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-20;20) \Rightarrow m \in \{5;6;7;...;19\}$.

Vậy có 15 số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2: Điều kiện: $0 < x < m$.

$\log_2 x + \log_3(m-x) = 2$

$\Leftrightarrow \log_3(m-x) = \log_2\left(\dfrac{4}{x}\right)$

$\Leftrightarrow m = 3^{\log_2\left(\frac{4}{x}\right)} + x$

$\Leftrightarrow m = \left(\dfrac{4}{x}\right)^{\log_2 3} + x$.

Đặt $n = \log_2 3$, ta được: $m = \dfrac{4^n}{x^n} + \dfrac{n}{n}x = \dfrac{4^n}{x^n} + \dfrac{x}{n} + \dfrac{x}{n} \ldots + \dfrac{x}{n} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{\dfrac{4^n}{n^n}} \approx 4,56$

(có n số hạng $\dfrac{x}{n}$)

Vậy có $19-5+1=15$ số nguyên $m \in (-20;20)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 13. Cho phương trình

$$2^m \cdot 2^{\sin^2 x} + 3 \cdot \frac{1}{9^{\cos x} + 2} + m - \cos^2 x = 8 \cdot 4^{\cos x} + 2(\cos x + 1) + \left(\frac{1}{3}\right)^m \cdot 3^{\cos^2 x - 1} \quad (1)$$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình (1) có nghiệm thực?

A. 3. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Phương trình (1) tương đương

$$2^{m+1-\cos^2 x} + m + 1 - \cos^2 x - \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1-\cos^2 x} = 2^{2\cos x + 3} + 2\cos x + 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^{2\cos x + 3} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t + t - \left(\dfrac{1}{3}\right)^t$ có $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 + 3^{-t}\ln 3 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow m + 1 - \cos^2 x = 2\cos x + 3 \Leftrightarrow m = \cos^2 x + 2\cos x + 2$ (3).

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1 \leq \cos^2 x + 2\cos x + 2 = (\cos x + 1)^2 + 1 \leq 5$.

Suy ra phương trình (3) có nghiệm thực khi và chỉ khi $1 \leq m \leq 5$.

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên m thỏa mãn $\dfrac{\ln x}{x+1}+\dfrac{1}{x}>\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{m}{x}, \forall x>0, x\neq 1$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 0.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{-2x\ln x}{x^2-1}>m-1,\ \forall x>0, x\neq 1$. (1)

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{-2x\ln x}{x^2-1},\ x>0, x\neq 1$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{2[(x^2+1)\ln x-x^2+1]}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2\left(\ln x-\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{(x^2+1)(x^2-1)^2}$.

Xét hàm số $g(x)=\ln x-\dfrac{x^2-1}{x^2+1},\ x>0$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x(x^2+1)^2}>0,\ \forall x>0,\ x\neq 1;\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Suy ra $g(x)<g(1)=0$ khi $x<1$ và $g(x)>g(1)=0$ khi $x>1$.

Do đó ta có bảng biến thiên

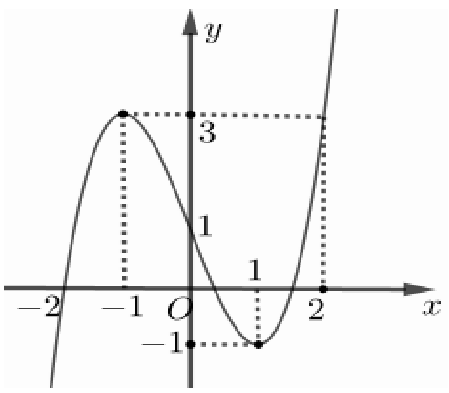
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1 || -1	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên suy ra $(1)\Leftrightarrow m-1\leq -1\Leftrightarrow m\leq 0$.

Vậy có vô số giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 15. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ để phương trình

$\log_2^3\left(f(x)+1\right)-\log_{\sqrt{2}}^2\left(f(x)+1\right)+(2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1}+2m=0$ có nghiệm $x\in(-1;1)$?



A. 7. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 6.

Lời giải

Xét phương trình:

$$\log_2^3\left(f(x)+1\right)-\log_{\sqrt{2}}^2\left(f(x)+1\right)+(2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1}+2m=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2^3\left(f(x)+1\right)-4\log_2^2\left(f(x)+1\right)-(m-4)\log_2\left(f(x)+1\right)+2m=0 \quad (1)$$

Điều kiện: $f(x)+1>0$

Đặt $t=\log_2\left(f(x)+1\right)$.

Vì $x\in(-1;1)$ nên từ đồ thị suy ra: $f(x)\in(-1;3)\Rightarrow f(x)+1\in(0;4)\Rightarrow t\in(-\infty;2)$

$(1)\Leftrightarrow t^3-4t^2-(m-4)t+2m=0\Leftrightarrow(t-2)(t^2-2t-m)=0\ (2)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\ \ (L)\\ t^2-2t-m=0\Leftrightarrow t^2-2t=m\ \ (3)\end{array}\right.$

Xét hàm $g(t)=t^2-2t$ với $t\in(-\infty;2)$

t	$-\infty$		1		2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Để PT (3) có nghiệm thì: $m\geq -1$, kết hợp $m\in[-5;5]$ và m nguyên $\Rightarrow m\in\{-1;0;...;5\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 16. Cho phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $m\in\left(2;\frac{7}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;\frac{7}{2}\right)$. **C.** $m\in(-\infty;2)$. **D.** $m\in\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

Ta có: $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0\ (1)$

Đặt $\log_3 x=t$, với $t\in\mathbb{R}$. Khi đó PT $(1)\Leftrightarrow t^2-3t+2m-7=0\ (2)$

PT (1) có 2 nghiệm thực dương phân biệt $x_1,x_2\Leftrightarrow$ PT (2) có 2 nghiệm thực phân biệt t_1,t_2

$\Leftrightarrow\Delta=9-4(2m-7)>0\Leftrightarrow m<\frac{37}{8}$

Theo Vi-et ta có:

$\begin{cases}t_1+t_2=3\\ t_1.t_2=2m-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3 x_1+\log_3 x_2=3\\ \log_3 x_1.\log_3 x_2=2m-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3(x_1.x_2)=3\\ \log_3 x_1.\log_3 x_2=2m-7\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1.x_2=27\\ \log_3 x_1.\log_3 x_2=2m-7\ \ (3)\end{cases}$

Theo giả thiết ta có:

$(x_1+3)(x_2+3)=72\Leftrightarrow x_1x_2+3(x_1+x_2)+9=72\Leftrightarrow 27+3(x_1+x_2)+9=72\Leftrightarrow x_1+x_2=12$

Vậy $\begin{cases}x_1.x_2=27\\ x_1+x_2=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=9\\ x_2=3\end{cases}$

Thay vào (3) ta có: $\log_3 9.\log_3 3=2m-7\Leftrightarrow m=\frac{9}{2}$ (tmđk).

Câu 17. Cho phương trình $\sqrt{\log_3^2 x-4\log_3 x-5}=m(\log_3 x+1)$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm thuộc $[27;+\infty)$.

A. $0 \le m < 1$. **B.** $0 < m \le 2$. **C.** $0 \le m \le 1$. **D.** $0 < m < 2$.

Lời giải

Đặt $t = \log_3 x,\ x \in [27;+\infty) \Rightarrow t \in [3;+\infty)$.

Khi đó

$$\sqrt{\log_3^2 x - 4\log_3 x - 5} = m(\log_3 x + 1)(1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 4t - 5} = m(t+1),\ t \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 3 \\ m(t+1) \ge 0 \\ t^2 - 4t - 5 = m^2(t+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 5 \\ m \ge 0 \\ \dfrac{t-5}{t+1} = m^2 \end{cases} \quad (\text{ do } t^2 - 4t - 5 = m^2(t+1)^2 \ge 0 \Rightarrow t \ge 5).$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t-5}{t+1}$ (2) với $t \ge 5$. Có $f'(t) = \dfrac{6}{(t+1)^2} > 0\ \forall t \ge 5$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	‖		$+$		
$f(t)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	1

Để phương trình (1) có nghiệm $x \in [27;+\infty)$ thì phương trình (2) có nghiệm $t \ge 5 \Leftrightarrow 0 \le m < 1$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	4	↘	1	↗	3	↘	2

Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}} + \log_2\left[f^2(x) - 4f(x) + 5\right] = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt bằng

A. 34. **B.** 50. **C.** 67. **D.** 83.

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = 2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}} + \log_2\left[f^2(x) - 4f(x) + 5\right]$.

Ta có $g'(x) = \left(f'(x) - \dfrac{4f'(x)}{f^2(x)}\right)2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}\ln 2 + \dfrac{2f'(x)f(x) - 4f'(x)}{\left[f^2(x) - 4f(x) + 5\right]\ln 2}$

$= f'(x)\left[f(x) - 2\right]\left\{\left(\dfrac{f(x)+2}{f^2(x)}\right).2^{f(x)+\frac{4}{f(x)}}\ln 2 + \dfrac{2}{\left[f^2(x) - 4f(x) + 5\right]\ln 2}\right\}$.

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=a\in(1;2) \\ x=b\in(2;3) \end{array}\right. .$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		a		2		b		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	16	$\nearrow$	$32+\log_2 5$	$\searrow$	16	$\nearrow$	33	$\searrow$	16	$\nearrow$	$1+2^{\frac{13}{3}}$	$\searrow$	16

Để phương trình có đúng 2 nghiệm thì $\left[\begin{array}{l} m=16 \\ 33<m<32+\log_2 5 \end{array}\right.$.

Do m nguyên nên $\left[\begin{array}{l} m=16 \\ m=34 \end{array}\right.$.

Câu 19. Biết rằng a là số thực dương để bất phương trình $a^x \ge 9x+1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a\in\left(0;10^2\right]$. **B.** $a\in\left(10^2;10^3\right]$. **C.** $a\in\left(10^4;+\infty\right)$. **D.** $a\in\left(10^3;10^4\right]$.

Lời giải

$a^x \ge 9x+1 \Leftrightarrow a^x-9x-1\ge 0$

Đặt $f(x)=a^x-9x-1$.

Ta có $f(0)=0$ và $f'(x)=a^x\ln a-9$.

Để $a^x \ge 9x+1\ \forall x\in\mathbb{R}$ thì $f(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tức là $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=0=f(0)$.

Điều này xảy ra khi $f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;0]$.

Do đó $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ln a-9=0 \Leftrightarrow \ln a=9 \Leftrightarrow a=e^9\in\left(10^3;10^4\right]$

Câu 20. Giả sử a,b là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi số thực dương x,y,z thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log\left(x^2+y^2\right)=z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\frac{29}{2}$. **B.** $\frac{31}{2}$. **C.** $-\frac{31}{2}$. **D.** $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+y>0 \\ x^2+y^2>0 \end{cases}$

Ta có: $\log(x+y)=z \Leftrightarrow x+y=10^z$

$\log\left(x^2+y^2\right)=z+1 \Leftrightarrow x^2+y^2=10.10^z$

Khi đó $x^2+y^2=10(x+y)\Leftrightarrow (x+y)^2-2xy=10(x+y)\Leftrightarrow xy=\dfrac{(x+y)^2-10(x+y)}{2}$

$\Rightarrow xy=\dfrac{10^{2z}-10.10^z}{2}$

Để tồn tại x,y thì $(x+y)^2\geq 4xy\Leftrightarrow 10^{2z}\geq 2\left(10^{2z}-10.10^z\right)\Leftrightarrow 10^z\leq 20\Leftrightarrow z\leq \log 20$

Mặt khác $x^3+y^3=a.10^{3x}+b.10^{2x}\Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)=a.10^{3x}+b.10^{2x}$

$\Rightarrow 10^{3z}-3.\dfrac{10^{2z}-10.10^z}{2}.10^z=a.10^{3x}+b.10^{2x}\Leftrightarrow 10^{3z}-3.\dfrac{10^{3z}-10.10^{2z}}{2}=a.10^{3x}+b.10^{2x}$

$\Leftrightarrow\ -10^{3z}+30.10^{2z}=2a.10^{3x}+2b.10^{2x}\quad (1)$

Vì (1) đúng với mọi $0<z\leq \log 20$ nên $\begin{cases}2a=-1\\2b=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\b=15\end{cases}$

Do đó, giá trị $a+b=\dfrac{29}{2}$

Câu 21. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $\sqrt{16.3^x+m-4}=4.9^x-18.3^x+4-m$ có đúng một nghiệm ?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Đặt $u=\sqrt{16.3^x+m-4};\ u\geq 0\ \Rightarrow u^2=16.3^x+m-4\Rightarrow 4-m=16.3^x-u^2$

Phương trình trở thành: $u^2+u-4.9^x+2.3^x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=2.3^x-1\\u=-2.3^x\ (L)\end{array}\right.$

Với $u=2.3^x-1$: $\quad u\geq 0\Rightarrow 2.3^x-1\geq 0\Rightarrow 3^x\geq \dfrac{1}{2}$

+) $u=2.3^x-1\Leftrightarrow \sqrt{16.3^x+m-4}=2.3^x-1$

$\Leftrightarrow 16.3^x+m-4=\left(2.3^x-1\right)^2$

$\Leftrightarrow 4.3^{2x}-20.3^x+5=m\quad (*)$

Đặt $t=3^x;\ t\geq \dfrac{1}{2}$. Phương trình $(*)\Leftrightarrow 4t^2-20t+5=m$

Xét hàm số $f(t)=4t^2-20t+5$ trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ có bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(t)$	-4	$\searrow$	-20	$\nearrow$	$+\infty$

Ứng với mỗi $t\geq \dfrac{1}{2}$ thì có một x nên phương trình có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l}m=-20\\m>-4\end{array}\right.$. m nguyên âm nên $m\in\{-20;-3;-2;-1\}$. Vậy có 4 giá trị m thỏa mãn.

Câu 22. Gọi S là tập các giá trị của tham số m để phương trình

$3^{(x+1)^2}-27^{|x-m|}-1=\log_3\dfrac{|x-m|+1}{x^2+2x+4}$ có có đúng 3 nghiệm phân biệt. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -3. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{-5}{4}$. **D.** -2.

Lời giải

Phương trình tương đương với

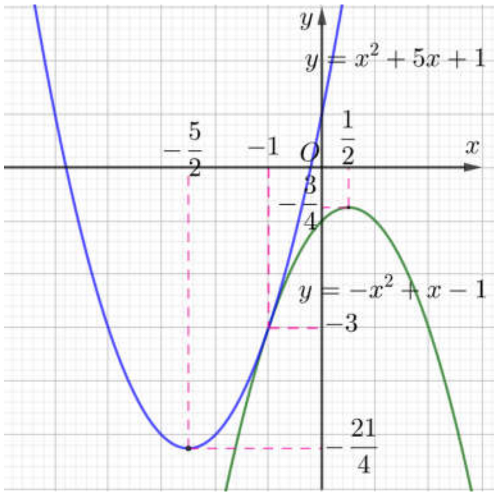
$3^{(x+1)^2}-3^{3|x-m|}=\log_3\frac{3|x-m|+3}{(x+1)^2+3}$

$\Leftrightarrow 3^{(x+1)^2}+\log_3\left[(x+1)^2+3\right]=3^{3|x-m|}+\log_3\left[3|x-m|+3\right]$ (*)

Xét hàm số $f(t)=3^t+\log_3(t+3)$ trên $[0;+\infty)$. Ta thấy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên $[0;+\infty)$

$(*)\Leftrightarrow f\left((x+1)^2\right)=f\left(3|x-m|\right)\Leftrightarrow (x+1)^2=3|x-m|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x^2+x-1=3m\\ x^2+5x+1=3m\end{array}\right.$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y=-x^2+x-1$ và $y=x^2+5x+1$ trên cùng một hệ trục



Từ đồ thị ta có, phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l}3m=\frac{-3}{4}\\ 3m=\frac{-21}{4}\\ 3m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{-7}{4}\\ m=\frac{-1}{4}\\ m=-1\end{array}\right.\Rightarrow S=\left\{\frac{-7}{4};\frac{-1}{4};-1\right\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng -3.

Câu 23. Cho phương trình $\log_2\left(mx^3-5mx^2+\sqrt{6-x}\right)=\log_{2+m}\left(3-\sqrt{x-1}\right)$, với m là tham số. Số các giá trị x nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m>-1$ là

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Gọi x_0 là giá trị x thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Vì x_0 nghiệm đúng phương trình đã cho với mọi $m>-1$ nên cũng nghiệm đúng với $m=0$.

Thay $m=0$ ta được: $\log_2\left(\sqrt{6-x_0}\right)=\log_2\left(3-\sqrt{x_0-1}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x_0<6\\ \sqrt{6-x_0}=3-\sqrt{x_0-1}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x_0 < 6 \\ 5 + 2\sqrt{(6 - x_0)(x_0 - 1)} = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x_0 < 6 \\ -x_0^2 + 7x_0 - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 5 \\ x_0 = 2 \end{array} \right.$$

Với $x_0 = 2$ ta có: $\log_2(-12m + 2) = \log_{2+m} 2$ không thỏa mãn với $m = 1$ nên loại $x_0 = 2$

Với $x_0 = 5$ ta có $\log_2 1 = \log_{2+m} 1$ đúng với mọi $m > -1$.

Vậy $x_0 = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x$. Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $3^{f(x) - f(m)} = 2(f(x) - f(m)) + 1$ có nghiệm $x \in (0;1)$.

A. $(-3;1) \setminus \{-1\}$.　　**B.** $(-5;1) \setminus \{-1\}$.　　**C.** $m \in (-3;4) \setminus \{-1\}$　**D.** $m \in (-3;4) \setminus \{-2\}$

Lời giải

Phương trình $3^{f(x) - f(m)} = 2(f(x) - f(m)) + 1$

Đặt $t = f(x) - f(m)$ ta được phương trình $3^t - 2t = 1(1)$

Xét hàm số $g(t) = 3^t - 2t$

$g'(t) = 3^t \ln 3 - 2$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_3 \dfrac{2}{\ln 3} = a$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên thì phương trình (1) có tối đa 2 nghiệm

Mặt khác, $g(0) = g(1) = 1$ nên từ đó $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array} \right.$

Hay $\left[\begin{array}{l} f(x) = f(m) + 1 \\ f(x) = f(m) \end{array} \right.$

Ta có bảng biến thiên $f(x)$ trên $(0;1)$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Từ bảng biến thiên thì yêu cầu bài toán tương đương

$$\left[\begin{array}{l} 0 < f(m) + 1 < 3 \\ 0 < f(m) < 3 \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow -1 < f(m) < 3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m+1>0 \\ m^2+2m-3<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -3<m<1 \end{cases}$

Vậy $m \in (-3;1)\backslash\{-1\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$.

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

$4^{x+1}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ (1)

$\Leftrightarrow 4^x+\dfrac{1}{4^x}=(m+1)\left(2^x-\dfrac{1}{2^x}\right)+4-2m$

Đặt: $t=2^x-\dfrac{1}{2^x}$. Vì $x\in[0;1]$ nên $t\in\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

Khi đó phương trình trở thành:

$t^2+2=(m+1)t+4-2m \Leftrightarrow t^2-t-2=m(t-2) \Leftrightarrow t=m-1$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$ khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right]$.

Mà (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3}{2}\right] \Leftrightarrow 0\le m-1\le\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 1\le m\le\dfrac{5}{2}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2\}$.

Câu 26. Gọi S là tập hợp các số nguyên $m\in[-2020;2020]$ để phương trình

$\log_2^2 x-\log_{\sqrt{2}} x=m-\sqrt{m+\log_2 x}$ có đúng hai nghiệm. Số phần tử của S bằng

A. 2021. **B.** 0. **C.** 2020. **D.** 1.

Lời giải

$\log_2^2 x-\log_{\sqrt{2}} x=m-\sqrt{m+\log_2 x} \Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x=m-\sqrt{m+\log_2 x}$ (*)

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x+m\ge 0 \end{cases}$

Đặt: $t=\log_2 x$

Phương trình trở thành:

$t^2-2t=m-\sqrt{m+t} \Leftrightarrow t^2-(m+t)=t-\sqrt{m+t} \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{m+t}\right)\left(t+\sqrt{m+t}-1\right)=0$ (**)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-\sqrt{m+t}=0 \text{ (1)} \\ t+\sqrt{m+t}-1=0 \text{ (2)} \end{array}\right.$.

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{m+t}=t \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ f(t)=t^2-t=m \end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{m+t} = 1-t \Leftrightarrow \begin{cases} t \le 1 \\ g(t) = t^2 - 3t + 1 = m \end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		1
$g(t)$	$+\infty$	$\searrow$	-1

Phương trình (*) có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có đúng 2 nghiệm

TH1: $m = -\frac{1}{4}$.

$(1) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ và $(2) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Do đó $m = -\frac{1}{4}$ không thỏa đề. (a)

TH2: (1) có 2 nghiệm phân biệt và (2) vô nghiệm

$\begin{cases} -\frac{1}{4} < m \le 0 \\ m < -1 \end{cases} \Rightarrow$ Không có giá trị m thỏa. (b)

TH3: (1) có 1 nghiệm $t > 1$ và (2) có 1 nghiệm $t \le 1$

$\begin{cases} m > 0 \\ m \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$. (c)

Từ $(a)(b)(c) \Rightarrow m > 0$ thỏa đề.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-2020, 2020]$ nên $S = \{1; 2; ...; 2020\}$.

Vậy số phần tử của S bằng 2020.

Câu 27. Trong tất cả các cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(2x+2y+5) \ge 1$, có bao nhiêu giá trị thực của m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x; y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 - m = 0$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện $2x + 2y + 5 > 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(2x+2y+5) \ge 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \le 2x + 2y + 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 5$. (1)

Tập hợp các cặp số thực $(x; y)$ là hình tròn (C_1) có tâm $I_1(1;1)$ bán kính $R_1 = \sqrt{5}$.

Mặt khác ta lại có $x^2+y^2+4x+6y+13-m=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+3)^2=m$. (2)

Khi $m<0$ thì không tồn tại cặp số $(x;y)$.

Khi $m=0$ thì $(x+2)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-3 \end{cases}$ không thõa mãn (1).

Khi $m>0$ thì (2) là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-2;-3)$ $R_2=\sqrt{m}$.

Ta có $I_1I_2=5$. Để tồn tại cặp số thực $(x;y)$ thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) phải tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I_1I_2=R_1+R_2 \\ I_1I_2=|R_1-R_2| \end{array}\right.$

Khi $I_1I_2=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{m}+\sqrt{5}=5 \Leftrightarrow m=\left(5-\sqrt{5}\right)^2$.

Khi $I_1I_2=|R_1-R_2| \Leftrightarrow \left|\sqrt{m}-\sqrt{5}\right|=5 \Leftrightarrow m=\left(\pm\sqrt{5}+5\right)^2$.

Vậy có 2 giá trị thực của m.

Câu 28. Tìm số các giá trị nguyên của m để phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3^2 x+1}-2m-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[1;3^{\sqrt{3}}\right]$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{\log_3^2 x+1}$. Điều kiện $t\ge 1$.Phương trình trở thành $t^2+t-2m-2=0$ (*).

Khi $x\in\left[1;3^{\sqrt{3}}\right] \Rightarrow t\in[1;2]$. Ta có (*) $\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{t^2+t-2}{2}=m$.

Ta có bảng biến thiên

t	1		2
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có $0\le m\le 2$. Vậy có 3 giá trị nguyên.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $x^2+\left(m^3-m\right)x\ge m\ln\left(x^2+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $x^2+\left(m^3-m\right)x\ge m\ln\left(x^2+1\right) \Leftrightarrow x^2+\left(m^3-m\right)x-m\ln\left(x^2+1\right)\ge 0$ (1).

Hàm số $f(x)=x^2+\left(m^3-m\right)x-m\ln\left(x^2+1\right)$ lên tục trên $\mathbb{R}$, gọi đồ thị là (C).

$f'(x)=2x+m^3-m-\dfrac{2mx}{x^2+1}$.

Vì (1) nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên các điểm của đồ thị (C) đều nằm phía trên trục Ox.

Mà $O(0;0)\in(C)$ $\Rightarrow$ điều kiện cần là (C) tiếp xúc với Ox tại điểm $O(0;0) \Rightarrow f'(0)=0 \Leftrightarrow m^3-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$.

Thử lại:

- Với $m=0$, (1) trở thành $x^2\ge 0$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$).

◎ Với $m=1$, (1) trở thành $x^2-\ln\left(x^2+1\right)\geq 0$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t-\ln\left(t+1\right), t\geq 0$.

$f'\left(t\right)=1-\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{t}{t+1}\Rightarrow f'\left(t\right)\geq 0, \forall t\geq 0$.

Vì $t\geq 0\Rightarrow f\left(t\right)\geq f\left(0\right)\Rightarrow t-\ln\left(t+1\right)\geq 0\Rightarrow x^2-\ln\left(x^2+1\right)\geq 0$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$).

◎ Với $m=-1$, (1) trở thành $x^2+\ln\left(x^2+1\right)\geq 0$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$).

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu là $m=0; m=\pm 1$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để tập nghiệm của phương trình $2^{x^2+x-2m}-2^{x^2-x-m+4}=2^{3x-m}-2^{x+4}$ có đúng hai phần tử?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $2^{x^2+x-2m}-2^{x^2-x-m+4}=2^{3x-m}-2^{x+4}$ (1)

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x-m+4}\left(2^{2x-m-4}-1\right)=2^{x+4}\left(2^{2x-m-4}-1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2^{2x-m-4}-1\right)\left(2^{x^2-x-m+4}-2^{x+4}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{2x-m-4}=1\\ 2^{x^2-x-m+4}=2^{x+4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-m-4=0\\ x^2-x-m+4=x+4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{m+4}{2}\\ x^2-2x-m=0\left(2\right)\end{array}\right..$$

Phương trình (1) có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow\left(2\right)$ thỏa mãn một trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (2) có nghiệm kép $\neq\dfrac{m+4}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+m=0\\ \dfrac{m+4}{2}\neq 1\end{cases}\Rightarrow m=-1$.

Trường hợp 2: (2) có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x=\dfrac{m+4}{2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=1+m>0\\ \left(\dfrac{m+4}{2}\right)^2-2.\dfrac{m+4}{2}-m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ \left(m+4\right)^2-4\left(m+4\right)-4m=0\end{cases}\Rightarrow m=0.$$

Vậy có hai giá trị thỏa mãn là $m=-1$ và $m=0$.

Câu 31. Gọi S tập hợp các giá trị của tham số m sao cho phương trình

$$m.3^{2x^2-7x+5}+3^{3-2x^2}=m+3^{8-7x}$$

có đúng 3 nghiệm thực phân biệt. Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

$m.3^{2x^2-7x+5}+3^{3-2x^2}=m+3^{8-7x}\Leftrightarrow m.3^{2x^2-7x+5}+3^{3-2x^2}-m-3^{8-7x}=0$

$$\Leftrightarrow 3^{2x^2-7x+5}\left(m-3^{3-2x^2}\right)-\left(m-3^{3-2x^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(3^{2x^2-7x+5}-1\right)\left(m-3^{3-2x^2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{2x^2-7x+5}-1=0\\ m=3^{3-2x^2}\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;\ x=\dfrac{5}{2}\\ x^2=\dfrac{3-\log_3 m}{2}\quad(*)\end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ chỉ có nghiệm kép $x=0$ hoặc phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm là $x=1$ hoặc $x=\dfrac{5}{2}$

Phương trình $x^2=\dfrac{3-\log_3 m}{2}$ với $\dfrac{3-\log_3 m}{2}>0$ luôn có hai nghiệm là $x=\sqrt{\dfrac{3-\log_3 m}{2}}$ và $x=-\sqrt{\dfrac{3-\log_3 m}{2}}$ nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi

- Trường hợp 1: $\sqrt{\dfrac{3-\log_3 m}{2}}=1\Leftrightarrow\dfrac{3-\log_3 m}{2}=1\Leftrightarrow\log_3 m=1\Leftrightarrow m=3$.
- Trường hợp 2: $\sqrt{\dfrac{3-\log_3 m}{2}}=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3-\log_3 m}{2}=\dfrac{25}{4}\Leftrightarrow\log_3 m=-\dfrac{19}{2}\Leftrightarrow m=3^{-\frac{19}{2}}$.
- Trường hợp 3: $x=0\Leftrightarrow\log_3 m=3\Leftrightarrow m=27$.

Vậy tập S có ba phần tử.

Câu 32. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x\log_3(x+1)=\log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m\in(-1;0)$. **B.** $m\in(-2;0)$. **C.** $m\in(-1;+\infty)$. **D.** $m\in[-1;0)$.

Lời giải

Điều kiện $x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$:x\log_3(x+1)=\log_3\left[3(x+1)^m\right]\Leftrightarrow x\log_3(x+1)=1+m\log_3(x+1)\quad(1)$

Dễ thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho.

Xét $x\neq 0$, khi đó $(1)\Leftrightarrow m=x-\dfrac{1}{\log_3(x+1)}$

Đặt $f(x)=x-\dfrac{1}{\log_3(x+1)}$.

Khi đó $f'(x)=1+\dfrac{1}{\left[(x+1)\ln 3\right]\left[\log_3(x+1)\right]^2}>0$, với mọi $x>-1$, suy ra $f(x)$ là hàm đồng biến trên $(-1;0)$ và $(-1;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m\in(-1;+\infty)$.

----------HẾT----------