CHUYÊN ĐỀ 1

TÌM SỐ GIA

Phương pháp:

Để tính số gia của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 tương ứng với số gia Δx cho trước ta áp dụng công thức tính sau: $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$

Δx gọi là số gia của ***đối số*** tại điểm x_0 và $\Delta x = x - x_0$.

Δy gọi là số gia của ***hàm số*** tương ứng và $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - x$, tương ứng với sự biến thiên của đối số từ $x_0 = 2$ đến $x_0 + \Delta x = 5$

Hướng dẫn

Số gia của hàm số là $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f(5) - f(2) = \left(5^2 - 5\right) - \left(2^2 - 2\right) = 18$

Bài 2. Tìm số gia của hàm số $y = x^2 - 3x + 4$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia Δx, biết $\Delta x = 4$

Hướng dẫn

Vì $\begin{cases} \Delta x = 4 \\ x_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow x_0 + \Delta x = 6$

Khi đó $\Delta y = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right) = f(6) - f(2) = \left(6^2 - 3.6 + 4\right) - \left(2^2 - 3.2 + 4\right) =$

Bài 3. Tính Δy và $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $y = x^2 + x$

Hướng dẫn

Ta có:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left[(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)\right] - \left(x^2 + x\right)$$
$$= \left(x^2 + 2x.\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x\right) - \left(x^2 + x\right) = 2x.\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x$$
$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x.\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 1$$

Bài 4. Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^4$ khi $x_0 = 1$, $\Delta x = 1$.

Hướng dẫn

Ta có: $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right) = f\left(2\right)-f\left(1\right)=2^4-1^4=15$

Bài 5. Số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^3+x$ khi $x_0=0$, $\Delta x=1$.

Hướng dẫn

Ta có: $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right) = f\left(1\right)-f\left(0\right)=\left(1^3+1\right)-\left(0^3+0\right)=2$

Bài 6. Tìm số gia của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^3}{3}$ theo số gia Δx của đối số x tại $x_0=0$.

Hướng dẫn

Ta có: $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right) = f\left(\Delta x\right)-f\left(0\right)=\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3}-\frac{\left(0\right)^3}{3}=\frac{\left(\Delta x\right)^3}{3}$

Bài 7. Số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^2-x$ ứng với x_0, Δx là

Hướng dẫn

Ta có: $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=\left(x_0+\Delta x\right)^2-\left(x_0+\Delta x\right)-\left(x_0{}^2-x_0\right)=\Delta x\left(\Delta x+2x_0-1\right)$

Bài 8. Tìm số gia của hàm số $f\left(x\right)=x^2+2$ khi $x_0=0$, $\Delta x=2$.

Hướng dẫn

Ta có: $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right) = f\left(2\right)-f\left(0\right)=2^2+2-\left(0^2+2\right)=4$.

Bài 9. Số gia của hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{x^3+1}$ khi, $x_0=1$, $\Delta x=1$.

Lời giải

Ta có: $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right) = f\left(1\right)-f\left(0\right)=\frac{1}{2^3+1}-\frac{1}{1^3+1}=\frac{-7}{18}$.

Bài 10. Tìm số gia của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+1}$ theo số gia Δx của đối số x tại $x_0=0$.

Hướng dẫn

Ta có: $\Delta y = f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right) = f\left(\Delta x\right)-f\left(0\right)=\sqrt{\Delta x}-1$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 11. Tìm số gia của hàm số $y=2x^2-3x+5$, tương ứng với sự biến thiên của đối số:

a) Từ $x_0=1$ đến $x_0+\Delta x=2$

b) Từ $x_0=2$ đến $x_0+\Delta x=0,9$

c) Từ $x_0=1$ đến $x=1+\Delta x$

d) Từ $x_0=2$ đến $x=2+\Delta x$

Bài 12. Tính Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số sau theo x và Δx:

a) $y=3x-5$

b) $y=3x^2+7$

c) $y=2x^2+4x-1$

d) $y=\cos 2x$

Bài 13. Tìm số gia của hàm số $y=x^2-1$ tại điểm $x_0=1$ ứng với số gia Δx, biết:

a) $\Delta x=1$

b) $\Delta x=-0,1$

Bài 14. Tính Δy và $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số sau theo x và Δx:

a) $y=-x^2+2x-3$

b) $y=x^3+x-1$

c) $y=x^3+4x+5$

d) $y=\frac{x-2}{x+5}$

e) $y=\frac{1-x}{2x+3}$

f) $y=\frac{x^2}{x+1}$

CHUYÊN ĐỀ 2

TÍNH ĐẠO HÀM

Phương pháp:

Có hai cách để tính đạo hàm:

Cách 1: Dùng định nghĩa: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Cách 2: Dùng bảng công thức : (bảng này thầy đính kèm ở file đầu tiên)

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Sử dụng định nghĩa, tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y=3x+5$ 2) $y=x^2+4x+1$ 3) $y=x^3+3x^2-5$

4) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 5) $y=\sqrt{x^2+x}$ 6) $y=\cos(2x-3)$

Hướng dẫn

Sử dụng định nghĩa: $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

1) Ta có:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x+\Delta x)+5-(3x+5)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$$

2) Ta có:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+4(x+\Delta x)+1-(x^2+4x+1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x.\Delta x+\Delta x^2+4.\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+4)=2x+4$$

3) Ta có:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3+3(x+\Delta x)^2-5-(x^3+3x^2-5)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2.\Delta x+3x.\Delta x^2+\Delta x^3+3x^2+6x.\Delta x+3\Delta x^2-5-x^3-3x^2+5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2.\Delta x+3x.\Delta x^2+\Delta x^3+6x.\Delta x+3\Delta x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x.\Delta x+\Delta x^2+6x+3\Delta x)=3x^2+6x$$

4) Ta có:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2\left(x+\Delta x\right)+3}{\left(x+\Delta x\right)-1}-\dfrac{2x+3}{x-1}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{2x+2\Delta x+3}{x+\Delta x-1}-\dfrac{2x+3}{x-1}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\left(2x+2\Delta x+3\right)\left(x-1\right)-\left(2x+3\right)\left(x+\Delta x-1\right)}{\left(x+\Delta x-1\right)\left(x-1\right)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2-2x+2x.\Delta x-2.\Delta x+3x-3-2x^2-2x.\Delta x+2x-3x-3.\Delta x+3}{\Delta x\left(x+\Delta x-1\right)\left(x-1\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-5.\Delta x}{\Delta x\left(x+\Delta x-1\right)\left(x-1\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-5}{\left(x+\Delta x-1\right)\left(x-1\right)}=-\frac{5}{\left(x-1\right)^2}$$

5) Ta có:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\left(x+\Delta x\right)^2+\left(x+\Delta x\right)}-\sqrt{x^2+x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2+x+\Delta x}-\sqrt{x^2+x}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2+x+\Delta x\right)-\left(x^2+x\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2+x+\Delta x}+\sqrt{x^2+x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x.\Delta x+\Delta x^2+\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2+x+\Delta x}+\sqrt{x^2+x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x+1}{\left(\sqrt{x^2+2x.\Delta x+\Delta x^2+x+\Delta x}+\sqrt{x^2+x}\right)}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

6) Ta có:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f\left(x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left[2\left(x+\Delta x\right)-3\right]-\cos\left(2x-3\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(2x-3+\Delta x\right).\sin\left(\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\Delta x\right)}{\Delta x}.\left[-2\sin\left(2x-3+\Delta x\right)\right]=-2\sin\left(2x-3\right)$$

Bài 2. Sử dụng công thức, tính đạo hàm của các hàm số sau:

1) $y=3x+5$ 2) $y=x^2+4x+1$ 3) $y=x^3+3x^2-5$

4) $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 5) $y=\sqrt{x^2+x}$ 6) $y=\cos\left(2x-3\right)$

Hướng dẫn

Các em tra bảng công thức để tính

1) Ta có:

$$y=3x+5\Rightarrow y'=(3x+5)'=(3x)'+(5)'=3+0=3$$

2) Ta có:

$$y=x^2+4x+1\Rightarrow y'=(x^2+4x+1)'=(x^2)'+(4x)'+(1)'=2x+4+0=2x+4$$

3) Ta có:

$$y=x^3+3x^2-5\Rightarrow y'=(x^3+3x^2-5)'=3x^2+6x-0=3x^2+6x.$$

4) (Sử dụng công thức $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-u.v'}{v^2}$

Ta có:

$$y=\frac{2x+3}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{(2x+3)'.(x-1)-(2x+3).(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{2.(x-1)-(2x+3).1}{(x-1)^2}=\frac{-5}{(x-1)^2}$$

5) (Sử dụng công thức $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$)

Ta có:

$$y=\sqrt{x^2+x}\Rightarrow y'=\frac{(x^2+x)'}{2\sqrt{x^2+x}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

6) (Sử dụng công thức $(\cos u)'=-u'.\sin u$)

$$y=\cos(2x-3)\Rightarrow y'=-(2x-3)'.\sin(2x-3)=-2.\sin(2x-3)$$

Bài 3. Sử dụng công thức, tính đạo hàm của các hàm số sau: $y=(x^4-1)(x^2+x+1)$

Hướng dẫn

Sử dụng công thức $(u.v)'=u'.v+u.v'$

$$y=(x^4-1)(x^2+x+1)\Rightarrow y'=(x^4-1)'.(x^2+x+1)+(x^4-1).(x^2+x+1)'$$
$$=4x^3.(x^2+x+1)+(x^4-1).(2x+1)=6x^5+5x^4+4x^3-2x-1$$

Bài 4. Tính đạo hàm các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x^2+2x+1$

d) $y=-2x^4+\frac{3}{2}x^2+1$

b) $y=-x^3+3x+1$

e) $y=\frac{2x+1}{x-3}$

c) $y=\dfrac{x^4}{4}-x^2+1$	f) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$

Hướng dẫn

a) Ta có: $y'=\left(-x^3+3x+1\right)'=3x^2-6x+2$

b) Ta có: $y'=\left(-x^3+3x+1\right)'=-3x^2+3$

c) Ta có: $y'=\left(\dfrac{x^4}{4}-x^2+1\right)'=x^3-2x$

d) Ta có: $y'=\left(-2x^4+\dfrac{3}{2}x^2+1\right)'=-8x^3+3x$

e) Ta có: $y'=\dfrac{(2x+1)'(x-3)-(x-3)'(2x+1)}{(x-3)^2}=\dfrac{-7}{(x-3)^2}$

f) Ta có: $y'=\dfrac{(x^2-2x+2)'(x+1)-(x^2-2x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$=\frac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x+2)}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-4}{\left(x+1\right)^2}.$$

Bài 5. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

1) $y=x\sqrt{x}-\dfrac{2x^2+2020}{3}$ với $x\geq 0$.	2) $y=6\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}$ với $x>0$;

Hướng dẫn

1) $\left(x\sqrt{x}-\dfrac{2x^2+2020}{3}\right)'=\left(x\sqrt{x}\right)'-\left(\dfrac{2x^2+2020}{3}\right)'=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{4x}{3}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}-\dfrac{4}{3}x$.

2) $\left(6\sqrt{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)'=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x^3}$.

TÍNH ĐẠO HÀM HÀM HỢP

Phương pháp:

Ta sử dụng định lý sau:

Nếu hàm số $u=g\left(x\right)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y=f\left(u\right)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ có đạo hàm tại x là $y'_x=y'_u.u'_x$.

Từ đó, ta có các công thức đạo hàm của hàm hợp thường gặp: với $u=u\left(x\right)$

$\left(u^n\right)'=n.u^{n-1}.u'\ \left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ $\qquad$ $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Sử dụng công thức, tính đạo hàm hàm hợp của các hàm số sau:

1) $y=\left(2x^2+3\sqrt{x}\right)^{2016}$ 2) $y=\dfrac{5}{\left(2\sqrt{x}+3\right)^4}$

3) $y=\left(x^7+x\right)^2$ 4) $y=\dfrac{1}{\left(x^2-x+1\right)^5}$

Hướng dẫn

1) Sử dụng công thức: $\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u'.u^{\alpha-1}$

Ta có:

$y=\left(2x^2+3\sqrt{x}\right)^{2016}$

$\Rightarrow y'=2016.\left(2x^2+3\sqrt{x}\right)'.\left(2x^2+3\sqrt{x}\right)^{2015}=2016.\left(4x+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}\right).\left(2x^2+3\sqrt{x}\right)^{2015}$

2) Chú ý bài này các em phải chuyển đổi: $\dfrac{1}{u^\alpha}=u^{-\alpha}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{u^\alpha}\right)'=-\alpha.u'.u^{-\alpha-1}$.

$y=\dfrac{5}{\left(2\sqrt{x}+3\right)^4}=5.\left(2\sqrt{x}+3\right)^{-4}$

$y'=\left[5.\left(2\sqrt{x}+3\right)^{-4}\right]'=5.(-4).\left(2\sqrt{x}+3\right)'.\left(2\sqrt{x}+3\right)^{-4-1}$

$=-20.2.\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.\left(2\sqrt{x}+3\right)^{-5}=\dfrac{-20}{\sqrt{x}}.\left(2\sqrt{x}+3\right)^{-5}$

3) Sử dụng công thức $\left(u^\alpha\right)'=\alpha.u'.u^{\alpha-1}$

$y=\left(x^7+x\right)^2\Rightarrow y'=2.\left(x^7+x\right)'.\left(x^7+x\right)=2\left(7x^6+1\right).\left(x^7+x\right)$

4) Sử dụng công thức $\dfrac{1}{u^\alpha}=u^{-\alpha}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{u^\alpha}\right)'=-\alpha.u'.u^{-\alpha-1}$

$y=\dfrac{1}{\left(x^2-x+1\right)^5}=\left(x^2-x+1\right)^{-5}$

$\Rightarrow y'=-5.\left(x^2-x+1\right)'.\left(x^2-x+1\right)^{-6}=-5\left(2x-1\right).\left(x^2-x+1\right)^{-6}$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\left(x^7+x\right)^2$. b) $y=\left(1-x^3\right)^5$. c) $y=\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^3$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $y' = 2\left(x^7+x\right).\left(x^7+x\right)' = 2\left(x^7+x\right)\left(7x^6+1\right)$.

b) Ta có: $y' = 5\left(1-x^3\right)^4\left(1-x^3\right)' = -15x^2\left(1-x^3\right)^4$.

c) Ta có: $y' = 3\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^2\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)' = 3\left(4-\dfrac{10}{x^3}\right)\left(4x+\dfrac{5}{x^2}\right)^2$.

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{1+2x-x^2}$.

b) $y=\sqrt{x^3-3x^2+2}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $y' = \dfrac{\left(1+2x-x^2\right)'}{2\sqrt{1+2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

b) Ta có: $y' = \dfrac{\left(x^3-3x^2+2\right)'}{2\sqrt{x^3-3x^2+2}} = \dfrac{3x^2-6x}{2\sqrt{x^3-3x^2+2}}$.

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{3}{\left(2x+5\right)^2}$.

b) $y=\dfrac{1}{\left(x^2-x+1\right)^5}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $y' = -\dfrac{3\left[\left(2x+5\right)^2\right]'}{\left(2x+5\right)^4} = -\dfrac{12\left(2x+5\right)}{\left(2x+5\right)^4} = -\dfrac{12}{\left(2x+5\right)^3}$.

b) Ta có: $y' = -\dfrac{\left(\left(x^2-x+1\right)^5\right)'}{\left(\left(x^2-x+1\right)^5\right)^2} = \dfrac{-5\left(x^2-x+1\right)^4.\left(x^2-x+1\right)'}{\left(x^2-x+1\right)^{10}} = -\dfrac{5\left(2x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)^6}$.

Bài 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$.

b) $y=\left(5x^2+4x-1\right)^4\left(7x-3\right)^5$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $y' = 3\cdot\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)' = 3\cdot\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^2\cdot\dfrac{-3}{\left(x-1\right)^2} = -\dfrac{9\left(2x+1\right)^2}{\left(x-1\right)^4}$.

b) Ta có: $y'=\left[\left(5x^2+4x-1\right)^4\right]'\left(7x-3\right)^5+\left[\left(7x-3\right)^5\right]'\left(5x^2+4x-1\right)^4$.

$y'=4\left(5x^2+4x-1\right)^3\left(10x+4\right)\left(7x-3\right)^5+5\left(7x-3\right)^4.7.\left(5x^2+4x-1\right)^4$.

$y'=\left(5x^2+4x-1\right)^3\left(7x-3\right)^4\left[4\left(10x+4\right)\left(7x-3\right)+35\left(5x^2+4x-1\right)\right]$.

$y'=\left(5x^2+4x-1\right)^3\left(7x-3\right)^4\left(455x^2+132x-83\right)$.

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ với a là tham số. b) $y=\sqrt{\left(x-2\right)^3}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $y'=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\left(a^2-x^2\right)}=\dfrac{a^2}{\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}}$.

b) Ta có: $y'=\dfrac{\left(\left(x-2\right)^3\right)'}{2\sqrt{\left(x-2\right)^3}}=\dfrac{3\left(x-2\right)^2}{2\sqrt{\left(x-2\right)^3}}=\dfrac{3\sqrt{x-2}}{2}$.

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, tính $y'\left(0\right)$.

Hướng dẫn

Ta có: $y'=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}=\dfrac{4}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3}$. Suy ra $y'\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$.

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+2x+1}{2\sqrt{3x^3+2x^2+1}}$, tính $y'\left(0\right)$.

Hướng dẫn

Ta có: $y'=\dfrac{\left(3x^2+2x+1\right)'.2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right).\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)'}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2}$

$y'=\dfrac{\left(6x+2\right)2\sqrt{3x^3+2x^2+1}-\left(3x^2+2x+1\right)\dfrac{9x^2+4x}{\sqrt{3x^3+2x^2+1}}}{\left(2\sqrt{3x^3+2x^2+1}\right)^2}$.

$$y'=\frac{(12x+4)\left(3x^3+2x^2+1\right)-\left(9x^2+4x\right)\left(3x^2+2x+1\right)}{4\left(3x^3+2x^2+1\right)\sqrt{3x^3+2x^2+1}}=\frac{-9x^2+8x+4}{4\sqrt{3x^3+2x^2+1}}.$$

Suy ra: $y'(0)=\frac{4}{4}=1$.

Bài 9. Cho hàm số $y=\frac{\left(x^3-2x+1\right)^4}{\sqrt{3x^2+1}}$, tính $y'(1)$.

Hướng dẫn

Ta có: $y'=\dfrac{4\left(x^3-2x+1\right)^3\left(3x^2-2\right)\sqrt{3x^2+1}-\dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}\left(x^3-2x+1\right)^4}{3x^2+1}$.

$$y'=\frac{4\left(x^3-2x+1\right)^3\left(3x^2-2\right)\left(3x^2+1\right)-3x\left(x^3-2x+1\right)^4}{\left(3x^2+1\right)\sqrt{3x^2+1}}.$$

$y'=\dfrac{\left(x^3-2x+1\right)^3\left[4\left(3x^2-2\right)\left(3x^2+1\right)-3x\left(x^3-2x+1\right)\right]}{\left(3x^2+1\right)\sqrt{3x^2+1}}$. Suy ra $y'(1)=0$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa:

1) $y=x^2+6x-1$ 2) $y=x^2-x$ 3) $y=\frac{x+4}{x-4}$

4) $y=x^4+2x^2+x-3$ 5) $y=\sqrt{x-5}$ 6) $y=\sin(2x+4)$

7) $y=\cos(4x+2018)$ 8) $y=\tan(5x-2)$ 9) $y=\frac{1}{x+1}$

Bài 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=x^7-3x^4+4x^2-4\sqrt{x}+4$ b) $y=2x^4+\frac{3}{x}+10x-25$

c) $y=\left(x^2-x+1\right)\left(-2x^2+3x+1\right)$ d) $y=\left(2\sqrt{x}+1\right)\left(4\sqrt{x}-3\right)$

e) $y=\frac{3x-1}{4x+5}$ f) $y=\frac{2x^2-3x+7}{x^2+2x+3}$

Bài 12. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=(2x+3)^{21}(x-4)^{23}$ b) $y=\sqrt{4x^3+3x^2+2}$

Bài 13. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau (a là hằng số):

a) $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+a^3$ b) $y=\frac{1}{(x^2-x+1)^5}$ c) $y=3x^5(8-3x^2)$

d) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$ e) $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$ f) $y=\dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$

g) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ h) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$ i) $y=\sqrt{2-5x-x^2}$

j) $y=x^2+x\sqrt{x}+1$ k) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ l) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Bài 14. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-5$ b) $y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{6}{7x^4}$ c) $y=\dfrac{3x^2-6x+7}{4x}$

d) $y=\left(\dfrac{2}{x}+3x\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ e) $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ f) $y=\dfrac{-x^2+7x+5}{x^2-3x}$

g) $y=\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$ h) $y=\left(x-x^2\right)^{32}$ i) $y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

j) $y=\dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$

Bài 15. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\left(x^2-4x+1\right)^5$ b) $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{2x-3}$ c) $y=\dfrac{-x^2+6x+1}{x^2+x-1}$

d) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+3}}{2x+1}$ e) $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ f) $y=\dfrac{2+\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$

g) $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$ h) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ i) $y=(x+1)\sqrt{x^2+x+1}$

CHUYÊN ĐỀ 3

TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI Xo

Phương pháp:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa tính đạo hàm tại là: $y'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Cách 2: Các em sử dụng công thức tính đạo hàm rồi thay vào.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=x^2+2x$ tại $x_0=5$.

Hướng dẫn

Cách 1: Sử dụng định nghĩa:

$$y'(5)=\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+2x-(5^2+2.5)}{x-5}$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{x^2+2x-35}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+7)}{x-5}=12$$

Cách 2: Sử dụng công thức tính đạo hàm rồi thay số:

Ta có: $y=x^2+2x\Rightarrow y'=(x^2+2x)'=2x+2$

Do đó $y'(5)=2.5+2=12$.

Bài 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin(2x-30^0)$ tại $x_0=60^0$.

Hướng dẫn

Cách 1: Sử dụng định nghĩa:

$$y'(60^0)=\lim_{x\to 60^0}\frac{\sin(2x-30^0)-\sin 90^0}{x-60^0}$$

$$=\lim_{x\to 60^0}\frac{2\cos(x+30^0).\sin(x-60^0)}{x-60^0}=\lim_{x\to 60^0}\frac{\sin(x-60^0)}{x-60^0}.2\cos(x+30^0)=2\cos(60^0+30^0)=0$$

Cách 2: Sử dụng công thức tính đạo hàm rồi thay số:

Ta có: $y=\sin(2x-30^0)\Rightarrow y'=(2x-30^0)'.\cos(2x-30^0)=2.\cos(2x-30^0)$

Do đó $y'(60^0)=2\cos(60^0+30^0)=0$.

Bài 3. Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 1$ c) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ tại $x_0 = 0$

d) $y = \dfrac{1}{x+1}$ tại $x_0 = 2$ e) $y = \sqrt{x^2+3}$ tại $x_0 = 1$

Hướng dẫn

a) Ta có: $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(1+\Delta x)^2 - (1+\Delta x) - (1^2 - 1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 1) = 1$

b) Ta có: $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1+\Delta x - 1}{\Delta x\left(\sqrt{1+\Delta x}+1\right)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\left(\sqrt{1+\Delta x}+1\right)} = \dfrac{1}{2}$

c) Ta có: $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$

d) Ta có: $f'(2) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(\Delta x+2)+1} - \dfrac{1}{2+1}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-\Delta x}{3.(\Delta x+3).\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{3.(\Delta x+3)} = \dfrac{-1}{9}$

e) Ta có: $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{(\Delta x+1)^2+3} - \sqrt{1^2+3}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2 + 2\Delta x + 4} - 2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x.\left[\sqrt{(\Delta x)^2+2\Delta x+4}+2\right]}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x + 2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + 2\Delta x + 4} + 2} = \dfrac{1}{2}$

Bài 4. Tính đạo hàm của hàm số :

a) $y = \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+1}$ tại $x = 1$.   b) $y = \left(\dfrac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1)$ tại $x = 1$;

Hướng dẫn

a) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{x+1}\right)' = \dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)'.(x+1) - \left(\sqrt{x}+2\right)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}.(x+1)-(\sqrt{x}+2)}{(x+1)^2}=\frac{x+1-2x-4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)^2}=\frac{1-x-4\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Vậy đạo hàm của hàm số tại $x=1$ là : $y'(1)=\frac{1}{2}$.

b) $\left[\left(\frac{2}{x}+3x\right)(\sqrt{x}-1)\right]'=\left(\frac{2}{x}+3x\right)'.(\sqrt{x}-1)+\left(\frac{2}{x}+3x\right)(\sqrt{x}-1)'$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}+3\right).(\sqrt{x}-1)+\left(\frac{2}{x}+3x\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vậy đạo hàm của hàm số tại $x=1$ là : $y'(1)=\frac{5}{2}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 5. Tính đạo hàm của hàm số $y=x^2-2x+4$ tại $x_0=2$

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)=\sqrt{2x^2+1}$

a) Tìm đạo hàm của hàm số tại $x_0=2$ b) Suy ra giá trị $3f'(2)-5f'(2\sqrt{3})$

Bài 7. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại điểm x_0:

a) $y=2x+1$ tại $x_0=2$ b) $y=x^2+x$ tại $x_0=1$

c) $y=\frac{x+1}{x-1}$ tại $x_0=0$ d) $y=\sqrt{2x+7}$ tại $x_0=1$

Bài 8. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của mỗi hàm số sau (a là hằng số):

a) $y=ax+3$ b) $y=\frac{1}{2}ax^2$

c) $y=\frac{1}{2x-1}$ với $x\neq\frac{1}{2}$ d) $y=\sqrt{3-x}$ với $x<3$

Bài 9. Tính đạo hàm của hàm số tại điểm x_0 được chỉ ra bằng cách sử dụng công thức tính đạo hàm rồi thay x_0 vào :

1) $y=x^5+2x^3+3x-5$ tại $x_0=2$ 2) $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ tại $x_0=10$

3) $y=\sqrt{x^2+4x-1}$ tại $x_0=5$ 4) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ tại $x_0=\frac{\pi}{6}$

5) $y=\frac{x+2}{x-5}$ tại $x_0=-2$ 6) $y=(x^2-3x)(x^4+2)$ tại $x_0=-3$

CHUYÊN ĐỀ 4

ĐẠO HÀM CỦA HÀM LƯỢNG GIÁC

Phương pháp:

Sử dụng công thức tính đạo hàm của hàm lượng giác:

Đạo hàm	Hàm hợp
$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$	$(\sin u)' = u'.\cos u$
$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\cos u)' = -u'\sin u$; $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\sin^n u\right)' = n.\sin^{n-1} u.\left(\sin u\right)'$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$	$\left(\cos^n u\right)' = n.\cos^{n-1} u.\left(\cos u\right)'$
	$\left(\tan^n u\right)' = n.\tan^{n-1} u.\left(\tan u\right)'$
	$\left(co\,t^n u\right)' = n.co\,t^{n-1} u.\left(co\,t\,u\right)'$

I. Sử dụng công thức để tính đạo hàm hàm lượng giác:

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số :

1) $y = \sin 2x + \cos\dfrac{x}{3}$.

2) $y = \left(\sin 5x + 1\right)^2$

3) $y = \sin x.\cos 4x$

4) $y = 2\tan^2 x + 5\cot x^2$

Hướng dẫn

1) Ta có: $y' = 2.\cos 2x - \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3}$

2) Ta có: $y' = 2\left(\sin 5x+1\right)'\left(\sin 5x+1\right) = 10\cos 5x\left(\sin 5x+1\right)$.

3) Ta có: $y' = \left(\sin x\right)'.\cos 4x + \sin x.\left(\cos 4x\right)' = \cos x.\cos 4x - 4\sin x.\sin 4x$.

Ngoài ra các em có thể tách $y = \sin x.\cos 4x = \dfrac{1}{2}\left(\sin 5x - \sin 3x\right)$ sau đó tính đạo hàm.

4) Ta có: $y' = \dfrac{2\sin x}{\cos^3 x} - \dfrac{5x}{\sin^2 x^2}$

Bài 2. Tính đạo hàm của hàm số :

1) $y=\sin 3x$ 2) $y=5\sin x-3\cos x$ 3) $y=\cos\sqrt{2x+1}$

4) $y=\sin(x-\frac{\pi}{3})+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ **5)** $y=4\cos 2x+5\sin(2x-3)$ 6) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x-2019x$

7) $y=x^2.\cos 3x+2x\sin 3x$ 8) $y=\sqrt{3+\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}+\cos\sqrt{2x^2+1}$

9) $y=\tan 2x$ 10) $y=\cot(3x+1)$ 11) $y=\tan\frac{x+1}{2}$

12) $y=\cot\sqrt{x^2+1}$ 13) $y=\tan\frac{x}{3}$ 14) $y=3\cos x+\cot 2x$

15) $y=\tan 5x+\cot 4x$ 16) $y=\tan\left(x^2+2\sqrt{x}+1\right)$ 17) $y=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$

18) $y=\tan(2x+1)-x\cos^2 x$

Hướng dẫn

1) Ta có $y=\sin 3x\Rightarrow y'=3\cos 3x$

2) Ta có $y=5\sin x-3\cos x\Rightarrow y'=5\cos x+3\sin x$

3) Ta có $y=\cos\sqrt{2x+1}\Rightarrow y'=-\dfrac{\sin\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$

4) Ta có $y'=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

5) Ta có $y'=-8\sin 2x+10\cos(2x-3)$.

6) Ta có : $y'=\sqrt{3}\cos x-\sin x-2019$

7) Ta có : $y'=2x\cos 3x-3x^2\sin 3x+2\sin 3x+6x\cos 3x=8x\cos 3x+\left(2-3x^2\right)\sin 3x$

8) Ta có:

$$y'=\frac{3.2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3+\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}}-\sin\sqrt{2x^2+1}.\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{3\sin 2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3+\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}}-\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}\sin\sqrt{2x^2+1}.$$

9) Ta có: $y'=(\tan 2x)'=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$.

10) Ta có: $y'=\left[\cot(3x+1)\right]'=-\dfrac{3}{\sin^2(3x+1)}$.

11) Ta có $y'=\left(\tan\frac{x+1}{2}\right)'=\frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)'}{\cos^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}=\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x+1}{2}\right)}$

12) Ta có: $y'=\left(\cot\sqrt{x^2+1}\right)'=-\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}.\sin^2\sqrt{x^2+1}}$

13) Ta có: $y'=\left(\tan\frac{x}{3}\right)'=\frac{1}{3\cos^2\frac{x}{3}}$.

14) Ta có: $y'=\left(3\cos x+\cot 2x\right)'=-3\sin x-\frac{2}{\sin^2 2x}$.

15) Ta có: $y'=\left(\tan 5x+\cot 4x\right)'=\frac{5}{\cos^2 5x}-\frac{4}{\sin^2 4x}$.

16) Ta có: $y'=\left(\tan\left(x^2+2\sqrt{x}+1\right)\right)'=\frac{\left(x^2+2\sqrt{x}+1\right)'}{\cos^2\left(x^2+2\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2x+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\cos^2\left(x^2+2\sqrt{x}+1\right)}=\frac{2x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\cos^2\left(x^2+2\sqrt{x}+1\right)}$

17) Ta có: $y'=1+\tan^6 x$

18) Ta có:

$$y'=\frac{2}{\cos^2(2x+1)}-\left(\cos^2 x-2x\sin x\cos x\right)=\frac{2}{\cos^2(2x+1)}-\cos^2 x+x\sin 2x$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=2\sin x+\sin 2x-\sin^2 x+2\sin\frac{x}{2}-\sin\frac{2}{x}$

b) $y=\sin^2\left(2x^2-3x+1\right)$

c) $y=\sqrt{\sin\left(4x^2+x\right)}$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=2\sqrt{x}\sin x-\frac{\cos x}{x}$ b) $y=\frac{3\cos x}{2x+1}$ c) $y=\frac{x^2+2\cos x}{\sin x}$

d) $y=\frac{2\cos x-\sin x}{3\sin x+\cos x}$ e) $y=\frac{\tan x}{\sin x+2}$ f) $y=\frac{\cot x}{2\sqrt{x}-1}$

g) $y=\sin\left(x^2-3x+2\right)$ h) $y=\cos\sqrt{2x+1}$ i) $y=2\sin 3x\cos 5x$

j) $y=\sqrt{\cos 2x}$ k) $y=\tan\dfrac{x+1}{x^2}$ l) $y=\cot\sqrt{x^2+1}$

m) $y=\tan^3 x+\cot 2x$ n) $y=\sqrt{1+2\tan x}$ o) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$

p) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\mathrm{t}\,an2x}$ q) $y=\tan(\sin x)$ r) $y=x\cot\left(x^2-1\right)$

s) $y=\cos^2\sqrt{\dfrac{\pi}{4}-2x}$ t) $y=x\sqrt{\sin 3x}$ u) $y=\tan^2 x+\tan x^2$

v) $y=\left(2-x^2\right)\cos x+2x\sin x$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\sin\left(\sqrt{1+x^2}\right)$ b) $y=\sin^2\left(\cos 3x\right)$ c) $y=\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$

d) $y=\cos\left[\cos\left(\cos x\right)\right]$ e) $y=\cos^2\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$ f) $y=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cot x}+\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan x}$

g) $y=\dfrac{x}{\sin x+\cos x}$ h) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ i) $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ b) $y=\sqrt{1+\cos^2\dfrac{x}{2}}$ c) $y=\left(\dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}\right)^{20}$ d) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

e) $y=x\sin x+\cos x$ f) $y=3\tan x+\tan 3x+\tan^3 x+\tan x^2$ g) $y=x\cot\left(x^2-1\right)$

h) $y=\cot^3 2x+3\cot 2x$ i) $y=\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ j) $y=\dfrac{\sin^2 2x+4\cos^2 x-4}{\sin^2 2x-4\cos^2 x}$

Bài 5. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y=5\sin x-3\cos x$ b) $y=\sin(x^2-3x+2)$ c) $y=\cos\sqrt{2x+1}$

d) $y=\sin 3x.\cos 5x$ e) $y=\sqrt{1+2\tan x}$ f) $y=\tan 3x-\cot 3x$

g) $y=4\sin x-3\cos x$ h) $y=4\sin^2 x-3\cos^4 x$ i) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$

Bài 6. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos x}}}$, với $x\in(0;\pi)$

II. Tính đạo hàm của hàm lượng giác tại x_0

Phương pháp:

Tính đạo hàm rồi thay x_0 vào

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x}$ tại $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn

Ta có : $y'=\dfrac{(\sin 2x)'.\cos 3x-\sin 2x.(\cos 3x)'}{(\cos 3x)^2}=\dfrac{2\cos 2x.\cos 3x+3\sin 2x.\sin 3x}{(\cos 3x)^2}$

Khi đó : $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$. Vậy đạo hàm của hàm số đã cho tại $x=\dfrac{\pi}{4}$ là $3\sqrt{2}$.

Bài 2. Tính đạo hàm của hàm số $y=x.\cos 2x$ tại $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn

Ta có: $y'=x'.\cos 2x+x.(\cos 2x)'=\cos 2x-2x.\sin 2x$

Khi đó : $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$. Vậy đạo hàm của hàm số đã cho tại $x=\dfrac{\pi}{4}$ là -1 .

Bài 3. Tính đạo hàm của hàm số $y=5\sin x-3\cos x$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn

Ta có $y'=(5\sin x-3\cos x)'=5.(\sin x)'-3(\cos x)'=5.\cos x+3\sin x$.

Suy ra $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5.\cos\dfrac{\pi}{2}+3\sin\dfrac{\pi}{2}=3$.

Bài 4. Tính đạo hàm của hàm số $y=2\sin 3x\cos 5x$ tại điểm $x=\dfrac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn

Ta có $y=2\sin 3x\cos 5x=\sin 8x-\sin 2x$.

$\Rightarrow y'=(\sin 8x-\sin 2x)'=8\cos 8x-2\cos 2x$

$\Rightarrow y'\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=8\cos\left(8.\dfrac{\pi}{8}\right)-2\cos\left(2.\dfrac{\pi}{8}\right)=-8-\sqrt{2}$.

Bài 5. Tính đạo hàm của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x^2\right)$ tại điểm $x=\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$.

Hướng dẫn

Ta có $y'=x.\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^2\right)\Rightarrow y'\left(\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}^2\right)=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$. Tính $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Hướng dẫn

Ta có: $y'=-3\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$.

Vậy $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-3\sin\left(3.\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2.\frac{\pi}{3}\right)=-3\sin\frac{5\pi}{6}-2\cos 0=-\frac{7}{2}$.

Bài 7. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\frac{1}{2}\cot x^2$ tại điểm $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Hướng dẫn

Ta có: $f'(x)=-\frac{1}{2}\frac{\left(x^2\right)'}{\sin^2 x^2}=-\frac{x}{\sin^2 x^2}$

Suy ra: $f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=-\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

Bài 8. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\tan^2 x-\cot^2 x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn

Ta có: $f'(x)=2\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}-2\cot x.\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\frac{2\tan x}{\cos^2 x}+\frac{2\cot x}{\sin^2 x}$

Suy ra: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\tan\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}+\frac{2\cot\frac{\pi}{4}}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=8$

Bài 9. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\cot x+1}$ tại $x=\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn

Ta có: $f'(x)=\left(\sqrt{\cot x+1}\right)'=\frac{(\cot x+1)'}{2\sqrt{\cot x+1}}=-\frac{1}{2\sin^2 x.\sqrt{\cot x+1}}$

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2\sin^2\frac{\pi}{2}.\sqrt{\cot\frac{\pi}{2}+1}}=-\frac{1}{2}$

Bài 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\tan^3 x+\cot 2x$ tại điểm $x=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn

Ta có: $f'(x)=\left(\tan^3 x+\cot 2x\right)'=3.\tan^2 x.\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 2x}$

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3.\tan^2\frac{\pi}{4}.\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}-\frac{2}{\sin^2 2.\frac{\pi}{4}}=4$

Bài 11. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\tan x+\cot x}$ tại điểm $x=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn

Ta có: $f'(x)=\frac{(\tan x+\cot x)'}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x+\cot x}}$

$=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos^2 x\sqrt{\tan x+\cot x}}=\frac{-2\cos 2x}{\sin^2 2x\sqrt{\tan x+\cot x}}$

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-2\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}}}=0$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra .

1) $y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$ tại $x=\frac{\pi}{3}$

2) $y=\frac{\cos x}{\sin x+1}$ tại $x=\frac{\pi}{2}$

3) $y=2x\cot x+x^2$ tại $x=\frac{\pi}{4}$

4) $y=\sqrt{1+2\tan x}$ tại $x=0$

5) $y=\sin 3x.\cos 4x$ tại $x=\frac{3\pi}{4}$

6) $y=2\cos\frac{x}{2}-\sin 2x+\cos\left(x^2\right)$ tại $x=\frac{5\pi}{6}$

7) $y=\sin^2 x.\cos^3 x$ tại $x=\frac{\pi}{3}$

8) $y=\tan^3\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ tại $x=\frac{\pi}{4}$

9) $y=\sin^2\left(\cos^2(\tan x)\right)$ tại $x=\frac{\pi}{4}$

10) $y=\cot^2\sqrt{x^2+1}$ tại $x=\frac{\pi}{3}$

11) $y=\sin^3\sqrt{x^2+1}$ tại $x=0$

12) $y=\sin^2(\cos 3x)$ tại $x=\frac{\pi}{3}$

Bài 2. Cho hàm số $y=x^3$ và $y=4x+\sin\frac{\pi x}{2}$. Tính tổng $f'(1)+g'(1)$?

III. Chứng minh biểu thức có chứa đạo hàm hàm lượng giác.

Phương pháp:

Tính đạo hàm rồi thay vào biểu thức và biến đổi.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Chứng minh rằng : $f'(x)=0$ với $f(x)=\cos^6 x+2\sin^4 x.\cos^2 x+3\sin^2 x.\cos^4 x+\sin^4 x$.

Hướng dẫn

Cách 1 :

Ta có :

$$f'(x)=\left(\cos^6 x\right)'+\left(2\sin^4 x.\cos^2 x\right)'+\left(3\sin^2 x.\cos^4 x\right)'+\left(\sin^4 x\right)'$$

$$=-6.\sin x.\cos^5 x+\left(8.\cos x.\sin^3 x.\cos^2 x-4.\sin^4 x.\sin x.\cos x\right)$$

$$+\left(6.\cos x.\sin x.\cos^4 x-12.\sin^2 x.\sin x.\cos^3 x\right)+4.\cos x.\sin^3 x$$

$$=-6.\sin x.\cos^5 x+8\sin^3 x.\cos^3 x-4\sin^5 x.\cos x+6\sin x.\cos^5 x-12\sin^3 x.\cos^3 x+4.\cos x.\sin^3 x$$

$$=-4\sin^3 x.\cos^3 x-4\cos x.\sin^3 x.\left(\sin^2 x-1\right)=-4\sin^3 x.\cos^3 x+4\sin^3 x.\cos^3 x=0$$

Cách 2 : Ta có :

$$f(x)=\sin^4 x\left(1+2\cos^2 x\right)+\cos^4 x\left(3\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$=\sin^4 x\left(1+2\cos^2 x\right)+\cos^4 x\left(1+2\sin^2 x\right)$$

$$=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^4 x\cos^2 x+2\sin^2 x\cos^4 x$$

$$=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^2 x\cos^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=1$$

Khi đó : $f'(x)=0$

Bài 2. Cho hàm số $y=x\sin x$. Chứng minh: $x.y-2\left(y'-\sin x\right)+x\left(2\cos x-y\right)=0$

Hướng dẫn

Ta có: $y'=\left(x\sin x\right)'=x'.\sin x+x.\left(\sin x\right)'=\sin x+x\cos x$.

$$x.y-2\left(y'-\sin x\right)+x\left(2\cos x-y\right)$$

$$=x^2.\sin x-2\left(\sin x+x\cos x-\sin x\right)+x\left(2\cos x-x\sin x\right)$$

$$=x^2\sin x-2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x=0 \text{ (đpcm).}$$

Bài 3. Cho hàm số $y=\cot 2x$. Chứng minh: $y'+2y^2+2=0$

Hướng dẫn

Ta có: $y'=(\cot 2x)'=-2\left(1+\cot^2 2x\right)=-2\left(1+y^2\right)$

$\Rightarrow y'+2y^2+2=0$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\tan x$. Chứng minh: $y'-y^2-1=0$

Hướng dẫn

Ta có: $y'=(\tan x)'=1+\tan^2 x=1+y^2 \Rightarrow y'-y^2-1=0$.

Bài 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{\tan x}$ .Chứng minh rằng: $y'+y.\tan x=-\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$

Hướng dẫn

Ta tiến hành rút gọn trước khi tính đạo hàm:

$$y=\frac{x\sin x+\cos x}{\tan x}=\frac{(x\sin x+\cos x).\cos x}{\sin x}=x.\cos x+\frac{1}{\sin x}-\sin x$$

$$\Rightarrow y'=\cos x-x\sin x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\cos x=-x\sin x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow VT=-x\sin x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}+x\sin x+\cos x=\frac{-\cos x\left(1-\sin^2 x\right)}{\sin^2 x}=\frac{-\cos^3 x}{\sin^2 x}=VP$$

Bài 6. Cho hàm số $y=\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}$. Chứng minh rằng: $2y.y'+x.\left(1+y^4\right)=0$.

Hướng dẫn

Ta có:

$$y'=\frac{\left(\cot\left(x^2+1\right)\right)'}{2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}}=\frac{(-1)\left(1+\cot\left(x^2+1\right)\right).\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}}=\frac{-x\left(1+\cot^2\left(x^2+1\right)\right)}{2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}}$$

$$VT=-2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}.\frac{x\left(1+\cot^2\left(x^2+1\right)\right)}{2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}}+x+x.y^4$$

$$=-x\left(1+\cot^2\left(x^2+1\right)\right)+x+x.\cot^2\left(x^2+1\right)=0=VP$$

Bài 7. Cho hàm số $f(x)=2\cos^2(4x-1)$. Chứng minh rằng: $\left|f'(x)\right|\le 8, \forall x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Ta có:

$$f'(x) = -16\sin(4x-1)\cos(4x-1) = -8\sin(8x-2)$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = |-8\sin(8x-2)| = 8|\sin(8x-2)| \le 8$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\left[\begin{array}{l}\sin(8x-2)=1 \Leftrightarrow 8x-2=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{k\pi}{8}\\ \sin(8x-2)=-1 \Leftrightarrow 8x-2=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{-\pi}{16}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{k\pi}{8}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$

Bài 8. Cho hàm số $y=\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$. Chứng minh rằng: $y'(\sin x - x\cos x)^2 - x^2y^2 = 0$.

Hướng dẫn

Ta có: $y=\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

$$y' = \frac{(\sin x - x\cos x)'(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)(\cos x + x\sin x)'}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

Tính $(\sin x - x\cos x)' = \cos x - x'\cos x - x.(\cos x)' = x\sin x$

Tính $(\cos x + x\sin x)' = -\sin x + x'\sin x + x(\sin x)' = x\cos x$

$$\Rightarrow y' = \frac{x\sin x.(\cos x + x\sin x) - (\sin x - x\cos x)x\cos x}{(\cos x + x\sin x)^2} = \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}$$

Ta có: $VT = y'(\sin x - x\cos x)^2 - x^2y^2 = \dfrac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2}.(\sin x - x\cos x)^2 - x^2.\left(\dfrac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}\right)^2 = 0 = VP$

Bài 9. Cho hàm số $y=\cot\sqrt{x^2+1}$. Chứng minh rằng: $y'.\sqrt{x^2+1}+x+x.y^2=0$.

Hướng dẫn

Ta có: $y=\cot\sqrt{x^2+1}$

$$\Rightarrow y' = -\left(1+\cot^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right).\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = -\left(1+\cot^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right).\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\left(1+\cot^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$$

Ta có:

$$VT = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}\left(1+\cot^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right).\sqrt{x^2+1}+x+x.\cot^2\left(\sqrt{x^2+1}\right) = -x - x\cot^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)+x+x.\cot^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)=0$$

Bài 10. Cho hàm số $y=\cos x$. Chứng minh rằng: $2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=f'(0)-f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

Hướng dẫn

Ta có: $f'(x)=(\cos x)'=-\sin x$

$$\Rightarrow VT=2f'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)f'\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

$$=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$=-\sin\left(-2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-2x+\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=0-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=f'(0)-f\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=VP$$

Bài 11. Cho hàm số $y=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$. Chứng minh rằng: $y'=0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Ta tiến hành làm gọn biểu thức trước khi tiến hành lấy đạo hàm

Ta có: $y=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$

Mà:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3-3\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\Rightarrow y=3\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)-2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)=1$$

$$\Rightarrow y'=0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Bài 12. Cho hàm số $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$. Chứng minh rằng: $y'.\sin x-3y=0$

Hướng dẫn

Ta có: $y=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3$

$$y' = 3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'$$

$$Mà \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x)-(\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

$$\Rightarrow y' = 3\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2.\frac{1}{1+\cos x} = \frac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}$$

Ta có: $y'.\sin x - 3y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3\sin^2 x}{(1+\cos x)^3}.\sin x - 3.\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^3 = 0$

Bài 13. Cho hàm số $y = \sin^3(2x+1)$. Chứng minh rằng: $y'\sin(2x+1) - 6y.\cos(2x+1) = 0$

Hướng dẫn

Ta có: $y = \sin^3(2x+1)$

$$\Rightarrow y' = 3\sin^2(2x+1)\left(\sin(2x+1)\right)' = 3\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)(2x+1)' = 6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$$

Ta có:

$$VT = y'\sin(2x+1) - 6y\cos(2x+1)$$
$$= 6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)\sin(2x+1) - 6\sin^3(2x+1)\cos(2x+1) = 0 = VP$$

Bài 14. Cho hàm số $y = \cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$. Chứng minh rằng: $y'\sqrt{x.\left(\sqrt{x}-1\right)^4} - 2\tan\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).y = 0$

Hướng dẫn

Ta có: $y = \cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

$$\Rightarrow y' = 2\cos\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\left[\cos\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\right]' = -2\cos\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)'$$

$$Mà \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)' = \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)'\left(\sqrt{x}-1\right)-\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)'}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$$

$$\Rightarrow y' = -2\cos\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\sin\left(2.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$$

Ta có:

$$VT = y'\sqrt{x.\left(\sqrt{x}-1\right)^4} - 2\tan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right).y$$

$$= \frac{\sqrt{x.\left(\sqrt{x}-1\right)^4}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\sin\left(2.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) - 2\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)}{\cos\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)}\cos^2\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right) = 0 = VP$$

Bài 15. Cho hàm số $y = \cos^4 x\left(2\cos^2 x - 3\right) + \sin^4 x\left(2\sin^2 x - 3\right)$. Chứng minh rằng y' không phụ thuộc vào x.

Hướng dẫn

Ta tiến hành làm gọn biểu thức trước khi tiến hành lấy đạo hàm

$$y = \cos^4 x\left(2\cos^2 x - 3\right) + \sin^4 x\left(2\sin^2 x - 3\right)$$
$$= 2\cos^6 x - 3\cos^4 x + 2\sin^6 x - 3\sin^4 x$$
$$= 3\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 2\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) = 1$$

$\Rightarrow y' = 0$. Vậy y' không phụ thuộc vào x.

IV. Giải phương trình – Bất phương trình liên quan đạo hàm của hàm lượng giác

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Giải phương trình $f'(x) = 0$ biết $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$

Hướng dẫn

Ta có: $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 - \cos(\pi + x) - 2.\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)'.\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos x + \cos\frac{x}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi - \frac{x}{2} + k2\pi \\ x = -\left(\pi - \frac{x}{2}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k4\pi}{3} \\ x = -2\pi + k4\pi \end{array}\right.$$

Bài 2. Giải phương trình $f'(x)=0$ trong các trường hợp sau

a) $f(x)=\sin 3x+3\sin x+4$. b) $f(x)=\cos 2x+2\sin x+3$. c) $f(x)=-\sqrt{3}\cos x+\sin x+1$.

Hướng dẫn

a) $f(x)=\sin 3x+3\sin x+4\Rightarrow f'(x)=3\cos 3x+3\cos x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3\cos 3x+3\cos x=0\Leftrightarrow \cos 3x=\cos(\pi-x)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x=\pi-x+k2\pi\\3x=-\pi+x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\\x=\dfrac{-\pi}{2}+k\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z}).$$

b) $f(x)=\cos 2x+2\sin x+3\Rightarrow f'(x)=-2\sin 2x+2\cos x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -2\sin 2x+2\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(-2\sin x+1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\\sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\pi-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{3}\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=0\Leftrightarrow\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 3. Cho hàm số $y=(m+1)\sin x+m\cos x-(m+2)x+1$. Tìm giá trị của m để $y'=0$ có nghiệm?

Hướng dẫn

$y'=(m+1)\cos x-m\sin x-(m+2)$

Phương trình $y'=0\Leftrightarrow(m+1)\cos x-m\sin x=(m+2)$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2+b^2\ge c^2$

$\Leftrightarrow(m+1)^2+m^2\ge(m+2)^2\Leftrightarrow m^2-2m-3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le -1\\m\ge 3\end{array}\right.$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2x\right)$. Khi đó hãy giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -2.\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$

Theo giả thiết $y' = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) = 0 \;\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \;\; (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$. Khi đó hãy tìm nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} - k2\pi \;\; (k \in \mathbb{Z})$

Bài 6. Cho hàm số $y = \tan x - x$. Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$, khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 7. Cho hàm số $y = \sin^2 x.\cos x$, giải phương trình $y' = 2\sin x$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$, ta có

$y' = \left(\sin^2 x\right)' \cos x + \sin^2 x\left(\cos x\right)' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$

Vậy $y' = 2\sin x \Leftrightarrow 2\sin x.\cos^2 x - \sin^3 x = 2\sin x \Leftrightarrow 2\sin x - 2\sin x\cos^2 x + \sin^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(1 - \cos^2 x\right) + \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Bài 8. Cho hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$, giải phương trình $y' = -3$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4\sin x\cos x + 2\sin 2x + 1 = 2\sin 2x + 2\sin 2x + 1 = 4\sin 2x + 1$

$y' = -3 \Leftrightarrow 4\sin 2x + 1 = -3 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Bài 9. Cho hàm số $y=(1+\sin x)(1+\cos x)$, giải phương trình $y'=2(\cos x-\sin x)$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=\cos x(1+\cos x)-\sin x(1+\sin x)=\cos x-\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x$, nên

$y'=2(\cos x-\sin x)\Leftrightarrow \cos x-\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=2(\cos x-\sin x)$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)=0\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)=0$

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right).\left(\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$$

Bài 10. Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$ và giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D=\mathbb{R}$

Ta có $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos 2x\Rightarrow y'=-2\sin 2x$. Vậy $y'=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$

Bài 11. Cho hàm số $y=\cot^2\frac{x}{4}$. Khi đó nghiệm của phương trình $y'=0$

Hướng dẫn

TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{k4\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Ta có : $y'=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{4}.\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{4}}\right)=-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{4}.\left(1+\cot^2\frac{x}{4}\right)$.

Nên $y'=0\Leftrightarrow \cot\frac{x}{4}=0\Leftrightarrow \frac{x}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=2\pi+k4\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Bài 12. Cho hàm số $f(x)=2\sin 2x+\cos 2x$, giải phương trình $y'=2\sin 2x$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y' = 4\cos 2x - 2\sin 2x$

$y' = 2\sin 2x \Leftrightarrow 4\cos 2x - 2\sin 2x = 2\sin 2x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x$

$\Leftrightarrow tan2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\ \ (k \in \mathbb{Z})\ \ (do\ \ \cos 2x \neq 0)$

Bài 13. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \sin^3(2x+1)$ và giải phương trình $y' = 6\cos(2x+1)$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1)$. Vậy $y' = 6\cos(2x+1)$

$\Leftrightarrow 6\sin^2(2x+1)\cos(2x+1) = 6\cos(2x+1) \Leftrightarrow \cos(2x+1)\left[1 - \sin^2(2x+1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos^3(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x+1) = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2} + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$.

Bài 14. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (\sin x + \cos x)^3$ và giải phương trình $y' = 3 + 3\sin 2x$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

Ta có : $y' = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x)$, suy ra

$y' = 3 + 3\sin 2x \Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3 + 3\sin 2x$.

$\Leftrightarrow 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2\left[(\cos x - \sin x) - 1\right] = 0$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \\ \sin x - \cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right.$$

Bài 15. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{\sin 2x + \cos 2x}{2\sin 2x - \cos 2x}$, giải phương trình $y' = -6$.

Hướng dẫn

ĐK : $2\sin 2x - \cos 2x \neq 0$.

Ta có

$$y' = \frac{(2\cos 2x - 2\sin 2x)(2\sin 2x - \cos 2x) - (\sin 2x + \cos 2x)(4\cos 2x + 2\sin 2x)}{(2\sin 2x - \cos 2x)^2}$$

$$y' = \frac{-6}{(2\sin 2x - \cos 2x)^2}$$

$$y' = -6 \Leftrightarrow \frac{-6}{(2\sin 2x - \cos 2x)^2} = -6 \Leftrightarrow (2\sin 2x - \cos 2x)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin 2x - \cos 2x = 1 \\ 2\sin 2x - \cos 2x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(2x-\alpha) = \sin\alpha \\ \sin(2x-\alpha) = \sin(-\alpha) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2x-\alpha = \alpha + k2\pi \\ 2x-\alpha = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x-\alpha = -\alpha + k2\pi \\ 2x-\alpha = \pi + \alpha + k2\pi \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi \end{array}\right. \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}) \text{ với } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ (Thỏa mãn ĐK)}$$

Bài 16. Cho hàm số $y = \sin^2 x$, giải phương trình $y' = \sqrt{3}$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

Ta có : $y' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z})$

Bài 17. Cho hàm số $y = \cos 2x + 5\sin x$, giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

Ta có : $y' = -2\sin 2x + 5\cos x$.

Nên $y' = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x + 5\cos x = 0 \Leftrightarrow -4\sin x\cos x + 5\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(5 - 4\sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ $(do\ 5 - 4\sin x > 0) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 18. Cho hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x + 2x$, giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

Ta có : $y' = \sqrt{3}\cos x - \sin x + 2$,

khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi\,(k\in\mathbb{Z})$

Bài 19. Cho hàm số $y=\sin^2 2x-2\cos^2 x$, giải phương trình $y'=0$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y'=4\sin 2x\cos 2x+2\sin 2x$,

nên $y'=0\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x+\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos 2x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=k\pi\\ 2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\dfrac{\pi}{2}\\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

Bài 20. Tìm m để phương trình $y'=0$ có nghiệm biết rằng $y=m\cos x+2\sin x-3x+5$.

Hướng dẫn

TXĐ : $D=\mathbb{R}$

Ta có : $y=-m\sin x+2\cos x-3$, khi đó $y'=0\Leftrightarrow m\sin x-2\cos x=3\quad(1)$

Phương trình $y'=0$ có nghiệm khi và chỉ khi (1) có nghiệm khi và chỉ khi :

$$m^2+4\geq 9\Leftrightarrow m^2\geq 5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\geq\sqrt{5}\\ m\leq-\sqrt{5}\end{array}\right..$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Giải phương trình $f'(x)=g(x)$ biết $f(x)=\sin^3 2x;\quad g(x)=4\cos 2x-5\sin 4x$

Bài 2. a) Cho $y=\sin 2x-2\cos x$. Hãy giải phương trình $y'=0$.

b) Cho $y=3\sin 2x+4\cos x+12x$. Hãy giải phương trình $y'=2$.

Bài 3. Giải phương trình $y'=0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $y=\sin 2x-2\cos x$ b) $y=3\sin 2x+4\cos 2x+10x$

c) $y=\cos^2 x+\sin x$ d) $y=\tan x+\cot x$

e) $y=3\cos x+4\sin x+5x$ f) $y=1-\sin(\pi+x)+2\cos\left(\dfrac{2\pi+x}{2}\right)$

g) $y=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin x-3$ h) $y=\sin 2x-2\cos x$ i) $y=\cos^2 x+\sin x$

j) $y=\tan x+\cot x$ k) $y=2x-\cos x-\sqrt{3}\sin x$ l) $y=3\sin 2x+4\cos 2x+10x$

CHUYÊN ĐỀ 5

ĐẠO HÀM HÀM KÉP – ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI ĐẠO HÀM

I. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ f_2(x) & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$

Phương pháp:

Bước 1: Kiểm tra hàm số có liên tục tại x_0 hay không: $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Bước 2: Sử dụng công thức tính đạo hàm $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ \dfrac{1}{4} & \text{khi } x=0 \end{cases}$ tại $x=0$

Hướng dẫn

Ta có:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(2+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{1}{4}=f(0)$$

Suy ra hàm số liên tục tại $x=0$.

Ta có: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}-\dfrac{1}{4}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2x^2\left(8-x+4\sqrt{4-x}\right)}=\dfrac{1}{64}$

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0 \\ a & \text{khi } x=0 \end{cases}$. Tìm a để hàm số có đạo hàm tại $x=0$ và tính đạo hàm tại $x=0$.

Hướng dẫn

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1-x}+1\right)}=-\dfrac{1}{2}$

Để hàm số có đạo hàm tại $x=0$ thì hàm số phải liên tục tại $x=0$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow a=-\dfrac{1}{2}$

Đạo hàm của hàm số tại $x=0$ là:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}+\dfrac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2\left(x-2-2\sqrt{1-x}\right)}=-\frac{1}{8}$$

Bài 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ tại $x=0$.

Hướng dẫn

Ta có : $f(0)=0$, do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

II. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x\geq x_0\\ f_2(x) & \text{khi } x<x_0\end{cases}$

Phương pháp:

Bước 1: Kiểm tra hàm số có liên tục tại x_0 hay không: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

Bước 2:

Xét $x\geq x_0$. Sử dụng công thức tính đạo hàm $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Xét $x<x_0$. Sử dụng công thức tính đạo hàm $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{khi } x\leq 1\\ ax+b & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tìm a,b để hàm số có đạo hàm tại $x=1$

Hướng dẫn

Hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì hàm số phải liên tục tại $x=1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow a+b=1$

Hàm số có đạo hàm tại $x=1$ thì $f'(1^-)=f'(1^+)$.

Ta có:

$$f'(1^-)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2$$

$$f'(1^+)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=a$$

Để $f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow a=2\Rightarrow b=-1$

Bài 2. Chứng minh rằng: Hàm số $y=\dfrac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$ nhưng không có đạo hàm tại $x=0$

Hướng dẫn

a) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x+1}=0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x+1}=0\\ f(0)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

Nên hàm số liên tục tại $x=0$

Ta có:

$$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$$

$$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$$

Vì $f'(0^+)\neq f'(0^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x=0$

Bài 3. Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\geq 1\\ \dfrac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$.

Hướng dẫn

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x+3)=5$

$$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+3x-4\right)=0$$

Dẫn tới $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ suy ra: hàm số không liên tục tại $x_0=1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0=1$.

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+|x+1|}{x-1}$ liên tục tại $x=-1$ nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

Hướng dẫn

Vì hàm $f(x)$ xác định tại $x=-1$ nên nó liên tục tại đó.

Ta có: $f'\left[(-1)^+\right]=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{2x}{x-1}=1$

$$f'\left[(-1)^-\right]=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}2=2$$

$\Rightarrow f'\left[(-1)^+\right]\neq f'\left[(-1)^-\right]\Rightarrow f(x)$ không có đạo hàm tại $x=-1$.

Bài 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+1 & khi\ x\le 1\\ x^2+bx+1 & khi\ x>1\end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại $x=1$ thì giá trị của b là?

Hướng dẫn

Ta có:

$f\left(1\right)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(2x+1\right)=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+bx+1\right)=b+2$

Để hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=1$ khi và chỉ khi $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow b+2=3\Leftrightarrow b=1$

Bài 6. Tìm a,b để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+x & khi\ x\le 1\\ ax+b & khi\ x>1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

Hướng dẫn

Điều kiện cần để hàm số có đạo hàm tại $x=1$ là hàm số liên tục tại $x=1$.

$f\left(1\right)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(ax+b\right)=a+b$

Để hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow a+b=2$

Điều kiện đủ:

$$f'\left(1^-\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(x+2\right)=3$$

$$f'\left(1^+\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-\left(a+b\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a$$

Để hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f'\left(1^+\right)=f'\left(1^-\right)\Leftrightarrow a=3\Rightarrow b=-1$

Bài 7. Tìm a,b để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{3} & khi\ x>1\\ ax+b & khi\ x\le 1\end{cases}$ có đạo hàm tại $x=1$.

Hướng dẫn

Điều kiện cần:

$$f(1)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^3}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x=1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow a+b=\frac{1}{3}$$

Điều kiện đủ:

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{3}=1$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x=1$ thì $f'(1^+)=f'(1^-)\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=-\frac{2}{3}$

BÀI TẬP TỰ GIẢI:

Bài 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x^2+a & \text{khi } x\ge -1\\ x^2+bx & \text{khi } x<-1\end{cases}$. Tìm a,b để hàm số liên tục tại $x=-1$

(HD: $a=-2;b=4$)

Bài 9. Cho $y=f(x)=\begin{cases}\sin 3x & khi \quad x\ge 0\\ 3x+2 & khi \quad x<0\end{cases}$. Tính đạo hàm của hàm số tại $x_0=0$ bằng định nghĩa.

Bài 10. Cho hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x}{x} & khi \quad x\ne 0\\ 0 & khi \quad x=0\end{cases}$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$.

b) Tính đạo hàm (nếu có) của $f(x)$ tại điểm $x_0=0$.

Bài 11. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi} \quad x\ne 0\\ 0 & \text{khi} \quad x=0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$

Bài 12. Chứng minh rằng hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & khi \quad x \ge 0 \\ -x^2 & khi \quad x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ nhưng có đạo hàm tại $x_0 = 2$.

Bài 13. Tìm $a,\ b$ để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} -2x^2 & khi \quad x \le 1 \\ ax+b+1 & khi \quad x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Bài 14. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} p\cos x + q\sin x & khi \quad x \le 0 \\ px+q+1 & khi \quad x > 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng với mọi cách chọn $p,\ q$ hàm số không thể có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Bài 15. Tìm $a,\ b$ để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & khi \quad x \le 0 \\ x^2 + ax + b & khi \quad x > 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Khi đó tính $f'(0)$

HD: $a = 0; b = -2; f'(0) = 0$

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{|x-2|}{2x+1}$

a) Xét sự liên tục của hàm số tại $x_0 = 2$ b) Xét xem tại $x_0 = 2$ hàm số có đạo hàm không?

Bài 17. Cho $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{x^2+3}{x^2} & khi \quad x \ne 0 \\ 0 & khi \quad x = 0 \end{cases}$.

a) Xét sự liên tục của hàm số tại $x_0 = 0$ b) Xét xem tại $x_0 = 0$ hàm số có đạo hàm không?

Bài 18. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2|x+3|}{3x-1}$ liên tục tại $x = -3$ nhưng không có đạo hàm tại điểm ấy.

Bài 19. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2 x}{x} & khi \quad x \ne 0 \\ 0 & khi \quad x = 0 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

b) Tính đạo hàm (nếu có) của $f(x)$ tại điểm $x_0 = 0$.

Bài 20. Cho hàm số: $y = f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & khi \quad x \ne 0 \\ 0 & khi \quad x = 0 \end{cases}$

a) Tính đạo hàm của hàm số tại mỗi $x \in \mathbb{R}$.

b) Chứng tỏ rằng đạo hàm $f'(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Bài 21. Xét sự tồn tại đạo hàm của các hàm số sau trên $\mathbb{R}$:

a) $y=\begin{cases} x^2-x+2 & khi \;\; x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-1} & khi \;\; x>2 \end{cases}$

b) $y=\begin{cases} x^2+x & khi \;\; x<1 \\ \dfrac{2}{x} & khi \;\; x\ge 1 \end{cases}$

Bài 22. Tìm a, b để hàm số sau có đạo hàm tại x = 1:

a) $y=\begin{cases} x & khi \;\; x\le 1 \\ ax^2+b & khi \;\; x>1 \end{cases}$

b) $y=\begin{cases} \sqrt{2-x^2} & khi \;\; -\sqrt{2}\le x\le 1 \\ x^2+ax+b & khi \;\; x>1 \end{cases}$

Bài 23. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x}{1+|x|}$ tại $x_0=0$.

Bài 24. Chứng minh rằng hàm số $y=\dfrac{x^2-2|x+3|}{3x-1}$ liên tục tại $x=-3$ nhưng không có đạo hàm tại điểm ấy.

Bài 25. Chứng minh rằng hàm số $y=\sqrt[3]{x^2}$ liên tục tại $x=0$ nhưng không có đạo hàm tại $x=0$

CHUYÊN ĐỀ 6

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH – BẤT PHƯƠNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN ĐẠO HÀM

I. Sử dụng đạo hàm để tính giới hạn dạng $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}$: Quy tắc LÔPITAN

Phương pháp:

Sử dụng quy tắc Lopitan: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Tính giới hạn:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$

Hướng dẫn

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)'}{\left(x-1\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)'}{\left(x-2\right)'}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+7}}}{1}=\frac{1}{6}$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Tính các giới hạn sau theo quy tắc Lopitan:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.ĐS: 2. 2) $\lim\limits_{x\to 0}x\left(2-\frac{1}{x}\right)$ ĐS: -1.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ ĐS: 3 4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x-1}$ ĐS: 2

Bài 2. Tìm các giới hạn sau theo quy tắc Lopitan:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ ĐS: $\frac{1}{6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ ĐS: 0

3) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{4-x}$ ĐS: $-\frac{1}{6}$ 4) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{9x-x^2}$ ĐS: $-\frac{1}{54}$.

5) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ ĐS: $-\frac{1}{56}$. 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$ ĐS: $-\frac{4}{15}$

Bài 3. Tìm các giới hạn sau theo quy tắc Lopitan

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ ĐS: 1 7. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ ĐS: $-\frac{1}{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$ ĐS: 2.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$ ĐS: $-\dfrac{1}{4}$

II. Sử dụng đạo hàm trong bài toán giải PT-BPT

Phương pháp:

Sử dụng công thức tính đạo hàm rồi thay vào bài toán để giải.

Chú ý: *Cho tam thức* $f(x)=ax^2+bx+c,\ (a\neq0)$

1. Để $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì: Trường hợp 1: Xét $a=0$ Trường hợp 2: $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$	2) Để $f(x)\geq0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì: Trường hợp 1: Xét $a=0$ Trường hợp 2: $\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq0\end{cases}$
3) Để $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì: Trường hợp 1: Xét $a=0$ Trường hợp 2: $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$	4) Để $f(x)\leq0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì : Trường hợp 1: Xét $a=0$ Trường hợp 2: $\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq0\end{cases}$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y=mx^3+x^2+x-5$. Tìm m để:

a) y' bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất.

b) $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu.

c) $y'>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Ta có: $y'=3mx^2+2x+1$

a) Để y' là bình phương của một nhị thức bậc nhất thì phương trình $y'=0$ có nghiệm kép

Suy ra $\begin{cases}m\neq0\\ \Delta'=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\ 1-3m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$. Vậy: ..

b) Để $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu thì $a.c<0\Leftrightarrow3m<0\Leftrightarrow m<0$.

c) Để $y'>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì:

$\begin{cases}3m>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 1-3m<0\end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}$. Vậy…………………

Bài 2. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{x-1}$. Giải phương trình $f'(x)=0$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $x\neq1$.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3}{(x-1)^2}=\frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$. Vậy: ……………

Bài 3. Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$. Giải bất phương trình $f'(x)\le f(x)$

Hướng dẫn

Ta có $f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. Khi đó $f'(x)\le f(x)\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}\le\sqrt{x^2-2x}$ (1)

Đk: $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

(1) $\Leftrightarrow x-1\le x^2-2x\Leftrightarrow x^2-3x+1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\x\le\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện trên suy ra $x<0$ hoặc $x\ge\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=(x^2+2x)\sqrt{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x)\ge 0$.

Hướng dẫn

Ta có $f'(x)=(2x+2)\sqrt{x-1}+(x^2+2x).\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{(2x+2)2(x-1)+x^2+2x}{2\sqrt{x-1}}=\dfrac{5x^2+2x-4}{2\sqrt{x-1}}$.

Điều kiện $x>1$.

$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow 5x^2+2x-4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\dfrac{-1+\sqrt{21}}{5}\\x\le\dfrac{-1-\sqrt{21}}{5}\end{array}\right.$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-mx^2+(m+2)x+3$. Tìm các giá trị nguyên của tham số m để $f'(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn

Ta có $f'(x)=x^2-2mx+m+2$

$f'(x)\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2-2mx+m+2\ge 0\,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2$$

Vì m nguyên nên $m \in \{-1;0;1;2\}$.

Bài 6. Cho $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}, g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

Hướng dẫn

$$f'(x) = \left(2x^3 - x^2 + \sqrt{3}\right)' = 6x^2 - 2x,\ g'(x) = \left(x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}\right)' = 3x^2 + x$$

$$f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$$

Bài 7. Cho $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

Hướng dẫn

Ta có $f'(x) = \left(3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5\right)' = 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{192}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{192}{x^4} = 0\ (1)$. Đặt $t = \frac{1}{x^2}, (t > 0)$

$(1) \Leftrightarrow 192t^2 - 60t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \vee t = \frac{1}{16}$

Với $t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Với $t = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Vậy $f'(x) = 0$ có 4 nghiệm $x = \pm 2,\ x = \pm 4$

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 7}$. Giải bất phương trình $f'(x) \ge \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

Xét tam thức: $x^2 + x + 7$ có $\begin{cases} \Delta = 1 - 28 = -27 < 0 \\ a = 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x + 7 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \frac{\left(x^2 + x + 7\right)'}{2\sqrt{x^2 + x + 7}} = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 7}}$.

Do đó $f'(x) \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+7}} \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x+1 \ge \sqrt{x^2+x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ (2x+1)^2 \ge x^2+x+7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 4x^2+4x+1 \ge x^2+x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 3x^2+3x-6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$

Bài 9. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + mx + 5$. Tất cả các giá trị của tham số m để $y' \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn

$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + mx + 5$; $y' = x^2 - mx + m$

$y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - mx + m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m \le 0 \Leftrightarrow 0 \le m \le 4$.

Bài 10. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 4x + 2019$. Gọi S là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $y' \le 0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn

$y' = x^2 - \frac{1}{2}x - 4$.

$y' \le 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 4 \le 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{65}}{4} \le x \le \frac{1+\sqrt{65}}{4}$.

$S = \{-1;0;1;2\}$ nên có tổng các phần tử là: 2.

Bài 11. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 1010x^2 + 2019x - 2020$. Giải bất phương trình $y' \ge 0$.

Hướng dẫn

Ta có $y' = x^2 - 2020x + 2019$.

$y' \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 2020x + 2019 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 2019 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;1] \cup [2019;+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ biết $f(x) = 2x^3 - x^2 + 2018$; $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{3} + 2020$

Bài 2. Cho hàm số $y=\frac{mx^3}{3}+3x^2+mx-5$. Xác định m để $f'(x)>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ (HD: $m>3$)

Bài 3. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+mx+5$. Tìm m để $f'(x)<0\ \ \forall x\in(0;2)$

(HD: $m\le 0$)

Bài 4. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2+m^2x-4$. Tìm m để:

a) $f'(x)>0$ với mọi $x>0$

b) $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu

c) Trong trường hợp $f'(x)=0$ có hai nghiệm. Tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

Bài 5. Giải phương trình $f'(x)=0$ biết $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x^2-x+1}$

Bài 6. Giải bất phương trình $f'(x)\le f(x)$ biết $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

Bài 7. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+x-2$. Tìm x sao cho: a) $y'\le -2$ b) $y'>10$

Bài 8. Giải các bấy phương trình:

a) $y'<0$ với $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$ b) $y'\le 0$ với $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

Bài 9. Tìm các nghiệm của phương trình sau:

a) $f'(x)=0$ với $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-6x-1$. b) $f'(x)=-5$ với $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2-3$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+2$. Hãy giải các bất phương trình sau:

a) $f'(x)>0$ b) $f'(x)\le 3$

Bài 11. Giải bất phương trình $f'(x)>g'(x)$, biết rằng:

a) $f(x)=x^3+x-\sqrt{2}$ và $g(x)=3x^2+x+\sqrt{2}$

b) $f(x)=2x^3-x^2+\sqrt{3}$ và $g(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}$

Bài 12. Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-2x-24}$. Giải bất phương trình $2f'(x)\ge f(x)$

Bài 13. Cho hàm số $y=x-2\sqrt{x^2+12}$. Giải bất phương trình $f'(x)\le 0$. *(TN THPT 2010)*

Bài 14. Cho hàm số: $y=f(x)=x^3-2x^2+mx-3$. Tìm m để:

a) $f'(x)$ là bình phương của một nhị thức bậc nhất.

b) $f'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

c) $f'(x)<0,\forall x\in(0;\ 2)$.

d) $f'(x)>0,\forall x>0$.

Bài 15. Cho hàm số: $y=f(x)=\frac{mx^3}{3}-\frac{mx^2}{2}+(3-m)x-2$. Tìm m để:

a) $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

c) Chứng minh rằng trong trường hợp $f'(x)$ có hai nghiệm (hai nghiệm có thể trùng nhau) thì các nghiệm này thỏa mãn một hệ thức độc lập với m.

Bài 16. Tìm m để:

a) $y=mx-x^3$ có $y'<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ có $y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $y=x^3-3mx^2+4mx$ có $y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

d) $y=x^3-3(2m+1)x^2+(2m+5)x+2$ có $y'\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

e) $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-mx+2$ có $y'\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$.

f) $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2-mx$ có $y'\leq 0, \forall x\in(0;+\infty)$.

Bài 17. Với mỗi hàm số sau đây: ① Tìm TXĐ ② Tính y' ③ Xét dấu y', chỉ ra $y'>0$, $y'<0$ trên khoảng, các khoảng nào:

a) $y=-x^3+3x+1$

b) $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-2$

c) $y=\frac{2x-1}{x+2}$

d) $y=\frac{x^2+x+2}{x-1}$

e) $y=\frac{-x^2+2x+2}{x-1}$

f) $y=1+\frac{1}{x-2}$

g) $y=-x^4+4x^2$

h) $y=x^4+4x^2+1$

i) $y=4x+1-\frac{1}{x+1}$

j) $y=4+3x-x^2$

k) $y=\frac{1}{3}x^3+3x^2-7x-2$

l) $y=x^4-2x^2+3$

m) $y=-x^3+x^2-5$

n) $y=\sqrt{4-x^2}$

o) $y=\frac{x^2-2x}{1-x}$

p) $y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$

q) $y=\sqrt{3x-x^2}$

r) $y=\sqrt{x^2-x-20}$

s) $y=\frac{x^2-8x+9}{x-5}$

t) $y=\frac{1}{x+1}-2x$

u) $y=\sqrt{x^2-2x+3}$

III. Sử dụng đạo hàm chứng minh đẳng thức:

Phương pháp:

Sử dụng các công thức để tính đạo hàm rồi thay vào biểu thức để biến đổi

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Cho hàm số $y = x + \sqrt{x^2+1}$. Chứng minh: $y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$

Hướng dẫn

Ta có: $y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}}$.

$\Rightarrow y'\sqrt{1+x^2} = y \Rightarrow y'\sqrt{1+x^2} - y = 0$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $2\sqrt{1+x^2}.y' = y$

Hướng dẫn

Ta có: $y' = \left(\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}}{2\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{y}{2\sqrt{1+x^2}}$.

$\Rightarrow 2\sqrt{1+x^2}.y' = y$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \sqrt[3]{1-x}$. Chứng minh: $3y'y^2 + 1 = 0$

Hướng dẫn

$y = \sqrt[3]{1-x} \Rightarrow y^3 = 1-x \Rightarrow 3y^2y' = -1 \Rightarrow 3y'y^2 + 1 = 0$

Bài 4. Chứng minh các công thức tổng quát sau

a) $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)' = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)^2}$; (a , b , c, a_1 , b_1, c_1 là hằng số) .

b) $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\right)' = \dfrac{a.a_1x^2 + 2a.b_1x + \begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\left(a_1x+b_1\right)^2}$; (a , b , c, a_1 , b_1 là hằng số) .

Hướng dẫn

a) $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}\right)' = \dfrac{\left(ax^2+bx+c\right)'.\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right) - \left(ax^2+bx+c\right).\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)'}{\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)^2}$

$$= \frac{(2ax+b).\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right) - \left(ax^2+bx+c\right).\left(2a_1x+b_1\right)}{\left(a_1x^2+b_1x+c_1\right)^2}$$

$$=\frac{(a.b_1-a_1.b)x^2-2(a.c_1-a_1.c)x+(b.c_1-b_1.c)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}. \text{ (đpcm)}$$

b) $$\left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1}\right)'=\frac{(ax^2+bx+c)'.(a_1x+b_1)-(ax^2+bx+c).(a_1x+b_1)'}{(a_1x+b_1)^2}$$

$$=\frac{(2ax+b).(a_1x+b_1)-(ax^2+bx+c).a_1}{(a_1x+b_1)^2}.$$

$$=\frac{a.a_1x^2+2a.b_1x+(b.b_1-a_1.c)}{(a_1x+b_1)^2}.\text{(đpcm)}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Chứng minh rằng hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ có đạo hàm là $y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Áp dụng tính đạo hàm của : $y=\frac{3x-5}{x-2}$, $y=\frac{4}{3x+2}$, $y=\frac{2x}{1-3x}$

Bài 2. Chứng minh rằng hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$ có đạo hàm là $y'=\frac{ab'x^2+2ac'x+bc'-b'c}{(b'x+c')^2}$

Áp dụng tính đạo hàm của : $y=\frac{x^2-2x+7}{x-2}$, $y=\frac{x^2+1}{3x+2}$, $y=\frac{2x^2-x+1}{x+5}$

Bài 3. Chứng minh hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ có đạo hàm là:

$$y'=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}x+\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$$

Áp dụng tính đạo hàm của : $y=\frac{2x^2-x-1}{x^2-3x+3}$, $y=\frac{3x^2-6x+1}{x^2+3x+2}$, $y=\frac{2x^2-5x+6}{-x^2+5}$

Bài 4. Chứng minh rằng hàm số:

a) $y=\sqrt{2x+x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3y''+1=0$.

b) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^3$ thỏa hệ thức: $(1+x^2)y''+xy'-9y=0$.

c) $y=3+\frac{5}{x}$ thỏa hệ thức: $xy'+y=3$.

d) $y=\frac{x-3}{x+4}$ thỏa hệ thức: $2(y')^2=(y-1)y''$

CHUYÊN ĐỀ 7

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐỒ THỊ

Dạng 1. Phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp điểm $M(x_0; y_0)$

Phương pháp:

- Bước 1: Tìm tọa độ tiếp điểm $M(x_0; y_0)$

- Bước 2: Tính $y' = f'(x)$, rồi suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $f'(x_0)$

- Bước 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$ là: $y = f'(x_0).(x - x_0) + y_0$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^3 - 4x + 1$ tại :

a) Điểm $M(1; -2)$

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2.

c) Tại điểm có tung độ bằng 1.

Hướng dẫn

Ta có: $y' = 3x^2 - 4$

a) Hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'(1) = 3.1^2 - 4 = -1$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = y'(1).(x - x_0) + y_0 = -1(x-1) - 2 = -x - 1$

b) Ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = x_0^3 - 4x_0 + 1 = 1$

Hệ số góc của tiếp tuyến là: $y'(2) = 3.2^2 - 4 = 8$

Phương trình tiếp tuyến là: $y = 8(x-2) + 1 = 8x - 15$

c) Ta có: $y_0 = 1 \Rightarrow x_0^3 - 4x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

TH1: $x_0 = 0; y_0 = 1 \Rightarrow y'(0) = -4 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến là:

$y = -4(x - 0) + 1 = -4x + 1$

Tương tự hai trường hợp còn lại, các em tự viết.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 4)$

Hướng dẫn

Ta có $y' = 3x^2 + 4x$. Do đó $y'(1) = 7$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1; 4)$ là $y = 7x - 3$.

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$

Hướng dẫn

Ta có $y'=-\dfrac{4}{(x-1)^2}\Rightarrow y'(-1)=-1$.

Theo giả thiết ta có $x_0=-1$ nên $y_0=-2\Rightarrow$ tiếp điểm $M(-1;-2)$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-1;-2)$ là :

$y=-1(x+1)-2\Leftrightarrow y=-x-3$.

Bài 4. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$(C)**.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3

Hướng dẫn

Ta có: $y'=3x^2-3$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Ta có: $y_0=3\Leftrightarrow x_0^3-3x_0-2=0\Leftrightarrow x_0=2, x_0=-1$

- $x_0=-1\Rightarrow y'(-1)=0$. Phương trình tiếp tuyến: $y=3$
- $x_0=2\Rightarrow y'(2)=9$. Phương trình tiếp tuyến: $y=9(x-2)+3=9x-15$.

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{2x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung

Hướng dẫn

Ta có: $y'=\dfrac{2x^2-2x+1}{(2x-1)^2}$.

Giao điểm M của đồ thị với trục tung : $x_0=0\Rightarrow y_0=-1$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là : $k=y'(0)=1$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm M là : $y=x-1$.

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2-3x}{x-1}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành bằng :

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $A\left(\dfrac{2}{3};0\right)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $y'\left(\dfrac{2}{3}\right)=9.$

Phương trình tiếp tuyến là: $y=9\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+0\Rightarrow y=9x-6$

Bài 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ có đồ thị là (H). Phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (H) với trục hoành là:

Hướng dẫn

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là $A(2;0)$. Ta có: $y'=\dfrac{-2}{(x-3)^2}\Rightarrow y'(2)=-2$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-2(x-2)$ hay $y=-2x+4$.

Bài 8. Gọi M là giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-2}$ với trục tung. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số trên tại điểm M .

Hướng dẫn

Vì M là giao điểm của đồ thị với trục $Oy\Rightarrow M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$

$y'=\dfrac{-3}{(x-2)^2}\Rightarrow k=y'(0)=-\dfrac{3}{4}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M là: $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$

Bài 9. . Cho hàm số: $y=x^3-(m-1)x^2+(3m+1)x+m-2$. Tìm m để tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2;-1)$.

Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2(m-1)x+3m+1$

Với $x=1\Rightarrow y(1)=3m+1\Rightarrow y'(1)=m+6$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có $x=1$: $y=(m+6)(x-1)+3m+1$

Tiếp tuyến này đi qua $A(2;-1)$ nên có: $-1=m+6+3m+1 \Leftrightarrow m=-2$

Vậy, $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Bài 10. Gọi (Cm) là đồ thị của hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+3)x-3$ và (d) là tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=2$. Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (d) bằng $\frac{7}{\sqrt{17}}$.

Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2-2(2m+1)x+m+3.$

Phương trình tiếp tuyến (d) : $y=y'(2)(x-2)+y(2)$

$$y=(11-7m)(x-2)+7-6m=(11-7m)x+8m-15 \Leftrightarrow (11-7m)x-y+8m-15=0$$

$$d(0,(d))=\frac{|8m-15|}{\sqrt{(11-7m)^2+1}}=\frac{7}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 17(8m-15)^2=49[(11-7m)^2+1]$$

$$\Leftrightarrow 1313m^2-3466m+2153=0 \Leftrightarrow m=1,\ m=\frac{2153}{1313}$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=\frac{x-1}{x+1}$ biết hoành độ tiếp điểm là $x_0=0$

Bài 2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=\sqrt{x+2}$ biết tung độ tiếp điểm là $y_0=2$

Bài 3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

1. Tại điểm $\mathrm{M}(-1;3)$;

2. Tại điểm có hoành độ bằng 2 ;

3. Tại điểm có tung độ bằng 1 ;.

4. Tại giao điểm (C) với trục tung ;

ĐS:

1. $y=-3x+6$ 2. $y=24x-27$ 3. $y=1,\ y=9x+28$ 4. $y=1$

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc k

Phương pháp:

Bước 1: Tính $f'(x)$

Bước 2: Giải phương trình $f'(x)=k \Rightarrow x_0 \Rightarrow y_0$

Bước 3: Phương trình tiếp tuyến là: $y=k.(x-x_0)+y_0$

Chú ý:

Nếu đường thẳng song song với $y=ax+b$ thì $k=a$.

Nếu đường thẳng vuông góc với $y = ax + b$ thì $k = -\frac{1}{a}$.

Nếu đường thẳng tạo với trục Ox một góc α thì $k = \tan\alpha$

Nếu đường thẳng tạo với đường thẳng (d) góc α thì $\tan\alpha = \left|\frac{k-a}{1+k.a}\right|$. Với a là hệ số góc của đường thẳng (d)

Nếu đường thẳng d cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thì $\tan OAB = \pm\frac{OB}{OA}$, trong đó hệ số góc của d được xác định bởi $y'(x) = \tan OAB$

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$.

Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Gọi (t) là tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số và (t) vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{6}x - 1$, nên đường thẳng (t) có hệ số góc bằng -6.

Cách 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (t) và đồ thị (C) của hàm số . Khi đó, ta có phương trình: $y'(x_0) = -6 \Leftrightarrow -4x_0^3 - 2x_0 = -6$

$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(2x_0^2 + 2x_0 + 3) = 0 \ (*)$. Vì $2x_0^2 + 2x_0 + 3 > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$

nên phương trình $(*) \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = y(1) = 4 \Rightarrow M(1;4)$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -6(x-1) + 4 = -6x + 10$.

Cách 2: Phương trình (t) có dạng $y = -6x + m$

(t) tiếp xúc (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ khi hệ phương trình sau có nghiệm x_0

$\begin{cases} -x_0^4 - x_0^2 + 6 = -6x_0 + m \\ -4x_0^3 - 2x_0 = -6 \end{cases}$ có nghiệm $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ m = 10 \end{cases}$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -6(x-1) + 4 = -6x + 10$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}$ có đồ thị là (C). Tìm trên đồ thị (C) điểm mà tại đó tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = x^2 - 1$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}$,

Tiếp tuyến Δ tại điểm M có hệ số góc: $y'(x_0) = x_0^2 - 1$

Đường thẳng d: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ có hệ số góc $k_2 = -\frac{1}{3}$

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow (x_0^2 - 1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{4}{3} \\ x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 điểm $M(-2;0)$, $\left(2;\frac{4}{3}\right)$ là tọa độ cần tìm.

Bài 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 9.

Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên R.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm M khi đó x_0 là nghiệm của phương trình

$$y'(x_0) = k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow M(2;0) \text{ hoặc } M(-2;-4)$$

+) Với $M(2;0)$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9x - 18$.

+) Với $M(-2;-4)$ phương trình tiếp tuyến là $y = 9x + 14$.

Bài 4. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: 9x - y + 6 = 0$.

Hướng dẫn

Đường thẳng $\Delta: 9x - y + 6 = 0 \Rightarrow y = 9x + 6$ có hệ số góc là 9

Vì tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng Δ suy ra tiếp tuyến có hệ số góc $k = 9$.

Suy ra hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $y' = k \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Với $x = 1$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x+1) - 3 \Leftrightarrow y = 9x + 6$ (loại vì trùng với đường thẳng Δ).

Với $x = 3$, phương trình tiếp tuyến là $y = 9(x-3) + 1 \Leftrightarrow y = 9x - 26$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 9x - 6$.

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x-2y+2=0$.

Hướng dẫn

Đường thẳng $d: x-2y+2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$ nên đường thẳng d có hệ số góc là $k_d=\frac{1}{2}$.

Tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc k vuông góc với đường thẳng $d \Leftrightarrow k.k_d=-1 \Rightarrow k=-\frac{1}{k}=-2$.

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $y'=k \Leftrightarrow \frac{-8}{(x+1)^2}=-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Với $x=1$, phương trình tiếp tuyến là: $y=-2(x-1)+5 \Leftrightarrow y=-2x+7$.

Với $x=-3$, phương trình tiếp tuyến là: $y=-2(x+3)-3 \Leftrightarrow y=-2x-9$.

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là: $d_1: y=-2x+7; y=-2x-9$.

Bài 6. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x-2}$ có đồ thị (C) và điểm $I(2;1)$. Viết phương trình tiếp tuyến *d* của (C) tại điểm *M* sao cho $IM \perp d$.

Hướng dẫn

Tập xác định $D=R\backslash\{2\}$

Ta có $y'=-\frac{1}{(x-2)^2}$. Giả sử $M(x_0;\frac{x_0-1}{x_0-2})$ $(x_0 \neq 2)$

Hệ số góc của tiếp tuyến (d) tại *M* của đồ thị (C): $k_1=y'(x_0)=\frac{-1}{x_0-2}$.

Hệ số góc của đường thẳng $IM: k_2=\frac{y_M-y_I}{x_M-x_I}=\frac{\frac{x_0-1}{x_0-2}-1}{x_0-2}=-\frac{1}{(x_0-2)^2}$

d vuông góc của đường thẳng

$IM \Leftrightarrow k_1.k_2=-1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-2)^2}.\frac{1}{(x_0-2)^2}=-1 \Leftrightarrow (x_0-2)^4=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=3 \\ x_0=1 \end{array}\right.$

Với $x_0=3 \Rightarrow M(3;2) \Rightarrow d: y=-x+5$.

Với $x_0=1 \Rightarrow M(1;0) \Rightarrow d: y=-x=1$.

Vậy các tiếp tuyến thỏa mãn là $d=-x+5$ hoặc $y=-x+1$.

Bài 7. Cho hàm số $y=\frac{2x+2}{x+2}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $y=3x$ một góc 45^0.

Hướng dẫn

Tập xác định $D=R\setminus\{-2\}$.

Giả sử tiếp tuyến *d* cần tìm có hệ số góc *k*. Vì d tạo với đường thẳng $y=3x$ có hệ số góc k' một góc 45^0 nên suy ra $\left|\frac{k-k'}{1+k.k'}\right|=\tan 45^0=1\Leftrightarrow\left|\frac{k-3}{1+3k}\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-2\\k=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Gọi hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình:

$$y'(x_0)=k\Leftrightarrow\frac{2}{(x_0+2)^2}=k\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2}{(x_0+2)^2}=-2\ (\text{VN})\\\frac{2}{(x_0+2)^2}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{2}{(x_0+2)^2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-4\end{array}\right.$$

Với $x_0=0$ suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y=\frac{1}{2}(x-0)+1=\frac{1}{2}x+1.$

Với $x_0=-4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=\frac{1}{2}(x+4)+3=\frac{1}{2}x+5$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn là $y=\frac{1}{2}x+1; y=\frac{1}{2}x+5.$

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}$ biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân tại O với O là gốc tọa độ.

Hướng dẫn

Tập xác định $D=R\setminus\left\{\frac{-3}{2}\right\}$.

Tam giác OAB vuông cân tại O nên suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là $k=1$ hoặc $k=-1$.

Khi đó hoành độ tiếp điểm x_0 là nghiệm của phương trình:

$$y'=k\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=1\ (\text{VN})\\\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\\x_0=-2\end{array}\right.$$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1$, phương trình tiếp tuyến là $y=-x$ (loại vì cắt trục tung và trục hoành tại O nên $A\equiv B\equiv O$).

Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=0$, phương trình tiếp tuyến là $y=-x-2$ (thỏa mãn).

Vậy tiếp tuyến cần tìm là $y=-x-2$.

Bài 9. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B sao cho tam giác OAB cân tại O với O là gốc tọa độ.

Hướng dẫn

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$.

Ta có $\tan OAB=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{4}$ nên hệ số góccủa tiếp tuyến $k=\dfrac{1}{4}$ hoặc $k=-\dfrac{1}{4}$.

Nhưng do $y'=\dfrac{-1}{(x-1)^2}<0,\forall x\neq 1$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=-\dfrac{1}{4}$.

Hoành độ tiếp điểm x_0 là nghiệm phương trình $\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}=\dfrac{-1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.$.

Từ đó ta xác định được hai tiếp tuyến thỏa mãn: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4};y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$.

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$ có đồ thị là (C). Tìm những điểm M trên (C) sao cho tiếp tuyến với (C) tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $4x+y=0$.

Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-1}{2(x_0+1)}\right)\in(C)$ là điểm cần tìm.

Gọi Δ tiếp tuyến với (C) tại M ta có phương trình Δ:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}\Rightarrow y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}$$

Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$, $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.

$\Delta\, OAB$ có trọng tâm là: $G\left(-\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6};\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right)$.

Do G thuộc đường thẳng $4x+y=0$ $\Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{(x_0+1)^2} \text{ (vì } x_0^2-2x_0-1\neq 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1=\frac{1}{2} \\ x_0+1=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\frac{1}{2} \\ x_0=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $x_0=-\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Với $x_0=-\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Bài 11. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+10$ có đồ thị là (C). Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Hàm số đã cho xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=3x^2+6x-9$.

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C):\ y=x^3+3x^2-9x+10$.

Tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc: $k=y'(x_0)=3x_0^2+6x_0-9=3(x_0+1)^2-12\geq -12$

$\min k=-12$, đạt được khi: $x_0=-1\Rightarrow y_0=21$.

Vậy trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại $M\ (-1;16)$ có hệ số góc nhỏ nhất và có phương trình là: $y=-12x+9$

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+1$ có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

1. Có hệ số góc là -3 .

2. Vuông góc với đường thẳng (d): $27x+3y+2019=0$.

3. Song song với đường thẳng (d’) : $24x-y+2020=0$.

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2+2$ biết tiếp tuyến song song $y=-3x+2020$

(HD: $y=-3x+\frac{1}{3}$; $y=-3x+11$)

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=\frac{2}{3}x^3-3x^2-\frac{1}{3}$ biết tiếp tuyến vuông góc với $x-4y+2021$

(HD: $x-4y+2021\Rightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{2021}{4}$. Suy ra tiếp tuyến có hệ số góc $k=-4$

Từ đó viết được $y=-4x+\frac{4}{3};\quad y=-4x+1$)

Bài 4. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x+1$ biết tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

Bài 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-3x+2$ biết tiếp tuyến song song trục hoành.

Bài 6. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=2x^2-3x+9$ biết tiếp tuyến hợp với trục hoành góc 45^0

Bài 7. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=-x^4-x^2+6$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\frac{1}{6}x+2019$

Dạng 3. Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_1;y_1)$

Phương pháp:

Cách 1:

Bước 1: Tính $f'(x)$

Bước 2: Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm suy ra phương trình tiếp tuyến là:

$y=f'(x_0).(x-x_0)+y_0 \quad (1)$

Bước 3: Vì tiếp tuyến đi qua $A(x_1;y_1)$ nên thay $x=x_1;y=y_1$ vào phương trình (1) để tìm $x_0\Rightarrow y_0$

Bước 4: Thay x_0,y_0 vào (1) để viết lại phương trình tiếp tuyến.

Cách 2:

- Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(x_1;y_1)$ có hệ số góc là k có dạng : $y=k(x-x_1)+y_1$.
- Để (d) là tiếp tuyến thì hệ: $\begin{cases} f(x)=k(x-x_1)+y_1 \\ f'(x)=k \end{cases}$. Giải hệ trên được $x_0\Rightarrow y_0\Rightarrow$ tiếp tuyến.

BÀI TẬP MẪU

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3+3x^2-1$ biết tiếp tuyến qua $A(1;3)$

Hướng dẫn

Ta có: $y'=3x^2+6x$.

Cách 1:

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm suy ra hệ số góc của tiếp tuyến là : $k=y'(x_0)=3x_0^2+6x_0$

Phương trình tiếp tuyến là: $y=\left(3x_0^2+6x_0\right).(x-x_0)+x_0^3+3x_0^2-1$ (1)

(Các em chú ý $y_0=x_0^3+3x_0^2-1$)

Vì tiếp tuyến đi qua $A(1;3)$ nên thay $x=1; y=3$ vào (1) ta được:

$$3=\left(3x_0^2+6x_0\right).(1-x_0)+x_0^3+3x_0^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=9; y_0=3 \\ k=0; y_0=3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y=9x-6;\quad y=3$

Cách 2:

Đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;3)$ có hệ số góc là k có dạng : $y=k(x-1)+3$.

Để (d) là tiếp tuyến của đồ thị thì hệ phương trình $\begin{cases} f(x)=k(x-1)+3 & (1) \\ k=f'(x)=3x^2+6x & (2) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (2) vào (1) ta được:

$$x^3+3x^2-1=\left(3x^2+6x\right)(x-1)+3 \Leftrightarrow x^3+3x^2-1=3x^3-3x^2+6x^2-6x+3$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-6x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Với $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=9; y=3 \\ k=0; y=3 \end{array}\right.$ suy ra phương trình tiếp tuyến là: $y=9x-6;\quad y=3$

Bài 2. Cho đồ thị hàm số $(C): y=f(x)=2x^3-3x^2+5$. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(\frac{19}{12};4\right)$.

Hướng dẫn

Gọi k hệ số góc của tiếp tuyến đi qua $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ tới (C).

Phương trình tiếp tuyến (Δ) là: $y=k\left(x-\frac{19}{12}\right)+4$.

(Δ) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3-3x^2+5=k\left(x-\frac{19}{12}\right)+4 & (1) \\ 6x^2-6x=k & (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay k từ (2) vào (1) ta được: $2x^3-3x^2+5=\left(6x^2-6x\right)\left(x-\frac{19}{12}\right)+4$

$$\Leftrightarrow 4x^3-6x^2-19x+2=\left(x^2-x\right)(12x-19)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-25x^2+19x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=\frac{1}{8} \end{array}\right..$$

Với $x=1 \Rightarrow k=0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y=4$

Với $x=2 \Rightarrow k=12 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y=12\left(x-\frac{19}{12}\right)+4 \Leftrightarrow y=12x-15$

Với $x=\frac{1}{8} \Rightarrow k=-\frac{21}{32} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y=-\frac{21}{32}\left(x-\frac{19}{12}\right)+4 \Leftrightarrow y=-\frac{21}{32}x+\frac{645}{128}$

Vậy từ điểm $A\left(\frac{19}{12};4\right)$ kẻ được 3 tiếp tuyến tới (C)

Bài 3. Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{3x-2}{x-1}$ (C) đi qua điểm $A(9;0)$. Tính tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó?

Hướng dẫn

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$$y'=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(9;0)$ với hệ số góc k có phương trình $y=k(x-9)$.

Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{x-1}=k(x-9) & (1) \\ \frac{-1}{(x-1)^2}=k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta có: $\frac{3x-2}{x-1}=\frac{-1}{(x-1)^2}.(x-9) \Leftrightarrow (3x-2)(x-1)=9-x$

$$\Leftrightarrow 3x^2-4x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{7}{3} \end{array}\right.$$

Do đó tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng $y'(-1).y'\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{9}{64}$.

Bài 4. Tìm điểm trên đường thẳng $y=2x+1$ để từ đó kẻ được đến đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến?

Hướng dẫn

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Gọi $A(a;2a+1)\in d: y=2x+1$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d' đi qua $A(a;2a+1)$.

Suy ra phương trình $d': y=k(x-a)+2a+1$

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1}=k(x-a)+2a+1 \\ \dfrac{-4}{(x-1)^2}=k \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow \dfrac{x+3}{x-1}=\dfrac{-4}{(x-1)^2}(x-a)+2a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ 2ax^2-2(2a+4)x+6a+4=0 \quad (2) \end{cases}$

Để từ $A(a;2a+1)$ chỉ kẻ được một tiếp tuyến đến (C) thì $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có một nghiệm

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có một nghiệm khác 1.

Có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: phương trình (2) là phương trình bậc nhất có nghiệm $x\neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ -8x+4=0 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (T/m). Suy ra $A(0;1)$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: phương trình (2) là phương trình bậc hai có nghiệm kép $x\neq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=(2a+4)^2-2a(6a+4)=0 \\ x_1=x_2=\dfrac{2a+4}{2a}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ -8a^2+8a+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right..$$

Suy ra có 2 điểm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} A(-1;-1) \\ A(2;5) \end{array}\right.$

Trường hợp 3: phương trình (2) là phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x=1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'=(2a+4)^2-2a(6a+4)>0 \\ 2a-2(2a+4)+6a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=1$. Suy ra $A(1;3)$ thỏa mãn.

Vậycó 4 điểm thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Bài 5. Tìm số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=4x^3-6x^2+1$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1;-9)$.

Hướng dẫn

TXĐ: R

Ta có: $y' = 12x^2 - 12x$.

Phương trình đường thẳngđi qua $M(-1;-9)$ có dạng: $(\Delta): y = k(x+1) - 9$.

Δ là tiếp tuyến của đồ thị khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 4x^3 - 6x^2 + 1 = k(x+1) - 9 \\ k = 12x^2 - 12x \end{cases} \Rightarrow 8x^3 + 6x^2 - 12x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Với $x = -1 \Rightarrow k = 24 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = 24(x+1) - 9 \Leftrightarrow y = 24x + 15$

Với $x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow k = \dfrac{15}{4} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y = \dfrac{15}{4}(x+1) - 9 \Leftrightarrow y = \dfrac{15}{4}x - \dfrac{21}{4}$

Có 2 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu .

Bài 6. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;0)$ sao cho từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến đồthị (C), trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Tìm giá trị của m ?

Hướng dẫn

TXĐ: R

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Đường thẳng d đi qua $M(m;0)$ có hệ số góc k có phương trình : $y = k(x-m)$

d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-m) = x^3 + 3x^2 \\ k = 3x^2 + 6x \end{cases} \Rightarrow (x-m)(3x^2+6x) = x^3 + 3x^2 \Leftrightarrow 2x^3 - 3(m-1)x^2 - 6mx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 3(m-1)x - 6m = 0 \quad (1) \end{array}\right..$$

Khi $x = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến $y = 0$.

Đối với đồ thị hàm số không có tiếp tuyến nào vuông góc với $y = 0$ nên yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 khác 0 thỏa $y'(x_1).y'(x_2) = -1$

$\Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \Leftrightarrow 9x_1.x_2\left[x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4\right] + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9(-3m)\left[-3m + 3(m-1) + 4\right] + 1 = 0 \Leftrightarrow -27m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{27}$.

Thay $m = \dfrac{1}{27}$ vào (1) thử lại có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy $m = \dfrac{1}{27}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 7. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$ có đồ thị (C). Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;2)$?

Hướng dẫn

TXĐ: R

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;2)$ có hệ số góc k có dạng: $y = kx + 2$

Để đường thẳng d là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi và khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^4 - 2x^2 + 2 = kx + 2 \\ 4x^3 - 4x = k \end{cases} \Rightarrow x^4 - 2x^2 + 2 = \left(4x^3 - 4x\right)x + 2 \Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{array}\right.$$

Với $x = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = 2$.

Với $x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow k = -\dfrac{4\sqrt{6}}{9} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -\dfrac{4\sqrt{6}}{9}x + 2$.

Với $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \Rightarrow k = \dfrac{4\sqrt{6}}{9} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = \dfrac{4\sqrt{6}}{9}x + 2$

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ (C) biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(3;19)$

Hướng dẫn

Giả sử tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm là điểm $M(x_0;y_0)$. ta có phương trình tiếp tuyến là

$y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 1$ (d)

d đi qua điểm $A(3;19)$ nên ta có: $19 = (3x_0^2 - 3)(3 - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 1$.

Giải phương trình trên ta được $x_0 = 3$ hoặc $x_0 = -\dfrac{3}{2}$.

Với $x_0 = 3$ thì phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 24x - 53$.

Với $x_0 = -\dfrac{3}{2}$ thì phương trình tiếp tuyến là $y = \dfrac{15}{4}x + \dfrac{31}{4}$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y = 24x - 53$ và $y = \dfrac{15}{4}x + \dfrac{31}{4}$.

Bài 9. Từ điểm $A(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$

Hướng dẫn

Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại M là: $y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\quad (x_0\neq 1)$.

Tiếp tuyến đi qua $A(1;3)$ nên ta có $3=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(1-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\quad (x_0\neq 1)$

$$\Leftrightarrow x_0=7$$

Vậy qua điểm A kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số./

Bài 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Tìm a để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) sao cho tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành.

Hướng dẫn

Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Ta có phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}\qquad \left(x_0\neq 1\right)$$

Tiếp tuyến này đi qua điểm A nên ta có : $a=\dfrac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\dfrac{x_0+2}{x_0-1}\quad (x_0\neq 1)$

$$\Leftrightarrow (x_0+2)(x_0-1)-a(x_0-1)^2+3x_0=0\quad (x_0\neq 1)$$
$$\Leftrightarrow (1-a)x_0^2+(2a+4)x_0-a-2=0\ \ (*)$$

Theo định lý viet ta có : $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2a+4}{a-1} \\ x_1.x_2=\dfrac{a+2}{a-1}\end{cases}$. Với $x_1;x_2$ là hai nghiệm của (*)

Để tiếp điểm của hai tiếp tuyến nằm về hai phía đối với trục hoành thì $y_1.y_2<0$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1+2}{x_1-1}.\frac{x_2+2}{x_2-1}<0\Leftrightarrow \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0\ \Leftrightarrow \frac{\dfrac{a+2}{a-1}+2\dfrac{2a+4}{a-1}+4}{\dfrac{a+2}{a-1}-\dfrac{2a+4}{a-1}+1}<0\Leftrightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{2}{3} \\ a\neq 1\end{cases}$$

Vậy với các điểm $A(0;a)$ thỏa mã $a>-\dfrac{2}{3};a\neq 1$ ta luôn kẻ được hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài

Bài 11. Cho hàm số $y=x+\frac{1}{x}$ có đồ thị (C). Tìm tập hợp các điểm mà từ đó kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C) và hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

Gọi $M(\mathrm{a};\mathrm{b})$ là điểm bất kì trong mặt phẳng tọa độ. Phương trình đường thẳng d qua M có hệ số góc k là: $y=k(x-a)+b$.

d là tiếp tuyến của đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} k(x-a)+b=x+\frac{1}{x} \\ k=1-\frac{1}{x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx=x+\frac{1}{x}+ka-b \\ kx=x-\frac{1}{x};\quad k<1 \end{cases}. \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a^2k^2-2(ab-2)k+b^2-4=0 \quad (2)$$

Từ $k=1-\frac{1}{x^2}$ ta thấy với mỗi $k<1$ thì luôn có hai giá trị của x trái dấu, do đó hệ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm $k_1;k_2<1$.

Mặt khác, hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau nên ta có $k_1.k_2=-1$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn : $\begin{cases} k_1.k_2=-1 \\ k_1;k_2<1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \frac{b^2-4}{a^2}=-1 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ a^2+b^2=4 \\ a\neq b \end{cases}.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm $O(0;0)$, bán kính bằng 2, sau khi đã bỏ đi 4 điểm là giao với các đường thẳng $x=0, y=x$.

Bài 12. Cho hàm số $y=\frac{2x^2+mx+m}{x+1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để từ điểm $A(0;1)$ không kẻ được bất kì tiếp tuyến nào đến đồ thị (C).

Hướng dẫn

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ là

$$y=\frac{2x_0^2+4x_0}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0^2+mx_0+m}{x_0+1}$$

Tiếp tuyến không đi qua điểm $A(0;1)$ nên phương trình

$$(m-3)x_0^2+2(m-1)x_0+m-1=0,\quad (x_0\neq -1)\quad (*) \text{ vô nghiệm hoặc có nghiệm } x_0=-1$$

TH1: $m-3=0\Leftrightarrow m=3$ ta có $x_0=-\frac{1}{2}$ nên $m=3$ không thỏa mãn

TH2: $m\neq 3$.(*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'<0\Leftrightarrow m<1$

TH3: (*) có nghiệm $x_0=-1$ suy ra $-2=0$ (vô lý).

Vậy $m<1$ thì không có tiếp tuyến nào của đồ thị (C) đi qua A.

Bài 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(-2;-1)$.

Hướng dẫn

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ là:

$$y=(3x_0{}^2-3)(x-x_0)+x_0^3-3x_0+1$$

Tiếp tuyến đi qua điểm $A(-2;-1)$ nên ta có: $-1=(3x_0{}^2-3)(-2-x_0)+x_0^3-3x_0+1$

$$\Leftrightarrow -2x_0^3-6x_0^2+8=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1 \\ x_0=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=9x+17 \end{array}\right.$$

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là $y=-1$ và $y=9x+17$

Bài 14. Cho hàm số $y=-4x^3+3x+2$ có đồ thị (C) . Tìm trên đường thẳng $y=3$ các điểm mà trên đó kẻ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) .

Hướng dẫn

Giả sử $A(m;3)$ là điểm trên đường thẳng $y=3$ thỏa mãn từ A kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Phương trình tiếp tuyến: $y=(-12x_0^2+3)(x-x_0)-4x_0^3+3x+2$.

Tiếp tuyến đi qua A nên ta có: $3=(-12x_0^2+3)(m-x_0)-4x_0^3+3x+2$

$$8x_0^3-12mx_0^2+3m-1=0$$

Hay

$$\Leftrightarrow \left(x_0-\frac{1}{2}\right)(8x_0^2+(4-12m)x_0+2-6m)=0$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 8x_0^3-12mx_0^2+3m-1=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (8x_0^2+(4-12m)x_0+2-6m)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ m\neq\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ m\neq\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy từ các điểm $A(m;3)$ thỏa mãn $m\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$ kẻ được 3 tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Bài 15. Cho đồ thị hàm số $y=3x-4x^3$ có đồ thị (C). Từ điểm $M(1;3)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Hướng dẫn

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0;y_0)$ là:

$$y=(3-12x_0{}^2)(x-x_0)+3x_0-4x_0^3$$

Tiếp tuyến đi qua $M(1;3)$ nên ta có: $3=(3-12x_0{}^2)(1-x_0)+3x_0-4x_0^3$

$$\Leftrightarrow 8x_0^3-12x_0^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Vậy qua M kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C).

Bài 16. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;2)$. Tìm điểm M thuộc đồ thị (C) có hoành độ lớn hơn 2 sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với đường thẳng IM.

Hướng dẫn

Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-1}{x_0-1}\right)$ thuộc (C). Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0-1}$$

Phương trình đường thẳng $MI: y=\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-1)+2$

Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có: $-\frac{1}{(x_0-1)^2}.\frac{1}{(x_0-1)^2}=-1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x_0=0\ (loai)\\x_0=2\end{array}\right.$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=3$. Vậy điểm $M(2;3)$

Bài 17. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018;2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

Hướng dẫn

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có : $y' = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0;a)$, hệ số góc k có phương trình: $y = kx + a$.

Để d là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} = kx + a & (*) \\ \dfrac{-3}{(x-1)^2} = k & (**) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay (**) vào (*) ta được: $\dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{-3x}{(x-1)^2} + a$

$\Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a + 2 = 0$ với $x \neq 1$. (1)

Do từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' = 3(a+2) > 0 \\ a - 1 - 2(a+2) + a + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a \neq 1 \end{cases}$. (2)

Khi đó toạ độ hai tiếp điểm là $M\left(x_1; \dfrac{x_1+2}{x_1-1}\right)$ và $N\left(x_2; \dfrac{x_2+2}{x_2-1}\right)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1) do đó $x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+2)}{a-1}$, $x_1x_2 = \dfrac{a+2}{a-1}$.

Hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành khi: $\dfrac{x_1+2}{x_1-1}.\dfrac{x_2+2}{x_2-1} < 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4}{x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow a > -\dfrac{2}{3}$.

Kết hợp điều kiện (2) suy ra $\begin{cases} a > -\dfrac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$ nên trên đoạn $[-2018;2018]$ số giá trị nguyên của a thỏa yêu cầu bài toán là 2018.

Bài 18. Gọi S là tập hợp các điểm thuộc đường thẳng $y=2$ mà qua mỗi điểm thuộc S đều kẻ đượchai tiếp tuyến phân biệt tới đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. Tính tổng hoành độ T của tất cả các điểm thuộc S.

Hướng dẫn

TXĐ: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có : $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$$y=\frac{x^2}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}$$

Gọi điểm $A(a;2)\in(d):y=2$. Đường thẳng d đi qua A có dạng $y=k(x-a)+2$

Điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-1}=k(x-a)+2\\ \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=k\end{cases}\Rightarrow(1-a)^2k^2-4k-4=0\quad(*)$

Để 2 tiếp tuyến vuông góc nhau thì phương trình (*) có 2 nghiệm k phân biệt và tích của hai nghiệm đó bằng $-1\Rightarrow\dfrac{-4}{(1-a)^2}=-1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=-1\end{array}\right.$

Vậy tổng hai hoành độ là 2 .

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=x^2$ biết tiếp tuyến qua $A(0;-1)$

Bài 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y=x^3-3x^2+3$ biết tiếp tuyến qua $B\left(\dfrac{23}{9};-1\right)$

Bài 3. Hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$, biết tiếp tuyến qua điểm A

a) $y=\dfrac{4x-x^2}{x-1}$, với $A(1;\ -4)$.

b) $y=x^4-2x^2$, với $A(0;\ -1)$.

c) $y=x^3-3x+1$, với $A(1;-6)$.

d) $y=\dfrac{x^2-4x+4}{x-1}$, với $A(-1;\ 0)$.

e) $y=x^4-6x^2+9$, với $A(0;\ 9)$

Bài 4. Tìm m để đường thẳng $y=mx-1$ tiếp xúc $y=x^3-x^2+4x$

Bài 5. Tìm m để đường thẳng $y = 7 - x$ tiếp xúc $y = \dfrac{x^2 + m}{x - 1}$

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến với $(P): y = x^2$, biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(0\ ;\ -1)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua $A(0;\ 3)$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP:

Bài 1. Cho đường cong $(C): y = x^3$ và hai điểm $A(1; 1)$ và $B(1+\Delta x; 1+\Delta y)$ trên (C).

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB với Δx lần lượt là $0{,}1$ và $0{,}01$

b) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại A.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$. có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết:

a) tiếp điểm có hoành độ bằng 2

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 3

c) Hệ số góc của tiếp tuyến $k = -4$.

d) Tiếp tuyến song song với $d: x + 9y = 2017$

e) Tiếp tuyến vuông góc với $d: x + 4y = 2017$.

f) Tiếp tuyến qua điểm $A(-8; 0)$

Bài 3. Cho Parabol $y = x^2$ và hai điểm $A(2;\ 4)$ và $B(2+\Delta x;\ 4+\Delta y)$ trên parabol đó.

a) Tính hệ số góc của cát tuyến AB biết Δx lần lượt bằng $1;\ 0{,}1$ và $0{,}001$.

b) Tính hệ số góc của tiếp tuyến của parabol đã cho tại điểm A.

Bài 4. Tìm hệ số góc của cát tuyến MN với đường cong (C), biết:

a) $(C): y = x^2 - 2x$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 2,\ x_N = 1$.

b) $(C): y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x}$ và hoành độ M, N theo thứ tự là $x_M = 1,\ x_N = 3$.

Bài 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$, biết:

a) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1.

b) Tiếp điểm có tung độ bằng 8.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Bài 6. Viết phương trình tiếp tuyến của đường hypebol $y = \dfrac{1}{x}$, biết:

a) Tại điểm $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ 2\right)$.

b) Tiếp điểm có hoành độ bằng -1.

c) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

Bài 7. Cho đường cong $(C): y=\sqrt{x}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

a) Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 1.

b) Biết tiếp tuyến song song với $\Delta: x-4y+3=0$.

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số:

a) $y=\frac{x-1}{x+1}$, biết hoành độ tiếp điểm là $x_0=0$.

b) $y=\sqrt{x+2}$, biết tung độ tiếp điểm là $y_0=2$.

Bài 9. Cho hai hàm số $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ và $y=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mội hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kẻ trên.

Bài 10. Cho parabol $(P): y=x^2$. Gọi M_1 và M_2 là hai điểm thuộc (P) lần lượt có hoành độ $x_1=-2$ và $x_2=1$. Hãy tìm trên (P) một điểm E sao cho tiếp tuyến tại E song song với cát tuyến M_1M_2. Viết phương trình tiếp tuyến đó.

Bài 11. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x-5y-2017=0$.

Bài 12. Cho hàm số $(C_m): y=f(x)=-x^4-mx^2+m+1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các tiếp tuyến của (C_m) tại $A(1;\ 0)$ và $B(-1;\ 0)$ vuông góc với nhau.

Bài 13. Cho hàm số $y=\cos^2 x+m\sin x$ (m là tham số) có đồ thị (C). Tìm m trong mỗi trường hợp sau:

a) Tiếp tuyến của (C) tại điểm có $x=\pi$ có hệ số góc bằng 1.

b) Tiếp tuyến của (C) tại các điểm có các hoành độ $x=-\frac{\pi}{4}$ và $x=\frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

Bài 14. Tìm giao điểm của hai đường cong $(P): y=x^2-x+1$ và $(H): y=\frac{1}{x+1}$. Chứng minh rằng hai đường cong đó có tiếp tuyến chung tại giao điểm của chúng.

Bài 15. Cho parabol $(P): y=x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến với (P), biết:

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=4x+3$.

b) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;\ -1)$.

Bài 16. Viết phương trình tiếp tuyến của:

a) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2;\ 3)$.

b) $y=x^3+4x^2-1$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$.

c) $y=x^2-4x+4$ tại điểm có tung độ $y_0=1$.

d) $y=\sqrt{2x+1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=4$.

e) $y=\dfrac{x^2-2x-15}{x-3}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $\dfrac{4}{3}$.

f) $y=x^4-2x^2+1$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 24.

g) $y=x^3+3x^2+2$ biết tiếp tuyến $d\perp D: x-3y-15=0$.

h) $y=x^3+x+3$ tại điểm có hoành độ $x_0=-1$.

i) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0=2$.

Bài 17. Cho $(C): y=f(x)=\dfrac{3x-2}{x-1}$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C):

a) Tại điểm có hoành độ bằng 2

b) Tại điểm có tung độ bằng $\dfrac{5}{2}$

c) $d//D: y=-x+25$

d) $d\perp\Delta: 4x-y=2017$.

Bài 18. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=x^4+2x^2-1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) Biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y=-3x+1$.

b) Biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: x-7y=2017$.

c) Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;\ 2)$

Bài 19. Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=x^3-5x^2+2$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) Biết tung độ của tiếp điểm bằng 2.

b) Biết rằng tiếp tuyến song song với trục hoành.

c) Biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x+8y=2017$.

d) Biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $A(0;\ -6)$.