BÀI GIẢNG GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. LÝ THUYẾT

I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = 0$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Từ định nghĩa suy ra rằng:

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$, có giới hạn là 0.

c) Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

2. Một số dãy số có giới hạn 0

Định lí 4.1

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

STUDY TIP

Định lí 4.1 thường được sử dụng để chứng minh một dãy số có giới hạn là 0.

Định lí 4.2

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Người ta chứng minh được rằng

a) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

b) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

c) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với mọi số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim \frac{1}{n} = 0$.

d) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi $a > 1$ cho trước.

STUDY TIP

Cách ghi nhớ các kết quả bên như sau: Khi tử số không đổi, mẫu số càng lớn (dần đến dương vô cực) thì phân số càng nhỏ (dần về 0)

II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim (u_n - L) = 0$.

Kí hiệu: $\lim u_n = L$.

Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

STUDY TIP

a) Dãy số không đổi (u_n) với $u_n = c$, có giới hạn là c.

b) $\lim u_n = L$ khi và chỉ khi khoảng cách $|u_n - L|$ trên trục số thực từ điểm u_n đến L trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được miễn là n đủ lớn; nói một cách hình ảnh, khi n tăng thì các điểm u_n "chụm lại" quanh điểm L.

c) Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

2. Một số định lí

Định lí 4.3

Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b) Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 4.4

Giả sử $\lim u_n = L, \lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó

a) $\lim (u_n + v_n) = L + M$.

b) $\lim (u_n - v_n) = L - M$.

c) $\lim (u_n v_n) = LM$.

D) $\lim (cu_n) = cL$.

e) $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{L}{M}$ (nếu $M \ne 0$).

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa $|q| < 1$.

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + ... = \frac{u_1}{1-q}$$

III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC.

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim \sqrt{u_n} = +\infty$.

b) $\lim \sqrt[3]{u_n} = +\infty$

c) $\lim n^k = +\infty$ với một số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim n = +\infty$.

d) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = -\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Nhận xét:

a) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.

b) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn n đủ lớn. Do đó $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn n đủ lớn. Nói cách khác, nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

STUDY TIP

Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.

Định lí 4.5

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

STUDY TIP

Ta có thể diễn giải "nôm na" định lí 4.5 như sau cho dễ nhớ: Khi tử số không đổi, mẫu số có giá trị tuyệt đối càng lớn(dần đến vô cực) thì phân số càng nhỏ(dần về 0).

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP

Vì $-\infty$ và $+\infty$ không phải là những số thực nên không áp dụng được các định lí về giới hạn hữu hạn cho các dãy số có giới hạn vô cực.

Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim\frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim\frac{u_n}{v_n}$

$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

STUDY TIP

Ở cả ba quy tắc, về dấu, tương tự như quy tác về dấu của phép nhân hoặc phép chia hai số.
Để cho dễ nhớ, ta diễn giải các quy tắc một cách "nôm na" như sau:

- **Quy tắc 1:** Tích của hai đại lượng vô cùng lớn là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 2:** Tích của đại lượng vô cùng lớn với một đại lượng khác 0 là một đại lượng vô cùng lớn.
- **Quy tắc 3:** Khi tử thức có giới hạn hữu hạn khác 0, mẫu thức càng nhỏ(dần về 0) thì phân thức càng lớn(dần về vô cực).

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ GIỚI HẠN DÃY SỐ

DẠNG 1. TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC.

Câu 1: $\lim\left(n^3-2n+1\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án D.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $n^3-2n+1=n^3\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)$.

Vì $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(1-\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(n^3-2n+1\right)=+\infty$

Cách 2: Sử dụng MTCT tính giá trị của biểu thức n^3-2n+1 tại một giá trị lớn của n (do $n\to+\infty$) như sau: Nhập vào màn hình biểu thức X^3-2X+1. Bấm $\boxed{\text{CALC}}$. Máy hỏi X ? nhập 10^5, ấn $\boxed{=}$. Máy hiện kết quả như hình bên. Ta thấy kết quả tính toán với $X=10^5$ là một số dương rất lớn. Do đó chọn D.

Câu 2: $\lim\left(5n-n^2+1\right)$ bằng

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 5. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

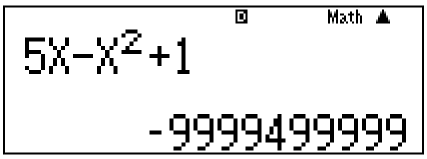
Chọn B.

Cách 1: Ta có $5n-n^2+1=n^2\left(-1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(-1+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)=-1<0$ nên $\lim\left(5n-n^2+1\right)=-\infty$ (theo quy tắc 2).

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với $X=10^5$ là một số âm rất nhỏ. Do đó chọn đáp án có giới hạn bằng $-\infty$.



Tổng quát: Cho k là một số nguyên dương.

a) $\lim\left(a_kn^k+a_{k-1}n^{k-1}+...+a_1n+a_0\right)=+\infty$ nếu $a_k>0$.

b) $\lim\left(a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0\right) = -\infty$ nếu $a_k < 0$.

Chẳng hạn: $\lim\left(n^3 - 2n + 1\right) = +\infty$ vì $a_3 = 1 > 0$; $\lim\left(5n - n^2 + 1\right) = -\infty$ vì $a_2 = -1 < 0$.

STUDY TIP

Cho u_n có dạng đa thức (bậc lớn hơn 0) của n.

- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số dương thì $\lim u_n = +\infty$.
- Nếu hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của n là một số âm thì $\lim u_n = -\infty$.

Câu 3: $\lim u_n$, với $u_n = \dfrac{5n^2 + 3n - 7}{n^2}$ bằng:

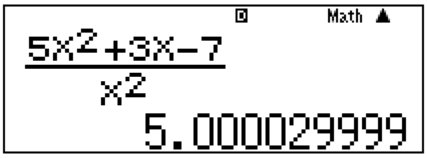
A. 0. **B.** 5. **C.** 3. **D.** –7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có: $\lim u_n = \lim\left(\dfrac{5n^2}{n^2} + \dfrac{3n}{n^2} - \dfrac{7}{n^2}\right) = \lim\left(5 + \dfrac{3}{n} - \dfrac{7}{n^2}\right) = 5$.

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏ túi tương tự những ví dụ trên.



Đây không phải là giá trị chính xác của giới hạn cần tìm, mà chỉ là giá trị gần đúng của một số hạng với n khá lớn, trong khi n dần ra vô cực. Tuy nhiên kết quả này cũng giúp ta lựa chọn đáp án đúng, đó là đáp án **B.**

STUDY TIP

Một số dòng máy hiện kết quả là dạng phân số, chẳng hạn $\dfrac{1500044}{300007}$. Do $\dfrac{15}{3} = 5$ nên chọn **B.**

Câu 4: $\lim u_n$, với $u_n = \dfrac{2n^3 - 3n^2 + n + 5}{n^3 - n^2 + 7}$ bằng

A. –3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được: $u_n = \dfrac{2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}}{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{7}{n^3}}$. Vì $\lim\left(2 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{n^3}\right) = 2$ và $\lim\left(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{7}{n^3}\right) = 1 \neq 0$

nên $\lim\dfrac{2n^3 - 3n^2 + n + 5}{n^3 - n^2 + 7} = \dfrac{2}{1} = 2$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Câu 5: Giới hạn của dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{n^3 + 2n + 1}{n^4 + 3n^3 + 5n^2 + 6}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^4 (n^4 là bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được

$$\lim u_n = \lim \frac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6} = \lim \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Câu 6: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho n^2 (n^2 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong **mẫu thức**), ta được $u_n = \frac{3n^3+2n-1}{2n^2-n} = \frac{3n+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}$. Vậy $\lim u_n = \lim\left(\frac{3n}{2}\right) = +\infty$.

Cách 2: Chia cả tử và mẫu cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong **phân thức**), ta được

$\lim u_n = \lim \frac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}$. Vì $\lim\left(3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)=3>0$, $\lim\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=0$ và $\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}>0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim u_n = +\infty$.

Cách 3: Ta có $\lim u_n = \lim \frac{n^3\left(3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n}\right)} = \lim\left(n\frac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}}\right)$. Vì $\lim n = +\infty$ và $\lim \frac{3+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} > 0$ nên theo quy tắc 2, $\lim u_n = +\infty$.

Cách 4: Sử dụng MTCT tương như các ví dụ trên.

STUDY TIP

Rõ ràng làm theo cách 1 (chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của n trong mẫu thức) ít phải lập luận hơn cách 2 và cách 3.

Tổng quát:

Xét dãy số (u_n) với $u_n = \frac{a_i n^i + a_{i-1}n^{i-1}+...+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+...+b_1 n + b_0}$, trong đó $a_i, b_k \neq 0$

(dạng phân thức với tử số và mẫu số là các đa thức của n).

a) Nếu $i>k$ (bậc tử lớn hơn bậc mẫu) thì $\lim u_n = +\infty$ nếu $a_i b_k > 0$, $\lim u_n = -\infty$ nếu $a_i b_k < 0$.

b) Nếu $i=k$ (bậc tử bằng bậc mẫu) thì $\lim u_n = \frac{a_i}{b_k}$.

c) Nếu $i<k$ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) thì $\lim u_n = 0$.

STUDY TIP

Cho u_n có dạng phân thức của n.

- Nếu bậc tử cao hơn bậc mẫu thì (u_n) có giới hạn là vô cực

- Nếu bậc tử bằng bậc mẫu thì $\lim u_n$ bằng hệ số của lũy thừa cao nhất trên tử chia cho hệ số của lũy thừa cao nhất ở mẫu.

- Nếu bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu thì $\lim u_n = 0$.

Câu 7: $\lim \dfrac{\sin(n!)}{n^2+1}$ bằng

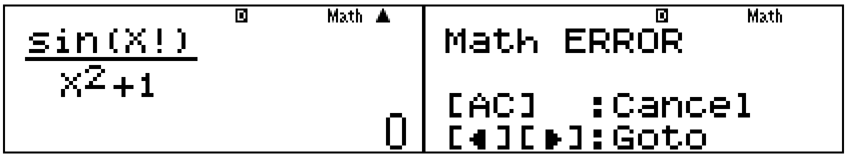
A. 0. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\left|\dfrac{\sin(n!)}{n^2+1}\right| \le \dfrac{1}{n^2+1}$ mà $\lim \dfrac{1}{n^2+1} = 0$ nên chọn đáp án **A.**

Lưu ý: Sử dụng MTCT. Với $X = 13$, máy tính cho kết quả như hình bên. Với $X > 13$, máy bào lỗi do việc tính toán vượt quá khả năng của máy. Do đó với bài này, MTCT sẽ cho kết quả chỉ mang tính chất tham khảo.



Nhận xét: Hoàn toàn tương tự, ta có thể chứng minh được rằng:

a) $\lim \dfrac{\sin^k(u_n)}{v_n} = 0$; b) $\lim \dfrac{\cos^k(u_n)}{v_n} = 0$.

Trong đó $\lim v_n = \pm\infty, k$ nguyên dương.

Chẳng hạn: $\lim \dfrac{\left(\sin \dfrac{n\pi}{5}\right)^2}{\sqrt{n^3+2n+1}} = 0$; $\lim \dfrac{\cos^3(3n+1)\pi}{2^n} = 0$; $\lim \dfrac{\cos\sqrt{2n+1}}{\sqrt[3]{n^2-5n^3+n+1}} = 0$; …..

STUDY TIP

Khi sử dụng MTCT, với các bài toán liên quan đến lượng giác, trước khi tính toán ta cần chọn chế độ Rad (radian) hoặc Deg (degree) cho phù hợp với đề bài.

Câu 8: $\lim \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

A. –1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Ta có $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)} < \dfrac{1}{n.n} = \dfrac{1}{n^2}$ mà $\lim \dfrac{1}{n^2} = 0$ nên suy ra $\lim \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)} = 0$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự các ví dụ trên.

Nhận xét: Dãy $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn nhưng mọi dãy $\left(\dfrac{(-1)^n}{v_n}\right)$, trong đó $\lim v_n = \pm\infty$ thì có giới hạn bằng 0.

Câu 9: Tính giới hạn $I = \lim\left(\sqrt{n^2-2n+3} - n\right)$

A. $I = 1$. **B.** $I = -1$. **C.** $I = 0$. **D.** $I = +\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $I=\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n+3}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}$

$$=\lim\frac{\left(n^2-2n+3\right)-n^2}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{-2}{\sqrt{1}+1}=-1.$$

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự các ví dụ trên.

STUDY TIP

Hằng đẳng thức thứ ba: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Hai biểu thức $a-b$ và $a+b$ được gọi là biểu thức liên hợp của nhau.

Ví dụ: $\sqrt{n^2-2n+3}-n$ và $\sqrt{n^2-2n+3}+n$ là hai biểu thức liên hợp của nhau.

Nhận xét: a) ở bước 3 ta đã chia cả tử và mẫu cho n. Lưu ý là $n=\sqrt{n^2}$.

b) Ta có $\sqrt{n^2-2n+3}-n=n\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}-1\right)$, Vì $\lim n=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}-1\right)=0$ nên không áp dụng được quy tắc 2 như trong ví dụ trước đó.

Câu 10: $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Cách 1: Ta có $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=\lim n\left(1-\sqrt[3]{8+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)$.

Vì $\lim n=+\infty,\lim\left(1-\sqrt[3]{8+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)=1-\sqrt[3]{8}=-1<0$ nên $\lim\left(n-\sqrt[3]{8n^3+3n+2}\right)=-\infty$.

Cách 2: Sử dung MTCT như các ví dụ trên.

Câu 11: $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)$ bằng:

A. -1. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Ta có $n^2-n\sqrt{4n+1}=n^2\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)$.

Vì $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(1-\sqrt{\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(n^2-n\sqrt{4n+1}\right)=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT tương tự như các ví dụ trên.

Tổng quát:

Xét dãy số $u_n=\sqrt[r]{a_in^i+a_{i-1}n^{i-1}+...+a_1n+a_0}-\sqrt[s]{b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+...+b_1n+b_0}$, trong đó $a_i,b_k>0$.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i}=\sqrt[s]{b_k}$ và $\dfrac{i}{r}=\dfrac{k}{s}$: Giới hạn hữu hạn.

+ Nếu hai căn cùng bậc: Nhân chia với biểu thức liên hợp.

+ Nếu hai căn không cùng bậc: Thêm bớt với $\sqrt[r]{a_i n^i}$ rồi nhân với biểu thức liên hợp.

- Nếu $\sqrt[r]{a_i} \neq \sqrt[s]{b_k}$ hoặc $\frac{i}{r} \neq \frac{k}{s}$: Đưa lũy thừa bậc cao nhất của n ra ngoài dấu căn. Trong trường hợp này u_n sẽ có giới hạn vô cực.

Nhận xét: Trong chương trình lớp 12, các em sẽ được học về căn bậc s (s nguyên dương) và lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Người ta định nghĩa rằng $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$, trong đó a là số thực dương, r là số nguyên dương, s là số nguyên dương, $s \geq 2$. Các tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỉ tương tự lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Chẳng hạn: $\sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{n^2} = n^{\frac{2}{3}}$...

Chẳng hạn:

a) Với $u_n = \sqrt{n^2-2n+3} - n = \sqrt{n^2-2n+3} - \sqrt{n^2}$: nhân chia với biểu thức liên hợp của $\sqrt{n^2-2n+3} - n$ là $\sqrt{n^2-2n+3} + n$. Dãy số có giới hạn hữu hạn bằng -1.

b) Với $u_n = n - \sqrt[3]{8n^3+3n+2} = \sqrt[3]{n^3} - \sqrt[3]{8n^3+3n+2}$: đưa n^3 ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của $(u_n) = -\infty$.

c) Với $u_n = n^2 - n\sqrt{4n+1} = n\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{4n+1}\right)$: đưa n^2 ra ngoài dấu căn.

Giới hạn của (u_n) bằng $+\infty$.

Câu 12: $\lim\left(n - \sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right)$ bằng :

A. -1. **B.** 1. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta tiến hành nhân chia với biểu thức liên hợp (bậc ba) của $n - \sqrt[3]{n^3+3n^2+1}$

$$\lim\left(n - \sqrt[3]{n^3+3n^2+1}\right) = \lim \frac{n^3 - \left(n^3+3n^2+1\right)}{\left(n^2 + n\sqrt[3]{n^3+3n^2+1} + \sqrt[3]{\left(n^3+3n^2+1\right)^2}\right)}$$

$$= \lim \frac{-3 - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2}} = -1.$$

STUDY TIP

Hằng đẳng thức thứ bảy: $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$.

Hai biểu thức $a-b$ và a^2+ab+b^2 cũng được gọi là hai biểu thức liên hợp (bậc ba) của nhau.

Câu 13: $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)$ bằng :

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+3n+2}\right) = \lim\left[\left(\sqrt{n^2+n+1} - n\right) + \left(n - \sqrt[3]{n^3+3n+2}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

Câu 14: $\lim\left(5^n - 2^n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $5^n-2^n=5^n\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$

Vì $\lim 5^n=+\infty$ và $\lim\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(5^n-2^n\right)=+\infty$

Câu 15: $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=3^n\left(-5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n+7\frac{n}{3^n}\right)=-\infty$$

Câu 16: $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ bằng :

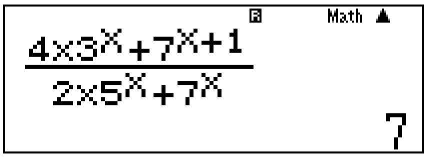
A. 1. **B.** 7. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\frac{4.\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{2.\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=\frac{7}{1}=7.$$

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏ túi. Nhập vào màn hình như hình dưới đây. Bấm CALC. Máy hỏi X? Nhập 100, ấn =. Máy hiện kết quả bằng 7.



Câu 17: $\lim\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$ bằng :

A. 0. **B.** $\frac{6}{8}$. **C.** 36. **D.** $\frac{4}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

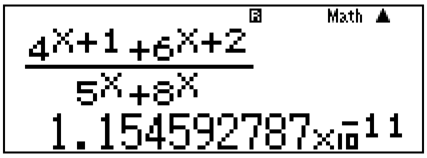
$$\lim\frac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim\frac{4.\left(\frac{4}{8}\right)^n+36.\left(\frac{6}{8}\right)^n}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+1}=0.$$

STUDY TIP

Khi sử dụng máy tính cầm tay, nếu nhập giá trị X quá lớn, máy sẽ báo lỗi do giá trị của $a^n, a>1$ tăng rất nhanh khi X tăng, nên vượt quá khả năng tính toán của máy. Khi đó cần thử lại các giá trị khác của X. Như vậy các bài toán chứa $a^n, a>1$ ta không nên tính với n quá lớn.

Cách 2: Sử sụng máy tính cầm tay tương tự như ví dụ trên.

Ta thấy kết quả tính toán với $X = 100$ là một số dương rất nhỏ. Do đó chọn đáp án giới hạn bằng 0.



Câu 18: $\lim \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 1}$ bằng :

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Chia cả tử và mẫu cho 3^n ta được $\dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 1} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$

Mà $\lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -1 < 0$, $\lim\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 0$ và $\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n > 0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 1} = -\infty$.

DẠNG 2. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ với mọi $n \ge 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n

Đặt $\lim u_n = L \ge 0$. Ta có $\lim u_{n+1} = \lim \dfrac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ hay $L = \dfrac{2(2L + 1)}{L + 3}$

$$\Rightarrow L^2 - L - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} L = 2 & (n) \\ L = -1 & (l) \end{array}\right.$$

Vậy $\lim u_n = 2$.

Lưu ý: Để giải phương trình $L = \dfrac{2(2L + 1)}{L + 3}$ ta có thể sử dụng chức năng SOLVE của MTCT (Chức năng SOLVE là chức năng tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình bằng phương pháp chia đôi). Ta làm như sau:

Nhập vào màn hình $X = \dfrac{2(2X + 1)}{X + 3}$; Bấm SHIFT CALC (tức SOLVE); Máy báo Solve for X; Nhập $\boxed{1}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như hình bên.

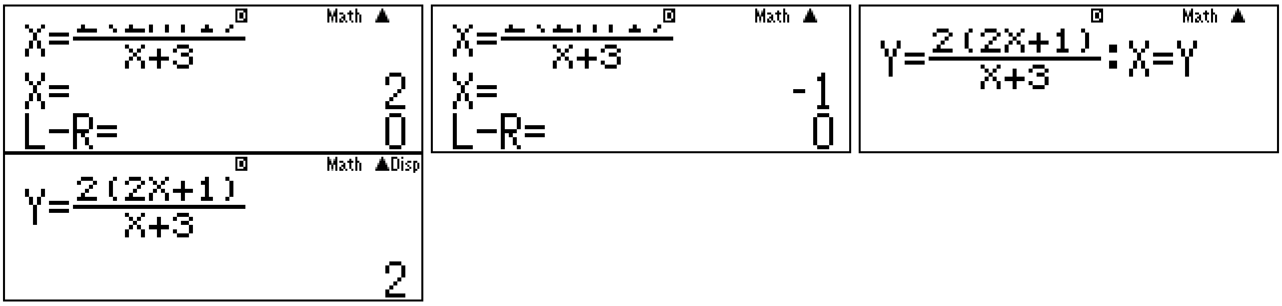
$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Lại ấn phím $\boxed{=}$. Máy báo Solve for X; Nhập $\boxed{0}\boxed{=}$; Máy báo kết quả như bên.

$L - R = 0$ tức đây là nghiệm chính xác. Tuy nhiên ta chỉ nhận nghiệm không âm. Vậy $L = 2$. (Ta chỉ tìm ra hai nghiệm thì dừng lại vì dễ thấy phương trình hệ quả là phương trình bậc hai).

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào màn hình như hình bên. Bấm $\boxed{CALC}$. Máy tính hỏi X ? nhập 1 rồi ấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của Y không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của Y là giới hạn cần tìm của dãy số. Giới hạn đó bằng 2.

STUDY TIPS

Trong ví dụ này ta đã áp dụng tính chất “nếu $\lim u_n = L$ thì $\lim u_{n+1} = L$”



Câu 20: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$ với mọi $n \geq 1$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = -1$. **C.** $\lim u_n = \sqrt{2}$. **D.** $\lim u_n = -\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bằng phương pháp quy nạp, dễ dàng chứng minh được $u_n > 0$ với mọi n

Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không, tuy nhiên các đáp án đề bài cho đều là các giới hạn hữu hạn. Do đó có thể khẳng định được dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = L \geq 0$

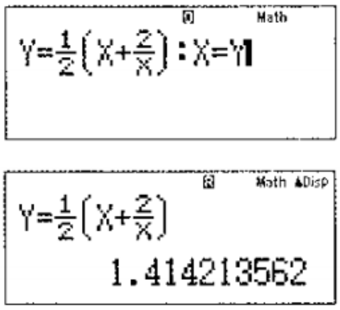
$$\lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

Hay $L = \dfrac{1}{2}\left(L + \dfrac{2}{L}\right) \Rightarrow L = \dfrac{2}{L} \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \sqrt{2}$

Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$

(loại trường hợp $L = -\sqrt{2}$). Vậy $\lim u_n = \sqrt{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào như màn hình sau.



Bấm $\boxed{\text{CALC}}$. Máy hỏi X? nhập 1 rồi bấm phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Khi nào thấy giá trị của Y không đổi thì dừng lại. Giá trị không đổi đó của Y là giới hạn cần tìm của dãy số.

Trong bốn đáp án đã cho, bằng phương pháp loại trừ, ta thấy chỉ có đáp án C là phù hợp với kết quả tính toán trên máy tính ($\sqrt{2} \approx 2,41423568$).

Câu 21: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$ và $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Khi nó $\lim u_n$ bằng:

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Phân tích: Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không. Có đáp án là hữu hạn, có đáp án là vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy số có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

Lời giải

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có: $\lim u_{n+1} = 2\lim u_n + \frac{1}{2} \Leftrightarrow L = 2L + \frac{1}{2} \Leftrightarrow L = -\frac{1}{2}$.

Đến đây có thể kết luận là $\lim u_n = -\frac{1}{2}$ được không? Câu trả lời là không?

Vì không khó để chứng minh được rằng $u_n > 0$ với mọi n. Do đó nếu dãy số có giới hạn L thì $L \geq 0$. Từ đó suy ra dãy không có giới hạn, mà trong bốn đáp án trên chỉ có đáp án C là vô cực.

Vậy ta chọn đáp án C.

Ta xét hai cách giải sau:

Cách 1: Đặt $v_n = u_n + \frac{1}{2}$. Ta có: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2} = 2u_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2\left(u_n + \frac{1}{2}\right) = 2v_n$

Vậy (v_n) là cấp số nhân có $v_1 = \frac{3}{2}$ và $q = 2$. Vậy $v_n = \frac{3}{2}.2^{n-1} = 3.2^{n-2}$.

Do đó $\lim v_n = \lim\left(3.2^{n-2}\right) = +\infty$. Suy ra $\lim u_n = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng quy trình lặp (MTCT) tương tự ví dụ trên.

Phân tích: Câu hỏi đặt ra là tại sao ta lại đặt $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ để thu được kết quả dãy (v_n) là cấp số nhân? Ta có kết quả tổng quát sau.

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = ru_n + s$ với $n \geq 1$, trong đó r, s là các hằng số và $r \neq 1, s \neq 0$. Khi đó dãy số (v_n) với $v_n = u_n + \frac{s}{r-1}$ là một cấp số nhân có công bội r.

Thật vậy, ta có $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{s}{r-1} = ru_n + s + \frac{s}{r-1} = ru_n + \frac{rs}{r-1} = r\left(u_n + \frac{s}{r-1}\right) = rv_n$

(Nếu $r = 1$ thì (u_n) là một cấp số cộng, $s = 0$ thì (u_n) là một cấp số nhân).

Như vậy, dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = a$, $u_{n+1} = ru_n + s$ với $n \geq 1$, trong đó r, s là các hằng số và $r \neq 1, s \neq 0$ sẽ có giới hạn vô cực nếu $|r| \geq 1$, có giới hạn hữu hạn nếu $|r| < 1$.

STUDY TIP

$u_{n+1} = ru_n + s$

Đặt $v_n = u_n + \frac{s}{r-1}$

....

$u_1 = a$, $u_{n+1} = ru_n + s$

+ $r \geq 1$: (u_n) có giới hạn $+\infty$.

+ $r \leq -1$: (u_n) có giới hạn $-\infty$.

+ $|r| < 1$: (u_n) có giới hạn hữu hạn bằng $\frac{s}{r-1}$.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) xác định $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. 0 . **B.** 1 . **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án D.

Phân tích: Đề bài không cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn hay không. Có đáp án là hữu hạn, có đáp án là vô cực. Do đó chưa thể khẳng định được dãy số có giới hạn hữu hạn hay vô cực.

Lời giải

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn là L.

Ta có: $\lim u_{n+1} = 2\lim u_n - \lim u_{n-1} + 2 \Leftrightarrow L = 2L - L + 2 \Leftrightarrow 0 = 2$ (Vô lý)

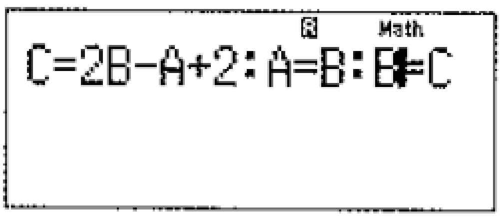
Vậy có thể dự đoán dãy có giới hạn vô cực. Tuy nhiên có hai đáp án vô cực ($-\infty$ và $+\infty$), vậy chưa thể đoán là đáp án nào. Ta xem hai cách giải sau.

Cách 1: Ta có $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = 4$, $u_4 = 9$. Vậy ta có thể dự đoán $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$.

Khi đó $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2 = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 = n^2 = [(n-1)-1]^2$.

Vậy $u_n = (n-1)^2$ với mọi $n \geq 1$. Do đó $\lim u_n = \lim(n-1)^2 = +\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT (quy trình lặp). Nhập vào như màn hình sau.



Bấm $\boxed{\text{CALC}}$ Máy hỏi *B*? nhập 1 rồi bấm phím $\boxed{=}$, máy hỏi *A*? nhập 0 rồi ấn phím $\boxed{=}$ liên tiếp. Ta thấy giá trị *C* ngày một tăng lên. Vậy chọn đáp án của dãy số là $+\infty$.

DẠNG 3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN.

Câu 23: Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2,151515...$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m,n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m+n$.

A. $m+n=104$. **B.** $m+n=312$. **C.** $m+n=38$. **D.** $m+n=114$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: Ta có $a = 2,151515... = 2 + \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$

Vì $\frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{15}{100}$, công bội $q = \frac{1}{100}$ nên $a = 2 + \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{71}{33}$.

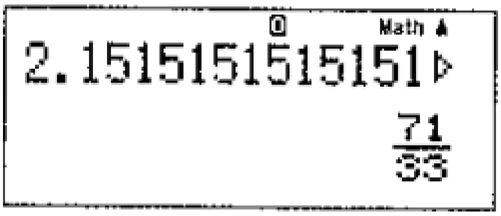
Vậy $m = 71, n = 33$ nên $m+n=104$.

Cách 2: Đặt $b = 0,151515... \Rightarrow 100b = 15 + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{33}$.

Vậy $a = 2 + b = 2 + \frac{5}{33} = \frac{71}{33}$.

Do đó $m = 71, n = 33$ nên $m+n=104$.

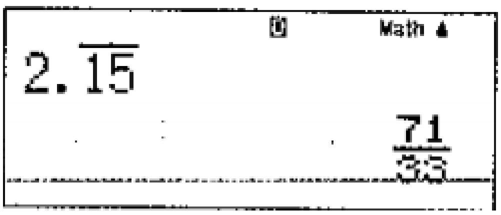
Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số $2,1515151515$ (Nhiều bộ số 15, cho tràn màn hình) rồi bấm phím $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là $2,(15) = \frac{71}{33}$.

Vậy $m = 71, n = 33$ nên $m+n=104$.

Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm $\boxed{2}$ $\boxed{.}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.



Có nghĩa là $2,(15) = \frac{71}{33}$.

Vậy $m=71,n=33$ nên $m+n=104$.

Câu 24: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,32111...$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a,b là các số nguyên dương. Tính $a-b$.

A. $a-b=611$. **B.** $a-b=-611$. **C.** $a-b=27901$. **D.** $a-b=-27901$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$0,32111...=\frac{32}{100}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+...=\frac{32}{100}+\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{289}{900}.$$

Vậy $a=289,b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

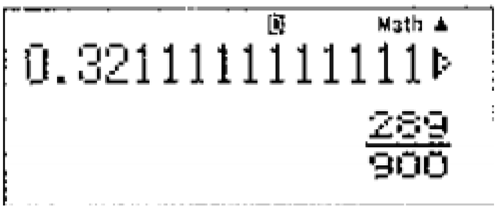
Cách 2: Đặt $x=0,32111...\Rightarrow 100x=32,111...$ Đặt $y=0,111...\Rightarrow 100x=32+y$.

Ta có: $y=0,111...\Rightarrow 10y=1+y\Rightarrow y=\frac{1}{9}$.

Vậy $100x=32+\frac{1}{9}=\frac{289}{9}\Rightarrow x=\frac{289}{900}$.

Vậy $a=289,b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào máy số $0,3211111111$ (Nhập nhiều số 1 , cho tràn màn hình), rồi bấm phím $\boxed{=}$. Màn hình hiển thị kết quả như sau.



Vậy $a=289,b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Cách 4: Sử dụng MTCT. Bấm $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$ $\boxed{ALPHA}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như hình sau.

Vậy $a=289,b=900$. Do đó $a-b=289-900=-611$.

Tổng quát

Xét số thập phân vô hạn tuần hoàn $a=\overline{x_1x_2...x_m,y_1y_2...y_nz_1z_1...z_kz_1z_1...z_k...}$.

Khi đó $a = \overline{x_1x_2...x_m} + \dfrac{\overline{y_1y_2...y_n}}{\underbrace{10...0}_{n-chu\,so}} + \dfrac{\overline{z_1z_2...z_k}}{\underbrace{99...9}_{k-chu\,so}\underbrace{0...0}_{n-chu\,so}}$

Chẳng hạn, $2,151515... = 2 + \dfrac{15}{99}; 0,32111.. = \dfrac{32}{100} + \dfrac{1}{990}$.

DẠNG 4. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ MÀ TỔNG LÀ n SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC.

Câu 25: Tổng $S = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ...$ bằng:

A. 1 . **B.** 2. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

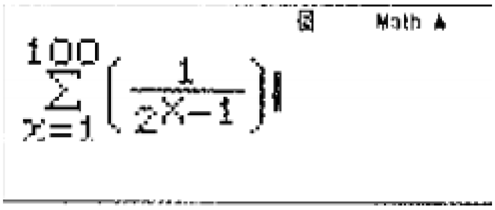
Đáp án B.

Lời giải

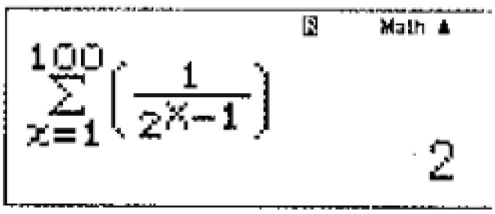
Cách 1: S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1$ và $q = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $S = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Sử dụng chức năng tính tổng. Nhập vào màn hình như hình sau.

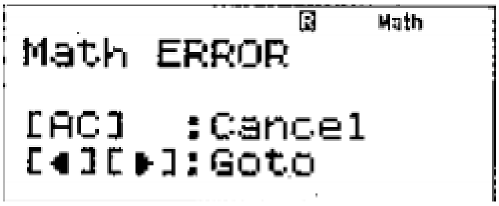


Bấm phím $\boxed{=}$, máy hiển thị kết quả bằng 2.



Lưu ý: Ở bài này, phải nhập số hạng tổng quát bằng $\dfrac{1}{2^{X-1}}$, vì $u_1 = 1 = \dfrac{1}{2^{1-1}}$. Nếu nhập số hạng tổng quát bằng $\dfrac{1}{2^X}$ thì kết quả sẽ bằng 1 và là kết quả sai.

Mặt khác, nếu cho X chạy từ 1 đến 10^3 thì máy sẽ báo lỗi do khối lượng tính toán quá lớn, vượt quá khả năng của máy.



Trong trường hợp đó, ta quay lại điều chỉnh biên độ của máy thì sẽ thông báo kết quả như trên.

Câu 26: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Đáp án A.

Lời giải

Cách 1: u_n là tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có $u_1=\frac{1}{2}$ và $q=-\frac{1}{2}$.

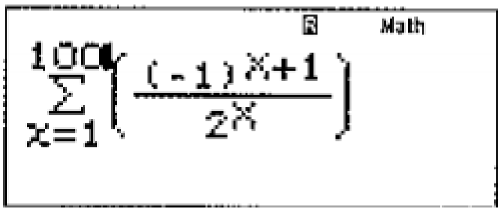
Do đó $u_n=\frac{1}{2}.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra $\lim u_n=\lim\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{3}$.

Cách 2: $\lim u_n=\lim\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}+...$

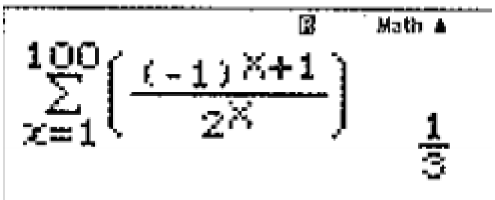
Vậy $\lim u_n$ bằng tổng của một cấp số nhân lui vô hạn với $u_1=\frac{1}{2}$ và $q=-\frac{1}{2}$.

Do đó $\lim u_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}$.

Cách 3: Sử dụng MTCT. Nhập vào như màn hình sau.



Ấn phím $\boxed{=}$, máy hiển thị kết quả bằng $\frac{1}{3}$



Do đó chọn đáp án A.

Nhận xét: Rõ ràng, nếu thuộc công thức thì bài toán này giải thông thường sẽ nhanh hơn MTCT!

STUDY TIP

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q là:

$$S_n = u_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Câu 27: Tính $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Đáp án C.

Lời giải

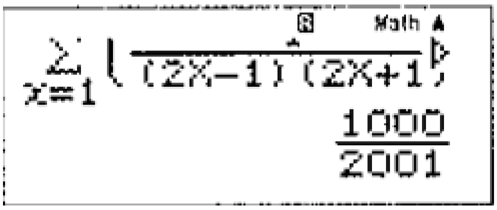
Cách 1: Ta có:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

Vậy $\lim\left[\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT.

Nhập vào màn hình biểu thức $\sum_{X=1}^{100}\left(\frac{1}{(2X-1)\times(2X+1)}\right)$, bấm dấu $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như màn hình sau.



Vậy chọn đáp án C.

Tổng quát, ta có:

$$\lim\left[\frac{1}{k(k+d)}+\frac{1}{(k+d)(k+2d)}+...+\frac{1}{(k+(n-1)d)(k+nd)}\right]=\frac{1}{d.k}.$$

Chẳng hạn trong ví dụ trên thì $k=1$ và $d=2$. Do đó giới hạn là $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$.

Kinh nghiệm cho thấy nhiều bạn quên mất d khi tính toán dãy có giới hạn như trên.

Câu 28: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1+2+...+n}{n^2+1}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n = 0$. **B.** $\lim u_n = \frac{1}{2}$. **C.** $\lim u_n = 1$. **D.** Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

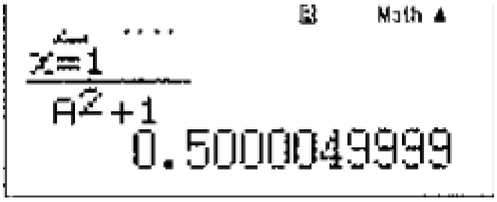
Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Ta có: $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Suy ra $\frac{1+2+...+n}{n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$.

Do đó $\lim u_n = \lim \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} = \frac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Gán 10^5 cho biến A. Nhập vào màn hình biểu thức $\frac{\sum_{X=1}^{A}(X)}{A^2+1}$, bấm dấu $\boxed{=}$. Máy hiển thị kết quả như sau.



Do đó chọn đáp án B.

Lưu ý: Tổng $1+2+...+n$ trong ví dụ trên là một tổng dạng quen thuộc. Đó chính là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$. Do đó nếu không thuộc công thức $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, ta có thể sử dụng công thức tính tổng của một cấp số cộng để tính tổng đó.

Để làm tốt các dạng bài tập trên, cần nhớ một số tổng quen thuộc sau:

a) $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3+2^3+...+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

STUDY TIP

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng: $S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2}$; $S_n = \frac{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}{2}$.

Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}$

Câu 29: $\lim \frac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3}$ bằng:

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Tử thức là tổng của *n* số hạng đầu tiên của cấp số cộng (u_n) với $n=1$, $u_n=4n-3$ và công bội $d=4$.

Do đó $1+5+9+...+4n-3=\frac{n(1+4n-3)}{2}=\frac{n(4n-2)}{2}$.

Tương tự ta có: $2+7+12+...+5\text{n}-3=\frac{n(2+5n-3)}{2}=\frac{n(5n-1)}{2}$.

Vậy $\lim \frac{1+5+9+...+4n-3}{2+7+12+...+5n-3}=\lim \frac{n(4n-2)}{n(5n-1)}=\frac{4}{5}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình $\frac{\sum_{X=1}^{1000}(4X-3)}{\sum_{X=1}^{1000}(5X-3)}$, bấm phím, $\boxed{=}$ ta thấy kết quả bằng $\frac{3998}{4999}\left(\approx \frac{4}{5}\right)$. Vậy chọn đáp án **A.**

Studytip:

Nếu tử thức là tổng của *n+i* số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai *d*, mẫu thức là tổng của *n+k* số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai d' thì phân thức có giới hạn là $\frac{d'}{d}$ $(i,k\in\mathbb{Z})$.

Câu 30: $\lim \frac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n}$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1: Ta có tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $q=3$.

Do đó $3+3^2+3^3+...+3^n=3.\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{3}{2}(3^n-1)$.

Mẫu thức là tổng của *n+1* số hạng đầu tiên của cấp số nhân (v_n) với $v_n=1$ và $q=2$. Do đó $1+2+2^2+...+2^n=2.\frac{2^{n+1}-1}{2-1}=2.(2^{n+1}-1)$.

Vậy $\lim \dfrac{3+3^2+3^3+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n} = \lim \dfrac{3}{4}.\dfrac{3^n-1}{2^{n+1}-1} = \dfrac{3}{4}\lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n} = +\infty.$

Cách 2: Nhập vào màn hình $\dfrac{\sum\limits_{X=1}^{20} 3^X}{\sum\limits_{X=1}^{1000} 2^{X-1}}$, bấm phím, $\boxed{=}$ ta thấy kết quả hiển thị trên màn hình là 2493,943736.

Do đó chọn đáp án **A.**

Bổ sung: ***(Định lí kẹp)***

Xét ba dãy số (u_n), (v_n), (w_n). Giả sử với mọi n ta có $u_n \le v_n \le w_n$. Khi đó nếu có $\lim u_n = \lim w_n = L$ thì $\lim v_n = L.$

Studytip:

Nếu tử thức là tổng của $n+i$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q>1$, mẫu thức là tổng của $n+k$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q^{'}>1$ thì:

- Phân thức có giới hạn là $+\infty$ nếu $q>q^{'}$;
- Phân thức có giới hạn là 0 nếu $q<q^{'}$.

Câu 31: $\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$ bằng

A. **0.** **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $+\infty$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $\dfrac{1+2+...+n}{n^2+n} \le \dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n} \le \dfrac{1+2+...+n}{n^2+1}$.

Mà $\lim\dfrac{1+2+...+n}{n^2+n} = \lim\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+n} = \dfrac{1}{2}$; $\lim\dfrac{1+2+...+n}{n^2+1} = \lim\dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n^2+1} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\lim\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+...+\dfrac{n}{n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Gán 10^3 cho A. Nhập vào màn hình $\sum\limits_{X=2}^{A}\dfrac{X}{A^2+X}$, bấm phím $\boxed{=}$

Kết quả hiển thị 0.5001664168. Vậy chọn đáp án B.

Ta thấy rằng trong trường hợp không thuộc công thức, sử dụng máy tính cầm tay là một giải pháp hiệu quả. Tuy nhiên nếu rèn luyện nhiều, cọ xát nhiều dạng bài tập thì có thể sử dụng MTCT sẽ cho kết quả chậm hơn là tính toán thông thường.

C. BÀI TẬP RÈN LUYỆN KỸ NĂNG

DẠNG 1. BÀI TẬP LÝ THUYẾT.

Câu 1: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = 0$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 2: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể bé hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = +\infty$ nếu $|u_n|$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 3: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

B. $\lim u_n = a$ nếu $u_n - a$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

C. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

D. $\lim u_n = a$ nếu $|u_n - a|$ có thể lớn hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Câu 4: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = 0$ nếu $q > 1$.
B. $\lim q^n = 0$ nếu $q < 1$.
C. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| > 1$.
D. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$.

Câu 5: Chọn khẳng định đúng.

A. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.
C. $\lim q^n = +\infty$ nếu $q < 1$.
B. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| > 1$.
D. $\lim q^n = +\infty$ nếu $|q| < 1$

Câu 6: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào sai?

A. Nếu $|q| \le 1$ thì $\lim q^n = 0$.

B. Nếu $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ thì $\lim(u_n v_n) = ab$.

C. Với k là số nguyên dương thì $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$.

D. Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim(u_n v_n) = +\infty$.

Câu 7: Biết $\lim u_n = 3$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 3$.
C. $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 2$.
B. $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = -1$.
D. $\lim \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} = 1$.

Câu 8: Biết $\lim u_n = +\infty$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \dfrac{1}{3}$.
C. $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = 0$.
B. $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = \dfrac{1}{5}$.
D. $\lim \dfrac{u_n + 1}{3u_n^2 + 5} = +\infty$.

DẠNG 2. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC.

Câu 9: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn?

A. $(\sin n)$. **B.** $(\cos n)$. **C.** $((-1)^n)$. **D.** $(\frac{1}{2})$.

Câu 10: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn khác 0?

A. $((0,98)^n)$. **C.** $((-0,99)^n)$. **B.** $((0,99)^n)$. **D.** $((1,02)^n)$.

Câu 11: Biết dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n-1|<\frac{1}{n^3}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=1$. **B.** $\lim u_n=0$.

C. $\lim u_n=-1$. **D.** Không đủ cơ sở để kết luận về giới hạn của dãy số (u_n).

Câu 12: Giới hạn nào dưới đây bằng $+\infty$?

A. $\lim(3n^2-n^3)$. **C.** $\lim(3n^2-n)$. **B.** $\lim(n^2-4n^3)$. **D.** $\lim(3n^3-n^4)$.

Câu 13: $\lim\frac{(2n-1)^2(n-1)}{(n^2+1)(2n+1)}$ bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 14: Trong bốn giới hạn sau đây, giới hạn nào là $+\infty$?

A. $\lim\frac{n^2+3n^3+2}{n^2+n}$. **C.** $\lim\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$. **B.** $\lim\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$. **D.** $\lim\frac{n^2-n+1}{1-2n}$.

Câu 15: Trong các giới hạn hữu hạn sau, giới hạn nào có giá trị khác với các giới hạn còn lại

A. $\lim(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1})$. **C.** $\lim\frac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}$. **B.** $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{5^n}$. **D.** $\lim\frac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}$.

Câu 16: Để tính $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})$, bạn Nam đã tiến hành các bước như sau:

Bước 1: $\lim(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})=\lim(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n}})$.

Bước 2: $\lim(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}-n\sqrt{1-\frac{1}{n}})=\lim n(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})$.

Bước 3: Ta có $\lim n=+\infty$; $\lim(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})=0$.

Bước 4: Vậy $\lim(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})=0$.

Hỏi bạn Nam đã làm **sai** từ bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 17: $\lim(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1})$ bằng?

A. 1. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 18: $\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}$ bằng?

A. 0. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 19: $\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}}$ bằng?

A. 0. **B.** -2. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Câu 20: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là hữu hạn?

A. $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n$.

C. $\lim(\sqrt{n^2+n+2}-\sqrt{n+1})$.

B. $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$.

D. $\lim(\sqrt{n^2+n+1}-n)$.

Câu 21: Trong các giới hạn sau, giới hạn nào là **không** hữu hạn?

A. $\lim\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}}$.

C. $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}$.

B. $\lim(\sqrt[3]{1+n^3}-n)$.

D. $\lim(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n)$.

Câu 22: Biết $\lim\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{m}{n}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản, m và n là các số nguyên dương. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $m.n=10$. **C.** $m.n=15$. **B.** $m.n=14$. **D.** $m.n=21$.

Câu 23: Tìm $\lim\dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n(3^{n+1}-5)}$:

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN.

Câu 24: Cấp số nhân lùi vô hạn $1,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},...,(-\dfrac{1}{2})^{n-1},...$ có tổng là một phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$. Tính $m+2n$.

A. $m+2n=8$. **C.** $m+2n=7$. **B.** $m+2n=4$. **D.** $m+2n=5$.

Câu 25: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,27323232...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\dfrac{m}{n}$ (m,n là các số nguyên dương). Hỏi m gần với số nào nhất trong các số dưới đây?

A. 542. **B.** 543. **C.** 544. **D.** 545.

Câu 26: Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn là 2, tổng của 3 số hạn đầu tiên của nó là $\dfrac{9}{4}$. Số hạn đầu của cấp số nhân đó là?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

Câu 27: Phương trình $2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+...=\dfrac{5}{4}$, trong đó $|x|<1$, có tập nghiệm là:

A. $S=\left\{\dfrac{-7\pm\sqrt{97}}{24}\right\}$. **C.** $S=\left\{\dfrac{-3\pm\sqrt{41}}{16}\right\}$. **B.** $S=\left\{\dfrac{-7+\sqrt{97}}{24}\right\}$. **D.** $S=\left\{\dfrac{-3+\sqrt{41}}{16}\right\}$.

Câu 28: Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$; dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,…

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $2a^2\sqrt{3}$.

DẠNG 4. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI.

Câu 29: Cho số thực a và dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = a$ và $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n).

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 30: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 3, 2u_{n+1} = u_n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Gọi S_n là tổng n số hạng đầu tiên của dãy số (u_n). Tìm $\lim S_n$.

A. $\lim S_n = +\infty$. **C.** $\lim S_n = 1$. **B.** $\lim S_n = -\infty$. **D.** $\lim S_n = -1$.

Câu 31: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $+\infty$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 32: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = \frac{1}{4}, u_{n+1} = u_n^2 + \frac{u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$. Tìm $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = \frac{1}{4}$. **C.** $\lim u_n = \frac{1}{2}$. **B.** $\lim u_n = 0$. **D.** $\lim u_n = +\infty$.

Câu 33: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ bằng.

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

DẠNG 5. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ.

Câu 34: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a, u_2 = b, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ với mọi $n \geq 1$, trong đó a và b là các số thực cho trước, $a \leq b$. Tìm giới hạn của (u_n).

A. $\lim u_n = a$. **C.** $\lim u_n = \frac{a+2b}{3}$. **B.** $\lim u_n = b$. **D.** $\lim u_n = \frac{2a+b}{3}$.

Câu 35: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n - m}{5n + 2}$, trong đó m là tham số. Để dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn thì:

A. m là số thực bất kỳ.
B. m nhận giá trị duy nhất bằng 3.
C. m nhận giá trị duy nhất bằng 5.
D. Không tồn tại số m.

Câu 36: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{4n^2 + n + 2}{an^2 + 5}$, trong đó a là tham số. Để (u_n) có giới hạn bằng 2 thì giá trị của tham số a là?

A. -4. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực a để dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{2n^2 + n} - a\sqrt{2n^2 - n}$ có giới hạn hữu hạn.

A. $a \in \mathbb{R}$. **C.** $a \in (1; +\infty)$. **B.** $a \in (-\infty; 1)$. **D.** $a = 1$.

Câu 38: Tìm hệ thức liên hệ giữa các số thực dương a và b để: $\lim(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3})=2$.

A. $a+b=2$. **B.** $a-b=2$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a-b=4$.

Câu 39: Tìm số thực a để $\lim\dfrac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-2}}{5n+2}=2$.

A. $a=10$. **B.** $a=100$. **C.** $a=14$. **D.** $a=144$.

Câu 40: Tìm số thực a để $\lim(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5})=6$.

A. $a=2$. **B.** $a=4$. **C.** $a=6$. **D.** $a=8$.

Câu 41: Tìm các số thực a và b sao cho $\lim(\sqrt[3]{1-n^3}-\mathrm{a}\,n-b)=0$.

A. $\begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$.

DẠNG 6. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG CỦA N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC.

Câu 42: $\lim\dfrac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Câu 43: $\lim\dfrac{1+2+2^2+...+2^n}{1+5+5^2+...+5^n}$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{5}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 44: Tìm $\lim\left[(1-\dfrac{1}{2^2})(1-\dfrac{1}{3^2})...(1-\dfrac{1}{n^2})\right]$ ta được:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 45: $\lim\dfrac{n!}{(1+1^2).(1+2^2)...(1+n^2)}$ bằng:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 46: Cho dãy số (u_n). Biết $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=\dfrac{3n^2+9n}{2}$ với mọi $n\geq 1$. Tìm $\dfrac{1}{nu_n}\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 47: $\lim\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{17}{100}$. **C.** $\dfrac{17}{200}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

D. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

DẠNG 1. BÀI TẬP LÍ THUYẾT.

Câu 1: **Đáp án A.**
Xem lại định nghĩa dãy số có giới hạn 0.

Câu 2: **Đáp án B.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn $+\infty$.

Câu 3: **Đáp án C.**
Xem lại định nghĩa dãy có giới hạn hữu hạn.

Câu 4: **Đáp án D.**
Xem lại định lí 4.2.

Câu 5: **Đáp án A.**
Xem lại kết quả về dãy số có giới hạn $+\infty$.

Câu 6: **Đáp án A.**
Nếu $q=1$ thì $\lim q^n=\lim 1=1\neq 0$.

Câu 7: **Đáp án C.**
Ta có : $\lim\dfrac{3u_n-1}{u_n+1}=\dfrac{3\lim u_n-1}{\lim u_n+1}=\dfrac{3.3-1}{3+1}=\dfrac{8}{4}=2$.

Câu 8: **Đáp án C.**
Ta có : $\dfrac{u_n+1}{3u_n^2+5}=\dfrac{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_n^2}}{3+\dfrac{5}{u_n^2}}$. Vì $\lim u_n=+\infty$ nên $\lim\dfrac{1}{u_n}=0$, $\lim\dfrac{1}{u_n^2}=0$.

Vậy $\lim\dfrac{u_n+1}{3u_n^2+5}=\dfrac{0+0}{3+0}=\dfrac{0}{3}=0$.

DẠNG 2. BÀI TẬP TÍNH GIỚI HẠN DÃY SỐ CHO BỞI CÔNG THỨC.

Câu 9: **Đáp án D.**
Ta có : $\lim s_n=\lim\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Bổ sung :

a) Ta chứng minh dãy số $(\sin n)$ không có giới hạn. Thật vậy, vì $|\sin n|\le 1$ nên nếu dãy số $(\sin n)$ có giới hạn thì giới hạn đó hữu hạn.

Giả sử $\lim\sin n=L$. Suy ra $\lim\sin(n+2)=L$.

Do đó : $0=\lim\left[\sin(n+2)-\sin n\right]=2\sin 1.\lim\cos(n+1)$

$\Rightarrow\lim\cos(n+1)=0\Rightarrow\lim\cos n=0\Rightarrow\lim\cos(n+2)=0$

$\Rightarrow 0=\lim\left[\cos(n+2)-\cos n\right]=-2\sin 1.\sin(n+1)$

$\Rightarrow\sin(n+1)=0$. Vậy ta có : $1=\lim\left(\sin^2(n+1)+\cos^2(n+1)\right)=0+0=0$ (vô lý). Suy ra đpcm.

b) Chứng minh tương tự, ta có dãy số $(\cos n)$ không có giới hạn.

c) Ta chứng minh dãy số $\left((-1)^n\right)$ không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, trên trục số, các số hạng của dãy số đó được biểu diễn bởi hai điểm -1 và 1. Khi n tăng lên, các điểm

Câu 10: **Đáp án D**
Vì $1,02>1$ nên $\lim(1,02)^n=+\infty$. (Các dãy số còn lại đều có $|q|<1$ nên đều có giới hạn bằng 0).

Câu 11: **Đáp án A.**

Vì $\lim \frac{1}{n^3}=0$ nên $\lim|u_n-1|=0$. Suy ra : $\lim u_n=1$.

Câu 12: **Đáp án C.**

Vì $3n^2-n$ có $a_2=3>0$ nên $\lim(3n^2-n)=+\infty$.

(Số hạng tổng quát của các dãy còn lại có hệ số của lũy thừa bậc cao nhất là số âm nên giới hạn của các dãy đó đều bằng $-\infty$.)

Câu 13: **Đáp án B.**

Bậc của tử và mẫu thức đều bằng 3 nên dãy có giới hạn hữu hạn. Hệ số của n^3 trên tử bằng $2^2.1=4$, hệ số của n^3 dưới mẫu bằng $1.2=2$ nên giới hạn là $\frac{4}{2}=2$.

Câu 14: **Đáp án A.**

Phân thức $\frac{n^2+3n^3+2}{n^2+n}$ có bậc của tử thức cao hơn bậc của mẫu thức, đồng thời hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử thức và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của mẫu thức đều dương nên suy ra giới hạn của dãy số tương ứng bằng $+\infty$.

(Phân thức $\frac{n^3+2n-1}{n-2n^3}$ có bậc tử bằng bậc mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $\frac{-1}{2}$. Phân thức $\frac{2n^2-3n}{n^3+3n}$ có bậc của tử thấp hơn bậc của mẫu nên giới hạn dãy số tương ứng bằng 0. Phân thức $\frac{n^2-n+1}{1-2n}$ có bậc tử lớn hơn bậc mẫu nhưng hệ số của lũy thừa bậc cao nhất trên tử và hệ số của lũy thừa bậc cao nhất dưới mẫu trái dấu nhau nên giới hạn dãy số tương ứng bằng $-\infty$.)

Câu 15: **Đáp án D.**

+ Nhận xét : $\left|\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right|\le\frac{n^2}{n^3+1}$ mà $\lim\frac{n^2}{n^3+1}=0$ nên $\lim\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}=0$.

Do đó : $\lim\left(1+\frac{n^2\sin 3n}{n^3+1}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\cos 5n}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$ mà $\lim\frac{1}{2^n}=0$ nên $\lim\frac{\cos 5n}{2^n}=0$.

Do đó : $\lim\frac{2^n-\cos 5n}{2^n}=\lim\left(1-\frac{\cos 5n}{2^n}\right)=1$.

+ $\left|\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right|\le\frac{1}{n^2+5}$ mà $\lim\frac{1}{n^2+5}=0$ nên $\lim\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}=0$.

Do đó : $\lim\frac{n^2+\sin^2 3n}{n^2+5}=\lim\left(\frac{n^2}{n^2+5}+\frac{\sin^2 3n}{n^2+5}\right)=1$

Vậy ba giới hạn đầu đều có kết quả bằng 1 nên đáp án cần chọn là đáp án D.

($\left|\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right|\le\frac{1}{3^{n+1}}$ mà $\lim\frac{1}{3^{n+1}}=0$ nên $\lim\frac{\cos n}{3^{n+1}}=0$.

Do đó : $\lim\frac{3^n+\cos n}{3^{n+1}}=\lim\left(\frac{3^n}{3^{n+1}}+\frac{\cos n}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{3}$.)

Câu 16: **Đáp án D.**

Vì $\lim n=+\infty$, $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)=0$ nên không thể áp dụng quy tắc 2. Do đó Nam đã sai ở bước 4. (Quy tắc 2 áp dụng khi $\lim u_n=\pm\infty$ và $\lim v_n=L\ne 0$.)

Câu 17: **Đáp án D.**

Vì hai căn thức $\sqrt{3n-1}$ và $\sqrt{2n-1}$ đều chứa nhị thức dưới dấu căn mà hệ số của n lại khác nhau nên giới hạn cần tìm bằng $+\infty$ (do $3>2$).

Thật vậy, ta có : $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)$.

Vì $\lim\sqrt{n}=+\infty$ và $\lim\left(\sqrt{3-\frac{1}{n}}-\sqrt{2-\frac{1}{n}}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ nên $\lim\left(\sqrt{3n-1}-\sqrt{2n-1}\right)=+\infty$.

Hoặc độc giả có thể sử dụng MTVT để kiểm tra kết quả trên.

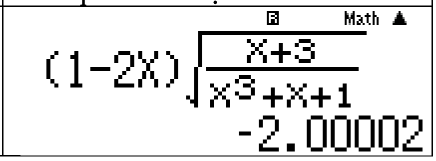
Câu 18: **Đáp án B.**

Ta thấy tử thức có bậc bằng 1, mẫu thức có bậc cũng bằng 1. Mà hệ số của n trên tử thức bằng 1, hệ số của n dưới mẫu thức bằng 3 nên giới hạn cần tìm bằng $\frac{1}{3}$. Thật vậy ta có :

$\lim\frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n+1}}{3n+2}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}$ hoặc độc giả có thể sử dụng MTCT để kiểm tra kết quả trên.

Câu 19: **Đáp án B.**

Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình như sau :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
(1p2Q))saQ)+3RQ)^3$+Q)+1r10^5=	

Do đó đáp án đúng là đáp án B.

Hoặc ta làm như sau :

$\lim(1-2n)\sqrt{\frac{n+3}{n^3+n+1}}=\lim\left(\frac{1}{n}-2\right)\sqrt{\frac{n^3+3n^2}{n^3+n+1}}=(-2).1=-2$.

Câu 20: **Đáp án D.**

Nếu sử dụng MTCT, ta sẽ phải tính toán nhiều giới hạn. Tuy nhiên, nếu có kinh nghiệm, ta sẽ thấy ngay đáp án D. Thật vậy, theo kết quả đã biết ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$ là hữu hạn. Hoặc ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác : $\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)=\lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{2}$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, C xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 21: **Đáp án C.**

Lập luận như các bài toán trên, ta thấy ba giới hạn trong A, B, D đều hữu hạn. Vậy đáp án là C.

Lưu ý : $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\left(n-\sqrt[3]{n^3-n^2}\right)$.

Ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra lại kết quả.

Lời giải chính xác :

Ta có : $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1}$. Mà : $\lim\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}=1$; $\lim\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1=0$ và $\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{n^2}}-1>0\ \forall n$ nên $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-n}=+\infty$.

Việc tìm các giới hạn trong A, B, D xin dành lại cho độc giả rèn luyện thêm.

Câu 22: Đáp án B.

Với các bài toán dạng này, việc sử dụng MTCT là khá mất thời gian. Ta thấy tử thức và mẫu thức đều có bậc bằng 1. Mặt khác cả tử thức và mẫu thức đều có giới hạn vô cực. Do đó ta chia tử và mẫu cho n để được : $\lim\dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}-n}=\lim\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{4}{n}}-\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}-1}=\dfrac{-1}{\sqrt{3}-1}$.

Ta có : $\dfrac{-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}=\dfrac{6-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{7}{2}$. Vậy $m=7,n=2$ nên $m.n=14$.

Câu 23: Đáp án D.

Ta có : $\dfrac{1-2.3^n+6^n}{2^n\left(3^{n+1}-5\right)}=\dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}$. Từ đó dễ thấy $\lim\dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}=\dfrac{1}{3}$.

Thật vậy, $\lim\dfrac{1-2.3^n+6^n}{3.6^n-5.2^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}\right)^n-2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+1}{3-5.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=\dfrac{1}{3}$.

DẠNG 3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN.

Câu 24: Đáp án A.

Cấp số nhân lùi vô hạn đã cho có : $u_1=1$ và $q=-\dfrac{1}{2}$. Do đó tổng của cấp số nhân đó là :

$S=\dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{2}{3}$. Suy ra : $m=2,n=3$. Vậy $m+2n=2+2.3=8$.

Câu 25: Đáp án A

Ta có $0,27323232...=\dfrac{27}{100}+\dfrac{32}{9900}=\dfrac{541}{1980}$.

Hoặc sử dụng MTCT theo hai cách đã trình bày ở phần ví dụ ta được kết quả như sau :

Qui trình bấm máy	Kết quả
0.27323232323232=	Math ▲ 0.27323232323232 $\dfrac{541}{1980}$
0.27Qs32=	Math ▲ 0.27(32) $\dfrac{541}{1980}$

Vậy $m=541$, do đó chọn đáp án A.

Câu 26: Đáp án C.

Ta có : $\frac{u_1}{1-q}=2\Rightarrow u_1=2(1-q)$ (1) mà : $u_1+u_2+u_3=\frac{9}{4}\Rightarrow u_1.\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được : $2(1-q).\frac{1-q^3}{1-q}=\frac{9}{4}\Rightarrow 1-q^3=\frac{9}{8}\Rightarrow q^3=-\frac{1}{8}\Rightarrow q=-\frac{1}{2}$.

Vậy $u_1=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$.

Câu 27: Đáp án A.

Ta có : $2x+1+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}$. Vì $|x|<1$ nên $1-x+x^2-x^3+...$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1=1$ và $q=-x$. Do đó ta có :

$3x+1-x+x^2-x^3+...=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 3x+\frac{1}{1+x}=\frac{5}{4}\Leftrightarrow 12x^2+7x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{24}$ (t/m $|x|<1$).

Câu 28: Đáp án C.

Đường cao của tam giác đều cạnh a là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích của tam giác đều cạnh a là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng $a\Rightarrow$ tam giác $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ tam giác $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\Rightarrow ...\Rightarrow$ tam giác $A_nB_nC_n$ có cạnh bằng $a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$.

Và $S_{A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, $S_{A_2B_2C_2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{3}{4}$, $S_{A_3B_3C_3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^2$, …, $S_{A_nB_nC_n}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Như vậy (S_n) là một CSN lùi vô hạn với $q=\frac{3}{4}$. Vậy $S_1+S_2+...=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1-\frac{3}{4}}=\sqrt{3}a^2$.

DẠNG 4. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CHO BỞI HỆ THỨC TRUY HỒI.

Câu 29: Đáp án D.

Ta thấy các đáp án chỉ là các giới hạn hữu hạn nên chứng tỏ dãy đã cho có giới hạn hữu hạn. Gọi giới hạn đó là L. Ta có : $L=1+\frac{L}{2}\Rightarrow L=2$. Hoặc theo kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, giới hạn của dãy đã cho bằng $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\left(r=\frac{1}{2},s=1\right)$.

Câu 30: Đáp án B.

Cách 1 : Ta có $2u_{n+1}=u_n+1\Leftrightarrow u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}$. Đặt $v_n=u_n-1$.

Khi đó : $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}(u_n-1)=\frac{1}{2}v_n$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}$. Gọi T_n là tổng n số hạng đầu tiên của (v_n).

Ta có : $T_n=v_1.\frac{1-q^n}{1-q}=v_1.\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$. Suy ra : $S_n=T_n+n=2v_1.\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)+n$.

Vậy $\lim S_n=+\infty$.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình : $A = A + X : Y = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2} : X = Y$.

Bấm r, máy hỏi A? nhập 0, máy hỏi X? nhập 3, máy hỏi Y? Nhập 0, bấm =

liên tiếp ta thấy giá trị của A ngày một tăng cao. Vậy chọn đáp án B.

Câu 31: **Đáp án C.**

Sử dụng MTCT.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr1=2========== ==================================== ==================================== ==================================== ====	Math ▲Disp C=$\frac{A+B}{2}$ 1.666666667

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $1,(6)$ ta được $1,66666667 = \frac{5}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{5}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ với $\forall n \ge 1$,

trong đó a, b là các số thực cho trước , $a \le b$. Người ta chứng minh được rằng $\lim u_n = \frac{a+2b}{3}$.

Câu 32: **Đáp án B.**

Giả sử dãy có giới hạn hữu hạn L. Khi đó ta có : $L = L^2 + \frac{L}{2} \Rightarrow 2L^2 = L \Rightarrow \left[\begin{array}{l} L = 0 \\ L = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Tuy nhiên đến đây ta không còn căn cứ để kết luận $L = 0$ hay $L = \frac{1}{2}$.

Ta sử dụng MTCT tương tự như bài tập trên thì thấy rằng giới hạn của dãy số là 0. Vậy chọn đáp án B.

$$\boxed{\begin{array}{l} Y = X^2 + \frac{X}{2} \\ \qquad\qquad 1,706192802.10^{-9} \end{array}}$$

Câu 33: **Đáp án C.**

Cách 1: Ta có

$u_1 = 1^2$; $u_2 = 1 + 2.1 + 1 = 2^2$; $u_3 = 2^2 + 2.2 + 1 = 9 = 3^2$;...

Dự đoán $u_n = n^2$. Khi đó $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = (n+1)^2$. Vậy $u_n = n^2\ \forall n \ge 1$.

Suy ra $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$. Do đó chọn đáp án C.

Cách 2 : Sử dụng MTCT. Nhập vào màn hình.

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QnQrQ)+2Qz+1QyaQnRQ)$QyQ)QrQnQyQzQrQz+1r1=1= ==================	Math ▲Disp $\frac{Y}{X}$ $\frac{25}{16}$

Bấm r, máy hỏi X? nhập 1, máy hỏi A? nhập bấm = liên tiếp, theo dõi giá trị của $\frac{Y}{X}$, ta thấy giá trị đó dần về 1. Vậy chọn đáp án C.

Nhận xét : Ở bài này sẽ phải bấm phím = liên tiếp khá nhiều lần, do khi n chưa đủ lớn thì chênh lệch giữa $(n+1)^2$ và n^2 là khá xa nên giá trị của $\frac{(n+1)^2}{n^2}$ khá xa so với 1.

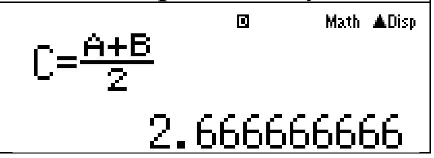
DẠNG 5. TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ CÓ CHỨA THAM SỐ.

Câu 34: **Đáp án C.**

Đây là một bài toán chứa tham số.
Vì là bài toán trắc nghiệm nên có một cách là cho a và b các giá trị cụ thể, rồi sử dụng MTCT để tìm giới hạn, từ đó tìm được đáp án đúng.

Chẳng hạn cho $a=2, b=3$. Khi đó $\frac{a+2b}{3}=\frac{8}{3}$, $\frac{2a+b}{3}=7$ và $a, b, \frac{a+2b}{3}, \frac{2a+b}{3}$ đôi một khác nhau.

Nhập vào màn hình :

Qui trình bấm máy	Kết quả thu được
QcQraQz+QxR2$QyQzQrQxQyQxQrQcr2=3========== === === ===	

Dùng cách tìm dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $2,(6)$, ta được $2,(6)=\frac{8}{3}$.

Vậy giới hạn của dãy số trong trường hợp này bằng $\frac{8}{3}$. Do đó chọn đáp án C.

Bổ sung : Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1=a, u_2=b, u_{n+2}=\frac{u_{n+1}+u_n}{2}$ $\forall n\ge 1$, trong đó a, b là các số thực cho trước, $a\le b$.

a) Chứng minh dãy (u_{2n}) là dãy giảm, còn dãy (u_{2n+1}) là dãy tăng.

b) Chứng minh rằng $|x_{n+2}-x_{n+1}|=\frac{|x_2-x_1|}{2^n}$ $\forall n\ge 1$.

c) Chứng minh rằng $2x_{n+2}+x_{n+1}=2x_2+x_1$ $\forall n\ge 1$.

d) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là $\frac{a+2b}{3}$.

Việc chứng minh bài toán trên xin dành cho độc giả.

Câu 35: **Đáp án A.**

Dễ thấy $\lim u_n=\lim\frac{3n-m}{5n+1}=\frac{3}{5}$ với mọi m.

Câu 36: **Đáp án B.**

Dễ thấy với $a=2$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{2n^2+5}=2$.

Thật vậy :

Nếu $a=0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{5}=+\infty$.

Nếu $a\ne 0$ thì $\lim u_n=\lim\frac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\frac{4}{a}$.

Do đó để $\lim u_n=2$ thì $\frac{4}{a}=2\Leftrightarrow a=2$.

Câu 37: **Đáp án D.**

Với kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy để $\left(u_n\right)$ có giới hạn hữu hạn thì $a=1$.

Câu 38: **Đáp án D.**

Từ kết quả đã trình bày trong phần ví dụ, ta thấy cần phải nhân chia với biểu thức liên hợp. Ta có :

$$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}=\frac{(a-b)n+2}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+bn+3}}=\frac{a-b+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}+\frac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}+\frac{3}{n^2}}}.$$

Suy ra $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=\frac{a-b}{2}$. Do đó để $\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+bn+3}\right)=2$

$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2}=2 \Leftrightarrow a-b=4$.

Câu 39: **Đáp án B.**

Ta có : $\lim\frac{\sqrt{an^2+1}-\sqrt{4n-1}}{5n+2}=\frac{\sqrt{a}}{5}$. Do đó ta phải có $\sqrt{a}=10 \Leftrightarrow a=100$.

Câu 40: **Đáp án C.**

Ta có $\lim\left(2n+a-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=6 \Leftrightarrow 6-a=\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)$ mà $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5}\right)=0$. Do đó $6-a=0 \Leftrightarrow a=6$.

Câu 41: **Đáp án A.**

Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right)=0 \Leftrightarrow b=\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$. Để $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an\right)$ hữu hạn thì $a>0$(xem lại phần ví dụ).

phần Ví dụ). Ta có $\lim\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=0$. Vậy $b=0$. Do đó đáp án là A.

DẠNG 6. TÌM SỐ HẠNG CỦA DÃY SỐ MÀ SỐ HẠNG TỔNG QUÁT LÀ TỔNG N SỐ HẠNG ĐẦU TIÊN CỦA MỘT DÃY SỐ KHÁC.

Câu 42: **Đáp án A.**

Lời giải

Theo kết quả đã trình bày trong phần Ví dụ thì $\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\frac{1}{2}$ do tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 1, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có công sai bằng 2.

Tuy nhiên, ta có thể giải nhanh chóng như sau:

$$\lim\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}=\lim\frac{1+2+3+...+\text{n}}{2(1+2+3+...+n)}=\frac{1}{2}.$$

Câu 43: **Đáp án A.**

Lời giải

Ta thấy tử thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 2, mẫu thức là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội bằng 5. Mà $2<5$ nên theo kết quả trình bày trong phần Ví dụ, giới hạn cần tìm là 0.

Câu 44: **Đáp án B.**

Lời giải

Ta có:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\times\frac{3^2-1}{3^2}\times...\times\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\frac{1.3}{2^2}\times\frac{2.4}{3^2}\times\frac{3.5}{4^2}\times...\times\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}.$$

Vậy $\lim\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]=\lim\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$

Câu 45: Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}\le\frac{n!}{1^2\times2^2\times...\times n^2}=\frac{n!}{(1\times2\times...\times n)^2}=\frac{n!}{(n!)^2}=\frac{1}{n!}.$$

Mà $\lim\frac{1}{n!}=0$ nên suy ra: $\lim\frac{n!}{(1+1^2)\times(1+2^2)\times...\times(1+n^2)}=0.$

Câu 46: Đáp án B.

Lời giải

Ta có:

$$u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{3(n+1)^2+9(n+1)}{2}-\frac{3n^2+9n}{2}=3n+6=3(n+1)+3.$$

Suy ra $u_n=3n+3.$

Vậy $\lim\frac{1}{nu_n}\sum_{k=1}^{n}u_k=\lim\frac{3n^2+9n}{2n(3n+3)}=\frac{3}{2.3}=\frac{1}{2}.$

Câu 47: Đáp án C.

Lời giải

Ta có: $\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1+3+3^2+...+3^k}{5^{k+2}}=\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k+1}3^{i-1}}{5^{k+2}}.$

Do đó nên rất khó để sử dụng MTCT đối với bài toán này. Ta có:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=1}^{k+1}3^{i-1}}{5^{k+2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}-1}{2.5^{k+2}}=\frac{3}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k-\frac{1}{50}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k=\frac{3}{50}.\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}-\frac{1}{50}\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{17}{200}.$$

Vậy chọn đáp án C.