KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

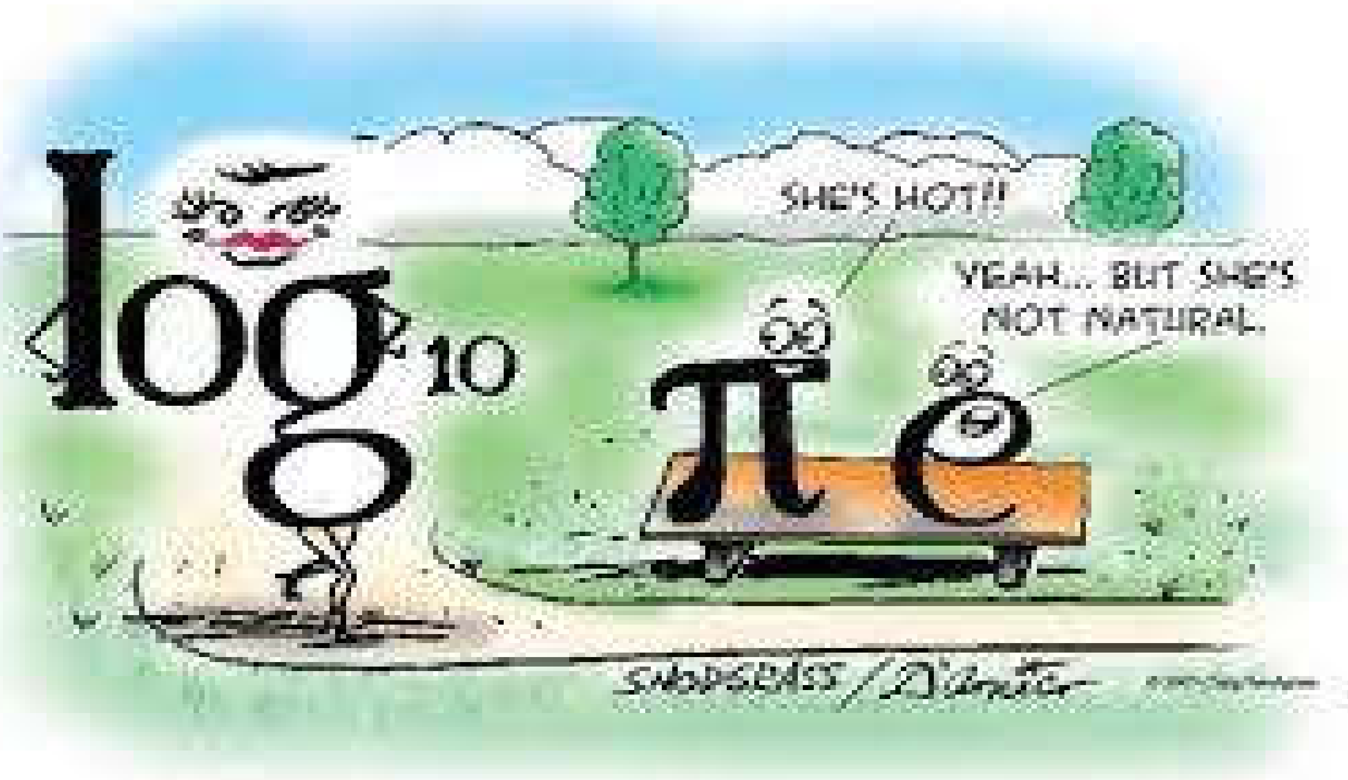
LỚP TOÁN THẦY CƯ- TP HUẾ

CS 1: Trung tâm MASTER EDUCATION- 25 THẠCH HÃN
CS 2: Trung Tâm 133 Xuân 68
CS 3: Trung tâm 168 Mai Thúc Loan
CS4: 32 Lê lợi – ĐHSP Huế

BÀI GIẢNG CHƯƠNG 6

TOÁN 11-KNTT

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGA



TÀI LIỆU DÀNH CHO HỌC SINH LỚP TOÁN THẦY CƯ-TP HUẾ

(Chiêu sinh thường xuyên, bổ trợ kiến thức kịp thời)

CHƯƠNG VI: HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGA

BÀI 18: LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

HĐ1. Nhận biết luỹ thừa với số mũ nguyên

Tính: $(1,5)^2$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; $(\sqrt{2})^4$.

Lời giải

$(1,5)^2 = 1,5 \times 1,5 = 2,25$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3} \times -\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$;

$(\sqrt{2})^4 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 = 4$

- Cho n là một số nguyên dương. Ta định nghĩa: Với a là số thực tuỳ ý:

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ thua so?}}$.

Với a là số thực khác 0 :

$a^0 = 1; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

- Trong biểu thức a^m, a gọi là cơ số, m gọi là số mũ.

Lưu ý: 0^0 và $0^{-n}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ không có nghĩa.

Luỹ thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự như luỹ thừa với số mũ nguyên dương.

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và m, n là các số nguyên, ta có:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$; $(ab)^m = a^m b^m$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$.

Chú ý

- Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m > n$.

- Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$ khi và chỉ khi $m < n$.

- Ví dụ 1: Tính giá trị của biểu thức: $A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-8} \cdot 8^{-2} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2}$

Lời giải

$$A = 2^8 \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{0,2^4} \cdot \frac{1}{25^2} = 2^8 \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{0,2^4 \cdot 5^4} = 2^2 + \frac{1}{(0,2 \cdot 5)^4} = 4 + 1 = 5.$$

Luyện tập 1: Một số dương x được gọi là viết dưới dạng kí hiệu khoa học nếu $x = a.10^m$, ở đó $1 \le a < 10$ và m là một số nguyên. Hãy viết các số liệu sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

a) Khối lượng của Trái Đất khoảng $5\ 980\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ kg;

b) Khối lượng của hạt proton khoảng $0,000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001\ 67262$ kg .

(Theo SGK Vật lí 12, Nhà Xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020)

Lời giải

a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 5.98×10^{24} kg .

b) Khối lượng của hạt proton khoảng 1.67262×10^{-27} kg .

2. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

- HĐ2. **Nhận biết khái niệm căn bậc n**

a) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^2 = 4$.   b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $x^3 = -8$.

Lời giải

a) $x = \sqrt{4} = \pm 2$;

b) $x = \sqrt[3]{-8} = -2$.

Cho số thực a và số nguyên dương n. Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét. Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n và kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$. Căn bậc 1 của số a chính là a.

Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$ (gọi là căn số học bậc n của a), giá trị âm kí hiệu là - $\sqrt{a}$.

$\sqrt[n]{0} = 0 \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$.

? Số âm có căn bậc chẵn không? Vì sao?

Ví dụ 2: a) $\sqrt[3]{-64}$;   b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.   b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{2}$.

Luyện tập 2. Tính: a) $\sqrt[3]{-125}$;   b) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$;   b) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{3}$

HĐ3. **Nhận biết tính chất của căn bậc n**

a) Tính và so sánh: $\sqrt[3]{-8}.\sqrt[3]{27}$ và $\sqrt[3]{(-8).27}$.

b) Tính và so sánh: $\dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}$ và $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}$.

Lời giải

a) $\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{27}=-2.3=-6;$ $\qquad \sqrt[3]{(-8)\cdot 27}=\sqrt[3]{-216}=-6$

$\Rightarrow \sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{(-8)\cdot 27}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=\dfrac{-2}{3};$ $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}=\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}=\dfrac{-2}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}}=\sqrt[3]{\dfrac{-8}{27}}$

Giả sử n,k là các số nguyên dương, m là số nguyên. Khi đó:

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}};$

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m};$

$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a & \text{khi } n\, le? \\ |a| & \text{khi } n \text{ chan;}\end{cases}$

$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}.$

(Giả thiết các biểu thức ở trên đều có nghĩa).

Ví dụ 3. Tính: a) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}$.

Lời giải

a) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{-8}=\sqrt[5]{4\cdot(-8)}=\sqrt[5]{-32}=\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$.

b) $\sqrt[3]{-3\sqrt{3}}=\sqrt[3]{-(\sqrt{3})^3}=\sqrt[3]{(-\sqrt{3})^3}=-\sqrt{3}$.

Luyện tập 3. Tính: a) $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{625}$; b) $\sqrt[5]{-25\sqrt{5}}$.

Lời giải

$a)$ $\sqrt[3]{5}:\sqrt[3]{625}=\sqrt[3]{\dfrac{5}{625}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{125}}=\dfrac{1}{5}$

$b)\sqrt[5]{-25\sqrt{5}}=\sqrt[5]{-\sqrt{5^4.5}}=-\sqrt{\sqrt[5]{5^5}}=-\sqrt{5}$

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r=\dfrac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương.

Luỹ thừa của a với số mũ r, kí hiệu là a^r, xác định bởi $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt{a^m}$.

? Vì sao trong định nghĩa luỹ thừa với số mũ hữu tỉ lại cần điều kiện cơ số $a>0$?

Chú ý. Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ (của một số thực dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 4. Tính: a) $16^{\frac{3}{2}}$; b) $8^{\frac{-2}{3}}$.

Lời giải

a) $16^{\frac{3}{2}}=\sqrt{16^3}=\sqrt{\left(4^2\right)^3}=\sqrt{\left(4^3\right)^2}=4^3=64$

b) $8^{\frac{-2}{3}}=\sqrt[3]{8^{-2}}=\sqrt[3]{\left(2^3\right)^{-2}}=\sqrt[3]{\left(2^{-2}\right)^3}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$.

Luyện tập 4. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}y+xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}(x,y>0)$.

Lời giải

$$A=\frac{x^{\frac{3}{2}}y+xy^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}+y}=(x+y)\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

3. LUỸ THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

a) Khái niệm luỹ thừa với số mũ thực

HĐ 5. Nhận biết luỹ thừa với số mũ thực

Ta biết rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ và $\sqrt{2}=1,4142135624\ldots$

Gọi (r_n) là dãy số hữu tỉ dùng để xấp xỉ số $\sqrt{2}$, với $r_1=1$; $r_2=1,4; r_3=1,41; r_4=1,4142;\ldots$

a) Dùng máy tính cầm tay, hãy tính: $3^{r_1};3^{r_2};3^{r_3};3^{r_4}$ và $3^{\sqrt{2}}$.

b) Có nhận xét gì về sai số tuyệt đối giữa $3^{\sqrt{2}}$ và 3^{r_n}, tức là $\left|3^{\sqrt{2}}-3^{r_n}\right|$, khi n càng lớn?

Lời giải

a) $3^{r_1}=3^1=3$; $3^{r_2}=3^{1,4}\approx 4.8688$

$3^{r_3}=3^{1,41}\approx 4.9151$; $3^{r_4}=3^{1,4142}\approx 4.9208$

$3^{\sqrt{2}}=3^{1,4142135624}\approx 4.9210$

b) Sai số tuyệt đối giữa $3^{\sqrt{2}}$ và 3^{r_n} là: $\left|3^{\sqrt{2}}-3^{r_n}\right|=\left|3^{\sqrt{2}}\right|\cdot\left|1-3^{r_n-\sqrt{2}}\right|$

Vì r_n là một dãy số hữu tỉ dùng để xấp xỉ $\sqrt{2}$, nên khi n tiến đến vô cùng, r_n sẽ xấp xỉ $\sqrt{2}$ và $r_n-\sqrt{2}$ tiến đến 0 . Do đó, ta có: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|3^{\sqrt{2}}-3^{r_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|3^{\sqrt{2}}\right|\cdot\left|1-3^{r_n-\sqrt{2}}\right|=\left|3^{\sqrt{2}}\right|.\lim\limits_{n\to\infty}\left|1-3^{r_n-\sqrt{2}}\right|$

Vậy khi n tiến đến vô cùng, sai số tuyệt đối giữa $3^{\sqrt{2}}$ và 3^{r_n} tiến đến 0 , tức là 3^{r_n} xấp xỉ $3^{\sqrt{2}}$ với độ chính xác cao hơn khi n càng lớn.

$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\sqrt{2}$

Cho a là số thực dương và α là một số vô tỉ. Xét dãy số hữu tỉ (r_n) mà $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=\alpha$. Khi đó, dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ có giới hạn xác định và không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ (r_n) đã chọn. Giới hạn đó gọi là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$$a^\alpha=\lim_{n\to+\infty} a^{r_n}$$

Chú ý. Luỹ thừa với số mũ thực (của một số dương) có đầy đủ các tính chất như luỹ thừa với số mũ nguyên đã nêu trong Mục 1.

Ví dụ 5. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}}(a>0)$.

Lời giải

$$A=\frac{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{3}+1}\right)^{\sqrt{3}-1}}=\frac{a^{\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}}=\frac{a^2}{a^{3-1}}=\frac{a^2}{a^2}=1.$$

Ví dụ 6. Không sử dụng máy tính, hãy so sánh các số $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Ta có: $8^{\sqrt{3}}=\left(2^3\right)^{\sqrt{3}}=2^{3\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}=\left(2^2\right)^{2\sqrt{3}}=2^{4\sqrt{3}}$.

Vì $3\sqrt{3}<4\sqrt{3}$ và $2>1$ nên $2^{3\sqrt{3}}<2^{4\sqrt{3}}$. Vậy $8^{\sqrt{3}}<4^{2\sqrt{3}}$.

Luyện tập 5. Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\left(a^{\sqrt{2}-1}\right)^{1+\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{5}-1}\cdot a^{3-\sqrt{5}}}\,(a>0)$.

Lời giải

Rút gọn tử số: $a^{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2})}=a^{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}=a^{3\sqrt{2}-2}$

Rút gọn mẫu số: $a^{4-\sqrt{5}}=a^4\cdot a^{-\sqrt{5}}=\dfrac{a^4}{a^{\sqrt{5}}}$

Kết hợp với kết quả ở trên, ta có: $A=\dfrac{a^{3\sqrt{2}-2}}{\dfrac{a^4}{a^{\sqrt{5}}}}=a\sqrt{5}-3\sqrt{2}+2$

Ta đưa về so sánh hai luỹ thừa cùng cơ số.

Vận dụng: Giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

Lời giải

Sau 1 kì hạn 12 tháng, số tiền bác Minh nhận được là:

$A=P(1+r)^N=100,000,000(1+0.06)^1=106,000,000$

Sau 2 kì hạn 12 tháng, số tiền bác Minh nhận được là:

$A=P(1+r)^N=106,000,000(1+0.06)^1=112,360,000$

Sau 3 kì hạn 12 tháng, số tiền bác Minh nhận được là:

$A=P(1+r)^N=112,360,000(1+0.06)^1=119,101,600$

Vậy, số tiền bác Minh thu được sau 3 năm là 119,101,600 đồng.

b) Tính luỹ thừa với số mũ thực bằng máy tính cầm tay

Có thể sử dụng máy tính cầm tay để tính căn bậc n và luỹ thừa với số mũ thực.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\sqrt{20,15}$	√■ 2 0 • 1 5 =	4.488875137	$\sqrt{20,15} \approx 4,4889$
$\sqrt[5]{320}$	SHIFT x■ 5 ▶ 3 2 0 =	3.169786385	$\sqrt[5]{320} \approx 3,1698$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chấ của lũy thừa)
- Giải bằng casio (dò tìm đáp án đối với trắc nghiệm)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$ ta được:

A. x^2+1 B. x^2+x+1 C. x^2-x+1 D. x^2-1

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Tự luận: Dựa vào hằng đẳng thức thứ ba ta có

$$K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=\left[\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\sqrt{X}\right]\left(x-\sqrt{x}+1\right)$$

$$=\left(x+\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=\left[(x+1)^2-x\right]=x^2+x-1.$$

Cách 2. Casio: Biểu diễn qua 100

Nhập $\left(\sqrt{X}-\sqrt[4]{X}+1\right)\left(\sqrt{X}+\sqrt[4]{X}+1\right)\left(X-\sqrt{X}+1\right)\xrightarrow[X=100]{Calc}10101$

$=100^2+100+1=x^2+x+1\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 3. Casio: Thử lần lượt 4 đáp án.

Nhập $\left(\sqrt{X}-\sqrt[4]{X}+1\right)\left(\sqrt{X}+\sqrt[4]{X}+1\right)\left(X-\sqrt{X}+1\right):X^2+X+1\xrightarrow[X=1]{Calc}3;3\Rightarrow\boxed{B}$

Ví dụ 2. Cho x,y là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $K=\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{-1}$?

A. x B. $2x$ C. $x+1$ D. $x-1$

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận: Viết biểu thức K dưới dạng

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$K=\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{-2}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2}=x\Rightarrow\boxed{A}$$

Cách 2. Casio: Biểu diễn qua 100 và 0,01

Nhập $K=\left(X^{\frac{1}{2}}-Y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{Y}{X}}+\frac{Y}{X}\right)^{-1}\xrightarrow[X=100;Y=0,01]{Calc}100=x\Rightarrow\boxed{A}$

Cách 3. Casio: Thử lần lượt 4 đáp án. Đáp án đúng là đáp án A.

Nhập $K=\left(X^{\frac{1}{2}}-Y^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-2\sqrt{\frac{Y}{X}}+\frac{Y}{X}\right)^{-1}:X\xrightarrow[X=1;Y=0]{Calc}1;1\Rightarrow\boxed{A}$

Ví dụ 3. Cho số thực $a>0$ và $a\neq 1$. Hãy rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}$

A. $P=1+a$ B. $P=1$ C. $P=a$ D. $P=1-a$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{5}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{7}{12}}-a^{\frac{19}{12}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{2}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{7}{12}}\left(1-a\right)}=\dfrac{a^{\frac{5}{6}}\left(1-a^2\right)}{a^{\frac{5}{6}}\left(1-a\right)}=1+a\Rightarrow\boxed{A}$

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,\ a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2018}\right)$.

A. $M=2017^{2018}+1$. B. 2017^{1009}.

C. $2017^{1009}+1$. D. $-2017^{1009}-1$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Tự luận

Ta có $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}}a^{\frac{3}{8}}-a^{\frac{1}{8}}a^{-\frac{1}{8}}}=\dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-a}=-1-a^{\frac{1}{2}}$

Do đó $M=f\left(2017^{2018}\right)=-1-\left(2017^{2018}\right)^{\frac{1}{2}}=-1-2017^{1009}$.

Cách 2. Casio biểu diễn qua 100

Nhập $f(X)=\dfrac{X^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{X^{-2}}-\sqrt[3]{X}\right)}{X^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{X^{3}}-\sqrt[8]{X^{-1}}\right)}\xrightarrow[X=100]{Cacl}-11=-1-\sqrt{100}=-1-\sqrt{X}$

Do đó $M=f\left(2017^{2018}\right)=-1-\sqrt{2017^{2018}}=-1-2017^{1009}$.

Ví dụ 5. Cho x, y là các số thực dương và $x\neq y$. Biểu thức $A=\sqrt{\left(x^{2x}+y^{2x}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{2x}}xy\right)^{2x}}$ bằng

A. $y^{2x}-x^{2x}$ B. $\left|x^{2x}-y^{2x}\right|$ C. $(x-y)^{2x}$ D. $x^{2x}-y^{2x}$

Lời giải

Chọn B

$S=\sqrt{x^{4x}+2(xy)^{2x}+y^{4x}-4(xy)^{2x}}=\sqrt{x^{4x}-2(xy)^{2x}+y^{4x}}$

$=\sqrt{\left(x^{2x}-y^{2x}\right)^{2x}}=\left|x^{2x}-y^{2x}\right|$

Nhận xét: Câu này là câu bẫy với những ai dùng máy tính. Thật vậy

Nhập $\sqrt{\left(X^{2X}+Y^{2X}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{2X}}XY\right)^{2X}}-\left(Y^{2X}-X^{2X}\right)\xrightarrow[X=2;Y=3]{Calc}0$ khoanh đáp án A là sai vì đáp án B mới là đáp án đúng. Để không bị sai khi gặp các đáp án giống nhau mà trong 1 đáp án có dấu trị tuyệt đối thì ta nên thử với các giá trị đối nhau

Nhập $\sqrt{\left(X^{2X}+Y^{2X}\right)^2-\left(4^{\frac{1}{2X}}XY\right)^{2X}}-\left|X^{2X}-Y^{2X}\right|\xrightarrow[\begin{cases}X=2;Y=3\\X=-2;Y=-3\end{cases}]{Calc}0$.

Dạng 2. Viết biểu thức dưới dạng lũy thừa

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chấ của lũy thừa)
- Giải bằng casio (dò tìm đáp án đối với trắc nghiệm)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}}$ ta được:

A. $\sqrt[4]{x}$ B. $\sqrt[6]{x}$ C. $\sqrt[8]{x}$ D. $\sqrt{x}$

Lời giải

Chọn a

Cách 1. Theo nguyên tắc "Chia cộng" từ trong ra ngoài ta có

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{7}{8}}}=\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}=x^{\frac{15}{16}}$

Do đó $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{15}{16}}:x^{\frac{11}{16}}=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$.

Chú ý: Trong quá trình thực hành vì cùng 1 ẩn x nên ta chỉ cần nhẩm theo số mũ cho nhanh.

Cách 2. Thử 4 đáp án.

Nhập $\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X}}}}:X^{\frac{11}{16}}-\sqrt[4]{X}\xrightarrow[X=2]{Calc}0\Rightarrow\boxed{A}$

Cách 3. Nhập $\log_X\left(\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X\sqrt{X}}}}\right)-\log_X\left(X^{\frac{11}{16}}\right)\xrightarrow[X=2]{Calc}\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{A}$

Ví dụ 2. Biểu thức $K=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$ viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{18}}$ B. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ C. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$ D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Coi $X=\frac{2}{3}$. Theo nguyên tắc "Chia cộng" ta có

$$K=\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X\sqrt{X}}}=\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X.X^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{X.X^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{X^{\frac{3}{2}}}=X^{\frac{1}{2}}$$

Cách 2. Thử 4 đáp án.

Nhập $\log_X\sqrt[3]{X\sqrt[3]{X\sqrt{X}}}\xrightarrow[X=2]{Calc}\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{B}$

Ví dụ 3. Cho $a;b>0$ viết $a^{\frac{2}{3}}.\sqrt{a}$ và $\sqrt[3]{b\sqrt{b\sqrt{b}}}$ về dạng $a^x,b^y;x,y\in\mathbb{R}$. Khi đó $6x+12y$ là

A. 17. B. $\frac{7}{12}$. C. 14. D. $\frac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Nhập $\begin{cases}\log_A\left(A^{\frac{2}{3}}.\sqrt{A}\right)\xrightarrow[A=2]{Calc}\frac{7}{6}=x\\ \log_B\left(\sqrt[3]{B\sqrt{B\sqrt{B}}}\right)\xrightarrow[B=2]{Calc}\frac{7}{12}=y\end{cases}\Rightarrow 6x+12y=14$.

Dạng 3. So sánh

1. Phương pháp

- Giải bằng phương pháp tự luận (kết hợp nhiều tính chấ của lũy thừa)
- Giải bằng casio: Sử dụng chức năng Ture/Fasle hoặc thay giá trị trực tiếp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. B. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$. C. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$. D. $\frac{1}{a^{2018}} < \frac{1}{a^{2019}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{1}{a^{\sqrt{5}}} = a^{-\sqrt{5}}$.

Lại có $\begin{cases} -\sqrt{3} > -\sqrt{5} \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > a^{-\sqrt{5}} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

Ví dụ 2. So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,2}$ ta được

A. $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}$. B. $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,2}$.

C. $\sqrt{3}^{0,2} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}$. D. $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2} < (0,7)^{3,2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(0,2)^{0,3} = (0,2)^{\frac{3}{10}} = \left[(0,2)^3\right]^{\frac{1}{10}} = (0,008)^{\frac{1}{10}}$.

$(0,7)^{3,2} = (0,7)^{\frac{32}{10}} = \left[(0,7)^{32}\right]^{\frac{1}{10}}$.

$\sqrt{3}^{0,2} = (3)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}} = 3^{\frac{1}{10}}$.

Do $(0,7)^{32} < 0,008 < 3$ nên $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,2}$.

Ví dụ 3. Nếu $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2 < a < 3$. B. $a > 2$. C. $a < 3$. D. $a > 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ và $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ nên $a-2 > 1 \Leftrightarrow a > 3$.

Ví dụ 4. Cho $(2m-1)^{\frac{-3}{4}} < (2m-1)^{\frac{-5}{4}}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m \geq 1$. B. $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$. C. $m > 1$. D. $\frac{1}{2} < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

Do $\frac{-3}{4} > \frac{-5}{4}$ nên ta có: $(2m-1)^{\frac{-3}{4}} < (2m-1)^{\frac{-5}{4}} \Leftrightarrow 0 < 2m-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < 2m < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

Ví dụ 5. Nếu $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2 < a < 3$. B. $a > 2$. C. $a < 3$. D. $a > 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ và $(a-2)^{\frac{1}{4}} < (a-2)^{\frac{1}{3}}$ nên $a - 2 > 1 \Leftrightarrow a > 3$.

Ví dụ 6. Cho mệnh đề $A: \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2018} > \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019}$ và mệnh đề $B: \log_{\frac{e}{2}} 2018 > \log_{\frac{e}{2}} 2019$. Khẳng định

nào dưới đây đúng?

A. A sai, B sai. B. A đúng, B đúng.

C. A đúng, B sai. D. A sai, B đúng.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sin\frac{\pi}{12} < 1$ và $2018 < 2019$ nên $\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2018} > \left(\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2019}$ suy ra A đúng.

Tương tự vì $\frac{e}{2} > 1$ và $2018 < 2019$ nên $\log_{\frac{e}{2}} 2018 < \log_{\frac{e}{2}} 2019$ suy ra B sai.

Ví dụ 7. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017} < (\sqrt{5}+2)^{-2018}$. B. $(\sqrt{5}+2)^{2018} > (\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019}$. D. $(\sqrt{5}-2)^{2018} < (\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases} 0 < \sqrt{5}-2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow C$ đúng.

$\begin{cases} \sqrt{5}+2 > 1 \\ -2017 > -2018 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{-2017} > (\sqrt{5}+2)^{-2018} \Rightarrow A$ sai

$\begin{cases} \sqrt{5}+2 > 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}+2)^{2018} < (\sqrt{5}+2)^{2019} \Rightarrow B$ sai

$\begin{cases} 0 < \sqrt{5}-2 < 1 \\ 2018 < 2019 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{5}-2)^{2018} > (\sqrt{5}-2)^{2019} \Rightarrow D$ sai.

Ví dụ 8. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. B. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. D. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Do $\begin{cases} 2018 > 2017 \\ \sqrt{3}-1>1 \end{cases}$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 6.1. Tính:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; b) $4^{\frac{3}{2}}$; c) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$; d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$.

Lời giải

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^{2}} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$.

b) $4^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$.

c) $\left(\frac{1^{-\frac{2}{3}}}{8}\right) = \left(\frac{1^{-\frac{2}{3}}}{8}\right) = \left(\frac{8}{1}\right)^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$.

d) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} = \left(\frac{16}{1}\right)^{0.75} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$.

Bài 6.2. Thực hiện phép tính:

a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0.75} - 25^{0.5}$; b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$.

Lời giải

a) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0.75} - 25^{0.5} = (\sqrt[3]{27})^2 + \frac{1}{\left(81^{0.75}\right)} - \sqrt{25} = 9 + \frac{1}{\sqrt[4]{81}} - 5 = 9 + \frac{1}{3} - 5 = \frac{19}{3}$.

b) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}} = 4^{2-3\sqrt{7}} \cdot \left(2^3\right)^{2\sqrt{7}} = 4^{2-3\sqrt{7}}.2^{6\sqrt{7}} = \left(2^2\right)^{2-3\sqrt{7}}.2^{6\sqrt{7}} = 2^{4-6\sqrt{7}+6\sqrt{7}} = 16$.

Bài 6.3. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^5y^{-2}}{x^3y}\left(x, y \neq 0\right)$; b) $B = \frac{x^2y^{-3}}{\left(x^{-1}y^4\right)^{-3}}\left(x, y \neq 0\right)$.

Lời giải

a) $A = \frac{x^5y^{-2}}{x^3y} = \frac{x^5}{x^3} \cdot \frac{1}{y^{2-1}} = x^{5-3}y^{-1} = x^2y^{-1}$

b) $B=\dfrac{x^2y^{-3}}{\left(x^{-1}y^4\right)^{-3}}=\dfrac{x^2y^{-3}}{x^3y^{-12}}=x^{2-3}y^{-3-(-12)}=\dfrac{1}{xy^9}$

Bài 6.4. Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y}+y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}$;

b) $B=\left(\dfrac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}$.

Lời giải

a) $A=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y}+y\dfrac{1}{3}\right)\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)}{\left(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}\right)\left(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}\right)}$

$=\dfrac{x^{\frac{2}{6}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x}-y_{3}^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{y}}{x^{\frac{1}{6}}+y^{\frac{1}{6}}}$

$=\dfrac{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}+y\dfrac{1}{3}\sqrt[6]{x}-y_{\frac{1}{3}}^{\sqrt[6]{y}}}{1}=x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[6]{y}-\sqrt[6]{x}\right)$

b) $B=\left(\dfrac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}=\left(\dfrac{x^{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}}{y^{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{3}+1\right)}\right)\cdot\dfrac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}=\dfrac{x^3}{y^{\sqrt{3}+1}}\cdot\dfrac{x^{-\sqrt{2}-1}}{y^{-2}}=\dfrac{x^2-\sqrt{3}}{y^{\sqrt{3}+3}}$

Bài 6.5. Chứng minh rằng: $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$.

Lời giải

Ta có sử dụng công thức: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$. Với $a=4, b=3$, ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{4^2-3}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{4^2-3}}{2}}\right)-\left(\sqrt{\frac{4-\sqrt{4^2-3}}{2}}-\sqrt{\frac{4+\sqrt{4^2-3}}{2}}\right)=\sqrt{3}+1-1+\sqrt{3}=2\sqrt{3}=2\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}=2$$

Bài 6.6. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh:

a) $5^{6\sqrt{3}}$ và $5^{3\sqrt{6}}$;

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ và $\sqrt{2}.2^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

a)Nếu $x>y>0$ và $a>1$, thì $a^x>a^y$.

Áp dụng bất đẳng thức này với $x=3\sqrt{2}, y=1$, và $a=5$, ta được: $5^{3\sqrt{2}}>5^1=5$

Vậy $5^{6\sqrt{3}}>5^{3\sqrt{6}}$.

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}=\left(2^{-1}\right)^{-\frac{4}{3}}=2^{\frac{4}{3}}$

Với $\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}}$, ta có thể viết lại thành $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{7}{6}}$ $2^{\frac{4}{3}}<2^{\frac{7}{6}}$

Vậy, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}<\sqrt{2}\cdot 2^{\frac{2}{3}}$.

Bài 6.7. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm $r(r$ được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau: $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{N}$.

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Với số tiền gốc $P=120$ triệu đồng, lãi suất $r=0.05$ (vì lãi suất được biểu thị dưới dạng số thập phân), và số kỳ gửi trong một năm $n=2$ (vì một năm có 2 kỳ gửi 6 tháng), số kỳ gửi trong 2 năm là $N=4$.

Áp dụng công thức tính lãi suất kép: $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{N}=120\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^{4}\approx 136.047$ triệu đồng.

Vậy sau 2 năm, bác An sẽ nhận được khoản tiền là khoảng 136.047 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Bài 6.8. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A=19\cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Lời giải

Sau 30 năm, dân số của quốc gia sẽ tăng gấp đôi, tức là sẽ đạt mức 38 triệu người. Ta có công thức tính tỉ số tăng trưởng dân số là: $2=2^{\frac{t}{30}}$

Từ đó, ta có thể tìm được số năm tương ứng với tốc độ tăng dân số như vậy là:

$\frac{t}{30}=\log_2 2=1\Rightarrow t=30$.

Vậy sau 30 năm kể từ năm 2021, tức là năm 2051, dân số của quốc gia này sẽ đạt mức 38 triệu người.

Để tính dân số sau 20 năm kể từ năm 2021, ta có thể tính tỉ số tăng trưởng dân số trong 20 năm như sau:

$$2^{\frac{20}{30}}=2^{\frac{2}{3}}$$

Vậy dân số của quốc gia này sau 20 năm, tức là năm 2041, sẽ đạt mức: $19\times 2^{\frac{2}{3}}\approx 27.076$ triệu người

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ được kết quả là

A. ab^2. B. a^2b. C. ab. D. a^2b^2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}=\dfrac{a^3.b^2}{\sqrt[6]{\left(a^2.b\right)^6}}=a.b$.

Câu 2: Biểu thức $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$ với $a>0$. Viết biểu thức T dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỉ là:

A. $a^{\frac{3}{5}}$. B. $a^{\frac{2}{15}}$. C. $a^{\frac{1}{3}}$. D. $a^{\frac{4}{15}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt[5]{a.a^{\frac{1}{3}}}=\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}=a^{\frac{4}{15}}$.

Câu 3: Cho a là số thực dương, khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

A. $a^{\frac{8}{3}}$. B. $\sqrt[6]{a}$. C. $\sqrt[3]{a^2}$. D. $a^{\frac{3}{8}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}=a^{\frac{2}{3.4}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$.

Câu 4: Cho $0<a\neq 1$. Giá trị của biểu thức $P=\log_a\left(a.\sqrt[3]{a^2}\right)$ là

A. $\dfrac{4}{3}$. B. 3. C. $\dfrac{5}{3}$. D. $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $P=\log_a\left(a.\sqrt[3]{a^2}\right)=\log_a\left(a.a^{\frac{2}{3}}\right)=\log_a a^{\frac{5}{3}}=\dfrac{5}{3}$.

Câu 5: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=\sqrt{x}$. B. $P=x^{\frac{1}{8}}$. C. $P=x^{\frac{2}{9}}$. D. $P=x^2$.

Lời giải

Chọn A

Với $x>0$, ta có $P=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Câu 6: Tính giá trị của biểu thức $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}$.

A. 1. B. $6^{-\sqrt{5}}$. C. 18. D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có $A=\dfrac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}=\dfrac{2^{3+\sqrt{5}}.3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}.3^{1+\sqrt{5}}}=2^{3+\sqrt{5}-2-\sqrt{5}}.3^{3+\sqrt{5}-1-\sqrt{5}}=2.3^2=18$.

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[4]{x}$, với x là số thực dương.

A. $P=x^{\frac{1}{12}}$. B. $P=x^{\frac{7}{12}}$. C. $P=x^{\frac{2}{3}}$. D. $P=x^{\frac{2}{7}}$.

Lời giải

Chọn B

$P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{4}}=x^{\frac{7}{12}}$.

Câu 8: Cho $x>0$, $y>0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ về dạng y^n. Tính $m-n$.

A. $\dfrac{11}{6}$. B. $-\dfrac{8}{5}$. C. $-\dfrac{11}{6}$. D. $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Với $x>0$, $y>0$, ta có

$x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{5}}.\left(x^5.x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{1}{12}}\Rightarrow m=\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{12}$.

$y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ $y=x+1$. Do đó $m-n=\dfrac{11}{6}$.

Câu 9: Cho $a>0$, $b>0$ và x, y là các số thực bất kỳ. Đẳng thức nào sau đúng?

A. $(a+b)^x=a^x+b^x$. B. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=a^x.b^{-x}$. C. $a^{x+y}=a^x+a^y$. D. $a^xb^y=(ab)^{xy}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}=a^x.b^{-x}$.

Câu 10: Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{3}{2}}.\sqrt[5]{x}$?

A. $x^{\frac{4}{7}}$.   B. $x^{\frac{3}{10}}$.   C. $x^{\frac{17}{10}}$.   D. $x^{\frac{13}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Với $x>0$ thì $P=x^{\frac{3}{2}}.\sqrt[5]{x}=x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{3}{2}+\frac{1}{5}}=x^{\frac{17}{10}}$.

Câu 11: Cho $a>0$, $b>0$ và biểu thức $T=2\left(a+b\right)^{-1}.\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Khi đó:

A. $T=\frac{2}{3}$.   B. $T=\frac{1}{2}$.   C. $T=1$.   D. $T=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $a>0$, $b>0$ ta có:

$$T=2\left(a+b\right)^{-1}.\left(ab\right)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)}=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}.\sqrt{1+\frac{1}{4}.\frac{\left(a-b\right)^2}{ab}}$$

$$=\frac{1}{a+b}\sqrt{4ab+a^2-2ab+b^2}=\frac{\sqrt{\left(a+b\right)^2}}{a+b}=1.$$

Câu 12: Cho hàm số $f\left(a\right)=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2016}\right)$

A. $M=2017^{1008}-1$ B. $M=-2017^{1008}-1$ C. $M=2017^{2016}-1$ D. $M=1-2017^{2016}$

Lời giải

Chọn B

$$f\left(a\right)=\frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\frac{1-a}{\sqrt{a}-1}=-1-\sqrt{a} \text{ nên}$$

$$M=f\left(2017^{2016}\right)=-1-\sqrt{2017^{2016}}=-1-2017^{1008}$$

Câu 13: Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$

A. $P=a$ B. $P=a^3$ C. $P=a^4$ D. $P=a^5$

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^3}{a^{2-4}}=a^5$

Câu 14: Cho hai số thực dương a,b. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

A. $\dfrac{1}{8}$ B. $\dfrac{1}{21}$ C. $\dfrac{1}{9}$ D. $\dfrac{1}{18}$

Lời giải

Chọn C

$$A=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\Rightarrow m=\frac{1}{3},\ n=\frac{1}{3}\Rightarrow m.n=\frac{1}{9}.$$

Câu 15: Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P=m^2+n^2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P\in(330;340)$. B. $P\in(350;360)$. C. $P\in(260;370)$. D. $P\in(340;350)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2^3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{3}{5}}.2^{\frac{1}{10}}.2^{\frac{1}{30}}=2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}=2^{\frac{11}{15}}$

$\Rightarrow \dfrac{m}{n}=\dfrac{11}{15}\Rightarrow \begin{cases} m=11\\ n=15\end{cases}\Rightarrow P=m^2+n^2=11^2+15^2=346$.

Câu 16: Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m,n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=312$. B. $m^2+n^2=543$. C. $m^2-n^2=-312$. D. $m^2+n^2=409$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.a^{\frac{-5}{7}}}=\dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$

Mà $A=a^{\frac{m}{n}},m,n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản $\Rightarrow m=19,n=7\Rightarrow m^2-n^2=312$

Câu 17: Cho $4^x+4^{-x}=2$ và biểu thức $A=\dfrac{4-2^x-2^{-x}}{1+2^x+2^{-x}}=\dfrac{a}{b}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. 6. B. -10. C. -8. D. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^x+4^{-x}=2\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+\left(2^{-x}\right)^2+2.2^x.2^{-x}=4\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=4\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=2$

Ta có: $A=\dfrac{4-2^x-2^{-x}}{1+2^x+2^{-x}}=\dfrac{4-\left(2^x+2^{-x}\right)}{1+\left(2^x+2^{-x}\right)}=\dfrac{4-2}{1+2}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{a}{b}$.

Suy ra: $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}\Rightarrow a.b=2.3=6$.

Câu 18: Cho a là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}$.

A. $P=a(a+1)$. B. $P=a-1$. C. $P=a$. D. $P=a+1$.

Lời giải

Chọn C

$$P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{-1}{4}}}=\dfrac{a+a^2}{a+1}=\dfrac{a(a+1)}{a+1}=a.$$

Câu 19: Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{1}{2}}$ B. $P=x^{\frac{7}{12}}$ C. $P=x^{\frac{5}{8}}$ D. $P=x^{\frac{7}{24}}$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $P=\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}=[x(x^3.x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}}=[x(x^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{4}}]^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{7}{24}}=x^{\frac{5}{8}}$

Câu 20: Tích $(2017)!\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2...\left(1+\dfrac{1}{2017}\right)^{2017}$ được viết dưới dạng a^b, khi đó $(a,\ b)$ là cặp nào trong các cặp sau?

A. $(2018;\ 2017)$. B. $(2019;\ 2018)$. C. $(2015;\ 2014)$. D. $(2016;\ 2015)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(2017)!\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2...\left(1+\dfrac{1}{2017}\right)^{2017}=(2017)!\left(\dfrac{2}{1}\right)^1\left(\dfrac{3}{2}\right)^2...\left(\dfrac{2017}{2016}\right)^{2016}\left(\dfrac{2018}{2017}\right)^{2017}$

$=(2017)!\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}...\frac{1}{2016}.\frac{2018^{2017}}{2017}=2018^{2017}$. Vậy $a=2018;\ b=2017$.

Câu 21: Cho $f(x)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng: $f(1).f(2)...f(2020)=5^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$

A. $m-n^2=2021$.   B. $m-n^2=-1$.   C. $m-n^2=1$.   D. $m-n^2=2020$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f(x)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}=5^{\sqrt{\frac{x^2(x+1)^2+x^2+(x+1)^2}{x^2(x+1)^2}}}=5^{\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}}=5^{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}$.

Do đó: $f(1).f(2)...f(2020)=5^{\frac{m}{n}}\Leftrightarrow 5^{\sum_{x=1}^{2020}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}=5^{\frac{m}{n}}\Leftrightarrow \sum_{x=1}^{2020}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{m}{n}$.

$\Leftrightarrow 2021-\frac{1}{2021}=\frac{4084440}{2021}=\frac{m}{n}\Rightarrow m=4084440=2021^2-1, n=2021$.

Vậy: $m-n^2=\left(2021^2-1\right)-2021^2=-1$.

Câu 22: Cho $m>0$, $a=m\sqrt{m}$, $y=\frac{\sqrt[3]{m}}{a^2.\sqrt[4]{m}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y=\frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$.   B. $y=\frac{1}{a^2}$.   C. $y=\frac{1}{\sqrt[9]{a^{34}}}$.   D. $y=\frac{1}{\sqrt[6]{a^{11}}}$.

Lời giải

Chọn A

$a=m\sqrt{m}=m^{\frac{3}{2}}\Rightarrow a^{\frac{1}{18}}=m^{\frac{3}{2}.\frac{1}{18}}=m^{\frac{1}{12}}$, $y=\frac{\sqrt[3]{m}}{a^2.\sqrt[4]{m}}=\frac{m^{\frac{1}{3}}}{a^2.m^{\frac{1}{4}}}=\frac{m^{\frac{1}{12}}}{a^2}=\frac{a^{\frac{1}{18}}}{a^2}=\frac{1}{\sqrt[18]{a^{35}}}$.

Câu 23: Biểu thức $C=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$ với $x>0$ được viết dưới dạng lũy thừa số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{3}{16}}$.   B. $x^{\frac{7}{8}}$.   C. $x^{\frac{15}{16}}$.   D. $x^{\frac{31}{32}}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x>0$ ta có $C^2=x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}\Leftrightarrow C^4=x^2.x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\Leftrightarrow C^8=x^4.x^2.x\sqrt{x\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow C^{16}=x^8.x^4.x^2.x\sqrt{x}\Leftrightarrow C^{32}=x^{16}.x^8.x^4.x^2.x\Leftrightarrow C^{32}=x^{31}\Leftrightarrow C=x^{\frac{31}{32}}$.

Câu 24: Rút gọn biểu thức $A=\frac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$, trong đó m, $n\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2-n^2=25$. B. $m^2+n^2=43$. C. $3m^2-2n=2$. D. $2m^2+n=15$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^5}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-2}}}=\dfrac{a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{7}{3}}}{a^4.a^{\frac{-2}{7}}}=a^{\frac{5}{3}+\frac{7}{3}-4+\frac{2}{7}}=a^{\frac{2}{7}}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=7\end{cases}\Rightarrow 2m^2+n=15$.

Câu 25: Cho a,b là hai số thực dương. Thu gọn biểu thức $\dfrac{a^{\frac{7}{6}}.b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}$, kết quả nào sau đây là đúng?

A. $\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{b}}$. B. ab. C. $\dfrac{b}{a}$. D. $\dfrac{a}{b}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\dfrac{a^{\frac{7}{6}}.b^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[6]{ab^2}}=\dfrac{a^{\frac{7}{6}}.b^{\frac{-2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}.b^{\frac{1}{3}}}=a^1.b^{-1}=\dfrac{a}{b}$.

Câu 26: Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

A. $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. B. $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{18}$. C. $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. D. $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}.\frac{1}{3}+1}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Câu 27: Cho a là số dương khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^{-2019}=a^{2019}$. B. $a^{-2019}=-\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2019}$. C. $a^{-2019}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2019}$. D. $a^{-2019}=-a^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{-2019}=\dfrac{1}{a^{2019}}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2019}$.

Câu 28: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ được kết quả là

A. ab. B. a^2b^2. C. ab^2. D. a^2b.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}=\dfrac{a^3.b^2}{\sqrt[6]{\left(a^2.b\right)^6}}=ab$.

Câu 29: Cho biểu thức $P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x$ B. $P=x^{\frac{11}{6}}$ C. $P=x^{\frac{7}{6}}$ D. $P=x^{\frac{5}{6}}$

Lời giải

Chọn A

$P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x$

Câu 30: Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

A. $\dfrac{2}{1009}$. B. $\dfrac{1}{1009}$. C. $\dfrac{3}{1009}$. D. $\dfrac{3}{2018^2}$.

Lời giải

Chọn A

$a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}=a^{\frac{3}{2018}}.a^{\frac{1}{2018}}=a^{\frac{4}{2018}}=a^{\frac{2}{1009}}$. Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\dfrac{2}{1009}$.

Câu 31: Cho số thực $a>1$ và các số thực α, β. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a^\alpha>1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. B. $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$. C. $\dfrac{1}{a^\alpha}<0,\forall\alpha\in\mathbb{R}$. D. $a^\alpha<1,\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Với $a>1$ và $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Ta có: $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$.

Câu 32: Cho $\pi^\alpha>\pi^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $\alpha.\beta=1$. B. $\alpha>\beta$. C. $\alpha<\beta$. D. $\alpha+\beta=0$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\pi\approx3,14>0$ nên $\pi^\alpha>\pi^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta.$

Câu 33: Với các số thực a, b bất kì, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left(3^a\right)^b=3^{a+b}$. B. $\left(3^a\right)^b=3^{ab}$. C. $\left(3^a\right)^b=3^{a-b}$. D. $\left(3^a\right)^b=3^{a^b}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 34: Cho a,b là các số thực thỏa điều kiện $\left(\frac{3}{4}\right)^a > \left(\frac{4}{5}\right)^a$ và $b^{\frac{5}{4}} > b^{\frac{4}{3}}$.Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $a>0$ và $b>1$.

B. $a>0$ và $0<b<1$.

C. $a<0$ và $0<b<1$.

D. $a<0$ và $b>1$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\left(\frac{3}{4}\right)^a > \left(\frac{4}{5}\right)^a \Rightarrow a<0$.

Và $b^{\frac{5}{4}} > b^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0<b<1$.

Câu 35: Cho a thuộc khoảng $\left(0;\frac{2}{e}\right)$, α và β là những số thực tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\left(a^\alpha\right)^b = a^{\alpha.\beta}$.

B. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow a<\beta$.

C. $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$.

D. $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha>\beta$.

Lời giải

Chọn D

$a\in\left(0;\frac{2}{e}\right) \Rightarrow$ Hàm số $y=a^x$ nghịch biến.Do đó $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha<\beta$.

Vậy đáp án **sai** là **D**.

Câu 36: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

B. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$.

D. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Lời giải

Chọn B

+) $\begin{cases}0<\sqrt{2}-1<1\\2017<2018\end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$ nên **A** đúng.

+) $\begin{cases}0<\sqrt{3}-1<1\\2018>2017\end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} < \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$ nên **B** sai.

+) $\begin{cases}2>1\\\sqrt{2}+1>\sqrt{3}\end{cases} \Rightarrow 2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$ nên **C** đúng.

+) $\begin{cases}0<1-\frac{\sqrt{2}}{2}<1\\2018>2017\end{cases} \Rightarrow \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$ nên **D** đúng.

Câu 37: Cho các số thực $a;b$ thỏa mãn $0<a<1<b$. Tìm khẳng định đúng:

A. $\ln a>\ln b$. B. $(0,5)^a<(0,5)^b$. C. $\log_a b<0$. D. $2^a>2^b$.

Lời giải

Chọn B

Do cơ số $e\in(1;+\infty)$ và $0<a<b$ nên ta có $\ln a<\ln b$. Đáp án A sai.

Do cơ số $0,5\in(0;1)$ và $0<a<b$ nên ta có $(0,5)^a>(0,5)^b$. Đáp án B sai.

Do cơ số $a\in(0;1)$ và $b>1$ nên ta có $\log_a b<\log_a 1\Leftrightarrow \log_a b<0$. Đáp án C đúng.

Do cơ số $2\in(1;+\infty)$ và $a<b$ nên ta có $2^a<2^b$. Đáp án D sai.

Câu 38: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\sqrt{5}+2)^{-2017}<(\sqrt{5}+2)^{-2018}$. B. $(\sqrt{5}+2)^{2018}>(\sqrt{5}+2)^{2019}$.

C. $(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}$. D. $(\sqrt{5}-2)^{2018}<(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

Lời giải

Chọn C

$\begin{cases}0<\sqrt{5}-2<1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}\Rightarrow C$ đúng.

$\begin{cases}\sqrt{5}+2>1\\-2017>-2018\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}+2)^{-2017}>(\sqrt{5}+2)^{-2018}\Rightarrow A$ sai

$\begin{cases}\sqrt{5}+2>1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}+2)^{2018}<(\sqrt{5}+2)^{2019}\Rightarrow B$ sai

$\begin{cases}0<\sqrt{5}-2<1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}\Rightarrow D$ sai.

Câu 39: Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}}>\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. C. $3^{-\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. D. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50}<\left(\sqrt{2}\right)^{100}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\left(\frac{3}{7}\right)<\left(\frac{5}{8}\right)\Rightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. Phương án **A** sai.

$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. Phương án **B** đúng.

$3<5 \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}}>5^{-\sqrt{2}} \Rightarrow 3^{-\sqrt{2}}>\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. Phương án C sai.

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-50}<\left(\sqrt{2}\right)^{100} \Rightarrow \left(2^{-2}\right)^{-50}<(2)^{100} \Rightarrow 2^{100}<2^{100}$. Phương án D sai.

Câu 40: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

B. $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

D. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Lời giải

Chọn D

A đúng vì $2>1$ và $\sqrt{2}+1>\sqrt{3}$ nên $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

B đúng vì $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)<1$ và $2019>2018$ nên $\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C đúng vì $\left(\sqrt{2}-1\right)<1$ và $2017<2018$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

D sai vì $\sqrt{3}-1<1$ và $2017<2018$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 41: Cho $P=\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}$ và $Q=2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}$, với x, y là các số thực khác 0. So sánh P và Q ta có

A. $P<Q$.

B. $P=Q$.

C. $P=-Q$.

D. $P>Q$.

Lời giải

Chọn A

Ta có x^2, y^2, $\sqrt[3]{x^4y^2}$, $\sqrt[3]{x^2y^4}$ là những số thực dương.

$Q=2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}\right)^3}=2\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}$

$=\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}+\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}$

$>\sqrt{x^2+3\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{3\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}>\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{\sqrt[3]{x^2y^4}+y^2}=P$

Vậy $P<Q$.

Câu 42: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}$?

A. $a>0$.

B. $0<a<1$.

C. $a>1$.

D. $\dfrac{5}{21}<a<\dfrac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[7]{a^2}=\sqrt[21]{a^6}$. Ta có $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}\Leftrightarrow\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[21]{a^6}$ mà $5<6$ vậy $0<a<1$.

Câu 43: Tìm khẳng định đúng.

A. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$.

B. $\left(2+\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{2017}$.

C. $-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2016}>-\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

D. $\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2017}$.

Lời giải

Chọn A

Có $0<2-\sqrt{3}<1\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^{2016}>\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Câu 44: Cho $a>1$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng.

A. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$

B. $\dfrac{1}{a^{2017}}<\dfrac{1}{a^{2018}}$

C. $a^{-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$

D. $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $a^{-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{a^{\sqrt{3}}}>\dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}\Leftrightarrow a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{5}}$ luôn đúng với $a>1$.

Câu 45: Cho biết $(x-2)^{-\frac{1}{3}}>(x-2)^{-\frac{1}{6}}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2<x<3$.

B. $0<x<1$.

C. $x>2$.

D. $x>1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Ta có $-\dfrac{1}{3}<-\dfrac{1}{6}$ nên $(x-2)^{-\frac{1}{3}}>(x-2)^{-\frac{1}{6}}\Leftrightarrow x-2<1\Leftrightarrow x<3$. Vậy $2<x<3$.

Câu 46: Cho $U=2.2019^{2020}$, $V=2019^{2020}$, $W=2018.2019^{2019}$, $X=5.2019^{2019}$ và $Y=2019^{2019}$. Số nào trong các số dưới đây là số bé nhất?

A. $X-Y$.

B. $U-V$.

C. $V-W$.

D. $W-X$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $X-Y=4.2019^{2019}$.

$U-V=2019^{2020}=2019.2019^{2019}$.

$V-W=2019.2019^{2019}-2018.2019^{2019}=2019^{2019}$.

$W-X=2013.2019^{2019}$.

Vậy trong các số trên, số nhỏ nhất là $V-W$.

Câu 47: Tìm tất cả các số thực m sao cho $\dfrac{4^a}{4^a+m}+\dfrac{4^b}{4^b+m}=1$ với mọi $a+b=1$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $m=\pm 2$. B. $m=4$. C. $m=2$. D. $m=8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$. Thay vào $\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^b}{4^b+m}=1$ ta được

$$\frac{4^a}{4^a+m}+\frac{4^{1-a}}{4^{1-a}+m}=1 \Leftrightarrow \frac{4+m.4^a+4+m.4^{1-a}}{4+m.4^a+m.4^{1-a}+m^2}=1 \Leftrightarrow m^2=4 \Leftrightarrow m=\pm 2.$$

Câu 48: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $x^2-6x+1=0$ với $x_1>x_2$. Tính giá trị của biểu thức $P={x_1}^{2017}.{x_2}^{2018}$

A. $P=1$ B. $P=3+2\sqrt{2}$ C. $P=3-2\sqrt{2}$ D. $P=\left(3-2\sqrt{2}\right)^{17}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $P={x_1}^{2017}.{x_2}^{2018}=\left(x_1.x_2\right)^{2017}.x_2$. Theo định lý viet: $\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1.x_2=1 \end{cases} \Rightarrow P=x_2$

Ta có $x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=3+2\sqrt{2} \\ x_2=3-2\sqrt{2} \end{array}\right. \Rightarrow P=3-2\sqrt{2}$.

Câu 49: Rút gọn biểu thức $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018}$.

A. $P=1$. B. $P=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$.

C. $P=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. D. $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{4035}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ ta có

$$x^3=9+\sqrt{80}+3.\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^2+9-\sqrt{80}$$

$$=18+3.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\left(.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)$$

$$=18+3x.\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=18+3x \Rightarrow x=3 \Rightarrow 3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Ta có $P=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(3-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2018}=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2018}$

$$=\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}.\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^{2017}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\left(\sqrt[3]{1}\right)^{2017}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$$

Câu 50: Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2017}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. 1. B. $7-4\sqrt{3}$. C. $7+4\sqrt{3}$. D. $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(7-4\sqrt{3}\right)^{2017}=\left[\left(7+4\sqrt{3}\right).\left(7-4\sqrt{3}\right)\right]^{2017}\left(7+4\sqrt{3}\right)=$

$=1^{2017}\left(7+4\sqrt{3}\right)=7+4\sqrt{3}$.

BÀI 19: LOGARIT

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. KHÁI NIỆM LÔGARIT

HĐ1. Nhận biết khái niệm lôgarit

Tìm x, biết:

a) $2^x = 8$; b) $2^x = \frac{1}{4}$; c) $2^x = \sqrt{2}$.

Lời giải

a) $\log_2 8 = 3$. b) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$. c) $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^\alpha = M$ được gọi là lôgarit cơ số a của M và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha = \log_a M \Leftrightarrow a^\alpha = M.$$

Chú ý. Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

Từ định nghĩa lôgarit, ta có các tính chất sau:

Với $0 < a \neq 1, M > 0$ và α là số thực tuỳ ý, ta có:

$$\log_a 1 = 0; \qquad \log_a a = 1;$$
$$a^{\log_a M} = M; \qquad \log_a a^\alpha = \alpha.$$

Ví dụ 1. Tính: a) $\log_2 \frac{1}{8}$; b) $\log_{\sqrt{3}} 9$.

Lời giải

a) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$.

b) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4$.

Luyện tập 1. Tính: a) $\log_3 3\sqrt{3}$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$.

Lời giải

a) $\log_2(3\sqrt{3}) = \log_2 3 + \log_2 \sqrt{3} = \log_2 3 + \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{3}{2}\log_2 3$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 \frac{1}{2}} = \dfrac{5}{-1} = -5$

2. TÍNH CHẤT CỦA LÔGARIT

a) Quy tắc tính lôgarit

HĐ2. Nhận biết quy tắc tính lôgarit

Cho $M = 2^5, N = 2^3$. Tính và so sánh:

a) $\log_2(MN)$ và $\log_2 M + \log_2 N$;

b) $\log_2\left(\frac{M}{N}\right)$ và $\log_2 M - \log_2 N$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

a) $\log_2(MN)=\log_2\left(2^5\cdot 2^3\right)=\log_2 2^8=8$;

$\log_2 M+\log_2 N=\log_2\left(2^5\right)+\log_2\left(2^3\right)=5+3=8$

b) $\log_2\left(\frac{M}{N}\right)=\log_2\left(2^5/2^3\right)=\log_2\left(2^2\right)=2$;

$\log_2 M-\log_2 N=\log_2\left(2^5\right)-\log_2\left(2^3\right)=5-3=2$

Giả sử a là số thực dương khác $1, M$ và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý.

Khi đó:

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N;$$
$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N;$$
$$\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_4 2+\log_4 32$; b) $\log_2 80-\log_2 5$.

Lời giải

a) $\log_4 2+\log_4 32=\log_4(2.32)=\log_4 64=\log_4 4^3=3\log_4 4=3$.

b) $\log_2 80-\log_2 5=\log_2\frac{80}{5}=\log_2 16=\log_2 2^4=4\log_2 2=4$.

Luyện tập 2. Rút gọn biểu thức: $A=\log_2\left(x^3-x\right)-\log_2(x+1)-\log_2(x-1)(x>1)$.

Lời giải

$$A=\log_2\left(x^2-x\right)-\log_2(x+1)-\log_2(x-1)=\log_2\frac{x^2-x}{(x+1)(x-1)}=\frac{x}{x+1}$$

Biểu thức được rút gọn thành $A=\log 2\frac{x}{x+1}=\log_2 x-\log_2(x+1)$.

b) Đổi cơ số của lôgarit

Trong nhiều vấn đề lí thuyết và ứng dụng, chúng ta cần đổi từ lôgarit theo một cơ số này sang lôgarit theo một cơ số khác.

HĐ 3. Xây dựng công thức đổi cơ số của lôgarit

Giả sử đã cho $\log_a M$ và ta muốn tính $\log_b M$. Để tìm mối liên hệ giữa $\log_a M$ và $\log_b M$, hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Đặt $y=\log_a M$, tính M theo y,

b) Lấy lôgarit theo cơ số b cả hai vế của kết quả nhận được trong câu a, từ đó suy ra công thức mới để tính y.

Lời giải

a) Đặt y $=\log_a M$, ta có $a^y=M$. Do đó, $M=a^y$.

b) Lấy logarit theo cơ số b hai vế của công thức trên, ta được: $\log_b M=\log_b\left(a^y\right)$

Sử dụng tính chất $\log_b\left(a^y\right)=y.\log_b a$, ta có: $\log_b M=y.\log_b a$

Do đó, $\log_b M=\dfrac{\log_a M}{\log_a b}$

Vậy, ta có công thức mới để tính $\log_b M$: $\log_b M=\dfrac{\log_a M}{\log_a b}$.

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì $(0<a\neq 1, 0<b\neq 1)$ và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M=\frac{\log_b M}{\log_b a}$$

Ví dụ 3. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính $\log_4 8$.

Lời giải

Ta có: $\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng:

a) Nếu a và b là hai số dương khác 1 thì $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$;

b) Nếu a là số dương khác $1, M$ là số dương và $\alpha\neq 0$, thì $\log_{a^\alpha} M=\dfrac{1}{\alpha}\log_a M$.

Lời giải

a) Theo công thức đổi cơ số, ta có: $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$.

b) Theo công thức đổi cơ số, ta có: $\log_{a^\alpha} M=\dfrac{\log_a M}{\log_a a^\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\log_a M$.

Luyện tập 3. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính $\log_9\dfrac{1}{27}$.

Lời giải

Sử dụng tính chất $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$. Ta có: $\dfrac{1}{27}=9^{-2}$ $\;l\,og_9\dfrac{1}{27}=\log_9 9^{-2}=-2.n$

3. LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

a) Lôgarit thập phân

Trong thực hành, ta hay dùng hệ đếm thập phân (hệ đếm cơ số 10); lôgarit cơ số 10 đóng vai trò quan trọng trong tinh toán.

Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là lôgarit thập phân của M, kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$ (đọc là lốc của M).

Ví dụ 5. Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức: $\mathrm{pH}=-\log\left[\mathrm{H}^+\right]$

trong đó $\left[\mathrm{H}^+\right]$ là nồng độ (tính theo mol/lit) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14. Nếu $\mathrm{pH}<7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $\mathrm{pH}>7$ thì dung dịch có tính base, còn nếu $\mathrm{pH}=7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,01 mol/ít.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ $\mathrm{pH}=7,4$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

a) Khi $\left[H^+\right]=0,01$, ta có: $\mathrm{pH}=-\log 0,01=-\log 10^{-2}=2$.

b) Nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $\left[H^+\right]=10^{-7,4}$.

b) Số e và lôgarit tự nhiên

Bài toán lãi kép liên tục và số e

Ta đã biết: Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau tm kì) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m=P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}$$

Nếu kì tính lãi được chia càng ngày càng nhỏ, tức là tính lãi hằng ngày, hằng giờ, hằng phút, hằng giây,... thì dẫn đến việc tính giới hạn của dãy số A_m khi $m\to+\infty$. Ta có:

$$A_m=P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{tm}=P\left[\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right]^{tr}.$$

Để tính giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty}A_m$, ta cần xét giới hạn $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}$. Một cách tổng quát, ta xét giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

Người ta chứng minh được giới hạn trên tồn tại, nó là một số vô tỉ có giá trị bằng 2,718281828... và kí hiệu là e. Vậy

$$e=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\approx 2,7183.$$

Từ các kết quả trên suy ra $\lim\limits_{m\to+\infty}A_m=Pe^{tr}$.

Thể thức tính lãi khi $m\to+\infty$ theo cách trên gọi là thể thức *lãi kép liên tục.*

Như vậy, với số vốn ban đầu là P, theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là $A=Pe^{tr}$.

Công thức trên gọi là *công thức lãi kép liên tục.*

Lôgarit tự nhiên

Ta có định nghĩa sau:

Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là lôgarit tự nhiên của M, kí hiệu là $\ln M$ (đọc là lôgarit Nêpe của M).

Ví dụ 6. Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau: $t=\frac{\ln 2}{r}$

Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Ta có: $r=6\%=0,06$. Do đó thời gian cần thiết để tăng gấp đôi khoản đầu tư là

$t=\frac{\ln 2}{r}=\frac{\ln 2}{0,06}\approx 11,6(\text{ năm})$.

c) Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

Có thể dùng máy tính cầm tay để tính lôgarit của một số dương.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\log 6,52$	log 1 0 ▶ 6 · 5 2 =	0.8142475957	$\log 6,52\approx 0,8142$
$\ln 6,52$	ln 6 · 5 2 =	1.874874376	$\ln 6,52\approx 1,8749$
$\log_{14}17$	log▫▫ 1 4 ▶ 1 7 =	1.073570215	$\log_{14}17\approx 1,0736$

Ví dụ 7. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

Lời giải

Ta có: $A=100.(1+0,06)^n=100.1,06^n$.

Với $A=150$, ta có: $100.1,06^n=150$ hay $1,06^n=1,5$, tức là $n=\log_{1,06}1,5\approx 6,96$.

Vì gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng (tức là 1 năm) nên n phải là số nguyên. Do đó ta chọn $n=7$.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì bác An nhận được số tiền ít nhất là 150 triệu đồng.

Vận dụng. Cô Hương gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất 6% một năm.

a) Tính số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm, nếu lãi suất được tính theo một trong các thể thức sau:

- Lãi kép kì hạn 12 tháng;
- Lãi kép kì hạn 1 tháng;
- Lãi kép liên tục.

b) Tính thời gian cần thiết để cô Hương thu được số tiền (cả vốn lẫn lãi) là 150 triệu đồng nếu gửi theo thể thức lãi kép liên tục (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

- Công thức lãi kép tính số tiền thu được sau N kì gửi là $A=100\cdot\left(1+\frac{0,06}{n}\right)^N$, trong đó n là số kì tính lãi trong 1 năm.

- Công thức lãi kép liên tục tính số tiền thu được sau t năm gửi là $A=100.e^{0.06t}$.

Lời giải

a) Sử dụng công thức : $S=P(1+r)$

- Lãi kép kì hạn 12 tháng: Lãi suất được tính theo 2 kỳ hạn 6 tháng, do đó ta có $r=0.06/2=0.03$. Số tiền cộng vốn và lãi sau năm là: $S=100,000,000(1+0.03)(1+0.03)=106,090,000$ (đồng)

- Lãi kép kì hạn 1 tháng: Lãi suất được tính theo 12 kỳ hạn 1 tháng, do đó ta có $r=0.06/12=0.005$. Số tiền cộng vốn và lãi sau năm là: $S=100,000,000(1+0.005)^{12}=106,168,099.55$ (đồng)

- Lãi kép liên tục: Ta có công thức tính số tiền cộng vốn và lãi sau năm theo thể thức lãi kép liên tục là: $S = Pe^{rt}$, trong đó e là số Euler $(e \approx 2.71828), t$ là số năm. Với trường hợp này, $r = 0.06$ và $P = 100,000,000$ Do đó, $S = 100,000,000e^{0.06t} = 150,000,000$.

b) Chia hai vế của phương trình cho 100,000,000, ta có: $e^{0.06t} = 1.5$

Lấy logarit tự nhiên của hai vế của phương trình, ta có: $0.06t = \ln(1.5)$

Do đó, $t = \dfrac{\ln(1.5)}{0.06} \approx 11.55$ năm.

Vậy thời gian cần để cô Hương thu được số tiền là 150 triệu đồng nếu gửi theo thể thức lãi kép liên tục là khoảng 11.55 năm.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. *(Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017)* Rút gọn biểu thức $A = \log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}\right)$ với $a > 0, a \neq 1$ ta được kết quả nào sau đây?

A. $\dfrac{7}{4}$. B. $\dfrac{5}{3}$. C. $\dfrac{4}{3}$. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Tự luận

Ta có $A = \log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a\sqrt{a}}}\right) = \log_a\left(a\sqrt[5]{a^3\sqrt{a.a^{\frac{1}{2}}}}\right) = \log_a\left(a.\sqrt[5]{a^3.a^{\frac{3}{4}}}\right) = \log_a a^{\frac{7}{4}} = \dfrac{7}{4}$.

Cách 2. Casio

Nhập $\log_X\left(X\sqrt[5]{X^3\sqrt{X\sqrt{X}}}\right) - \dfrac{7}{4} \xrightarrow[X=2]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{A}$

Ví dụ 2. *(Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017)* Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$. Đặt $\log_a b = \alpha$, tính theo α biểu thức $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$

A. $P = \dfrac{2 - 5\alpha^2}{\alpha}$ B. $P = \dfrac{\alpha^2 - 12}{2\alpha}$ C. $P = \dfrac{4\alpha^2 - 3}{2\alpha}$ D. $P = \dfrac{\alpha^2 - 3}{\alpha}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3 = \dfrac{1}{2}\log_a b - 2\log_b a^3$

$$=\frac{1}{2}\log_a b-6\log_b a=\frac{1}{2}\log_a b-\frac{6}{\log_a b}=\frac{\alpha^2-12}{2\alpha}$$

Ví dụ 3. (Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017) Cho $x>0$ thỏa mãn $\log_2(\log_8 x)=\log_8(\log_2 x)$. Tính $(\log_2 x)^2$

A. 3 B. $3\sqrt{3}$ C. 27 D. 9

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t=\log_2 x,$ ta có $\log_8 x=\log_{2^3} x=\frac{1}{3}.\log_2 x=\frac{t}{3}\Rightarrow \log_2\frac{t}{3}=\log_8 t\Leftrightarrow \log_2\frac{t}{3}=\frac{1}{3}\log_2 t$

$$\Leftrightarrow \log_2\frac{t}{3}=\log_2\sqrt[3]{t}\Leftrightarrow\frac{t}{3}=\sqrt[3]{t}\Leftrightarrow t=3\sqrt{3}\Rightarrow(\log_2 x)^2=t^2=27\Rightarrow\boxed{C}$$

Cách 2. Nhập $\log_2(\log_8 x)-\log_8(\log_2 x)\xrightarrow[x=2]{Shift+Calc} luu\ A$

Nhập $(\log_2 x)^2-27\xrightarrow[X=A]{Calc}0\Rightarrow\boxed{C}$

Ví dụ 4. *(Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017)* Cho $\log_2 m=a$ và $A=\log_m 8m$ $(m>0,m\neq 1)$. Khi đó mối quan hệ giữa A và a là:

A. $A=(3-a)a.$ B. $A=\frac{3-a}{a}.$ C. $A=\frac{3+a}{a}.$ D. $A=(3+a)a.$

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Biến đổi $\log_m 8m$ theo $\log_2 m$

Ta có $A=\log_m 8+\log_m m=3\log_m 2+1=\frac{3}{a}+1\Leftrightarrow A=\frac{3+a}{a}\Rightarrow\boxed{C}$

Cách 2. Từ giả thiết $\log_2 m=a$ rút ra m và thế vào

Ta có $\log_2 m=a\Leftrightarrow m=2^a$ khi đó

$$A=\log_m 8m=\log_{2^a}(8.2^a)=\frac{1}{a}(\log_2 2^3+a\log_2 2)=\frac{3+a}{a}\Rightarrow\boxed{C}$$

Cách 3. Sử dụng Casio. Không mất tính tổng quát cho $m=2\Rightarrow a=\log_2 2=1$

Nhập $\log_M(8M)-\frac{3+A}{A}\xrightarrow[M=A=2]{Calc}0\Rightarrow\boxed{C}$

Ví dụ 5. *(Trường Chuyên Võ Nguyên Giáp – 2017)* Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy=10^a, yz=10^{2b}, zx=10^{3c}$ $(a,b,c\in R)$. Tính $P=\log x+\log y+\log z$

A. $P=3abc$ B. $P=a+2b+3c$

C. $P=6abc$ D. $P=\frac{a+2b+3c}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $xy = 10^{\alpha}, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c} \Rightarrow (xyz)^2 = 10^{a+2b+3c}$.

Suy ra $P = \log x + \log y + \log z = \log(xyz) = \frac{1}{2}\log(xyz)^2 = \frac{1}{2}\log 10^{a+2b+3c} = \frac{a+2b+3c}{2}$.

Ví dụ 6. (Chuyên Hùng Vương – Gia Lai Lần 1 – 2017) Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8\log_b\left(a\sqrt[3]{b}\right) = -\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right) + 2017$.

A. $P = 2019$. B. $P = 2020$. C. $P = 2017$. D. $P = 2016$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Ta có

$$\log_a^2 b - 8\left(\log_b a + \frac{1}{3}\log_b b\right) + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \log_a^2 b - \frac{8}{\log_a b} = 0 \Leftrightarrow \log_a b = 2$$

Do đó $P = \log_a a^{\frac{4}{3}} + \log_a b^{\frac{1}{3}} + 2017 = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}.\log_a b + 2017 = 2019 \Rightarrow \boxed{A}$

Cách 2. Không mất tính tổng quát cho $a = 2$

Nhập $\log_2(X)^2 - 8\log_X\left(2\sqrt[3]{X}\right) + \frac{8}{3} \xrightarrow[X=b=2]{Shift+Calc} 4$

Nhập $P = \log_A\left(A\sqrt[3]{AB}\right) + 2017 \xrightarrow[A=2;B=4]{Calc} 2019 \Rightarrow \boxed{B}$

Nhận xét:

- Thông thường để giải theo kiểu trắc nghiệm ta sẽ cho *a* hoặc *b* bằng 1 số thực cụ thể và giải phương trình theo *b* hoặc *a*. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp biểu phức tạp khó giải thì ta nên chọn cho *a* và *b* đồng thời các số thực, quan trọng là chọn như thế nào để thoả mãn bài toán, kinh nghiệm ở đây ta thấy để rút gọn $\log_a b$ thì $b = a^n$. Theo giả thiết nên ta kiểm tra như sau:

Nhập $\log_A^2 B - 8\log_B\left(A\sqrt[3]{B}\right) + \frac{8}{3} \xrightarrow[A=2;B=2^2]{Calc} 0$ thoả mãn

Nhập $P = \log_A\left(A\sqrt[3]{AB}\right) + 2017 \xrightarrow[A=2;B=4]{Calc} 2019$

- Ta có thể nhập như sau:

$$\log_X(Y)^2 - 8\log_Y\left(X\sqrt[3]{Y}\right) + \frac{8}{3} \xrightarrow[Y=3;X=2]{Shift+Calc} 1,732050808 \xrightarrow{luu} A$$

Nhập $P = \log_X\left(X\sqrt[3]{XY}\right) + 2017 \xrightarrow[X=a=A;Y=3]{Calc} 2019 \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 7. *(Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc L2 – 2017)* Cho a,b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = m$, tính theo *m* giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

A. $\frac{4m^2-3}{2m}$ B. $\frac{m^2-12}{2m}$ C. $\frac{m^2-12}{m}$ D. $\frac{m^2-3}{2m}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $P=\log_{a^2}b-\log_{\sqrt{b}}a^3=\frac{1}{2}\log_a b-6\log_b a$

$=\frac{1}{2}\log_a b-\frac{6}{\log_a b}=\frac{1}{2}m-\frac{6}{m}=\frac{m^2-12}{m}$.

Cách 2. Ta có $\log_a b=m\Leftrightarrow b=a^m$ thay vào ta được

$P=\log_{a^2}b-\log_{\sqrt{b}}a^3=\log_{a^2}a^m-\log_{\sqrt{a^m}}a^3=\frac{m}{2}-\frac{6}{m}=\frac{m^2-12}{m}$.

Cách 3. Cho $a=m=2\Rightarrow b=4$

Nhập $P=\log_{a^2}b-\log_{\sqrt{b}}a^3-\frac{m^2-12}{2m}\xrightarrow[a=m=2;b=4]{Calc}0\Rightarrow\boxed{B}$

Ví dụ 8. *(Sở GD và Vũng Tàu năm 2017)* Cho x,y,z,a,b,c thoả mãn $\frac{\ln x}{a}=\frac{\ln y}{b}=\frac{\ln z}{c}=\ln t$ và $xy=z^2t^2$. Tính giá trị của $P=a+b-2c$

A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

Lời giải

Chọn D

Cách 1. $\frac{\ln x}{a}=\frac{\ln y}{b}=\frac{\ln z}{c}=\ln t\Rightarrow\begin{cases}x=t^a\\y=t^b\\z=t^c\\xy=z^2t^2\end{cases}\Rightarrow t^a.t^b=t^{2c}t^2\Leftrightarrow a+b=2c+2$

$\Rightarrow a+b-2c=2$.

Chú ý: Có thể đặt $\frac{\ln x}{a}=\frac{\ln y}{b}=\frac{\ln z}{c}=\ln t=u$

Cách 2. $\frac{\ln x}{a}=\frac{\ln y}{b}=\frac{\ln z}{c}=\ln t\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{\ln x}{\ln t}=\log_t x\\b=\frac{\ln y}{\ln t}=\log_t y\\c=\frac{\ln z}{\ln t}=\log_t z\end{cases}$

$\Rightarrow a+b-2c=\log_t x+\log_t y-2\log_t z=\log_t\left(\frac{xy}{z^2}\right)=\log_t t^2=2$.

Cách 3. Cho $a=2;b=3;c=4$ thì từ $xy=z^2t^2\Rightarrow t=\frac{\sqrt{6}}{4}$

Khi đó $\begin{cases} a = \dfrac{\ln x}{\ln t} \xrightarrow[x=2;t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc} A \\ b = \dfrac{\ln y}{\ln t} \xrightarrow[y=3;t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc} B \\ c = \dfrac{\ln z}{\ln t} \xrightarrow[z=2;t=\frac{\sqrt{6}}{4}]{Calc} C \end{cases} \Rightarrow P = a+b-2c = A+B-2C = 2$.

Ví dụ 9. *(Trung Tâm BDVH Lý Tự Trọng)* Cho $\dfrac{\log a}{p} = \dfrac{\log b}{q} = \dfrac{\log c}{r} = \log x \neq 0; \dfrac{b^2}{ac} = x^y$. Tính y theo p, q, r.

A. $y = q^2 - pr$.   B. $y = \dfrac{p+r}{2q}$.   C. $y = 2q - p - r$.   D. $y = 2q - pr$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có $\dfrac{\log a}{p} = \dfrac{\log b}{q} = \dfrac{\log c}{r} = \log x \Rightarrow \begin{cases} \log a = p\log x \\ \log b = q\log x \\ \log c = r\log x \end{cases}$

Và $\dfrac{b^2}{ac} = x^y \Leftrightarrow \log\dfrac{b^2}{ac} = \log x^y$

$\Rightarrow y\log x = 2\log b - \log a - \log c = 2q\log x - p\log x - r\log x = \log x(2q-p-r)$

$\Rightarrow y = 2q - p - r$ (do $\log x \neq 0$). Chọn đáp án C

Ví dụ 10. *(Chuyên Lương Văn Tụy Lần 1 – 2017)* Cho $x > 0, x \neq 1$ thỏa mãn biểu thức $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_3 x} + ... + \dfrac{1}{\log_{2017} x} = M$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $x = \sqrt[2017]{\dfrac{2017!}{M}}$ B. $x = 2017^M$ C. $x = \dfrac{2017!}{M}$ D. $x^M = 2017!$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a b.\log_b a = 1 \Rightarrow \log_b a = \dfrac{1}{\log_b a}$ $\Rightarrow M = \log_x 2 + \log_x 3 + ... + \log_x 2017$

$\Rightarrow M = \log_x(2.3.....2017) = \log_x 2017!$

$\Rightarrow x^M = 2017!$.

Ví dụ 11. Cho hai số thực dương x và y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y)$ và $\dfrac{x}{y} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$ $(a, b \in \mathbb{Z}^+)$. Tính tỉ số $S = a+b$.

A. $S = 6$ B. $S = 8$ C. $S = 4$ D. $S = 11$

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Theo giả thiết $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y)$ có hai ẩn ta đưa về 1 ẩn như sau

$$\begin{cases} \log_4 x = \log_9 (x+y) \\ \log_6 y = \log_4 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6^{\log_4 x} \\ \log_4 x = \log_9 \left(x + 6^{\log_4 x}\right) \end{cases}$$

Nhập $\begin{cases} \log_4 (X) - \log_9 \left(X + 6^{\log_4 (X)}\right) \xrightarrow[X=2]{Shift+Calc} 5{,}162430201 \xrightarrow{luu} A = x \\ 6^{\log_4 (X)} \xrightarrow[X=A]{Calc} 8{,}385348209 \xrightarrow{luu} B = y \end{cases}$

Mod 7 nhập: $f(X) = \sqrt{X} - 2\dfrac{A}{B}$ với $a = f(X), b = X$

$Start = 1; End = 9; Step = 1$ và nhìn trên bảng ta được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow \boxed{A}$

Cách 2. Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t \\ 4^t + 6^t - 9^t = 0 \xrightarrow{Mod\ 5+3} \left(\dfrac{2}{3}\right)^t = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{-a+\sqrt{b}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6 \Rightarrow \boxed{A} \end{cases}$$

Ví dụ 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức $T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25}$

A. $T = 76 + \sqrt{11}$ B. $T = 31141$ C. $T = 2017$ D. $T = 469$

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết biến đổi

$$T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25} = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} + \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} + \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}$$

$$= (27)^{\log_3 7} + (49)^{\log_7 11} + \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25}$$

Ta có $\begin{cases} (27)^{\log_3 7} = \left(3^3\right)^{\log_3 7} = \left(3^{\log_3 7}\right)^3 = 7^3 = 343 \\ (49)^{\log_7 11} = \left(7^2\right)^{\log_7 11} = \left(7^{\log_7 11}\right)^2 = 11^2 = 121 \\ \left(\sqrt{11}\right)^{\log_{11} 25} = \left(11^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{11} 25} = \left(11^{\log_{11} 25}\right)^{\frac{1}{2}} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \end{cases}$.

$\Rightarrow T = 343 + 121 + 5 = 469$.

Ví dụ 13. *(Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc L2 – 2017)* Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 5^y = 10^{-z}$. Giá trị của biểu thức $A = xy + yz + zx$ bằng?

A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có $2^x=5^y=10^{-z}\Leftrightarrow 2^x=5^y=\dfrac{1}{10^z}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x10^z=1\\5^y10^z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(2^x10^z\right)^y=1\\\left(5^y10^z\right)^x=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2^{xy}10^{yz}=1\\5^{xy}10^{zx}=1\end{cases}\Rightarrow\left(2^{xy}10^{yz}\right)\left(5^{xy}10^{zx}\right)=10^{xy+yz+zx}=1\Rightarrow A=xy+yz+zx=0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 2. Cho $x=2\Rightarrow 5^y=10^{-z}=4\Leftrightarrow\begin{cases}y=\log_5 4\to B\\z=-\log_{10}4\to C\end{cases}$

Nhập $A=XY+YM+MX\xrightarrow[X=2;Y=B;M=C]{Calc}0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 3. $2^x=5^y=10^{-z}=t\Rightarrow\begin{cases}x=\log_2 t\\y=\log_5 t\\z=-\log_{10}t\end{cases}$. Nhập $A=xy+yz+zx$

$=\log_2 M.\log_5 M+\log_5 M.\left(-\log_{10}M\right)+\left(-\log_{10}M\right).\log_2 M\xrightarrow[t=M=2]{Calc}0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 4. Ta có $2^x=5^y=10^{-z}\Leftrightarrow\begin{cases}2=10^{-\frac{z}{x}}\\5=10^{-\frac{z}{y}}\end{cases}\Rightarrow 2.5=10=10^{-\frac{z}{x}-\frac{z}{y}}\Leftrightarrow-\dfrac{z}{x}-\dfrac{z}{y}=1$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0\Rightarrow\boxed{B}$

Cách 5. Ta có $2^x=5^y=10^{-z}=t\Rightarrow\begin{cases}2=t^{\frac{1}{x}}\\5=t^{\frac{1}{y}}\\10=t^{-\frac{1}{z}}\end{cases}\Rightarrow 2.5=10\Leftrightarrow t^{\frac{1}{x}}.t^{\frac{1}{y}}=t^{-\frac{1}{z}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{z}$

$\Leftrightarrow xy+yz+zx=0\Rightarrow\boxed{B}$

Ví dụ 14. Cho ba điểm $A\left(b;\log_a b\right)$, $B\left(c;2\log_a c\right)$, $C\left(b;3\log_a b\right)$ với $0<a\neq1, b>0$, $c>0$. Biết B là trọng tâm của tam giác OAC với O là gốc tọa độ. Tính $S=2b+c$.

A. $S=9$. B. $S=7$. C. $S=11$. D. $S=5$.

Lời giải

Chọn A

Vì B là trọng tâm của tam giác OAC nên $\begin{cases}\dfrac{0+b+b}{3}=c\\\dfrac{0+\log_a b+3\log_a b}{3}=2\log_a c\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b+b=3c\\4\log_a b=6\log_a c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=3c\\2\log_a b=3\log_a c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=3c\\\log_a b^2=\log_a c^3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 3c \\ b^2 = c^3 \end{cases} \xrightarrow{c>0} \begin{cases} b = \dfrac{27}{8} \\ c = \dfrac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow S = 2b + c = 9.$$

Dạng 2. Biểu diễn theo lôga

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. *(Đề minh họa 2017)* Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab}$ B. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab}$

C. $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$ D. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Tự luận

Ta có $\log_6 45 = \log_6 9 + \log_6 5$.

$$\log_6 9 = 2\log_6 3 = \frac{2}{\log_3 6} = \frac{2}{1+\log_3 2} = \frac{2}{1+\dfrac{1}{a}} = \frac{2a}{a+1}.$$

$$\log_6 5 = \frac{1}{\log_5 6} = \frac{1}{\log_5 3 + \log_5 2} = \frac{a}{b(a+1)} \text{ vì } \log_5 2 = \frac{b}{a}.$$

Vậy $\log_6 45 = \dfrac{2a}{a+1} + \dfrac{a}{b(a+1)} = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$.

Cách 2. Thử lần lượt 4 đáp án. Đáp án đúng là đáp án C.

Tính và lưu thành hai biến A và B. Tính $\begin{cases} \log_2 3 \to A \\ \log_5 3 \to B \end{cases}$

Nhập $\log_6 45 - \dfrac{a+2ab}{ab+b} \xrightarrow[a=A;b=B]{Calc} 0 \Rightarrow \boxed{C}$

Ví dụ 2. *(Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 2 năm 2017)* Cho $a = \log_3 2$ và $b = \log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo a và b.

A. $\dfrac{2a+b+1}{a+b}$. B. $\dfrac{2a+b-1}{a+b}$. C. $\dfrac{2a-b+1}{a+b}$. D. $\dfrac{a+b+1}{a+b}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_{10}60=2\log_{10}2+\log_{10}3+\log_{10}5=\frac{2}{1+\log_2 5}+\frac{1}{\log_3 2+\log_3 5}+\frac{1}{1+\log_5 2}$

$=\frac{2}{1+\frac{\log_3 5}{\log_3 2}}+\frac{1}{\log_3 2+\log_3 5}+\frac{1}{1+\frac{\log_3 2}{\log_3 5}}=\frac{2}{1+\frac{b}{a}}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{1+\frac{a}{b}}=\frac{2a+b+1}{a+b}$.

Ví dụ 3. *(Sở GD và ĐT Thanh Hoá năm 2017)* Cho $\log_7 12=x$, $\log_{12}24=y$ và $\log_{54}168=\frac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. B. $S=19$. C. $S=10$. D. $S=15$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Nhận xét về mối quan hệ giữa biểu thức và cơ số để phân tích hợp lí

Ta thấy $12=3.2^2;24=3.2^3;54=3^3.2;168=2^3.3.7$ do đó ta sẽ phân tích theo số 2 và 3. Số 7 làm cơ số trung gian

$\log_7 12=x\Leftrightarrow\log_7 3+2\log_7 2=x$ (1)

$xy=\log_7 12.\log_{12}24=\log_7 24\Rightarrow\log_7 3+3\log_7 2=xy$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\log_7 2=xy-x,\ \log_7 3=3x-2xy$.

Do đó $\log_{54}168=\frac{\log_7 168}{\log_7 54}=\frac{\log_7\left(2^3.3.7\right)}{\log_7\left(3^3.2\right)}=\frac{3\log_7 2+\log_7 3+1}{\log_7 2+3\log_7 3}=\frac{xy+1}{-5xy+8x}$.

Do đó $a=1,b=-5,c=8\Rightarrow S=15\Rightarrow\boxed{D}$

Cách 2: Ta có $xy=\log_7 24$ và $\log_{54}168=\frac{\log_7 168}{\log_7 54}=\frac{\log_7 24+1}{\log_7 54}$

Do đó $\log_{54}168=\frac{\log_7 168}{\log_7 54}=\frac{\log_7 24+1}{\log_7 54}=\frac{a\log_7 24+1}{b\log_7 24+c\log_7 12}$. Đồng nhất hai vế ta được

$\begin{cases}a=1\\ b\log_7 24+c\log_7 12=\log_7 54\end{cases}$. Để tìm b,c ta có thể làm như sau

Cách 2.1: Dùng mode7 ta có $b\log_7 24+c\log_7 12=\log_7 54\Leftrightarrow b=\frac{\log_7 54-c\log_7 12}{\log_7 24}$

Nhập $f(x)=\frac{\log_7 54-X\log_7 12}{\log_7 24}\left(b=f(x);c=X\right);Start=-9;End=9;Step=1$.

Ta nhìn bảng trên máy tính. Từ đó suy ra $b=-5;c=8$

Cách 2.2: Giải hệ hai ẩn hai phương trình Mode 5 +1

$\begin{cases}b\log_7 24+c\log_7 12=\log_7 54\\ 2b+3c=S-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-5\\ c=8\end{cases}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Dạng 3. So sánh

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Nếu $a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ và $\log_b \frac{4}{5} < \log_b \frac{5}{6}$ thì

A. $0 < a < 1,\ 0 < b < 1$

B. $0 < a < 1,\ b > 1$

C. $a > 1,\ b > 1$

D. $a > 1,\ 0 < b < 1$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Vì $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}}{5} < \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ và $\begin{cases} \dfrac{4}{5} < \dfrac{5}{6} \\ \log_b \dfrac{4}{5} < \log_b \dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow b > 1$

Cách 2. Vì phép so sánh là dựa vào cơ số nên ta chỉ thử với cơ số lớn hơn 1 và lớn hơn 0 nhỏ hơn 1. Coi $a = X; b = Y$

Nhập $X^{\frac{\sqrt{5}}{5}} - X^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \xrightarrow[X=2>1]{Calc} < 0 \Rightarrow \boxed{C,D}$ loại

Nhập $\log_Y \frac{4}{5} - \log_Y \frac{5}{6} \xrightarrow[Y=2]{Calc} < 0 \Rightarrow \boxed{B}$

Ví dụ 2. *(Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017)* Cho hai số thực dương a, b khác 1 thỏa mãn: $a^{\frac{13}{7}} > a^{\frac{15}{8}}, \log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 1$ và $b < 1$.

B. $a > 1$ và $b > 1$.

C. $a > 1$ và $b < 1$.

D. $a < 1$ và $b > 1$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\begin{cases} a^{\frac{13}{7}} > a^{\frac{15}{8}} \\ \dfrac{13}{7} < \dfrac{15}{8} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ và $\begin{cases} \log_b \dfrac{1}{2} < \log_b \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow b > 1$

Ví dụ 3. *(Đề minh họa 2017)* Cho hai số thực a và b, với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b < 1 < \log_b a$

B. $1 < \log_a b < \log_b a$

C. $\log_b a < \log_a b < 1$

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn B

Cách 1. Dựa vào giả thiết $1<a<b$ nên ta lấy loga hai vế theo cơ số a và b ta được.

Vì $\begin{cases} a,b>1 \\ a<b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=\log_a a<\log_a b \\ \log_b a<\log_b b=1 \end{cases} \Rightarrow \log_b a<1<\log_a b$

Cách 2. Đặc biệt hoá cho a, b là 1 số cụ thể thoả mãn $1<a<b$

Không mất tính tổng quát cho $a=2<b=3 \Rightarrow \begin{cases} \log_2 3=1,584962501>1 \\ \log_3 2=0,6309297536<1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D}$

Ví dụ 3. *(Chuyên Lam Sơn Lần 1 năm 2017)* Cho $0<x<1$; $0<a;b;c\neq 1$ và $\log_c x>0>\log_b x>\log_a x$ so sánh a,b,c ta được kết quả:

A. $a>b>c$ B. $c>a>b$ C. $c>b>a$ D. $b>a>c$

Lời giải

Chọn D

Vì $0<x<1 \Rightarrow \ln x<0$. Do đó:

$$\log_c x>0>\log_b x>\log_a x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{\ln c}>0>\frac{\ln x}{\ln b}>\frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow \ln c<0<\ln a<\ln b$$

Mà hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên ta suy ra $c<a<b$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 6.9. Tính:

a) $\log_2 2^{-13}$; b) $\ln e^{\sqrt{2}}$;

c) $\log_8 16-\log_8 2$; d) $\log_2 6\cdot\log_6 8$.

Lời giải

a) $\log_2 2^{-12}=-12\log_2 2=-12$.

b) $\ln e^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ln(e)=\sqrt{2}\times 1=\sqrt{2}$.

c) $\log_8 16-\log_8 2=\log_8\frac{16}{2}=\log_8 8=1$.

d) $\log_2 6.\log_6 8=\frac{\log_2 6}{\log_2 6}.\frac{\log_6 8}{\log_6 2}=\frac{\log_2 2.\log_2 4}{\log_2 2.\log_2 3}=\frac{\log_2 4}{\log_2 3}=\log_3 4\approx 1,26186$

Bài 6.10. Viết mỗi biểu thức sau thành lôgarit của một biểu thức (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $A=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\ln\left(x^2-1\right)$; b) $B=21\log_3\sqrt[3]{x}+\log_3\left(9x^2\right)-\log_3 9$.

Lời giải

a) $A=\ln\left(\frac{x(x+1)}{(x-1)\left(x^2-1\right)}\right)=\ln(x(x+1))-\ln\left((x-1)\left(x^2-1\right)\right)$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

b) $B=21\log_3\sqrt[3]{x}+\log_3\left(9x^2\right)-\log_3 9=\log_3\left(x^7\right)+\log_3\left(9x^2\right)-\log_3 9=\log_3\left(\frac{9x^9}{9}\right)=\log_3\left(x^9\right)$

Bài 6.11. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A=\log_{\frac{1}{3}}5+2\log_9 25-\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{5}$;

b) $B=\log_a M^2+\log_{a^2}M^4$.

Lời giải

a) $A=\frac{\log_{3^{-1}}5}{1}+\frac{\log_{3^2}25}{2}-\frac{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}}{1}$

$=-\log_3 5+2\log_3 25-\frac{\log_5\frac{1}{5}}{2}=-\log_3 5+2\log_3 5-\log_3 5$

$=-\log_3 5+2\log_3 5-\log_3=\log_3 5$

b) $\mathrm{B}=\log_a\left(M^2\right)+\log_{a^2}\left(M^4\right)=2\log_a M+4\log_a M=6\log_a M$

Bài 6.12. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A=\log_2 3.\log_3 4.\log_4 5.\log_5 6.\log_6 7.\log_7 8$;

b) $B=\log_2 2.\log_2 4\ ...\log_2 2^n$.

Lời giải

a) $A=\frac{\log_2 3}{\log_2 2}.\frac{\log_3 4}{\log_3 3}.\frac{\log_4 5}{\log_4 4}.\frac{\log_5 6}{\log_5 5}.\frac{\log_6 7}{\log_6 6}.\frac{\log_7 8}{\log_7 7}=\frac{\log_2 8}{\log_2 2}=3$

b) $B=\log_2 2.\log_2 4\ldots\log_2 2^n=\frac{1}{\log_2 2}.\frac{1}{\log_2 4}\ldots\frac{1}{\log_2 2^n}=\frac{1}{1+2+\ldots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

Bài 6.13. Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a=15500(5-\log p)$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao $8850\ \mathrm{m}$ so với mực nước biển.

Lời giải

Để tính áp suất không khí ở độ cao $8.850\,\mathrm{m}$, ta thay a $=8.850$ vào công thức và giải phương trình để tìm giá trị của p.

Ta có: $a=15.500(5-\log p).8.850=15.500(5-\log p)$

$5-\log p=\frac{8.850}{15.500}$

$\log p=5-\frac{8.850}{15.500}$

$\log p=3.407$

$p=10^3\cdot 407\approx 245,37Pa$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vậy áp suất không khí ở độ cao $8.850\,\mathrm{m}$ so với mực nước biển là khoảng 245,37 Pa.

Bài 6.14. Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau: $L(I)=10\log\frac{I}{I_0}$

trong đó $I_0=10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I=10^{-7}\ \mathrm{W/m^2}$.

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $\mathrm{I}=10^{-3}\ \mathrm{W/m^2}$.

Lời giải

a) Áp dụng công thức: $L(I)=10\log\frac{I}{I_0}$

$$L\left(10^{-7}\right)=10\log\frac{10^{-7}}{10^{-12}}=10\log 10^5=10\times 5=50dB$$

b) Thay các giá trị ta có: $L\left(10^{-3}\right)=10\log\frac{10^{-3}}{10^{-12}}=10\log 10^9=10\times 9=90\,\mathrm{dB}$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 a=x$, $\log_2 b=y$. Tính $P=\log_2\left(a^2b^3\right)$.

A. $P=x^2y^3$ B. $P=x^2+y^3$ C. $P=6xy$ D. $P=2x+3y$

Lời giải

Chọn D

$P=\log_2\left(a^2b^3\right)=\log_2 a^2+\log_2 b^3=2\log_2 a+3\log_2 b=2x+3y$.

Câu 2: Cho $a,b>0$ và $a,b\neq 1$, biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 18. B. 24. C. 12. D. 6.

Lời giải

Chọn B

$P=\log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4=\left(6\log_a b\right).\left(4\log_b a\right)=24$.

Câu 3: Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P=\log_b\left(b^2.b^{\frac{1}{2}}\right)$.

A. $P=\frac{3}{2}$. B. $P=1$. C. $P=\frac{5}{2}$. D. $P=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\log_b\left(b^2.b^{\frac{1}{2}}\right)=\log_b b^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}\log_b b=\frac{5}{2}$.

Câu 4: Cho $a>0$, $a\neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

A. $2a$. B. 2. C. 2^a. D. a^2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{\log_a a^2} = a^{2\log_a a} = a^2$.

Câu 5: Giá trị biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$ là:

A. $A = 8$. B. $A = 15$. C. $A = 405$. D. $A = 86$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5} = 2^{\log_4 9}.2^{\log_2 5} = 2^{\log_2 3}.2^{\log_2 5} = 3.5 = 15$.

Câu 6: Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$

A. $P = -9$. B. $P = -1$. C. $P = 1$. D. $P = 9$.

Lời giải

Chọn A

• **Tự luận** : $P = \log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right) = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{-3} = -9\log_a a = -9$

• **Trắc nghiệm** : Sử dụng máy tính, thay $a = 2$ rồi nhập biểu thức $\log_{\sqrt[3]{a}}\left(\frac{1}{a^3}\right)$ vào máy bấm = ta được kết quả $P = -9$.

Câu 7: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = -\frac{1}{2}$. C. $I = 2$. D. $I = -2$.

Lời giải

Chọn C

$I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right) = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) = 2$.

Câu 8: Cho a là số thực dương và b là số thực khác 0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right) = 1 + \frac{1}{3}\log_3 a - 2\log_3|b|$. B. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right) = 1 + 3\log_3 a - 2\log_3 b$.

C. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right) = 1 + 3\log_3 a - 2\log_3|b|$. D. $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right) = 1 + 3\log_3 a + 2\log_3 b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_3\left(\frac{3a^3}{b^2}\right) = \log_3\left(3a^3\right) - \log_3 b^2 = \log_3 3 + \log_3 a^3 - \log_3 b$.

$= \log_3 3 + \log_3 a^3 - \log_3 b = 1 + 3\log_3 a - 2\log_3|b|$.

Câu 9: Cho $\log 3 = a$. Tính $\log 9000$ theo a.

A. $6a$ B. a^2+3. C. $3a^2$. D. $2a+3$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $\log 9000 = \log 9 + \log 1000 = 2\log 3 + 3 = 2a+3$.

Cách 2: Gán $\log 3 = a$. Tính $\log 9000 - (2a+3) = 0$.

Câu 10: Cho $\log_6 9 = a$. Tính $\log_3 2$ theo a

A. $\frac{a}{2-a}$. B. $\frac{a+2}{a}$. C. $\frac{a-2}{a}$. D. $\frac{2-a}{a}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_6 9 = 2\log_{2.3} 3 \Leftrightarrow a = \frac{2}{\log_3 2.3} \Leftrightarrow \log_3 2 + 1 = \frac{2}{a} \Leftrightarrow \log_3 2 = \frac{2-a}{a}$.

Câu 11: Cho $a, b > 0$. Rút gọn biểu thức $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

A. $2\log_a b$ B. 0 C. $\log_a b$ D. $4\log_a b$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4 = 2\log_a b + \frac{1}{2}.4.\log_a b = 4\log_a b$.

Câu 12: Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. 6. B. -6. C. $\frac{1}{6}$. D. $\frac{-1}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Vì a, b là các số thực lớn hơn 1 nên ta có:

$$\begin{cases} \log_a x = 2 \\ \log_b x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^2 \\ x = b^3 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 = b^3 \Leftrightarrow a = \sqrt{b^3} \Leftrightarrow a = b^{\frac{3}{2}}.$$

$$P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2}} x = \log_{b^{\frac{-1}{2}}} x = -2\log_b x = -6.$$

Câu 13: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$. B. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$.

C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$. D. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_6 45=\frac{\log_3\left(5.3^2\right)}{\log_3(2.3)}=\frac{\log_3 5+2}{\log_3 2+1}=\frac{\frac{1}{b}+2}{\frac{1}{a}+1}=\frac{a+2ab}{ab+b}.$$

Câu 14: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a}\neq b$, $a\neq 1$, $\log_a b=2$. Tính $T=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{ba}$.

A. $T=-\frac{2}{5}$. B. $T=\frac{2}{5}$. C. $T=\frac{2}{3}$. D. $T=-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_a b=2\Rightarrow \log_b a=\frac{1}{2}$.

$$T=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{ba}=\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{b}+\log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}\sqrt[3]{a}=\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}}\frac{\sqrt{a}}{b}}+\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}}\frac{\sqrt{a}}{b}}.$$

$$=\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{b}}\sqrt{a}-\log_{\sqrt[3]{b}}b}+\frac{1}{\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt{a}-\log_{\sqrt[3]{a}}b}=\frac{1}{\frac{3}{2}\log_b a-3}+\frac{1}{\frac{3}{2}-3\log_a b}.$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}-3}+\frac{1}{\frac{3}{2}-3.2}=-\frac{2}{3}.$$

Câu 15: Với $a=\log_2 5$ và $b=\log_3 5$, giá trị của $\log_6 5$ bằng

A. $\frac{ab}{a+b}$. B. $\frac{a+b}{ab}$. C. $\frac{1}{a+b}$. D. $a+b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_6 5=\frac{1}{\log_5 6}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}$.

Câu 16: Biết $\log\left(xy^3\right)=1$ và $\log\left(x^2y\right)=1$, tìm $\log(xy)$?

A. $\log(xy)=\frac{5}{3}$. B. $\log(xy)=\frac{1}{2}$. C. $\log(xy)=\frac{3}{5}$. D. $\log(xy)=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log\left(xy^3\right)=1\Leftrightarrow \log(xy)+2\log y=1$, $\log\left(x^2y\right)=1\Leftrightarrow \log(xy)+\log x=1$

Vậy $\log x=2\log y\Leftrightarrow x=y^2$

Xét $\log\left(xy^3\right)=1\Leftrightarrow \log\left(y^2y^3\right)=1\Leftrightarrow 5\log y=1\Leftrightarrow y=10^{\frac{1}{5}}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vậy $\log(xy)=\log\left(y^3\right)=\log\left(10^{\frac{3}{5}}\right)=\frac{3}{5}$

Câu 17: Tính giá trị của biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (với $0<a\neq 1;0<b\neq 1$).

A. $P=2$. B. $P=1$. C. $P=\sqrt{3}$. D. $P=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng các quy tắc biến đổi logarit

$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$

. $=\frac{1}{2}\left[\log_a a^{10}+\log_a b^2\right]+2\left[\log_a a-\log_a\sqrt{b}\right]+3.(-2)\log_b b$.

$=\frac{1}{2}\left[10+2\log_a b\right]+2\left[1-\frac{1}{2}\log_a b\right]-6=1$.

Câu 18: Biết $\log_{27}5=a$, $\log_8 7=b$, $\log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ tính theo a, b, c bằng:

A. $\frac{3(b+ac)}{c+2}$. B. $\frac{3b+2ac}{c+1}$. C. $\frac{3b+2ac}{c+2}$. D. $\frac{3(b+ac)}{c+1}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{27}5=\frac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow\log_3 5=3a$, $\log_8 7=\frac{1}{3}\log_2 7=b\Leftrightarrow\log_2 7=3b$.

Mà $\log_{12}35=\frac{\log_2(7.5)}{\log_2\left(3.2^2\right)}=\frac{\log_2 7+\log_2 5}{\log_2 3+2}=\frac{\log_2 7+\log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3+2}=\frac{3b+c.3a}{c+2}=\frac{3(b+ac)}{c+2}$.

Câu 19: Cho $a,b>0$, nếu $\log_8 a+\log_4 b^2=5$ và $\log_4 a^2+\log_8 b=7$ thì giá trị của ab bằng

A. 2^9. B. 8. C. 2^{18}. D. 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\begin{cases}\log_8 a+\log_4 b^2=5\\ \log_4 a^2+\log_8 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b=5\\ \log_2 a+\frac{1}{3}\log_2 b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 a=6\\ \log_2 b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2^6\\ b=2^3\end{cases}$.

Vậy $ab=2^9$.

Câu 20: Số nào trong các số sau lớn hơn 1

A. $\log_{0,5}\frac{1}{8}$. B. $\log_{0,2}125$. C. $\log_{\frac{1}{6}}36$. D. $\log_{0,5}\frac{1}{2}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn A

Ta có:

$\log_{0,5}\frac{1}{8}=\log_{2^{-1}}2^{-3}=3>1$, $\log_{0,2}125=\log_{5^{-1}}5^{3}=-3<1$.

$\log_{\frac{1}{6}}36=\log_{6^{-1}}6^{2}=-2<1$, $\log_{0,5}\frac{1}{2}=\log_{0,5}0,5=1$.

Câu 21: .Cho a, b là các số thực, thỏa mãn $0<a<1<b$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_b a+\log_a b<0$.
B. $\log_b a>1$.
C. $\log_a b>0$.
D. $\log_a b+\log_b a\ge 2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $0<a<1<b$ nên $\log_b a<\log_b 1\Leftrightarrow \log_b a<0$ và $\log_a b<\log_a 1\Leftrightarrow \log_a b<0$.

Suy ra : $\log_b a+\log_a b<0$.

Câu 22: Cho các số thực a, b thỏa mãn $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{1}{\log_a b}<1<\frac{1}{\log_b a}$.
B. $\frac{1}{\log_b a}<1<\frac{1}{\log_a b}$.
C. $1<\frac{1}{\log_a b}<\frac{1}{\log_b a}$.
D. $\frac{1}{\log_a b}<\frac{1}{\log_b a}<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $1<a<b$ nên ta có $\log_b a<\log_b b\Leftrightarrow \log_b a<1$ và $\log_a a<\log_a b\Leftrightarrow 1<\log_a b$.

Do đó $\log_b a<1<\log_a b\Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b}<1<\frac{1}{\log_b a}$.

Câu 23: Cho $0<a<b<1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_b a>\log_a b$.
B. $\log_b a<\log_a b$.
C. $\log_a b>1$.
D. $\log_a b<0$.

Lời giải

Chọn A

Do $0<a<1$ nên hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Đáp án B sai, vì: Với $b<1\Rightarrow \log_a b>\log_a 1\Leftrightarrow \log_a b>0$.

Đáp án D sai, vì: Với $a<b\Rightarrow \log_a a>\log_a b\Leftrightarrow \log_a b<1$.

Với $0<a<b<1$ ta có $0<\log_a b<1$.

Đáp án C sai, vì: Nếu $\log_b a<\log_a b\Leftrightarrow \frac{1}{\log_a b}<\log_a b\Leftrightarrow (\log_a b)^2>1$ (vô lí).

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Đáp án A đúng, vì: Nếu $\log_b a > \log_a b \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a b} > \log_a b \Leftrightarrow (\log_a b)^2 < 1$ (luôn đúng).

Câu 24: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\log_3 5 > 0$.

B. $\log_{2+x^2} 2016 < \log_{2+x^2} 2017$.

C. $\log_{0,3} 0,8 < 0$.

D. $\log_3 4 > \log_4 \left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{0,3} 0,8 < 0 \Leftrightarrow 0,8 > 0,3^0 \Leftrightarrow 0,8 > 1$ (sai)

Câu 25: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_3 \pi = 1$.

B. $\ln 3 < \log_3 e$.

C. $\log_3 5 > \log_7 4$.

D. $\log_{\frac{1}{2}} 2 > 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3 5 > \log_3 3 \Rightarrow \log_3 5 > 1$

$\log_7 4 < \log_7 7 \Rightarrow \log_7 4 < 1$

Vậy: $\log_3 5 > \log_7 4$.

Câu 26: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\log_b a < 0$.

B. $m = 3$.

C. $m = -2$.

D. $\log_a b > 1$.

Lời giải

Chọn B

Vì $0 < a < b < 1$ nên

❍ $\log_b a > \log_b b = 1 \Rightarrow$ A sai.

❍ $\Leftrightarrow x + 2y + 5z - 5 = 0 \Rightarrow \log_b a > \log_a b \Rightarrow$ B đúng, C sai.

❍ $\log_a a > \log_a b \Leftrightarrow \log_a b < 1 \Rightarrow$ D sai.

Câu 27: Cho hai số thực a,b thỏa mãn điều kiện $0 < a < b < 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1 < \log_a b < \log_b a$.

B. $\log_a b < 1 < \log_b a$.

C. $1 < \log_b a < \log_a b$.

D. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0 < a < 1$ nên với $a < b$ ta có: $1 = \log_a a > \log_a b \Rightarrow \log_a b < 1$.

Tương tự do $0 < b < 1$ nên với $a < b$ ta có: $\log_b a > \log_b b = 1$.

Vậy $\log_a b < 1 < \log_b a$.

Câu 28: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{e}{2}} a<\log_{\frac{e}{2}} b$.

B. Nếu $0<a<b$ thì $\log a<\log b$.

C. Nếu $0<a<b$ thì $\ln a<\ln b$.

D. Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a<\log_{\frac{\pi}{4}} b$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $0<a<b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a>\log_{\frac{\pi}{4}} b$ do $\frac{\pi}{4}<1$.

Câu 29: Gọi $a=3^{\log_{0,5}4}; b=3^{\log_{0,5}13}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a<1<b$.

B. $b<a<1$.

C. $a<b<1$.

D. $b<1<a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a=3^{\log_{0,5}4}<3^{\log_{0,5}1}=1$, $b=3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}1}=1$ (1)

Lại có $3^{\log_{0,5}13}<3^{\log_{0,5}4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $b<a<1$

Câu 30: Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\log_2 xy=\log_2 x+\log_2 y$

B. $\log_2 \sqrt{xy}=\frac{1}{2}(\log_2 x+\log_2 y)$

C. $\log_2 \frac{x}{y}=\log_2 x-\log_2 y$

D. $\log_2 (x+y)=\log_2 x+\log_2 y$

Lời giải

Chọn D

Do $\log_2 x+\log_2 y=\log_2 (xy)$.

Câu 31: Cho hai số thực dương a và b, với $a\neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$.

B. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$.

C. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$.

D. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$.

Lời giải

Chọn C

Với a, $b>0$ và $a\neq 1$, ta có

$\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a(ab)=\frac{1}{2}(\log_a a+\log_a b)=\frac{1}{2}(1+\log_a b)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$..

Câu 32: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. B. $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$. C. $\ln(ab)=\ln a.\ln b$. D. $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 33: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$.

B. $\log_a b=\frac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

D. $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ nên C đúng.

Câu 34: Giả sử ta có hệ thức $a^2+b^2=7ab$ $(a,b>0)$. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $2\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b.$

B. $2\log_2\frac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b.$

C. $\log_2\frac{a+b}{3}=2(\log_2 a+\log_2 b).$

D. $4\log_2\frac{a+b}{6}=\log_2 a+\log_2 b.$

Lời giải

Chọn B

+) $2\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b\Leftrightarrow\log_2(a+b)^2=\log_2 ab\Leftrightarrow(a+b)^2=ab\Leftrightarrow a^2+b^2=-ab$

+) $2\log_2\frac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{3}\right)^2=ab\Leftrightarrow(a+b)^2=9ab\Leftrightarrow a^2+b^2=7ab$.

Câu 35: Cho a, b là các số thực dương thoả mãn $a^2+b^2=14ab$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\ln\frac{a+b}{4}=\frac{\ln a+\ln b}{2}$.

B. $2\log_2(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

C. $2\log_4(a+b)=4+\log_2 a+\log_2 b$.

D. $2\log\frac{a+b}{4}=\log a+\log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2+b^2=14ab\Leftrightarrow(a+b)^2=16ab\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{4}\right)ab$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Nên ta có $\ln\dfrac{a+b}{4}=\ln\sqrt{ab}=\dfrac{\ln a+\ln b}{2}$ vậy A đúng

$2\log_2(a+b)=\log_2(a+b)^2=\log_2(16ab)=4+\log_2 a+\log_2 b$ vậy B đúng

$2\log_4(a+b)=\log_4(a+b)^2=\log_4(16ab)=2+\log_4 a+\log_4 b$ vậy C sai

$2\log\dfrac{a+b}{4}=\log_2 a+\log_2 b$ vậy D đúng

Cách 2:.

Câu này ý C sai vì $2\log_4(a+b)=4+\log_4 a+\log_4 b \Leftrightarrow \log_4(a+b)^2=4\log_4 4+\log_4 ab$

$\Leftrightarrow \log_4(a+b)^2=\log_4 4^4+\log_4 ab=\log_4 64ab \Leftrightarrow (a+b)^2=64ab$.

Câu 36: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $3\log a+2\log b=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a^3+b^2=1$. B. $3a+2b=10$. C. $a^3b^2=10$. D. $a^3+b^2=10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3\log a+2\log b=1 \Leftrightarrow \log a^3+\log b^2=1 \Leftrightarrow \log\left(a^3b^2\right)=1 \Leftrightarrow a^3b^2=10$.

Câu 37: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. $\log_2\dfrac{9a^2}{b^3}=2+2\log_2 a-3\log_2 b$. B. $\ln\dfrac{9a^2}{b^3}=2\ln 3+2\ln a-3\ln b$.

C. $\log\dfrac{9a^2}{b^3}=2\log 3+2\log a-3\log b$. D. $\log_3\dfrac{9a^2}{b^3}=2+2\log_3 a-3\log_3 b$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy $\log_2\dfrac{9a^2}{b^3}=\log_2\left(9a^2\right)-\log_2 b^3$

$=\log_2 9+\log_2 a^2-\log_2 b^3=2\log_2 3+2\log_2 a-3\log_2 b$

Vậy B, C, D đúng.

Câu 38: Với các số thực dương a,b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. B. $\ln\dfrac{a}{b}=\ln b-\ln a$. C. $\ln(ab)=\ln a.\ln b$. D. $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 39: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a\dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$. B. $\log_a b=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$.

C. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$. D. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Lời giải

Chọn B

Với các số thực dương a, b, c khác 1, ta có

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ nên A đúng.

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ nên B sai và D đúng.

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$ nên C đúng.

Câu 40: Cho $P = \log_{a^4} b^2$ với $0 < a \neq 1$ và $b < 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P = -2\log_a(-b)$.
B. $P = 2\log_a(-b)$.
C. $P = -\frac{1}{2}\log_a(-b)$.
D. $P = \frac{1}{2}\log_a(-b)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $P = \log_{a^4} b^2 = 2.\frac{1}{4}\log_{|a|}|b| = \frac{1}{2}\log_a(-b)$ (Do $0 < a \neq 1$ và $b < 0$).

Câu 41: Cho $a > 0$, $b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a + \ln b) = \ln(7ab)$.
B. $3\ln(a+b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.
C. $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.
D. $\ln(a+b) = \frac{3}{2}(\ln a + \ln b)$.

Lời giải

Chọn C

Với $a > 0$, $b > 0$, ta có $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \ln(ab)$

$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \ln a + \ln b \Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$.

Câu 42: Cho các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_{\sqrt{2}}(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.
B. $\log_2(a+b)^2 = 4(\log_2 a + \log_2 b)$.
C. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right) = 2(\log_2 a + \log_2 b)$.
D. $\log_2\left(\frac{a+b}{16}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $a^2 + b^2 = 14ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 16ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 16ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = ab$.

$\Rightarrow \log_2\left(\frac{a+b}{4}\right)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow 2\log_2(a+b) - 2\log_2 4 = \log_2 a + \log_2 b$.

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$.

Câu 43: Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1$, với $y > 0, y > x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x = 4y$. B. $x = 3y$. C. $x = \frac{3}{4}y$. D. $y = \frac{3}{4}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \Leftrightarrow -\log_4(y-x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = 1 + \log_4(y-x)$

$\Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 4.(y-x) \Leftrightarrow y = 4(y-x) \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}y$.

Câu 44: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$. B. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$.

C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$. D. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - 2ab = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab$.

Hay ta có $\log(a+b)^2 = \log 10ab \Leftrightarrow 2\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$

$\Leftrightarrow \log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.

Câu 45: Cho $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$, với $xy > 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $x > y$. B. $x < y$. C. $x = y$. D. $x = y^2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy \Leftrightarrow \log_2(x^2 + y^2) = \log_2 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2xy$

$\Leftrightarrow (x-y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Câu 46: Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. $P = -6$. B. $P = \frac{1}{6}$. C. $P = -\frac{1}{6}$. D. $P = 6$.

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Cách 1: $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3 \Rightarrow x = a^2 = b^3 \Rightarrow a = b^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{a}{b^2} = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{b^2} = b^{\frac{-1}{2}}$.

Do đó $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \log_{b^{\frac{-1}{2}}} x = -2\log_b x = -2.3 = -6$.

Cách 2: $\log_a x = 2 \Rightarrow x = a^2 > 1$. $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3 \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2}$, $\log_x b = \frac{1}{3}$.

Khi đó $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x = \dfrac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}} = \dfrac{1}{\log_x a - 2\log_x b} = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - 2.\frac{1}{3}} = -6$.

Câu 47: Với các số thực a, $b > 0$ bất kì, rút gọn biểu thức $P = 2\log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2$ ta được

A. $P = \log_2\left(2ab^2\right)$.

B. $P = \log_2\left(ab\right)^2$.

C. $P = \log_2\left(\frac{a}{b}\right)^2$.

D. $P = \log_2\left(\frac{2a}{b^2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $P = 2\log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2 = \log_2 a^2 + \log_2 b^2 = \log_2\left(ab\right)^2$.

$P = \sqrt{2014}$.

Câu 48: Với các số thực dương a, b bất kì, đặt $M = \left(\dfrac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log M = -3\log a + \frac{1}{2}\log b$.

B. $\log M = -3\log a - \frac{1}{2}\log b$.

C. $\log M = -3\log a + 2\log b$.

D. $\log M = 3\log a + 2\log b$.

Hướngdẫngiải

Chọn A

$$M = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3} = \left(\frac{a^{10}}{b^{\frac{5}{3}}}\right)^{-0,3} = \frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}$$

$$\Rightarrow \log M = \log\left(\frac{a^{-3}}{b^{-0,5}}\right) = \log a^{-3} - \log b^{-0,5} = -3\log a + \frac{1}{2}\log b$$

Câu 49: Cho $a, b > 0, a \neq 1, ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**.

A. $\log_{ab} a = \dfrac{1}{1 + \log_a b}$.

B. $\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b)$.

C. $\log_{a^2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{4}\left(1 - \log_a b\right)$.

D. $\log_{\sqrt{a}}(ab^2) = 4(1 + \log_a b)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{ab} a = \dfrac{1}{\log_a ab} = \dfrac{1}{\log_a a + \log_a b} = \dfrac{1}{1+\log_a b}$.

$\log_a \sqrt{ab} = \log_a (ab)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(1+\log_a b)$.

$\log_{a^2} \sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{1}{2}\log_a \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4}(\log_a a - \log_a b) = \dfrac{1}{4}(1-\log_a b)$

Câu 50: Cho các số thực dương a,x,y, a khác 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$. B. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \mathrm{e}}$. C. $\log x = \dfrac{\log_a x}{\ln 10}$. D. $\log x = \dfrac{\log_x a}{\log a}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log x = \dfrac{\log_a x}{\log_a 10}$.

Câu 51: Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = 4a + 7b$. B. $x = 4a - 7b$. C. $x = a^4 b^7$. D. $x = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 a^4 + \log_3 b^7 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 \left(a^4 b^7\right)$

$\Leftrightarrow x = a^4 b^7$.

Câu 52: Cho $a > 1, a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) + a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 x = 4^a$. B. $\log_2 x = a+1$. C. $\log_2 x = 2^{a+1}$. D. $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow \log_4 x = \dfrac{1}{2}t$. Ta có: $\log_2\left(\dfrac{1}{2}t\right) = \log_4 t + a \Leftrightarrow \log_2 t = 2a + 2 \Leftrightarrow t = 4^{a+1}$.

Vậy: $\log_2 x = 4^{a+1}$.

Câu 53: Cho $\log_a bc = x, \log_b ca = y$ và $\log_c ab = \dfrac{mx + ny + 2}{pxy - 1}$, với m,n,p là các số nguyên. Tính $S = m + 2n + 3p$

A. $S = 6$. B. $S = 9$. C. $S = 0$. D. $S = 3$.

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $\begin{cases} x=\log_a bc \\ y=\log_b ca \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\log_c bc}{\log_c a} \\ y=\dfrac{\log_c ca}{\log_c b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\log_c a-\log_c b=1 \\ \log_c a-y\log_c b=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_c a=\dfrac{y+1}{xy-1} \\ \log_c b=\dfrac{x+1}{xy-1} \end{cases}$.

Mặt khác, $\log_c ab=\log_c a+\log_c b=\dfrac{x+y+2}{xy-1}$. Do đó $\begin{cases} m=1 \\ n=1 \\ p=1 \end{cases} \Rightarrow S=m+2n+3p=6$.

Câu 54: Cho hai số thực dương a,b và $a\neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a=\dfrac{b}{4}, \log_a b=\dfrac{16}{b}$. Tính ab?

A. $ab=256$. B. $ab=16$. C. $ab=32$. D. $ab=64$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2 a.\log_a b=\dfrac{b}{4}.\dfrac{16}{b} \Leftrightarrow \log_2 b=4 \Leftrightarrow b=2^4 \Leftrightarrow b=16$

$\Rightarrow \log_2 a=4 \Leftrightarrow a=16 \Rightarrow a.b=16^2 \Leftrightarrow ab=256$.

Câu 55: Cho $\log_a(bc)=2, \log_b(ca)=3$. Tính $S=\log_c(ab)$.

A. $S=\dfrac{7}{5}$. B. $S=\dfrac{7}{6}$. C. $S=\dfrac{5}{7}$. D. $S=\dfrac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $x=\log_c a, y=\log_c b$.

Ta có $\log_a(bc)=2 \Leftrightarrow \log_a b+\log_a c=2 \Leftrightarrow \dfrac{\log_c b}{\log_c a}+\dfrac{1}{\log_c a}=2 \Rightarrow \dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{x}=2$.

$\log_b(ca)=3 \Leftrightarrow \log_b c+\log_b a=3 \Leftrightarrow \dfrac{\log_c a}{\log_c b}+\dfrac{1}{\log_c b}=3 \Rightarrow \dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=3$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{y+1}{x}=2 \\ \dfrac{x+1}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+1=2x \\ x+1=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}$.

Thay vào $S=\log_c(ab)=\log_c a+\log_c b=\dfrac{7}{5}$.

Câu 56: Cho các số thực dương a,b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a(\log_b x)=\log_b(\log_a x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a x=b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$. B. $\log_a x=a^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$. C. $\log_a x=b^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$. D. $\log_a x=a^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$.

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $\log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x) = k \Leftrightarrow \begin{cases} \log_b x = a^k \\ \log_a x = b^k \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = b^{a^k} \\ x = a^{b^k} \end{cases} \Rightarrow b^{a^k} = a^{b^k} = a^k \log_a b \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^k = \log_a b \Leftrightarrow k = \log_{\frac{b}{a}}(\log_a b) \Rightarrow \log_a x = b^{\log_{\frac{b}{a}}(\log_a b)}$

Câu 57: Cho $0 < a \neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + ... + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008.2017^2 \log_a 2019$

A. $n = 2016$. B. $n = 2019$. C. $n = 2017$. D. $n = 2020$.

Lời giải

Chọn A

$\log_a 2019 + 2^3 \log_a 2019 + 3^3 \log_a 2019 + ... + n^3 \log_a 2019 = 1008^2.2017^2 \log_a 2019$

$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3)\log_a 2019 = 1008^2.2017^2 \log_a 2019$

$\Leftrightarrow (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) = 1008^2.2017^2 \Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = 1008^2.2017^2 \Leftrightarrow n = 2016$

Câu 58: Với a là số dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:

A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln\frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\ln(5a) - \ln(3a) = \ln\frac{5a}{3a} = \ln\frac{5}{3}$.

Câu 59: Cho ba số thực dương a,b,c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a+b+c=64$. Giá trị của biểu thức $P = 3\log_2(ab+bc+ca) - \log_2(abc)$ bằng:

A. 18. B. 6. C. 24. D. 8

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} ac = b^2 \\ abc = b^3 \\ ab+bc+ca = b(a+c)+ca = b(64-b)+b^2 = 64b \end{cases}$.

Do đó $P = 3\log_2(64b) - \log_2 b^3 = 3\log_2 64 = 3.6 = 18$.

Câu 60: Cho 3 số $2017 + \log_2 a$; $2018 + \log_3 a$; $2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng.

Công sai của cấp số cộng này bằng:

A. 1. B. 12. C. 9. D. 20.

Lời giải

Chọn A

Do 3 số $2017+\log_2 a$; $2018+\log_3 a$; $2019+\log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Suy ra

$$2017+\log_2 a+2019+\log_4 a=2\left(2018+\log_3 a\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 a=2\log_3 a \Leftrightarrow 3\log_2 a=4\log_3 a \Leftrightarrow \log_2 a\left(3-4\log_3 2\right)=0 \Leftrightarrow a=1.$$

Vậy công sai $d=\log_3 a-\log_2 a+1=1$.

Câu 61: cho các số thực dương a,b,c lớn hơn 1, đặt $x=\log_a b+\log_b a, y=\log_b c+\log_c b$ và $z=\log_c a+\log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2+y^2+z^2-xyz$ bằng

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $xyz=\left(\log_c b+\log_b c\right)\left(\log_a c+\log_c a\right)\left(\log_b a+\log_a b\right)$

$=\left(\log_a b\right)^2+\left(\log_a c\right)^2+\left(\log_b c\right)^2+\left(\log_c b\right)^2+\left(\log_c a\right)^2+\left(\log_b a\right)^2+2 \ \ (1)$

$x^2+y^2+z^2=\left(\log_c b+\log_b c\right)^2+\left(\log_a c+\log_c a\right)^2+\left(\log_b a+\log_a b\right)^2$

$=\left(\log_a b\right)^2+\left(\log_a c\right)^2+\left(\log_b c\right)^2+\left(\log_c b\right)^2+\left(\log_c a\right)^2+\left(\log_b a\right)^2+6 \ \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2+y^2+z^2-xyz=4$.

Câu 62: Tìm số tự nhiên n thoả mãn $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\dots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{120}{\log_3 x}$ với $0<x\neq 1$

A. $n=15$. B. $n=20$. C. $n=12$. D. $n=10$.

Lời giải

Chọn A

Do $0<x\neq 1$ nên ta có:

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\dots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\log_x\left(3.3^2....3^n\right)=\log_x 3^{1+2+\dots+n}=\frac{n.(n+1)}{2}\cdot\log_x 3$$

Vậy ta có: $\frac{n.(n+1)}{2}=120 \Leftrightarrow n=15$

Câu 63: Với mỗi số thực dương x, khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $\left[\log x\right]+1$. Cho biết $\log 2=0{,}30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $\left[x\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

A. 607. B. 606. C. 609. D. 608.

Lời giải

Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$\left[\log\left(2^{2017}\right)\right]+1=\left[2017\times\log 2\right]+1=\left[2017\times 0,30103\right]+1=\left[607,17751\right]+1=608$.

Câu 64: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=10^{81}$ và $(\log_{10}x).(\log_{10}yz)+(\log_{10}y)(\log_{10}z)=468$. Tính giá trị của biểu thức $S=\sqrt{(\log_{10}x)^2+(\log_{10}y)^2+(\log_{10}z)^2}$.

A. 75. B. 936. C. 625. D. 25.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\begin{cases}a=\log_{10}x\\ b=\log_{10}y\\ c=\log_{10}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10^a\\ y=10^b\\ z=10^c\end{cases}\Rightarrow xyz=10^{a+b+c}$.

Theo bài ta có: $\begin{cases}xyz=10^{81}\\ (\log_{10}x).(\log_{10}yz)+(\log_{10}y)(\log_{10}z)=468\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=81\\ ab+ac+bc=468\end{cases}\quad(1)$.

Vậy thay (1) vào ta có $S=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)}=\sqrt{81^2-2.468}=75$.

Câu 65: Cho hai số thực dương $x,y\neq 1$ thỏa mãn $\log_x y=\log_y x$ và $\log_x(x-y)=\log_y(x+y)$. Tính giá trị biểu thức $S=x^4-x^2+1$.

A. $S=2$. B. $S=3$. C. $S=4$. D. $S=5$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x,y\neq 1\\ x>y>0\end{cases}$. Ta có:

$\log_x y=\log_y x\Leftrightarrow\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\Leftrightarrow(\log_x y)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_x y=1\ \text{(L)}\\ \log_x y=-1\ \text{(TM)}\end{array}\right.\Leftrightarrow y=x^{-1}\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}$.

Ta có: $\log_x(x-y)=\log_y(x+y)\Leftrightarrow\log_x\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-\log_x\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\log_x\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-\dfrac{1}{x^2}=1\Leftrightarrow x^4-x^2-1=0$. Vậy $S=x^4-x^2+1=1+1=2$.

Câu 66: Có hai cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{225}x+\log_{64}y=4$ và $\log_x 225-\log_y 64=1$ là $(x_1;y_1)$ và $(x_2;y_2)$. Giá trị biểu thức $\log_{30}(x_1y_1x_2y_2)$ bằng:

A. 12. B. 15. C. 8. D. 36.

Lời giải

Chọn A

Theo bài ra: $\log_x 225-\log_y 64=1$. Đặt $\begin{cases}X=\log_{225}x\\ Y=\log_{64}y\end{cases}$ ta được hệ:

$$\begin{cases} X+Y=4 \\ \dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{Y}=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{4-X}=1 \Leftrightarrow 4-2X=X(4-X) \Leftrightarrow X^2-6X+4=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=3+\sqrt{5} \quad \Rightarrow Y=1-\sqrt{5} \\ X=3-\sqrt{5} \quad \Rightarrow Y=1+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} X=3+\sqrt{5} \\ Y=1-\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=225^{3+\sqrt{5}} \\ y_1=64^{1-\sqrt{5}} \end{cases}$ Với $\begin{cases} X=3-\sqrt{5} \\ Y=1+\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=225^{3-\sqrt{5}} \\ y_2=64^{1+\sqrt{5}} \end{cases}$

Khi đó: $\log_{30}(x_1y_1x_2y_2)=\log_{30}(225^6.64^2)=12$

Câu 67: Tìm tập hợp tất cả các số thực m để tồn tại duy nhất cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)=1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

A. $\{\pm5\}$. B. $\{\pm7,\pm5,\pm1\}$. C. $\{\pm5,\pm1\}$. D. $\{\pm1\}$.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+2x-4y+1=0 \\ 4x+4y-6+m^2=x^2+y^2+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=4 \quad (1) \\ (x-2)^2+(y-2)^2=m^2 \, (2) \end{cases}$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $I_1(-1;2)$, bán kính $R_1=2$ và phương trình (2) là phương trình đường tròn (C_2) có tâm $I_2(2;2)$ và bán kính $R_2=|m|$

Cặp số thực $(x;y)$ tồn tại duy nhất khi và chỉ khi (C_1), (C_2) tiếp xúc ngoài hoặc tiếp xúc trong ($R_1=R_2$) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} I_1I_2=R_1+R_2 \\ \begin{cases} I_1I_2=|R_1-R_2| \\ R_1\neq R_2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3=|m|+2 \\ \begin{cases} 3=||m|-2| \\ |m|\neq 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\pm1 \\ m=\pm5 \end{array}\right.$.

Câu 68: cho các số thực dương a,b,c lớn hơn 1, đặt $x=\log_a b+\log_b a, y=\log_b c+\log_c b$ và $z=\log_c a+\log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2+y^2+z^2-xyz$ bằng

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $xyz=(\log_c b+\log_b c)(\log_a c+\log_c a)(\log_b a+\log_a b)$

$=(\log_a b)^2+(\log_a c)^2+(\log_b c)^2+(\log_c b)^2+(\log_c a)^2+(\log_b a)^2+2 \;\; (1)$

$x^2+y^2+z^2=(\log_c b+\log_b c)^2+(\log_a c+\log_c a)^2+(\log_b a+\log_a b)^2$

$=(\log_a b)^2+(\log_a c)^2+(\log_b c)^2+(\log_c b)^2+(\log_c a)^2+(\log_b a)^2+6 \;\; (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $x^2+y^2+z^2-xyz=4$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 69: Với mỗi số thực dương x, khi viết x dưới dạng thập phân thì số các chữ số đứng trước dấu phẩy của x là $\left[\log x\right]+1$. Cho biết $\log 2=0,30103$. Hỏi số 2^{2017} khi viết trong hệ thập phân ta được một số có bao nhiêu chữ số? (Kí hiệu $\left[x\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x).

A. 607. B. 606. C. 609. D. 608.

Lời giải

Chọn D

Số các chữ số của 2^{2017} là

$\left[\log\left(2^{2017}\right)\right]+1=\left[2017\times\log 2\right]+1=\left[2017\times 0,30103\right]+1=\left[607,17751\right]+1=608$.

BÀI 20: HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HÀM SỐ MŨ

HĐ1. **Nhận biết hàm số mũ**

a) Tính $y=2^x$ khi x lần lượt nhận các giá trị $-1;0;1$. Với mỗi giá trị của x có bao nhiêu giá trị của $y=2^x$ tương ứng?

b) Với những giá trị nào của x, biểu thức $y=2^x$ có nghĩa?

Lời giải

a)Khi x lần lượt nhận các giá trị -1, 0, 1, ta có:

- Khi $x=-1$, ta có $y=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

- Khi $x=0$, ta có $y=2^0=1$.

- Khi $x=1$, ta có $y=2^1=2$.

$\Rightarrow y=2^x$

b) Biểu thức có nghĩa khi và chỉ khi $2^x>0$.

Cho a là số thực dương khác 1.

Hàm số $y=a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

? Trong các hàm số sau, những hàm số nào là hàm số mũ? Khi đó hãy chỉ ra cơ số.

a) $y=(\sqrt{2})^x$; b) $y=2^{-x}$; c) $y=8^{\frac{x}{3}}$; d) $y=x^{-2}$.

HĐ2. **Nhận dạng đồ thị và tính chất của hàm số mũ**

Cho hàm số mũ $y=2^x$.

a) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	-3	-2	-2	0	1	2	3
$y=2^x$	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm $(x;y)$ trong bảng giá trị ở câu a. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x;2^x)$ với $x\in\mathbb{R}$ và nối lại ta được đồ thị của hàm số $y=2^x$

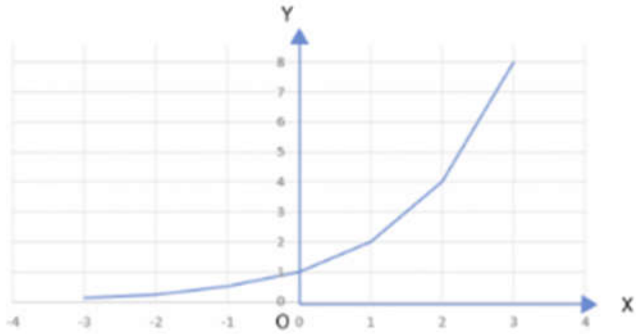
c) Từ đồ thị đã vẽ ở câu b, hãy kết luận về tập giá trị và tính chất biến thiên của hàm số $y=2^x$.

Lời giải

a) Hoàn thành bảng gía trị:

x	-3	-2	-2	0	1	2	3
$y=2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

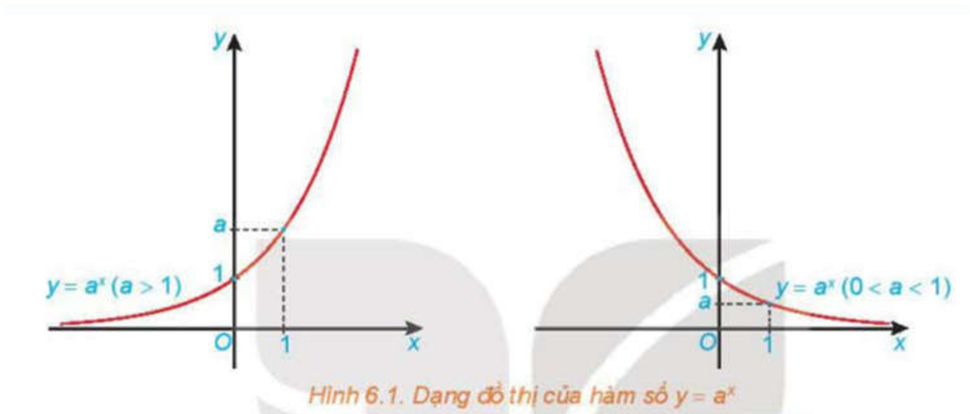
b) Đồ thị Oxy



c) Từ đồ thị đã vẽ ở câu b,ta kết luận hàm số $y = 2^x$ là một hàm số lũy thừa với cơ số 2 , có đồ thị là một đường cong liên tục, có tập giá trị là $(0, +\infty)$ và có tính chất biến thiên giảm trên đoạn ($-\infty, 0)$ và tăng trên đoạn $(0, +\infty)$.

Hàm số mũ $y = a^x$.

- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0; +\infty)$;
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;
- Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0;1), (1;a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



Hình 6.1. Dạng đồ thị của hàm số $y = a^x$

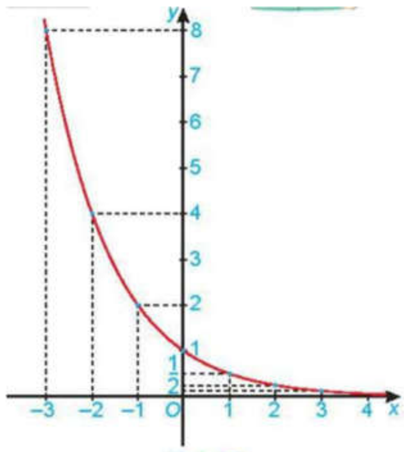
Ví dụ 1. Vẽ đồ thị hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-3	-2	-2	0	1	2	3
$y = 2^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ như Hình 6.2.



Hình 6.2

Hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ còn được viết dưới dạng $y=2^{-x}$.

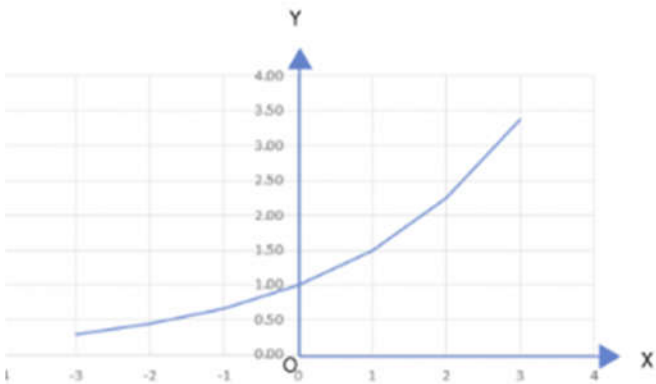
Luyện tập. Vẽ đồ thị của hàm số $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	-3	-2	-2	0	1	2	3
$y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$

Đồ thị hàm số $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$.



2. HÀM SỐ LÔGARIT

HĐ3. Nhận biết hàm số lôgarit

a) Tính $y=\log_2 x$ khi x lần lượt nhận các giá trị 1; 2; 4. Với mỗi giá trị của $x>0$ có bao nhiêu giá trị của $y=\log_2 x$ tương ứng?

b) Với những giá trị nào của x, biểu thức $y=\log_2 x$ có nghĩa?

Lời giải

a) Khi $x=1$, thì $y=\log_2 1=0$.

Khi $x=2$, thì $y=\log_2 2=1$.

Khi $x=4$, thì $y=\log_2 4=2$.

Với mỗi giá trị $x>0$, sẽ chỉ tồn tại một giá trị duy nhất của $y=\log_2 x$.

b) Biểu thức $y=\log_2 x$ có nghĩa khi x là một số thực dương.

Cho a là số thực dương khác 1. Hàm số $y=\log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

? Trong các hàm số sau, những hàm số nào là hàm số lôgarit? Khi đó hãy chỉ ra cơ số.

a) $y=\log_{\sqrt{3}} x$; b) $y=\log_{2^{-2}} x$;

c) $y=\log_x 2$; d) $y=\log_1 5$.

Lời giải

a) Là hàm số logarit với cơ số $\sqrt{3}$.

b) Biểu thức $\sqrt{2^{-2}}=2^{-1}$,

vậy ta có $y=\log_{\sqrt{2^{-2}}} x=\log_{2^{-1}} x=-\log_2 x$ là một hàm số logarit, với cơ số 2 .

c) Là một hàm số logarit, với cơ số $\frac{1}{x}$.

HĐ4. Nhận dạng đồ thị và tính chất của hàm số lôgarit

Cho hàm số lôgarit $y=\log_2 x$.

a) Hoàn thành bảng giá trị sau:

x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3
$y=\log_2 x$	?	?	?	?	?	?	?

b) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, biểu diễn các điểm $(x;y)$ trong bảng giá trị ở câu **a**. Bằng cách làm tương tự, lấy nhiều điểm $(x;\log_2 x)$ và nối lại ta được đồ thị của hàm số $y=\log_2 x$.

c) Từ đồ thị đã vẽ ở câu b, hãy kết luận về tập giá trị và tính chất biến thiên của hàm số $y=\log_2 x$.

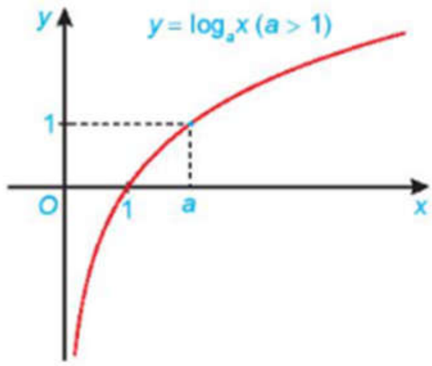
Lời giải

a) Hoàn thành bảng giá trị

x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3
$y=\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

b) Để biểu diễn các điểm $(x;y)$ trên mặt phẳng toạ độ Oxy, ta lấy các giá trị của x và y trong bảng giá trị ở câu a và vẽ chúng trên đồ thị, các bạn có thể tham khảo hình đồ thị dưới đây.

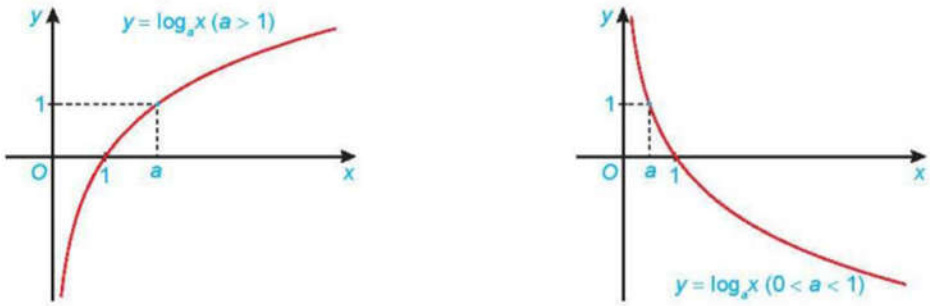
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



c)Từ đồ thị đã vẽ ở câu b, ta có thể kết luận rằng hàm số $y=\log_2 x$ là một hàm số liên tục, đồng biến trên khoảng $(0,+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng này và có đường tiệm cận ngang là đường $y=0$.

Hàm số lôgarit $y=\log_a x$:

- Có tập xác định là $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a>1$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0<a<1$;
- Liên tục trên $(0;+\infty)$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(1;0),(a;1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.



Hình 6.3. Dạng đồ thị của hàm số $y=\log_a x$

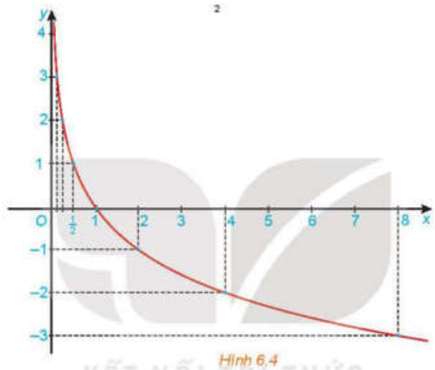
Ví dụ 2. Vẽ đồ thị của hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Lời giải

Lập bảng giá trị của hàm số tại một số điểm như sau:

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2$	1	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$
$y=\log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Từ đó, ta vẽ được đồ thị của hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ như Hình 6.4 .



Hình 6.4

Vận dụng. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu* (kết quả tính theo đơn vị triệu người và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

$P=97.34$ triệu người và $r=0,91\%=0,0091$.

Áp dụng công thức tăng trưởng mũ, ta có: $A=Pe^{rt}=97.34e^{0.0091\cdot 30}\approx 128.29$ triệu người.

Vậy dân số Việt Nam vào năm 2050 ước tính là khoảng 128,29 triệu người.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số

1. Phương pháp: $0<a\neq 1$

Hàm số $y=\log_a f(x)$ xác định khi $f(x)>0$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\log_3\left(x^2+2x\right)$;

b) $y=\log_{0,2}\left(4-x^2\right)$

Lời giải

a) Hàm số $y=\log_3\left(x^2+2x\right)$ xác định khi $x^2+2x>0$ hay $x<-2$ hoặc $x>0$.

Vạy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$:

b) Hàm số $y=\log_{0,2}\left(4-x^2\right)$ xác định khi $4-x^2>0$ hay $-2<x<2$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-2;2)$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y=\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{3-x}$

b) $y=\dfrac{2}{\log_4 x-3}$.

Lời giải

a) Hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{3-x}$ xác định khi $\frac{1}{3-x}>0$ hay $x<3$. Vạy tập xác định của hàm số là $(-\infty;3)$.

b) Hàm số $y=\frac{2}{\log_4 x-3}$ xác định khi $\begin{cases}x>0\\ \log_4 x\neq 3\end{cases}$ hay $\begin{cases}x>0\\ x\neq 64\end{cases}$

Vạy tập xác định của hàm số là $D=(0;64)\cup(64;+\infty)$.

Dạng 2. So sánh

1. Phương pháp

$\oplus\, a>1:\ a^x>a^y\Leftrightarrow x>y$

$\oplus\, 0<a<1:\ a^x>a^y\Leftrightarrow x<y$

$\oplus\, a>1: \log_a x>\log_a y\Leftrightarrow x>y$

$\oplus\, 0<a<1:\ \log_a x>\log_a y\Leftrightarrow x<y$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Hãy so sánh mỗi sơ sau với 1:

a) $(0,1)^{\sqrt{2}}$; b) $(3,5)^{0,1}$; c) $\pi^{-2,7}$; d) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}$.

Lời giải

a) $(0,1)^{\sqrt{2}}<1$;

b) $(3,5)^{0,1}>1$;

c) $\pi^{-2,7}<1$;

d) $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^{-1,2}>1$.

Ví dụ 2: Sử dụng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm sơ mũ, hãy so sánh mỗi cặp sơ sau:

a) $(1,7)^3$ và 1 ;

b) $(0;3)^2$ va 1 ;

c) $(3,2)^{1,5}$ và $(3,2)^{1,6}$;

d) $(0,2)^{-3}$ và $(0,2)^{-2}$;

e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ và $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$

g) 6^{π} và $6^{3,14}$.

Lời giải

a) $(1,7)^8>1$

b) $(0,8)^2<1$;

c) $(3,2)^{1,5}<(3,2)^{1,6}$;

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

d) $(0,2)^{-3} > (0,2)^{-2}$;

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{1,4}$

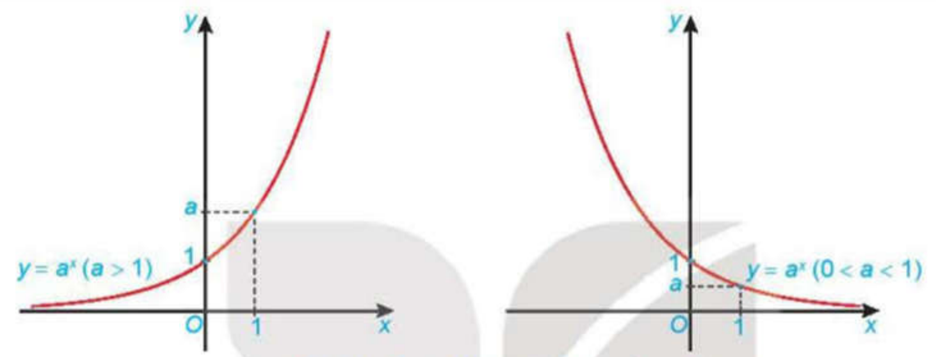
g) $6^{\pi} > 6^{8;14}$.

Dạng 3. Đồ thị hàm số

1. Phương pháp:

Hàm số mũ $y = a^x$.

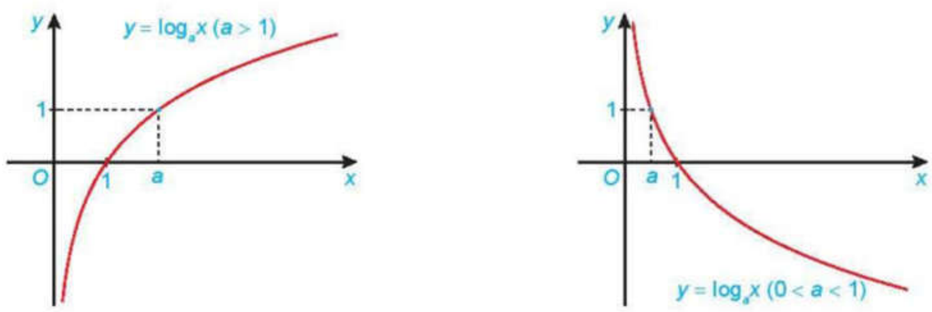
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$;
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$;
- Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(0;1),(1;a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



Hình 6.1. Dạng đồ thị của hàm số $y = a^x$

Hàm số lôgarit $y = \log_a x$:

- Có tập xác định là $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$;
- Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0 < a < 1$;
- Liên tục trên $(0;+\infty)$;
- Có đồ thị đi qua các điểm $(1;0),(a;1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.



Hình 6.3. Dạng đồ thị của hàm số $y = \log_a x$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị các hàm số

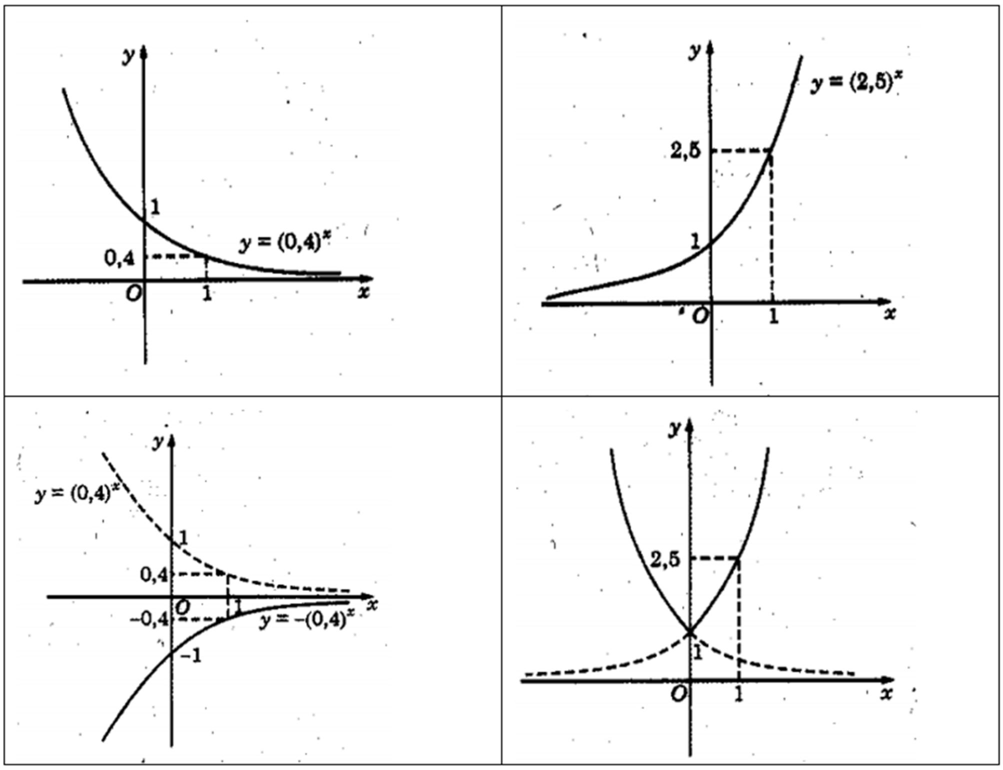
a) $y=(0,4)^x$;

b) $y=(2,5)^x$;

c) $y=-(0,4)^x$;

d) $y=(2,5)^{|x|}$.

Lời giải

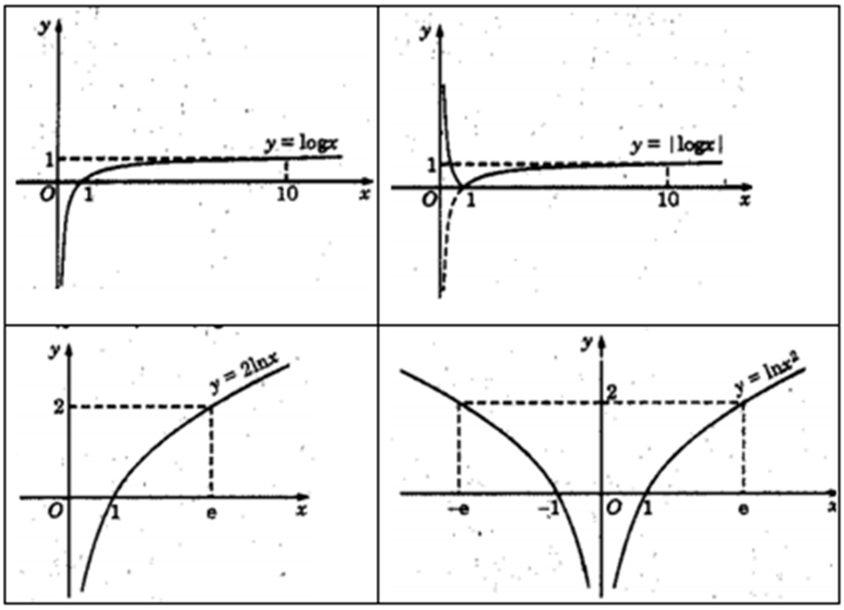


Ví dụ 2: Vẽ đồ thị các hàm số

a) $y=\log x$; b) $y=|\log x|$;

c) $y=2\ln x$; d) $y=\ln x^2$.

Lời giải



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

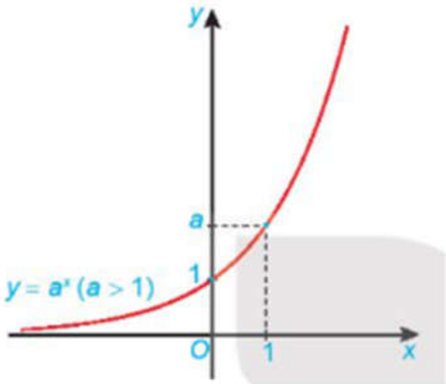
Bài 6.15. Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y=3^x$; b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Lời giải

a) Lập bảng giá trị

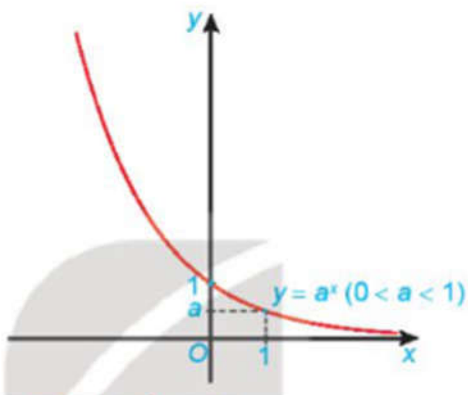
x	-2	-1	0	1	2
$y=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

Các bạn tham khảo đồ thị có dạng dưới đây.



b) Lập bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

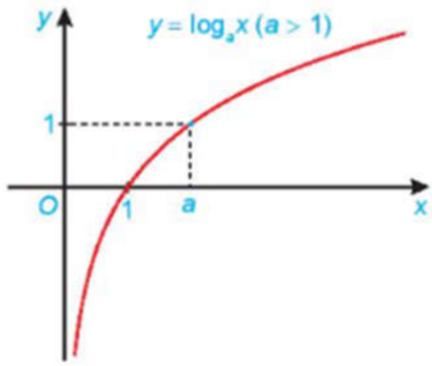


Bài 6.16. Vẽ đồ thị của các hàm số sau: a) $y=\log x$; b) $y=\log_{\frac{1}{3}}x$

Lời giải

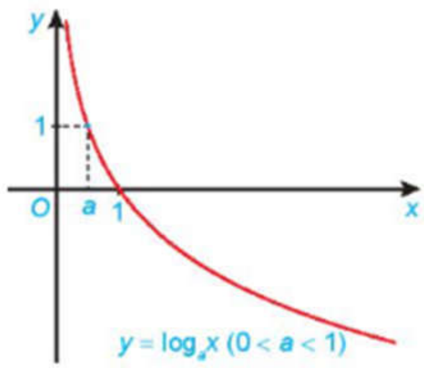
a) Lập bảng giá trị

x	1/2	1	2	4	8
$y = \log x$	-0,3	0	0,3	0,6	0,9



b) Lập bảng giá trị

x	1	3	9	27
$y = \log_{\frac{1}{3}} x$	-3	-1	1	3



Bài 6.17. Tìm tập xác định của các hàm số sau: a) $y = \log|x+3|$; b) $y = \ln\left(4 - x^2\right)$.

Lời giải

a) $\begin{cases} x+3>0 \\ x+3<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+3| = x+3 \\ |x+3| = -(x+3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3,\infty) \\ (-\infty,-3) \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \log_2|x+3|$ là $(-\infty,-3) \cup (-3,\infty)$.

b) $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ 4-x^2 \neq 1 \end{cases}$

Phương trình $4 - x^2 = 0$ có nghiệm $x = \pm 2$. Khi $x \in (-2,2)$, ta có $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ 4-x^2 \neq 1 \end{cases}$

Vậy hàm số y được xác định trên đoạn $(-2,2)$.

Khi $x < -2$ hoặc $x > 2$, ta có $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ 4-x^2 \neq 1 \end{cases}$

Vậy hàm số y được xác định trên hai khoảng $x<-2$ hoặc $x>2$, ta có $\begin{cases}(-\infty,-2)\\ 2,\infty)\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số $y=\ln\left(4-x^2\right)$ là $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$.

Bài 6.18. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t)=13e^{-0,015t}$.

a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t=0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khi $t=0, m(0)=13e^{-0,015\times 0}=13e^0=13$. Vậy khối lượng của chất phóng xạ ban đầu là $13\,\text{kg}$.

b) Để tìm khối lượng chất phóng xạ còn lại sau 45 ngày, ta sử dụng công thức $m(t)=13e^{-0,015t}$ và thay $t=45$ vào: $m(45)=13e^{-0,015.45}\approx 6,19\,\text{kg}$

6.19. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t)=75-20\ln(t+1), 0\le t\le 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Lời giải

Áp dụng công thức $M(t)=75-20\ln(t+1)$, ta có: $M(6)=75-20\ln(6+1)=75-20\ln 7\approx 60,39$

Vậy khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là khoảng 60,39%.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y=\log_2(10-2x)$ là

A. $(-\infty;2)$ B. $(5;+\infty)$ C. $(-\infty;10)$ D. $(-\infty;5)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 10-2x>0 \Leftrightarrow x<5 \Rightarrow D=(-\infty;5)$

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\log\left(x^2+2x\right)$ là

A. $D=(-2;0)$ B. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ C. $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$ D. $D=\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow x^2+2x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0\\x<-2\end{array}\right.$. Vậy $D=(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

Câu 3: Cho $0<a<1$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

B. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

C. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là $\mathbb{R}$

D. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là $\mathbb{R}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\log_a x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ là

A. $D=(-1;3)$ B. $D=(0;1)$ C. $D=(-1;1)$ D. $D=(-3;1)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow 3-2x-x^2>0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Vậy $D=(-3;1)$.

Câu 5: Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

A. $m<\frac{1}{4}$ B. $m>0$ C. $m\ge\frac{1}{4}$ D. $m>\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow 4^x-2^x+m>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m>2^x-4^x\ (\forall x\in\mathbb{R})$

Đặt $t=2^x>0 \Rightarrow m>t-t^2\ (\forall t>0) \Leftrightarrow m>\max\limits_{t>0} f(t) \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in[-\infty;-2]\cup[2;+\infty]$ B. $m\in[-2;2]$

C. $m\in(-2;2)\cup(2;+\infty)$ D. $m\in(-2;2)$

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định với mọi

$x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2mx+4>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta'=m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\left(\frac{10}{11}\right)^{2,3}>\left(\frac{12}{11}\right)^{2,3}$. B. $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}>\left(\frac{8}{9}\right)^{-2}$.

C. $(2,5)^{-3,1}>(2,6)^{-3,1}$. D. $(3,1)^{7,3}<(4,3)^{7,3}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn A

Dùng tính chất: $\begin{cases} a,b>1 \\ a^x>b^x \Rightarrow a>b \\ x>0 \end{cases}$

Câu 8: Nếu $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<7-4\sqrt{3}$ thì

A. $a<1$ B. $a>1$ C. $a>0$ D. $a<0$

Lời giải

Chọn D

BPT $\Leftrightarrow \left(7+4\sqrt{3}\right)^{a-1}<\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-1} \Rightarrow a-1<-1 \Leftrightarrow a<0$

Câu 9: Cho $\pi^{\alpha}>\pi^{\beta}$ với $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $\alpha>\beta$ B. $\alpha<\beta$ C. $\alpha=\beta$ D. $\alpha\le\beta$

Lời giải

Chọn A

Câu 10: Cho $M=\log_{0,3}0,07; N=\log_3 0,2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $0>N>M$. B. $M>0>N$. C. $N>0>M$. D. $M>N>0$.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $\begin{cases} 0<0,3<1 \\ 0<0,07<1 \end{cases} \Rightarrow M=\log_{0,3}0,07>0$

$\begin{cases} 3>1 \\ 0<0,2<1 \end{cases} \Rightarrow N=\log_3 0,2<0$

+ Suy ra: $M>0>N$

Câu 11: Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. B. $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. D. $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

Do $\begin{cases} 2018>2017 \\ \sqrt{3}-1>1 \end{cases}$ nên $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 12: Cho $0<a\ne1$; $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\frac{\alpha}{\beta}}$ B. $a^{\sqrt{a}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}\ (a>0)$ C. $a^{\alpha^{\beta}}=\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}$ D. $\sqrt{a^{\alpha}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Lời giải

Chọn D

$\sqrt{a^{\alpha}}=\left(\sqrt{a}\right)^{\alpha}$

Câu 13: Có kết luận gì về a nếu $(2a+1)^{-3}>(2a+1)^{-1}$ (1)

A. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)$

B. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right)$

C. $a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{6};0\right)$

D. $a\in(-\infty;-2)\cup(-1;0)$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $2a+1\neq 0\Leftrightarrow a\neq-\frac{1}{2}$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\frac{1}{(2a+1)^3}>\frac{1}{2a+1}\Leftrightarrow\frac{1-(2a+1)^2}{(2a+1)^3}>0\Leftrightarrow\frac{a(a+1)}{(2a+1)^3}<0$

Lập bảng xét dấu ta được: $\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}<a<0\\ a<-1\end{array}\right.$.

Câu 14: Trong các bất đẳng thức sau, bất đẳng thức nào sai?

A. $\log_2 5>\log_2\pi$ B. $\log_{\sqrt{2}-1}\pi<\log_{\sqrt{2}-1}e$ C. $\log_{\sqrt{3}+1}\pi>\log_{\sqrt{3}+1}7$ D. $\log_7 5<1$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\sqrt{3}+1>1$ do đó $\pi<7\Rightarrow\log_{\sqrt{3}+1}\pi<\log_{\sqrt{3}+1}7$.

Câu 15: Cho $0<a<1$, $b>1$ và $M=\log_a 2$, $N=\log_2 b$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M>0$ và $N>0$.

B. $M>0$ và $N<0$.

C. $M<0$ và $N<0$.

D. $M<0$ và $N>0$.

Lời giải

Chọn D

Câu 16: Với những giá trị nào của a thì $(a-1)^{-\frac{2}{3}}>(a-1)^{-\frac{1}{3}}$?

A. $1<a<2$. B. $a>2$. C. $a>1$. D. $0<a<1$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\begin{cases} \frac{-2}{3} < \frac{-1}{3} \\ (a-1)^{-\frac{2}{3}} > (a-1)^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Rightarrow 0 < a-1 < 1 \Leftrightarrow 1 < a < 2$.

Câu 17: Nếu $a^{\frac{19}{5}} < a^{\frac{15}{7}}$ và $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right) > \log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ thì:

A. $a > 1, 0 < b < 1$ B. $0 < a < 1, b > 1$ C. $0 < a < 1, 0 < b < 1$ D. $a > 1, b > 1$

Lời giải

Chọn B

$a^{\frac{19}{5}} < a^{\frac{15}{7}}$ vì mũ không là số nguyên nên $a > 0$. Mặt khác $\frac{19}{5} > \frac{15}{7}$ nên $a < 1 \Rightarrow 0 < a < 1$

$\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right) > \log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ để có nghĩa thì $1 \neq b > 0$ và $\sqrt{2}+\sqrt{7} > \sqrt{2}+\sqrt{5}$ nên $b > 1$

Câu 18: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\log_a b > \log_b a$ B. $\log_a b < \log_b a$ C. $\ln a > \ln b$ D. $\log_{\frac{1}{2}}(ab) < 0$

Lời giải

Chọn A

Cho $a = 4; b = 2$ ta có: $\log_a b = \frac{1}{2}; \log_b a = 2$ nên A sai.

Câu 19: Cho a, b là các số thực dương, thỏa mãn $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{3}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a > 1, 0 < b < 1$ B. $0 < a < 1, b > 1$ C. $0 < a < 1, 0 < b < 1$ D. $a > 1, b > 1$

Lời giải

Chọn B

Ta có $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{3}} \Rightarrow 0 < a < 1 \left(\text{do } \frac{3}{4} < \frac{4}{3}\right)$

Mặt khác $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3} \Rightarrow b > 1 \left(\text{do } \frac{2}{3} > \frac{1}{2}\right)$

Câu 20: Cho hai số thực a và b sao cho với $a^{-5} > a^{-4}$ và $\log_b\left(\frac{3}{4}\right) < \log_b\left(\frac{4}{5}\right)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào là đúng?

A. $a > 1; b > 1$. B. $a > 1; 0 < b < 1$.

C. $0 < a < 1; b > 1$. D. $0 < a < 1; 0 < b < 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} -5 < -4 \\ a^{-5} > a^{-4} \end{cases} \Rightarrow 0 < a < 1$ và $\begin{cases} \dfrac{3}{4} < \dfrac{4}{5} \\ \log_b\left(\dfrac{3}{4}\right) < \log_b\left(\dfrac{4}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow b > 1$.

Vậy $0 < a < 1; b > 1$.

Câu 21: Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^a > \left(\sqrt{2}-1\right)^b$. Kết luận nào sau đây đúng?

A. $a > b$.　　B. $a < b$.　　C. $a = b$.　　D. $a \ge b$.

Lời giải

Chọn B

Do $0 < \sqrt{2}-1 < 1$ nên hàm số mũ $y = \left(\sqrt{2}-1\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và ta có:

$\left(\sqrt{2}-1\right)^a > \left(\sqrt{2}-1\right)^b \Leftrightarrow a < b$

Câu 22: Tìm tập tất cả các giá trị của a để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$

A. $0 < a < 1$　　B. $\dfrac{5}{21} < a < \dfrac{2}{7}$　　C. $a > 1$　　D. $a > 0$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow a^{\frac{5}{21}} > a^{\frac{2}{7}} \Leftrightarrow 0 < a < 1$

Câu 23: Cho p, q là các số thực thỏa mãn $m = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{2p-q}, n = e^{p-2q}$, biết $m > n$. So sánh p và q

A. $p \ge q$　　B. $p > q$　　C. $p \le q$　　D. $p < q$

Lời giải

Chọn D

Ta có $m = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{2p-q} = e^{q-2p}, n = e^{p-2q}$. Vì $m > n$ nên $q - 2p > p - 2q \Leftrightarrow q > p$.

Câu 24: Cho $a > 1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a} > 1$　　B. $a^{-\sqrt{3}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$　　C. $a^{\frac{1}{3}} > \sqrt{a}$　　D. $\dfrac{1}{a^{2016}} < \dfrac{1}{a^{2017}}$

Lời giải

Chọn B

Do $a > 1 \Rightarrow$ vưới $m > n$ thì $a^m > a^n$

Do $-\sqrt{3} > -\sqrt{5} \Rightarrow a^{-\sqrt{3}} > \dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}} = \dfrac{1}{a^5}$

Câu 25: Cho $0 < a < 1$. Khẳng định nào đúng?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $a^{-\sqrt{2}}<\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}$ B. $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}>1$ C. $a^{\frac{1}{3}}<\sqrt{a}$ D. $\frac{1}{a^{2017}}>\frac{1}{a^{2018}}$

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Xét hàm số có dạng $y=a^x, a>0, a\neq 1$:

+ Nếu $0<a<1$ hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$

+ Nếu $a>1$: hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$

Cách giải: Với $0<a<1$:

$a^{-\sqrt{2}}<\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^{\sqrt{2}}}<\frac{1}{a^{\sqrt{3}}}\Leftrightarrow a^{\sqrt{2}}>a^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 0<a<1$ (luôn đúng). Vậy phương án A đúng.

$\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}>1\Leftrightarrow\sqrt[3]{a}>1\Leftrightarrow a>1$ (Loại). Vậy phương án B sai.

$a^{\frac{1}{3}}<\sqrt{a}\Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}}<a^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow a>1$ (Loại). Vậy phương án C sai.

$\frac{1}{a^{2017}}>\frac{1}{a^{2018}}\Leftrightarrow a^{2017}<a^{2018}\Leftrightarrow a>1$ (Loại). Vậy phương án D sai.

Câu 26: Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Khi $x>0$ thì $\log_2 x^2=2\log_2 x$.

B. Khi $0<a<1$ và $b<c$ thì $a^b>a^c$.

C. Với $a<b$ thì $\log_a b<\log_b a<1$.

D. Điều kiện để $x^{\sqrt{2}}$ có nghĩa là $x>0$.

Lời giải

Chọn C

Đáp án C sai vì với $a<b\Rightarrow\begin{cases}1<\log_a b\\ \log_b a<1\end{cases}\Rightarrow\log_b a<1<\log_a b$

Câu 27: Cho a là số thực dương khác 1. Xét hai số thực x_1,x_2. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $x_1>x_2$.

B. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $x_1<x_2$.

C. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)>0$.

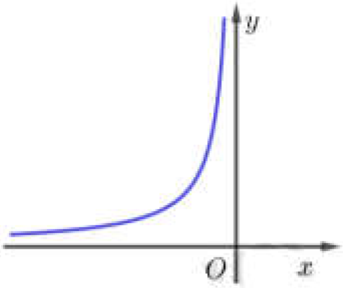
D. Nếu $a^{x_1}>a^{x_2}$ thì $(a-1)(x_1-x_2)<0$.

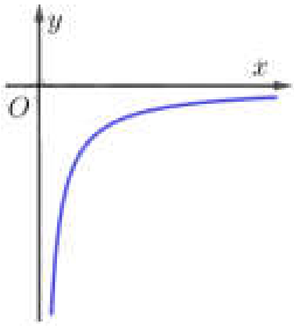
Lời giải

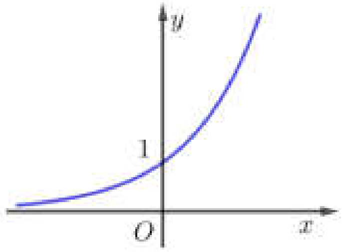
Chọn C

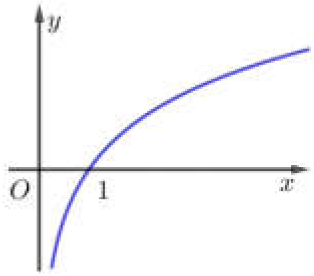
$$\begin{cases}a>1: a^{x_1}>a^{x_2}\to x_1>x_2\\ a<1: a^{x_1}<a^{x_2}\to x_1<x_2\end{cases}\to(a-1)(x_1-x_2)>0.$$

Câu 28: Cho a là số thực dương khác 1. Hình nào sau đây là đồ thị của hàm số mũ $y=a^x$?

A. 

B. 

C. 

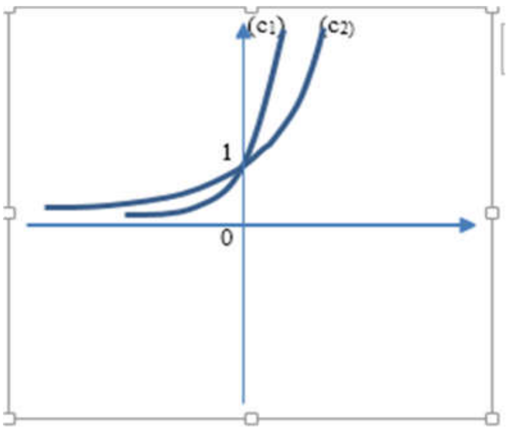
D. 

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=a^x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty)$

Câu 29: Biết *(C₁)*, *(C₂)* ở hình bên là hai trong bốn đồ thị của các hàm số $y=\left(\sqrt{3}\right)^x, y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x, y=5^x, y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. Hỏi (C_2) là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ B. $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ C. $y=5^x$ D. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

Lời giải

Chọn A

- Ta thấy (C_1), (C_2) đều có hướng đi lên khi x tăng $\Rightarrow$ (C_1), (C_2) đồng biến $\forall x\in\mathbb{R}$.

- Mà hàm $y=a^x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$. Do đó ta loại hàm $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ và $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

- Xét khi $x>0$ thì (C_1) ở trên (C_2) $\Rightarrow y(C_1)>y(C_2)$. Mà $5^x>\left(\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow (C_2): y=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Câu 30: Đối xứng qua đường thẳng $y = x$ của đồ thị hàm số $y = 5^{\frac{x}{2}}$ là đồ thị nào trong các đồ thị có phương trình sau đây?

A. $y = \log_{\sqrt{5}} x$ B. $y = \log_5 x^2$ C. $y = \log_5 x$ D. $y = \frac{1}{2}\log_5 x$

Lời giải

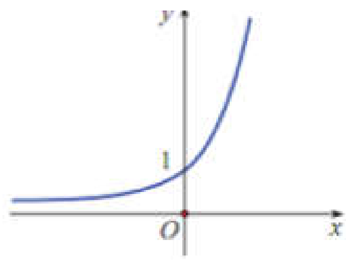
Chọn A

Ta đưa hàm số về dạng: $y = 5^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{5}\right)^x$.

Dựa vào lý thuyết "Hai hàm số $y = a^x, y = \log_a x$ có đồ thị đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất y = x"

Hoặc thay x = y và y = x ta có $x = \left(\sqrt{5}\right)^y \Leftrightarrow y = \log_{\sqrt{5}} x$

Câu 31: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ B. $y = x^2$

C. $y = \log_2 x$ D. $y = 2^x$

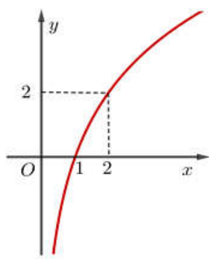
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó chỉ có đáp án D thỏa mãn

Câu 32: Tìm a để hàm số $\log_a x\ (0 < a \neq 1)$ có đồ thị là hình bên



A. $a = \sqrt{2}$ B. $a = 2$ C. $a = \frac{1}{2}$ D. $a = -\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(2;2) \Rightarrow \log_a 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$

Câu 33: Nếu gọi (G_1) là đồ thị hàm số $y = a^x$ và (G_2) là đồ thị hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a \neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục hoành.

B. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua trục tung.

C. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$

D. (G_1) và (G_2) đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x$

Lời giải

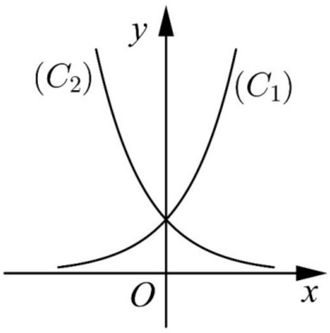
Chọn C

Mọi điểm $A(m;n) \in (G_1) \Rightarrow a^m = n \Rightarrow m = \log_a n \Rightarrow B(n;m) \in (G_2)$

Hai điểm A và B đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Do đó (G_1) và (G_2) đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Câu 34: Cho hai hàm số $y = a^x, y = b^x$ với a, b là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $0 < a < b < 1$ B. $0 < b < 1 < a$ C. $0 < a < 1 < b$ D. $0 < b < a < 1$

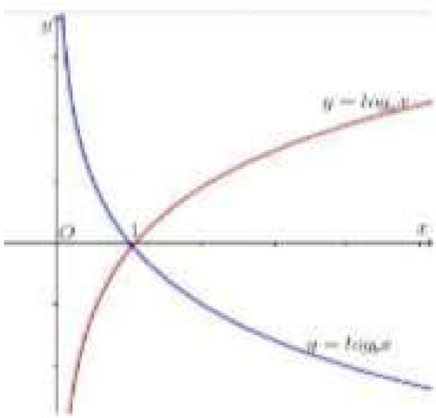
Lời giải

Chọn B

- Đồ thị hàm số (C_1) đồng biến nên $y' = a^x \ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

- Đồ thị hàm số (C_2) nghịch biến nên $y' = b^x \ln b < 0 \Leftrightarrow 0 < b < 1$. Do đó $0 < b < 1 < a$

Câu 35: Cho hai hàm số $y = \log_a x,\ y = \log_b x$ có đồ thị $(C_1),(C_2)$, được vẽ trên cùng mặt phẳng tọa độ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $0 < b < a < 1$. B. $0 < b < 1 < a$. C. $0 < a < b < 1$. D. $0 < a < 1 < b$.

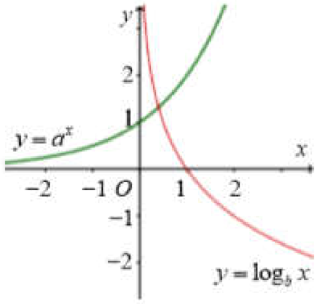
Lời giải

Chọn B

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_b x$ nghịch biến nên $0<b<1$

Ta thấy đồ thị hàm số $\log_a x$ đồng biến nên $a>1$

Câu 36: Cho $a>0, b>0, b\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cho như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



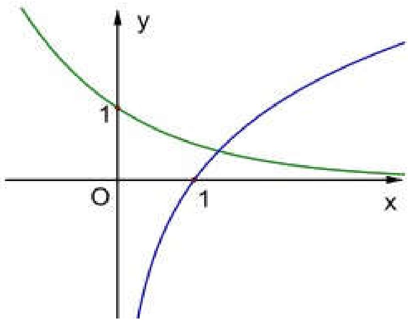
A. $a>1;\ 0<b<1$. B. $1>a>0;\ b>1$. C. $0<a<1;\ 0<b<1$. D. $a>1;\ b>1$.

Lời giải

Chọn A

Quan sát đồ thị ta thấy. Hàm số $y=a^x$ đồng biến $\Rightarrow a>0$. Hàm số $y=\log_b x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<b<1$

Câu 37: Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0<a<\frac{1}{2}<b$ B. $0<a<1<b$

C. $0<b<1<a$ D. $0<a<1, 0<b<\frac{1}{2}$

Lời giải

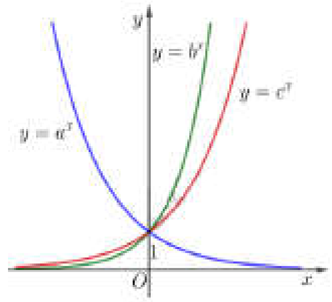
Chọn B

+ Xét hàm số $y=a^x$ đi qua $(0;1)$ suy ra đồ thị hàm số (1) là đường nghịch biến, suy ra $0<a<1$.

+ Xét hàm số $y=\log_b x$ đi qua (1;0) suy ra đồ thị hàm số (2) là đường đồng biến suy ra b>1.

Suy ra $0<a<1<b$.

Câu 38: Cho 3 số $a,b,c>0, a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1$. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=a^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

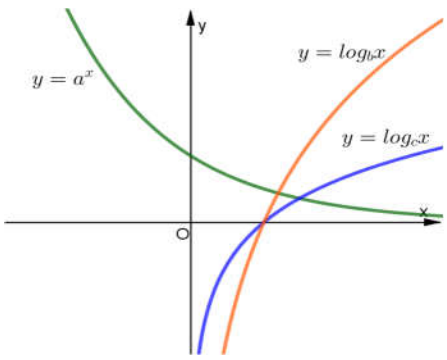
A. $b<c<a$ B. $a<c<b$ C. $a<b<c$ D. $c<a<b$

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y=b^x; y=c^x$ đồng biến, hàm số $y=a^x$ nghịch biến nên $a<1; b,c>1$. Thay $x=10$, ta có $b^{10}>c^{10}\Rightarrow b>c$

Câu 39: Cho các hàm số $y=a^x$, $y=\log_b x, y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng.

A. $c>b>a$. B. $b>a>c$. C. $a>b>c$. D. $b>c>a$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=a^x$ đồ thị có dáng đi xuống từ trái sang phải nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$ do đó $0<a<1$ (1).

Hai hàm số $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ đồ thị có dáng đi lên từ trái sang phải nên đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó $b>1>a, c>1>a$ (2).

Quan sát đồ thị ta thấy với $0<x<1$ thì $\log_b x<\log_c x$, suy ra $c>b$.

Quan sát đồ thị ta thấy với $x>1$ thì $\log_b x>\log_c x$, suy ra $c>b$.

Suy ra $1 < b < c$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $c > b > a$.

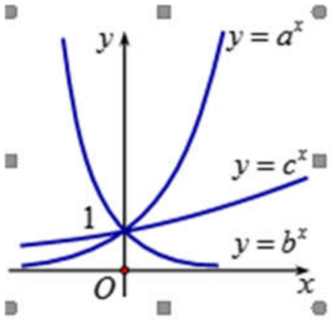
Cách khác:

Dễ thấy $a < 1$, $b > 1$, $c > 1$. Nên a là số nhỏ nhất.

Xét đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hai hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ lần lượt tại các điểm $B(b;1)$ và $C(c;1)$

(hình vẽ). Dễ thấy $c > b$ vậy $c > b > a$.

Câu 40: Hình vẽ dưới đây vẽ đồ thị của 3 hàm số mũ.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a > b > c$. B. $a > c > 1 > b$. C. $b > c > 1 > a$. D. $b > a > c$.

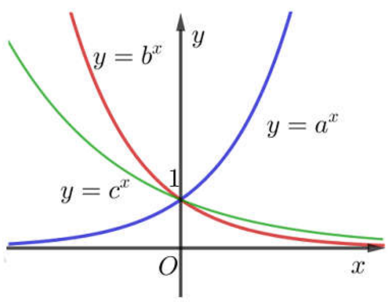
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ở hình 5 ta thấy đồ thị của hàm số $y = b^x$ là nghịch biến nên $0 < b < 1$.

Vẽ đường thẳng $x = 1$ ta có đường thẳng $x = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = a^x$ tại điểm có tung độ $y = a$ và cắt đồ thị hàm số $y = c^x$ tại điểm có tung độ là $y = c$. Khi đó điểm giao với $y = a^x$ nằm trên điểm giao với $y = c^x$ nên $a > c > 1$. Vậy $a > c > 1 > b$.

Câu 41: Trên hình 2.13, đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c



A. c > b > a B. b > c > a C. a > c > b D. a > b > c

Lời giải

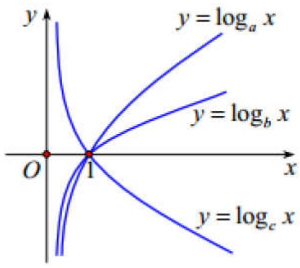
Chọn C

Dựa vào hình vẽ, ta thấy rằng: Hàm số $y=a^x$ là hàm số đồng biến; hàm số $y=b^x, y=c^x$ là hàm số nghịch biến.

Suy ra $a>1$ và $\begin{cases} 0<b<1 \\ 0<c<1 \end{cases} \to a>\{b;c\}$. Gọi $B(-1;y_B)$ thuộc đồ thị hàm số $y=b^x \Rightarrow y_B=\frac{1}{b}$;

Và $C(-1;y_C)$ thuộc đồ thị hàm số $y=c^x \Rightarrow y_C=\frac{1}{c}$. Dựa vào đồ thị, ta có $y_B>y_C \Leftrightarrow \frac{1}{b}>\frac{1}{c} \Leftrightarrow c>b$.

Câu 42: Cho a, b, c là ba số thực dương và khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?



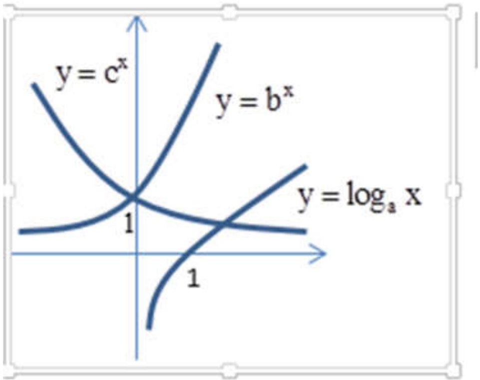
A. $a<b<c$ B. $c<a<b$ C. $c<b<a$ D. $b<c<a$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<c<1$, các hàm $y=\log_a x, y=\log_b x$ đồng biến nên $a;b>1$ Chọn $x=100 \Rightarrow \log_a 100>\log_b 100 \Rightarrow a<b \Rightarrow c<a<b$.

Câu 43: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $b<c<a$ B. $a<b<c$ C. $c<a<b$ D. $c<b<a$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=c^x$ là hàm nghịch biến nên $0<c<1$.

Hàm số $y=b^x$ là hàm đồng biến nên $b>1$

Hàm số $y = \log_a x$ là hàm đồng biến nên $a > 1$. Lấy đối xứng đồ thị hàm $y = \log_a x$ qua đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng toạ độ ta có đồ thị hàm số $y = b^x$ tăng nhanh hơn đồ thị hàm số $y = a^x$ nên $b > a$

BÀI 21: PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1.PHƯƠNG TRÌNH MŨ

HĐ1. **Nhận biết nghiệm của phương trình mũ**

Xét phương trình: $2^{x+1} = \frac{1}{4}$.

a) Khi viết $\frac{1}{4}$ thành luỹ thừa của 2 thì phương trình trên trở thành phương trình nào?

b) So sánh số mũ của 2 ở hai vế của phương trình nhận được ở câu a để tìm x.

Lời giải

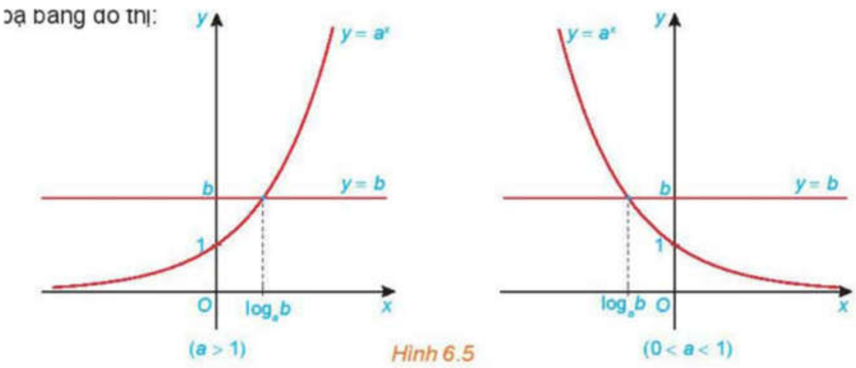
a) Phương trình có dạng $2^{x+1} = 2^{-2}$.

b) So sánh số mũ của 2 ở hai vế của phương trình ta được: $x+1=-2 \Rightarrow x=-3$

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$(với $0 < a \neq 1$).

- Nếu $b>0$ thì phương trình có nghiệm duyy nhất $x=\log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh hoạ bằng đồ thị:



Chú ý. Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$.

Ví dụ 1. Giải phương trình: $3^{x+1} = \frac{1}{3^{1-2x}}$.

Lời giải

Đưa vế phải về cơ số 3 , ta có $\frac{1}{3^{1-2x}} = 3^{2x-1}$.

Từ đó phương trình trở thành $3^{x+1} = 3^{2x-1} \Leftrightarrow x+1 = 2x-1 \Leftrightarrow x = 2$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $10^{x-1} = 2022$

Lời giải

Lấy lôgarit thập phân hai vế của phương trình ta được $x-1=\log 2022$ hay $x = 1+\log 2022$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1+\log 2022$.

Luyện tập 1. Giải các phương trình sau:

a) $2^{3x-1}=\dfrac{1}{2^{x+1}}$; b) $2e^{2x}=5$.

Lời giải

a) $2^{3x-1}=2^{-(x+1)}\Rightarrow 3x-1=-(x+1)\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

b) $\ln\left(2e^{2x}\right)=\ln 5\Rightarrow \ln 2+\ln e^{2x}=\ln 5\Rightarrow \ln 2+2x=\ln 5\Rightarrow 2x=\ln 5-\ln 2=\ln\dfrac{5}{2}$

Như vậy $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{2}$.

2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

HĐ2. **Nhận biết nghiệm của phương trình lôgarit**

Xét phương trình: $2\log_2 x=-3$.

a) Từ phương trình trên, hãy tính $\log_2 x$.

b) Từ kết quả ở câu a và sử dụng định nghĩa lôgarit, hãy tìm x.

Lời giải

a)Chia cả hai vế của phương trình cho 2 , ta được: $\log_2 x=-\dfrac{3}{2}$

Vậy $\log_2 x=-\dfrac{3}{2}$.

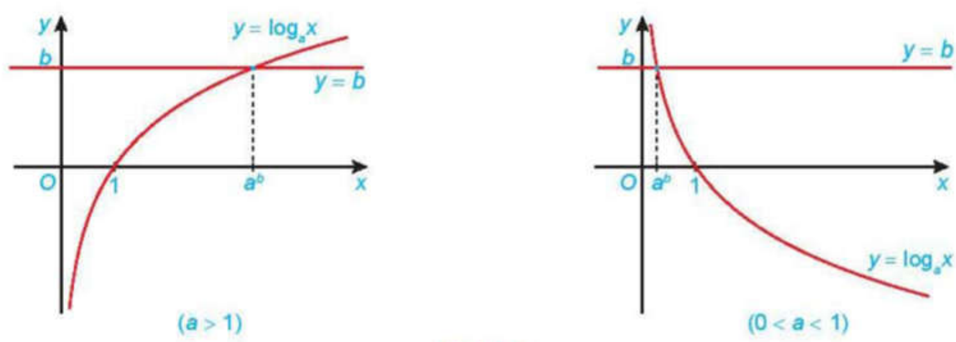
b) Áp dụng định nghĩa của logarit, ta có: $\log_2 x=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{-\frac{3}{2}}=x$

Vậy $x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x=b(0<a\neq 1)$.

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x=b$ có nghiệm duy nhất $x=a^b$.

Minh hoạ bằng đồ thị:



Hình 6.6

Chú ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:

Nếu $u,v>0$ và $0<a\neq 1$ thì $\log_a u=\log_a v\Leftrightarrow u=v$.

Ví dụ 3. Giải phương trình: $4+3\log(2x)=16$.

Lời giải

Điều kiện: $2x > 0$ hay $x > 0$.

Phương trình trở thành $\log(2x) = 4$. Từ đó $2x = 10^4$ hay $x = 5000$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 5000$.

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\log_3(x+1) = \log_3(x^2 - 1)$.

Lời giải

Điều kiện: $x + 1 > 0$ và $x^2 - 1 > 0$, tức là $x > 1$.

Phương trình trở thành $x + 1 = x^2 - 1$ hay $x^2 - x - 2 = 0$.

Từ đó tìm được $x = -1$ và $x = 2$, nhưng chỉ có nghiệm $x = 2$ thoả mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Luyện tập 2. Giải các phương trình sau:

a) $4 - \log(3 - x) = 3$;

b) $\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 1$

Lời giải

a) Điều kiện $3 - x > 0$ hay $x < 3$.

$4 - \log(3-x) = 3 \log(3-x) = 1 \Leftrightarrow 10^1 = 3 - x$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$ thỏa mãn điều kiện.

b) Điều kiện $x + 2 > 0$ và $x - 1 > 0$ tức là $x > 1$.

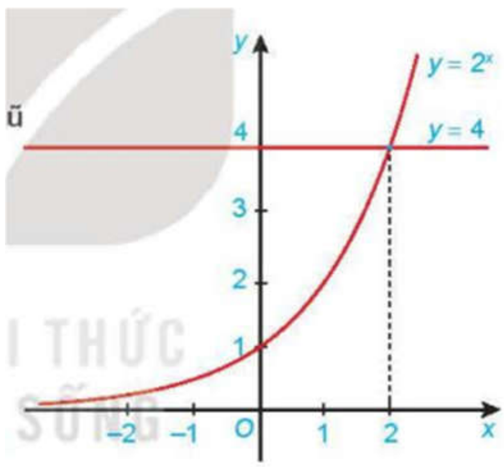
$(x+2)(x-1) = 2 \Rightarrow x^2 + x - 4 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

HĐ3. Nhận biết nghiệm của bất phương trình mũ

Cho đồ thị của các hàm số $y = 2^x$ và $y = 4$ như Hình 6.7. Tìm khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y = 2^x$ nằm phía trên đường thẳng $y = 4$ và từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 4$.



Lời giải

Để tìm khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y=2^x$ nằm phía trên đường thẳng $y=4$, ta cần giải phương trình $2^x=4$ để tìm giá trị của x tại điểm cắt giữa đường thẳng $y=4$ và đồ thị hàm số $y=2^x$ trên trục tọa độ.

$2^x=4$ có nghiệm $x=2$.

Do đồ thị của hàm số $y=2^x$ là một đường cong liên tục và tăng không giới hạn khi x tiến đến vô cùng, nên để đồ thị nằm phía trên đường thẳng $y=4$ thì ta cần xác định các giá trị của x lớn hơn 2.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $2^x>4$ là $(2,+\infty)$.

- Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x>b$ (hoặc $a^x\ge b, a^x<b, a^x\le b$) với $a>0, a\ne 1$.
- Xét bất phương trình dạng $a^x>b$:

  - Nếu $b\le 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
  - Nếu $b>0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x>a^{\log_a b}$.

    Với $a>1$, nghiệm của bất phương trình là $x>\log_a b$.

    Với $0<a<1$, nghiệm của bất phương trình là $x<\log_a b$.

Chú ý

a) Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.

b) Nếu $a>1$ thì $a^u>a^v \Leftrightarrow u>v$.

Nếu $0<a<1$ thì $a^u>a^v \Leftrightarrow u<v$.

Ví dụ 5: Giải bất phương trình: $16^x>\frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $16^x>\frac{1}{8}\Leftrightarrow 2^{4x}>2^{-3}\Leftrightarrow 4x>-3\Leftrightarrow x>-\frac{3}{4}$

Ví dụ 6: Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

Lời giải

Ta cần tìm t sao cho

$$V(t)\le 300\Leftrightarrow 780.(0,905)^t\le 300\Leftrightarrow (0,905)^t\le\frac{5}{13}\Leftrightarrow t\ge\log_{0,905}\frac{5}{13}\approx 9,6$$

Vậy sau khoảng 10 năm sử dụng, giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng.

Luyện tập 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $0,1^{2x-1}\le 0,1^{2-x}$;

b) $3.2^{x-1}\le 1$.

Lời giải

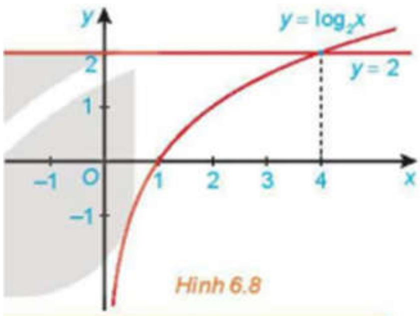
a) $2x-1\le 2-x\Leftrightarrow 3x\le 3\Leftrightarrow x\le 1$

b) $2^{x+1}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow x+1\le\log_2\frac{1}{3}\Leftrightarrow x\approx -2,584$

4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

HĐ4. Nhận biết nghiệm của bất phương trình lôgarit

Cho đồ thị các hàm số $y=\log_2 x, y=2$ như Hình 6.8. Tìm khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ nằm phía trên đường thẳng $y=2$ và từ đó suy ra tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x>2$.



Hình 6.8

Lời giải

Để hàm số $y=\log_2 x$ nằm phía trên đường thẳng $y=2$, ta cần giải phương trình $\log_2 x>2$.

$\log_2 x>2 \Leftrightarrow x>2^2=4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x>2$ là $x\in(4,+\infty)$.

- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x>b$ (hoặc $\log_a x\ge b, \log_a x<b, \log_a x\le b$) với $a>0, a\ne 1$.
- Xét bất phương trình dạng $\log_a x>b$:

Với $a>1$, nghiệm của bất phương trình là $x>a^x$.

Với $0<a<1$, nghiệm của bất phương trình là $0<x<a^b$.

Chú ý

a) Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.

b) Nếu $a>1$ thì $\log_a u>\log_a v \Leftrightarrow x>a^b$.

Nếu $0<a<1$ thì $\log_a u>\log_a v \Leftrightarrow 0<u<a^b$.

Ví dụ 7. Giải bất phương trình: $\log_{0,3}(x+1)\le \log_{0,3}(2x-1)$.

Lời giải

Điều kiện: $x>\frac{1}{2}$.

Vì cơ số $0,3<1$ nên bất phương trình trở thành $x+1\ge 2x-1$, từ đó tìm được $x\le 2$. Kết hợp với điều kiện, ta được nghiệm của bất phương trình đã cho là $\frac{1}{2}<x\le 2$.

Luyện tập 4. Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_{\frac{1}{7}}(x+1)>\log_7(2-x)$; b) $2\log(2x+1)>3$.

Lời giải

a) $\log_{\frac{1}{7}}(x+1)=\log_7(2-x)$ điều kiện $x<2$

$\frac{1}{x+1}>2-x \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$

Ta được nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{x+1}>2-x \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<2$.

Vận dụng. Áp suất khí quyển p (tính bằng kilopascal, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển, tính bằng km) được tính theo công thức sau: $\ln\left(\frac{p}{100}\right)=-\frac{h}{7}$

(Theo *britannica.com*)

a) Tính áp suất khí quyển ở độ cao 4 km.

b) Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

Lời giải

a) Áp suất khí quyển ở độ cao 4 km được tính bằng cách đưa giá trị $h=4$ vào công thức:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right)=-\frac{h}{7}=-\frac{4}{7}$$

Giải phương trình này để tìm giá trị của p: $\frac{p}{100}=e^{-\frac{4}{7}} \Rightarrow p=100e^{-\frac{4}{7}}\approx 50,75\text{kPa}$

b) Để tính áp suất khí quyển ở độ cao 10km, ta đưa giá trị $h=10$ vào công thức ban đầu:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right)=-\frac{h}{7}=-\frac{10}{7}$$

Giải phương trình này để tìm giá trị của p :

$$\frac{p}{100}=e^{-\frac{10}{7}} \Rightarrow p=100e^{-\frac{10}{7}}\approx 25,27kPa$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

$\triangleright\ a^{A(x)}=a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x)=B(x),\ (a>0, a\neq 1)$

$\triangleright\ \log_a f(x)=\log_a g(x) \overset{a>0,a\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x)>0\ (hoac\, g(x)>0) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$

$\triangleright\ a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x) \end{cases} \end{array}\right.$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải các phương trình mũ sau

a) $3^{x^2-4x+5}=9$ b) $1,5^{5x-7}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$ c) $2^{2x-1}+4^{x+2}=10$

Giải

a) Đưa hai vế về cùng cơ số 3, ta được phương trình đã cho tương đương với: $3^{x^2-4x+5}=3^2 \Leftrightarrow x^2-4x+5=2^{(1)} \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$.

Giải phương trình bậc hai này được hai nghiệm là $x=1$ và $x=3$.

b) Đưa về cùng cơ số 1,5, phương trình đã cho tương đương với:

$1,5^{5x-7} = 1,5^{-x-1} \Leftrightarrow 5x-7=-x-1 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

c) Phương trình đã cho tương đương với

$\frac{1}{2}\cdot 4^x+16\cdot 4^x=10 \Leftrightarrow \frac{33}{2}\cdot 4^x = 10 \Leftrightarrow 4^x=\frac{20}{33} \Leftrightarrow x=\log_4\frac{20}{33}$.

Vậy $x=\log_4\frac{20}{33}$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\log_3(2x+1)=\log_3 5$ b) $\log_2(x+3)=\log_2\left(2x^2-x-1\right)$

c) $\log_5(x-1)=2$ d) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$

Lời giải

a) ĐK: $2x+1>0 \Leftrightarrow x>(-1/2)$

$\text{PT} \Leftrightarrow 2\text{x}+1=5 \Leftrightarrow 2\text{x}=4 \Leftrightarrow \text{x}=2$ (thoả ĐK)

b) ĐK: $x+3>0, 2x^2-x-1>0$ ta được: $x>1$ hoạcc $(-3)<x<(-1/2)$

Ta có: $\log_2(x+3)=\log_2\left(2x^2-x-1\right) \Leftrightarrow x+3=2x^2-x-1 \Leftrightarrow 2x^2-2x-4=0$

$\Leftrightarrow \text{x}^2-\text{x}-2=0 \Leftrightarrow \text{x}=-1$ (thoả) hoặc $\text{x}=2$ (thoả)

c) ĐK: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Ta có: $\log_5(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=5^2 \Leftrightarrow x=26$ (thoả)

d) ĐK: $x-5>0$ và $x+2>0$ ta được: $x>5$

Ta có:

$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3 \Leftrightarrow \log_2(x-5)(x+2)=3 \Leftrightarrow (x-5)(x+2)=2^3$

$\Leftrightarrow \text{x}^2-3\text{x}-18=0 \Leftrightarrow \text{x}=-3$ (loai) hoạcc $\text{x}=6$ (thoà)

Ví dụ 1: Giải bất phương trình mũ sau: $3^{x^2-x}\le 3^{1-x}$

Lời giải

Ta có: $3^{x^2-x}\le 3^{1-x} \Leftrightarrow x^2-x\le 1-x \Leftrightarrow x^2-1\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $[-1;1]$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 3: Giải bất phương trình mũ sau: $\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x}$

Lời giải

- Ta có thể biến đỗi theo 1 trong 2 cách sau (thực tế thì cùng phương pháp).

Cách 1: Bất phương trình được biến đỗi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 4x \ge x-2 \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$

Cách 2: Bất phương trình được biến đổi về dạng:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-4x} \le \left(\frac{5}{2}\right)^{2-x} \Leftrightarrow -4x \le 2-x \Leftrightarrow 3x \ge -2 \Leftrightarrow x \ge \frac{-2}{3}$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$

Ví dụ 4: Giải bất phương trình $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3}$.

Lời giải

Ta có: $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)=1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}+2)^{-1}$

Vậy: $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}-2)^{-x^2+3} \Leftrightarrow (\sqrt{5}+2)^{x-1} \ge (\sqrt{5}+2)^{x^2-3} \Leftrightarrow x-1 \ge x^2-3$

$\Leftrightarrow x^2-x-2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=[-1;2]$

Ví dụ 5: Giải bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6 \le 0$

Lời giải

Đặt $t=\log_2 x$, khi đó phương trình trở thành:

$t^2-5t-6 \le 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-6) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le t \le 6$

Do đó ta có:

$$-1 \le \log_2 x \le 6 \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} \le \log_2 x \le \log_2 64 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 64$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$.

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

$$\alpha a^{2x}+\beta.a^x+\gamma=0. \text{ Đặt } t=a^x,(t>0)$$

$$\alpha \log_a^2 x+\beta.\log_a x+\gamma=0. \text{ Đặt } t=\log_a x,(x>0)$$

2. Ví dụ

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $9^x-4\cdot 3^x+3=0$ b) $9^x-3\cdot 6^x+2\cdot 4^x=0$

c) $5^x+5^{1-x}-6=0$ d) $25^x-2.5^x-15=0$

Lời giải

a) $9^x-4.3^x+3=0$ đặt $t=3^x$ với $t>0$ ta được phương trình: $t^2-4.t+3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=3$ (2 nghiệm đều thoả điều kiện $t>0$).

với $t=1 \Leftrightarrow 3^x=1 \Leftrightarrow x=0$

với $t=3 \Leftrightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

b) $9^x-3.6^x+2.4^x=0$ chia 2 vế của phương trình cho 4^x ta được phương trình sau $\left(\frac{9}{4}\right)^x-3\left(\frac{6}{4}\right)^x+2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-3\left(\frac{3}{2}\right)^x+2=0$ đặt $t=(3/2)^x$ với $t>0$ ta được phương trình $t^2-3.t+2=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=2$ (2 nghiệm đều thoả $t>0$)

với $t=1 \Leftrightarrow (3/2)^x=1 \Leftrightarrow x=0$

vớit $=2 \Leftrightarrow (3/2)^x=2 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}} 2$

c) $5^x+5^{1-x}-6=0 \Leftrightarrow 5^x+5.5^{-x}-6=0$

Đặt $t=5^x$ (với $t>0$) thì $5^{-x}=1/t$ ta được phương trình:

$t+5\frac{1}{t}-6=0 \Leftrightarrow t^2-6t+5=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=5$ (thoả điều kiện $t>0$)

với $t=1 \Leftrightarrow 5^x=1 \Leftrightarrow x=0$

với $t=5 \Leftrightarrow 5^x=5 \Leftrightarrow x=1$

d) d) $25^x-2.5^x-15=0 \Leftrightarrow 5^{2x}-2.5^x-15=0$ đặt $t=5^x$ với $t>0$ ta được phương trình

$t^2-2t-15=0 \Leftrightarrow t=5$ (nhận) hoặc $t=-3$ (loại)

với $t=5 \Leftrightarrow 5^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\log_3^2 x+2\log_3 x-3=0$

b) $4\log_9 x+\log_x 3-3=0$

Lời giải

a) ĐK: $x>0$

Ta đặt $t=\log_3 x$ khi đó $PT \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1$ hoacc $t=-3$

Với t $=1 \Leftrightarrow \log_3 x=1 \Leftrightarrow x=3$

Với $t=-3 \Leftrightarrow \log_3 x=-3 \Leftrightarrow x=3^{-3}=1/27$

b) $4\log_9 x+\log_x 3-3=0$ ĐK: $0<x\neq 1$

$PT \Leftrightarrow 2\log_3 x+1/\log_3 x-3=0$

Ta đặt $t=\log_3 x$ khi đó PT $\Leftrightarrow 2t+1/t-3=0 \Leftrightarrow 2t^2-3t+1=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=1/2$

Vớit $=1 \Leftrightarrow \log_3 x=1 \Leftrightarrow x=3$ (thoả)

Vớit $=1/2 \Leftrightarrow \log_3 x=1/2 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$ (thoả)

Ví dụ 3: Giải bất phương trình mũ sau: $9^x+2.3^{x+1}-16\ge 0$

Lời giải

$9^x+2.3^{x+1}-16\ge 0$ $(*)$

Ta đặt $t=3^x$ (điều kiện $t>0$), khi đó phương trình $(\ ^*)$ biến đổi về dạng:

$$3^{2x}+6.3^x-16\ge 0 \Leftrightarrow t^2+6t-16\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -8(\text{ loai }) \\ t\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t\ge 2$$

Với: $t\ge 2 \Leftrightarrow 3^x\ge 2 \Leftrightarrow x\ge \log_3 2$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $[log_3 2;+\infty)$

Ví dụ 4: Giải bất phương trinh sau: $(7+4\sqrt{3})^x-3(2-\sqrt{3})^x+2\le 0$

Lời giải

Ta có: $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ và $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$ nên đặt $t=(2+\sqrt{3})^x, t>0$ ta có bất phương trình:

$$t^2-3/t+2\le 0 \Leftrightarrow t^3+2t-3\le 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(t^2+t+3\right)\le 0 \Leftrightarrow t\le 1 \Leftrightarrow (2+\sqrt{3})^x\le 1 \Leftrightarrow x\le 0$$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm là $x\le 0$

Dạng 3: Logarit hóa, mũ hóa

1. Phương pháp

$$a^{f(x)}=b \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\ne 1 \\ b>0 \\ f(x)=\log_a b \end{cases}.$$

$$\log_a f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)=a^b \end{cases}$$

$$a^{f(x)}>b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<\log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} a>1 \\ f(x)>\log_a b \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a^{f(x)}>b^{g(x)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x).\log_a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x).\log_a^b \end{cases} \end{array}\right.$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\log_a f(x) > b \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < a^b \end{cases}\end{array}\right.$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Giải phương trình sau

a) $3^x = 2$ b) $2^x \cdot 3^x = 1$

Lời giải

a) $3^x = 2$ ta logarit cơ số 3 hay vế

$\text{Pt} \Leftrightarrow \log_3 3^x = \log_3 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$

$b) 2^x \cdot 3^x = 1 \Leftrightarrow (2.3)^x = 1 \Leftrightarrow 6^x = 1 \Leftrightarrow \log_6 6^x = \log_6 1 \Leftrightarrow x = 0$

Hoặc có thể làm như sau, lấy logarit cơ số 2 của 2 vế ta được

$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x \cdot 3^x\right) = \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x \cdot 3^x\right) = 0 \Leftrightarrow \log_2 2^x + \log_2 3^x = 0$

$\Leftrightarrow x + x \cdot \log_2 3 = 0 \Leftrightarrow x\left(1 + \log_2 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau:

a) $\ln(x+3) = -1 + \sqrt{3}$

b) $\log_2\left(5 - 2^x\right) = 2 - x$

Lời giải

a) ĐK: $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ với điều kiện này ta mũ hóa 2 vế của PT đã cho ta được PT: $e^{ln(x+3)} = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x + 3 = e^{-1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = e^{-1+\sqrt{3}} - 3$ (thoả)

b) $\log_2\left(5 - 2^x\right) = 2 - x$

ĐK: $5 - 2^x > 0 \Leftrightarrow 2^x < 5$

$\text{PT} \Leftrightarrow 2^{\log_2 5 - 2^x} = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = 4.2^{-x}$

Đặt $t = 2^x \left(t > 0, t < 5 \text{ do } 2^x < 5\right)$ ta được: $5 - t = (4/t) \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ (thoả) hoạc $t = 4$ (thoả)

Vớit $= 1 \Leftrightarrow \text{x} = 0$

Vớit $= 4 \Leftrightarrow x = 2$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình $2^{x^2-4} \geq 5^{x-2}$.

Lời giải

Lấy logarit cơ số 2 hai vế của bát phương trình đã cho ta có:

$$\log_2\left(2^{x^2-4}\right) \geq \log_2\left(5^{x-2}\right) \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq (x-2)\log_2 5 \Leftrightarrow (x-2)\left(x + 2 - \log_2 5\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq \log_2 5 - 2 \end{array}\right.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S = \left(-\infty; \log_2 5 - 2\right] \cup [2; +\infty)$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 4: Giải bất phương trình logarit sau: $\log_8(4-2x)\geq 2$

Lời giải

- Điều kiện $4-2x>0$ suy ra $x<2$.

$\log_8(4-2x)\geq 2 \Leftrightarrow \log_8(4-2x)\geq \log_8 8^2 \Leftrightarrow 4-2x\geq 8^2 \Leftrightarrow 4-2x\geq 64 \Leftrightarrow 2x\leq -60 \Leftrightarrow x\leq -30$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình logarit là: $(-\infty;-30]$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 6.20. Giải các phương trình sau:

a) $3^{x-1}=27$; b) $100^{2x^2-3}=0,1^{2x^2-18}$;

c) $\sqrt{3}e^{3x}=1$; d) $5^x=3^{2x-1}$.

Lời giải

a) $3^{x-1}=27=3^3$, do đó ta có $x-1=3\Rightarrow x=4$.

b) $100^{x^2-3}=0,1^{2x^2-18}$

$\Rightarrow\left(x^2-3\right)\ln 100=\left(2x^2-18\right)\ln 0,1$

$\Rightarrow\left(x^2-3\right)\ln 10=\left(2x^2-18\right)\Rightarrow\left(x^2-3\right)=4\left(18-x^2\right)$

$\Rightarrow\left(x^2-3\right)=4\left(18-x^2\right)\Rightarrow 5x^2=75\Rightarrow x=\pm\sqrt{15}$

c) $\sqrt{3}e^{3x}=1\Rightarrow \ln\left(\sqrt{3}e^{3x}\right)=\ln 1$

$\Rightarrow \ln\sqrt{3}+3x\ln e=0\Rightarrow \frac{1}{2}\ln 3+3x=0$

$\Rightarrow 3x=-\frac{1}{2}\ln 3\Rightarrow x=-\frac{1}{6}\ln 3$ d) $5^x=3\cdot\left(3^2\right)^{x-1}=3\cdot 3^{2x-2}$ và rút gọn để được $5^x=3^{2x}$

$5^x=3^{2x}\Rightarrow \ln 5^x=\ln 3^{2x}$

$\Rightarrow x\ln 5=2x\ln 3\Rightarrow \ln 5=2\ln 3$

$\Rightarrow \ln\frac{5}{3^2}=0$

Bài 6.21. Giải các phương trình sau:

a) $\log\left(x+1\right)=2$; b) $2\log_4 x+\log_2\left(x-3\right)=2$;

c) $\ln x+\ln\left(x-1\right)=\ln 4x$; d) $\log_3\left(x^2-3x+2\right)=\log_3\left(2x-4\right)$.

Lời giải

a) $\log(x+1)=2\Rightarrow x+1=10\Rightarrow x=9$

b) $2\log_4 x+\log_2(x-3)=2\Rightarrow \log_4 x^2+\log_2(x-3)=2$.

$\log_2 x^2+\log_2(x-3)^{\frac{1}{2}}=2\Rightarrow \log_2\left(x^2\sqrt{x-3}\right)=2$

Vậy $x=4$

c) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 4x \Rightarrow \ln(x(x-1))=\ln(4x) \Rightarrow x(x-1)=4x \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5 \\ x=0 \end{array}\right.$ ($x=5$ thoả mãn).

Vậy $x=5$

$d)\ \log_3\left(x^2-3x+2\right)=\log_3\left(2x-4\right)=x^2-x+2=2\mathrm{x}-4=x^2-3\mathrm{x}+6=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(6)}}{2(1)}=\dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x^2-x+2=2x-4$ có nghiệm $x=\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$ và $x=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{2}$.

Bài 6.22. Giải các bất phương trình sau:

a) $0,1^{2-x}>0,1^{4+2x}$; b) $2.5^{2x+1}\le 3$;

c) $\log_3\left(x+7\right)\ge -1$; d) $\log_{0,5}\left(x+7\right)\ge \log_{0,5}\left(2x-1\right)$.

Lời giải

a) $2-x>4+2x \Leftrightarrow -2>3x \Leftrightarrow x>\dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{2,5^{2x+1}}{2,5}\le \dfrac{3}{2,5} \Leftrightarrow 2,5^{2x}\le \dfrac{6}{5}$

$\ln\left(2,5^{2x}\right)\le \ln\left(\dfrac{6}{5}\right) \Leftrightarrow 2x\ln(2,5)\le \ln\left(\dfrac{6}{5}\right)$

$\Rightarrow x\le \dfrac{\ln\frac{6}{5}}{2\ln 2,5}\approx 0,317$

c) $\log_3(x+7)\ge -1 \Leftrightarrow 3^{-1}\le x+7 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le x+7 \Leftrightarrow x\ge -\dfrac{20}{5}$

d) $\log_{0,5}(x+7)\ge \log_{0,5}(2x-1) \Leftrightarrow x+7\ge 2x-1 \Leftrightarrow x\le$ -8

Bài 6.23. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi $7,5\%$ một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$$A=500.(1+0,075)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải

Ta có $500(1+0,075)^n\ge 800$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 500 : $(1+0,075)^n\ge \dfrac{800}{500}=1,6$

Lấy logarit tự nhiên ở cả hai vế của bất phương trình: $n\ln(1+0,075)^n\ge \ln(1,6)$

Chia cả hai vế của bất phương trình cho $\ln(1+0.075)$: $n\ge \dfrac{\ln(1,6)}{\ln(1+0,075)}\approx 9,25$

Vậy thời gian tối thiểu cần gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng là 10 năm.

Bài 6.24. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t)=500e^{0,4t}$

Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80 000 con?

Lời giải

Giải phương trình: $80000=500e^{0,4t}$

Chia cả hai vế của phương trình cho 500 $:160=e^{0,4t}$

Logarit tự nhiên của cả hai vế: $\ln 160=0,4t \Rightarrow t=\dfrac{\ln 160}{04}\approx 5,43$

Vậy sau khoảng 5.43 giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn sẽ vượt mức 80000 con.

Bài 6.25. Giả sử nhiệt độ $T\left({}^{\circ}\mathrm{C}\right)$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T=25+70e^{-0.5t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}\mathrm{C}$?

Lời giải

a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T=25+70e^{0,5t}=25+70e^{0,5\times 0}=25+70=95$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}\mathrm{C}$.

$30=25+70e^{0,5t} \Rightarrow \ln\dfrac{30-25}{70}=0,5t$

Giải phương trình trên ta tìm được giá trị của t: $t=2\ln\dfrac{1}{7}\approx 6,04$

Vậy sau khoảng 6,04 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn $30^{\circ}\mathrm{C}$.

Bài 6.26. Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8 .

Lời giải

Độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $\mathrm{p}H=-\log_{10}\left[H^{+}\right]$.

$\Rightarrow \left[H^{+}\right]=10^{-pH}$. Do đó, nồng độ ion hydrogen của dung dịch có độ pH là 8 là:

$\left[H^{+}\right]=10^{-pH}=10^{-8}(\mathrm{mol/lít})$.

Vậy, nồng độ ion hydrogen của dung dịch là $10^{-8}\,\mathrm{mol/lít}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Phương trình $2^{2x+1}=32$ có nghiệm là

A. $x=\dfrac{5}{2}$. B. $x=2$. C. $x=\dfrac{3}{2}$. D. $x=3$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn B

Ta có $2^{2x+1}=32 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 2: Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=\left(\frac{1}{7}\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x^2-2x-3=-x+1 \Leftrightarrow x^2-x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

Câu 3: Phương trình $\log_{\sqrt{2}} x=\log_2(x+2)$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{\sqrt{2}} x=\log_2(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x^2=\log_2(x+2)\\ x>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2=x+2\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-2=0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\ x_2=2\end{array}\right.\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 4: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases}x^2+4x>0\\ 2x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\ x<-4\end{array}\right.\\ x>-\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3(x^2+4x)=\log_3(2x+3)$

$$\Leftrightarrow x^2+4x=2x+3 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-3\end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện ta được $x=1$.

Câu 5: Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0$ là

A. $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. B. $S=\{2\}$. C. $\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$. D. $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\frac{4}{7}\right)^{x}\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{7}\right)^{-2x+1}=\left(\frac{4}{7}\right)^{2} \Leftrightarrow -2x+1=2 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x^2+x-1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.

B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2\left(x^2+x-1\right)}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow 2x^2+2x-2=x-2 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$ là

A. $x=3$. B. $x=2$. C. $x=-1$. D. $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$.

Khi đó phương trình trở thành

$\log_2(2x+2)=\log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2x+2=3x-1 \Leftrightarrow -x=-3 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

Câu 8: Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

A. 3 B. 1 C. 2 D. 0

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>5$

$3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3 \Leftrightarrow 3\log_3(x-1)+3\log_3(x-5)=3$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)+\log_3(x-5)=1 \Leftrightarrow \log_3\left[(x-1)(x-5)\right]=1 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)=3$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2=0 \Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{7}$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x=3+\sqrt{7}$

Câu 9: Nghiệm của phương trình $2^{x+1}.4^{x-1}.\frac{1}{8^{1-x}}=16^x$ là

A. $x=3$. B. $x=1$. C. $x=4$. D. $x=2$.

Lời giải

Chọn D

$2^{x+1}.4^{x-1}.\frac{1}{8^{1-x}}=16^x \Leftrightarrow 2^{x+1}.2^{2(x-1)}.2^{3(x-1)}=2^{4x}$

$\Leftrightarrow x+1+2(x-1)+3(x-1)=4x \Leftrightarrow x=2$.

Câu 10: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18$ bằng

A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x^2-2x-1}.3^{x^2-2x}=18 \Leftrightarrow 6^{x^2-2x}=36 \Leftrightarrow x^2-2x=2 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0$.

Phương trình $x^2-2x-2=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lí vi-et tổng hai nghiệm của phương trình là: $x_1+x_2=2$.

Câu 11: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

A. 0. B. 3. C. 9. D. 6.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2<x\neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0 \Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4|=0 \Leftrightarrow (x-2)|x-4|=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{2}\\x=3\end{array}\right.$ So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1=3+\sqrt{2};x_2=3$

Ta được: $S=x_1+x_2=6+\sqrt{2}\Rightarrow a=6;b=1$.

Vậy $Q=a.b=6$.

Câu 12: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$. Tính $P = x_1 + x_2$.

A. 6. B. -3. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = 2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = 2\\ x_2 = 4\end{array}\right..$$

Vậy $P = x_1 + x_2 = 2 + 4 = 6$.

Câu 13: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x - 3\log_3 x.\log_2 3 + 2 = 0$

A. 20 B. 18 C. 6 D. 25

Lời giải

Chọn A

$$\log_2^2 x - 3\log_3 x.\log_2 3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 1\\ \log_2 x = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1 = 2\\ x_2 = 4\end{array}\right. \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 20$$

Câu 14: Phương trình $6^{2x-1} - 5.6^{x-1} + 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó tổng hai nghiệm $x_1 + x_2$ là.

A. 5. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$6^{2x-1} - 5.6^{x-1} + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{6^{2x}}{6} - \frac{5.6^x}{6} + 1 = 0 \Leftrightarrow 6^{2x} - 5.6^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6^{x_1} = 2\\ 6^{x_2} = 3\end{array}\right..$$

$$\Rightarrow 6^{x_1}.6^{x_2} = 3.2 \Leftrightarrow 6^{x_1+x_2} = 6 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1.$$

Câu 15: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính T.

A. $T = 4$. B. $T = 5$. C. $T = 84$. D. $T = -4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 1\\ \log_3 x = 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 3\\ x = 81\end{array}\right..$

Vậy $T = 3 + 81 = 84$.

Câu 16: Phương trình $9^x - 6^x = 2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

Lời giải

Chọn B

Ta có: $9^x-6^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 9^x-6^x=2.4^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=-1\,(L)\\ \left(\frac{3}{2}\right)^x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

Câu 17: Gọi x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)^x.\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1$. Đặt $t=\left(2-\sqrt{3}\right)^x,t>0\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t+\frac{1}{t}=4\Rightarrow t^2-4t+1=0\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$.

Với $t=2-\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=1$.

Với $t=2+\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $x_1^2+2x_2^2=3$.

Câu 18: Biết rằng phương trình $\log_2^2x-\log_2\left(2018x\right)-2019=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2.Tích x_1x_2 bằng

A. $\log_2 2018$ B. 0,5 C. 1 D. 2

Lời giải

Chọn D

$\log_2^2x-\log_2\left(2018x\right)-2019=0$. (1)

Điều kiện $x>0$.

Đặt $t=\log_2x$. Phương trình trở thành $t^2-t-\log_2 2018-2019=0.$ (2)

Do $ac<0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm t_1,t_2.Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $t_1=\log_2x_1;t_2=\log_2x_2$.

Theo Vi-et ta có $t_1+t_2=1$ hay $\log_2\left(x_1x_2\right)=1\Leftrightarrow x_1x_2=2$.

Câu 19: Tìm số nghiệm thực của phương trình $\log_2^2x^2-\log_4\left(4x^2\right)-5=0$.

A. 2 B. 4 C. 1 D. 3

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình $\log_2^2 x^2 - \log_4\left(4x^2\right) - 5 = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x^2 - \dfrac{1}{2}\log_2 x^2 - 6 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2 = \dfrac{1+\sqrt{97}}{4} \vee \log_2 x^2 = \dfrac{1-\sqrt{97}}{4}$. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Câu 20: Cho phương trình $\log_5\left(5^x - 1\right).\log_{25}\left(5^{x+1} - 5\right) = 1$. Khi đặt $t = \log_5\left(5^x - 1\right)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2 - 1 = 0$ B. $t^2 + t - 2 = 0$ C. $t^2 - 2 = 0$ D. $2t^2 + 2t - 1 = 0$

Lời giải

Chọn B

$\log_5\left(5^x - 1\right).\log_{25}\left(5^{x+1} - 5\right) = 1 \quad (1)$

TXĐ: $D = \left(0; +\infty\right)$.

Ta có $\log_{25}\left(5^{x+1} - 5\right) = \log_{5^2}\left(5.5^x - 5\right) = \dfrac{1}{2}\left(\log_5\left(5^x - 1\right) + 1\right)$.

Đặt $t = \log_5\left(5^x - 1\right) \quad (t > 0)$.

Phương trình (1) trở thành $t.\dfrac{1}{2}(t+1) = 1 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$.

Câu 21: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x + 3^{4-x} = 30$ bằng

A. 3. B. 1. C. 9. D. 27.

Lời giải

Chọn A

$3^x + 3^{4-x} = 30 \Leftrightarrow 3^x + \dfrac{81}{3^x} = 30$.

Đặt $t = 3^x\,(t > 0)$, phương trình đã cho trở thành:

$t + \dfrac{81}{t} = 30 \Leftrightarrow t^2 - 30t + 81 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 27 \Rightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow x = 3 \\ t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1 \end{array}\right.$ Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình là $1.3 = 3$.

Câu 22: Biết phương trình $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7$ có hai nghiệm thực $x_1 < x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T = \left(x_1\right)^{x_2}$

A. $T = 64$. B. $T = 32$. C. $T = 8$. D. $T = 16$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Ta có: $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \Leftrightarrow 2\log_2 x + \dfrac{3}{\log_2 x} = 7$

$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x - 7\log_2 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = 8 \Rightarrow T = (x_1)^{x_2} = \left(\sqrt{2}\right)^8 = 16$.

Câu 23: Phương trình $3.9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-1} + 3 = 0$ có tổng các nghiệm thực là:

A. 2. B. 0. C. 1. D. -2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 3^{x^2+x-1}$, điều kiện $t > 0$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng: $3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Với $t = 3 \Rightarrow 3^{x^2+x-1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $t = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^{x^2+x-1} = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; -1; 0; 1\}$ nên tổng tất cả các nghiệm thực là -2.

Câu 24: Gọi S là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13 B. 3 C. 6 D. 4

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 4^x, (t > 0)$. Phương trình trở thành: $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm phân biệt $t > 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m < -3 \vee m > 3 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{4; 5; 6\}$. Vậy S có 3 phần tử.

Câu 25: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m = 0\ (1)$

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ phương trình trở thành $t^2 - 2m.t + 2m = 0\ (2)$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm $t_1,\ t_2 > 0$ thỏa mãn $t_1.t_2 = 2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1+x_2} = 8$ suy ra $2m = 8 \Leftrightarrow m = 4$.

Câu 26: Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

A. $m = -4$ B. $m = 44$ C. $m = 81$ D. $m = 4$

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_3 x$ ta được $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$, tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm t_1, t_2

$t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3(x_1x_2) = \log_3 81 = 4$

Theo vi-et suy ra $t_1 + t_2 = m \Rightarrow m = 4$

Câu 27: Số nghiệm của phương trình $(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1\right] = 0$ là

A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ x < 2 \end{array}\right.$.

Kết hợp ĐKXĐ ta có:

$(x-2)\left[\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1\right] = 0 \Leftrightarrow \log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) = -1$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0,5^{-1} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với ĐKXĐ ta thấy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $9 - 7 = 2$

Câu 28: Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - x + 2) = 1$ là

A. $\{0\}$. B. $\{0;1\}$. C. $\{-1;0\}$. D. $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x^2 - x + 2) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 29: Nghiệm của phương trình $\log(x-1)=2$ là

A. 5. B. 21. C. 101. D. 1025.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của phương trình là $x>1$.

$\log(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=10^2 \Leftrightarrow x=101$.

Vậy $x=101$ thỏa mãn điều kiện nên phương trình đã cho có nghiệm là $x=101$.

Câu 30: Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7$ là:

A. $\{16\}$. B. $\{\sqrt{2}\}$. C. $\{4\}$. D. $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\log_2 x+\log_4 x+\log_{16} x=7 \Leftrightarrow \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\frac{1}{4}\log_2 x=7 \Leftrightarrow \frac{7}{4}\log_2 x=7.$

$\Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=2^4 \Leftrightarrow x=16$.

Câu 31: Tích các nghiệm của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$ bằng

A. $-3\log_2 3$. B. $-\log_2 54$. C. -4. D. $1-\log_2 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2-1}=3^{2x+3} \Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3 \Leftrightarrow x^2-2\log_2 3.x-1-3\log_2 3=0$.

Vì $ac<0 \Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$x_1x_2=-1-3\log_2 3=-\log_2 2-\log_2 27=-\log_2 54$.

Câu 32: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x.5^{x^2-2x}=1$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. $2-\log_5 2$. B. $-2+\log_5 2$. C. $2+\log_5 2$. D. $2-\log_2 5$.

Lời giải

$2^x.5^{x^2-2x}=1 \Leftrightarrow \log_5\left(2^x.5^{x^2-2x}\right)=0 \Leftrightarrow x\log_5 2+x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\left(\log_5 2+x-2\right)=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=2-\log_5 2 \end{array}\right.$.

Câu 33: Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=4$. B. $S=5$. C. $S=6$. D. $S=8$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq 0$.

Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x = 72 \Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)}.2^x = 3^2.2^3 \Leftrightarrow \frac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2} = \frac{2^3}{2^x} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2} = 2^{3-x}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}} = 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = \log_3 2^{3-x} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x} = -(x-3)\log_3 2 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{x} + \log_3 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ -\log_3 2 = \frac{1}{x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3(N) \\ x = -\log_2 3(N) \end{array}\right.$.

Suy ra $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$. Vậy tổng $S = a + b = 5$.

Câu 34: Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_4\left(3.2^x - 1\right) = x - 1$

A. 2. B. 1. C. 5. D. -6.

Lời giải

Chọn A

$\log_4\left(3.2^x - 1\right) = x - 1 \Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 4^{x-1} \Leftrightarrow 4^x - 12.2^x + 4 = 0$

Đặt $t = 2^x\,(t > 0)$. Phương trình trở thành: $t^2 - 12t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \pm 4\sqrt{2}$

Với $t = 6 + 4\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 6 + 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2\left(6 + 4\sqrt{2}\right)$.

Với $t = 6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow 2^x = 6 - 4\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \log_2\left(6 - 4\sqrt{2}\right)$.

Tổng các nghiệm là $\log_2\left(6 + 4\sqrt{2}\right) + \log_2\left(6 - 4\sqrt{2}\right) = \log_2 4 = 2$.

Câu 35: Phương trình $\log_2\left(5 - 2^x\right) = 2 - x$ có hai ngiệm x_1, x_2. Tính $P = x_1 + x_2 + x_1x_2$.

A. 11. B. 9. C. 3. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2^x < 5$

$\log_2\left(5 - 2^x\right) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1x_2 = 2$

Câu 36: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_6\left(3.4^x + 2.9^x\right) = x + 1$ bằng

A. 4 B. 1 C. 0 D. 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho tương đương $3.4^x+2.9^x=6^{x+1} \Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-6.\left(\frac{2}{3}\right)^x+2=0$

Đặt $\left(\frac{2}{3}\right)^x=t,(t>0)$. Khi đó ta có phương trình $3t^2-6t+2=0$

Hiển nhiên phương trình có 2 nghiệm phân biệt t_1,t_2 dương và thỏa mãn $t_1.t_2=\frac{2}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1}.\left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}=\frac{2}{3} \Rightarrow x_1+x_2=1$.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $4^x-(m+3).2^{x+1}+m+9=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. 3. B. 4. C. 5. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $t=2^x\left(x>0 \Rightarrow t>1\right)$, phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(m+3)t+m+9=0$.

Bài toán trở thành: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $t^2-2(m+3)t+m+9=0$ có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 thỏa mãn $1<t_1<t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2+5m>0\\(t_1-1)(t_2-1)>0\\\frac{S}{2}=m+3>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2+5m>0\\t_1t_2-(t_1+t_2)+1>0\,(*)\\\frac{S}{2}=m+3>1\end{cases}$$

Phương trình: $t^2-2(m+3)t+m+9=0$ có hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 nên theo Viet ta có:

$$\begin{cases}t_1+t_2=2(m+3)\\t_1.t_2=m+9\end{cases}$$

Thay vào hệ $(*)$ ta được $\begin{cases}m^2+5m>0\\-m+4>0\\m+3>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-5\\m>0\end{array}\right.\\m<4\\m>-2\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<4$

Vì $m\in\mathbb{Z}, 0<m<4 \Rightarrow m\in\{1;2;3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: Cho phương trình $4^x-2^{x+2}+m-2=0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $0\le x_1<x_2$?

A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$4^x - 2^{x+2} + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 4.2^x + m - 2 = 0 (1)$. Đặt $t = 2^x (t > 0)$

$(1) \Leftrightarrow t^2 - 4t + m - 2 = 0 \ (2)$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $0 \le x_1 < x_2$

$\Leftrightarrow 2^0 \le 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow 1 \le t_1 < t_2$

Thì phương trình (2) thỏa: $0 \le t_1 - 1 < t_2 - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t_1 + t_2 > 2 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4(m-2) > 0 \\ 4 > 2 \\ t_1t_2 - (t_1 + t_2) + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \ge 5 \end{cases}$. Vậy $m = 5$ thỏa yêu cầu.

Câu 39: Phương trình $\left(1+\sqrt{2}\right)^x + (1-2a)\left(\sqrt{2}-1\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.　B. $a \in \left(-\frac{3}{2}; 0\right)$.　C. $a \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$.　D. $a \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì $\left(1+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$. Đặt $t = \left(1+\sqrt{2}\right)^x \ (t > 0) \Rightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)^x = \frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t + \frac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2t = 0 \ (1)$.

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm dương t_1, t_2.

$\begin{cases} \Delta' = 2a + 3 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 > 0 \\ t_1t_2 = 1 - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < a < \frac{1}{2}$.

Và thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{1+\sqrt{2}} 3 \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{2}\right)^{x_1 - x_2} = 3 \Leftrightarrow \frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

$\begin{cases} t_1 = 3t_2 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1t_2 = 1 - 2a = 1.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ a = -1 \end{cases}$

Vậy với $a = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

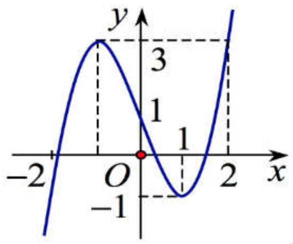
Câu 40: Cho phương trình $4^{x+1} - (8m+5)2^x + 2m + 1 = 0$ (m là tham số) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = -1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m \in (1;3)$.　B. $m \in (-5;-3)$.　C. $m \in (-3;0)$.　D. $m \in (0;1)$.

Lời giải

Chọn D

$4^{x+1}-(8m+5)2^{x}+2m+1=0\ \ (*)$



Đặt $t=2^{x}$, điều kiện $t>0$, phương trình $(*)$ trở thành

$4t^{2}-(8m+5)t+2m+1=0\ \Leftrightarrow\ (4t-1)(t-2m-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{1}{4} \\ t_2=2m+1. \end{array}\right.$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} 2m+1>0 \\ 2m+1\neq\dfrac{1}{4} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>-\dfrac{1}{2} \\ m\neq-\dfrac{3}{8}. \end{cases}\ \ (**)$

Lại có $x_1x_2=-1\ \Leftrightarrow\ \log_2 t_1\cdot\log_2 t_2=-1\ \Leftrightarrow\ \log_2\dfrac{1}{4}\cdot\log_2(2m+1)=-1\ \Leftrightarrow\ \log_2(2m+1)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\ 2m+1=\sqrt{2}\ \Leftrightarrow\ m=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Câu 41: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn các điêu kiện $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$. Tổng các giá trị của S bằng

A. 33. B. 24. C. 15. D. 5.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $4x+4y-4>0$

Ta có $\begin{cases} \log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)=1 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+y^2-4x-4y+6=0 \\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x;y)$.

Với $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ là phương trình đường tròn tâm $A(2;2)$, bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Với $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$ là phương trình đường tròn tâm $B(-1;1)$, bán kính $R_2=\sqrt{m}$ với $m>0$.

Hai đường tròn có điểm chung duy nhất khi xảy ra các trường hợp sau:

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $AB=R_1+R_2\Leftrightarrow\sqrt{m}+\sqrt{2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow m=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2$.

Hai đường tròn tiếp xúc trong $AB=|R_1-R_2|\Leftrightarrow\sqrt{m}-\sqrt{2}=\sqrt{10}\Leftrightarrow m=(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2$.

Vậy tổng các giá trị của tham số $m=(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2=24$.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{\left|x^2-4x+3\right|}=m^4-m^2+1$ có 4 nghiệm phân biệt?

A. $0<|m|<1$. B. $|m|<1$. C. $m>-1$. D. $m<0$.

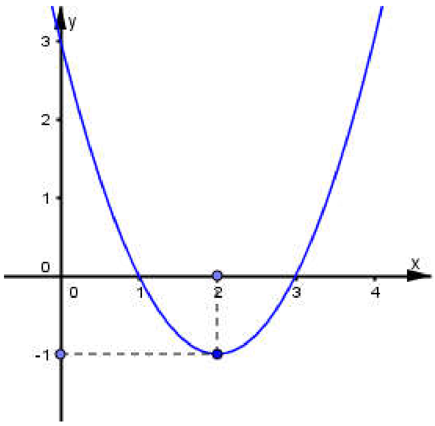
Lời giải

Chọn A

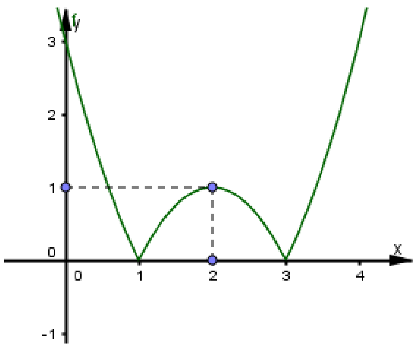
Vì $m^4-m^2+1>0,\forall m$ nên phương trình tương đương với

$\left|x^2-4x+3\right|=\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)$ (1)

Vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y=x^2-4x+3$



Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4x+3\right|$



Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$0<\log_{\frac{1}{5}}\left(m^4-m^2+1\right)<1\Leftrightarrow\frac{1}{5}<m^4-m^2+1<1\Leftrightarrow 0<|m|<1$.

Câu 43: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_4 x=\log_6 y=\log_9(x+y)$. Giá trị của tỉ số $\frac{x}{y}$ bằng

A. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x+y) = t \Rightarrow \begin{cases} x = 4^t \\ y = 6^t \\ x + y = 9^t \end{cases}$.

Mà $4^t.9^t = (6^t)^2 \Rightarrow x(x+y) = y^2 \Leftrightarrow x^2 + xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (l) \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (t/m) \end{array}\right.$.

Câu 44: Nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$ là

A. $x \ge -4$. B. $x < 0$. C. $x > 0$. D. $x < 4$.

Lời giải

Chọn A

$3^{x+2} \ge \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \ge 3^{-2} \Leftrightarrow x + 2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$.

Câu 45: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là:

A. $S = (-\infty;3)$. B. $S = (1;+\infty)$.

C. $S = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$. D. $S = (1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x^2 - 4x > -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 3$.

Vậy $S = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$.

Câu 46: Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \ge 1$ ta được tập nghiệm T. Tìm T.

A. $T = [-2;2]$. B. $T = [2;+\infty)$.

C. $T = (-\infty;-2]$. D. $T = (-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \ge 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-2;2]$

Vậy tập nghiệm $T = [-2;2]$.

Câu 47: Bất phương trình $2^x > 4$ có tập nghiệm là:

A. $T = (2;+\infty)$. B. $T = (0;2)$. C. $T = (-\infty;2)$. D. $T = \varnothing$.

Lời giải

Chọn A

$2^x > 4 \Leftrightarrow 2^x > 2^2 \Leftrightarrow x > 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (2;+\infty)$.

Câu 48: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$.

A. $S = (3;\, 7]$. B. $S = [3;\, 7]$. C. $S = (-\infty;\, 7]$. D. $S = [7;\, +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4 \Leftrightarrow 0 < x-3 \leq 4 \Leftrightarrow 3 < x \leq 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (3;\, 7]$.

Câu 49: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $2^{-x^2+3x} < 4$

A. $S = (\infty;1) \cup (2;+\infty)$. B. $S = (-\infty;1)$. C. $S = \mathbb{R} \setminus \{1;2\}$. D. $S = (2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với $2^{-x^2+3x} < 2^2 \Leftrightarrow -x^2+3x < 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right.$

.

Câu 50: Tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

A. $S = (-\infty;2)$. B. $S = (-\infty;1)$. C. $S = (1;+\infty)$. D. $S = (2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < (5)^{2x} \Leftrightarrow 2 < x$.

Câu 51: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+4}$ là

A. $(0;4)$. B. $(-\infty;4)$. C. $(0;16)$. D. $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{2x} < 2^{x+4} \Leftrightarrow 2x < x+4 \Leftrightarrow x < 4$.

Câu 52: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x^2 < 2\ln(4x+4)$ là:

A. $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right)$. B. $(-1;+\infty) \setminus \{0\}$. C. $\left(-\frac{4}{5};+\infty\right) \setminus \{0\}$. D. $\left(-\frac{4}{3};+\infty\right) \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Đk: $-1<x\neq 0$; $\ln x^2<2\ln(4x+4)\Leftrightarrow x^2<(4x+4)^2\Leftrightarrow 15x^2+32x+16>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{4}{3} \\ x>-\dfrac{4}{5} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm $S=\left(-\dfrac{4}{5};+\infty\right)\backslash\{0\}$.

Câu 53: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x<\log_2(12-3x)$ là:

A. $(0;6)$. B. $(3;+\infty)$. C. $(-\infty;3)$. D. $(0;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2 x<\log_2(12-3x)\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<12-3x \end{cases}\Leftrightarrow 0<x<3$.

Câu 54: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+5)>\log_2(x-1)$. Hỏi trong tập S có bao nhiêu phần tử là số nguyên dương bé hơn 10?

A. 9. B. 15. C. 8. D. 10.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+5>0 \\ x-1>0 \end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

$\log_2(2x+5)>\log_2(x-1)\Leftrightarrow 2x+5>x-1\Leftrightarrow x>-6$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình: $S=(1;+\infty)$.

Vậy trong tập S có 8 phần tử là số nguyên dương bé hơn 10.

Câu 55: Bất phương trình $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 3. B. 1. C. 4. D. 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>-1$.

$\log_4(x+7)>\log_2(x+1)\Leftrightarrow x+7>x^2+2x+1$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Do điều kiện nên tập nghiệm của bất phương trình là $S=\{0,1\}$.

Câu 56: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{e}{3}} 2x<\log_{\frac{e}{3}}(9-x)$ là

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $(3;+\infty)$. B. $(3;9)$. C. $(-\infty;3)$. D. $(0;3)$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{\frac{e}{3}} 2x < \log_{\frac{e}{3}}(9-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ 9-x > 0 \\ 2x > 9-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 9 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 9.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3;9)$.

Câu 57: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1)$ là

A. $(1;+\infty)$. B. $\left(\frac{5}{9};1\right)$. C. $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. D. $\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{9}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} 9x-5>0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{9} \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5}{9}$.

Ta có: $\log_{4-\sqrt{3}}(9x-5) < \log_{4-\sqrt{3}}(3x+1) \Leftrightarrow 9x-5 < 3x+1 \Leftrightarrow x < 1$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là: $S=\left(\frac{5}{9};1\right)$.

Câu 58: Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_2(x-3)+\log_2 x \ge 2$ là

A. $(3;+\infty)$. B. $[4;+\infty)$. C. $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$. D. $(3;4]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $x>3$.

$\log_2(x-3)+\log_2 x \ge 2 \Leftrightarrow x^2-3x \ge 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 4 \\ x \le -1 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S=[4;+\infty)$.

Câu 59: Bất phương trình $2^{x^2-3x+4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-10}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 2. B. 4. C. 6. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình tương đương với $2^{x^2-3x+4} \le 2^{10-2x} \Leftrightarrow x^2-3x+4 \le 10-2x \Leftrightarrow x^2-x-6 \le 0$
$\Leftrightarrow -2 \le x \le 3$. Do $x>0$ nên $0<x\le 3$.

Mà $x\in\mathbb{Z}^+$ nên $x\in\{1;2;3\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 60: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}$ là:

A. $(-\infty;-5)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(-5;+\infty)$. D. $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3} \Leftrightarrow 5^{\frac{x-1}{3}} < 5^{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < x+3 \Leftrightarrow x-1 < 3x+9 \Leftrightarrow x > -5$.

Câu 61: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1}$ là

A. $S=(-\infty;1]$. B. $S=[1;+\infty)$. C. $S=(-\infty;1)$. D. $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}-2\right)^{x-1} \Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^{-x+1} \Leftrightarrow x-1 \le -x+1 \Leftrightarrow x \le 1$.

Vậy $S=(-\infty;1]$.

Câu 62: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3^{x+1}$ là:

A. $\varnothing$. B. $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. C. $(-\infty;\log_2 3]$. D. $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow x > \log_2\left(3^{x+1}\right) \Leftrightarrow x > (x+1)\log_2 3 \Leftrightarrow x(1-\log_2 3) > \log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3} > \log_2 3 \Leftrightarrow x < \frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}}3$.

Cách 2: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}}3$.

Câu 63: Giải bất phương trình $3^{x^2} < 2^x$

A. $x\in(0;+\infty)$. B. $x\in(0;\log_2 3)$. C. $x\in(0;\log_3 2)$. D. $x\in(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^{x^2} < 2^x \Leftrightarrow \log_3 3^{x^2} < \log_3 2^x \Leftrightarrow x^2 - x\log_3 2 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \log_3 2$.

Câu 64: Tập nghiệm của bất phương trinh $2^x > 3^{x+1}$ là

A. $\varnothing$. B. $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}3\right)$. C. $(-\infty;\log_2 3]$. D. $\left(\log_{\frac{2}{3}}3;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow x > \log_2\left(3^{x+1}\right) \Leftrightarrow x > (x+1)\log_2 3 \Leftrightarrow x(1-\log_2 3) > \log_2 3$

$\Leftrightarrow x\log_2\frac{2}{3} > \log_2 3 \Leftrightarrow x < \frac{\log_2 3}{\log_2\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$.

Cách 2: $2^x > 3^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 3 \Leftrightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} 3$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x .5^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 + x\log_2 5 > 0$.
B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x - x^2\log_2 5 < 0$.
C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x^2 - x\log_5 2 > 0$.
D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow -x\ln 2 + x^2\ln 5 > 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x .5^{x^2} > 1 \Leftrightarrow \log_2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x .5^{x^2}\right] > 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_2 5^{x^2} > 0 \Leftrightarrow -x + x^2\log_2 5 > 0$ nên phương án A sai.

Câu 66: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1) > 3$

A. $x > 4$.
B. $x > 14$
C. $x < 2$.
D. $2 < x < 14$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3(2x-1) > 3 \Leftrightarrow 2x - 1 > 3^3 \Leftrightarrow x > 14$.

Câu 67: Giải bất phương trình $\log_3(2x-1) < 2$ ta được nghiệm là

A. $\frac{1}{2} < x < 5$.
B. $x > \frac{1}{5}$.
C. $x < 5$.
D. $x > 5$.

Lời giải

Chọn A

$\log_3(2x-1) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$.

Câu 68: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(1-x) < 0$?

A. $x = 0$.
B. $x < 0$.
C. $x > 0$.
D. $-1 < x < 0$.

Lời giải

Chọn B

$\log_{\frac{1}{2}}(1-x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}1-x>0\\1-x>1\end{cases} \Leftrightarrow x<0$.

Câu 69: Các giá trị x thỏa mãn bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$ là:

A. $x>3$. B. $\frac{1}{3}<x<3$. C. $x<3$. D. $x>\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(3x-1)>3 \Leftrightarrow 3x-1>8 \Leftrightarrow x>3$.

Câu 70: Bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1)\geq 0$ có tập nghiệm là?

A. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ B. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ C. $(1;+\infty)$ D. $\left(\frac{1}{2};1\right]$

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

$\log_{0,5}(2x-1)\geq 0 \Leftrightarrow 2x-1\leq 0,5^0 \Leftrightarrow 2x\leq 2 \Leftrightarrow x\leq 1$.

So sánh với điều kiện ta có tập nghiệp của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{2};1\right]$.

Câu 71: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2(9-x)\leq 3$.

A. 7. B. 6. C. 8. D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2(9-x)\leq 3 \Leftrightarrow 0<9-x\leq 8 \Leftrightarrow 1\leq x<9$. Vì $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Vậy có 8 nghiệm nguyên.

Câu 72: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là:

A. $(-\infty;10)$. B. $(1;9)$. C. $(1;10)$. D. $(-\infty;9)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_2(x-1)<3 \Rightarrow x-1<8 \Leftrightarrow x<9$.

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;9)$.

Câu 73: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(x^2+2)\leq 3$ là:

A. $S=(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)$. B. $S=\varnothing$.

C. $S=\mathbb{R}$. D. $P=[-5;5]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_3\left(x^2+2\right)\le 3 \Leftrightarrow x^2+2\le 27 \Leftrightarrow x^2\le 25 \Leftrightarrow -5\le x\le 5$.

Câu 74: Số nghiệm thực nguyên của bất phương trình $\log\left(2x^2-11x+15\right)\le 1$ là

A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $2x^2-11x+15>0 \Leftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$ hoặc $x>3$.

$\log\left(2x^2-11x+15\right)\le 1 \Leftrightarrow 2x^2-11x+15\le 10 \Leftrightarrow 2x^2-11x+5\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le x\le 5$.

Kết hợp điều kiện ta có: $\dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{5}{2}$ hoặc $3<x\le 5$. Vậy BPT có 4 nghiệm nguyên là: $x\in\{1;2;4;5\}$.

Câu 75: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{2}{x-1}>2$.

A. $S=\left(1;1+\sqrt{2}\right)$. B. $S=(1;9)$. C. $S=\left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$. D. $S=(9;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{2}{x-1}>2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ \dfrac{2}{x-1}<\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x-1<8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<9 \end{cases}.$$

Câu 76: Bất phương trình $\max\left\{\log_3 x,\ \log_{\frac{1}{2}} x\right\}<3$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty;27)$. B. $(8;27)$. C. $\left(\dfrac{1}{8};\ 27\right)$. D. $(27;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

$$\max\left\{\log_3 x, \log_{\frac{1}{2}} x\right\}<3 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x<3 \\ \log_{\frac{1}{2}} x<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<27 \\ x>\dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8}<x<27.$$

Vậy tập nghiệm của BPT là: $\left(\dfrac{1}{8};27\right)$.

Câu 77: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ là:

A. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$.
B. $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.
C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$.
D. $S=\left[-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

Chọn B

* ĐKXĐ: $\begin{cases}\log_2\left(x^2-1\right)>0\\x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-1>1\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1\Leftrightarrow \log_2\left(x^2-1\right)\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2\ge 5\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

* Kết hợp điều kiện ta được: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Câu 78: Cho phương trình $3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0(1)$. Nếu đặt $t=3^{x+5}\,(t>0)$ thì (1) trở thành phương trình nào?

A. $9t^2-6t-2<0$.
B. $t^2-2t-2<0$.
C. $t^2-18t-2<0$.
D. $9t^2-2t-2<0$.

Lời giải.

Chọn B

$3^{2x+10}-6.3^{x+4}-2<0\Leftrightarrow 3^{2(x+5)}-2.3^{x+5}-2<0$

Vậy khi đặt $t=3^{x+5}\,(t>0)$ thì (1) trở thành phương trình $t^2-2t-2<0$.

Câu 79: Cho phương trình $25^{x+1}-26.5^x+1>0$. Đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trở thành

A. $t^2-26t+1>0$.
B. $25t^2-26t>0$.
C. $25t^2-26t+1>0$.
D. $t^2-26t>0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $25^{x+1}-26.5^x+1>0\Leftrightarrow 25.5^{2x}-26.5^x+1>0$.

Vậy nếu đặt $t=5^x$, $t>0$ thì phương trình trên trở thành $25t^2-26t+1>0$.

Câu 80: Xét bất phương trình $5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0$. Nếu đặt $t=5^x$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t+32<0$.
B. $t^2-16t+32<0$.
C. $t^2-6t+32<0$.
D. $t^2-75t+32<0$.

Lời giải

Chọn D

$5^{2x}-3.5^{x+2}+32<0\Leftrightarrow 5^{2x}-3.5^2.5^x+32<0\Leftrightarrow 5^{2x}-75.5^x+32<0$.

Nếu đặt $t=5^x>0$ thì bất phương trình trở thành bất phương trình $t^2-75t+32<0$.

Câu 81: Cho phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\ge 0$. Khi đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+8t-3\ge 0$. B. $2t^2-3\ge 0$. C. $t^2+2t-3\ge 0$. D. $4t-3\ge 0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3\ge 0 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-2x}\right)^2+2^3.2^{x^2-2x}-3\ge 0$.

Kho đó, đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình $t^2+8t-3\ge 0$.

Câu 82: Khi đặt $t=\log_5 x$ thì bất phương trình $\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{5}} x-5\le 0$ trở thành bất phương trình nào sau đây?

A. $t^2-6t-4\le 0$. B. $t^2-6t-5\le 0$. C. $t^2-4t-4\le 0$. D. $t^2-3t-5\le 0$.

Lời giải

Chọn C

$\log_5^2(5x)-3\log_{\sqrt{3}} x-5\le 0 \Leftrightarrow (\log_5 x+1)^2-6\log_5 x-5\le 0 \Leftrightarrow \log_5^2 x-4\log_5 x-4\le 0$.

Với $t=\log_5 x$ bất phương trình trở thành: $t^2-4t-4\le 0$.

Câu 83: Bất phương trình $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left[10;10^{2018}\right]$. B. $S=\left[10;10^{2018}\right)$. C. $S=[1;2018]$. D. $S=\left(10;10^{2018}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\log^2 x-2019\log x+2018\le 0 \Leftrightarrow 1\le \log x\le 2018 \Leftrightarrow 10\le x\le 10^{2018}$.

Kết hợp với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[10;10^{2018}\right]$.

Câu 84: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0$

A. 5. B. 1. C. 7. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

$\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-8\log_2 x^{\frac{1}{2}}+3<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-4\log_2 x+3<0$

$\Leftrightarrow 1<\log_2 x<3 \Leftrightarrow 2<x<8$. So với điều kiện ta được $2<x<8$.

Câu 85: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$

A. $S=(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$. B. $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. D. $S=[2;16]$.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $x>0$

Đặt $t=\log_2 x$, $t\in\mathbb{R}$.

Bất phương trình tương đương $t^2-5t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le 1\\t\ge 4\end{array}\right.$.

- $\log_2 x\le 1\Leftrightarrow 0<x\le 2$.
- $\log_2 x\ge 4\Leftrightarrow x\ge 16$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Câu 86: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $3^x+9.3^{-x}<10$ là

A. Vô số. B. 2. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$, bất phương trình có dạng $t+\frac{9}{t}<10\Leftrightarrow t^2-10t+9<0\Leftrightarrow 1<t<9$.

Khi đó $1<3^x<9\Leftrightarrow 0<x<2$. Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $x=1$.

Câu 87: Tập nghiệm của bất phương trình $16^x-5.4^x+4\ge 0$ là:

A. $T=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. B. $T=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. D. $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=4^x$, $t>0$.

$16^x-5.4^x+4\ge 0$ trở thành $t^2-5.t+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\ge 4\\0<t\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^x\ge 4\\0<4^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le 0\end{array}\right.$.

Vậy $T=(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

Câu 88: Biết $S=[a;b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $3.9^x-10.3^x+3\le 0$. Tìm $T=b-a$.

A. $T=\frac{8}{3}$. B. $T=1$. C. $T=\frac{10}{3}$. D. $T=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3.9^x-10.3^x+3\le 0$ $\Leftrightarrow 3.(3^x)^2-10.3^x+3\le 0$ $\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le 3^x\le 3$ $\Leftrightarrow\log_3\frac{1}{3}\le x\le\log_3 3$

$\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Khi đó bất phương trình có tập nghiệm là $S=[-1;1]$, do vậy $T=1-(-1)=2$

.

Câu 89: Nghiệm của bất phương trình $5^{2\sqrt{x}}+5<5^{1+\sqrt{x}}+5^{\sqrt{x}}$ là.

A. $0 \le x \le 1$. B. $0 < x < 1$. C. $0 < x \le 1$. D. $0 \le x < 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{1+\sqrt{x}} + 5^{\sqrt{x}}$.

$\Rightarrow \left(5^{\sqrt{x}}\right)^2 - 6.5^{\sqrt{x}} + 5 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 5^{\sqrt{x}} < 5 \\ 5^{\sqrt{x}} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > 0 \end{cases}$

Câu 90: Bất phương trình $64.9^x - 84.12^x + 27.16^x < 0$ có nghiệm là:

A. $1 < x < 2$. B. $\frac{9}{16} < x < \frac{3}{4}$. C. $x < 1$ hoặc $x > 2$. D. Vô nghiệm.

Lời giải

Chọn A

$64.9^x - 84.12^x + 27.16^x < 0 \Leftrightarrow 27.\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 84.\left(\frac{4}{3}\right)^x + 64 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Câu 91: Tìm tất cả giá trị của m để bất phương trình $9^x - 2(m+1)3^x - 3 - 2m > 0$ nghiệm đúng với mọi số thực x.

A. $m \in \left(-5 - 2\sqrt{3}; -5 + 2\sqrt{3}\right)$. B. $m < -\frac{3}{2}$.

C. $m \le -\frac{3}{2}$. D. $m \ne 2$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = 3^x$, $t > 0$. Khi đó, bất phương trình trở thành:
$t^2 - 2(m+1)t - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow (t+1)(t-3-2m) > 0 \Leftrightarrow t - 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow t > 3 + 2m$ (1) (Do $t > 0$).
Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì (1) phải nghiệm đúng với mọi $t \in (0; +\infty)$.

Điều này tương đương với $3 + 2m \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{3}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m \le -\frac{3}{2}$.

Câu 92: Cho Hàm số $f(x) = \frac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\log 3 - (x^2 - 4)\log 7 > 0$.

B. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3} 3 - (x^2 - 4)\log_{0,3} 7 > 0$.

C. $f(x) > 1 \Leftrightarrow (x-2)\ln 3 - (x^2 - 4)\ln 7 > 0$.

D. $f(x) > 1 \Leftrightarrow x - 2 - (x^2 - 4)\log_3 7 > 0$.

Lời giải

Chọn B

$f(x)>1\Leftrightarrow \dfrac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}>1\Leftrightarrow \log_{0.3}\dfrac{3^{x-2}}{7^{x^2-4}}<\log_{0,3}1\Leftrightarrow (x-2)\log_{0,3}3-(x^2-4)\log_{0,3}7<0$.

Câu 93: Biết tập nghiệm của bất phương trình $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge \dfrac{1}{3^x}$ là một đoạn $[a;b]$ ta có $a+b$ bằng:

A. $a+b=11$. B. $a+b=9$. C. $a+b=12$. D. $a+b=10$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x^2+5x-6\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1\vee x\le -6$

Ta có: $3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge \dfrac{1}{3^x}\Leftrightarrow 3^{2-\sqrt{x^2+5x-6}}\ge 3^{-x}\Leftrightarrow 2-\sqrt{x^2+5x-6}\ge -x\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x-6}\le x+2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6\ge 0\\ x+2\ge 0\\ x^2+5x-6\le x^2+4x+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\le -6\vee x\ge 1\\ x\ge -2\\ x\le 10\end{cases}\Leftrightarrow x\in[1;10]$$

Vậy $a+b=11$

Câu 94: Cho bất phương trình $25^x+15^x-2.9^x\le m.3^x(5^x-3^x)$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[0;1]$ là

A. $m\le \dfrac{11}{2}$. B. $m>\dfrac{11}{2}$. C. $m<\dfrac{11}{3}$. D. $m\ge \dfrac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{2x}\,(3^x>0)$, ta được

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{2x}+(1-m)\left(\frac{5}{3}\right)^{x}+m-2\le 0$$

Đặt $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=t$.

Với $x\in[0;1]\Rightarrow t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$, ta có bất phương trình bậc hai $t^2+(1-m)t+m-2\le 0$

Bài toán trở thành tìm m để bất phương trình: $t^2+(1-m)t+m-2\le 0$, $\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$

$t^2+(1-m)t+m-2\le 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]\Leftrightarrow (t-1)(t+2-m)\le 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right](*)$

Vì $t-1\ge 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$, nên $(*)\Leftrightarrow t+2-m\le 0,\forall t\in\left[1;\dfrac{5}{3}\right]\Leftrightarrow \dfrac{5}{3}+2-m\le 0\Leftrightarrow m\ge \dfrac{11}{3}$

Câu 95: Giả sử phương trình $\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=6$. Giá trị của biểu thức $|x_1-x_2|$ là

A. 3. B. 8. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$.

Khi đó phương trình đã cho có dạng:

$t^2-(m+2)t+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=2 \\ \log_2 x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2^m \end{array}\right.$.

Do $x_1+x_2=6 \Leftrightarrow 4+2^m=6 \Leftrightarrow m=1$. Vậy $|x_1-x_2|=|4-2^1|=2$.

Câu 96: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[0;2019]$ của tham số m để phương trình $4^x-(m+2018)2^x+(2019+3m)=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2016 B. 2019. C. 2013 D. 2018.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4^x+(m-1)2^x+(4+3m)=0$ (1).

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2+(m-1)t+4+3m=0$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm t_1,t_2 thỏa $0<t_1<1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(1)<0 \\ af(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<2013$

Vì $m\in\mathbb{Z}, m\in[0;2019]$ suy ra $m\in\{0;1;2;...;2012\}$

Câu 97: Giả sử phương trình $\log_2{}^2(2x)-3\log_2 x-2=0$ có một nghiệm dạng $x=2^{\frac{a+\sqrt{b}}{c}}$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ và $b<20$. Tính tổng $a+b+c^2$.

A. 10. B. 11. C. 18. D. 27.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0$.

Ta có:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$\log_2{}^2(2x)-3\log_2 x-2=0 \Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-3\log_2 x-2=0$

$\Leftrightarrow \log_2{}^2 x-\log_2 x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \log_2 x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\\ x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\end{array}\right.$.

Vậy: $a=1;b=5;c=2 \Rightarrow a+b+c^2=10$.

Câu 98: Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0$ vô nghiệm.

A. $m\in(\sqrt{2};2)$. B. $m\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$. C. $m\in(-\sqrt{2};2)$. D. $m\in(-2;\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log^2|\cos x|-m\log\cos^2 x-m^2+4=0 \Leftrightarrow \log^2|\cos x|-2m\log|\cos x|-m^2+4=0$

Đặt $\log|\cos x|=t$. Điều kiện: $t\le 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2-2mt-m^2+4=0, t\le 0$.

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình vô nghiệm hoặc có các nghiệm đều dương. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l}\Delta'<0\\ \begin{cases}\Delta'\ge 0\\ t_1+t_2>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m^2-1.(-m^2+4)<0\\ \begin{cases}m^2-1.(-m^2+4)\ge 0\\ \dfrac{2m}{1}>0\\ \dfrac{-m^2+4}{1}>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m^2-4<0\\ \begin{cases}2m^2-4\ge 0\\ 2m>0\\ -m^2+4>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}\\ \begin{cases}m\ge\sqrt{2}\\ -2<m<2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<2$$

Câu 99: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x-m.4^{x-1}+5m^2-44=0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$16^x-m.4^{x-1}+5m^2-44=0 \Leftrightarrow (4^x)^2-\dfrac{m}{4}.4^x+5m^2-44=0$

$\Leftrightarrow 4(4^x)^2-m.4^x+20m^2-176=0$, (1).

Đặt $t=4^x$ điều kiện $t>0$ từ (1) ta có $4t^2-m.t+20m^2-176=0$, $(*)$.

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm đối nhau $x_1;x_2$ thì $x_1+x_2=0$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương $t_1;t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2=1$. Nhưng vì phương trình $(*)$ có $\frac{c}{a}=-\frac{176}{4}=-44<0$ nên không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 100: Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9;+\infty)$. B. $(3;9)$. C. $(-2;0)$. D. $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1,x_2 khi và chỉ khi phương trình có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-8m+4>0\\2(2m+1)>0\\3(4m-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m>-\frac{1}{2}\\m>\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m>\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Khi đó phương trình có hai nghiệm là $t=4m-1$ và $t=3$.

Với $t=4m-1$ thì $3^{x_1}=4m-1\Leftrightarrow x_1=\log_3(4m-1)$.

Với $t=3$ thì $3^{x_2}=3\Leftrightarrow x_2=1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=12\Leftrightarrow x_1=2\Leftrightarrow\log_3(4m-1)=2\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\frac{5}{2}$ nên m thuộc khoảng $(1;3)$.

Câu 101: Cho phương trình $(m-5).3^x+(2m-2).2^x.\sqrt{3^x}+(1-m).4^x=0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S=a+b$.

A. $S=4$. B. $S=5$. C. $S=6$. D. $S=8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(m-5).3^x+(2m-2).2^x.\sqrt{3^x}+(1-m).4^x=0$ (1)

$\Leftrightarrow(m-5).\left(\frac{3}{4}\right)^x+(2m-2).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+1-m=0$. Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t>0$.

Khi đó phương trình trở thành: $(m-5)t^2+(2m-2)t+1-m=0,(2)$.

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2)có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < 1 \end{array}\right. \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 5 \Leftrightarrow m \in (3;5)$.

Vậy $a = 3$, $b = 5$ nên $a + b = 8$.

Câu 102: Cho phương trình $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_2 - 81x_1 < 0$.

A. 4. B. 5. C. 3. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $\log_3^2 x - 4\log_3 x + m - 3 = 0 \quad (1)$. Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 4t + m - 3 = 0 \ (2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m + 3 > 0 \Leftrightarrow m < 7 \ (i)$.

Gọi $x_1 < x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là $t_1 = \log_3 x_1 ; t_2 = \log_3 x_2$. Vì $x_1 < x_2$ nên $t_1 < t_2$.

Mặt khác, $x_2 - 81x_1 < 0 \Leftrightarrow 0 < x_2 < 81x_1 \Leftrightarrow \log_3 x_2 < 4 + \log_3 x_1$

$\Leftrightarrow t_2 < 4 + t_1 \Leftrightarrow 0 < t_2 - t_1 < 4 \Leftrightarrow (t_2 - t_1)^2 < 16 \Leftrightarrow (t_2 + t_1)^2 - 4t_1t_2 < 16$.

$\Leftrightarrow 4^2 - 4(m-3) < 16 \Leftrightarrow m > 3 \ (ii)$.

Từ (i) và (ii) suy ra $3 < m < 7$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Câu 103: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + (1-2a).\left(2-\sqrt{3}\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = t$, $t > 0$ khi đó $\left(2-\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{t}$.

Nhận xét: Với cách đặt đó thì $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1} = t_1$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2} = t_2$ nên từ $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$, ta có $\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1 - x_2} = 3$ hay $\frac{t_1}{t_2} = 3 \Leftrightarrow t_1 = 3t_2$.

Vậy bài toán đã cho tương đương với bài toán tìm a để phương trình

$t+\left(1-2a\right).\frac{1}{t}-4=0\ (*)$ có hai nghiệm dương t_1,t_2 thỏa mãn nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia.

Ta thấy: $(*)\Leftrightarrow t^2-4t+1-2a=0$.

Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-(1-2a)>0\\1-2a>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>\frac{-3}{2}\\a<\frac{1}{2}\end{cases}\ (**)$.

Cách 1: Nhận xét rằng phương trình ẩn t có tổng hai nghiệm bằng 4 mà nghiệm này gấp 3 nghiệm kia nên phương trình phải có 1 nghiệm băng 1 và 1 nghiệm bằng 3, từ đó $1-2a=3\Leftrightarrow a=-1$.

Cách 2: Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases}t_1+t_2=4\\t_1t_2=1-2a\end{cases}$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm này gấp 3 lần nghiệm kia khi

$\left[\begin{array}{l}t_1=3t_2\\t_2=3t_1\end{array}\right.\Leftrightarrow(t_1-3t_2).(t_2-3t_1)=0\Leftrightarrow-3\left(t_1{}^2+t_2{}^2\right)+10t_1.t_2=0$

$\Leftrightarrow-3(t_1+t_2)^2+6t_1t_2+10t_1.t_2=0\Leftrightarrow-48+16(1-2a)=0\Leftrightarrow a=-1$ thỏa mãn điều kiện $(**)$.

Giá trị này của a thuộc đáp án D

Cách 3. Dựa vào điều kiện có 2 nghiệm dương loại đáp án A, suy luận nếu a thuộc đáp án B, C thì cũng thuộc đáp án D

Câu 104: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-3x+2}+3^{4-x^2}=3^{6-3x}+m\ (1)$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. 4. B. 2. C. 3. D. 1.

Lời giải

Chọn C

Đặt $3^{4-x^2}=v>0,\ 3^{6-3x}=u>0$ phương trình trở thành

$m\frac{u}{v}+v=u+m\Leftrightarrow m\left(\frac{u-v}{v}\right)=(u-v)$

$\Leftrightarrow(u-v)(m-v)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=u\\v=m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}3^{6-3x}=3^{4-x^2} & (I)\\3^{4-x^2}=m & (II)\end{array}\right.$

Giải (I): $3^{6-3x}=3^{4-x^2}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì phương trình (II) xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x=1$ và một nghiệm $x \neq 2$. Với $x=1$ ta có $m=3^{4-1^2}=27$. Khi đó $3^{4-x^2}=27 \Leftrightarrow 4-x^2=3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \neq 2 \end{array}\right.$. Vậy $m=27$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 2: Phương trình (II) có 2 nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm $x=2$ và một nghiệm $x \neq 1$. Với $x=2$ ta có $m=3^{4-2^2}=1$. Khi đó $3^{4-x^2}=1 \Leftrightarrow 4-x^2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \neq 1 \end{array}\right.$.

Vậy $m=1$ là một giá trị cần tìm.

Trường hợp 3: Phương trình (II) có đúng 1 nghiệm x khác $1;2$

Từ $3^{4-x^2}=m \Leftrightarrow x^2=4-\log_3 m \geq 0$ để có một nghiệm thì nghiệm đó là $x=0$

$\Rightarrow 4-\log_3 m=0 \Leftrightarrow m=81$, đồng thời $x=0$ thỏa mãn khác $1;2$ nên $m=81$ là một giá trị cần tìm.

Vậy có ba giá trị $m=1$; $m=27$; $m=81$ thỏa mãn bài toán.

Câu 105: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để **không** tồn tại bộ số thực (x,y) nào thỏa mãn đồng thời các hệ thức $x^2+(y-2)^2 \leq 9$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2mx+2y+m-2) \geq 1$. Số phần tử của S là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Miền biểu diễn $x^2+(y-2)^2 \leq 9$ là hình tròn (C) có tâm $I(0,2)$ và bán kính $R=3$

$\log_{x^2+y^2+1}(2mx+2y+m-2) \geq 1 \Leftrightarrow 2mx+2y+m-2 \geq x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow (x-m)^2+(y-1)^2 \leq m^2+m-2$.

Miền biểu diễn $(x-m)^2+(y-1)^2 \leq m^2+m-2$ là hình tròn (C') có tâm $I'(m,1)$ và bán kính $R'=\sqrt{m^2+m-2}$

Để tồn tại bộ số thực (x,y) thỏa mãn bài toán thì:

$$\left[\begin{array}{l} m^2+m-2<0 \\ II'>R+R' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<m<1 \\ \sqrt{m^2+1}>3+\sqrt{m^2+m-2}\,(VN) \end{array}\right. \Rightarrow m \in \{-1;0\}.$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A - TRẮC NGHIỆM

Câu 6.27: Cho hai số thực dương x,y và hai số thực α,β tuỳ ý. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $x^{\alpha}\cdot x^{\beta}=x^{\alpha+\beta}$. B. $x^{\alpha}\cdot y^{\beta}=(xy)^{\alpha+\beta}$. C. $\left(x^{\alpha}\right)^{\beta}=x^{\alpha\cdot\beta}$. D. $(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}\cdot y^{\alpha}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6.28: Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}:x^{\frac{5}{8}}\,(x>0)$ ta được

A. $\sqrt[4]{x}$ B. $\sqrt{x}$. C. $\sqrt[3]{x}$. D. $\sqrt[5]{x}$

Lời giải

Chọn A

Vì $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}:x^{\frac{5}{8}}=\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=x^{\frac{7}{8}}$

Chia biểu thức trên cho $x^{\frac{5}{8}}$, ta có: $x^{\frac{7}{8}}-x^{\frac{5}{8}}=x^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{x}$

Câu 6.29: Cho hai số thực dương a,b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\log_a\left(a^3b^2\right)=3+\log_a b$. B. $\log_a\left(a^3b^2\right)=3+2\log_a b$.

C. $\log_a\left(a^3b^2\right)=\frac{3}{2}+\log_a b$. D. $\log_a\left(a^3b^2\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\log_a b$.

Lời giải

Chọn B

$\log_a\left(a^3b^2\right)=\log_a a^3+\log_a b^2=3\log_a a+2\log_a b=3+2\log_a b$

Câu 6.30: Cho bốn số thực dương a,b,x,y với $a,b\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\log_a(xy)=\log_a x+\log_b y$. B. $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

C. $\log_a\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_a x}$. D. $\log_a b\cdot\log_b x=\log_a x$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\log_a b\cdot\log_b x=\frac{\log_b b}{\log_b a}.\log_b x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$

Câu 6.31: Đặt $\log_2 5=a,\log_3 5=b$. Khi đó, $\log_6 5$ tính theo a và b bằng

A. $\frac{ab}{a+b}$. B. $\frac{1}{a+b}$. C. a^2+b^2. D. $a+b$.

Lời giải

Chọn A

Câu 6.32: Cho hàm số $y=2^x$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

B. Tập giá trị của hàm số là $(0;+\infty)$.

C. Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại đúng một điểm.

D. Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

Lời giải

Chọn C

Câu 6.33: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\log_{0,5}x$. B. $y=\mathrm{e}^{-x}$. C. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. D. $y=\ln x$.

Lời giải

Chọn D

Vì $y=\ln x$ đồng biến trên tập xác định $(0,+\infty)$ của nó vì đạo hàm của nó là $\frac{1}{x}$, là một hàm dương trên tập xác định của nó.

Câu 6.34: Cho đồ thị ba hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $a>b>c$. B. $b>a>c$. C. $a>b>c$. D. $b>c>a$.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến $\Rightarrow 0<c<1$, các hàm $y=\log_a x, y=\log_b x$ đồng biến nên $a;b>1$.

Chọn $x=100 \Rightarrow \log_a 100>\log_b 100 \Rightarrow a<b \Rightarrow b>a>c$

B – TỰ LUẬN

Bài 6.35. Cho $0<a\neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $B=\log_a\left(\frac{a^2\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}}\right)+a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}$.

Lời giải

$$B=\log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^4}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{5}}\right)+a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}$$

$$=\log_a\left(a^2\right)+\log_a(\sqrt[3]{a})+\log_a\left(\sqrt[5]{a^4}\right)+\log_a\left(\sqrt[5]{a^4}\right)-\log_a(\sqrt[4]{5})+a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}$$

$=2+\frac{1}{3}\log_a a+\frac{4}{5}\log_a a-\frac{1}{4}\log_a 5+a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}$

$=2+\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\frac{1}{4}\log_a 5+a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}$

$=\frac{31}{15}-\frac{1}{4}\log_a 5+a^{2\log_a}\frac{\sqrt{105}}{30}$

Tính giá trị của $a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}$:

$a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}=\left(\frac{\sqrt{105}}{30}\right)^2=\frac{105}{900}=\frac{7}{60}$. Tính giá trị của $a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}$:

Vậy ta có: $B=\frac{31}{15}-\frac{1}{4}\log_a 5+a^{2\log_a\frac{\sqrt{105}}{30}}=\frac{31}{15}-\frac{1}{4}\log_a 5+\frac{7}{60}=\frac{205-3\log_a 5}{60}$

Bài 6.36. Giải các phương trình sau:

a) $3^{1-2x}=4^x$;

b) $\log_3(x+1)+\log_3(x+4)=2$.

Lời giải

a) Ta có $3^{1-2}=3^{-1}=\frac{1}{3}$ và $4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x}$.

Vậy phương trình trở thành $\frac{1}{3}=2^{2x}$ hay $\log_2\frac{1}{3}=2x$.

Từ đó, $x=\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{3}=\log_2\sqrt{\frac{1}{3}}=\log_2\frac{1}{\sqrt{3}}=\log_2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Áp dụng tính chất $\log_a(mn)=\log_a m+\log_a n$, phương trình trở thành:

$\log_3[(x+1)(x+4)]=2$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+4)=3^2$

$<=> x^2+5x+4=9 <=> x^2+5x-5=0 <=> (x+5)(x-1)=0$

Nghiệm $x=1$ thỏa mãn đề bài.

Bài 6.37. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{4^x-2^{x+1}}$;

b) $y=\ln(1-\ln x)$.

Lời giải

a) Để y có giá trị thực, cần thỏa mãn điều kiện $4^x-2^{x+1}\geq 0$. Ta có $4^x-2^{x+1}=2^{2x}-2\cdot 2^x=2^x\left(2^x-2\right)\geq 0$ khi và chỉ khi $x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

Do đó, tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4^x-2^{x+1}}$ là $x\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

b) Để y có giá trị thực, cần thỏa mãn điều kiện $1-\ln x>0$, hay $\ln x<1$, tức $x>e$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\ln(1-\ln x)$ là $x\in(e,+\infty)$.

Bài 6.38. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là

$$A=P\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)^n.$$

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Lời giải

a) Theo công thức $A=P\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$, ta có: $A=\left(1-\frac{8}{100}\right)^2\approx 73,6$ triệu đồng

Vậy sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm với tỉ lệ lạm phát là 8% một năm chỉ còn lại khoảng 73.6 triệu đồng.

b) Thay $P=100$ triệu đồng, $A=90$ triệu đồng, $n=2$ vào phương trình ta có:

$$90=100.\left(1-\frac{r}{100}\right)^2 \quad =5,13\%$$

Vậy tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là khoảng 5.13 %.

c)Thay $P=1$ và $A=\frac{1}{2}$ vào phương trình ta có: $\frac{1}{2}=\left(r-\frac{r}{100}\right)^n$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)n\ln\left(1-\frac{r}{100}\right)$$

$$n=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{r}{100}\right)}$$

$$n=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1-\frac{5}{100}\right)}\approx 14,21$$

Vậy sau khoảng 14 năm và 3 tháng, sức mua của số tiền ban đầu sẽ chỉ còn lại một nửa nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm.

Bài 6.39. Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có: $N(t)=N_0e^{rt}$

trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ.
Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:
a) Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?
b) Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

Lời giải

a) Ta có công thức tính tỉ lệ tăng trưởng r như sau: $r=\dfrac{\ln\dfrac{N(t)}{N_0}}{t}$

Áp dụng vào giá trị ban đầu ta có: $r=0,47\%$

Sử dụng công thức tính số lượng vi khuẩn sau t giờ ta được: $N(t)=N_0e^{rt}=500e^{0,47t}$

Vậy sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn khoảng là: $N(5)=500e^{0,47\times5}\approx 3,643$ con

b) Áp dụng công thức tính số lượng vi khuẩn sau t giờ, ta được: $N(t)=N_0e^{rt}=N_0 \quad e^{rt}=2=rt=\ln 2$

Do đó, thời gian cần tìm là: $t=\dfrac{\ln 2}{r}=\dfrac{\ln 2}{0,47}\approx 1,47$

Vậy số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi sau khoảng 1.47 giờ.

Bài 6.40. Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó: $P=\log\dfrac{d+1}{d}$. *(Theo F. Benford, The Law of Anomalous Numbers, Proc. Am. Philos. Soc. 78 (1938), 551 -572).*
Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng $4,6\%$ (thay $d=9$ trong công thức Benford để tính P).
a) Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P.
b) Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.
c) Tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1 .

Lời giải

a) Ta có công thức tính xác suất P như sau:

$$P=\log\frac{d+1}{d}$$

$$P=\log\frac{d+1}{d}\Rightarrow\frac{d+1}{d}=e^P\Rightarrow d+1=de^P\Rightarrow d=\frac{1}{e^P-1}$$

b) Để tìm chữ số có xác suất bằng $9,7\%$, ta giải phương trình sau theo d:

$$\log\frac{d+1}{d}=\log\frac{10}{9,7}\Rightarrow\frac{d+1}{d}=\frac{10}{9,7}\Rightarrow d+1=\frac{1}{0,97}=1,03$$

Vậy chữ số có xác suất bằng $9,7\%$ là 1.

c) Để tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1 , ta thay $\mathrm{d}=1$ vào công thức tính P :

$$P=\log \frac{1+1}{1}=\log 2 \approx 0,3$$

BÀI TẬP TỔNG ÔN

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
B. $[-1;1]$.
C. $D=(-1;1)$.
D. $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\frac{x+1}{1-x}>0\Leftrightarrow x\in(-1;1)$.

Câu 2: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_{125}\left(x^2-75x-2499\right)^3=\log_5\left|-x^2+75x+2501\right|$.

A. -75.
B. 75.
C. 125.
D. -125.

Lời giải

Chọn B

$\log_{125}\left(x^2-75x-2499\right)^3=\log_5\left|-x^2+75x+2501\right|$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x^2-75x-2499\right)=\log_5\left|-x^2+75x+2501\right|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-75x-2499=\left|-x^2+75x+2501\right| \\ x^2-75x-2499>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-75x-2499>0 \\ \left[\begin{array}{l} -x^2+75x+2501=x^2-75x-2499 \\ -x^2+75x+2501=-x^2+75x+2499 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-75x-2499>0 \\ 2x^2-150x-5000=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-25 \\ x_2=100 \end{array}\right. \Rightarrow x_1+x_2=75.$

Câu 3: Cho phương trình $\ln^2\left(x^2\right)-3\ln x-1=0\ (x>0)\ (*)$. Đặt $t=\ln x$, phương trình (*) trở thành phương trình nào sau đây?

A. $2t^2+3t-1=0$.
B. $4t^2+3t-1=0$.
C. $4t^2-3t-1=0$.
D. $2t^2-3t-1=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\ln^2\left(x^2\right)-3\ln x-1=0\Leftrightarrow\left[\ln\left(x^2\right)\right]^2-3\ln x-1=0$

$\Leftrightarrow(2\ln x)^2-3\ln x-1=0\Leftrightarrow 4(\ln x)^2-3\ln x-1=0$

Do đó, đặt $t=\ln x$ phương trình (*) trở thành: $4t^2-3t-1=0$.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\ln a>\ln b\Leftrightarrow b>a$.
B. $\ln a>\ln b\Leftrightarrow a>b>0$.
C. $\ln a>\ln b\Leftrightarrow a>b$.
D. $\ln a>\ln b\Leftrightarrow b>a>0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A sai vì e > 1 và chưa đủ điều kiện.

Phương án C sai vì chưa đủ điều kiện.

Phương án D sai vì cơ số e > 1.

Câu 5: Biết P là tích tất cả các nghiệm của phương trình $4^{x^2-2020}+2^{x^2-2019}-3=0$, tính P.

A. $P=0$.
B. $P=-1$.
C. $P=-2020$.
D. $P=2020$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2^{2(x^2-2020)}+2\cdot 2^{x^2-2020}-3=0$

$\Rightarrow\left(2^{x^2-2020}\right)^2+2\cdot 2^{x^2-2020}-3=0$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2-2020}=1\\ 2^{x^2-2020}=-3\ (\text{loai})\end{array}\right.$

$\Rightarrow x^2-2020=0$.

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{2020}$.

Do đó $P=\sqrt{2020}\cdot\left(-\sqrt{2020}\right)=-2020$.

Câu 6: Biết $\mathrm{P}=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{2019\text{ can bac hai}}=2^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}}$ $(\mathrm{m}\in\mathbb{N}^*,\mathrm{n}\in\mathbb{N}^*,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ là phân số tối giản). Tính $S=m+n$.

A. 2000.
B. $S=2^{2020}+1$.
C. $S=2^{2018}+1$.
D. $S=2^{2019}+1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{2}=2^{1/2^1}$; $\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt{2^{1/2}}=2^{(1/2):2}=2^{1/4}=2^{1/2^2}$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}=2^{1/2^3}$; …

Do đó $\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}}_{2019\text{ can bac hai}}=2^{1/2^{2019}}$

Vậy $S=2^{2019}+1$.

Câu 7: Cho $a>0; a\neq 1$ và $b\neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_a b^4 = \frac{1}{4}\log_a |b|$.
B. $\log_a b^4 = 4\log_a b$.
C. $\log_a b^4 = \frac{1}{4}\log_a b$.
D. $\log_a b^4 = 4\log_a |b|$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức logarit, ta có đáp án là D

Câu 8: Phương trình $\log_3 x + \log_3 (4-x) = 1$ có tập nghiệm là

A. $S = \{1;3\}$.
B. $S = \{1\}$.
C. $S = \{3\}$.
D. $S = \varnothing$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0 < x < 4$

Phương trình tương đương $\log_3 (x(4-x)) = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right. (TM)$

Vậy chọn A

Câu 9: Cho $a > 0, a \neq 1, P = (2\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P = 3\ln^2 a - 4$.
B. $P = 3\ln^2 a + 4$.
C. $P = 5\ln^2 a - 4$.
D. $P = 5\ln^2 a + 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln a.\log_a e = \log_e a.\log_a e = \log_e e = 1$, nên ta có:

$$P = (2\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$$
$$= 4\ln^2 a + 4\ln a.\log_a e + \log_a^2 e + \ln^2 a - \log_a^2 e$$
$$= 5\ln^2 a + 4$$

Câu 10: Cho $a > 0, a \neq 1, b > 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\log_a b$
B. $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \frac{\alpha}{\beta}\log_a b$
C. $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \alpha\beta\log_a b$
D. $\log_{a^\alpha}(b^\beta) = \frac{1}{\alpha\beta}\log_a b$

Lời giải

Chọn A

Câu 11: Có tất cả mấy giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2x|} = m^2 + m + 1$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. 4. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn D

$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2x|}=m^2+m+1$ (1)

Xét $f(x)=x^2-2x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$y=x^2-2x$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đặt $x^2-2x=t$

Theo BBT phương trình $x^2-2x=t$ có hai nghiệm phân biệt khi $t>-1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2x|}=m^2+m+1 \Leftrightarrow \left|x^2-2x\right|=\log_{\frac{1}{3}}\left(m^2+m+1\right) \Leftrightarrow |t|=\log_{\frac{1}{3}}\left(m^2+m+1\right)$ (2)

(1) Có đúng 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt $t>-1$

$\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{3}}\left(m^2+m+1\right)<1 \Leftrightarrow \frac{1}{3}<m^2+m+1<1 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m+\frac{2}{3}>0\ (\forall m) \\ m^2+m<0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1<m<0$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên không có số nguyên m nào thỏa đề.

Câu 12: Cho $a=\log_2 3; b=\log_3 5; c=\log_7 2$. Biết $\log_{63}140=\frac{m.abc+n.c+1}{2ac+1}\left(m\in\mathbb{N}^*; n\in\mathbb{N}^*\right)$.Tính $S=m-n$.

A. $S=3$. B. $S=-3$. C. $S=-1$. D. $S=1$.

Lời giải

Chọn C

$\log_{63}140=\frac{\log_2 140}{\log_2 63}=\frac{\log_2\left(2^2.5.7\right)}{\log_2\left(3^2.7\right)}=\frac{2+\log_2 5+\log_2 7}{2\log_2 3+\log_2 7}=\frac{2+\log_3 5.\log_2 3+\log_2 7}{2\log_2 3+\log_2 7}$

$=\frac{2+ab+\frac{1}{c}}{2a+\frac{1}{c}}=\frac{abc+2c+1}{2ac+1}$. Suy ra $m=1; n=2$, $S=m-n=-1$.

Câu 13: Phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}=2^{x+2}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

$\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2x}=2^{x+2}\Leftrightarrow\left(2^{-1}\right)^{1-2x}=2^{x+2}\Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^{x+2}\Leftrightarrow 2x-1=x+2\Leftrightarrow x=3.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 14: Cho $a\in\mathbb{R},a>0,\alpha\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=\left(a^{\beta}\right)^{\alpha}$. B. $a^{\alpha^{\beta}}=a^{\alpha.\beta}$. C. $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$. D. $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\beta-\alpha}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 15: Cho $a\in R,n\in N^{*}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=1$. B. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$.

C. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=a$. D. $\sqrt[2n]{a^{2n}}=-a$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của căn bậc n.

Câu 16: Cho $a\in R,a>0,m\in Z,n\in N,n\geq 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^{\frac{m}{n}}=a^{m-n}$. B. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$. C. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[m]{a^{n}}$. D. $a^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{m}}{a^{n}}$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

Câu 17: Cho biểu thức $P=\frac{x^{\frac{5}{4}}y+xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$ $(x>0,\ y>0)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $P=xy$. B. $P=x+y$. C. $P=1$. D. $P=2xy$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $P=\frac{x^{\frac{5}{4}}y+xy^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}=\frac{xy.\left(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}\right)}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}}}=xy$

Vậy $P=xy$.

Câu 18: Cho hàm số $y=\log_{a}x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $y'=\dfrac{1}{x\ln a}\ (x>0)$. B. $y'=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$. C. $y'=\dfrac{\ln a}{x}\ (x>0)$. D. $y'=\log_a x\ (x>0)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Cho $\log_{25}7=a,\log_2 5=b$. Tính $P=\log_{\sqrt{5}}\dfrac{245}{32}$ theo a,b.

A. $P=4a-\dfrac{10}{b}+2$. B. $P=8a-\dfrac{10}{b}+2$. C. $P=8a-10b+2$. D. $P=2a-\dfrac{5}{2b}+2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P=\log_{\sqrt{5}}\dfrac{245}{32}=\log_{5^{\frac{1}{2}}}\dfrac{245}{32}=2\log_5\dfrac{245}{32}$

$=2(\log_5 245-\log_5 32)$
$=2(\log_5 5.7^2-\log_5 2^5)$
$=2(1+2\log_5 7-5\log_5 2)$.

Mặt khác, do $a=\log_{25}7=\log_{5^2}7=\dfrac{1}{2}\log_5 7\Rightarrow\log_5 7=2a$.

$\log_2 5=b\Rightarrow\log_5 2=\dfrac{1}{\log_2 5}=\dfrac{1}{b}$.

Suy ra $P=2\left(1+2.2\text{a}-5.\dfrac{1}{b}\right)=2\left(1+4\text{a}-\dfrac{5}{b}\right)=2+8a-\dfrac{10}{b}$.

Câu 20: Cho $a>0,a\neq1$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\log_a a^a=a$. B. $\log_a 1=0$. C. $\log_a a=1$. D. $a^{\log_a a}=1$.

Lời giải

Chọn D

$\forall a>0,a\neq1$ ta có $\log_a a=1$. Do đó $a^{\log_a a}=a^1=a$.

Câu 21: Cho phương trình $\log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left(2^{x-1}+\dfrac{1}{2}\right)=1$. Khi đặt $t=\log_2\left(2^x+1\right)$, ta được phương trình nào dưới đây.

A. $t^2+t-2=0$. B. $2t^2+2t-1=0$. C. $t^2-t-2=0$. D. $2t^2-2t-1=0$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left(2^{x-1}+\frac{1}{2}\right)=1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left(\frac{2^x}{2}+\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+1\right).\log_4\left[\frac{1}{2}.\left(2^x+1\right)\right]=1 \Leftrightarrow \log_2\left(2^x+1\right).\left[\log_4\frac{1}{2}+\log_4\left(2^x+1\right)\right]=1$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x+1\right).\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_2\left(2^x+1\right)\right]=1 \Leftrightarrow t.\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)=1 \Leftrightarrow t^2-t-2=0$$

Câu 22: Cho số dương x, viết biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.

A. $x^{\frac{15}{18}}$. B. $x^{\frac{3}{16}}$. C. $x^{\frac{15}{16}}$. D. $x^{\frac{7}{18}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{1}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x.x^{\frac{3}{4}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}}=\sqrt{x.x^{\frac{7}{8}}}=\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}=x^{\frac{15}{16}}$$

Nhận xét: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}=x^{\frac{2^4-1}{2^4}}=x^{\frac{15}{16}}$

Câu 23: Cho hai số dương a,b thỏa mãn: $\log_2 a+\log_2 b=\log_2\left(a+b\right)$. Khi đó:

A. $a+b=ab$. B. $a+b=2ab$. C. $a+b=a^2b^2$. D. $2\left(a+b\right)=ab$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 a+\log_2 b=\log_2\left(a+b\right) \Leftrightarrow \log_2\left(ab\right)=\log_2\left(a+b\right) \Leftrightarrow ab=a+b$

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y=\left(3x-6\right)^{-3}$ là

A. $D=\left(2;+\infty\right)$. B. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$. C. $\mathbb{R}$. D. $D=\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định $3x-6\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \Rightarrow$ TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $9^x-m.3^{x+1}+6m+3=0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$.

A. $m=4$ B. $m=1$. C. $m=2$. D. $m=3$.

Bài giải

Chọn A

$$9^x-m.3^{x+1}+6m+3=0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-3m.3^x+6m+3=0$$

Để phương trình có 2 nghiệm thì:

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\Delta=(-3m)^2-4.1.(6m+3)=9m^2-24m-12\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq \dfrac{4-2\sqrt{7}}{3} \\ m\geq \dfrac{4+2\sqrt{7}}{3}\end{array}\right.$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:

$3^{x_1}.3^{x_2}=3^{x_1+x_2}=3^3=27=6m+3\Rightarrow m=4$ (chọn)

Câu 26: Cho bất phương trình $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x^2+2}>125^{2x}$ có tập nghiệm là:

A. $S=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

B. $S=(-\infty;2)\cup(-1;+\infty)$

C. $S=(-2;-1)$

D. $S=(1;2)$

Bài giải

Chọn C

$\left(\dfrac{1}{25}\right)^{x^2+2}>125^{x}\Leftrightarrow \dfrac{1}{25^{x^2+2}}>125^{2x}\Leftrightarrow 1>25^{x^2+2}.125^{2x}\Leftrightarrow 1>(5^2)^{x^2+2}.(5^3)^{2x}$

$\Leftrightarrow 1>5^{2x^2+6x+4}\Leftrightarrow 2x^2+6x+4<0\Leftrightarrow -2<x<-1.$

Câu 27: Bất phương trình $x^{1+\log_3 x}>81x$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(0;\dfrac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty)$.

B. $S=\left(\dfrac{1}{9};9\right)$.

C. $S=\left(0;\dfrac{1}{9}\right)$.

D. $S=(9;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $x^{1+\log_3 x}>81x$. Điều kiện $x>0$

Lấy lôgarit cơ số 3 hai vế của bất phương trình ta được

$x^{1+\log_3 x}>81x\Leftrightarrow (1+\log_3 x).\log_3 x>\log_3 81+\log_3 x$

$$\Leftrightarrow \log_3^2 x>4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x>2\\ \log_3 x<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>9\\ x<\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện $x>0$ ta có bất phương trình $x^{1+\log_3 x}>81x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>9\\ 0<x<\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bát phương trình trên là $S=\left(0;\dfrac{1}{9}\right)\cup(9;+\infty)$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y=4^x+6^x$ bằng

A. $4^x.\ln 4+6^x.\ln 6.$

B. $4^x+6^x.$

C. $4^x.\log 4+6^x.\log 6$. D. $x(4^{x-1}+6^{x-1})$.

Lời giải

Chọn A

$y=4^x+6^x \Rightarrow y'=(4^x)'+(6^x)'=4^x.\ln 4+6^x.\ln 6$.

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y=\left(2^x-8\right)^{-2}$ là:

A. $D=[3;+\infty)$. B. $D=(3;+\infty)$. C. $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. D. $D=\mathbb{R}$.

Lời giải:

Chọn C

Vì $-2\in\mathbb{Z}^- \Rightarrow 2^x-8\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3 \Rightarrow$ Tập xác định của hàm số $y=\left(2^x-8\right)^{-2}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 30: Tính chất nào của hàm số $y=x^{-3}$ đúng trên nửa khoảng $(0;+\infty)$?

A. Hàm số luôn nghịch biến. B. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(0;0)$.

C. Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(0;1)$. D. Hàm số luôn đồng biến.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $y=x^{-3} \Rightarrow y'=-3x^{-2}=\dfrac{-3}{x^2}<0$ với $\forall x>0$.

Hàm số luôn nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 31: Phương trình $\log_3\left(x^2-1\right)=\log_3\left(x-1\right)+1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>1$

Với điều kiện trên ta có

$\log_3\left(x^2-1\right)=\log_3\left(x-1\right)+1$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2-1\right)=\log_3\left(x-1\right)+\log_3 3 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2-1\right)=\log_3\left[3.\left(x-1\right)\right]$

$\Leftrightarrow x^2-1=3.\left(x-1\right) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\,(L) \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 32: Đạo hàm của hàm số: $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x$ bằng:

A. $-x^2.e^x$. B. $(2x-2)e^x$. C. $\left(x^2-2\right)e^x$. D. x^2e^x.

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có: $y'=\left(x^2-2x+2\right)'e^x+\left(x^2-2x+2\right)\left(e^x\right)'=\left(2x-2\right)e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x$.

$=\left(2x-2+x^2-2x+2\right)e^x=x^2e^x$

Câu 33: Nếu $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b\frac{3}{4}<\log_b\frac{4}{5}$ thì:

A. $a>1$ và $b>1$.

B. $0<a<1$ và $b>1$.

C. $0<a<1$ và $0<b<1$.

D. $a>1$ và $0<b<1$.

Lời giải

Chọn B

$\begin{cases} a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}\Leftrightarrow 0<a<1$; $\begin{cases} \log_b\frac{3}{4}<\log_b\frac{4}{5} \\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5} \end{cases}\Leftrightarrow b>1$

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của m để biểu thứ $A=\log_5\left(1-2m\right)$ có nghĩa.

A. $m\ge\frac{1}{2}$.

B. $m>\frac{1}{2}$.

C. $m\le\frac{1}{2}$.

D. $m<\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

ĐKXĐ: $1-2m>0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Câu 35: Đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(x^2+x+1\right)$ bằng

A. $\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}$.

B. $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

C. $\frac{\ln 2}{x^2+x+1}$.

D. $\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right).\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 2}.$$

Câu 36: Rút gọn biểu thức $P=\frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^2}$ $\left(a>0\right)$.

A. $a^{\frac{2}{3}}$.

B. $a^{-\frac{2}{3}}$.

C. $a^{-\frac{10}{3}}$.

D. $a^{\frac{10}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

$P=a^{\frac{4}{3}-2}=a^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y=(4x-3)^4$.

A. $y'=16(4x-3)^4$. B. $y'=4(4x-3)^3$. C. $y'=4(4x-3)^4$. D. $y'=16(4x-3)^3$.

Lời giải

Chọn D

$y'=4.(4x-3)'(4x-3)^3=4.4.(4x-3)^3=16(4x-3)^3$.

Câu 38: Cho các mệnh đề sau:

I. Với $x_1,x_2>0,$ ta có: $5\log x_1-5\log x_2=5(\log x_1-\log x_2)=5\log\frac{x_2}{x_1}$.

II. Với $x_1,x_2,x_3>0,0<a\neq 1,$ ta có: $\log_a(x_1+x_2+x_3)=\log_a x_1.\log_a x_2.\log_a x_3$.

III. $\log_{(2^2.3)}12=\frac{1}{12}\log_6 12=\frac{1}{2}(1+\log_6 2)$.

IV. Cho các số dương $a,b,$ với $a\neq 1,$ ta có: $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b.$

Số mệnh đề sai là bao nhiêu?

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

Mệnh đề I, II và III sai

Câu 39: Cho $a>0,a\neq 1$. Đơn giản biểu thức $B=\log_a(a^2.\sqrt[4]{a^3})$.

A. $a^{\frac{10}{3}}$. B. $a^{\frac{11}{4}}$. C. $\frac{11}{4}$. D. $\frac{10}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$B=\log_a^{(a^2.\sqrt[4]{a^3})}=\log_a^{a^{\frac{11}{4}}}=\frac{11}{4}$.

Câu 40: Hàm số $y=\frac{\sqrt{5-x}}{\log_2(x-2)}$ có tập xác định D. Khi đó:

A. $D=(2;5)$. B. $D=[2;5]$ C. $D=(2;5]$. D. $D=(2;5]\setminus\{3\}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}5-x\geq 0\\x-2>0\\x-2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 5\\x>2\\x\neq 3\end{cases}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vậy tập xác định $D=(2;5]\backslash\{3\}$.

Câu 41: Tìm tập nghiệm của phương trình $2^{9x^2-17x+10}=2^{7-5x}$.

A. $\left\{-1;-\dfrac{1}{3}\right\}$.   B. $\left\{1;\dfrac{1}{3}\right\}$.   C. $\{-1;3\}$.   D. $\{-3;1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{9x^2-17x+10}=2^{7-5x}\Leftrightarrow 9x^2-17x+10=7-5x\Leftrightarrow 9x^2-12x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1;\dfrac{1}{3}\right\}$.

Câu 42: Cho phương trình $4^x-4.2^x+3=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $3x_1+2x_2$.

A. $3\log_2 3$.   B. $2\log_2 3$.   C. $3\log_3 2$.   D. 1.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=2^x$ $(t>0)$. Phương trình đã cho trở thành:

$t^2-4.t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ (TM)\\t=3\ (TM)\end{array}\right.$

Với $t=1$. Ta có $2^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Với $t=3$. Ta có $2^x=3\Leftrightarrow x=\log_2 3$.

Do phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$ nên ta chọn $x_1=0$ và $x_2=\log_2 3$.

Vậy $3x_1+2x_2=2\log_2 3$.

Câu 43: Bất phương trình $\log_4^2\left(3^x-1\right)-2\log_4\left(3^x-1\right)+\dfrac{3}{4}\geq 0$ có tập nghiệm là:

A. $S=(0;1]\cup[2;+\infty)$.   B. $S=(0;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.   D. $S=(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $3^x-1>0\Leftrightarrow x>0$.

Đặt $t=\log_4\left(3^x-1\right)$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có bất phương trình: $t^2-2t+\frac{3}{4}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le \frac{1}{2} \\ t\ge \frac{3}{2} \end{array}\right.$

Với $t\le \frac{1}{2} \Rightarrow \log_4\left(3^x-1\right)\le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0<3^x-1\le 2 \Leftrightarrow 0<x\le 1$.

Với $t\ge \frac{3}{2} \Rightarrow \log_4\left(3^x-1\right)\ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3^x-1\ge 8 \Leftrightarrow x\ge 2$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=\left(0;1\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

Câu 44: Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1-\sqrt{x-1}\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

B. $\frac{1}{2\sqrt{x-1}+2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

C. $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}+2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

D. $\frac{-1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số: $D=\left[1;2\right)$.

Ta có: $y'=\left(\ln\left(1-\sqrt{x-1}\right)\right)'=\frac{-\left(\sqrt{x-1}\right)'}{1-\sqrt{x-1}}=\frac{-1}{2\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)}=\frac{-1}{2\sqrt{x-1}-2\sqrt{\left(x-1\right)^2}}$.

Câu 45: Một người gửi 88 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất $1,68\%$ (mỗi quý). Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó có được 100 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu? (giả sử rằng lãi suất không đổi).

A. 2 năm. B. 1,5 năm. C. 8 năm. D. 3 năm.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là vốn và lãi sau n kỳ hạn.

A là số vốn ban đầu.

r là lãi suất (theo quý).

Ta có: $M=A\left(1+r\right)^n$

$\Leftrightarrow 100000000=88000000(1+1,68\%)^n \Leftrightarrow \left(1+0,0168\right)^n=\frac{25}{22} \Leftrightarrow n\approx 8$

Vậy : Sau 8 quý (tức là sau 2 năm) người đó sẽ có được 100 triệu đồng cả vốn lẫn lãi.

B. TỰ LUẬN

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Lời giải

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m^2 - 5 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$, ta được phương trình: $t^2 - 2mt + 2m^2 - 5 = 0 \quad (1)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} m < -\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ m > \dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Vậy $m = 2$ là giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 2: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

Phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0 (1) \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 3m - 3 = 0$.

Đặt $t = 2^x$, $(t > 0)$ ta có phương trình $t^2 - 2mt + 3m - 3 = 0 (2)$.

Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ 3m - 3 > 0 \\ m > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ t_1.t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 3m - 3 - 2m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (1;2).$$

Câu 3: Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x + 2y)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$?

Lời giải

Giả sử $\log_6 x = \log_9 y = \log_4 (2x + 2y) = t$. Ta có: $\begin{cases} x = 6^t & (1) \\ y = 9^t & (2) \\ 2x + 2y = 4^t & (3) \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6^t}{9^t} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^t > 0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t+2.9^t=4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}-2.\left(\frac{2}{3}\right)^t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(\frac{2}{3}\right)^t=1+\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}-1} & \text{(thỏa)}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^t=1-\sqrt{3} & \text{(loại)}\end{array}\right..$$

Câu 4: Biết rằng a là số thực dương sao cho bất đẳng thức $3^x+a^x\ge 6^x+9^x$ đúng với mọi số thực x. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Lời giải

Ta có

$3^x+a^x\ge 6^x+9^x$

$\Leftrightarrow a^x-18^x\ge 6^x+9^x-3^x-18^x$

$\Leftrightarrow a^x-18^x\ge 3^x\left(2^x-1\right)-9^x\left(2^x-1\right)$

$\Leftrightarrow a^x-18^x\ge -3^x\left(2^x-1\right)\left(3^x-1\right)\ (*)$.

Ta thấy $\left(2^x-1\right)\left(3^x-1\right)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -3^x\left(2^x-1\right)\left(3^x-1\right)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, $(*)$ đúng với mọi số thực x

$\Leftrightarrow a^x-18^x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{18}\right)^x\ge 1,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{a}{18}=1\Leftrightarrow a=18\in(16;18]$.

Câu 5: Tìm m để phương trình $9^x-2(2m+1).3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$

Lời giải

Đặt $t=3^x$ $(t>0)$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$ (1).

(1) có hai nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m+1)^2-3(4m-1)>0\\ 2m+1>0\\ 4m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 1\\ m>\frac{1}{4}\end{cases}$.

Khi đó $\left[\begin{array}{l}t=4m-1\\ t=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x_1}=4m-1\\ 3^{x_2}=3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\log_3(4m-1)\\ x_2=1\end{array}\right.$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=12\Leftrightarrow \log_3(4m-1)=2\Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Câu 6: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\dfrac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x}-\dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$.

Lời giải

$\dfrac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x}-\dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$ (1). ĐK: $\begin{cases} x>0 \\ x^2>0 \\ \log_2 x-1\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\ne 2$.

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{\log_2 x-1}{\log_2 x}-\dfrac{2\log_2 x}{\log_2 x-1}\le 1$.

Đặt $t=\log_2 x$.

Bất phương trình trở thành: $\dfrac{t-1}{t}-\dfrac{2t}{t-1}\le 1\Leftrightarrow \dfrac{-2t^2-t+1}{t(t-1)}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ 0<t\le \frac{1}{2} \\ t\le -1\end{array}\right.$.

- $t>1\Leftrightarrow \log_2 x>1\Leftrightarrow x>2$.
- $0<t\le \dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 0<\log_2 x\le \dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1<x<\sqrt{2}$.
- $t\le -1\Leftrightarrow \log_2 x\le -1\Leftrightarrow x\le \dfrac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện, bất phương trình (1) có tập nghiệm $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left(1;\sqrt{2}\right]\cup(2;+\infty)$

.

Câu 7: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực $x_1;x_2$ thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

Lời giải

$\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ (1)

Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\log_3 x\Leftrightarrow x=3^t$ thì phương trình tương đương $t^2-3t+2m-7=0$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có 2 nghiệm phân biệt.

Giả sử (2) có 2 nghiệm $t_1=\log_3 x_1, t_2=\log_3 x_2$ khi đó $x_1x_2=3^{(t_1+t_2)}=27$.

Suy ra $(x_1+3)(x_2+3)=72\Leftrightarrow x_1x_2+3(x_1+x_2)=63\Leftrightarrow x_1+x_2=12$

Vậy x_1,x_2 là 2 nghiệm phương trình $x^2-12x+27=0\Leftrightarrow x=9\vee x=3$

$x=9$ suy ra $\log_3^2 9-3\log_3 9+2m-7=0\Leftrightarrow m=\dfrac{9}{2}$.

$x=3$ suy ra $\log_3^2 3-3\log_3 3+2m-7=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{9}{2}$.

Vậy $m=\dfrac{9}{2}$.

Câu 8: Tìm các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải.

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8) \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-1)^2=mx-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2-(m+2)x+9=0 \end{cases}.$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực lớn hơn 1 thì điều kiện sau thỏa mãn.

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ 1<x_1<x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+4m-32>0 \\ (x_1-1)+(x_2-1)>0 \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-8 \\ m>4 \end{array}\right. \\ m>0 \\ 8-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow 4<m<8$$

Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{5,6,7\}$.

Câu 9: Phương trình $\log_2{}^2 x-(m^2-3m)\log_2 x+3=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=16$.

Lời giải

$\log_2{}^2 x-(m^2-3m)\log_2 x+3=0 \quad (1)$.

Điều kiện $x>0$.

Đặt $\log_2 x=t$. Ta được phương trình $t^2-(m^2-3m)t+3=0 \quad (2)$.

Ta có: $x_1x_2=16 \Leftrightarrow \log_2(x_1x_2)=4 \Leftrightarrow \log_2 x_1+\log_2 x_2=4$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2=16$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1+t_2=4$.

Vậy suy ra $m^2-3m=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Câu 10: Giải bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\dfrac{3x-1}{x+1}\right)\le 0$

Lời giải

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\frac{3x-1}{x+1}\right)\le 0 \Leftrightarrow \log_2\frac{3x-1}{x+1}\ge 1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x+1}\ge 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x<-1 \end{cases}.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;+\infty)\cup[3;+\infty)$.

Câu 11: Tìm m để phương trình $\log(x^2+mx)=\log(x+m-1)$ có nghiệm duy nhất

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)=x^2+mx=x+m-1\\x+m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)=x^2-(1-m)x+1-m=0\,(1)\\x>1-m\end{cases}$.

PT đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi xảy ra 1 trong 2 TH sau:

TH1: PT (1) có nghiệm kép $x>1-m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\\dfrac{1-m}{2}>1-m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-m)^2-4(1-m)=0\\1-m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\varnothing\\m>1\end{cases}$$

TH2: PT (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<1-m=x_2$

Đk: $\begin{cases}\Delta>0\\\dfrac{S}{2}>1-m\\g(1-m)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2m-3>0\\\dfrac{1-m}{2}>1-m\\(1-m)^2-(1-m)(1-m)+1-m=0\end{cases}$:Không có m thỏa mãn.

TH3:Phương trình có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1<1-m<x_2$

ĐK: $\begin{cases}\Delta>0\\\left[x_1-(1-m)\right]\left[x_2-(1-m)\right]<0\end{cases}(*)$ trong đó $\begin{cases}x_1+x_2=1-m\\x_1x_2=1-m\end{cases}$

Khi đó $(*)$ thành $\begin{cases}m^2+2m-3>0\\x_1x_2-(1-m)(x_1+x_2)+(1-m)^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2m-3>0\\1-m<0\end{cases}\Leftrightarrow m>1$.

KL: $m>1$.

Câu 12: Giải phương trình $\log_{49}x^2+\frac{1}{2}\log_7(x-1)^2=\log_7\left(\log_{\sqrt{3}}3\right)$

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}x\neq0\\x\neq1\end{cases}$.

$$\log_{49}x^2+\frac{1}{2}\log_7(x-1)^2=\log_7\left(\log_{\sqrt{3}}3\right)\Leftrightarrow\log_7|x|+\log_7|x-1|=\log_7 2$$

$$\Leftrightarrow\log_7|x(x-1)|=\log_7 2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x(x-1)=2\\x(x-1)=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x-2=0\\x^2-x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$$

Câu 13: Tìm m để phương trình $\log_3^2x-3\log_3x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

Lời giải

Ta có $(x_1+3)(x_2+3)=72 \Rightarrow x_1x_2+3(x_1+x_2)=63$.

Xét $\log_3{}^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$, đặt $t=\log_3 x$, PT trở thành $t^2-3t+2m-7=0\ (1)$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt $x_1,x_2 \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9-4(2m-7)>0 \Leftrightarrow -8m+37>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{37}{8}$.

Khi đó, giả sử (1) có hai nghiệm t_1,t_2, tương ứng PT đã cho có hai nghiệm x_1,x_2.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} t_1+t_2=3 \\ t_1t_2=2m-7 \end{cases}$.

Nên $\begin{cases} \log_3 x_1+\log_3 x_2=3 \Rightarrow x_1.x_2=27 \\ \log_3 x_1.\log_3 x_2=2m-7\ (*) \end{cases}$

Kết hợp với giả thiết ta có $\begin{cases} x_1.x_2=27 \\ x_1+x_2=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=9 \\ x_2=3 \end{cases}$. Thay vào $(*)$ ta được $m=\dfrac{9}{2}$ (TM).