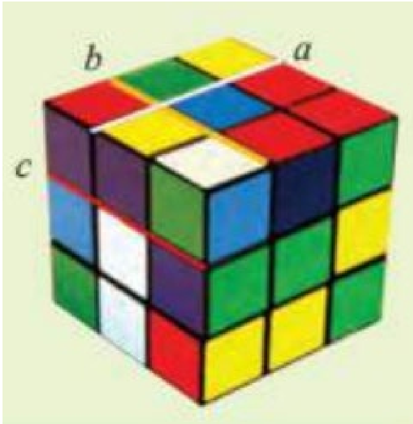
CHƯƠNG VIII: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM



Ta đã biết cách xác định góc giữa hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng. Có góc giữa hai đường thẳng chéo nhau không? Nếu có, làm thế nào để xác định?

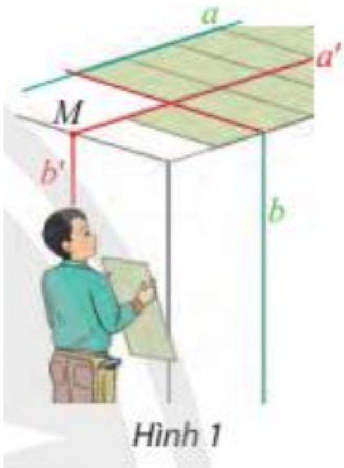
Lời giải

Có góc giữa 2 đường thẳng chéo nhau.

Cách xác định góc giữa 2 đường thẳng chéo nhau a và b : Kẻ 1 đường thẳng c song song với b thuộc mặt phẳng chứa a . Góc giữa a và b bằng góc giữa a và c .

1. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b trong không gian. Qua một điểm M tuỳ ý vẽ $a'//a$ và vẽ $b'//b$. Khi thay đổi vị trí của điểm M, có nhận xét gì về góc giữa a' và b'?



Hình 1

Lời giải

Khi thay đổi vị trí của điểm M thì góc giữa a' và b' không thay đổi

Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a, b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Chú ý:

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a, b ta có thể lấy một điểm O nằm trên một trong hai đường thẳng đó và vẽ đường thẳng song song với đường thẳng còn lại.

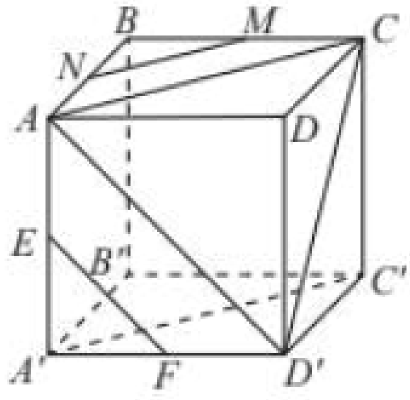
b) Góc giữa hai đường thẳng nhận giá trị từ $0°$ đến $90°$.

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông và M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA, AA', $A'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) $A'C'$ và BC;

b) MN và EF.

Lời giải



Hình 2

a) Ta có $AC//A'C'$, suy ra $\left(A'C',BC\right)=\left(AC,BC\right)=\widehat{ACB}=45^\circ$ (tam giác ABC vuông cân tại B).

b) Ta có AC // MN, AD' // EF, suy ra $\left(MN,EF\right)=\left(AC,AD'\right)=\widehat{CAD'}=60^\circ$ (tam giác ACD' có ba cạnh bằng nhau).

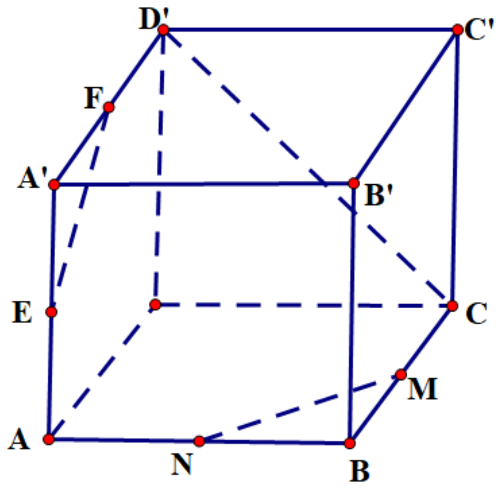
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông M, N, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, BA, AA', $A'D'$. Tính góc giữa các cặp đường thẳng:

a) MN và DD';

b) MN và CD';

c) EF và CC'.

Lời giải



a) Trong tam giác ABC có MN là đường trung bình nên MN//AC

Mà AA' // DD'

Nên góc giữa MN và DD' là góc giữa AC Và AA'

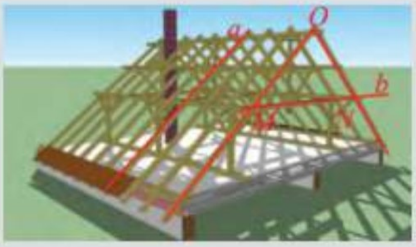
b) Vì MN//AC nên góc giữa MN và CD là góc giữa AC và CD'

c) Trong tam giác $AA'D'$ có EF là đường trung bình nên $EF//AD'$

Mà CC'//AA'

Nên góc giữa EF và CC' là góc giữa AA' và AD'

Khung của một mái nhà được ghép bởi các thanh gỗ như Hình 3. Cho biết tam giác OMN vuông cân tại O. Tính góc giữa hai thanh gỗ a và b.



Hình 3

Lời giải

Vì $a//OM$ nên góc giữa a và b là góc giữa MN và OM.

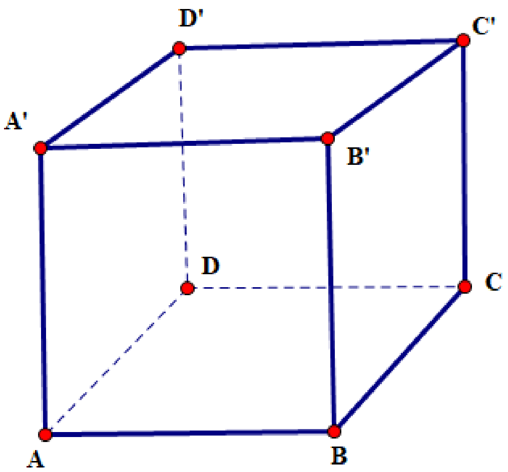
Mà tam giác OMN vuông cân nên góc giữa a và b là 45^o.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Nêu nhận xét về góc giữa các cặp đường thẳng:

a) AB và BB'; b) AB và DD'.

Lời giải



a) $ABB'A'$ là hình vuông nên góc giữa AB và BB' là 90^o.

b) Vì $DD'//AA'$ nên góc giữa AB và DD' là góc giữa AB và AA' và bằng 90^o.

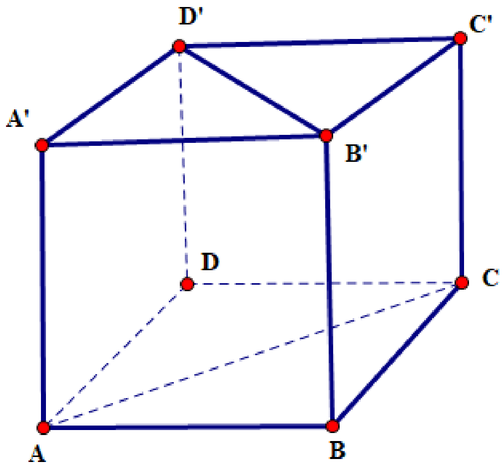
Định nghĩa

Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

Hai đường thẳng a, b vuông góc được kí hiệu là $a \perp b$ hoặc $b \perp a$.

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AC \perp B'D'$.

Lời giải



Ta có $CC' \,//\, BB'$, suy ra $\left(AB, CC'\right) = \left(AB, BB'\right) = \widehat{ABB'} = 90^\circ$. Vậy $AB \perp CC'$.

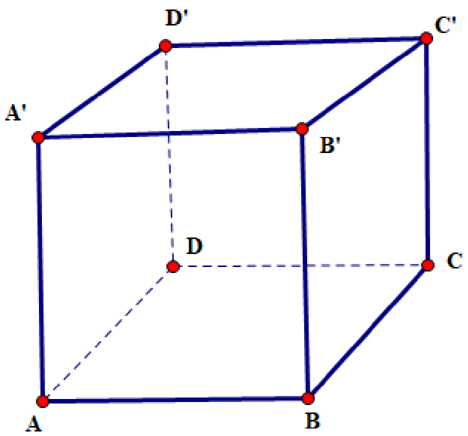
Ta có $B'D' \,//\, BD$, suy ra $\left(AC, B'D'\right) = \left(AC, BD\right) = 90^\circ$ (hai đường chéo của hình vuông luôn vuông góc với nhau). Vậy $AC \perp B'D'$.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông.

a) Tìm các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình lập phương và vuông góc với AC.

b) Trong các đường thẳng tìm được ở câu a, tìm đường thẳng chéo với AC.

Lời giải



a) Các đường thẳng đi qua hai đỉnh của hình hộp và vuông góc với AC là:
$BD,\ B'D',\ AA',\ CC',\ BB',\ DD'$.

b) Trong các đường thẳng trên, đường thẳng chéo với AC là $B'D'$.

Chú ý:

a) Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

b) Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường này thì cũng vuông góc với đường kia.

c) Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt a, b cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba c thì ta chưa kết luận được $a \,//\, b$ như trong hình học phẳng.

Hình bên mô tả một người thợ đang ốp gạch vào tường có sử dụng thước laser để kẻ vạch. Tìm các đường thẳng vuông góc với đường thẳng a trong Hình 4.

Hình 4

Lời giải

Các đường thẳng vuông góc với a là: chân tường, mép các viên gạch ốp,...

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳngHu

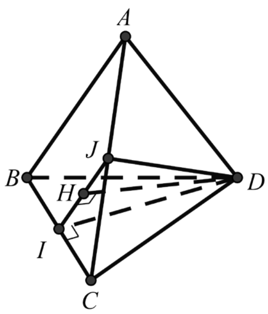
1. Phương pháp

- Lấy điểm O tùy ý (ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
- Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O.
- Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

Lời giải



Đặt cạnh của tứ diện có độ dài là a.

Gọi J là trung điểm của AC.

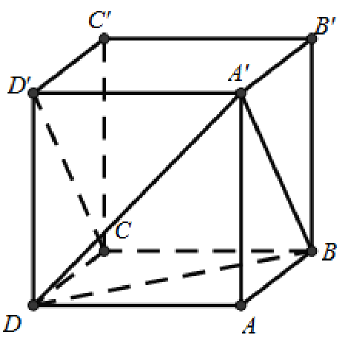
Ta có: $IJ//AB \Rightarrow (AB,DI) = (IJ,DI) = \widehat{DIJ}$

Kẻ $HD \perp IJ,(H \in IJ)$

Ta có: $\cos\widehat{DIJ} = \dfrac{IH}{DI} = \dfrac{\dfrac{a}{4}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD’.

Lời giải



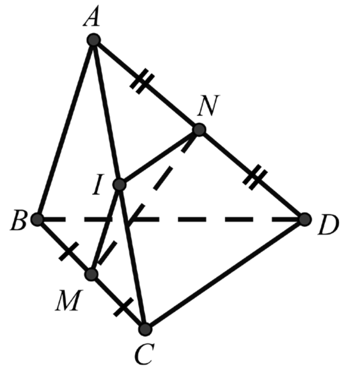
Do $BA'//CD'$ nên góc giữa BD và CD’ là góc giữa BD và BA’

Mà $\Delta A'BD$ là tam giác đều nên góc giữa BD và BA' là 60°.

Vậy góc giữa BD và CD' là 60°.

Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Cho biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AC ta có: $IM = IN = a$

Áp dụng định lí côsin trong ΔIMN:

$MN^2 = IM^2 + IN^2 - 2IM.IN\cos\widehat{MIN}$

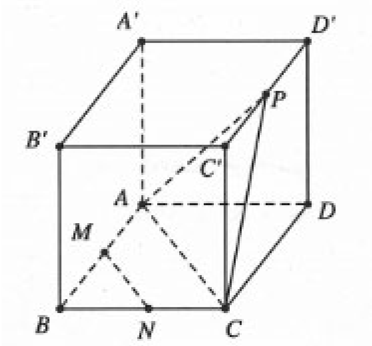
$3a^2 = a^2 + a^2 - 2a.a\cos\widehat{MIN} \Rightarrow \cos\widehat{MIN} = -\frac{1}{2}$

Suy ra: $\widehat{MIN} = 120^\circ$

Vậy: $\widehat{(AB,CD)} = \widehat{(IM,IN)} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ví dụ 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

Lời giải



Dễ thấy MN là đường trung bình trong tam giác ABC nên $MN // AC \Rightarrow \widehat{(MN;AP)} = \widehat{(AC;AP)}$.

Lại có $AC = a\sqrt{2}, CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

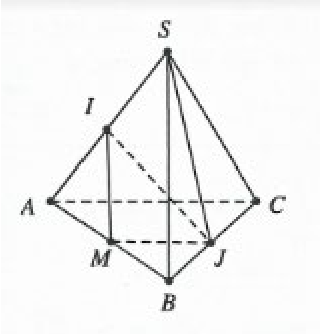
$AP = \sqrt{A'P^2 + AA'^2} = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2 + AA'^2} = \frac{3a}{2}$

Do đó $\cos\widehat{CAP} = \frac{AP^2 + AC^2 - CP^2}{2.AP.AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45^\circ = \widehat{(MN;CP)}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính số đo của góc hợp bởi IJ và SB.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB thì MI, MJ lần lượt là đường trung bình của tam giác ASB và ABC.

Ta có: $MI = MJ = \dfrac{a}{2}$

Mặt khác $JA = JS = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ tam giác JSA cân tại $J \Rightarrow JI \perp SA$

Khi đó $IJ = \sqrt{SJ^2 - SI^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MI^2 + MJ^2 = IJ^2$ nên tam giác MIJ vuông cân tại M

$\Rightarrow \widehat{(IJ;SB)} = \widehat{(IJ;IM)} = 45°$

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian

1. Phương pháp

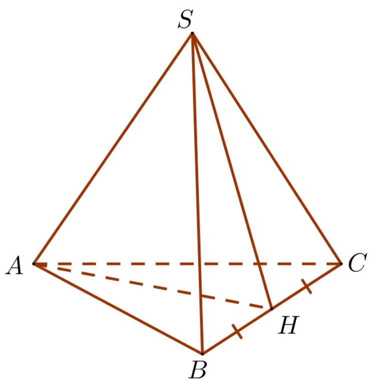
Cách 1: Dùng định nghĩa: $a \perp b \Leftrightarrow \widehat{(a,b)} = 90^0$

Cách 2: Dùng định lí: $\begin{cases} b//c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Chứng minh SA vuông góc với BC.

Lời giải



Vì $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ nên $\Delta SAC = \Delta SAB$, suy ra $SB = SC$, nên hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Gọi H là trung điểm BC, ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAH) \perp BC$ nên $SA \perp BC$ $\Rightarrow (SA, BC) = 90°$

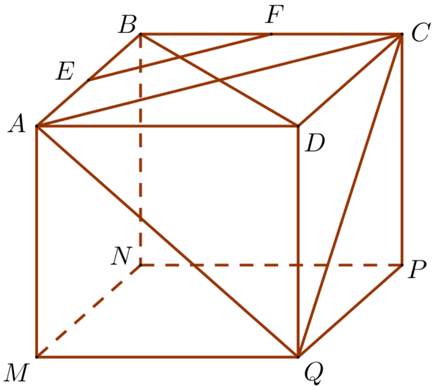
Vậy $SA \perp BC$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a)Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

b) Tính góc giữa EF và AQ.

Lời giải



a)Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

Ta thấy: EF là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow EF // AC$.

Mà: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp AA' \end{cases}$ nên $EF \perp BD, EF \perp AM$

b) Tính góc giữa EF và AQ.

Ta có: $EF // AC \Rightarrow (EF, AQ) = (AC, AQ) = \widehat{CAQ}$.

Nhận thấy: $AC = AQ = CQ = a\sqrt{2}$.

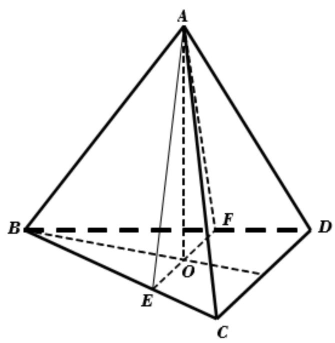
$\Rightarrow \Delta ACQ$ đều $\widehat{CAQ} = 60°$.

$\Rightarrow (EF, AQ) = \widehat{CAQ} = 60°$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.

Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

Lời giải



- Qua O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC tại E và cắt BD tại F.
- Ta cần chứng minh $AO \perp EF$. Ta có $\widehat{AOE} = \left(\widehat{AO, CD}\right)$.
- Vì $EF // CD$ nên BEF là tam giác đều nên $BE = BF$ và $OE = OF$. (1)
- Xét hai tam giác ABE và ABF, ta có

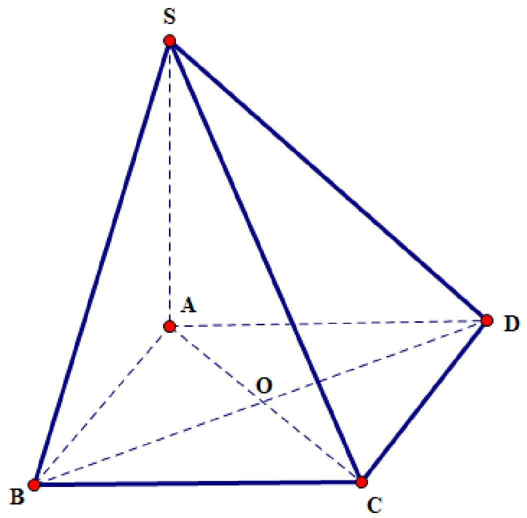
$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ BE = BF \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} \end{cases}$ nên $\Delta ABE = \Delta ABF$ $(c-g-c)$. Suy ra $AE = AF$. (2)

- Từ (1) và (2), suy ra tam giác AEF cân tại A có AO là trung tuyến nên cũng là đường cao.
- Do đó $\widehat{AOE} = 90^0$. Vậy $AO \perp CD$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a. Cho biết $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AB$ và $SA \perp AD$. Tính góc giữa SB và CD, SD và CB.

Lời giải



Do $CD//AB$ nên góc giữa SB và CD là góc giữa AB và SB là $\widehat{ABS}$.

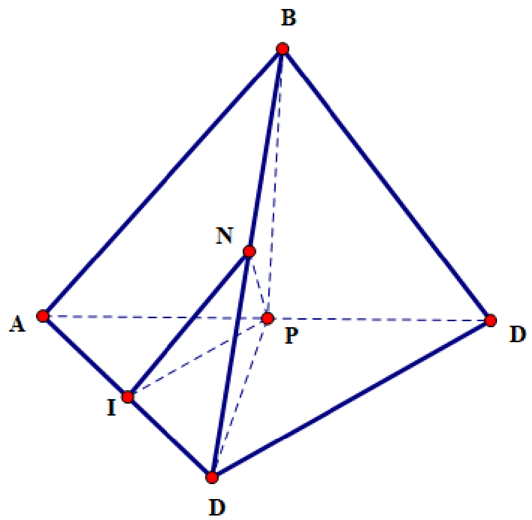
Do $CB//AD$ nên góc giữa SD và CB là góc giữa SD và AD là $\widehat{ADS}$.

Ta có: $tan\widehat{ABS} = tan\widehat{ADS} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$.

Suy ra $\widehat{ABS} = \widehat{ADS} = \frac{\pi}{3}$.

Bài 2. Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AC, BC, AD.

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện $ABCD$.

Tam giác ACD là MP là đường trung bình nên $MP = \frac{1}{2}.CD = \frac{1}{2}a, MP//CD$.

Tam giác ABC là MN là đường trung bình nên $MN = \frac{1}{2}.AB = \frac{1}{2}a; MN//AB$.

Tam giác ABD đều có BP là trung tuyến nên $BP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Tam giác ACD A đều có CP là trung tuyến nên $CP=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Suy ra tam giác BCP cân tại P có PN là trung tuyến nên $PN\perp BC$.

$$NP=\sqrt{CP^2-CN^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

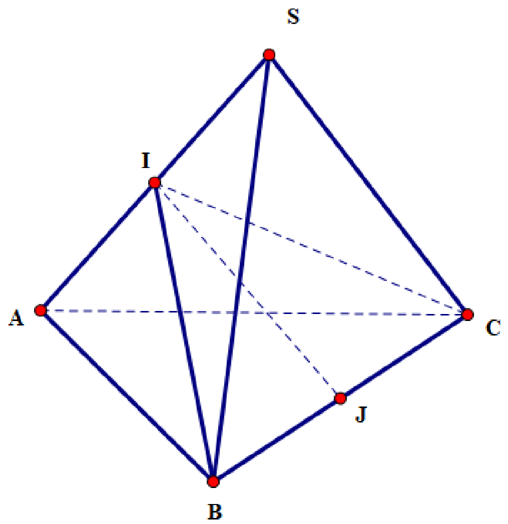
Tam giác MNP có: $MN^2+MP^2=NP^2$ nên tam giác MNP vuông tại M.

Do $MN//AB,\ MP//CD$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa MN và MP và bằng $90°$.

Vậy $AB\perp CD$

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{BSA}=\widehat{CSA}=60°$, $\widehat{BSC}=90°$. Cho I và J lần lượt là trung điểm của SA và BC. Chứng minh rằng $IJ\perp SA$ và $IJ\perp BC$.

Lời giải



Tam giác SAB có $SA=SB=a$; $\widehat{BSA}=60°$ nên tam giác SAB đều cạnh a. Suy ra $IB=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Tam giác SAC có $SA=SC=a$; $\widehat{CSA}=60°$ nên tam giác SAC đều cạnh a. Suy ra $IC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Suy ra tam giác IBC cân tại I có IJ là trung tuyến nên $IJ\perp BC$.

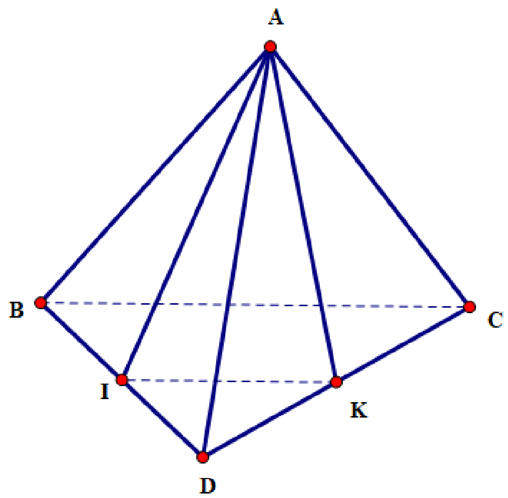
Tam giác SBC vuông cân tại S nên $BC=\sqrt{2}a$; SJ=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Tam giác ABC có $AB = AC = a; CB = \sqrt{2}a$ nên tam giác ABC vuông cân tại A. Mà AJ là trung tuyến nên $AJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra tam giác SAJ cân tại J có JI là trung tuyến nên $IJ \perp SA$.

Bài 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của CD. Tính góc giữa hai đường thẳng AK và BC.

Lời giải



Tam giác ACD đều cạnh a có AK là trung tuyến nên $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Gọi I là trung điểm của BD.

Tam giác ABD đều cạnh a có AI là trung tuyến nên $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Tam giác BCD có IK là trung tuyến nên $IK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$.

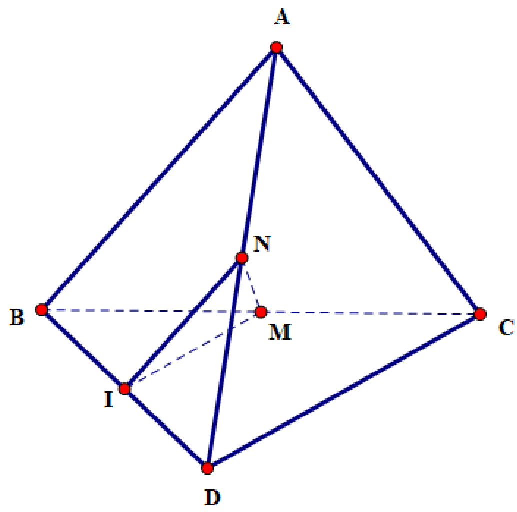
Ta có: $\cos\widehat{AKI} = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Nên $\widehat{AKI} = 73,2°$

Vì $BC // IK$ nên góc giữa AK và BC là góc giữa AK và KI và bằng $73,2°$.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BD.

Tam giác BCD có IM là đường trung bình nên $IM//DC$ và $IM=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}.2a=1$.

Tam giác ABD có IN là đường trung bình nên $IN//AB$ và $IN=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}.2a=1$.

Ta có: $\cos\widehat{MIN}=\dfrac{a^2+a^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a}=-\dfrac{1}{2}$ nên $\widehat{MIN}=120^o$

Do $AB//IN$, $CD//IM$ nên góc giữa AB và CD là góc giữa IM và IN là bằng $120°$.

Bài 6. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$ song song với mặt bàn và có cạnh AB song song với cạnh bàn a (Hình 5). Tính số đo góc hợp bởi đường thẳng a lần lượt với các đường thẳng AF, AE và AD.

Hình 5

Lời giải

Vì $a//AB$ nên góc giữa a và AF là góc giữa AB và AF và bằng 120^o.

Vì $a//AB$ nên góc giữa a và AE là góc giữa AB và AE và bằng $90°$.

Vì $a//AB$ nên góc giữa a và AD là góc giữa AB và AD và bằng $60°$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$. **B.** Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$. **D.** Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

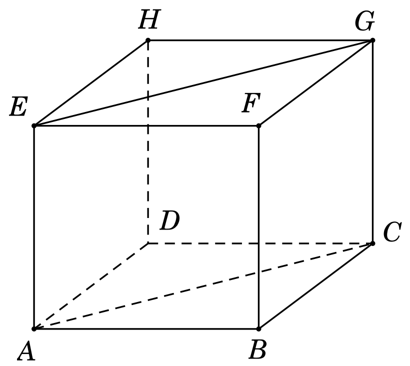
Vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45^0$ ($ABCD$ là hình vuông).

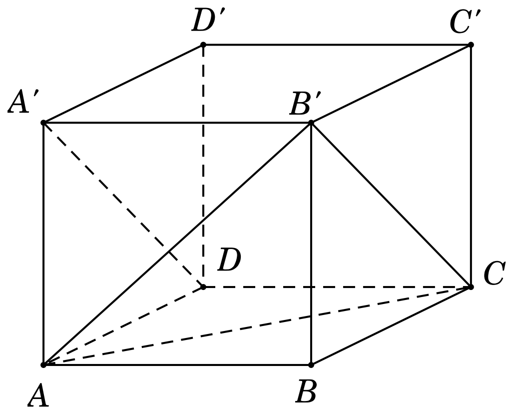
Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB'=B'C=CA=a\sqrt{2}$) do đó $\widehat{B'CA}=60^0$.

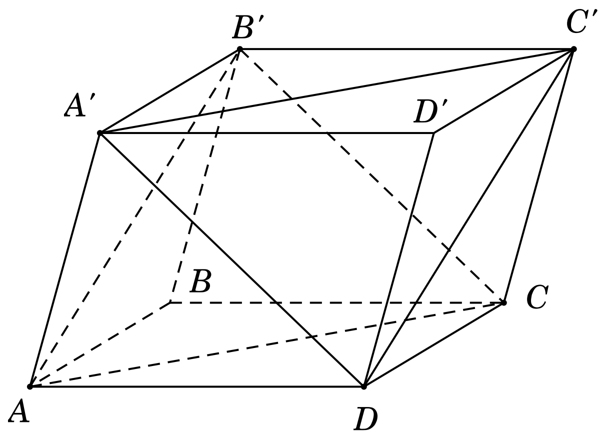
Lại có, DA' song song CB' nên $(AC,DA')=(AC,CB')=\widehat{ACB'}=60^0$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. **B.** $\widehat{DA'C'}$. **C.** $\widehat{BB'D}$. **D.** $\widehat{BDB'}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC\,//\,A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành) mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên

$(AC,A'D)=(A'C',A'D)=\widehat{DA'C'}$.

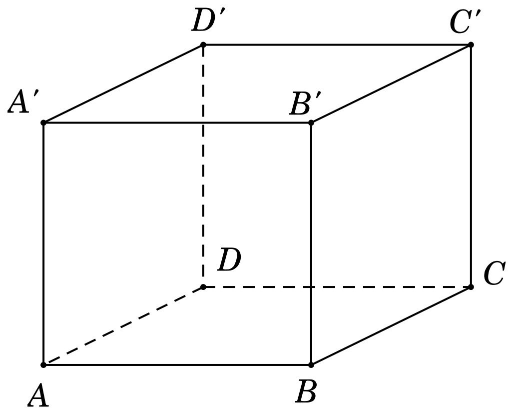
Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai?**

A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90^0. **B.** Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60^0.

C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45^0. **D.** Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90^0.

Lời giải

Chọn B



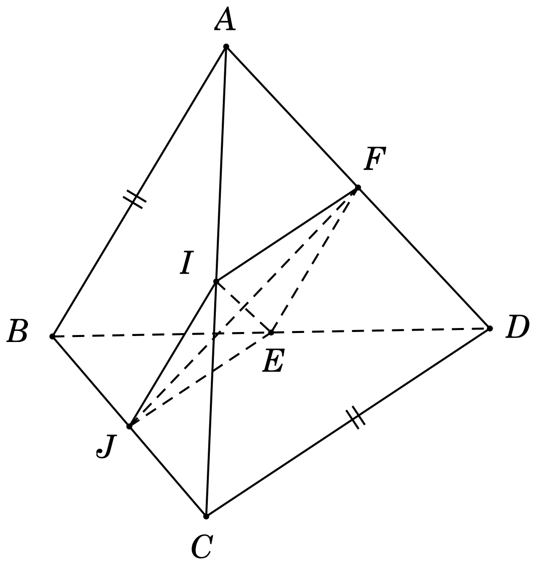
Ta có $(AA',B'D')=(BB',B'D')=\widehat{BB'C}=90^0$. Khẳng định B sai.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có IF là đường trung bình của ΔACD $\Rightarrow \begin{cases} IF // CD \\ IF = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của ΔBCD $\Rightarrow \begin{cases} JE // CD \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF // JE \end{cases}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}AB \\ JE = \frac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB=CD \Rightarrow IJ = JE$.

Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90°$.

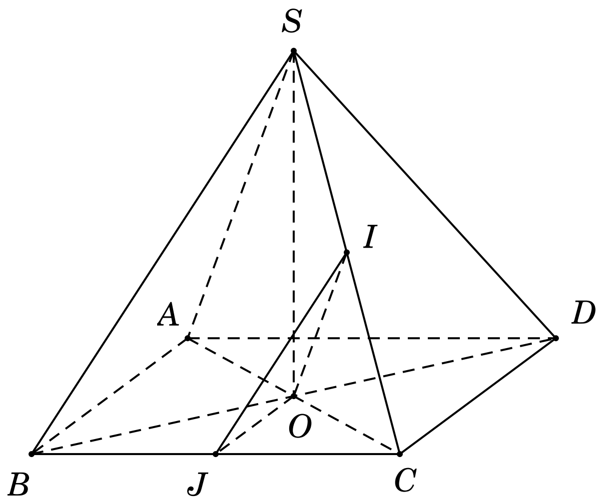
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OJ$ là đường trung bình của ΔBCD.

Suy ra $\begin{cases} OJ // CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Vì $CD // OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta IOJ$ đều.

Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \widehat{IJO} = 60°$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\Delta CBD = \Delta SBD$ $(c-c-c)$.

Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.

Xét tam giác SAC, ta có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$.

Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy). Vậy $SA \perp SC$.

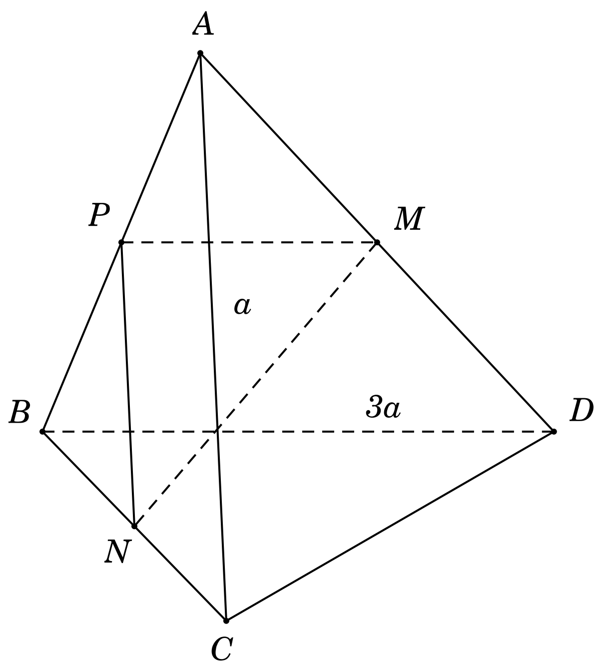
Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

A. $MN=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của AB $\Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔABC và ΔABD. Suy ra $\begin{cases} PN=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2} \\ PM=\frac{1}{2}BD=\frac{3a}{2} \end{cases}$.

Ta có $AC\perp BD\Rightarrow PN\perp PM$ hay tam giác ΔPMN vuông tại P

Do đó $MN=\sqrt{PN^2+PM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{9a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

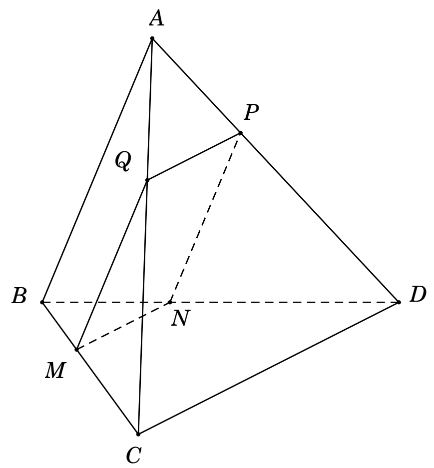
Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN\perp MQ\left(\text{do } AB\perp CD\right)$.

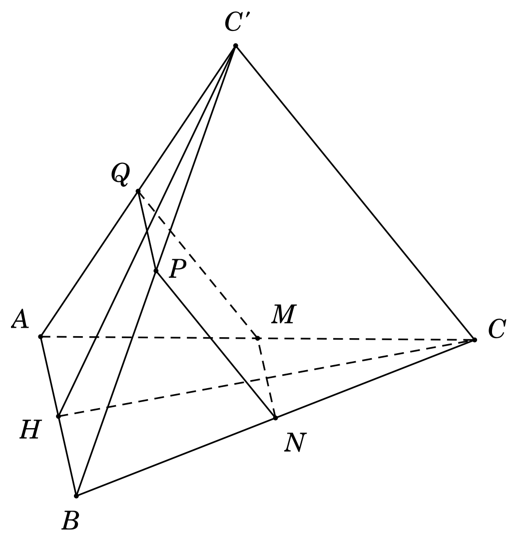
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 12: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC,\ CB,\ BC'$ và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Lời giải

Chọn B



Vì $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC,\ CB,\ BC'$ và $C'A$

$\Rightarrow\begin{cases}PQ=MN=\dfrac{1}{2}AB\\PQ//AB//MN\end{cases}\Rightarrow$ $MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases}CH\perp AB\\C'H\perp AB\end{cases}$.

Suy ra $AB \perp (CHC')$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có $\begin{cases} PQ // AB \\ PN // CC' \Rightarrow PQ \perp PN \\ AB \perp CC' \end{cases}$.

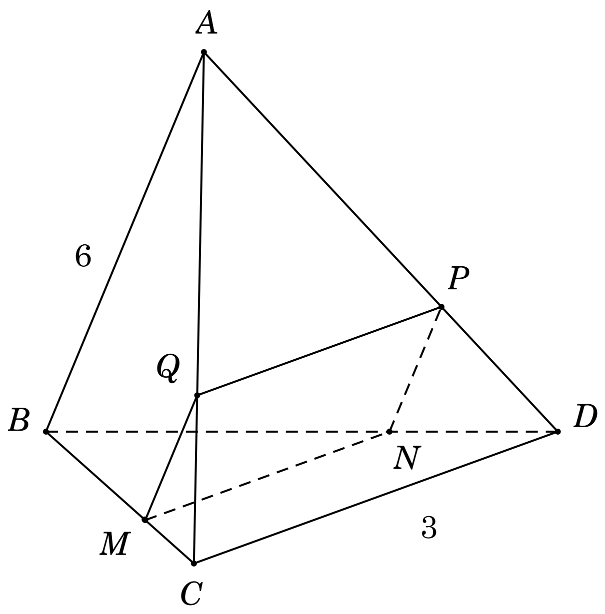
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6,\ CD = 3$, góc giữa AB và CD là $60°$ và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt $BD,\ AD,\ AC$ lần lượt tại $M,\ N,\ Q$. Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} (MNPQ) // AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB.$

Tương tự ta có $MN // CD,\ NP // AB,\ QP // CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right) = \left(\widehat{QM;MP}\right) = 60^0$. Suy ra $S_{MNPQ} = QM.QN.\sin 60^0.$

Ta có $\Delta CMQ \backsim \Delta CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{MQ}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow MQ = 2.$

$\Delta AQN \backsim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{QN}{CD} = \frac{2}{3} \Rightarrow QN = 2.$

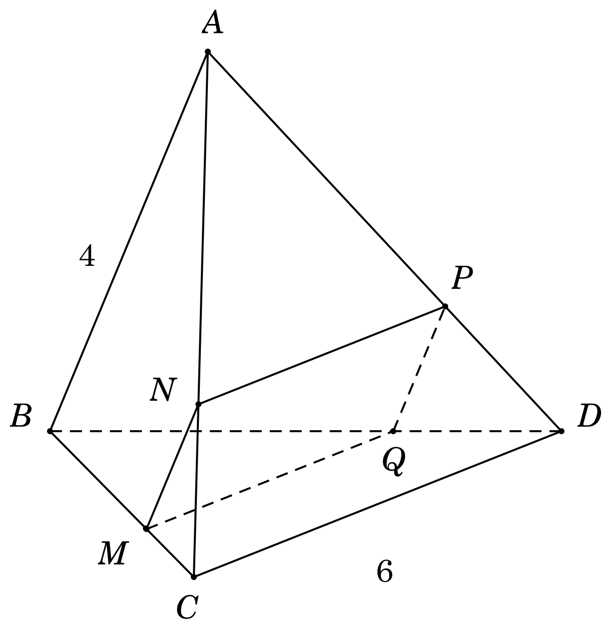
Vậy $S_{MNPQ} = QM.QN.\sin 60^0 = 2.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = 4,\ CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là:

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{17}{3}$. **D.** $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MN\end{cases}\Rightarrow MN//AB.$

Tương tự ta có $MQ//CD,\ NP//CD,\ QP//AB$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{MN;MQ}\right)=\widehat{NMQ}=90^0\Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\Delta CMN \backsim \Delta CBA\Rightarrow\frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN=\frac{4}{3}$;

$\Delta ANP \backsim \Delta ACD\Rightarrow\frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3}\Rightarrow MP=4.$

Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\frac{16}{3}.$

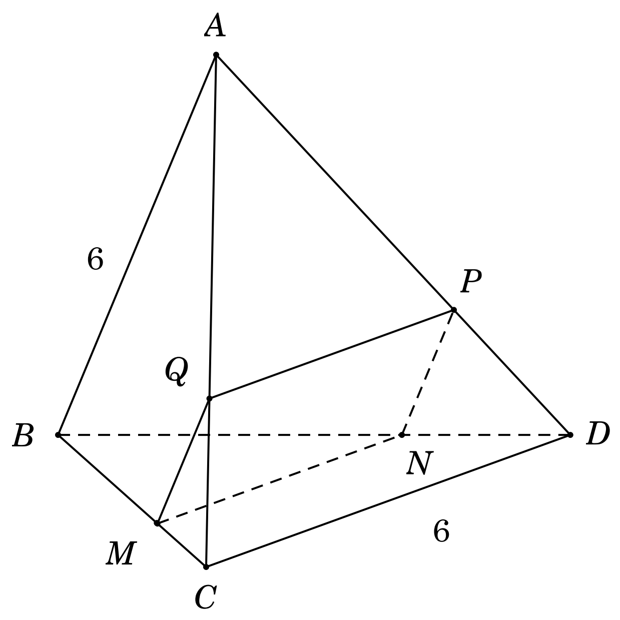
Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $(0<x<1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M,N,P,Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9.$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

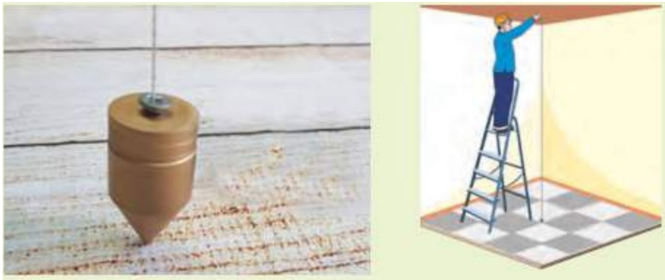
Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Từ khóa: Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng; Phép chiếu vuông góc.

Trong thực tế, người thợ xây dựng thường dùng dây dọi để xác định đường vuông góc với nền nhà. Thế nào là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng?



Lời giải

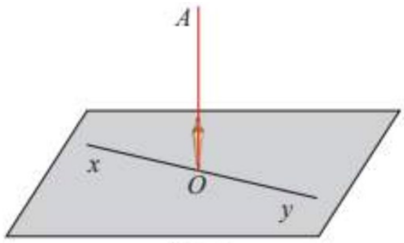
Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Thả một dây dọi AO chạm sàn nhà tại điểm O. Kẻ một đường thẳng xOy bất kì trên sàn nhà.

a) Dùng êke để kiểm tra xem AO có vuông góc với xOy không.

b) Nêu nhận xét về góc giữa dây dọi và một đường thẳng bất kì trong sàn nhà.



Hình 1

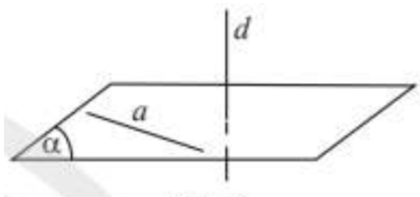
Lời giải

a) $AO \perp xOy$

b) Dây dọi vuông góc với 1 đường thẳng bất kì trong sàn nhà

Định nghĩa

Đường thẳng d gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong (α), kí hiệu $d \perp (\alpha)$



Hình 2

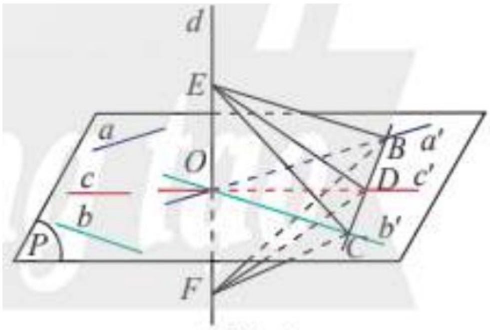
Ví dụ 1. Cho biết cột của trụ gôn của một sân bóng đá là đường thẳng d vuông góc với mặt sân (Hình 3). Tìm góc giữa d và một đường thẳng a kẻ trên sân.

Hình 3

Lời giải

Do đường thẳng d vuông góc với mặt sân nên suy ra d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trên mặt sân. Vậy ta có góc giữa d và a bằng $90°$.

Cho đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b trong mặt phẳng (P). Xét một đường thẳng c bất kì trong (P) (c không song song với a và b). Gọi O là giao điểm của d và (P). Trong (P) vẽ qua O ba đường thẳng a', b', c' lần lượt song song với a, b, c. Vẽ một đường thẳng cắt a', b', c' lần lượt tại B, C, D. Trên d lấy hai điểm E, F sao cho O là trung điểm của EF (Hình 4).



Hình 4

a) Giải thích tại sao hai tam giác CEB và CFB bằng nhau.

b) Có nhận xét gì về tam giác DEF ? Từ đó suy ra góc giữa d và c.

Lời giải

a) Vì a//a', $d \perp a$ nên $d \perp a'$, Hay $EF \perp OB$

Tam giác EBF có $OB \perp EF$; O là trung điểm EF nên tam giác EBF cân tại B. Suy ra BE = BF Tương tự ta chứng minh được CE = CF

Suy ra tam giác CEB bằng tam giác CFB

b) Vì tam giác CEB và CFB bằng nhau nên DE = DF

Nên tam giác DEF cân tại D có DO là trung tuyến nên $DO \perp EF$

Suy ra $d \perp c$

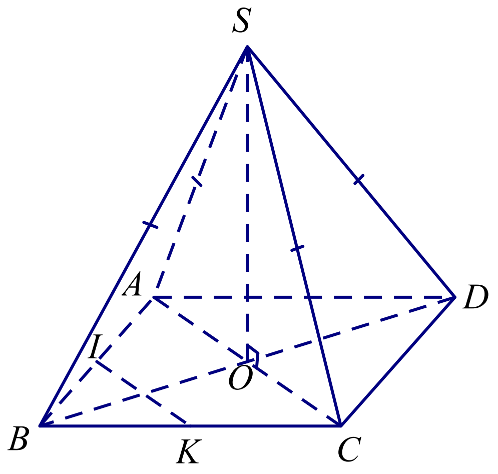
Định lí 1

Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì $d \perp (\alpha)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ tâm O và có $SA = SC, SB = SD$. Cho I, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (ABCD)$ b) $IK \perp (SBD)$.

Giải



Hình 5

a) Ta có $ABCD$ là hình thoi, suy ra AC, BD vuông góc với nhau và có cùng trung điểm O.

Tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$. Tương tự, ta có $SO \perp BD$. Do SO vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau AC và BD trong $(ABCD)$, suy ra $SO \perp (ABCD)$.

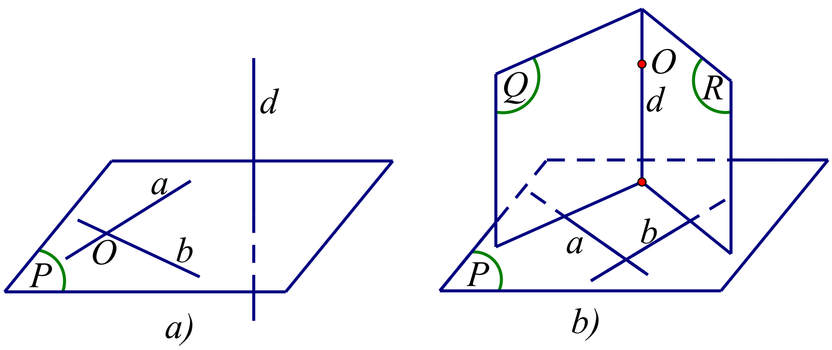
b) Ta có $IK // AC$ và $AC \perp BD$, do đó $IK \perp BD$.

Ta có $SO \perp (ABCD)$, do đó $SO \perp IK$.

Từ $IK \perp BD$ và $IK \perp SO$ suy ra $IK \perp (SBD)$.

3 a) Trong không gian, cho điểm O và đường thẳng d. Gọi a, b là hai đường thẳng phân biệt đi qua O và vuông góc với d (Hình 6a). Có nhận xét gì về vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp(a,b) ?

b) Trong không gian, cho điểm O và mặt phẳng (P). Gọi (Q) và (R) là hai mặt phẳng đi qua O và lần lượt vuông góc với hai đường cắt nhau a, b nằm trong (P) (Hình 6b). Có nhận xét gì về vị trí giữa mặt phẳng (P) và giao tuyến d của $(Q),(R)$?



Hình 6

Lời giải

a) Vì đường thẳng d vuông góc hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) nên $d \perp (P)$

b) Vì $a \perp (Q); d \in (Q)$ nên $a \perp d$

Vì $b \perp (R), d \in (R)$ nên $b \perp d$

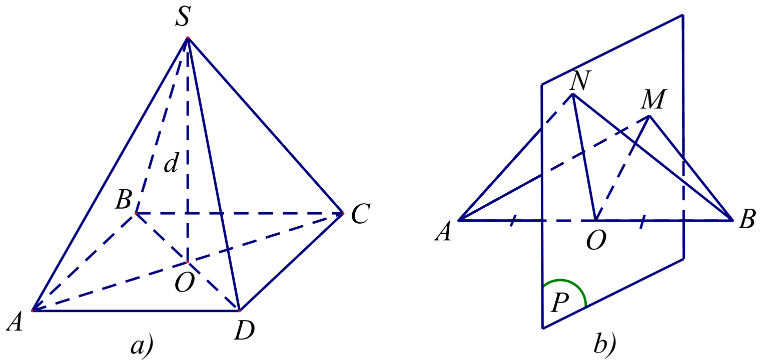
Vì đường thẳng d vuông góc hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) nên $d \perp (P)$

Định lí 2.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Ví dụ 3.a) Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O (Hình 7a). Gọi d là đường thẳng đi qua S và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh d đi qua O.

b) Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với $AB; M, N$ là hai điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB sao cho M, N, O không thẳng hàng (Hình 7b). Chứng minh M và N thuộc mặt phẳng (P).



Hình 7

Lời giải

a) Ta có: $SA = SC$ suy ra $SO \perp AC; SB = SD$ suy ra $SO \perp BD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.

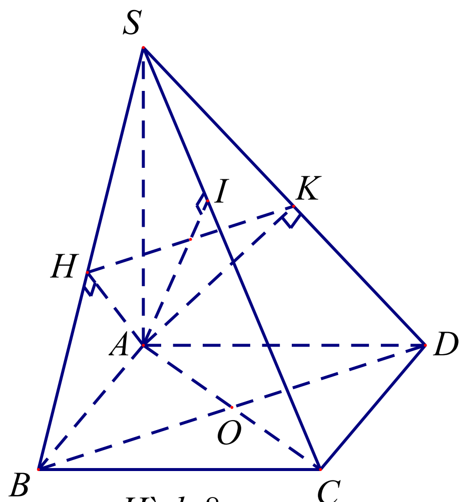
Theo giả thiết, ta có đường thẳng d đi qua S và vuông góc với $(ABCD)$. Do qua điểm S chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ nên d phải trùng với đường thẳng SO, suy ra d di qua O.

b) Ta có: $MA = MB$ suy ra $OM \perp AB; NA = NB$ suy ra $ON \perp AB$. Suy ra $AB \perp (OMN)$.

Theo giả thiết, ta có (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với AB. Do qua điểm O chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với AB nên (P) phải trùng với (OMN), suy ra M và N thuộc (P).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, O là giao điểm của AC và BD, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SC, SD. Chứng minh rằng:

a) $CB \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAD)$; b) $HK \perp AI$.



Hình 8

Lời giải

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC, SA \perp CD$

Ta có CB vuông góc với hai đường thẳng AB và SA cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SAB) nên $CB \perp (SAB)$

Ta có CD vuông góc với hai đường thẳng AD và SA cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SAD) nên $CD \perp (SAD)$

b) Vì $BC \perp (SAB); AH \in (SAB)$ nên $BC \perp AH$

Ta có AH vuông góc với hai đường thẳng SB và BC cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SBC) nên $AH \perp (SBC)$

Mà $SC \in (SBC)$. Suy ra $AH \perp SC$

Vì $CD \perp (SAD); AK \in (SAD)$ nên $CD \perp AK$

Ta có AK vuông góc với hai đường thẳng SD và CD cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SCD) nên $AK \perp (SCD)$

Mà $SC \in (SCD)$. Suy ra $AK \perp SC$

Ta có SC vuông góc với hai đường thẳng AK và AH cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (AHK) nên $SC \perp (AHK)$

Mà $HK \in (AHK)$ nên $SC \perp HK$

vì $SA \perp (ABCD); DB \in (ABCD)$ nên $SA \perp DB$

Mà HK // BD nên $HK \perp SA$

Ta có HK vuông góc với hai đường thẳng SA và SC cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng (SAC) nên $HK \perp (SAC)$

Mà $AI \in (SAC)$ nên $HK \perp AI$

1 Làm thế nào để dựng cột chống một biển báo vuông góc với mặt đất?

Hình 9

Lời giải

Chân cột chống biển báo là hai đường thẳng cắt nhau. Ta dựng cột chống vuông góc với hai đường thẳng đó sẽ được cột chống biển báo vuông góc với mặt đất.

2. Liên hệ giữa tính song song và tính vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Nêu nhận xét về vị trí tương đối của:

a) Hai thân cây cùng mọc vuông góc với mặt đất.

b) Mặt bàn và mặt đất cùng vuông góc với chân bàn.

c) Thanh xà ngang nằm trên trần nhà và mặt sàn nhà cùng vuông góc với cột nhà.

Hình 10

Lời giải

a) Hai thân cây cùng mọc vuông góc với mặt đất song song với nhau

b) Mặt bàn và mặt đất cùng vuông góc với chân bàn song song với nhau

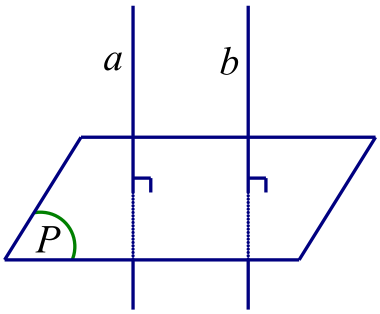
c) Thanh xà ngang nằm trên trần nhà và mặt sàn nhà cùng vuông góc với cột nhà song song với nhau

Người ta chứng minh được các định lí sau về liên hệ giữa tính song song và vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng:

Định lí 3.

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



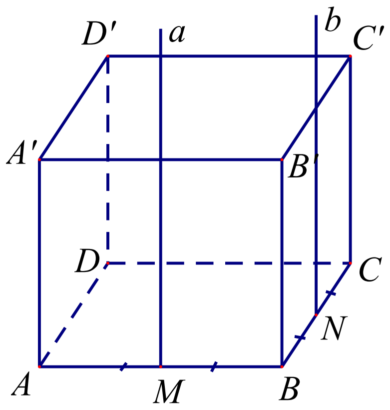
Hình 11

Ví dụ 4. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' \perp (ABCD)$.

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Qua M vẽ đường thẳng a song song với AA'. Chứng minh $a \perp (ABCD)$.

b) Qua N vẽ đường thẳng b vuông góc với $(ABCD)$. Chứng minh $b // AA'$.



Hình 12

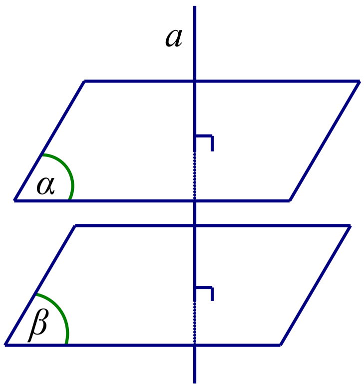
Lời giải

a) Theo đề bài ta có $a//AA'$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $a \perp (ABCD)$.

b) Theo đề bài ta có $b \perp (ABCD)$ và $AA' \perp (ABCD)$, suy ra $b//AA'$.

Định lí 4.

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



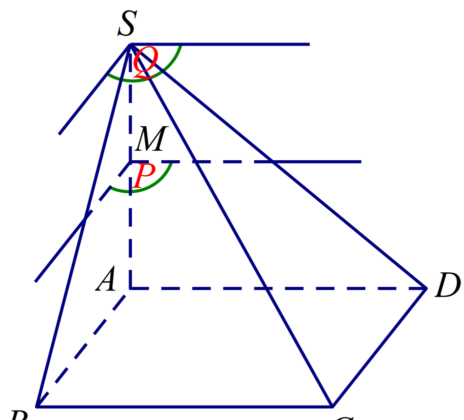
Hình 13

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$.

a) Vẽ mặt phẳng (Q) đi qua S và song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh $SA \perp (Q)$.

b) Cho M là trung điểm của SA. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với $(ABCD)$. Chứng minh $SA \perp (P)$.

Lời giải



Hình 14

a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.
b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$ (1)

và $(Q)//(ABCD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SA \perp (Q)$.

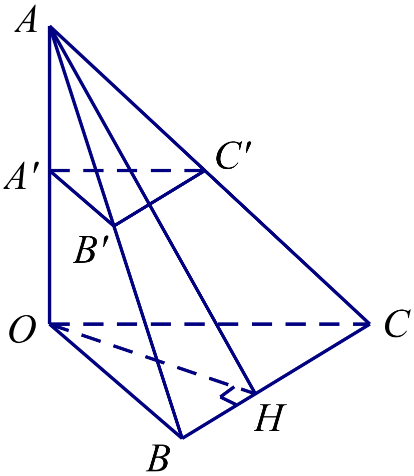
b) Ta có $(P)//(ABCD)$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $SA \perp (P)$.

2 Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) và có A', B', C' lần lượt là trung điểm của OA, AB, AC. Vẽ OH là đường cao của tam giác OBC. Chứng minh rằng:

a) $OA \perp (A'B'C')$;

b) $B'C' \perp (OAH)$.



Hình 15

Lời giải

a) Tam giác AOB có $A'B'$ là đường trung bình nên $A'B'//AB$ hay $A'B'//(OBC)$

Tam giác AOC có $A'C'$ là đường trung bình nên $A'C'//AC$ hay $A'C'//(OBC)$

Suy ra $(A'B'C')//(OBC)$

Mà $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp (A'B'C')$

b) Vì $OA \perp (OBC); BC \in (OBC)$ nên $OA \perp CB$

Ta có đường thẳng BC vuông góc với hai đường thẳng OH và OA cắt nhau cùng thuộc (AOH) nên $BC \perp (OAH)$

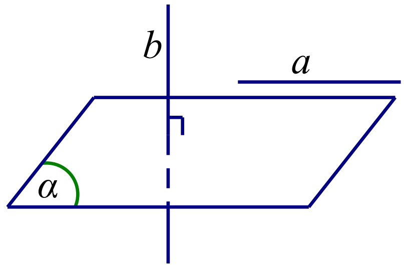
Mà tam giác ABC có $B'C'$ là đường trung bình nên $B'C' // BC$

Suy ra $B'C' \perp (AOH)$

Định lí 5.

a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.

b) Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (α) (không chứa a) cùng vuông góc với một đường thẳng b thì chúng song song với nhau.

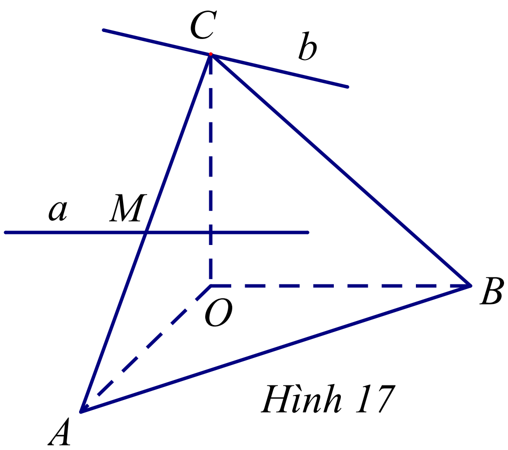


Hình 16

Ví dụ 6. Cho ba đoạn thẳng OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau.

a) Cho M là trung điểm của CA và a là đường thẳng tuỳ ý đi qua M và song song với mặt phẳng (OAB). Chứng minh $a \perp OC$.

b) Gọi b là một đường thẳng tuỳ ý đi qua C và b vuông góc với OC. Chứng minh $b // (OAB)$.



Hình 17

Lời giải

a) Ta có $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$, suy ra $OC \perp (OAB)$. (1)

Ta có $a // (OAB)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a \perp OC$.

b) Ta có $b \perp OC$. (3)

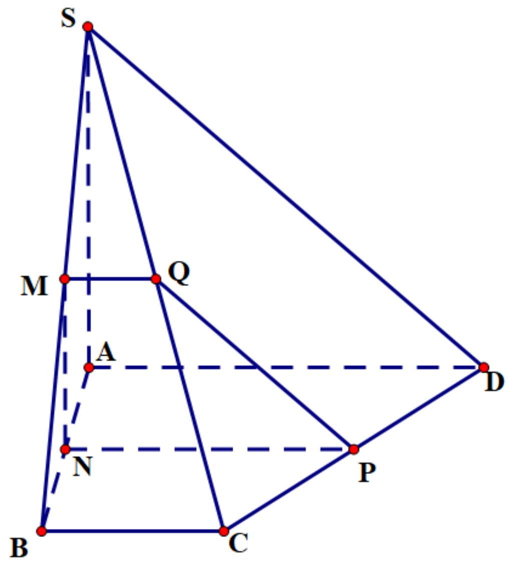
Từ (1) và (3), suy ra $b // (OAB)$.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông với AB là cạnh góc vuông và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Cho M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SB, AB, CD, SC. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp (MNPQ)$;

b) $MQ \perp (SAB)$.

Lời giải



a) Tam giác SAB có MN là đường trung bình nên MN//SA

Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $MN \perp (ABCD)$. Suy ra $MN \perp AB$

Hình thang ABCD có NP là đường trung bình nên NP//BC//AD. Mà $BC \perp AB$ nên $NP \perp AB$

Ta có AB vuông góc với hai đường thẳng MN và NP cắt nhau cùng thuộc (MNPQ) nên $AB \perp (MNPQ)$

b) Vì $AB \perp (MNPQ); MQ \in (MNPQ)$ nên $AB \perp MQ$

Tam giác SBC có MQ là đường trung bình nên MQ//BC. Mà $SA \perp BC$ nên $SA \perp MQ$

Ta có MQ vuông góc với hai đường thẳng SA và AB cắt nhau cùng thuộc (SAB) nên $MQ \perp (SAB)$

Một kệ sách có bốn trụ chống và các ngăn làm bằng các tấm gỗ (Hình 18). Làm thế nào dùng một êke để kiểm tra xem các tấm gỗ có vuông góc với mỗi trụ chống và song song với nhau hay không? Giải thích cách làm.

Hình 18

Lời giải

Ta dùng êke để kiểm tra từng mặt phẳng tấm gỗ có vuông góc với trụ chống không. Nếu có thì các tấm gỗ này song song với nhau

3. Phép chiếu vuông góc

Hai người thợ trong hình đang thả dây dọi từ một điểm M trên trần nhà và đánh dấu điểm M' nơi đầu nhọn quả dọi chạm sàn. Có nhận xét gì về đường thẳng MM' với mặt sàn?

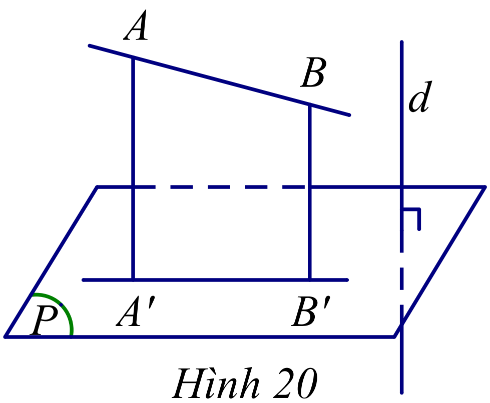
Hình 19

Lời giải

MM' vuông góc với mặt sàn

Định nghĩa

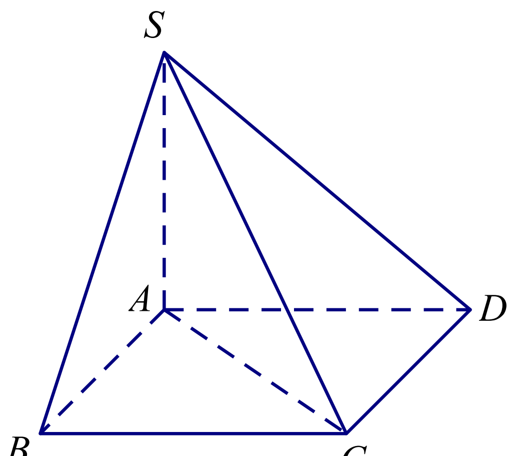
Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng d vuông góc với (P). Phép chiếu song song theo phương của d lên mặt phẳng (P) được gọi là ***phép chiếu vuông góc lên*** (P).



Hình 20

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và $SA \perp (ABCD)$. Tìm hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ và hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (SAB).

Lời giải



Hình 21

Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$.

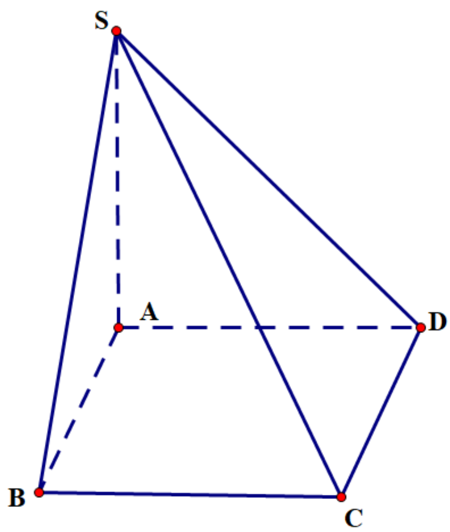
Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ta $SA \perp AD$.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật, suy ra $AB \perp AD$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $AD \perp (SAB)$, suy ra A là hình chiếu vuông góc của điểm D trên (SAB).

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Xác định hình chiếu vuông góc của điểm C, đường thẳng CD và tam giác SCD trên mặt phẳng (SAB).

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AD; SA \perp BC$

Ta có: $CB \perp AB, CB \perp SA$ nên $CB \perp (SAB)$

Vậy hình chiếu vuông góc của C lên (SAB) là điểm B

Ta có: $DA \perp AB, DA \perp SA$ nên $DA \perp (SAB)$

Vậy hình chiếu vuông góc của D lên (SAB) là điểm A

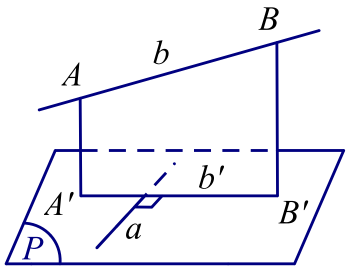
Suy ra hình chiếu vuông góc của CD lên (SAB) là AB; hình chiếu vuông góc của tam giác SCD lên (SAB) là tam giác SAB.

Chú ý: a) Phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên có đầy đủ các tính chất của phép chiếu song song.

b) Người ta còn dùng "phép chiếu lên (P) " thay cho "phép chiếu vuông góc lên (P) " và dủng $(\mathcal{H}')$ là hình chiếu của $(\mathcal{H})$ trên (P) thay cho $(\mathcal{H}')$ là hình chiếu vuông góc của $(\mathcal{H})$ trên (P)

Định lí ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không thuộc (P) và không vuông góc với (P). Lấy hai điểm A,B trên b và gọi A',B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên (P).



Hình 22

a) Xác định hình chiếu b' của b trên (P).

b) Cho a vuông góc với b, nêu nhận xét về vị tri tương đối giữa:

i) đường thẳng a và $\text{mp}(b,b')$;

ii) hai đường thẳng a và b'.

c) Cho a vuông góc với b', nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa:

i) đường thẳng a và $\text{mp}(b,b')$;

ii) giữa hai đường thẳng a và b.

Lời giải

a) Ta có: $AA' \perp (P), BB' \perp (P), A,B \in b$

Vậy hình chiếu vuông góc của đường thẳng b trên mặt phẳng (P) là đường thẳng $A'B'$.

Vậy $b' \equiv A'B'$.

b) Ta có:

$$\left.\begin{array}{r} AA' \perp (P) \Rightarrow AA' \perp a \\ a \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp mp(b,b')$$

$$\left.\begin{array}{l} a \perp mp(b,b') \\ b' \subset mp(b,b') \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp b'$$

c) Ta có:

$$\left.\begin{array}{r} AA'\perp(P)\Rightarrow AA'\perp a \\ a\perp b' \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp mp(b,b')$$

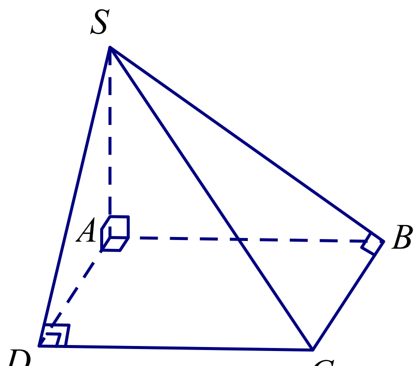
$$\left.\begin{array}{l} a\perp mp(b,b') \\ b\subset mp(b,b') \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp b$$

Định lí 6.

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P). Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P). Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b'.

Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $ABCD$ và có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Chứng minh $CD\perp SD$ và $CB\perp SB$.

Lời giải

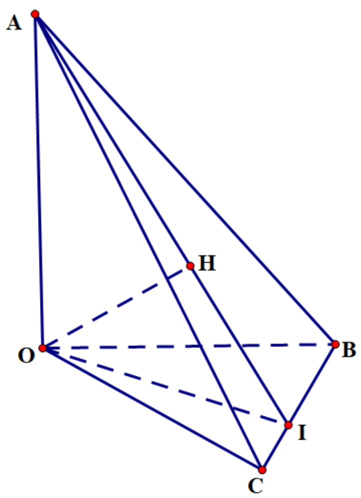


Hình 23

Ta có $SA\perp(ABCD)$, suy ra DA là hình chiếu vuông góc của DS trên $(ABCD)$ và BA là hình chiếu vuông góc của BS trên $(ABCD)$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD\perp DA$, suy ra theo định lí ba đường vuông góc ta có $CD\perp SD$.
Tương tự ta cũng có $CB\perp AB$, suy ra theo định lí ba đường vuông góc ta có $CB\perp SB$.

Thực hành 5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Vẽ đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC) tại H. Chứng minh $AH\perp BC$.

Lời giải



Vì $OA \perp OB, OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$. Suy ra $OA \perp BC$,$OH \perp (ABC); BC \in (OBC)$ nên $BC \perp OH$

Ta có BC vuông góc với hai đường thẳng AH và OA cắt nhau cùng thuộc (OAH) nên $BC \perp (OAH)$

Suy ra $BC \perp AH$

Vận dụng 3. Nêu cách tìm hình chiếu vuông góc của một đoạn thẳng AB trên trần nhà xuống nền nhà bằng hai dây dọi.

Lời giải

Thả dây dọi từ điểm A và đánh dấu điểm A' nơi đầu quả dọi chạm sàn.
Thả dây dọi từ điểm B và đánh dấu điểm B' nơi đầu quả dọi chạm sàn.
Khi đó đoạn thẳng $A'B'$ là hình chiếu vuông góc của một đoạn thẳng AB trên trần nhà xuống nền nhà.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

- d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).
- d song song với đường thẳng a mà a vuông góc với (P).

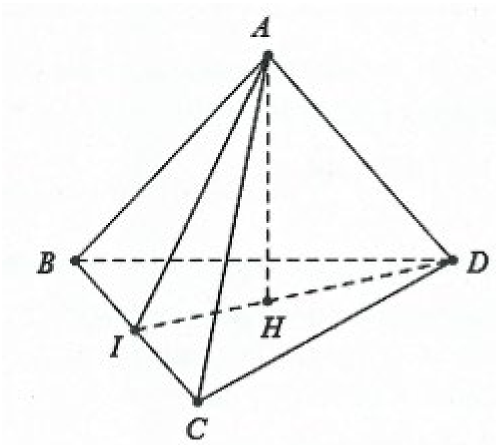
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC. Điểm I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$

Lời giải



a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác cân nên tại A và D ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (BCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$.

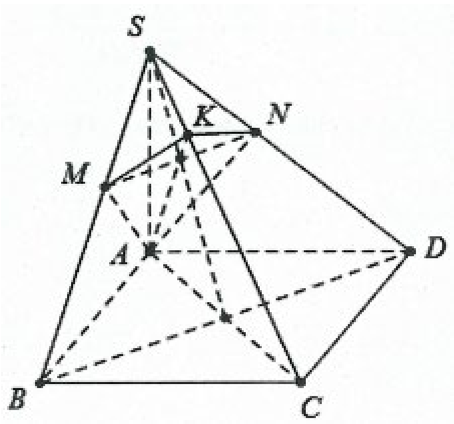
d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.



Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$.
Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \,//\, BD$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $MN \,//\, BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

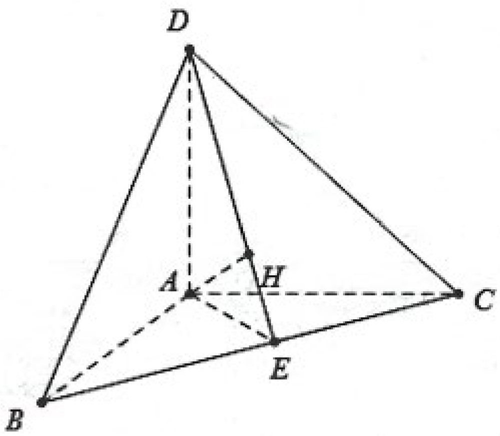
a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH \perp (BCD)$.



Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$.

Mặt khác $AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH \perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD.

b) Gọi $E = DH \cap BC$, do $BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp AE$.

Xét ΔABC vuông tại A có đường cao AE ta có:

$\dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB = x;\ AC = y$ và $AD = z$. Ta có: $\begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ BD = \sqrt{x^2 + z^2} \\ CD = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$

Khi đó $\cos B = \dfrac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2.BC.BD} = \dfrac{x^2}{BC.BD} > 0 \Rightarrow \widehat{CBD} < 90^\circ$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \widehat{BDC} < 90^\circ \\ \widehat{BCD} < 90^\circ \end{cases} \Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC \perp (BHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

Lời giải

a) Giả sử $AH \perp BC$ tại M.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M.

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$

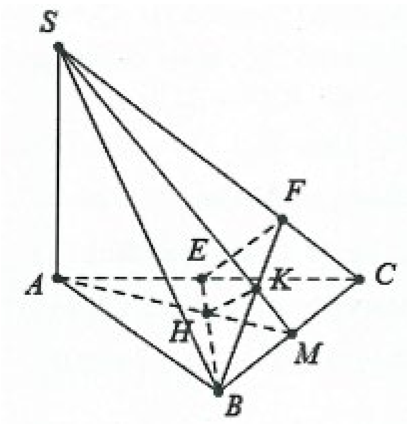
Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$, mặt khác

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SBC)$.



Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC. Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$.

Lời giải

a) Do $SA = AC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S có trung tuyến SO đồng thời là đường cao suy ra $SO \perp AC$.

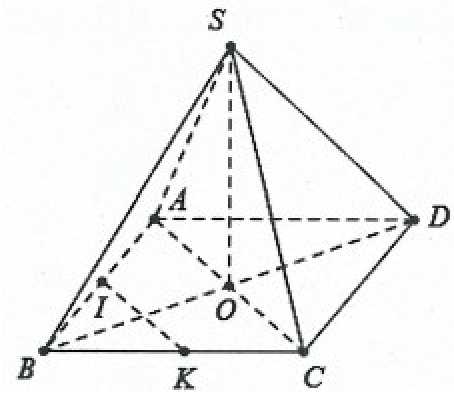
Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$.

IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên $IK // AC$ mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$.



Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ, suy ra tam giác SIJ vuông.

b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$; $SJ \perp (SAB)$.

c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ, chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải

a) Ta có: ΔSAB đều cạnh a nên $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tứ giác $IBCJ$ là hình chữ nhật nên $IJ = BC = a$.

ΔSCD là tam giác vuông cân đỉnh $S \Rightarrow SJ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S.

b) Do ΔSCD cân tại S nên $SJ \perp CD$

Do $AB // CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

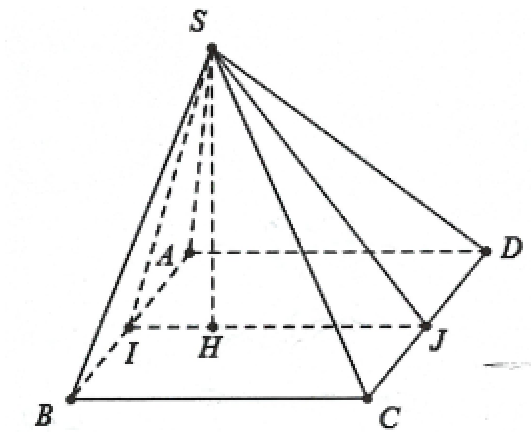
Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.



Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC. Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$, chứng minh $MN \perp (ABC)$.

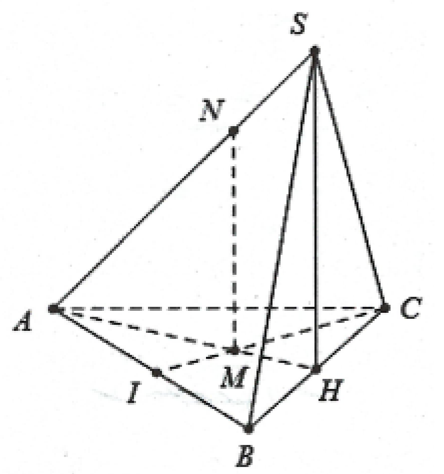
Lời giải

Do điểm M thuộc đường trung tuyến CI và $MC = 2MI$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow M = AH \cap CI$.

Ta có: $\frac{NA}{NS} = \frac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \,//\, SH$.

Mặt khác $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.



Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia

1. Phương pháp giải:

- Muốn chứng minh đường thẳng *a* vuông góc với đường thẳng *b*, ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng *b* sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.
- Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều *ABCD*. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

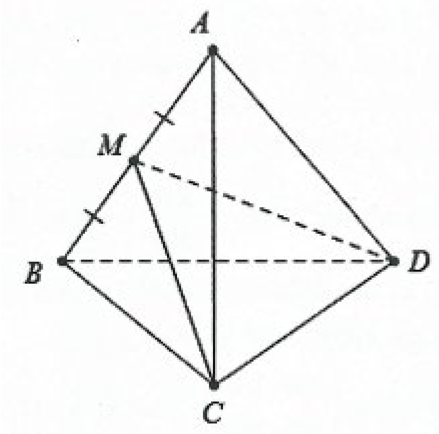
Lời giải

Gọi M là trung điểm của AB.

Tứ diện $ABCD$ đều nên ΔABD và ΔABC là các tam giác đều suy ra $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$.

Do đó $AB \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$.



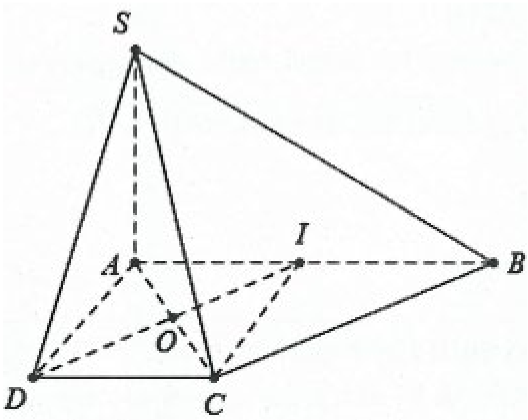
Ví dụ 2. Hình chóp *S.ABCD* có cạnh *SA* vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D* với $AD = CD = \frac{AB}{2}$.

a) Gọi *I* là trung điểm của đoạn *AB*, chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp *S.ABCD* là các tam giác vuông.

Lời giải

a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$.



Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

Khi đó $AICD$ là hình vuông cạnh a.

Do $CI \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.

b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAD, \Delta SAB$ vuông tại S.

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên ΔSCD vuông tại D.

Xét ΔACD có trung tuyến $CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta SCB$ vuông tại C.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

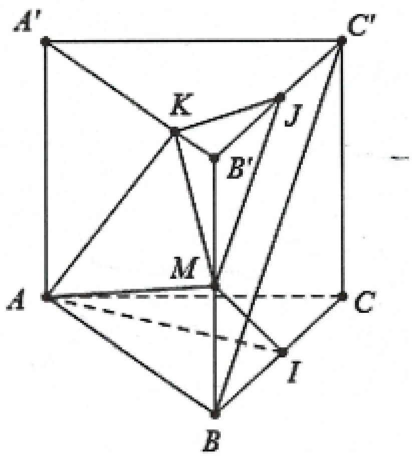
b) Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng: $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải

a) Do ΔABC là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.



b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI \parallel B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

c) Ta có: $\tan \widehat{KMB'} = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}; \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{BM} = 2$

Suy ra $\tan \widehat{KMB'} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{KMB'} + \widehat{AMB} = 90°$.

Do đó $\widehat{AMK} = 90° \Rightarrow AM \perp MK$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \parallel BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$.

Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$.

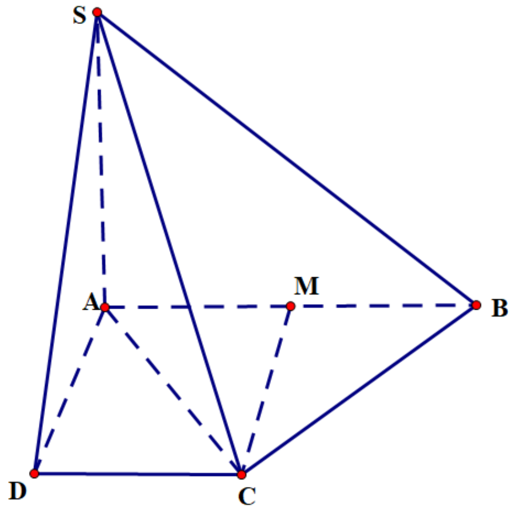
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AB = 2AD$

a) Chứng minh $CD \perp (SAD)$.

b) Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $CM \perp (SAB)$.

Lời giải



a) Vì $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp CD$

Ta có: $DC\perp AD; DC\perp SA$ nên $DC\perp(SAD)$

b) Vì $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp CM$

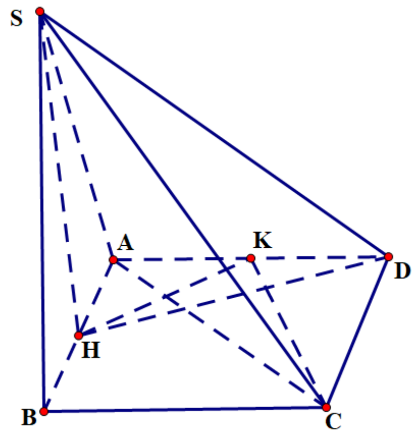
Ta có: $\mathrm{AB}=2\mathrm{CD}$ nên $\mathrm{AM}=\mathrm{CD}$. Suy ra AMCD là hình chữ nhật nên $CM\perp AB$
Mà $CM\perp SA$
Suy ra: $CM\perp(SAB)$

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD. Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại H, lấy điểm S. Chứng minh rằng:

a) $AC\perp(SHK)$;

b) $CK\perp(SDH)$.

Lời giải



a) Tam giác ABD có HK là đường trung bình nên $\mathrm{HK}//\mathrm{BD}$
Vì ABCD là hình vuông nên $AC\perp BD$. Suy ra $AC\perp HK$ Vì $SH\perp(ABCD)$ nên $SH\perp AC$ Ta có:
$AC\perp SH, AC\perp HK$ nên $AC\perp(SHK)$

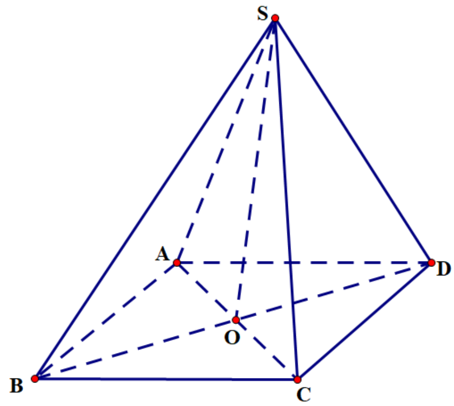
b) Ta có tam giác AHD và tam giác DKC bằng nhau nên $\mathrm{DH}\perp\mathrm{CK}$ Mà $SH\perp(ABCD)$ nên $SH\perp CK$
Suy ra $CK\perp(SDH)$

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$, có các cạnh bên đều bằng $2a$.

a) Tính góc giữa SC và AB .

b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SAB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



a) $AB//CD$ nên góc giữa SC và AB là góc giữa SC và CD : $\widehat{SCD}$

$$\cos\widehat{SCD}=\frac{(2a)^2+a^2-(2a)^2}{2.2a\cdot a}=\frac{1}{4}$$

Suy ra $\widehat{SCD}=75,5^\circ$

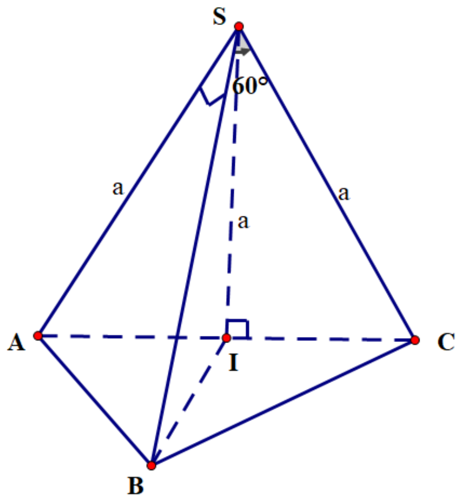
b) Kẻ $SO\perp(ABCD)$. Do các cạnh bên của hình chóp bằng nhau nên O là tâm của hình vuông ABCD.

Ta có: $AO\perp OB; AC=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot a=2a; AO=BO=\frac{1}{2}\cdot 2a=a$

Hình chiếu vuông góc của tam giác SAB là tam giác OAB có diện tích là $\frac{1}{2}\cdot a\cdot a=\frac{1}{2}\cdot a^2$

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=a$, $\widehat{ASB}=90^\circ$, $\widehat{BSC}=60^\circ$ và $\widehat{ASC}=120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC. Chứng minh $SI\perp(ABC)$.

Lời giải



Tam giác SAB vuông tại S

có: $AB=\sqrt{SA^2+SB^2}=a\sqrt{2}$

Tam giác SBC có: $SB=SC=a, \widehat{BSC}=60^\circ$ nên tam giác SBC đều. Suy ra $BC=a$

Tam giác SAC có: $AC=\sqrt{SA^2+SC^2-2SA\cdot SC\cdot\cos\widehat{ASC}}=a\sqrt{3}$

Tam giác ABC có $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B

Mà I là trung điểm AC nên $BI=\dfrac{AC}{2}=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAC cân cạnh a có SI là trung tuyến nên $SI\perp AC$

Suy ra: $SI=\sqrt{SA^2-AI^2}=\dfrac{a}{2}$

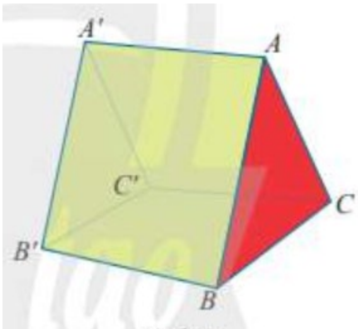
Tam giác SIB có $SI^2+IB^2=SB^2$ nên tam giác SIB vuông tại I.

Ta có: $SI\perp IB; SI\perp AC$ nên $SI\perp(ABC)$

Bài 5. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình 24). Cho biết $AB=AC=2,4m; BC=2m; AA'=3m$.

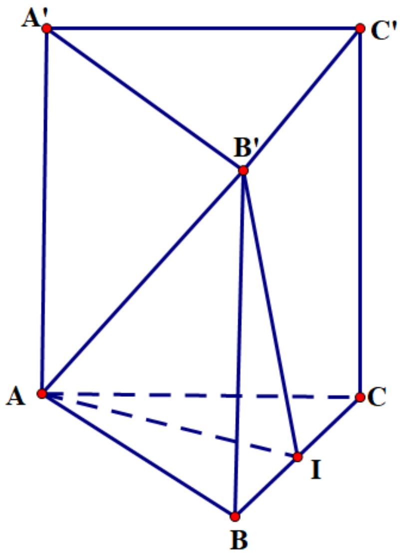
a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC ; $A'B'$ và AC.

b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.



Hình 24

Lời giải



a) Ta có: $AA'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\perp BC\Rightarrow(AA',BC)=90^\circ$

$A'B'\parallel AB\Rightarrow(A'B',AC)=(AB,AC)=\widehat{BAC}$

Xét tam giác ABC có:

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{47}{72} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 49^\circ 15'$

Vậy $(A'B', AC) \approx 49^\circ 15'$.

b) Gọi I là trung điểm của BC

Tam giác ABC cân tại $A \Rightarrow AI \perp BC$

$\left.\begin{array}{r} AA' \perp (ABC) \\ BB' \parallel AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AI$

$\Rightarrow AI \perp (BB'C'C)$

$\Rightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(BB'C'C)$

Có $B, B' \in (BB'C'C)$

Vậy $\Delta IBB'$ là hình chiếu vuông góc của $\Delta ABB'$ trên mặt phẳng $(BB'C'C)$

Ta có: $BB' = AA' = 3, BI = \dfrac{1}{2}BC = 1 \Rightarrow S_{\Delta IBB'} = \dfrac{1}{2}BB'.BI = 1,5\left(m^2\right)$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

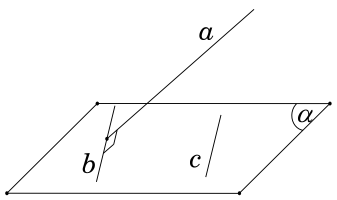
B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \,//\, (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề **C** sai vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α). Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α).

Câu 2: Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P).

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P).(Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

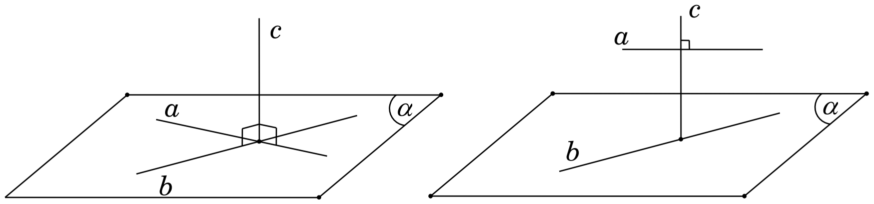
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải

Chọn B



Mệnh đề ở câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

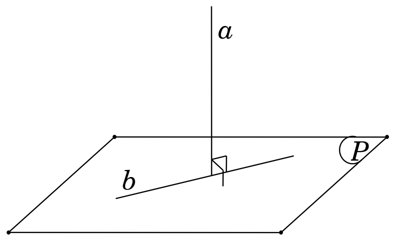
Câu 4: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$. **B.** Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$. **D.** Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$.

Lời giải

Chọn D



`Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu 5: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

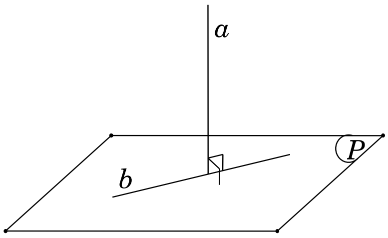
A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **B.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$. **D.** Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

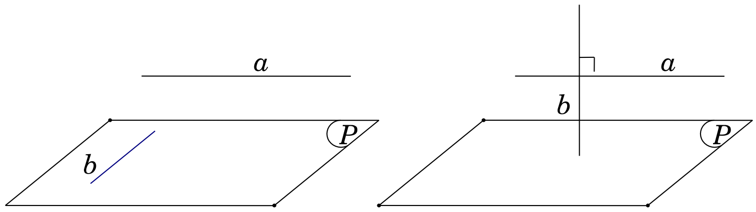
Lời giải

Chọn B

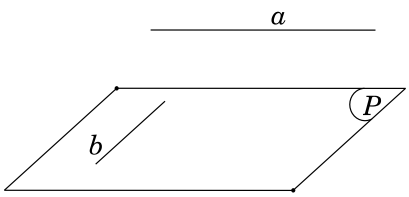
Mệnh đề A sai vì b có thể nằm trong (P).



Mệnh đề C sai vì b có thể cắt (P) hoặc b nằm trong (P).



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).



Câu 6: Cho a, b, c là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \,//\, c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b \,//\, (\alpha)$ thì $a \perp b$.

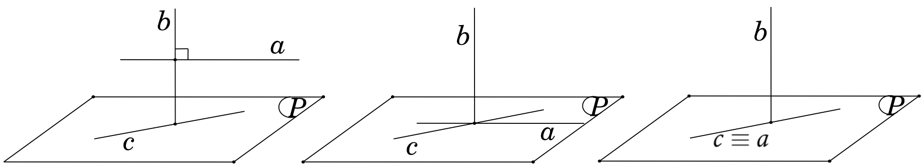
C. Nếu $a \,//\, b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.

D. Nếu $a \perp b$, $b \perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a, c).

Lời giải

Chọn D

Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \,//\, c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c.



Câu 7: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

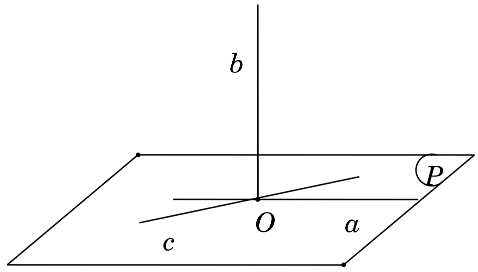
B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề C sai vì qua một điểm O cho trước có **vô số** đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

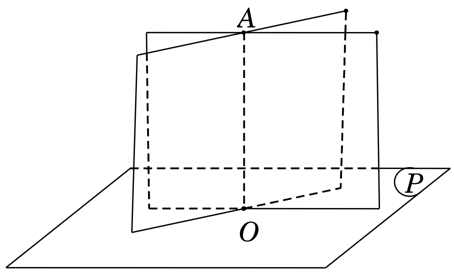
B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D



Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

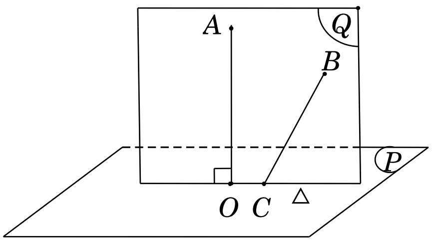
C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

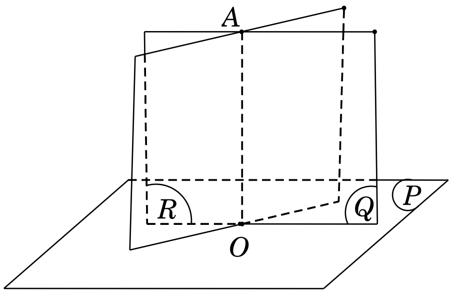
Lời giải

Chọn D

Mệnh đề A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.



Mệnh đề B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.



Mệnh đề C sai vì đường thẳng AB có thể không vuông góc với giao tuyến.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề B sai vì hai góc này phụ nhau.

Mệnh đề C sai vì (P) có thể trùng (Q).

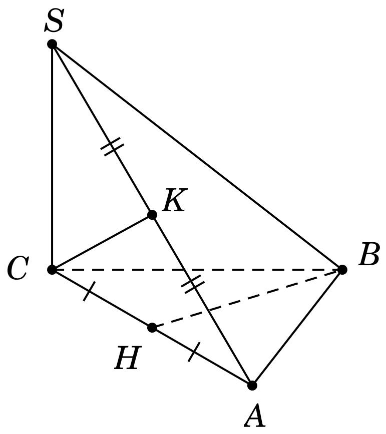
Mệnh đề D sai vì a có thể trùng b.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $CH \perp AK$. **B.** $CH \perp SB$. **C.** $CH \perp SA$. **D.** $AK \perp SB$.

Lời giải

Chọn D



Vì H là trung điểm của AB, tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$ mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB) \longrightarrow CH$ vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK.

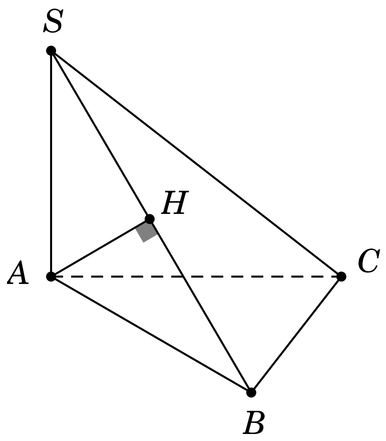
Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B, có $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

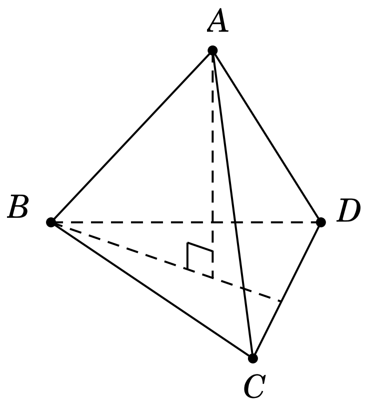
Nếu $AH \perp AC$ mà $SA \perp AC$ suy ra $AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $CD \perp BD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB = CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải

Chọn D



Vì AH vuông góc với $mp(BCD)$ suy ra $AH \perp CD$. (1)

Mà H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD$. (2)

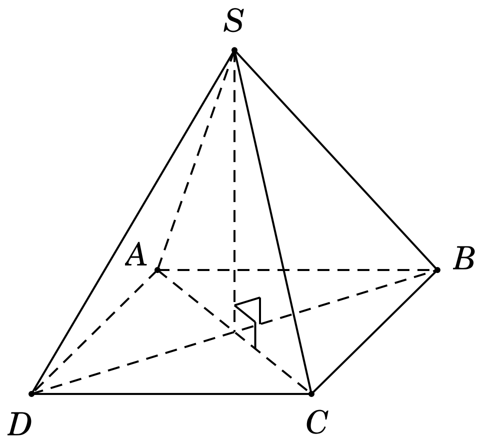
Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết rằng $SA = SC$, $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp (SAC)$. **B.** $CD \perp AC$. **C.** $SO \perp (ABCD)$. **D.** $CD \perp (SBD)$.

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S mà O là trung điểm $AC \Rightarrow SO \perp AC$.

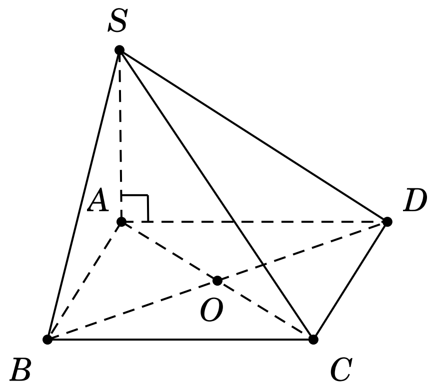
Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$ mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $SA \perp BD$. **B.** $SC \perp BD$. **C.** $SO \perp BD$. **D.** $AD \perp SC$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với $mp\left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp BD.$

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow AC \perp BD$ nên suy ra $BD \perp \left(SAC\right)$.

Mặt khác $SO \subset \left(SAC\right)$ và $SC \subset \left(SAC\right)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}$.

Và $AD,\ SC$ là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Đường thẳng SA cuông góc với mặt đáy $\left(ABCD\right)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $IO \perp \left(ABCD\right)$.

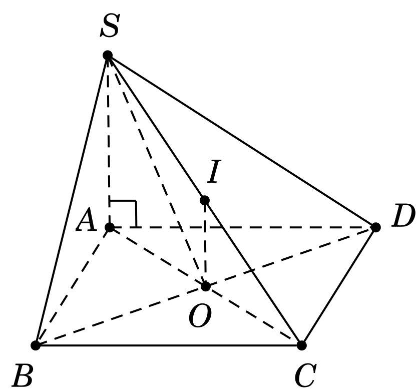
B. $BC \perp SB$.

C. Tam giác SCD vuông ở D.

D. $\left(SAC\right)$ là mặt phẳng trung trực của BD.

Lời giải

Chọn D



Vì O, I lần lượt là trung điểm của AC, SC suy ra OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow$ $OI\ //\ SA$ mà $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow OI \perp \left(ABCD\right)$.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$ mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB$.

Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \quad \left(SA \perp \left(ABCD\right)\right) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD.$

Nếu $\left(SAC\right)$ là mặt phẳng trung trực của $BD \longrightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

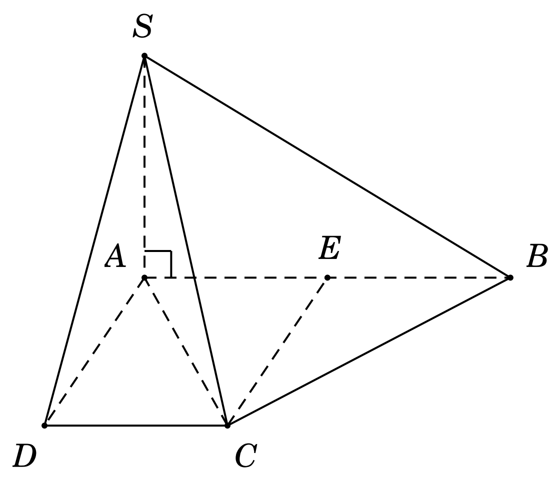
Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD = CD = a$, $AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $CE \perp (SAB)$. **B.** $CB \perp (SAC)$.

C. Tam giác SDC vuông tại D. **D.** $CE \perp (SDC)$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} CE \perp AB \\ CE = AD = a \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} CE \perp AB \\ CE \perp SA \ (\text{do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAB)$. Do đó A đúng.

Vì $CE = AD = a \Rightarrow CE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại $C \Rightarrow CB \perp AB$. Kết hợp với $CB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên suy ra $CB \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \ (\text{do } SA \perp ABCD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$. Do đó C đúng.

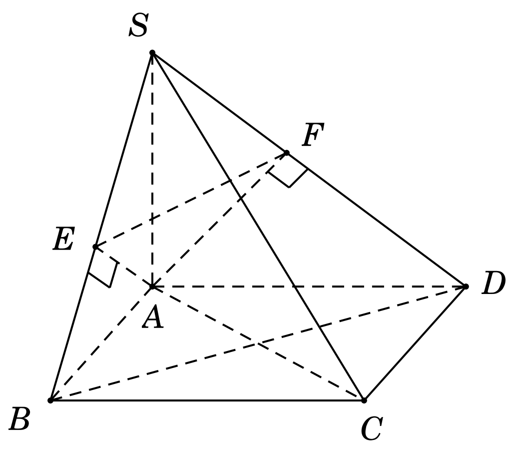
Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D là đáp án sai.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

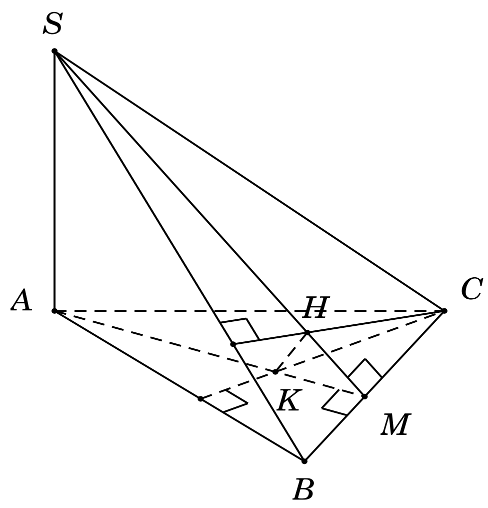
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 19: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $SB \perp (CHK)$. **C.** $HK \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



● Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó A đúng.

● Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Mặt khác có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$. Do đó B đúng.

● Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó C đúng.

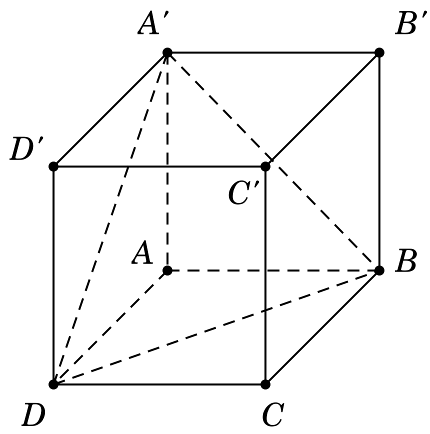
Dùng phương pháp lại trừ, suy ra D sai.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D$. (1)

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D$. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ mà $AA' \perp BD$ $(AA' \perp (ABCD))$

$\Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

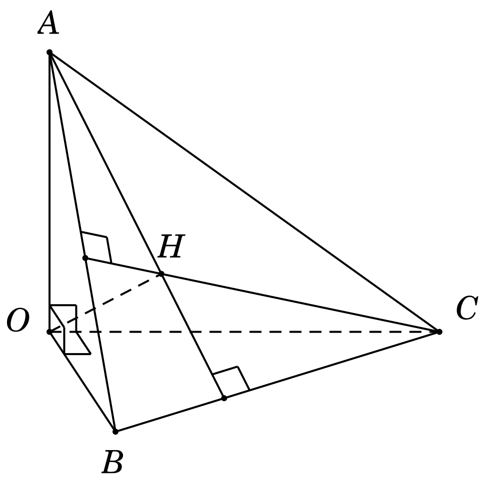
Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $OA \perp BC$. **B.** $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm ΔABC. **D.** $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Lời giải

Chọn D



- $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. Do đó A đúng. (1)
- Gọi $I = AH \cap BC$.

Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI$.

Tam giác vuông BOC, ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Tam giác vuông AOI, ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Do đó B đúng.

- Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$. (3)

Gọi $J = BH \cap AC$. Chứng minh tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm ΔABC. Do đó C đúng.

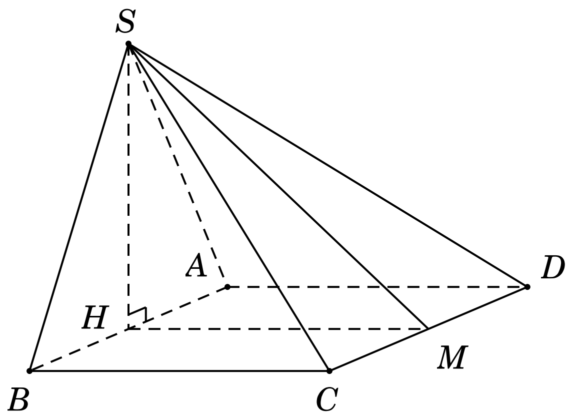
Vậy D là đáp án sai.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = a^2\sqrt{3}$. **D.** $S = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Suy ra:

- $SH \subset (\alpha)$.
- $SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM \perp AB$ $(M \in CD) \Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H.

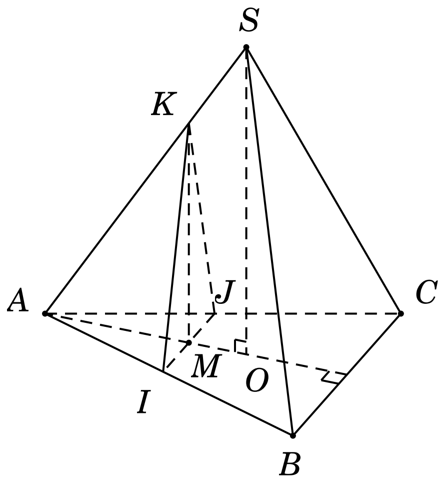
Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = BC = 2a$. Vậy $S_{\Delta SHM} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO $(M \neq A; M \neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S = 2a^2$. **B.** $S = 2x^2$. **C.** $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \parallel (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \parallel (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \parallel BC$ với $I \in AB, J \in AC$; kẻ $MK \parallel SO$ với $K \in SA$.

Khi đó thiết diện là tam giác KIJ.

Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} IJ.MK$.

Trong tam giác ABC, ta có $\frac{IJ}{BC} = \frac{AM}{AA'}$ suy ra $IJ = \frac{AM.BC}{AA'} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO, ta có $\frac{MK}{SO} = \frac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \frac{AM.SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{\Delta IJK} = \frac{1}{2} \frac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3} = 2x^2$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

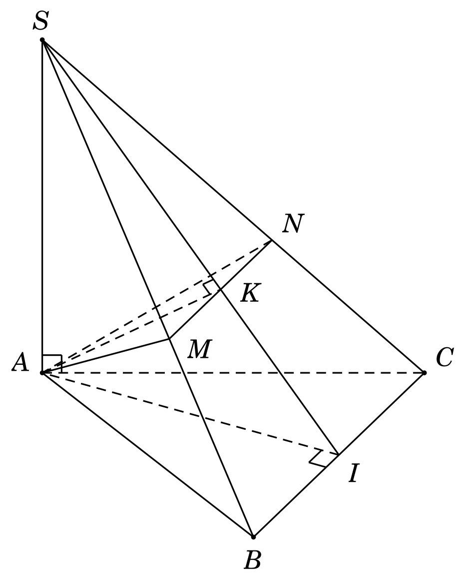
B. $S_{\Delta AMN} = \frac{4a^2\sqrt{21}}{49}$.

C. $S_{\Delta AMN} = \frac{a^2\sqrt{21}}{7}$.

D. $S_{\Delta AMN} = \frac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI \quad (K \in SI)$.

Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N.

Khi đó thiết diện là tam giác AMN.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK.$

Tam giác vuông SAI, có $AK = \dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC, có $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{SK}{SI} = \dfrac{SA^2}{SI^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow MN = \dfrac{4a}{7}$.

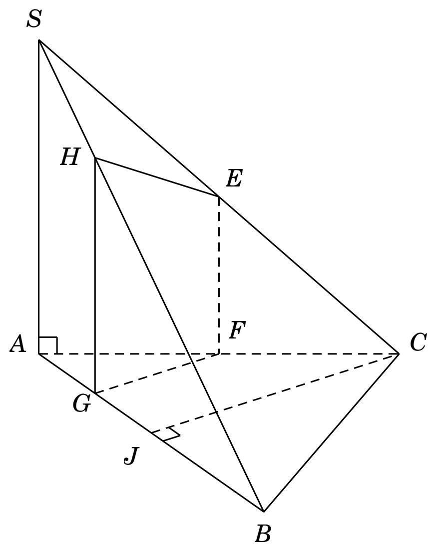
Vậy $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2} AK.MN = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{16}$. **B.** $S_{EFGH} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$. **C.** $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. **D.** $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi F là trung điểm AC, suy ra $EF\,//\,SA$.

Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AB$ nên $EF\perp AB$. (1)

Gọi J, G lần lượt là trung điểm AB, AG.

Suy ra $CJ\perp AB$ và $FG\,//\,CJ$ nên $FG\perp AB$. (2)

Trong ΔSAB kẻ $GH\,//\,SA$ $(H\in SB)$, suy ra $GH\perp AB$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

Do đó $S_{EFGH}=\frac{1}{2}(EF+GH).FG$.

Ta có $EF=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2}$; $FG=\frac{1}{2}CJ=\frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{GH}{SA}=\frac{BG}{BA}\Rightarrow GH=BG=\frac{3a}{4}$.

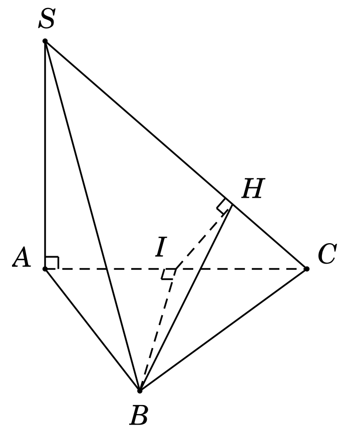
Vậy $S_{EFGH}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{4}\right).\frac{a\sqrt{3}}{4}=\frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta BIH}=\frac{a^2\sqrt{15}}{10}$. **B.** $S_{\Delta BIH}=\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **C.** $S_{\Delta BIH}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $S_{\Delta BIH}=\frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC, suy ra $BI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$. (1)

Kẻ $IH \perp SC$ $(H \in SC)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH.

Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS, suy ra

$\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \frac{CI.SA}{CS} = \frac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

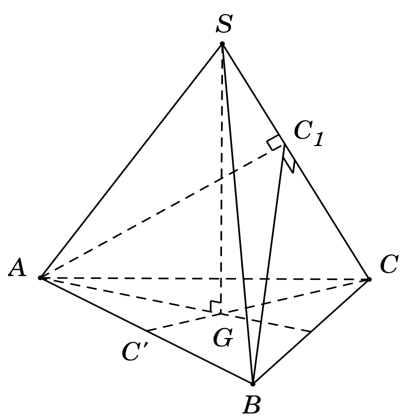
Vậy $S_{\Delta BIH} = \frac{1}{2}BI.IH = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a > b\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{3}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi C' là trung điểm AB. Suy ra C, C', G thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC$. (1)

Trong tam giác SAC, kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC.

Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^0$.

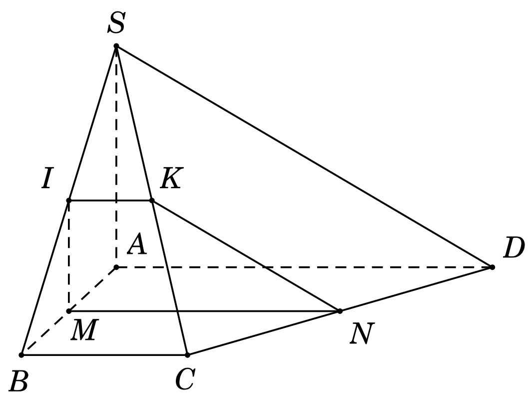
Suy ra $\cos\widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \rightarrow a < b\sqrt{2}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C



Do $(P) \perp AB \Rightarrow (P) // SA$.

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI // SA \Rightarrow MI \subset (P)$.

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P)$.

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK // BC$, mà $MN // BC \Rightarrow MN // IK \Rightarrow IK \subset (P)$.

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M.

Ta có:

MI là đường trung bình của tam giác SAB $\Rightarrow MI = \frac{1}{2}SA = 3$.

IK là đường trung bình của tam giác SBC $\Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC = 3$.

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7$.

Vậy $S_{MNKI} = \frac{IK + MN}{2}.MI = 15$.

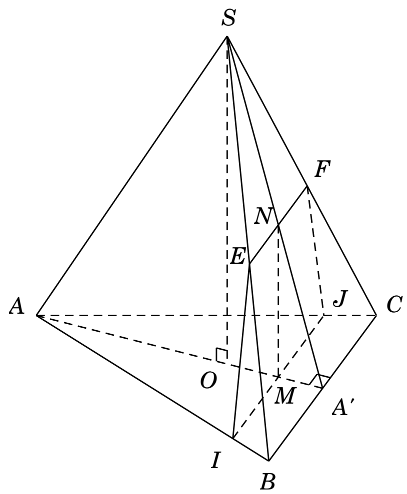
Câu 29: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O, đường cao AA'; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' $(M \neq A'; M \neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{IJEF}=-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$. **B.** $S_{IJEF}=2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$.

C. $S=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S=2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn A



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO\perp AA'$ mà $(\alpha)\perp AA'$ suy ra $SO\,//\,(\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC\,//\,(\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ\,//\,BC$ với $I\in AB,\ J\in AC$; kẻ $MN\,//\,SO$ với $N\in SA'$.

Qua N kẻ $EF\,//\,BC$ với $E\in SB,\ F\in SC$.

Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.

Diện tích hình thang $S_{IJEF}=\frac{1}{2}(IJ+EF)MN$.

Tam giác ABC, có $\frac{IJ}{BC}=\frac{AM}{AA'}\Rightarrow IJ=\frac{AM.BC}{AA'}=\frac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SBC, có $\frac{EF}{BC}=\frac{SN}{SA'}=\frac{OM}{OA'}\Rightarrow EF=\frac{OM.BC}{OA'}=2\left(x\sqrt{3}-a\right)$.

Tam giác SOA', có $\frac{MN}{SO}=\frac{MA'}{OA'}\Rightarrow MN=\frac{SO.MA'}{OA'}=2\left(3a-2x\sqrt{3}\right)$.

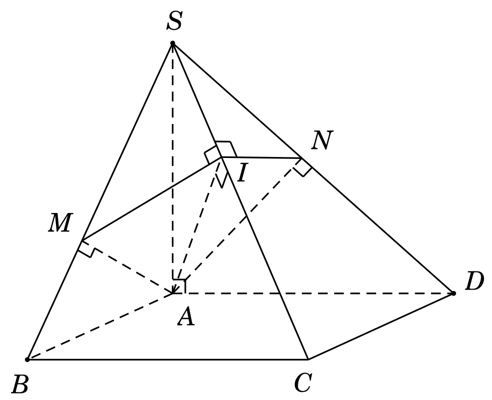
Vậy $S_{IJEF}=\frac{2}{3}\left(4x\sqrt{3}-3a\right)\left(3a-2x\sqrt{3}\right)=-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{AMIN}=\frac{a^2\sqrt{6}}{7}$. **B.** $S_{AMIN}=\frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$. **C.** $S_{AMIN}=\frac{6a^2\sqrt{6}}{35}$. **D.** $S_{AMIN}=\frac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác SAC, kẻ $AI \perp SC \ (I \in SC)$.

Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M.

Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N.

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.

Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM$. (1)

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.

Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.

Do đó $S_{AMIN} = S_{\Delta AMI} + S_{\Delta ANI} = \frac{1}{2}AM.MI + \frac{1}{2}AN.NI$.

Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên

$$AM = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}};\ AI = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2};\ AN = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}.$$

Suy ra $MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$ và $NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \frac{a\sqrt{14}}{7}$.

Vậy $S_{AMIN} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{30}}{5} + \frac{2a\sqrt{21}}{7}.\frac{a\sqrt{14}}{7}\right) = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

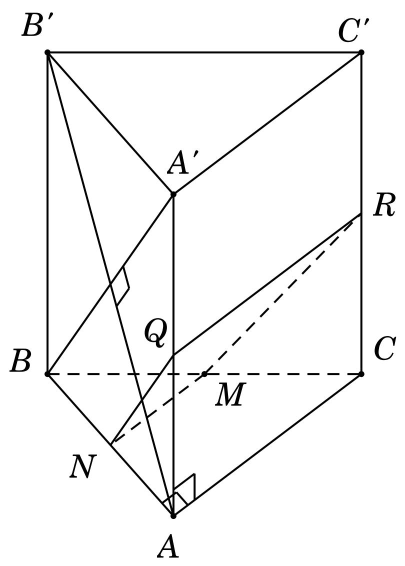
Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB'. Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân. **B.** Hình thang vuông.

C. Tam giác. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \,//\, BA'$ với $Q \in AA'$.

Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \,//\, AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).

BÀI 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Trong thực tế người ta thường nói mặt ngang và mặt đứng của các bậc thang vuông góc với nhau. Vậy thế nào là hai mặt phẳng vuông góc?

Lời giải

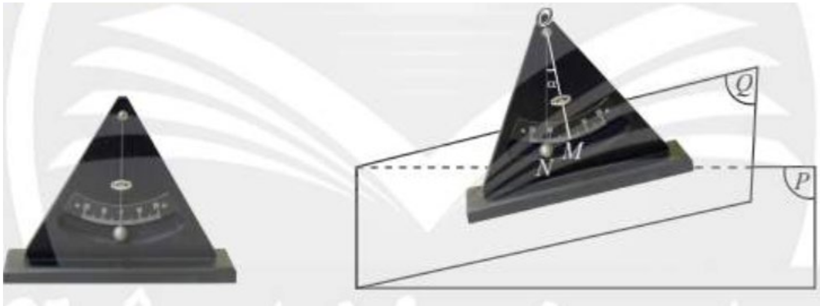
Hai mặt phẳng vuông góc khi góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông

1. Góc giữa hai mặt phẳng

a) Có thể xác định góc giữa hai cánh cửa nắp hầm (Hình 1) bằng cách sử dụng góc giữa hai cây chống vuông góc với mỗi cánh hay không?

b) Thế nào là góc giữa hai mặt phẳng? Tại sao thiết bị trong Hình 2 lại có thể đo được góc giữa mặt phẳng nghiêng (Q) và mặt đất (P).

Hình 1



Hình 2

Lời giải

a) Có thể xác định góc giữa hai cánh cửa nắp hầm bằng cách sử dụng góc giữa hai cây chống vuông góc với mỗi cánh

b) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó

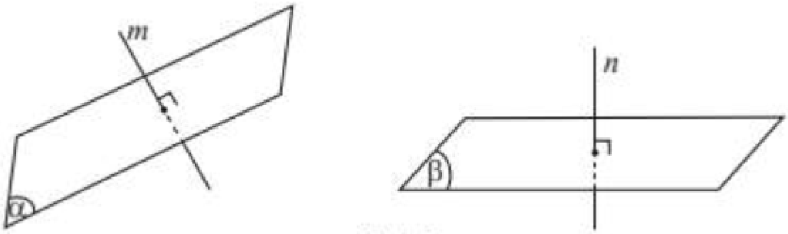
Khi đặt thiết bị lên mặt phẳng nghiêng (Q) thì OM vuông góc với (Q), ON vuông góc với mặt đất (P).

Đo góc giữa OM và ON là góc giữa (Q) và (P)

Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với (α) và (β), kí hiệu $((\alpha),(\beta))$.

Ta có: $((\alpha),(\beta))=(m,n)$ với $m\perp(\alpha), n\perp(\beta)$ (Hình 3).

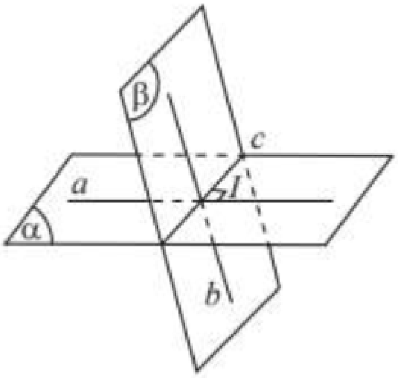


Hình 3

Người ta chứng minh được góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng.

Cho $c=(\alpha)\cap(\beta)$:

$\left((\alpha),(\beta)\right)=\left(a,b\right)$ với $a\subset(\alpha)$, $b\subset(\beta), a\perp c, b\perp c$ (Hình 4).

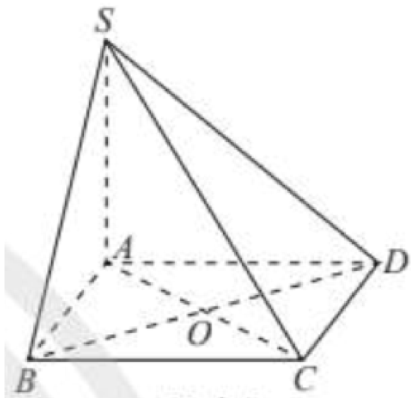


Hình 4

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng

a) (SAC) và (SAD); b) (SAB) và (SAD);

Lời giải



Hình 5

a) Ta có: $BO\perp SA$ và $BO\perp AC$, suy ra $BO\perp(SAC)$;

$BA\perp SA$ và $BA\perp AD$, suy ra $BA\perp(SAD)$.

Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là α thì $\alpha=(BO,BA)=\widehat{ABO}=45^\circ$.

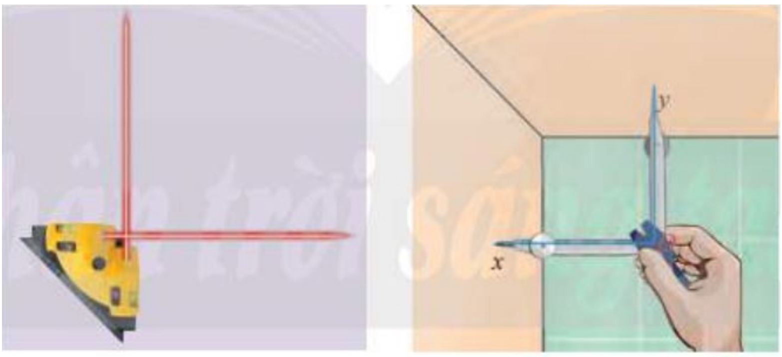
b) Ta có: $CB\perp SA$ và $CB\perp AB$, suy ra $CB\perp(SAB)$;

$CD\perp SA$ và $CD\perp AD$, suy ra $CD\perp(SAD)$.

Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là β thì $\beta=(CB,CD)=\widehat{BCD}=90^\circ$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Từ một điểm O vẽ hai tia Ox và Oy lần lượt vuông góc với hai bức tường trong phòng. Đo góc $\widehat{xOy}$.



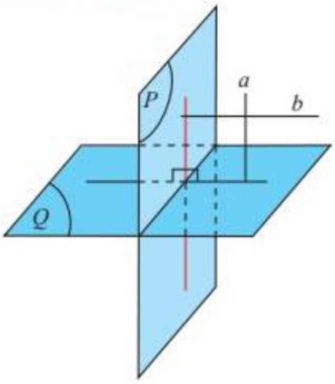
Hình 6

Lời giải

$$\widehat{xOy} = 90^o$$

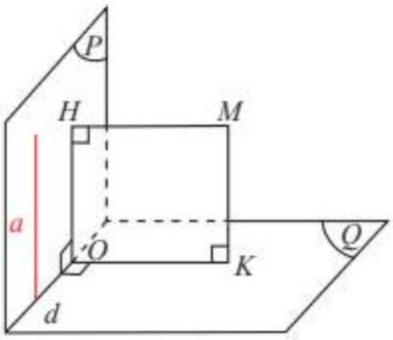
Định nghĩa

Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông.
Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc được kí hiệu là $(P) \perp (Q)$.



Hình 7

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc



Hình 8

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d, điểm M không thuộc (P) và (Q). Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên (P) và (Q). Gọi O là giao điểm của d và (MHK) (*Hình 8*).

a) Giả sử $(P) \perp (Q)$, hãy cho biết tứ giác $MHOK$ là hình gì? Tìm trong (P) đường thẳngvuông góc với (Q).

b) Giả sử (P) chứa đường thẳng a với $a \perp (Q)$, hãy cho biết tứ giác $MHOK$ là hình gì? Tính góc giữa (P) và (Q).

Lời giải

a) Vì $MH \perp (P)$ nên $MH \perp OH; MK \perp (Q)$ nên $MK \perp OK$

Mà $(P) \perp (Q)$ nên $HM \perp MK$

Suy ra MHOK là hình chữ nhật.

Trong (P) có $OH \perp OK$

b) $a \perp (Q)$ nên $a \perp OK, HM \perp (P)$ nên $HM \perp a$

Suy ra $HM // OK$. Mà $HM \perp OH; MK \perp OK$

Nên MHOK là hình chữ nhật

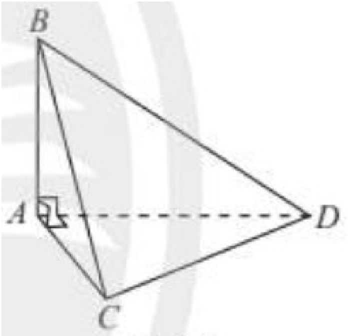
Góc giữa (P) và (Q) là $\widehat{HMK} = 90^\circ$

Định lí 1

Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng (ABC), (BAD), (CAD) đôi một vuông góc với nhau.

Lời giải



Hình 9

Ta có $AB \perp AC$, $AB \perp AD \Rightarrow AB \perp (CAD)$

$\Rightarrow (ABC) \perp (CAD)$, $(BAD) \perp (CAD)$.

Tương tự ta cũng có $CA \perp AB$, $CA \perp AD$

$\Rightarrow CA \perp (BAD) \Rightarrow (CAD) \perp (BAD)$.

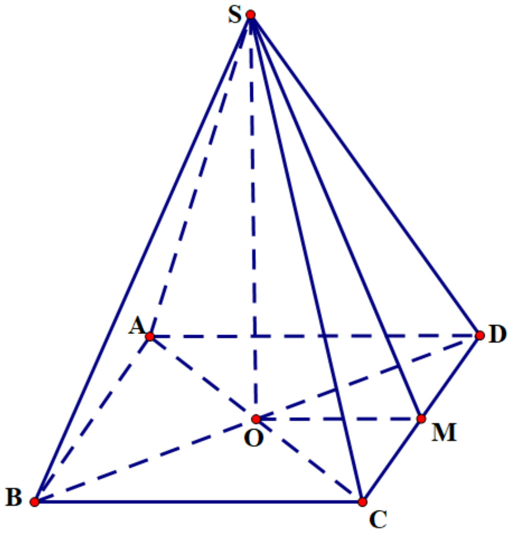
Vậy các mặt phẳng (ABC), (BAD), (CAD) từng đôi một vuông góc với nhau.

Hoạt động 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và đáy là hình vuông. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (ABCD)$.

b) $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



Vì S.ABCD có cạnh bên bằng nhau và là hình vuông nên S.ABCD là hình chóp đều. Gọi O là tâm của đáy. Ta có: $SO \perp ABCD)$

a) Ta có $SO \perp (ABCD); SO \in (SAC)$ nên $SAC) \perp (ABCD)$

b) Vì $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp AC$

Mà ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$.

Suy ra $AC \perp (SBD)$ và $SAC) \perp (SBD)$

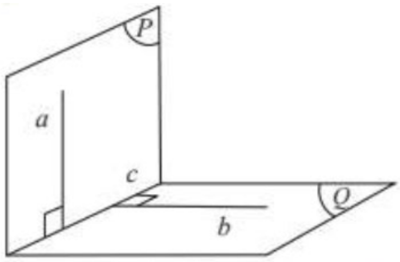
Vận dụng 1: Mô tả cách kiểm tra một bức tường vuông góc với mặt sàn bằng hai cái êke trong Hình 10.

Hình 10

Lời giải

Đặt 1 cạnh của 2 êke sát với mặt sàn sao cho cạnh còn lại của 2 êke chạm nhau tạo thành 1 đường thẳng. Nếu đường thẳng đó nằm sát với bức tường thì bức tường vuông góc với mặt sàn

3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc



Hình 11

Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (Q). Mặt phẳng (P) chứa a và cắt (Q) theo giao tuyến c. Trong (Q) ta vẽ đường thẳng b vuông góc với c. Hỏi:

a) (P) có vuông góc với (Q) không?

b) Đường thẳng b vuông góc với (P) không?

Lời giải

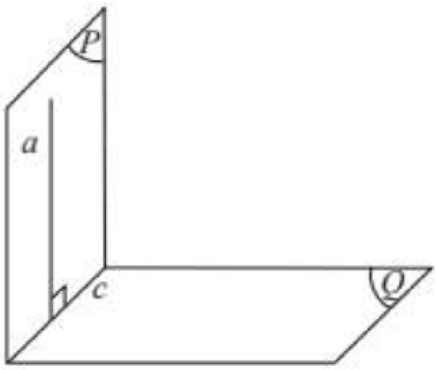
a) Vì $a \perp (Q), a \in (P)$ nên $(P) \perp (Q)$

b) Vì $a \perp (Q), b \in (P)$ nên $a \perp b$

Ta có: $b \perp a; b \perp c$ nên $b \perp (P)$

Định lí 2

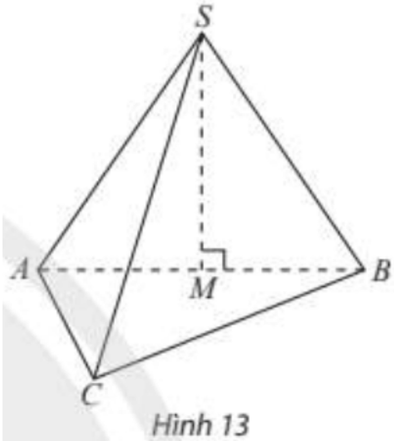
Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



Hình 12

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh $SM \perp (ABC)$.

Lời giải



Hình 13

Theo đề bài ta có $(SAB) \perp (ABC)$.

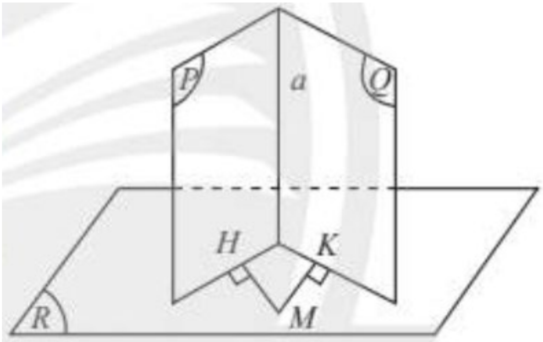
Ta có tam giác SAB đều và M là trung điểm của AB, suy ra $SM \perp AB$. Đường thẳng SM nằm trong (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng (SAB) và (ABC).

Từ đó suy ra $(SM) \perp (ABC)$.

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R). Gọi a là giao tuyến của (P) và (Q). Lấy điểm M trong (R), vẽ hai đường thẳng MH và MK lần lượt vuông góc với (P) và (Q). Hỏi:

a) Hai đường thẳng MH và MK có nằm trong (R) không?

b) Đường thẳng a có vuông góc với (R) không?



Hình 14

Lời giải

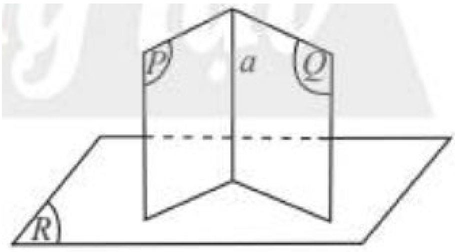
a) MH và MK nằm trong (R)

b) Vì $MH \perp (P), a \in (P)$ nên $a \perp MH$ $MK \perp (Q), a \in (Q)$ nên $a \perp MK$

Suy ra $a \perp (R)$

Định lí 3

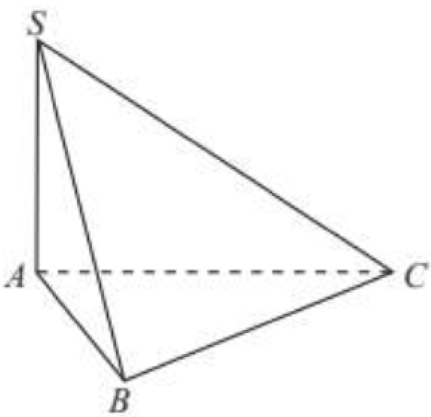
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



Hình 15

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA bằng a, đáy ABC là tam giác đều với cạnh bằng a. Cho biết hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính SB và SC theo a.

Lời giải



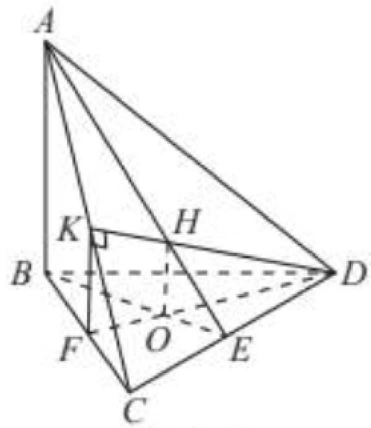
Hình 16

Ta có hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC), theo Định lí 3, giao tuyến SA của (SAB) và (SAC) vuông góc với (ABC). Từ $SA \perp (ABC)$ ta có $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$, suy ra tam giác SAB và SAC vuông cân tại S, suy ra $SB = SC = a\sqrt{2}$.

Hoạt động 2. Tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong tam giác BCD vẽ đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng:

a) $(ADC) \perp (ABE)$ và $(ADC) \perp (DFK)$.

b) $OH \perp (ADC)$.



Hình 17

Lời giải

a) Vì $AB \perp (BCD)$ nên $AB \perp DC$

Mà $BE \perp CD$. Do đó, $CD \perp (ABE)$

Suy ra: $(ACD) \perp (ABE)$

Ta có: $AB \perp (BCD)$ nên $AB \perp DF$. Mà $DF \perp BC$ nên $DF \perp (ABC)$. Suy ra $DF \perp AC$ Ta lại có: $AC \perp DK$ nên $AC \perp (DFK)$

Suy ra: $(ADC) \perp (DFK)$

b) Ta có: $(ABE) \perp (ADC); (DFK) \perp (ADC)$

Mà (ABE) và (ADC) cắt nhau tại OH

Suy ra: $OH \perp (ADC)$

Nêu cách đặt một quyển sách lên mặt bàn sao cho tất cả các trang sách đều vuông góc với mặt bàn.

Lời giải

Mở quyển sách ra và đặt chân sách lên mặt bàn

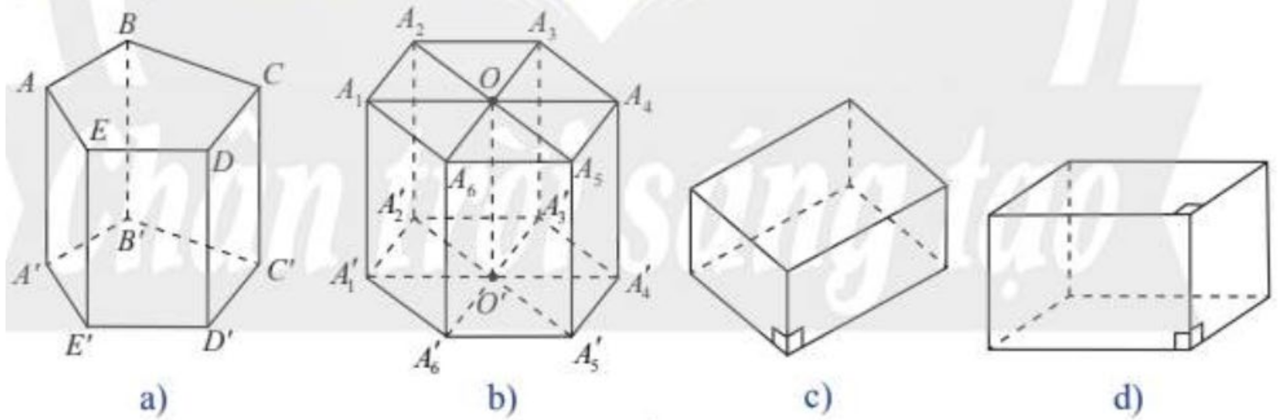
4. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật, hình lập phương

a) Cho hình lăng trụ $ABCDE.A'B'C'D'E'$ có cạnh bên AA' vuông góc với một mặt phẳng đáy (*Hình 18a*). Có nhận xét gì về các mặt bên của hình lăng trụ này ?

b) Cho hình lăng trụ có đáy là đa giác đều và có cạnh bên vuông góc với một mặt phẳng đáy (*Hình 18b*). Có nhận xét gì các mặt bên của hình lăng trụ này?

c) Một hình lăng trụ có đáy là hình bình hành và có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy (*Hình 18c*) thì có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?

d) Một hình hộp nếu có đáy là hình chữ nhật và có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy (*Hình 18d*) thì có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật?



Hình 18

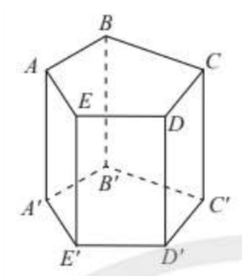
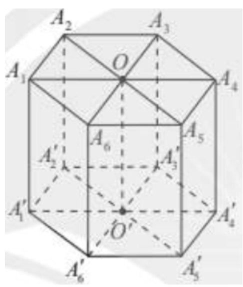
Lời giải

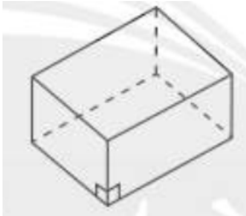
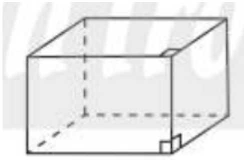
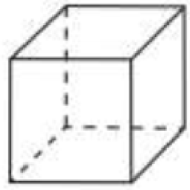
a) Mặt bên hình lăng trụ là hình chữ nhật vuông góc với mặt phẳng đáy
b) Mặt bên hình lăng trụ là hình chữ nhật vuông góc với mặt phẳng đáy
c) Hình lăng trụ có 4 mặt là hình chữ nhật
d) Hình lăng trụ có 6 mặt là hình chữ nhật

Định nghĩa

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác đều.
Hình hộp đứng là hình hộp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có mặt đáy là hình chữ nhật.
Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

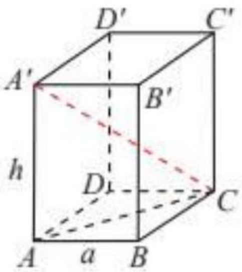
Sử dụng quan hệ song song và vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng ta chứng minh được các tính chất sau đây của các hình vừa nêu:

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		- Cạnh bên vuông góc với hai đáy. - Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		- Hai đáy là hai đa giác đều. - Mặt bên là các hình chữ nhật. - Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy

Hình hộp đứng		- Bốn mặt bên là hình chữ nhật. - Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		- Sáu mặt là hình chữ nhật. - Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. - Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Hình lập phương		- Sáu mặt là hình vuông. - Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a: $d = a\sqrt{3}$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $AA' = h$ (Hình 19). Tính đường chéo $A'C$ theo a và h.

Lời giải



Hình 19

Đáy $ABCD$ của lăng trụ đều phải là tứ giác đều, suy ra $ABCD$ là hình vuông, vậy $AC = a\sqrt{2}$. Lăng trụ đều có cạnh bên vuông góc với đáy, suy ra $AA' \perp (ABCD)$, vậy $AA' \perp AC$.

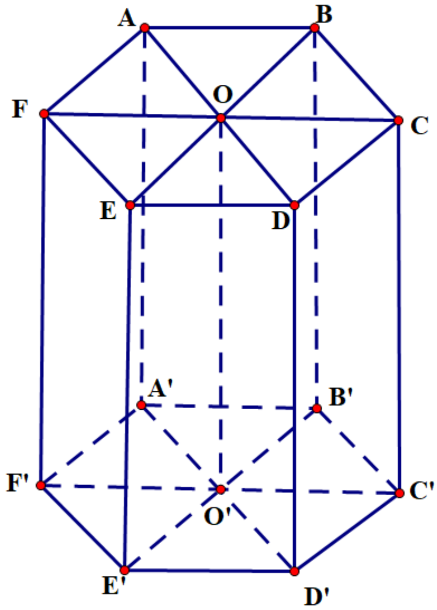
Trong tam giác $A'AC$ vuông tại A ta có:

$$A'C = \sqrt{A'A^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + 2a^2}$$

Chú ý: Lăng trụ đều có đáy tứ giác thường được gọi là lăng trụ tứ giác đều. Tương tự ta cũng có lăng trụ tam giác đều, lăng trụ lục giác đều, ...

Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF \cdot A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng h và cạnh đáy bằng a. Tính $A'C$ và $A'D$ theo a và h.

Lời giải



Tam giác ABC có:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC}} = a\sqrt{3}$

$AA' \perp (ABCDEF) \Rightarrow AA' \perp AC$

$\Rightarrow \Delta AA'C$ vuông tại A

$\Rightarrow A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{h^2 + 3a^2}$

Gọi O là tâm lục giác đều $ABCDEF$.

$\Delta OAB, \Delta OCD$ đều

$\Rightarrow OA = OD = AB = a \Rightarrow AD = 2a$

$AA' \perp (ABCDEF) \Rightarrow AA' \perp AD$

$\Rightarrow \Delta AA'D$ vuông tại A

$\Rightarrow A'D = \sqrt{AA^2 + AD^2} = \sqrt{h^2 + 4a^2}$

3 Một chiếc lồng đèn kéo quân có dạng hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy bằng 10 cm và cạnh bên bằng 30 cm (Hình 20). Tính tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn đó.

Hình 20

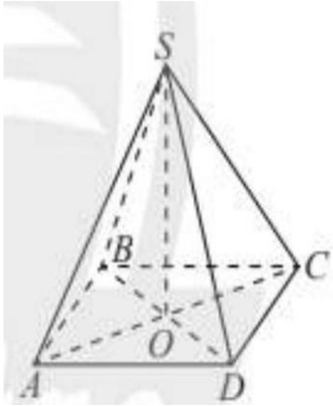
Lời giải

Tổng diện tích các mặt bên của lồng đèn đó: $6.10.30=1800\left(\mathrm{~cm}^{2}\right)$

5. Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều

Hình chóp đều

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với tâm O và các cạnh bên của hình chóp bằng nhau (Hình 21). Đường thẳng SO có vuông góc với đáy không?



Hình 21

Lời giải

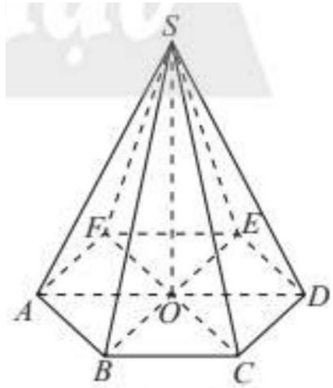
Đường thẳng SO vuông góc với đáy

Định nghĩa

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý: Hình chóp đều có:

a) Các mặt bên là các tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau.

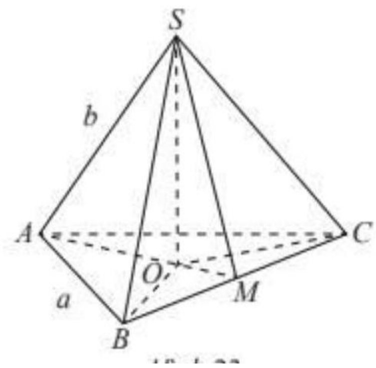


Hình 22

b) Đoạn thẳng nối từ đỉnh hình chóp đến tâm của đáy thì vuông góc với mặt đáy và gọi là đường cao của hình chóp.

c) Độ dài đường cao gọi là chiều cao của hình chóp đều.

Ví dụ 6. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB=a$ và cạnh bên $SA=b$ (Hình 23). Tính độ dài đường cao SO theo a,b.



Hình 23

Lời giải

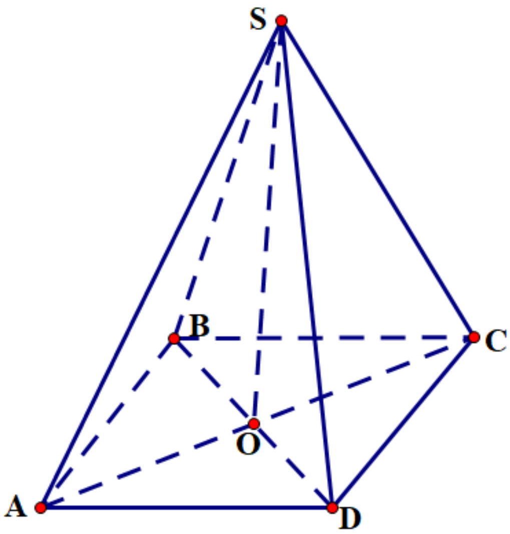
Ta có O là trọng tâm của tam giác đều ABC, suy ra $AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O, ta có:

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}.$$

Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có O là tâm của đáy và $AB = a, SA = 2a$. Tính SO theo a.

Lời giải



$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SO \perp AO$

$ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác SAO vuông tại O có:

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$

4 Cho biết kim tự tháp Khafre tại Ai Cập có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao khoảng 136 m và cạnh đáy dài khoảng 152 m. Tính độ dài đường cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của kim tự tháp.

(nguồn:https://vi.wikipedia.org/wiki/ Kim_tự_tháp_Khafre)

Hinh24

Lời giải

Độ dài đường cao của mặt bên là: $\sqrt{126^2+\left(\frac{152}{2}\right)^2}=147,15(\mathrm{~m})$

Hình chóp cụt đều

8 Cho hình chóp đều $S \cdot A_1 A_2 A_3 \ldots A_6$. Mặt phẳng (P) song song với mặt đáy và cắt các cạnh bên lần lượt tại $A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}, \ldots, A_6^{'}$.

a) Đa giác $A_1^{'} A_2^{'} A_3^{'} \ldots A_6^{'}$ có phải lục giác đều không? Giải thích.

b) Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai lục giác $A_1 A_2 A_3 \ldots A_6$ và $A_1^{'} A_2^{'} A_3^{'} \ldots A_6^{'}$. Đường thẳng OO' có vuông góc với mặt đáy không?

Lời giải

a) Đa giác $A_1' A_2' A_3' \ldots A_6'$ là lục giác đều

Vì $(P) / /\left(A_1 A_2 A_3 \ldots A_6\right)$ nên $A_1 A_2 / / A_1' A_2' ; A_2 A_3 / / A_2' A_3' ; \ldots ; A_6 A_1 / / A_6' A_1'$.

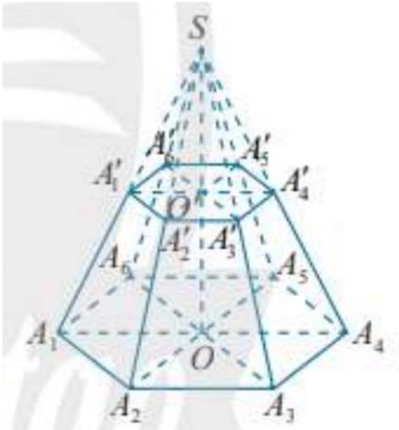
Suy ra: $\frac{A_1 A_2}{A_1' A_2'}=\frac{A_2 A_3}{A_2' A_3'}=\ldots=\frac{A_6 A_1}{A_6' A_1'}$

Mà $A_1 A_2=A_2 A_3=\ldots=A_6 A_1$

Nên $A_1' A_2'=A_2' A_3'=\ldots=A_6' A_1'$

b) Đường thẳng OO' vuông góc với mặt đáy

Định nghĩa



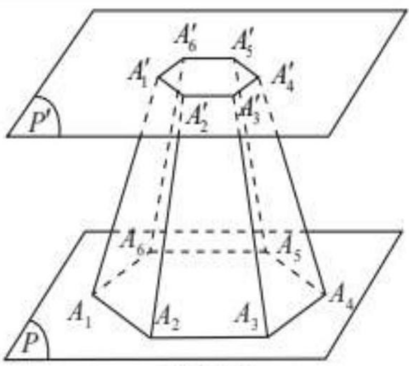
Hình 25

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3\ldots A_6\cdot A_1'A_2'A_3'\ldots A_6'$, ta gọi:

- Các điểm $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6, A_1', A_2', A_3', \ldots, A_6'$ là các **đỉnh** .

- Đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_6$ là **đáy lớn**, đa giác $A_1'A_2'A_3'\ldots A_6'$ là **đáy nhỏ**. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



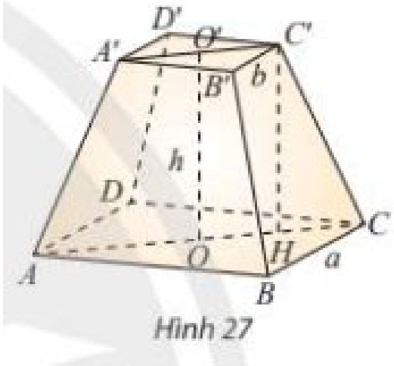
Hình 26

- Cạnh của hai đa giác đáy là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.
- Các hình thang cân $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \ldots, A_6A_1A_1'A_6'$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều.Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

Ví dụ 7: Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy lớn $ABCD$ có cạnh bằng a, đáy nhỏ $A'B'C'D'$ có cạnh bằng b, chiều cao $OO'=h$ với O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Tính độ dài cạnh bên CC' của hình chóp cụt đó.

Lời giải

Trong hình thang vuông $OO'C'C$, vẽ đường cao $C'H\left(H\in OC'\right)$ (Hình 27)



Hình 27

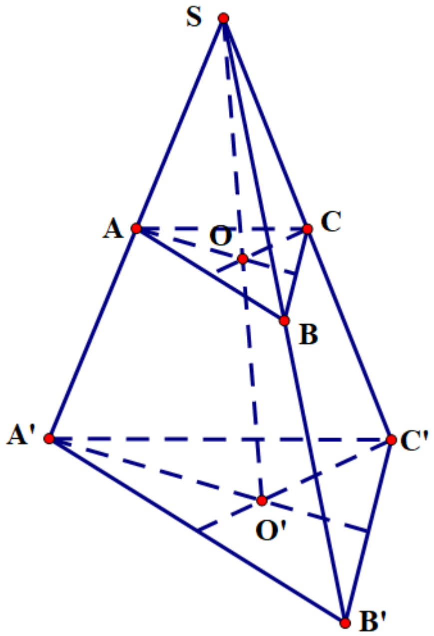
Ta có $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, O'C' = \frac{b\sqrt{2}}{2}$ suy ra $HC = \frac{(a-b)\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông $CC'H$, ta có

$CC' = \sqrt{C'H^2 + HC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{2}}$.

Cho hình chóp cụt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng a, cạnh đáy nhỏ $\frac{a}{2}$ và cạnh bên $2a$. Tính độ dài đường cao của hình chóp cụt đó.

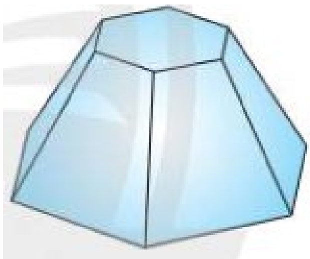
Lời giải



Ta có: $AB = \frac{a}{2}; A'B' = a$ nên $SO = OO' = \frac{1}{2}SO'; SA' = 2AA' = 4a$ Tam giác $A'B'C'$ đều cạnh a có O' là trọng tâm nên $A'O' = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ Ta có: $SO' = \sqrt{SA'^2 - A'O'^2} = \frac{\sqrt{141}}{3}a$

Suy ra: $OO' = \frac{\sqrt{141}}{6}a$

Một người cần sơn tất cả các mặt của một cái bục để đặt tượng có dạng hình chóp cụt lục giác đều có cạnh đáy lớn $1m$, cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,7m$. Tính tổng diện tích cần sơn.


Hình 28

Lời giải

Diện tích đáy lớn là: $\frac{3\sqrt{3}\cdot 1^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Diện tích đáy nhỏ là: $\frac{3\sqrt{3}\cdot 0,7^2}{2}=\frac{147\sqrt{3}}{20}$

Một mặt bên của hình chóp cụt là hình thang cân có đáy lớn là 1 m, đáy nhỏ là $0,7\text{ m}$ và cạnh bên là $0,7\text{ m}$

Chiều cao của mặt bên là: $\sqrt{0,7^2-\left(\frac{1-0,7}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{187}}{20}$

Diện tích một mặt bên là: $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{187}}{20}\cdot(0,7+1)=0,58\left(m^2\right)$

Tổng diện tích cần sơn là: $\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{147\sqrt{3}}{20}+6.0,58=18,8\left(\text{ m}^2\right)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P).

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90o.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA\perp(ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC)\perp(SAB)$.

b) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC. Chứng minh $(SBC)\perp(AKH)$.

c) Gọi D là giao điểm của HK và BC. Chứng minh rằng $(SAD)\perp(SAC)$.

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$.

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

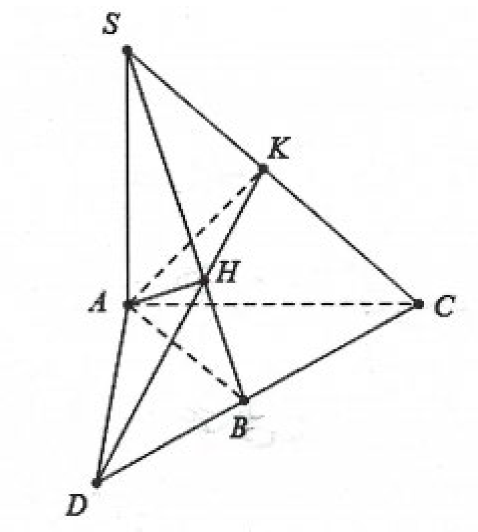
Mặt khác $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$.

c) Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Mặt khác $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AKD)$.

Suy ra $AD \perp SC$ mà $SA \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAC)$.

Do vậy $(SAD) \perp (SAC)$.



Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK).

b) Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE)$

mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$.

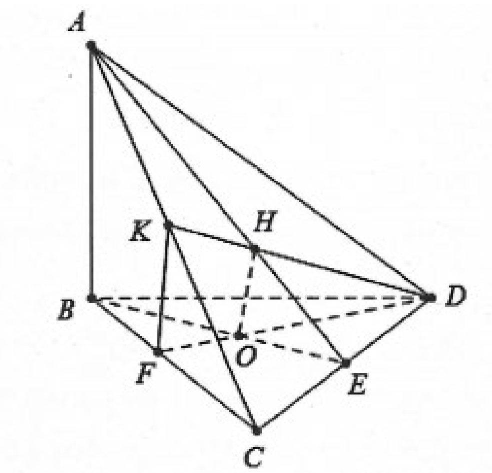
Lại có: $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$.

Mặt khác

$DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

b) Do $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AE$.

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \perp (ABE) \\ (ACD) \perp (DFK) \\ OH = (ABE) \cap (DFK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD)$.



Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a và $BD = a$. Biết cạnh $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$.

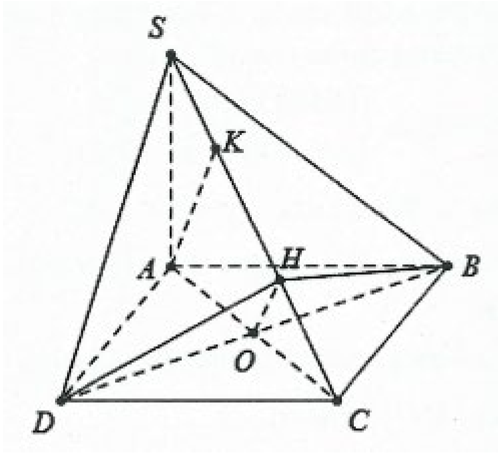
b) $(SCD) \perp (SBC)$.

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD.$

Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD.$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC).$



b) Dựng $OH \perp SC$

Do $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Suy ra $SC \perp (DHB).$

Như vậy $\widehat{DHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(SBC).$

Tam giác ABD đều cạnh a nên

$AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = a\sqrt{3}.$

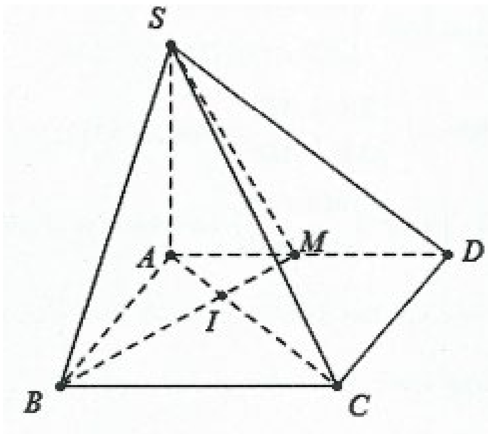
Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK = \dfrac{SA.OC}{\sqrt{SA^2 + OC^2}} = a \Rightarrow OH = \dfrac{AK}{2} = \dfrac{a}{2}.$

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \Delta DHB$ vuông tại H hay $\widehat{DHB} = 90^o.$

Do đó $(SCD) \perp (SBC).$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB = a,\ AD = a\sqrt{2},\ SA = a$ và $SA \perp (ABCD).$ Gọi M là trung điểm của $AD,$ I là giao điểm của BM và $AC.$ Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB).$

Lời giải



Ta có: $\tan \widehat{CAD} = \dfrac{CD}{AD} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Mặt khác $\tan \widehat{AMB} = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$

Do $\tan \widehat{CAD} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{AMB} = 90^o.$

Suy ra $\widehat{AIM} = 90^o \Rightarrow AC \perp BM$ tại $I.$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$

Do đó $BM \perp (SAC) \Rightarrow (SMB) \perp (SAC).$

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a,$ tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của $AB.$ Biết $SA = SB = a\sqrt{2}.$

a) Chứng minh rằng $SH \perp (ABCD).$

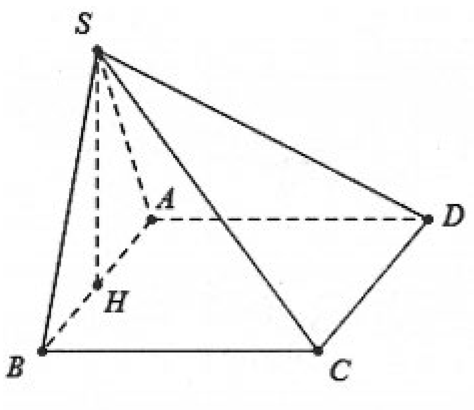
b) Chứng minh tam giác SBC vuông.

c) Chứng minh $(SAD) \perp (SAB);\ (SAD) \perp (SBC).$

Lời giải

a) Do ΔSAB cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH \perp AB.$

Mặt khác $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\ AB=(SAB)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.



b) Do $SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp BC$.

Mặt khác $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow\Delta SBC$ vuông tại B.

c) Tương tự câu b ta chứng minh được $AD\perp(SAB)$ suy ra $(SAD)\perp(SAB)$.

Mặt khác: $SA^2+SB^2=AB^2=4a^2\Rightarrow\Delta SAB$ vuông tại $S\Rightarrow SA\perp SB$.

Lại có: $AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SB\Rightarrow SB\perp(SAD)\Rightarrow(SBC)\perp(SAD)$.

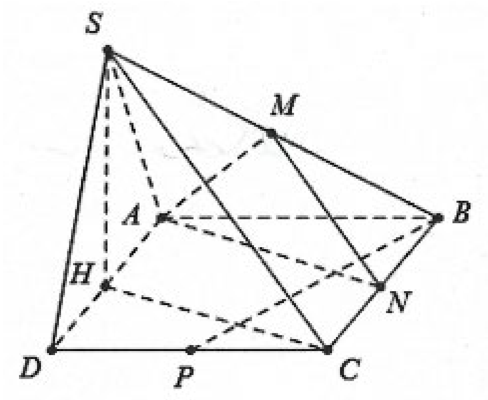
Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SB,BC và CD.

a) Chứng minh $(SAD)\perp(SAB)$.

b) Chứng minh $AM\perp BP$ và $(SBP)\perp(AMN)$.

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của AD.



Do ΔSAD cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH\perp AD$.

Mặt khác $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\ AD=(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Khi đó $\begin{cases}SH\perp AB\\ AB\perp AD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow(SAB)\perp(SAD)$.

b) Ta có: $\begin{cases}MN//SC\\ AN//HC\end{cases}\Rightarrow(AMN)//(SHC)$.

Dễ thấy $\tan\widehat{BPC}=2;\ \tan\widehat{HCD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BPC}+\widehat{HCD}=90^o\Rightarrow HC\perp BP$.

Mặt khác $SH\perp BP\Rightarrow BP\perp(SHC)$

Mà $(AMN)//(SHC)\Rightarrow BP\perp(AMN)\Rightarrow\begin{cases}(SBP)\perp(AMN)\\ BP\perp AM\end{cases}$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA\perp(ABCD)$.

a) Chứng minh $(SAC)\perp(SBD)$.

b) Chứng minh $(SAD)\perp(SCD)$.

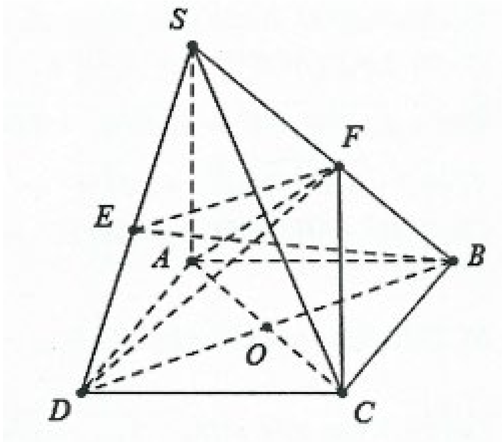
c) Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác SBD. Chứng minh rằng $(ACF)\perp(SBC)$; $(AEF)\perp(SAC)$.

Lời giải

a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.



b) Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Do đó $(SAD) \perp (SAB)$.

c) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Mặt khác: $DF \perp SB \Rightarrow (ADF) \perp SB \Rightarrow AF \perp SB$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF$.

Do đó $AF \perp (SBC) \Rightarrow (ACF) \perp (SBC)$.

Dễ thấy tam giác SBD cân tại S có 2 đường cao BE và DF nên $EF // BD$

Mặt khác $BD \perp (SAC)$ (Chứng minh ở câu a) suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC)$.

Cách khác: Ta có $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp SC$

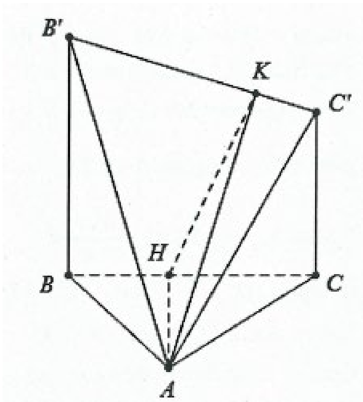
Chứng minh tương tự ta cũng có: $AE \perp SC$ suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.

b) Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và $\Delta AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B')$ và $(AB'C')$ cùng vuông góc với (AHK).

Lời giải



a) Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AB$

Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ACC') \Rightarrow (ABB') \perp (ACC')$.

b) Do $AH \perp BC$, $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Suy ra $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow (AHK) \perp (BCC'B')$.

Mặt khác $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH \perp B'C'$

Lại có: $AK \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AHK) \Rightarrow (AHK) \perp (AB'C')$.

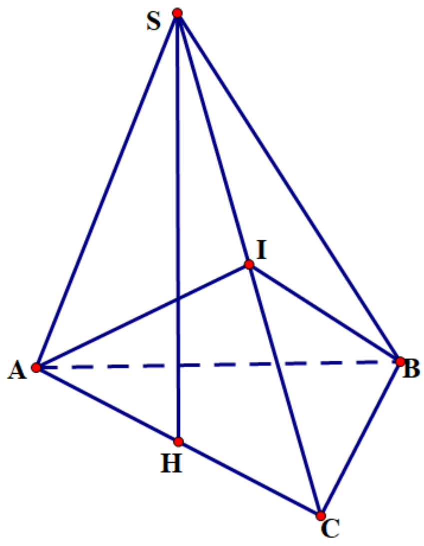
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

b) Gọi I là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $(ABI) \perp (SAC)$.

Lời giải



a)Gọi H là trung điểm của AC

SAC là tam giác đều $\Rightarrow SH \perp AC$

Mà $(SAC) \perp (ABC)$

$\Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC$

Lại có $AC \perp BC$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow BC \perp (SAC) \\ BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$$

b) SAC là tam giác đều $\Rightarrow AI \perp SC$

$BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$

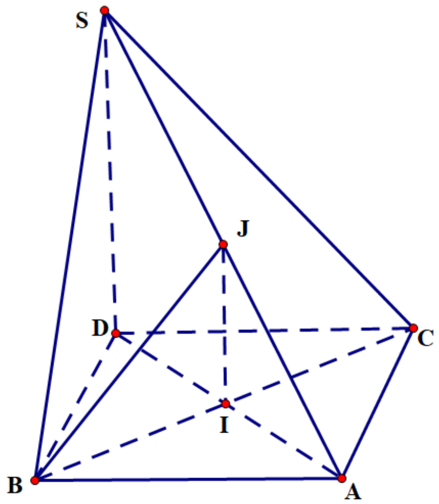
$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AI \perp (SBC) \\ AI \subset (ABI) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABI) \perp (SBC)$$

Câu 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a, I trung điểm của BC, D là ddiemr đối xứng với A qua I Vẽ đoạn thẳng SD cso độ dài $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAD)$

b) $(SAB) \perp (SAC)$

Lời giải



a) $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AD \perp BC$

$SD \perp (ABC) \Rightarrow SD \perp BC$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow BC \perp (SAD) \\ BC \subset (SBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SBC) \perp (SAD)$$

b) Kẻ $IJ \perp SA (J \in SA)$.

ΔABC đều $\Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AD = 2AI = a\sqrt{3}$

ΔSAD vuông tại $D \Rightarrow SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác BCJ có IJ là trung tuyến và $IJ = \dfrac{1}{2}BC$

Vậy tam giác BCJ vuông tại $J \Rightarrow BJ \perp JC$

$$\left.\begin{matrix} BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA \\ IJ \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp (BCJ)$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow SA \perp BJ \\ BJ \perp JC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BJ \perp (SAC)$$

Mà $BJ \subset (SAB)$

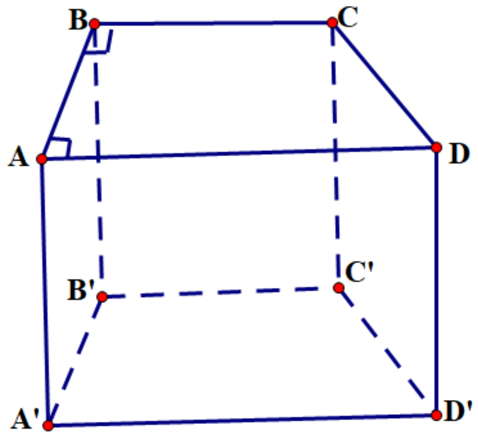
Vậy $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AA' = 2a, AD = 2a, AB = BC = a$

a) Tính độ dài đoạn thẳng AA'

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ.

Lời giải



a) ΔABC vuông cân tại $B \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

$CC' = AA' = 2a$

$CC' \perp (ABCD) \Rightarrow CC' \perp AC$

$\Rightarrow \Delta ACC'$ vuông tại C

$\Rightarrow AC' = \sqrt{AC^2 + CC^2} = a\sqrt{6}$

b) $S_{ABCD} = S_{A'B'C'C'} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot AB = \frac{3a^2}{2}$

Gọi M là trung điểm của AD

$\Rightarrow ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow MC = MD = MA = \frac{1}{2}AD = a$

ΔMCD vuông tại M

$\Rightarrow CD = \sqrt{CM^2 + DM^2} = a\sqrt{2}$

$S_{ABB'A'} = AB \cdot AA' = 2a^2$

$S_{ADD'A'} = AD \cdot AA' = 4a^2$

$S_{BCC'B'} = BC \cdot CC' = 2a^2$

$S_{CDD'C'} = CD \cdot CC' = 2a^2\sqrt{2}$

Tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ là:

$S = S_{ABCD} + S_{A'B'C'C'} + S_{ABB'A'} + S_{ADD'A'} + S_{BCC'B'} + S_{CD'C'}$

$= \frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} + 2a^2 + 4a^2 + 2a^2 + 2a^2\sqrt{2}$

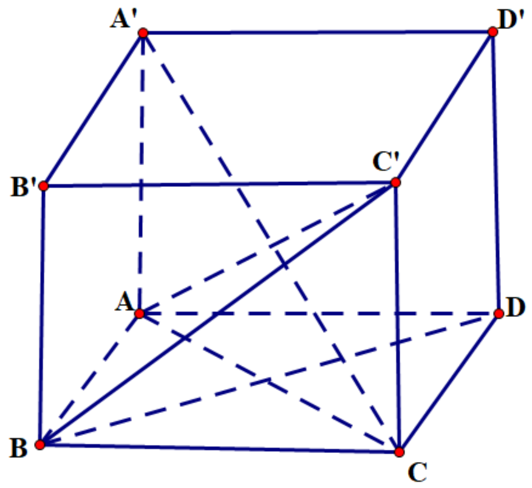
$= \left(11 + 2\sqrt{2}\right)a^2$

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Cho biết $AB = BD = a, A'C = 2a$.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AA'

b) Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Lời giải



Do $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AB = AC = AD = a$

Tam giác ABD đều $\Rightarrow AB = BD = 60^\circ = \widehat{ABD}$

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$ cắt nhau tại O

Xet ΔABO vuông tại O

$\sin\widehat{ABO} = \dfrac{AO}{AB}$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{3}$

$AA' = CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = a$

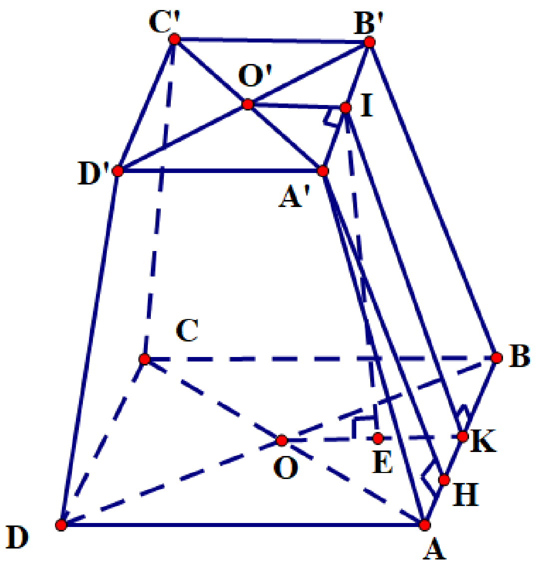
b) Diện tích một mặt đáy là: $\dfrac{1}{2}a \cdot a\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}$

Diện tích một mặt bên là: $a \cdot a = a^2$

Tổng diện tích các mặt của hình hộp là: $2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2\sqrt{3} + 4a^2 = \left(4+\sqrt{3}\right)a^2$

Câu 5. Cho hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a. Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.

Lời giải



Gọi OO' là đường nối tâm của hai đáy, $OO' = a$

Kẻ $Oi \perp A'B'; OK \perp (AB); IE \perp (ABCD); E \in OK$

Ta có $OI = OE = \frac{a}{2}; OK = \frac{2a}{2} = a; EK = 2a - a = 2; IE = a$

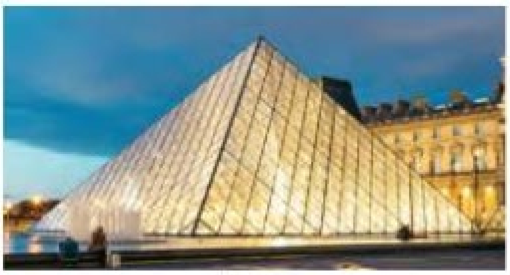
$IK = \sqrt{IE^2 + EK^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Kẻ $A'H \perp AB; AH = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

$HK = A'I = \frac{a}{2}; AK = \frac{AB}{2} = a; AH = AK - HK = \frac{a}{2}$

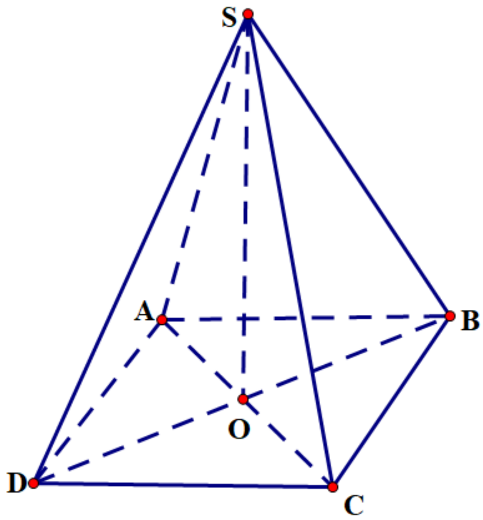
$AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Câu 6. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều cới chiều cao là $21{,}6\,m$ và cạnh đáy dài $34\,m$. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.



Hình 29
(*Nguồn:* https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid)

Lời giải



Ta có: $\mathrm{SO}=21,6; \mathrm{AB}=\mathrm{CB}=34$

$OA=34\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=17\sqrt{2}$

$SA=\sqrt{(17\sqrt{2})^2+21,6^2}=32,32(\mathrm{~m})$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P). Do $(P)//(Q) \Rightarrow d\perp(Q)$.

Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d. Mà $\begin{cases} d\perp(P) \\ d\perp(Q)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(R)\perp(P) \\ (R)\perp(P)\end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d. Do đó có vô số mặt phẳng qua M, vuông góc với (P) và (Q).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c\perp a, c\perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

B. Cho $a\perp(\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta)\perp(\alpha)$.

C. Cho $a\perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a\perp b$, nếu $a\subset(\alpha)$ và $b\subset(\beta)$ thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c.

C sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a,b) chứa b nhưng không vuông góc với a.

D sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(\alpha)\supset a$, $(\alpha)//b$ và $(\beta)\supset b$, $(\beta)//a$ thì $(\alpha)//(\beta)$.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

B sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp $a\in d$, $b\in d$, khi đó AB trùng với d.

C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

D sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

A sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B, C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

B sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

D sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải

Chọn B

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(P)\supset a$, $(P)/\!/ b$ và $(Q)\supset b$, $(Q)/\!/ a$ thì $(P)/\!/(Q)$.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) hoặc $(Q)\equiv(R)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Cả 3 mệnh đề trên đều đúng.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào sai?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình vuông.

Lời giải

Chọn D

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Lời giải

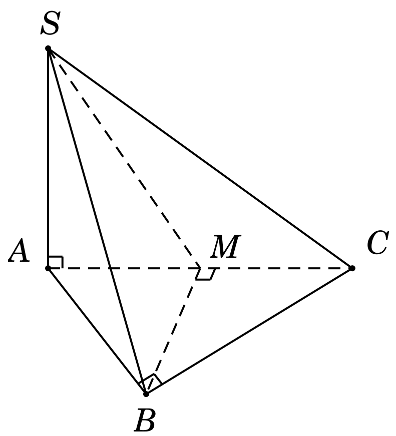
Chọn B

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$. Do đó A đúng.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Do đó C đúng.

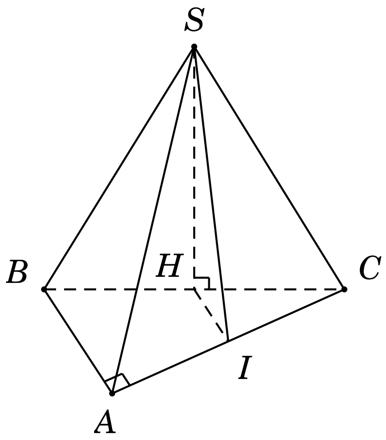
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 12: Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SH \perp AB$. **B.** $HI \perp AB$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $(SHI) \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn C



Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB.$ Do đó A đúng.

Ta có HI là đường trung bình của ΔABC nên $HI \,//\, AC \Rightarrow HI \perp AB.$ Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI).$ Do đó D đúng.

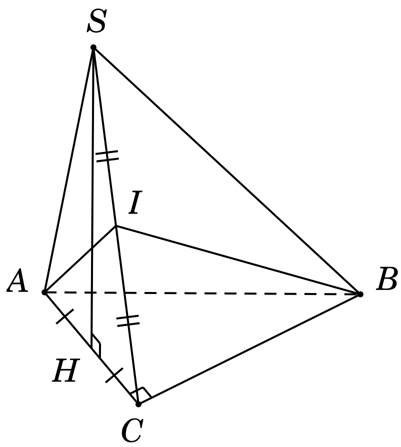
Dùng phương pháp loại trừ thì C là đáp án sai.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $AI \perp SC.$ **B.** $(SBC) \perp (SAC).$ **C.** $AI \perp BC.$ **D.** $(ABI) \perp (SBC).$

Lời giải

Chọn B



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$. Do đó A đúng.

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$. Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$. Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$. Do đó C đúng.

Từ mệnh đề A và C suy ra mệnh đề D đúng.

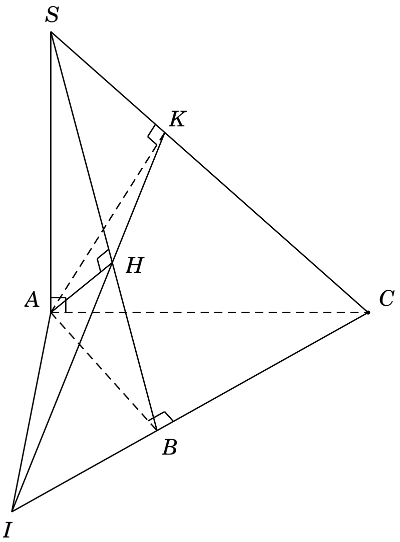
Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp AH$. **B.** $(AHK) \perp (SBC)$. **C.** $SC \perp AI$. **D.** Tam giác IAC đều.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do đó A đúng.

Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI$. Do đó C đúng.

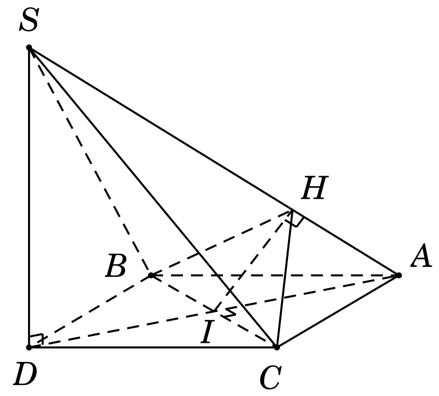
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 15: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC; kẻ IH vuông góc SA $(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $SA \perp BH$. **B.** $(SDB) \perp (SDC)$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $BH \perp HC$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$. Do đó A đúng.

Tính được $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\Delta AHI \backsim \Delta ADS \Rightarrow \frac{IH}{SD} = \frac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \frac{AI.SD}{AS} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$. Do đó D đúng.

Từ mệnh đề A và D suy ra mệnh đề C đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

BÀI 4. KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Có bao nhiêu loại khoảng cách trong công trình đang xây dựng này? Làm thế nào tính được những khoảng cách đó?

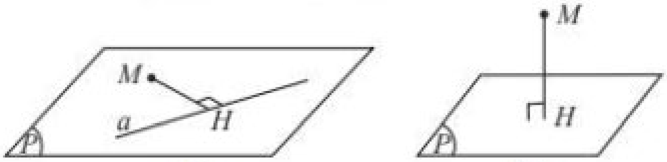
Lời giải

Trong công trình này có: Khoảng cách giữa 2 điểm (d_1), khoảng cách giữa 2 đường thẳng (d_2), khoảng cách từ 1 điểm đếm 1 đường thẳng (d_3, d_4) khoảng cách từ 1 điểm đến 1 mặt phẳng (d_5) Để đo những đường nằm ngang, ta có thể dùng thước dây còn những đường nằm thẳng đứng thì dùng dây dọi

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng

a) Cho điểm M và đường thẳng a không di qua M. Trong mặt phẳng (M, a) dùng êke để tìm H trên a sao cho $MH \perp a$ (Hình 1a) . Đo độ dài đoạn MH.

b) Cho điểm M không nằm trên mặt phẳng sàn nhà (P). Dùng dây dọi để tìm hình chiếu vuông góc H của M trên (P) (Hình 1a). Đo độ dài đoạn MH



a) b)

Hình 1

Lời giải

a) $\mathrm{MH} = 1,5$

b) $\mathrm{MH} = 2$

Định nghĩa

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dài đoạn MH được gọi là ***khoảng cách từ M đến đường thẳng a***, kí hiệu $d(M, a)$.

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dài đoạn MH được gọi là ***khoảng cách từ M đến (P)***, kí hiệu $d(M, (P))$.

Chú ý:

Ta quy ước :

- $d(M,a)=0$ khi và chỉ khi M thuộc a
- $d(M,(P))=0$ khi và chỉ khi M thuộc (P)

Nhận xét:

a) Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng a, ta luôn có $d(M,a)\le MN$

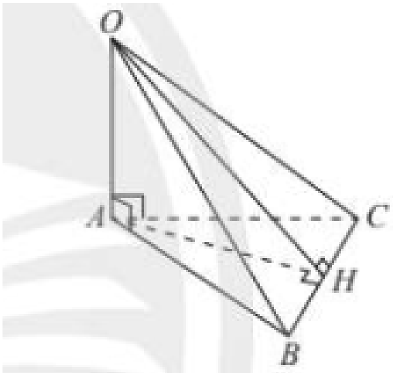
b) Lấy điểm N tùy ý trên đường thẳng (P), ta luôn có $d(M,(P))\le MN$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA\perp(ABC)$. Cho biết $OA=a$.

a) Tính khoảng cách từ O đến (ABC).

b) Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng BC.

Lời giải



Hình 2

a) Ta có $OA\perp(ABC)$, suy ra $d(O,(ABC))=OA=a$.

b) Vẽ $AH\perp BC$, ta có $OH\perp BC$ (định lí ba đường vuông góc) , suy ra $d(O,BC)=OH$.

Tam giác ABC ddeuf có cạnh bằng a nên suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OAH, ta có $OH=\sqrt{OA^2+AH^2}=\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

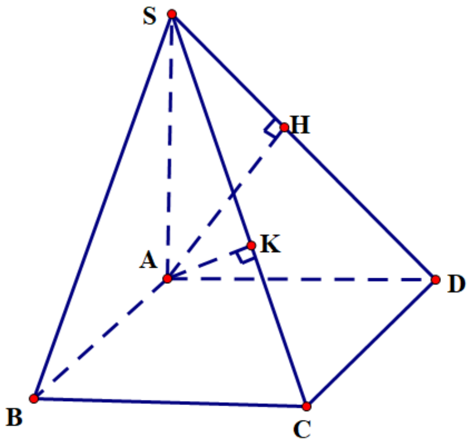
Vậy $d(O,BC)=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết $SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Cho biế $OA=a$.

a) Tính khoảng cách từ B đến (SAD).

b) Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng SC.

Lời giải



a) $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$

$AB \perp SA, AB \perp AD$ nên $AB \perp (SAD)$

Vậy khoảng cách từ B đến (SAD) là $AB = a$

b) Kẻ $AK \perp SC$

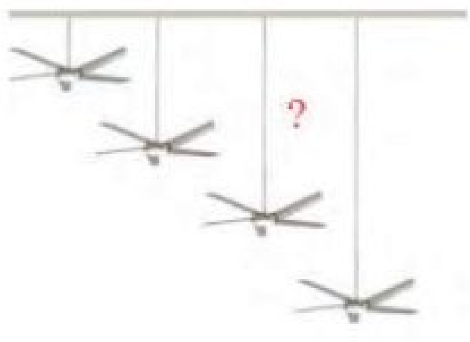
Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AC$

Tam giác SAC vuông tại A có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2}$

Suy ra: $AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

1 Một quạt trần có bề dày thân quạt bằng $20cm$. Người ta muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ quạt đến sàn nhà là $2,5m$. Hỏi phải làm cán quạt dài bao nhiêu? Cho biết trần nhà cao $3,6m$.



Hình 3

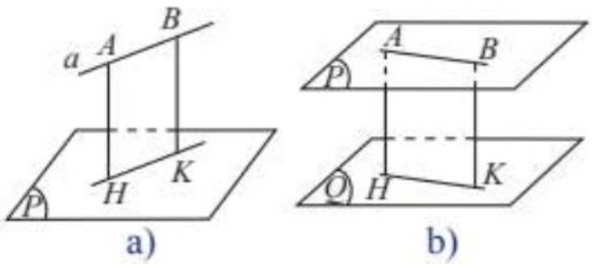
Lời giải

Cán quạt dài: $3,6 - 2,5 - 0,2 = 0,9(\text{ m})$

2. Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

a) Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Lấy hai điểm A, B tuỳ ý trên a và gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên (P) (Hình 4a). So sánh độ dài hai đoạn thẳng AH và BK

b) Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Lấy hai điểm A, B tuỳ ý trên (P) và gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên (Q) (Hình 4 b). So sánh độ dài hai đoạn thẳng AH và BK.



Hình 4

Lời giải

a) AH = BK

b) AH = BK

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a ***và*** b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b, kí hiệu $d(a,b)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng a ***và mặt phẳng*** (P) ***song song với*** a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P), kí hiệu $d(a,(P))$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) ***và*** (Q) là khoảng cách một điểm bất kì trên (P) đến (Q), kí hiệu $d((P),(Q))$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính theo a:

a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$;

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$

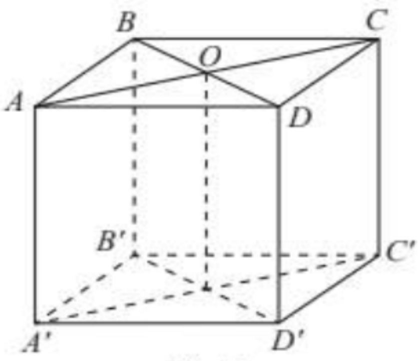
Giải

a) Ta có $DD'//AA', d(DD',(AA'C'C)) = d(D,(AA'C'C))$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $DO \perp AC$ và $DO \perp AA'$, suy ra $DO \perp (AA'C'C)$.

Vậy $d(DD',(AA'C'C)) = d(D,(AA'C'C)) = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Hình 5

b) Ta có $(AA'D'D)//(BB'C'C)$ suy ra

$d((AA'D'D),(BB'C'C)) = d(A,(BB'C'C))$

Do $AB \perp BB'$ và $AB \perp BC$, suy ra $AB \perp (BB'C'C)$.

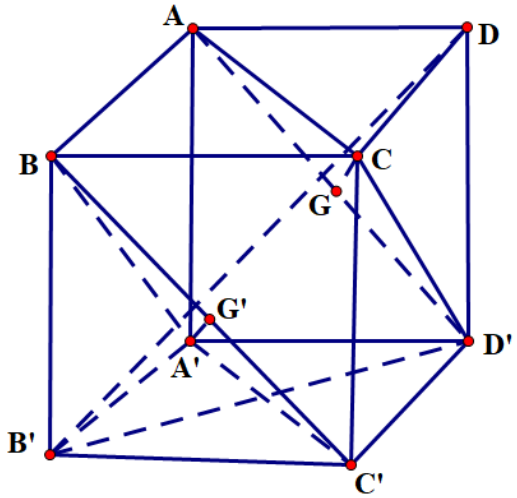
Vậy $d\left((AA'D'D),(BB'C'C)\right) = AB = a$

. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách :

a) Giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(A'C'B)$;

b) Giữa đường thẳng AB và $(A'B'C'D')$

Lời giải



a) Ta có: $AC \perp (BDD'B')$ nên $AC \perp B'D$; $CD' \perp (ADC'B')$ nên $CD' \perp B'D$

Suy ra: $B'D \perp (ACD')$

Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ACD', BA'C '

Ta có: $AC = CD' = AD' = a\sqrt{2}$ nên tam giác ACD' là tam giác đều.

Tứ giác D.ACD' là hình chóp đều. Suy ra: $DG \perp (ACD)$.

Mà $B'D \perp (ACD')$ nên $G \in B'D$

Tương tự ta có $BG' \perp (A'CB)$; $G' \in B'D$

$GG' \perp (ACD'), GG' \perp (A'C'B)$ nên d((ACD'),(A'C'B)) = GG'

Tam giác ACD đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$, G là trọng tâm nên $AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$DG = \sqrt{AD^2 - DG^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Tương tự có $B'G' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Mà $B'D = \sqrt{BD^2 + BB'^2} = a\sqrt{3}$

Vậy $GG' = B'D - B'G' - DG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

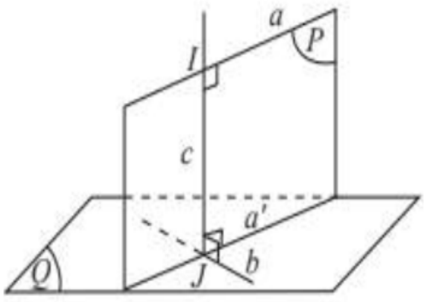
b) $AB//A'B'$ nên $AB//\left(A'B'C'D'\right)$

$$d\left(AB,\left(A'B'C'D'\right)\right)=d\left(A,\left(A'B'C'D'\right)\right)=AA'=a$$

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa b và song song với a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng a, vuông góc với (Q) và cắt b tại J. Trong (P), gọi c là đường thẳng đi qua J, vuông góc với a và cắt a tại điểm I.

Đường thẳng IJ có vuông góc với b không? Giải thích.



Hình 6

Lời giải

Gọi (R) là mặt phẳng chứa a song song với (Q).

(P) cắt hai mặt phẳng song song tại a và a' nên a//a'

Trong mặt phẳng (P), $IJ\perp a, a//a'$ nên $IJ\perp a'$

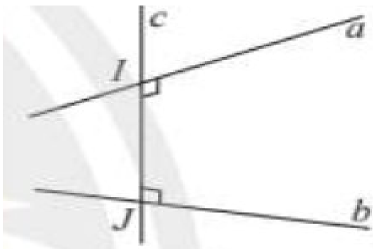
Ta có: $(P)\perp(Q)$, (P) cắt (Q) tại a', $IJ\perp a'$ nên $IJ\perp(P)$

Suy ra $IJ\perp b$

Định nghĩa

Đường thẳng c vừa vuông góc vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là ***đường vuông góc chung*** của a và b.

Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là ***đoạn vuông góc chung*** của a và b.



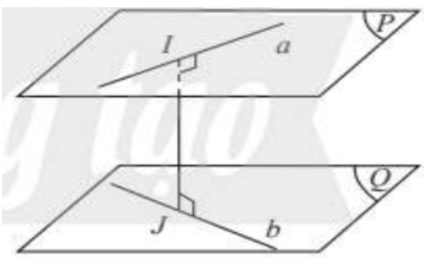
Hình 7

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a,b)$.

Chú ý:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

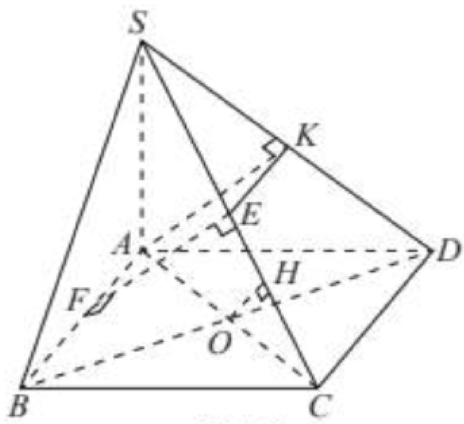


Hình 8

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SB và CD;　　　　b) AB và SC.

Giải



Hình 9

a) Ta có $BC\perp SA$ và $BC\perp AB \Rightarrow BC\perp SB$.

Mặt khác $BC\perp CD$ suy ra BC là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SB và CD. Ta có

$d(SB,CD)=BC=a$.

b) ***Cách 1 .*** Ta có $AB\perp(SAD)$ và SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD).

Vẽ $AK\perp SD, KE//AB, EF//AK$.

Ta có $AB\perp AK, AK\perp SD$, suy ra $AK\perp SC$. Do $EF//AK$, suy ra ta cũng có $EF\perp AB$ và EF cắt AB tại $F, EF\perp SC$ và EF cắt SC tại E.

Các kết quả trên chứng tỏ EF là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Trong tam giác SAD vuông cân tại A ta có

$AK=\dfrac{SD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AB,SC)=EF=AK=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

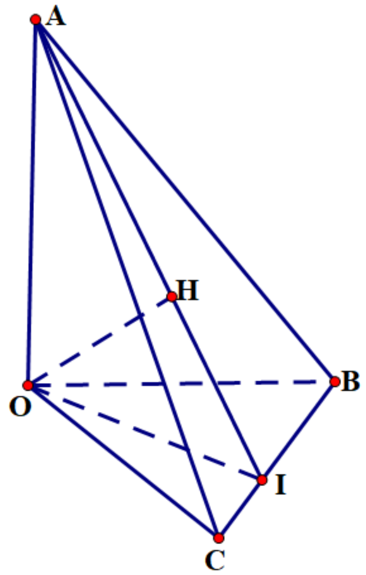
Cách 2. Ta có mặt phẳng (SCD) chứa SC và song song với AB, suy ra:

$$d(AB,SC)=d(AB,(SCD))=d(A,(SCD))=AK=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA,OB,OC đều bằng a và vuông góc từng đôi một. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) OA và BC;　　　　b) OB và AC.

Lời giải



a) Kẻ $OI \perp BC$

Mà $OA \perp OB; OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$. Suy ra: $OA \perp OI$

$$d(OA, BC) = OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b) Kẻ $OK \perp AC$

Mà $OB \perp OA, OB \perp OC$ nên $OB \perp (OAC)$. Suy ra $OB \perp OK$

$$d(OB, AC) = OK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2 Một căn phòng có trần cao $3,2m$. Tính khoảng cách giữa một đường thẳng a trên trần nhà và đường thẳng b trên sàn nhà.

Hình 10

Lời giải

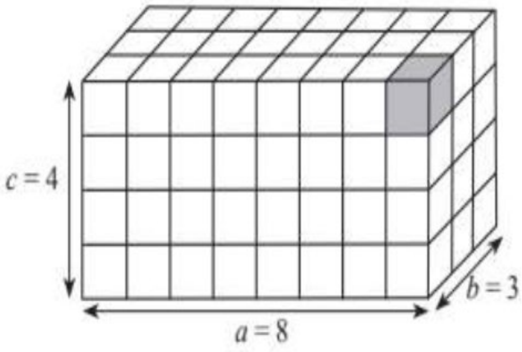
$d(a,b) = 3,2m$

4. Công thức tính thể tích của khối chóp, khối lăng trụ, khối hộp

Chúng ta đã biết công thức tính thể tích của một số khối đơn giản.

Thể tích một khối là số đo phần không gian mà nó chiếm chỗ . Ta công nhận hình lập phương có cạnh 1 (đơn vị độ dài) có thể tích là 1 (đơn vị thể tích).

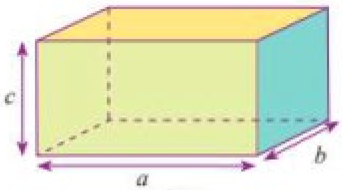
Thể tích khối hộp chữ nhật

4 Cho một khối hộp chữ nhật với các kích thước là a,b,c đều là số nguyên dương. Vẽ các mặt song song với các mặt của hình hộp và chia nó thành các khối lập phương có cạnh bằng 1 (Hình 11). Tìm số hình lập phương đơn vị có trong hình hộp	 Hình 11

Lời giải

Số lập phương đơn vị là: $8.4\ .3\ =\ 96$

Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước $V=abc$



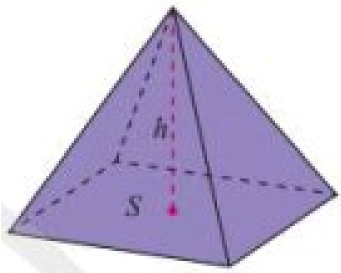
Hình 12

Thể tich khối chóp

Khoảng cách h từ đỉnh đến mặt phẳng đáy của một hình chóp gọi là chiều cao của hình chóp đó. Người ta chứng minh được công thức sau đây:

Thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao.

$$V=\frac{1}{3}Sh$$



Hình 13

Thể tich khối chóp cụt đều

Để tìm thể tích khối chóp cụt đều, ta sử dụng công thức sau đây:

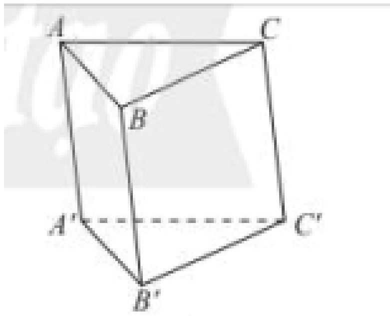
$$V=\frac{1}{3}h\left(S+\sqrt{SS'}+S'\right)$$

với h là chiều cao và S,S' là diện tích hai đáy.

Thể tích khối lăng trụ

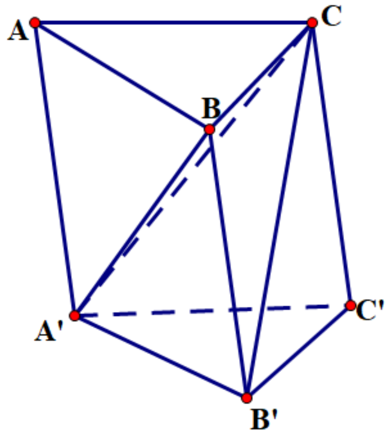
Khoảng cách h giữa hai mặt phẳng đáy của hình lăng trụ là *chiều cao* của hình lăng trụ đó.

Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ (Hình 14). Tìm cách chia khối lăng trụ thành ba khối chóp có cùng chiều cao và diện tích đáy.



Hình 14

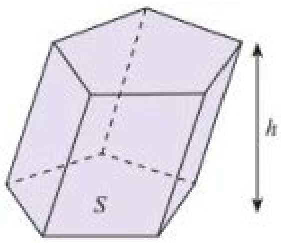
Lời giải



Ba tứ diện $A'.ABC, C.A'B'B, C.A'B'C'$ có cùng chiều cao và diện tích đáy.

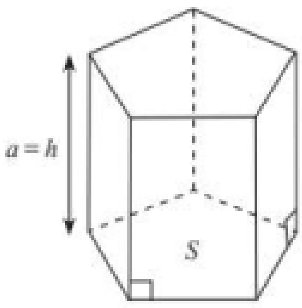
Thể tích khối lăng trụ bằng tích diện tích đáy và chiều cao.

$$V = Sh$$



Hình 15

Chú ý: Ta gọi khối lăng trụ có cạnh bên vuông góc với đáy là khối lăng trụ đứng. Chiều dài cạnh bên a của khối lăng trụ đứng bằng chiều cao h và ta có công thức: $V = S.a$.



Hình 16

Ví dụ 4.

a) Tính thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước là: $6a, 4a, 3a$.

b) Tính thể tích khối tứ diện đều $SABC$ cạnh a.

c) Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ trùng với giao điểm O của AC và BD. Tính thể tích khối lăng trụ đó.

Giải

a) Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước:

$V = 6a.4a.3a = 72a^3$.

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S xuống (ABC). Ta có ba tam giác vuông SHA, SHB, SHC bằng nhau, suy ra $HA = HB = HC$. Vậy H là tâm của tam giác đều ABC.

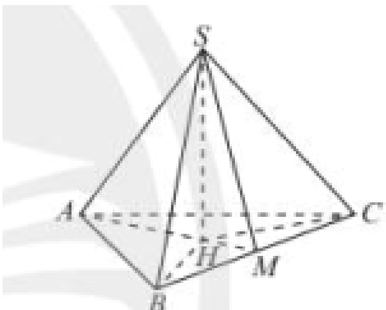
Ta có:

$$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, AH = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

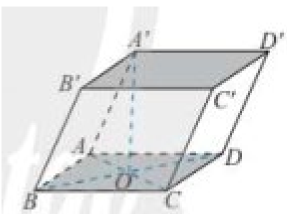
Khối tứ diện đều $SABC$ có thể tích là

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$



Hình 17

c) Chiều cao của khối lăng trụ:



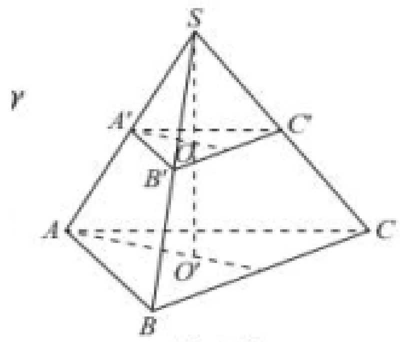
Hình 18

$h = A'O = \sqrt{A'A^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}.$

Thể tích khối lăng trụ: $V = S.h = 4a^2.a\sqrt{2} = 4a^3\sqrt{2}.$

Ví dụ 5. Cắt khối chóp tam giác đều $S.ABC$ với cạnh đáy bằng a và chiều cao $2a$ bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cụt đều được tạo thành.

Giải



Hình 19

Gọi $ABC.A'B'C'$ là khối chóp cụt đều được tạo thành, O và O' lần lượt là tâm của hai đáy (Hình 19). Ta có:

Chiều cao của khối chóp cụt đều là $h = OO' = \frac{SO}{2} = \frac{2a}{2} = a$.

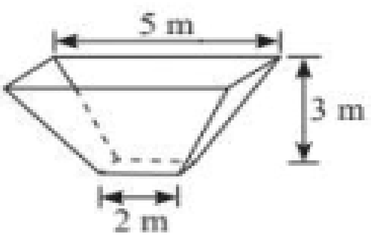
Tam giác đều ABC có diện tích: $S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác đều $A'B'C'$ có cạnh $A'B' = \frac{AB}{2}$ nên diện tích $S' = \frac{AB^2\sqrt{3}}{16} = \frac{S}{4}$.

Do đó, thể tích khối chóp cụt đều được tạo thành là:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS'} + S'\right) = \frac{1}{3}a\left(S + \frac{S}{2} + \frac{S}{4}\right) = \frac{7aS}{12} = \frac{7a}{12}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}.$$

Tính thể tích của một bồn chứa có dạng khối chóp cụt đều có kích thước được cho như trong Hình 20.



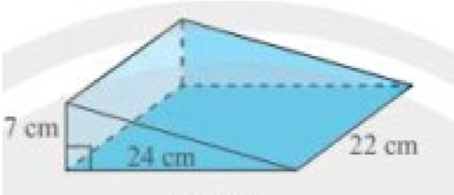
Hình 20

Lời giải

Thể tích hình chóp cụt là:

$$V = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\left(5^2 + \sqrt{5^2\cdot 2^2} + 2^2\right) = 13\left(m^3\right)$$

3 Tính thể tích cái nêm hình lăng trụ đứng có kích thước như trong Hình 21.



Hình 21

Lời giải

Thể tích cái nêm là $V = \frac{1}{2}.7.24.22 = 1848\left(\text{ cm}^3\right)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

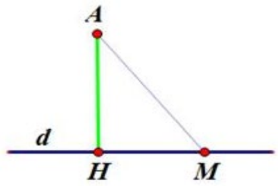
Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Phương pháp:

①. Xác định hình chiếu H của A trên d

②. Khi đó ta có: $d\left(A,d\right) = AH$

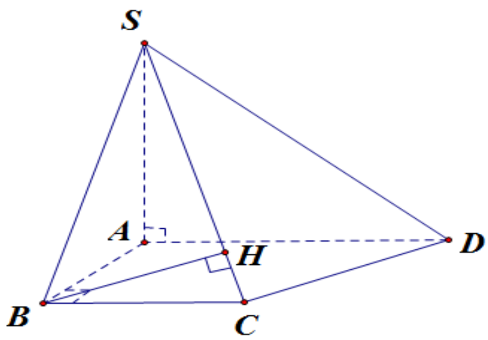
③. Tính độ dài AH bằng kiến thức hình học phẳng cơ bản, các định lý và hệ thức lượng trong tam giác.



2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC

Lời giải



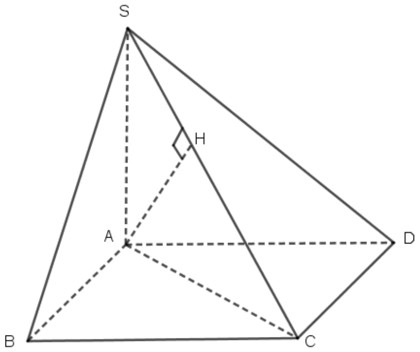
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Trong ΔSBC dựng đường cao $BH \Rightarrow d\left(B;SC\right) = BH$.

$SB = 2a$; $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{BS.BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng SC.

Lời giải



+) Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$.

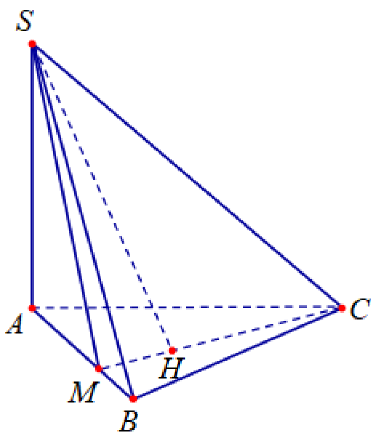
+) Kẻ $AH \perp SC$, suy ra $d(A;SC) = AH$.

+) Ta có tam giác ASC vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{2a^2} \quad AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, $AB = AC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \frac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm S đến đường thẳng CM.

Lời giải



Ta có $CM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$, $SM = \sqrt{4a^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{10}}{3}$, $SC = a\sqrt{6}$.

Đặt $p = \frac{SM + MC + SC}{2}$.

Diện tích tam giác SMC: $S_{\Delta SMC} = \sqrt{p(p - SM)(p - CM)(p - SC)} = \frac{a^2\sqrt{11}}{3}$

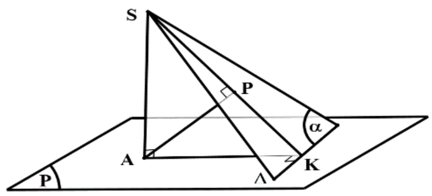
Suy ra khoảng cách từ S đến CM: $SH = \frac{2S_{\Delta SMC}}{CM} = \frac{a\sqrt{110}}{5}$.

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1. Phương pháp:

Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α).

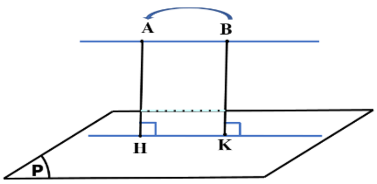
①. A là chân đường cao, tức là $A \equiv H$.



♦. Dựng $AK \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp (SAK) \Rightarrow (\alpha) \perp (SAK)$ và $(\alpha) \cap (SAK) = SK$.

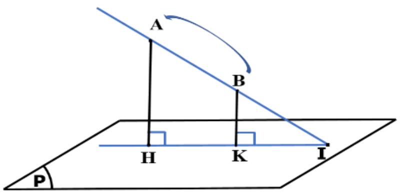
♦. Dựng $AP \perp SK \Rightarrow AP \perp (\alpha) \Rightarrow d\left(A,(\alpha)\right) = AP.$

②. Dựng đường thẳng $AB \parallel (P)$.



♦. Khi đó ta có: $d\left(B,(P)\right) = d\left(A,(P)\right)$.

③.Đường thẳng AB cắt (P) tại I:

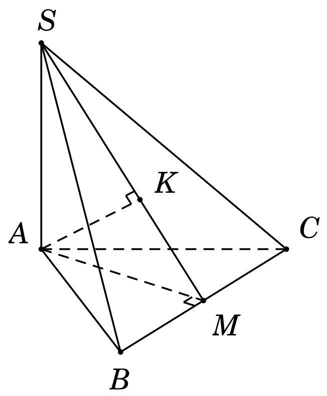


♦. Khi đó ta có: $\dfrac{d\left(B,(P)\right)}{d\left(A,(P)\right)} = \dfrac{BK}{AH} = \dfrac{BI}{AI}$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK.$ (2)

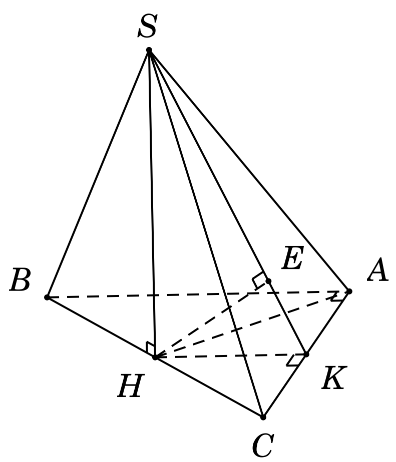
Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d[A,(SBC)] = AK.$

Trong ΔSAM, có $AK = \frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$

Vậy $d[A,(SBC)] = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a,\ AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

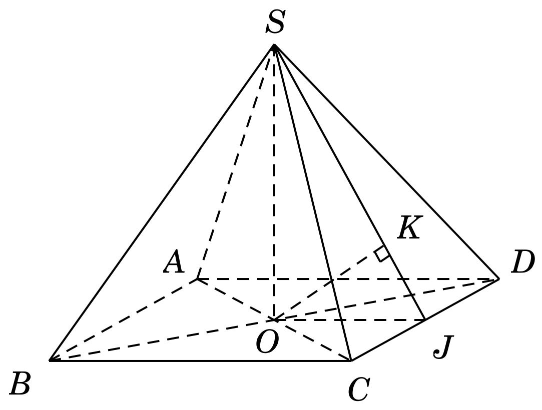
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ $(E \in SK)$.

Khi đó $d\left[B,(SAC)\right]=2d\left[H,(SAC)\right]=2HE=2.\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $d\left[A,(SCD)\right]=2d\left[O,(SCD)\right]$.

Gọi J là trung điểm CD, suy ra $OJ\perp CD$.

Gọi K là hình chiếu của O trên SJ, suy ra $OK\perp SJ$.

Khi đó $d\left[O,(SCD)\right]=OK=\dfrac{SO.OJ}{\sqrt{SO^2+OJ^2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Vậy $d\left[A,(SCD)\right]=2OK=\dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* có $AB=3a, BC=2a, \widehat{ABC}=60°$. Biết $SA\perp(ABC)$

.

a) Tính khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng (SAB).

b) Tính khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

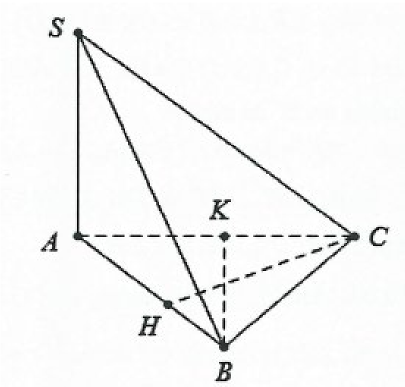
a) Dựng $CH\perp AB$ ta có: $\begin{cases}CH\perp AB\\CH\perp SA\end{cases}\Rightarrow CH\perp(SAB)$.

Do đó

$d\left(C;(SAB)\right)=CH=CB\sin\widehat{ABH}=2a\sin 60°=a\sqrt{3}$.

b) Dựng $CK\perp AC\Rightarrow CK\perp(SAC)$.

Ta có: $d\left(B;(SAC)\right)=CH=\dfrac{2S_{ABC}}{AC}=\dfrac{AB.BC\sin\widehat{ABC}}{AC}$



Trong đó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA.BC\cos\widehat{B}$

$$\Rightarrow AC = a\sqrt{7} \Rightarrow d\left(B;(SAC)\right) = \frac{3a.2a.\sin 60^\circ}{a\sqrt{7}} = \frac{3a\sqrt{21}}{7}$$

Ví dụ 5. Cho hình *chóp S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tam giác *SAB* cân tại *S* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *H* là trung điểm của *AB*.

a) Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng (SHD).

b) Tính khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng (SHC).

Lời giải

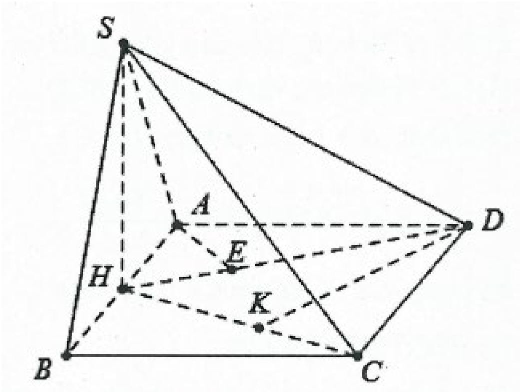
a) Do tam giác *SAB* cân tại *S* nên $SH \perp AB$.

Ta có: $HA = HD = \frac{a}{2}$.

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Dựng

$AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow d\left(A;(SHD)\right) = AE$.



Mặt khác $AE = \frac{AH.AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

b) Dựng $DK \perp CH \Rightarrow d\left(D;(SHC)\right) = DK$.

Ta có: $CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}, S_{HCD} = \frac{1}{2}CD.d\left(H;CD\right) = \frac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Do đó $d\left(D;(SHC)\right) = \frac{2S_{HCD}}{CH} = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *B* có $AD = 3a, AB = BC = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$.

a) Tính khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng (SAD).

b) Tính khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Dựng $CE \perp AD \Rightarrow CE \perp (SAD)$.

Khi đó $d\left(C;(SAD)\right) = CE$, do *ABCE* là hình vuông cạnh 2*a* nên

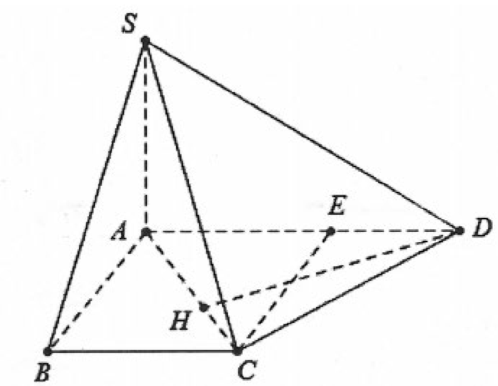
$CE = AE = 2a \Rightarrow d\left(C;(SAD)\right) = 2a$.

b) Dựng $DH \perp AC \Rightarrow DH \perp (SAC)$.

Khi đó $d\left(D;(SAC)\right) = DH$.

Ta có: *ABCE* là hình vuông nên $\widehat{CAD} = 45^\circ$

Do đó $DH = AD\sin 45^\circ = 3a.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$



Dạng 3: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp:

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- *Cách 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với b. Khoảng cách từ b đến (P) là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 2:* Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 3:* Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

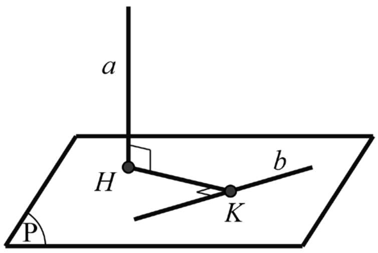
Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

- *Cách 1:* Khi $a \perp b$

  + Dựng một $(P) \supset b, (P) \perp a$ tại H.

  + Trong (P) dựng $HK \perp b$ tại K.

  + Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b.

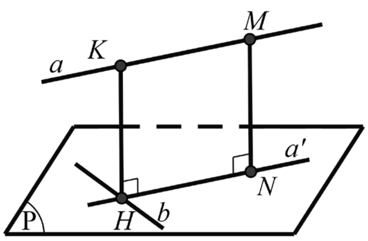


- *Cách 2:*

  + Dựng $(P) \supset b, (P) // a$.

  + Dựng $a' = hch_{(P)}a$, bằng cách lấy $M \in a$ dựng đoạn $MN \perp (\alpha)$, lúc đó a’ là đường thẳng đi qua N và song song a.

  + Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK // MN \Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung.



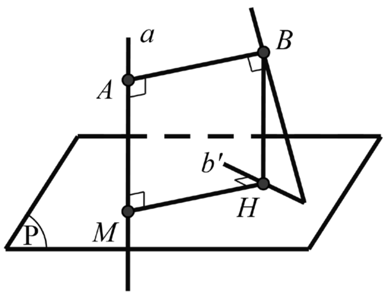
- *Cách 3:*

  + Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm M.

  + Dựng hình chiếu b’ của b trên (P).

  + Dựng hình chiếu vuông góc H của M trên b’.

  + Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại điểm B.



+ Qua B dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại điểm A. Khi đó, AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

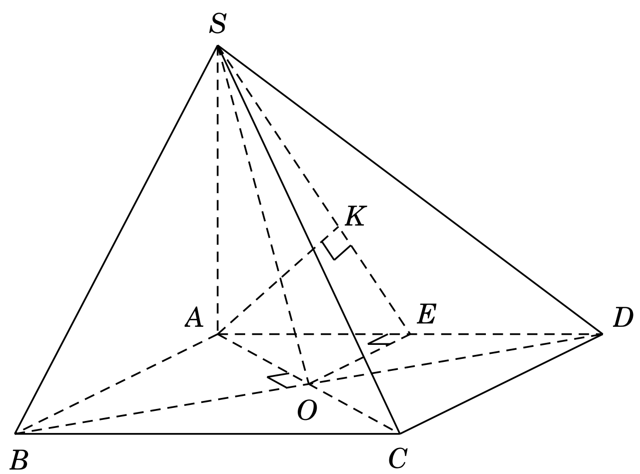
Lời giải

Ta có $d[AD,SC]=d[AD,(SBC)]=d[A,(SBC)]$.

Kẻ $AK\perp SB$. Khi đó $d[A,(SBC)]=AK=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^0$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

Lời giải



Ta có $\Delta SAB=\Delta SAD$ $(c-g-c)$, suy ra $SB=SD$.

Lại có $\widehat{SBD}=60^0$, suy ra ΔSBD đều cạnh $SB=SD=BD=a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Gọi E là trung điểm AD, suy ra $OE\parallel AB$ và $AE\perp OE$.

Do đó $d[AB,SO]=d[AB,(SOE)]=d[A,(SOE)]$.

Kẻ $AK\perp SE$.

Khi đó $d[A,(SOE)]=AK=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

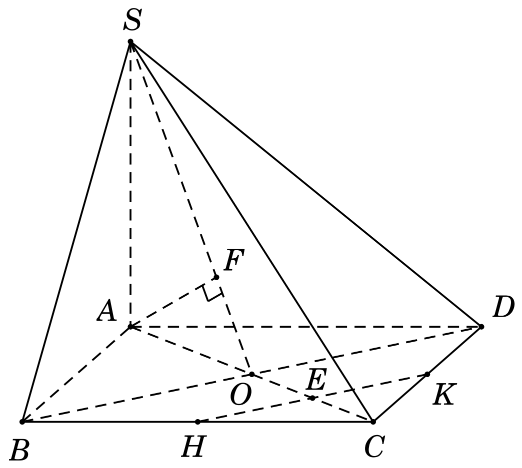
Lời giải

Ta có $BD\perp(SAC)$. Kẻ $OK\perp SA$.

Khi đó $d\left[SA,BD\right]=\dfrac{SO.OA}{\sqrt{SO^2+OA^2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}.$

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

Lời giải



Gọi $E=HK\cap AC$.

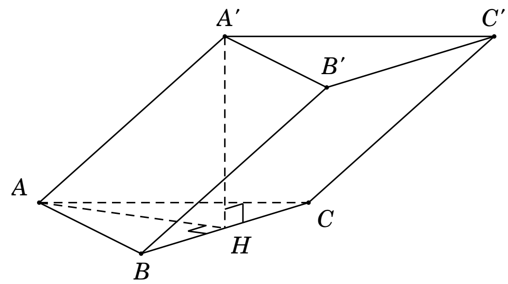
Do $HK\parallel BD$ nên $d\left[HK,SD\right]=d\left[HK,(SBD)\right]=d\left[E,(SBD)\right]=\dfrac{1}{2}d\left[A,(SBD)\right].$

Kẻ $AF\perp SO$. Khi đó $d\left[A,(SBD)\right]=AF=\dfrac{SA.AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\dfrac{2a}{3}.$

Vậy $d\left[HK,SD\right]=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{a}{3}.$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

Lời giải



Do $BB'\parallel AA'$ nên $d\left[BB',A'H\right]=d\left[BB',(AA'H)\right]=d\left[B,(AA'H)\right]$.

Ta có $\begin{cases}BH\perp AH\\BH\perp A'H\end{cases}\Rightarrow BH\perp(AA'H)$ nên $d\left[B,(AA'H)\right]=BH=\dfrac{BC}{2}=a.$

Vậy $d[BB', A'H] = a$.

Dạng 4. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, *OB = a*, $OC = a\sqrt{3}$, (*a* > 0) và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Tính hể tích khối tứ diện theo *a* .

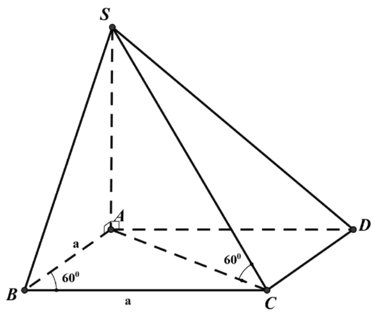
Lời giải

Ta có: $S_{OBC} = \frac{1}{2}OB.OC = \frac{1}{2}a(a\sqrt{3}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thế tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3}S_{OBC}.OA = \frac{1}{3}(\frac{a^2\sqrt{3}}{2})(a\sqrt{3}) = \frac{a^3}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh *a*, $\widehat{ABC} = 60°$, cạnh *SA* vuông góc với đáy và *SC* tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp *S.ABCD* theo a bằng

Lời giải



$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

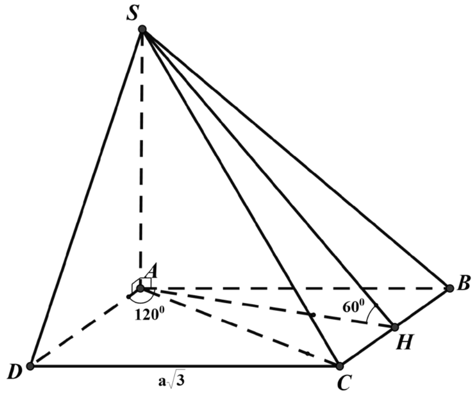
Ta có ΔABC đều nên $AC = a$.

$SA = AC.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120°$ và cạnh bên *SA* vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) và đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

Lời giải



Tam giác SAH vuông tại A:

$SA = AH.\tan 60° = \frac{3a}{2}$

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\frac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60°$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

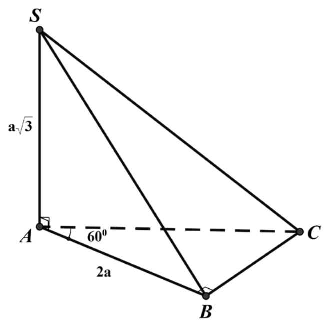
Lời giải

Xét tam giác *ABC* có:

$BC = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 2a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = 2a^3$.



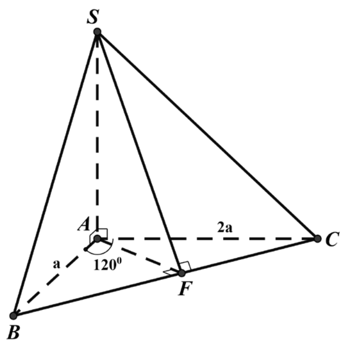
Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với đáy và AB = a, AC = 2a, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp S.ABC bằng

Lời giải

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$BC = a\sqrt{7};\ AF = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7};\ SA = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$

$V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{7}}{7} = \frac{a^3\sqrt{21}}{14}$



Dạng 5 : Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Để xác định đường cao hình chóp ta vận dụng định lí sau

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)\perp(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\\a\subset(\alpha)\\a\perp d\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(\beta).$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B $BA=3a, BC=4a;$ mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30°$. Thể tích khối chóp S.ABC

Lời giải

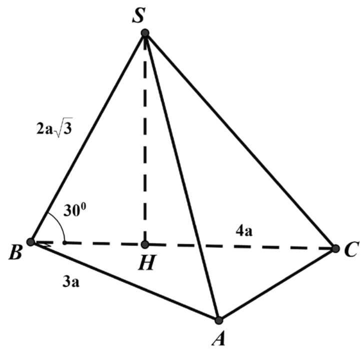
Ta có:

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC=6a^2$

Trong tam giác vuông SBH:

$SH=SB.\sin\widehat{SBC}=a\sqrt{3}$.

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SH=2a^3\sqrt{3}$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD Thể tích khối chóp S. ABCD

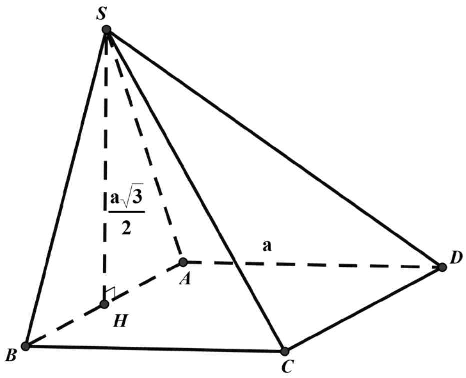
Lời giải

Ta có:

$S_{ABCD}=a^2$

Tam giác SAB đều nên $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $V=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc $45°$. Thể tích khối chóp S.ABC bằng

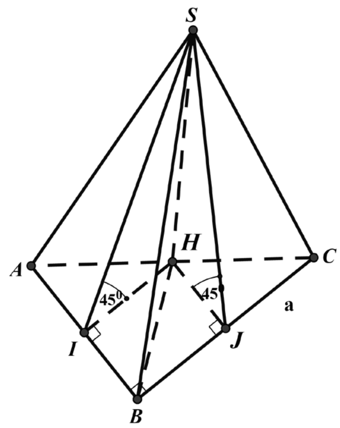
Lời giải

Ta có: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BC^2=\dfrac{1}{2}a^2$.

Tam giác SHI vuông cân tại H nên

$SH=HI=\dfrac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{a^3}{12}$



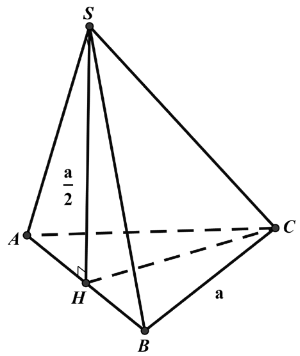
Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Thể tích khối chóp S.ABC bằng

Lời giải

Ta có tam giác ABC đều cạnh bằng a nên $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SAB vuông cân tại S và có $AB=a$ nên $SH=\frac{a}{2}$

$$V=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$



Dạng 6: Khối chóp đều

1. Phương pháp

1. Một số lưu ý

a) Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

b) Kết quả: Trong hình chóp đều:

- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

Chú ý:

- Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều.
- Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng.
- Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC*

Lời giải

Tam giác *ABC* đều cạnh *a* nên

$$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

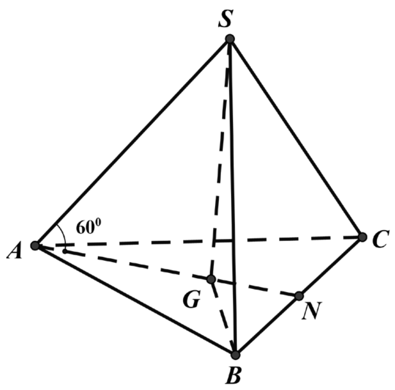
Vì *G* là trọng tâm tam giác *ABC* nên

$$AG=\frac{2}{3}AN=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác *SAG* có

$$SG=AG.\tan 60°=a$$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.



Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy ABCD có diện tích là $16cm^2$, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}cm^2$. Tính chiều cao của hình chóp S.ABCD

Lời giải

Ta có $S_{ABCD}=16cm^2\Rightarrow CD=4cm$

$$S_{SCD}=8\sqrt{3}cm^2=S_{SAB}$$

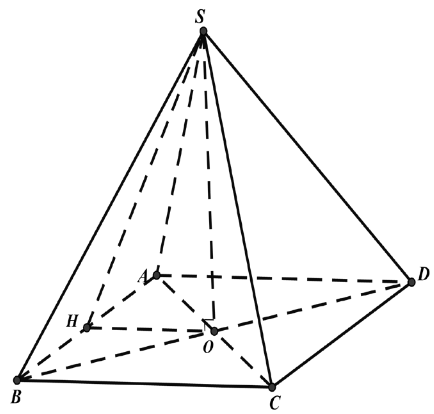
$$\Rightarrow\frac{1}{2}SH.AB=8\sqrt{3}cm^2$$

$$\Rightarrow SH=4\sqrt{3}cm$$

Xét ΔSOH vuông tại O có:

$$SO=\sqrt{SH^2-OH^2}$$

$$=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-2^2}cm=2\sqrt{11}cm$$



Ví dụ 3: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có các cạnh bên bằng $\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Thể tích khối chóp S.ABC bằng

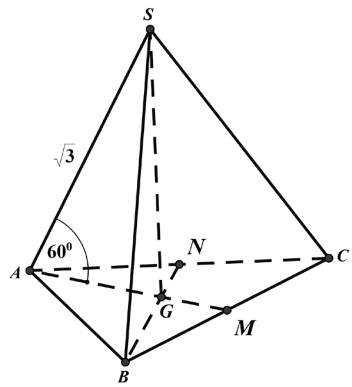
Lời giải

Xét ΔSGA vuông tại *G* có :

$$SG=SA.\sin 60^0=\frac{3}{2};$$

$$AG=SA.\cos 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AM=\frac{3}{2}AG=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$



ΔABC đều $\Rightarrow AM=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

$$\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}} AM = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{ABC}.SM = \frac{1}{3}.\frac{9\sqrt{3}}{16}.\frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{32}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Tính thể tích chóp đều S.ABC bằng

Lời giải

Ta có tam giác ABC đều nên

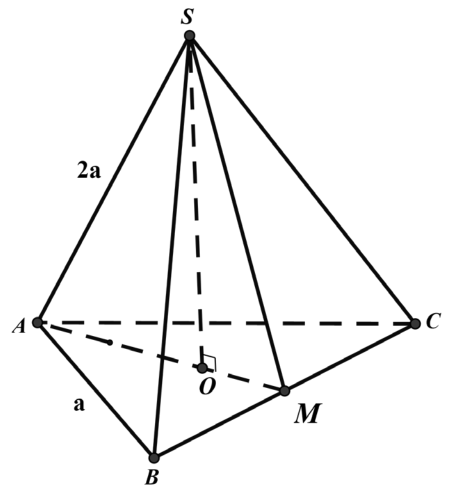
$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông SOA

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$

Vậy $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.



Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

Ta có: $AC = 2a.\sqrt{2}$

$\Rightarrow$

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

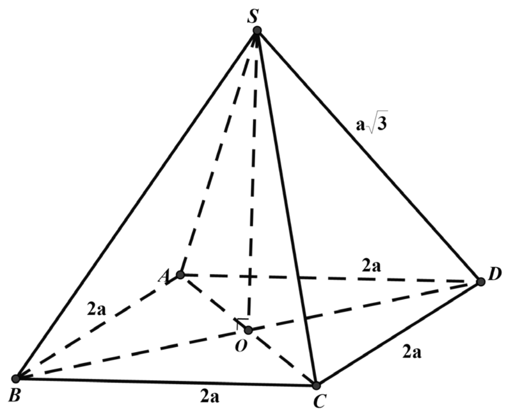
Δ SAO vuông tại O có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$$

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO$$

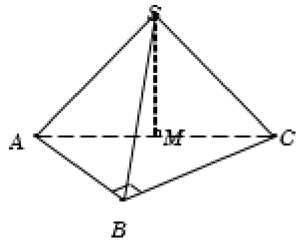
$$= \frac{1}{3}.4a^2.a = \frac{4a^3}{3}$$



Dạng 7: Khối chóp có hình chiếu lên mặt phẳng đáy

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AC. Theo giả thiết, ta có $SM\perp(ABC)\Rightarrow SM\perp AC.$

Tam giác vuông ABC, có $AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}.$

Tam giác vuông SMA, có

$$SM=\sqrt{SA^2-AM^2}=\sqrt{SA^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

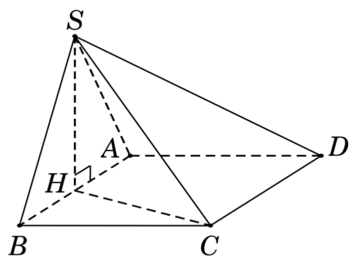
Diện tích tam giác vuông cân ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{2}.$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SM=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}.$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB, góc giữa SC và mặt đáy bằng 30^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là HC. Do đó $30^0=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,HC}=\widehat{SCH}$.

Tam giác vuông BCH, có $HC=\sqrt{BC^2+BH^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$

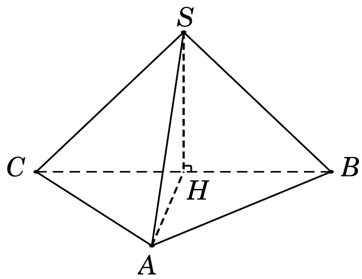
Tam giác vuông SHC, có $SH=HC.\tan\widehat{SCH}=\frac{\sqrt{15}}{6}.$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=1$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{\sqrt{15}}{18}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Vì $SH\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SA trên mặt đáy (ABC) là HA. Do đó $60^0=\widehat{SA,(ABC)}=\widehat{SA,HA}=\widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

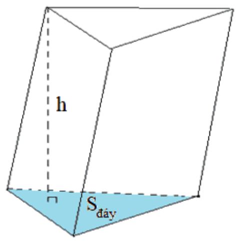
Tam giác vuông SHA, có $SH=AH.\tan\widehat{SAH}=\frac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Dạng 8. Thể tích lăng trụ đứng, lăng trụ đều

Công thức tính thể tích lăng trụ



- Thể tích khối lăng trụ: $\boxed{V=S_{đáy}.h}$
- $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
- h: Chiều cao của khối chóp.

Chú ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.

$\boxed{V=S_{đáy}.h}$

Công thức tính thể tích khối Lập phương

- Thể tích khối lập phương: $V=a^3$

Chú ý: Thể tích khối lập phương bằng tích 3 kích thước của nó.

Công thức tính thể tích khối hộp chữ nhật

- Thể tích khối hộp chữ nhật: $V=a.b.c$

Chú ý: Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích 3 kích thước của nó.

Ví dụ 1: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

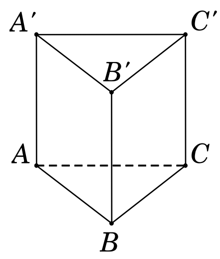
Lời giải

Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a.

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h=AA'=a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=S.h=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Ví dụ 2: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

Lời giải

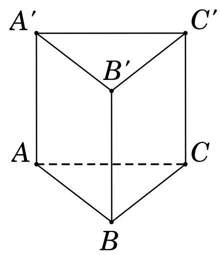
Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA'\perp(ABC)$.

Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq}=3.S_{ABB'A'}$

$\Leftrightarrow 3a^2=3.(AA'.AB)\Leftrightarrow 3a^2=3.(AA'.a)\Rightarrow AA'=a.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



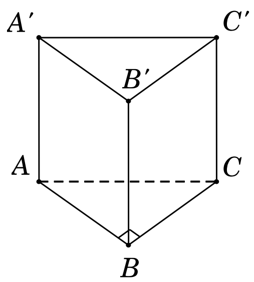
Ví dụ 3: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại B,

suy ra $BA=BC=\frac{AC}{\sqrt{2}}=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V=S_{\Delta ABC}.BB'=\frac{a^3}{2}$.



Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$, $AA'=2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=a^3\sqrt{15}$.

Ví dụ 5: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}$.

Lời giải

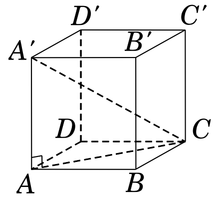
Đặt cạnh của khối lập phương là x $(x > 0)$.

Suy ra $CC' = x$; $AC = x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC', có

$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a.$

Vậy thể tích khối lập phương $V = a^3$.



Dạng 9. Thể tích lăng trụ xiên

Ví dụ 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

Lời giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$,

suy ra $A'O \perp (ABCD)$.

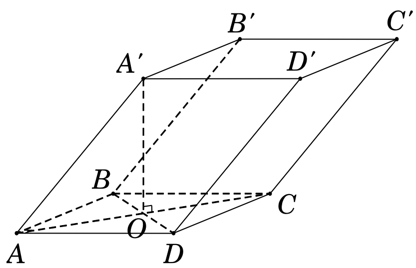
Tam giác vuông $A'OA$, có

$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$

.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{\Delta ABCD}.A'O = 4a^3\sqrt{2}.$



Ví dụ 2: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

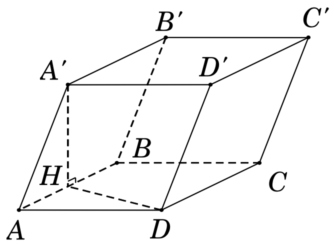
Lời giải

Theo giả thiết, ta có $A'H \perp AB$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.



Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

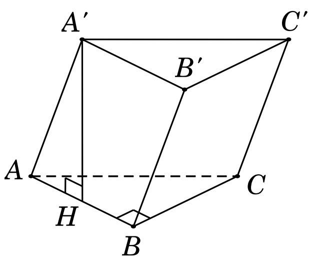
Tam giác vuông $A'HA$, có

$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = a^2$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.



Ví dụ 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC}.A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45^0. Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

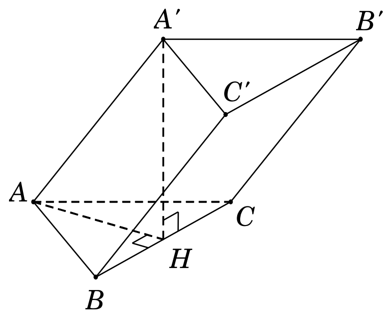
Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH = \sqrt{3}$. Vì $A'H \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH. Do đó

$45^0 = \widehat{AA',(ABC)} = \widehat{AA',AH} = \widehat{A'AH}$.

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H = HA = \sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \sqrt{3}$.

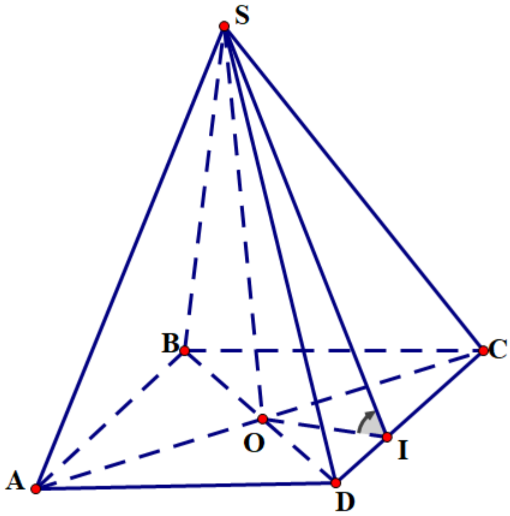
Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = 3$.



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo, $\widehat{ABC} = 60^o, SO \perp (ABCD), SO = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải



Kẻ $OI \perp CD; OH \perp SI$

$SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp CD$

Ta có: $CD \perp SO, CD \perp OI$ nên $CD \perp (SOI)$. Suy ra $CD \perp OH$

Mà $OH \perp SI$ nên $OH \perp (SCD)$

Ta có ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $AC = a, OC = \frac{a}{2}, \widehat{ACD} = 60^\circ$ $OI = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Tam giác SOl vuông tại O có đường cao $\mathrm{OH}: \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2}$

Suy ra $OH = \frac{a\sqrt{51}}{17}$

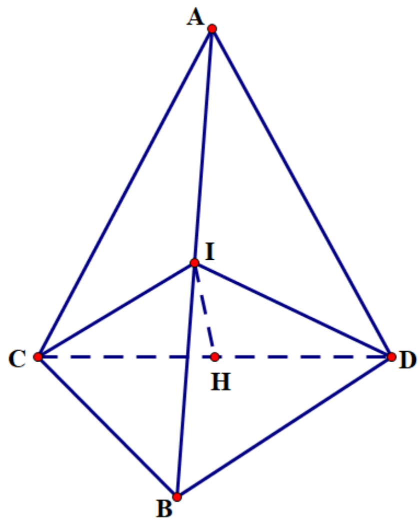
$d(SO,(SCD)) = d(O,(SCD)) = OH = \frac{a\sqrt{51}}{17}$

Bài 2. Cho hai tam giác cân ABC và ABD có đáy chung AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

b) Xác định đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Lời giải



a) Gọi I là trung điểm của AB

ΔABC cân tại $C \Rightarrow CI \perp AB$

ΔABD cân tại $D \Rightarrow DI \perp AB$

$\Rightarrow AB \perp (CDI) \Rightarrow AB \perp CD$

b) Kẻ $IH \perp CD (H \in CD)$

$AB \perp (CDI) \Rightarrow AB \perp IH$

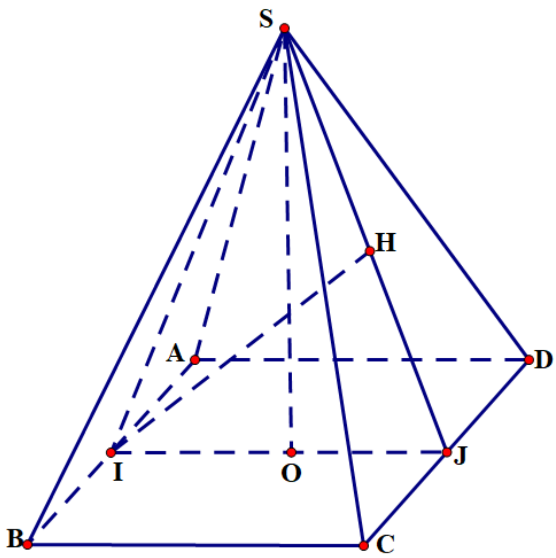
Vậy IH là đoạn vuông góc chung của AB và CD.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh $AB \perp (SIJ)$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Lời giải



a) Gọi O là tâm của đáy

$\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$

I là trung điểm của AB
J là trung điểm của CD
$\Rightarrow IJ$ là đường trung bình của hình vuông $ABCD$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow I//AD\\ AB\perp AD\end{array}\right\}\Rightarrow IJ\perp AB$$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}SO\perp AB\\ IJ\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp (SIJ)$$

b) Kẻ $IH\perp SJ\left(H\in SJ\right), OK\perp SJ\left(K\in SJ\right)\Rightarrow IH//OK$
O là trung điểm của $IJ\Rightarrow IH=2OK$
Ta có:

$$\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=IH$$

O là trung điểm của $IJ, IH//OK\Rightarrow IH=2OK$
O là trung điểm của BD

J là trung điểm của CD
$\Rightarrow OJ$ là đường trung bình của ΔBCD

$$\Rightarrow OJ=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$$

ΔABC vuông tại $B\Rightarrow AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}\Rightarrow OA=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔSAO vuông tại $O\Rightarrow SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$
ΔSOJ vuông tại O có đường cao OK

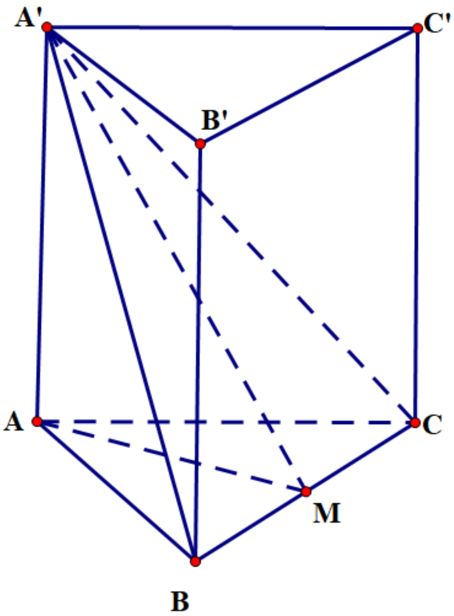
$$\Rightarrow OK=\frac{SO.OJ}{\sqrt{SO^2+OJ^2}}=\frac{a\sqrt{42}}{14}$$

$$\Rightarrow d\left(AB,CD\right)=IH=2OK=\frac{a\sqrt{42}}{7}$$

Bài 4. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=a$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60^o.

a) Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.
b) Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải



a) Gọi M là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$

Mà $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (AA'M)$. Suy ra $BC \perp A'M$

Mặt khác $(ABC) \cap (A'BC) = BC$

Nên $((ABC);(A'BC)) = \widehat{A'MA} = 60^\circ$

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$AA' = AM \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{3a}{2}$

b) $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{3a}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Bài 5. Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình 22) có mặt sàn cầu cách mặt đường $3,5m$, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là $0,8m$. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b.

Hình 22

Lời giải

Vì tay vịn cầu song song với mặt đường nên khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b chính bằng khoảng cách từ đường thẳng a xuống mặt đường.

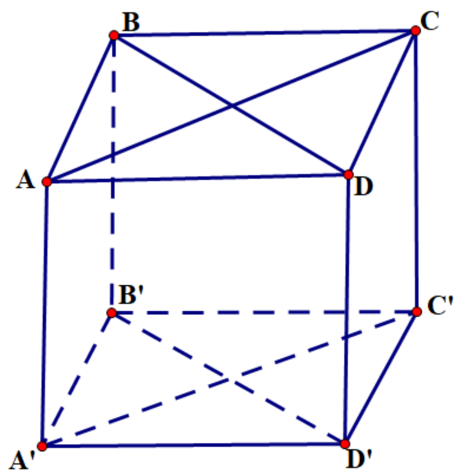
Khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b bằng: $3,5+0,8=4,3(m)$.

Bài 6. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA'=2a$ và đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB=a$ và $AC=a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AA'.

b) Tính thể tích của khối hộp.

Lời giải



a) Hình thoi $ABCD$ có $AB=BC=a$

Mà $AC=a\sqrt{3}$. Nên $\widehat{ABC}=120^\circ$. Suy ra $\widehat{ABD}=60^\circ$

Do đó, $AD=a$

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Do ABCD là hình thoi nên $AO\perp BD; AO=\frac{a}{2}$

Vì $AA'\perp(ABCD)$ nên $AA'\perp AO$

$d(BD,AA')=AO=\frac{a}{2}$

b) $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{3}\cdot a=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

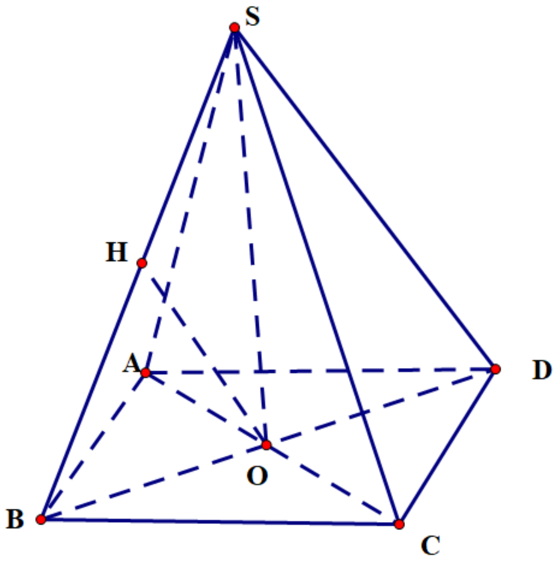
$V_{ABCD\cdot A'B'C'D'}=AA'\cdot S_{ABCD}=a^3\sqrt{3}$

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a và có O là giao điểm hai đường chéo của đáy.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB.

b) Tính thể tích của khối chóp.

Lời giải



a) Kẻ $OH \perp SB\left(H \in SB\right)$

$S.ABC$ D là chóp tứ giác đều $\Rightarrow SO \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SO \perp AC$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$

$\Rightarrow AC \perp \left(SBD\right) \Rightarrow AC \perp OH$

Mà $OH \perp SB$

$\Rightarrow d\left(AC, SB\right) = OH$

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔSBO vuông tại $O \Rightarrow SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

ΔSBO vuông cân tại O có đường cao OH

$\Rightarrow d\left(AC, SB\right) = OH = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2}$

b) $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Bài 8. Tính thể tích của khối chóp cụt lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}, OO' = a$.

Lời giải

Diện tích đáy lớn là: $S=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

Diện tích đáy nhỏ là: $S'=\frac{3\sqrt{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{8}$ Thể tích chóp cụt là:

$$V=\frac{1}{3}\cdot a\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}a^2}{8}\right)}+\frac{3\sqrt{3}a^2}{8}\right)=\frac{7\sqrt{3}a^3}{8}$$

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $d=a\sqrt{2}$. **C.** $d=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $AD\parallel BC$ nên $d\left[D,(SBC)\right]=d\left[A,(SBC)\right]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK\perp SB$.

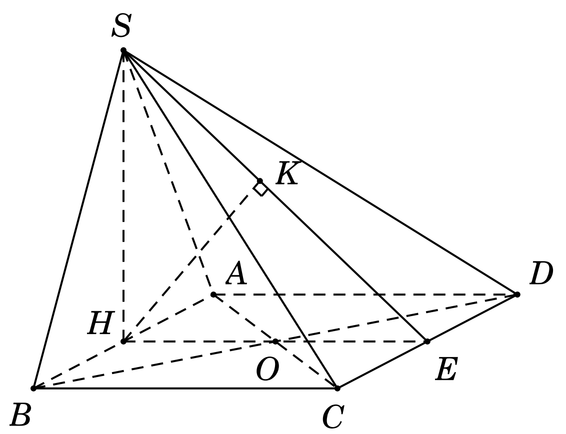
Khi $d\left[A,(SBC)\right]=AK=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d=1$. **B.** $d=\sqrt{2}$. **C.** $d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH\perp AB.$ Do đó $SH\perp(ABCD).$

Do $AH \parallel CD$ nên $d\left[A,(SCD)\right]=d\left[H,(SCD)\right]$.

Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Khi đó $d\left[H,(SCD)\right]=HK=\dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Vậy $d\left[A,(SCD)\right]=HK=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $d=a$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $d=a\sqrt{3}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Do $AB \parallel CD$ nên $d\left[B,(SCD)\right]=d\left[A,(SCD)\right]$. Kẻ $AE\perp SD$ tại E.

Khi đó $d\left[A,(SCD)\right]=AE$.

Tam giác vuông SAD, có $AE=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d\left[B,(SCD)\right]=AE=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên $SA=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{285}}{38}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{285}}{38}$. **D.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $d\left[O,(SBC)\right]=\dfrac{1}{2}d\left[A,(SBC)\right]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK\perp SB$.

Khi đó $d\left[A,(SBC)\right]=AK$.

Tam giác vuông SAB, có $AK=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{285}}{19}$.

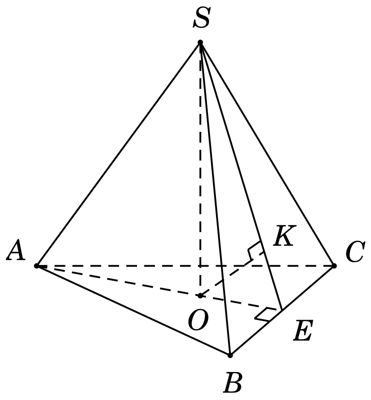
Vậy $d\left[O,(SBC)\right]=\dfrac{1}{2}AK=\dfrac{a\sqrt{285}}{38}$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\frac{a}{4}.$ **B.** $d=\frac{3a}{4}.$ **C.** $d=\frac{3}{4}.$ **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Do hình chóp $S.ABC$ đều nên suy ra $SO\perp(ABC)$.

Ta có $d\left[A,(SBC)\right]=3d\left[O,(SBC)\right]$.

Gọi E là trung điểm BC; Kẻ $OK\perp SE$.

Khi đó $d\left[O,(SBC)\right]=OK.$

Tính được $SO=\frac{a}{2}$ và $OE=\frac{1}{3}AE=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$

Tam giác vuông SOE, có $OK=\frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2+OE^2}}=\frac{a}{4}$.

Vậy $d\left[A,(SBC)\right]=3OK=\frac{3a}{4}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc 60°. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $d=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $d=a.$ **D.** $d=a\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn A

Xác định $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}$, suy ra $SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

Ta có $AD\parallel BC\Rightarrow AD\parallel(SBC)$ nên $d\left[D,(SBC)\right]=d\left[A,(SBC)\right]$.

Kẻ $AK \perp SB$. Khi đó $d\left[A,(SBC)\right] = AK = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left[D,(SBC)\right] = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{1}{2}$. **B.** $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định $60^0 = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,OB} = \widehat{SBO}$ và $SO = OB.\tan\widehat{SBO} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm BC, kẻ $OK \perp SM$. Khi đó $d\left[O,(SBC)\right] = OK$.

Tam giác vuông SOM, có $OK = \dfrac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

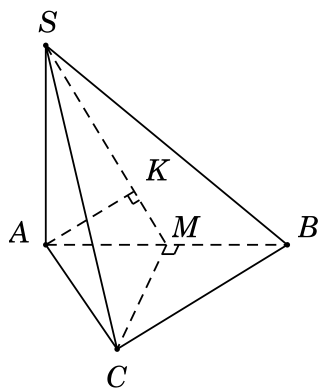
Vậy $d\left[O,(SBC)\right] = OK = \dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = \dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định $60^0 = \widehat{SB,(ABC)} = \widehat{SB,AB} = \widehat{SBA}$ và $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

Do M là trung điểm của cạnh AB nên $d\left[B,(SMC)\right] = d\left[A,(SMC)\right]$.

Kẻ $AK \perp SM$. Khi đó $d\left[A,(SMC)\right]=AK$.

Tam giác vuông SAM, có $AK=\dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $d\left[B,(SMC)\right]=AK=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC=2a,\ BC=a$. Đỉnh S cách đều các điểm $A,\ B,\ C$. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$ **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$ **C.** $d=a\sqrt{5}.$ **D.** $d=a.$

Lời giải

Chọn A

Gọi O là trung điểm AC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đỉnh S cách đều các điểm $A,\ B,\ C$ nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $d\left[M,(SBD)\right]=\dfrac{1}{2}d\left[C,(SBD)\right]$.

Kẻ $CE\perp BD$. Khi đó $d\left[C,(SBD)\right]=CE=\dfrac{CB.CD}{\sqrt{CB^2+CD^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $d\left[M,(SBD)\right]=\dfrac{1}{2}CE=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2BC,\ AB=BC=a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

A. $d=a\sqrt{3}.$ **B.** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $d=\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $d\left[E,(SAD)\right]=\dfrac{1}{2}d\left[C,(SAD)\right]$.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM\perp AD$.

Do $\begin{cases}CM\perp AD\\CM\perp SA\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAD)$ nên $d\left[C,(SAD)\right]=CM=AB=a\sqrt{3}$.

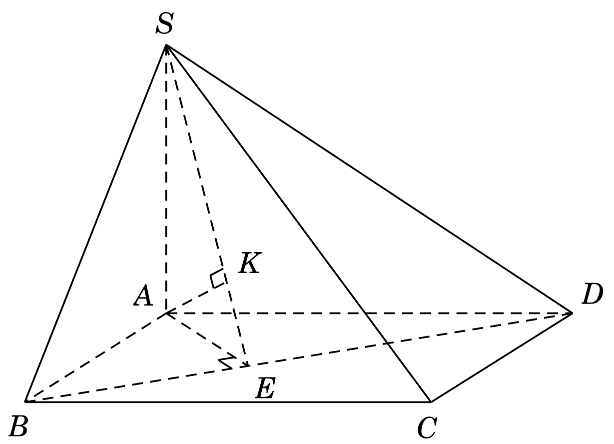
Vậy $d\left[E,(SAD)\right]=\dfrac{1}{2}CM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^0 = \widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{SD,AD} = \widehat{SDA}$ và $SA = AD.\tan\widehat{SDA} = 2a\sqrt{3}$.

Ta có $d[C,(SBD)] = d[A,(SBD)]$.

Kẻ $AE \perp BD$ và kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d[A,(SBD)] = AK$.

Tam giác vuông BAD, có $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d[C,(SBD)] = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \dfrac{2}{3}$. **B.** $d = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $d = \dfrac{2a}{3}$. **D.** $d = 1$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $AE \perp BD$, kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d[A,(SBD)] = AK$.

Tam giác vuông ABD, có $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK = \dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \dfrac{2}{3}$.

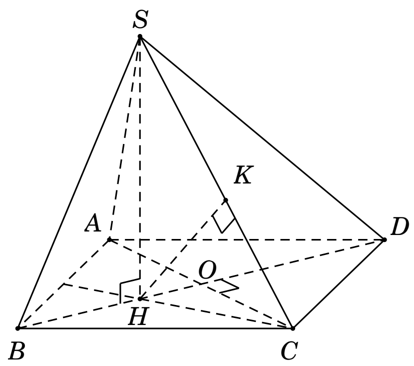
Vậy $d\left[A,(SBD)\right] = AK = \dfrac{2}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30^0. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định $30^0 = \widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{SD,HD} = \widehat{SDH}$ và $SH = HD.\tan\widehat{SDH} = \dfrac{2a}{3}$.

Ta có $d\left[B,(SCD)\right] = \dfrac{BD}{HD}.d\left[H,(SCD)\right] = \dfrac{3}{2}.d\left[H,(SCD)\right]$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.

Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $d\left[H,(SCD)\right] = HK$.

Tam giác vuông SHC, có $HK = \dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $d\left[B,(SCD)\right] = \dfrac{3}{2}HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a,\ AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d = a\sqrt{2}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $d = 2a$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông.

Do đó $CM = MA = \dfrac{AD}{2}$ nên tam gác ACD vuông tại C.

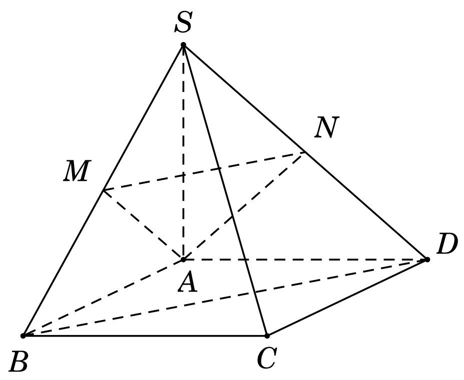
Kẻ $AK \perp SC$. Khi đó $d\left[A,(SCD)\right] = AK = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$ **B.** $d = 2a.$ **C.** $d = \dfrac{3a}{2}.$ **D.** $d = a\sqrt{5}.$

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối chóp $V_{S.ABD} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABD}.SA = \dfrac{2a^3}{3}$.

Vì $S_{\Delta SMN} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta SBD}$ nên $V_{A.SMN} = \dfrac{1}{4}V_{A.SBD} = \dfrac{a^3}{6}$.

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được $AM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AN = a\sqrt{2}$, $MN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó tính được $S_{\Delta AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $d\left[S,(AMN)\right] = \dfrac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta AMN}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

A. $d = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$ **C.** $d = \dfrac{\sqrt{6}}{4}.$ **D.** $d = \sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $AI \perp BD$.

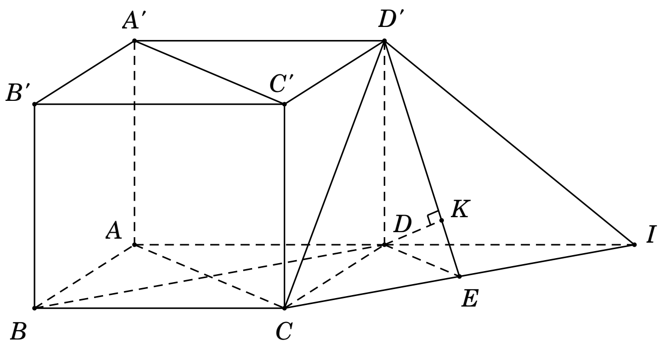
Kẻ $AK \perp A'I$. Khi đó $d\left[A,(BDA')\right] = AK = \dfrac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2 + AI^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $d = a\sqrt{2}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD \parallel CI$.

Do đó $d\left[BD, CD'\right] = d\left[BD, (CD'I)\right] = d\left[D, (CD'I)\right]$.

Kẻ $DE \perp CI$ tại E, kẻ $DK \perp D'E$. Khi đó $d\left[D, (CD'I)\right] = DK$.

Xét tam giác IAC, ta có $DE \parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE = \dfrac{1}{2}AC = a$.

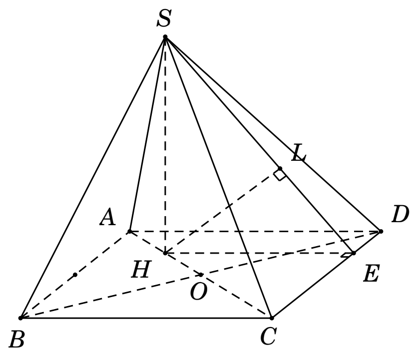
Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \dfrac{D'D.DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = \dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = 4a$.

Lời giải

Chọn A



Do $AB \parallel CD$ nên $d[SD, AB] = d[AB,(SCD)] = d[A,(SCD)] = \frac{4}{3}d[H,(SCD)]$.

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$.

Tính được $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$, $HE = \frac{3}{4}AD = 3a.$

Khi đó $d[H,(SCD)] = HL = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$

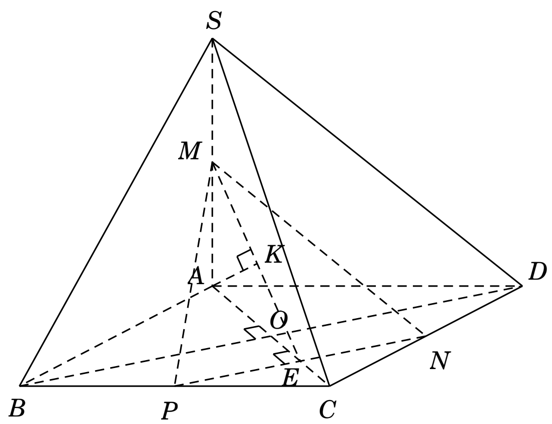
Vậy $d[SD, AB] = \frac{4}{3}HL = \frac{4a\sqrt{22}}{11}.$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d = 3\sqrt{5}.$ **B.** $d = \sqrt{5}.$ **C.** $d = 5.$ **D.** $d = 10.$

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$ nên $BD \parallel (MNP)$.

Do đó $d[BD, MN] = d[BD,(MNP)] = d[O,(MNP)] = \frac{1}{3}d[A,(MNP)]$.

Kẻ $AK \perp ME$. Khi đó $d[A,(MNP)] = AK.$

Tính được $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=10\sqrt{3}\Rightarrow MA=5\sqrt{3}$; $AE=\frac{3}{4}AC=\frac{15\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông MAE , có $AK=\frac{MA.AE}{\sqrt{MA^2+AE^2}}=3\sqrt{5}.$

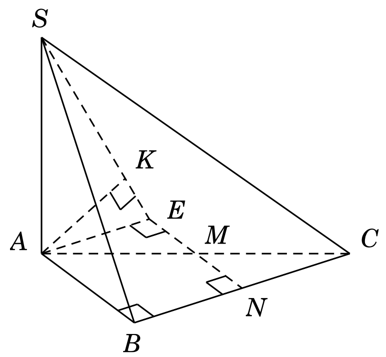
Vậy $d[BD,MN]=\frac{1}{3}AK=\sqrt{5}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB=3a$, $BC=4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60^0 . Gọi M là trung điểm của AC , tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM .

A. $d=a\sqrt{3}.$ **B.** $d=5a\sqrt{3}.$ **C.** $d=\frac{5a}{2}.$ **D.** $d=\frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}.$

Lời giải

Chọn D



Xác định $60^0=\widehat{SC,(ABC)}=\widehat{SC,AC}=\widehat{SCA}$ và $SA=AC.\tan\widehat{SCA}=5a\sqrt{3}.$

Gọi N là trung điểm BC , suy ra $MN\parallel AB$.

Lấy điểm E đối xứng với N qua M , suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.

Do đó $d[AB,SM]=d[AB,(SME)]=d[A,(SME)].$

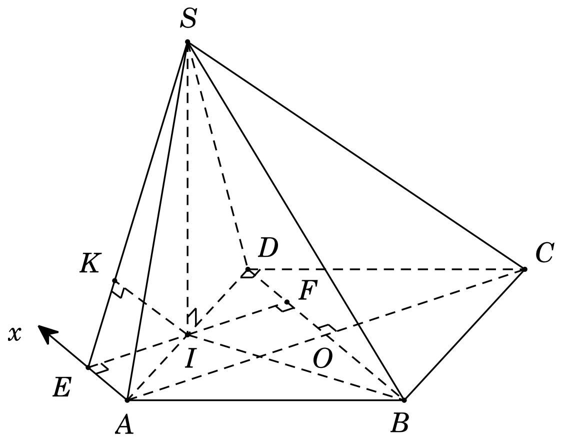
Kẻ $AK\perp SE$. Khi đó $d[A,(SME)]=AK=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}.$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

A. $d=\frac{a\sqrt{21}}{14}.$ **B.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $d=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$ **D.** $d=a.$

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AD nên suy ra $SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

Kẻ $Ax \parallel BD$. Do đó $d[BD,SA] = d[BD,(SAx)] = d[D,(SAx)] = 2d[I,(SAx)]$.

Kẻ $IE \perp Ax$, kẻ $IK \perp SE$. Khi đó $d[I,(SAx)] = IK$.

Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE = IF = \frac{AO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác vuông SIE, có $IK = \frac{SI.IE}{\sqrt{SI^2 + IE^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{14}$.

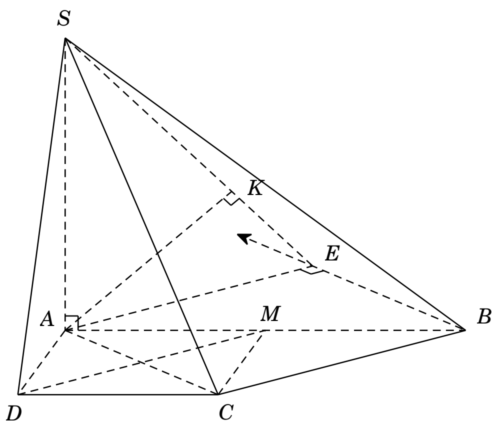
Vậy $d[BD,SA] = 2IK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = a\sqrt{2}$. **D.** $d = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^0 = \widehat{SC,(ABCD)} = \widehat{SC,AC} = \widehat{SCA}$ và $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM = AD = a$.

Xét tam giác ACB, ta có trung tuyến $CM = a = \frac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C.

Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật, suy ra $AC \parallel BE$.

Do đó $d[AC, SB] = d[AC,(SBE)] = d[A,(SBE)]$. Kẻ $AK \perp SE$.

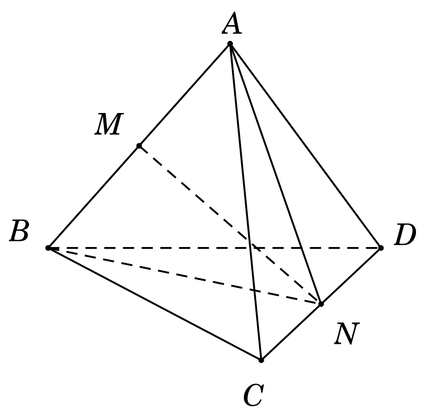
Khi đó $d[A,(SBE)] = AK = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 23: Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a.

A. $d = \frac{3a}{2}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN.$ (1)

Ta có $AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $d[AB, CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.

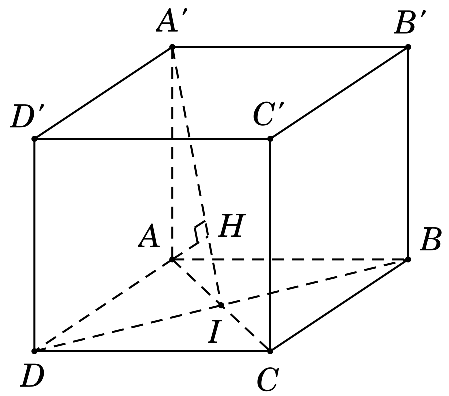
B. Độ dài đoạn AC' bằng $a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

• **Xét A** Gọi $I = BD \cap AC$ và H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng $A'I$

Dễ dàng chứng minh được $d\left(A,\left(A'BD\right)\right) = AH$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \longrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy A sai.

• **Xét B** Đường chéo hình lập phương $AC' = a\sqrt{3}$. Vậy B đúng.

• **Xét C** Ta có $AD \perp \left(CDD'C'\right) \longrightarrow d\left(A,\left(CDD'C'\right)\right) = AD = a$. Vậy C sai.

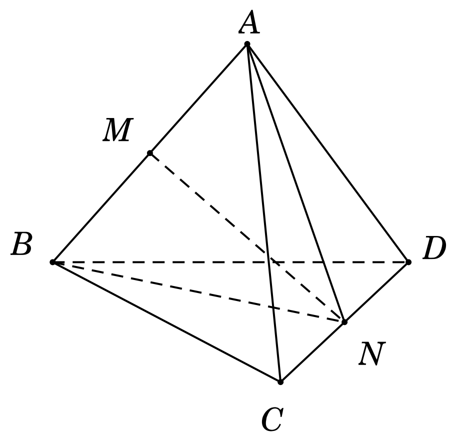
• **Xét D** Ta có $AB \perp \left(BCC'B'\right) \longrightarrow d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right) = AB = a$. Vậy D sai.

Câu 25: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN.\ (1)$

Ta có $AN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB.\ (2)$

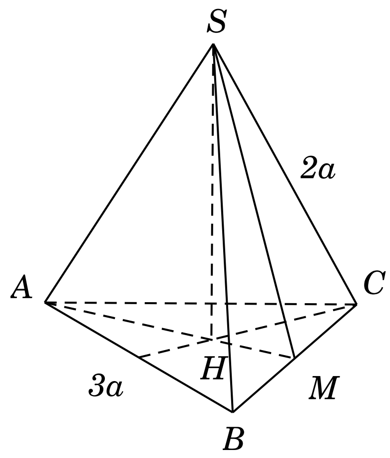
Từ (1) và (2), suy ra $d[AB,CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy là

A. $1,5a$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC và H là trọng tâm tam giác ABC.

Ta dễ dàng chứng minh được $SH \perp (ABC) \Rightarrow d(S,(ABC)) = SH$.

Ta có $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \dfrac{2}{3}AM = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = a$.

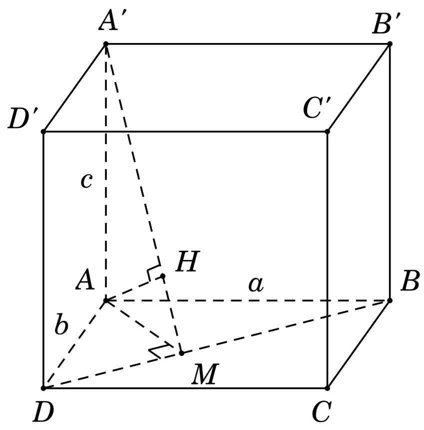
Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là sai?

A. $BD' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. **B.** $d(AB, CC') = b$.

C. $d(BB', DD') = \sqrt{a^2 + b^2}$. **D.** $d(A, (A'BD)) = \dfrac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Lời giải

Chọn D



Xét các đáp án:

• **Xét A** Ta có $BD' = AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + A'A^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Vậy A đúng.

• **Xét B** Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp CC' \end{cases} \longrightarrow d(AB, CC') = BC = b$. Vậy B đúng.

• **Xét C** Ta có $BB' \,//\, DD' \longrightarrow d(BB', DD') = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy C đúng.

• **Xét D** Gọi M là hình chiếu của A trên AB, H là hình chiếu của A trên AM. Dễ dàng chứng minh được $AH \perp (A'BD) \longrightarrow d(A, (A'BD)) = AH$.

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{a^2 + b^2} + \dfrac{1}{c^2} \longrightarrow AH = \sqrt{\dfrac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}}$. Vậy D sai.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Chiều cao khối chóp là $SA = a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 29: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 40$. **B.** $V = 192$. **C.** $V = 32$. **D.** $V = 24$.

Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC, có $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = BC^2$

$\longrightarrow$ tam giác ABC vuông tại A $\longrightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = 24$.

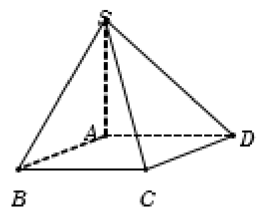
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=32.$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, $BC=2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA=a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{2a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V=\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V=2a^3\sqrt{15}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA\perp(ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA=a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.BC=2a^2$.

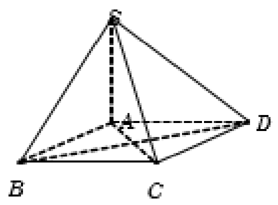
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SC=a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đường chéo hình vuông $AC=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC, ta có $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=a\sqrt{3}$.

Chiều cao khối chóp là $SA=a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

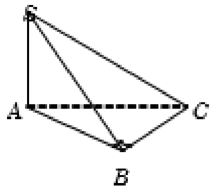
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA=BC=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = \frac{a^2}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = 2a$.

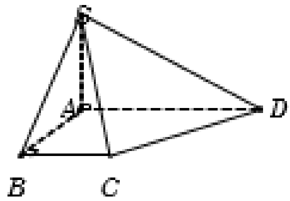
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{a^3}{3}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = 1$, $AD = 2$. Cạnh bên $SA = 2$ và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 1$. **B.** $V = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \frac{1}{3}$. **D.** $V = 2$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = \left(\frac{AD+BC}{2}\right).AB = \frac{3}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA = 2$.

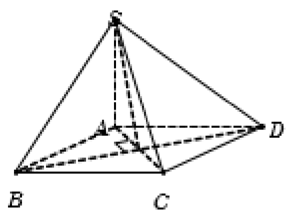
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = 1$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^0$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = a^3$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3}{3}$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD \longrightarrow SB = SD.$

Hơn nữa, theo giả thiết $\widehat{SBD} = 60^0$.

Do đó ΔSBD đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB, ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

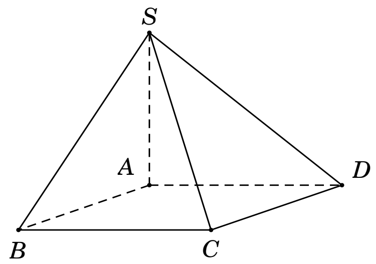
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AC = 5a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 6\sqrt{2}a^3$. **B.** $V = 4\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 2\sqrt{2}a^3$. **D.** $V = 2a^3$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông ABC, ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{6}a$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB .

Do đó $60^0 = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB, AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB.BC = 2\sqrt{6}a^2$.

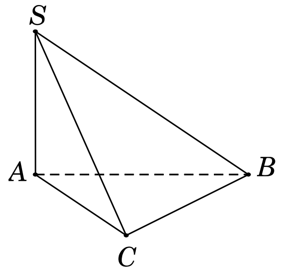
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta có

$60^0 = \widehat{SB,(ABC)} = \widehat{SB,AB} = \widehat{SBA}.$

Tam giác vuông SAB, có $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

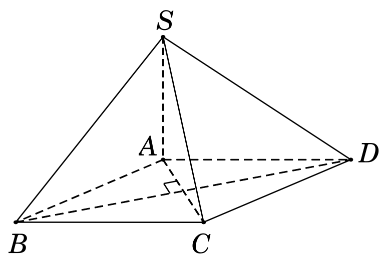
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \frac{a^3}{4}.$

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SD tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải

Chọn C



Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta có $60^0 = \widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{SD,AD} = \widehat{SDA}.$

Tam giác vuông SAD, có $SA = AD.\tan\widehat{SDA} = a\sqrt{3}.$

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2S_{\Delta BAD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

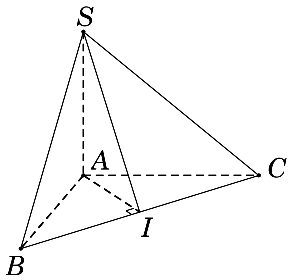
Vậy thể tích khối chop $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{2}.$

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI. Do đó $60^o = \widehat{SI,(ABC)} = \widehat{SI,AI} = \widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông tại A, suy ra trung tuyến $AI = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông SAI, có $SA = AI.\tan\widehat{SIA} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 39: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{a^3}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

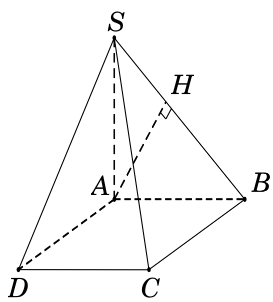
Gọi H là hình chiếu của A trên $SB \Rightarrow AH \perp SB$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A,(SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A, có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow SA = a$.

Vậy $V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{a^3}{3}$.

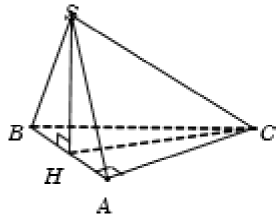


Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V = \frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABC)$.

Tam giác SAB là đều cạnh $AB = a$ nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

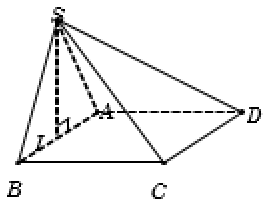
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 41: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và có I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SI \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SIA, có

$$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

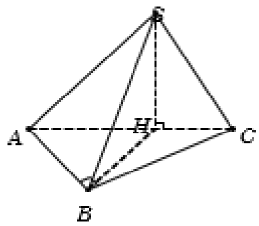
Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2a$, $AB = SA = a$. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3}{4}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $SH \perp AC$. Do $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$.

Trong tam giác vuông SAC, ta có

$SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = a\sqrt{3}$, $SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

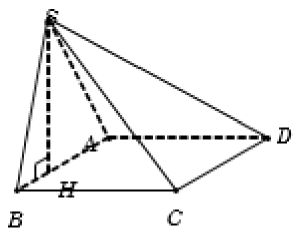
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là điểm H thỏa $AH = 2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông SAB, ta có $SA^2 = AH.AB = \dfrac{2}{3}AB.AB = \dfrac{2}{3}a^2$;

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $V=\sqrt{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\sqrt{3}$.

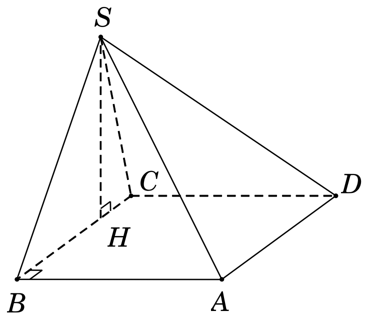
Lời giải

Chọn C

Kẻ $SH\perp BC$. Vì $(SBC)\perp(ABCD)$ theo giao tuyến BC nên $SH\perp(ABCD)$.

Ta có $\begin{cases}DC\perp BC\\DC\perp SH\end{cases}\Rightarrow DC\perp(SBC)$. Do đó $60^0=\widehat{SD,(SBC)}=\widehat{SD,SC}=\widehat{DSC}$.

Từ $DC\perp(SBC)\longrightarrow DC\perp SC.$



Tam giác vuông SCD, có $SC=\frac{DC}{\tan\widehat{DSC}}=1$.

Tam giác vuông SBC, có

$$SH=\frac{SB.SC}{BC}=\frac{\sqrt{BC^2-SC^2}.SC}{BC}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=3.$

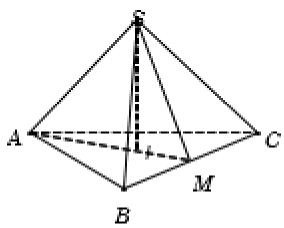
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 45: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$ Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI\perp(ABC).$

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow AI=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI=\sqrt{SA^2-SI^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{33}}{3}.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

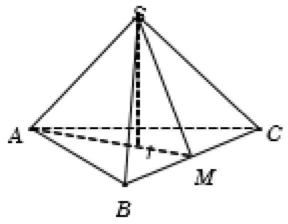
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI=\frac{\sqrt{11}a^3}{12}.$

Câu 46: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI\perp(ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow AI=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI=\sqrt{SA^2-AI^2}\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

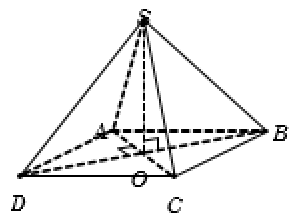
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O=AC\cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Suy ra OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Khi đó $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,OB}=\widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB, có $SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông ABC là $S_{ABCD}=AB^2=a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 48: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, BA và $O=AE\cap CF$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$.

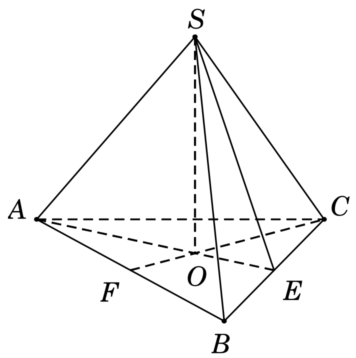
Khi đó $60^0=\widehat{(SBC),(ABC)}=\widehat{SE,OE}=\widehat{SEO}$.

Tam giác vuông SOE, có

$SO=OE.\tan\widehat{SEO}=\dfrac{AE}{3}.\tan 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=\dfrac{a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.



Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S, $SB=2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=2a^3$. **B.** $V=4a^3$. **C.** $V=6a^3$ **D.** $V=12a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta chọn (SBC) làm mặt đáy $\longrightarrow$ chiều cao khối chóp là $d[A,(SBC)]=3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC}=\dfrac{1}{2}SB^2=2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta SBC}.d[A,(SBC)]=2a^3$.

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $h=a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h\longrightarrow h=\dfrac{3.V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{3a^3}{a^2\sqrt{3}}=a\sqrt{3}$.

Câu 51: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=\dfrac{7}{2}a^3$. **B.** $V=14a^3$. **C.** $V=\dfrac{28}{3}a^3$. **D.** $V=7a^3$.

Lời giải

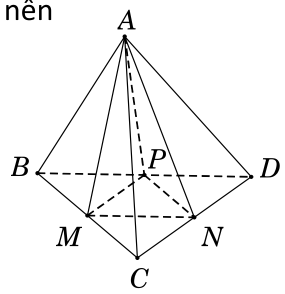
Chọn D

Do AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau nên

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.AC.AD=\frac{1}{6}.6a.7a.4a=28a^3$.

Dễ thấy $S_{\Delta MNP}=\frac{1}{4}S_{\Delta BCD}$.

Suy ra $V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$.



Câu 52: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V=3.$ **B.** $V=4.$ **C.** $V=6.$ **D.** $V=5.$

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\Delta GBC}=\frac{1}{3}S_{\Delta DBC}$.

Suy ra $V_{A.GBC}=\frac{1}{3}V_{ABCD}=\frac{1}{3}.12=4.$

Câu 53: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$, $AA'=2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=4a^3\sqrt{5}$. **B.** $V=a^3\sqrt{15}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **D.** $V=\frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=a^3\sqrt{15}.$

Câu 54: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}.$

A. $V=a^3.$ **B.** $V=\frac{3\sqrt{6}a^3}{4}.$ **C.** $V=3\sqrt{3}a^3.$ **D.** $V=\frac{1}{3}a^3.$

Lời giải

Chọn A

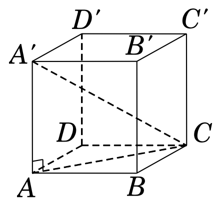
Đặt cạnh của khối lập phương là x $(x>0)$.

Suy ra $CC'=x;\ AC=x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC', có

$AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}\Leftrightarrow x\sqrt{3}=a\sqrt{3}\Rightarrow x=a.$

Vậy thể tích khối lập phương $V=a^3$.



Câu 55: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh 2a. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a, biết $A'B=3a$.

A. $V=\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **B.** $V=4\sqrt{5}a^3$. **C.** $V=2\sqrt{5}a^3$. **D.** $V=12a^3$.

Lời giải

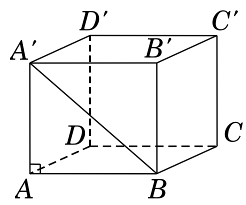
Chọn B

Do ABCD.A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên $AA'\perp AB$.

Xét tam giác vuông A'AB, ta có $A'A=\sqrt{A'B^2-AB^2}=a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD}=AB^2=4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'A=4\sqrt{5}a^3$.



Câu 56: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$, $AB'=a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

A. $V=a^3\sqrt{10}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V=a^3\sqrt{2}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Trong tam giác vuông ABB', có $BB'=\sqrt{AB'^2-AB^2}=2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.AD=a^2\sqrt{2}$.

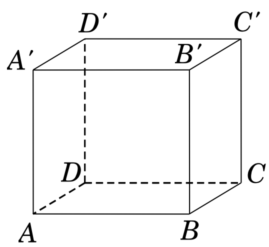
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.BB'=2a^3\sqrt{2}$.

Câu 57: Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là $10\text{cm}^2, 20\text{cm}^2, 32\text{cm}^2$. Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

A. $V=80\text{cm}^3$. **B.** $V=160\text{cm}^3$. **C.** $V=40\text{cm}^3$. **D.** $V=64\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} S_{ABCD}=10\,\text{cm}^2 \\ S_{ABB'A'}=20\,\text{cm}^2 \\ S_{ADD'A'}=30\,\text{cm}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB.AD=10 \\ AB.AA'=20 \\ AA'.AD=32 \end{cases}$.

Nhân vế theo vế, ta được $(AA'.AB.AD)^2=6400 \Rightarrow AA'.AB.AD=80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=AA'.AB.AD=80\,\text{cm}^3$.

Câu 58: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $A'O=a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O=a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V=S_{\Delta ABC}.A'O=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 59: Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

A. $V=6a^3$. **B.** $V=\frac{5a^3}{2}$. **C.** $V=4a^3$. **D.** $V=3a^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối chóp $V_{A.A'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{A.BCB'C'}=\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\longrightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\frac{3}{2}V_{A.BCB'C'}=\frac{3}{2}.2a^3=3a^3$.

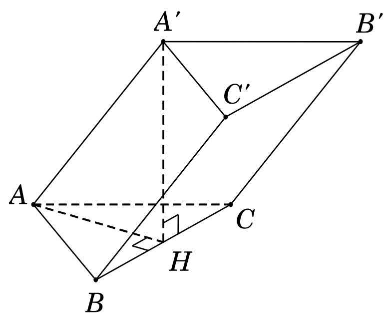
Câu 60: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45^0. Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=3$. **B.** $V=1$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH=\sqrt{3}$.
Vì $A'H\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH. Do đó $45^0=\widehat{AA',(ABC)}=\widehat{AA',AH}=\widehat{A'AH}$. Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H=HA=\sqrt{3}$.
Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$.
Vậy $V=S_{\Delta ABC}.A'H=3$.



Câu 61: Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S=10\,\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 và độ dài cạnh bên bằng 10cm.

A. $V=100\text{cm}^3$. **B.** $V=50\sqrt{3}\text{cm}^3$. **C.** $V=50\text{cm}^3$. **D.** $V=100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC.

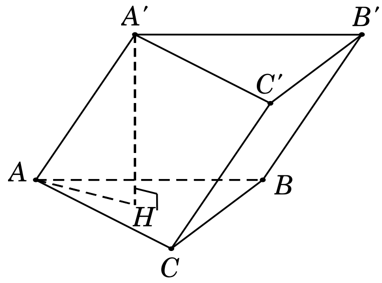
Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$. Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC). Do đó

$$60^0 = \widehat{AA',(ABC)} = \widehat{(AA',AH)} = \widehat{A'AH}.$$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H, có

$A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = 5\sqrt{3}$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = 50\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.



Câu 62: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a. Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 2\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 27a^3$.

Lời giải

Chọn B

Đặt cạnh hình lập phương là x.

Gọi $O = AD' \cap A'D$, ta có $D'O \perp (DCB'A')$.

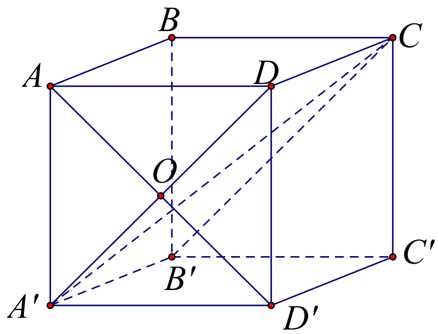
Ta có: $A'C \subset (DCB'A') // C'D'$ nên

$d(C'D';A'C) = d(C'D';(DCB'A'))$

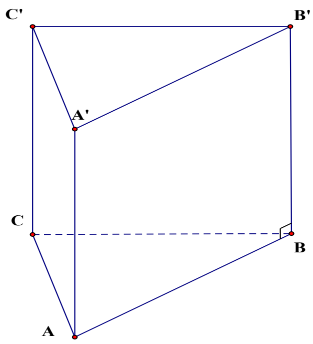
$= d(D';(DCB'A')) = D'O = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = a$.

Do đó, $x = a\sqrt{2}$. Thể tích khối lập phương là:

$V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3$.



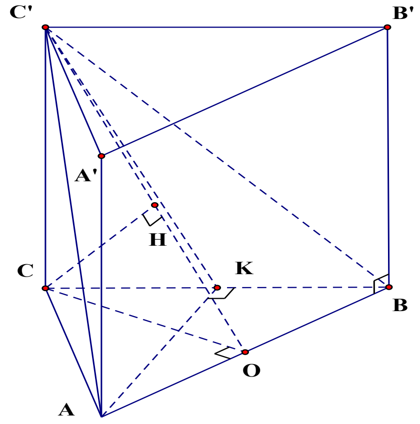
Câu 63: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới)*.Thể tích khối lăng trụ bằng



A. $\dfrac{9\sqrt{15}a^3}{20}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{20}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{10}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{15}a^3}{10}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $2x$ là cạnh của tam giác đều, Gọi O,K lần lượt là trung điểm của AB,BC

Kẻ $CK\perp C'O$

Ta có $CH\perp C'O$ và $CH\perp AB$ nên $CH\perp(ABC')$ và $d(C,(ABC'))=CH=a$

Suy ra: $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{CO^2}$ hay $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{3x^2}$ **(1)**

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác ABC' lên mặt phẳng $(BCC'B')$ là tam giác KBC'

Do đó $\frac{S_{\Delta KBC'}}{S_{\Delta ABC'}}=\cos\alpha=\frac{1}{3}$

Ta có: $S_{\Delta KBC'}=\frac{1}{2}.x.CC'$ và $S_{\Delta ABC'}=\frac{1}{2}.AB.C'O=\frac{1}{2}.AB.\sqrt{CC'^2+CO^2}=x\sqrt{CC'^2+3x^2}$

Do đó $\frac{1}{2}.x.CC'=\frac{1}{3}x\sqrt{CC'^2+3x^2}\Leftrightarrow 3CC'=2\sqrt{CC'^2+3x^2}\Leftrightarrow 5CC'^2=12x^2$ **(2)**

Từ $(1),(2)$ ta có $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{4}{5CC'^2}\Leftrightarrow 5CC'^2=9a^2\Leftrightarrow CC'=\frac{3a}{\sqrt{5}}$

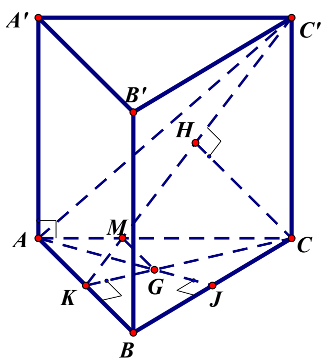
Suy ra $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=S_{ABC}.CC'=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.\frac{3a}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{15}a^3}{20}$.

Câu 64: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

Chọn B



Gọi K,J lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Gọi x là độ dài cạnh AB.

$AJ=CK=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $CH\perp(ABC')\Rightarrow d(C,(ABC'))=CH=a$.

Mặt khác $AJ\perp(BCC'B')$.

Nên $\left(\widehat{(ABC'),(BCC'B')}\right)=\left(\widehat{CH,AJ}\right)=\alpha=\left(\widehat{CH,AG}\right)$ $(\cos\alpha=\sin\varphi)$.

Ta có $\sin\varphi = \frac{MG}{AG} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow MG = \frac{AG}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\frac{AJ}{\sqrt{3}.2} = \frac{x\sqrt{3}}{2.3\sqrt{3}} = \frac{x}{6}$.

$\frac{HC}{3} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{a}{3} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = 2a$ mà $d\left(C,\left(ABC'\right)\right) = CH = a$.

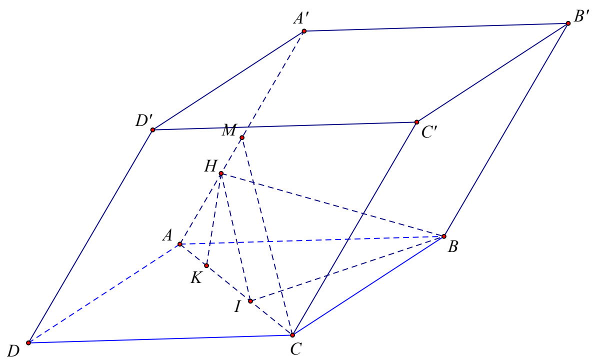
$\Rightarrow CC' = \frac{CH.CK}{\sqrt{CK^2 - CH^2}} = \frac{a\frac{2a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $V = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.CC' = \frac{\left(2a\right)^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 65: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $\left(AA'C'C\right)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $\left(AA'C'C\right)$, $\left(AA'B'B\right)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \frac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V = 6$. **B.** $V = 8$. **C.** $V = 12$. **D.** $V = 10$.

Lời giải

Chọn B



Từ B kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp \left(AA'C'C\right)$.

Từ I kẻ $IH \perp AA'$

$\Rightarrow \widehat{\left(\left(AA'C'C\right),\left(AA'B'B\right)\right)} = \widehat{BHI}$.

Theo giải thiết ta có $AC = 3$

$\Rightarrow BI = \frac{AB.BC}{AC} = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông BIH có $\tan\widehat{BHI} = \frac{BI}{IH}$

$\Leftrightarrow IH = \frac{BI}{\tan\widehat{BHI}} \Leftrightarrow IH = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét tam giác vuông ABC có $AI.AC = AB^2 \Rightarrow AI = \frac{AB^2}{AC} = 2$.

Gọi M là trung điểm cả AA', do tam giác $AA'C$ cân tại C nên $CM \perp AA' \Rightarrow CM \,//\, IH$.

Do $\frac{AI}{AC} = \frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AH}{AA'} = \frac{1}{3}$.

Trong tam giác vuông AHI kẻ đường cao HK ta có $HK = \frac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $h = 3HK = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.h = \sqrt{6}\sqrt{3}\frac{4\sqrt{2}}{3} = 8$.

Câu 66: Khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

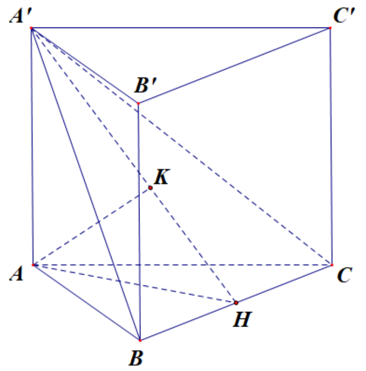
A. $V = 24\sqrt{3}$. **B.** $V = 8\sqrt{3}$. **C.** $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều nên lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.

Gọi H là trung điểm của BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.



Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$

Mà

$AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AK = 3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra $\widehat{A'HA} = 60^0$.

Ta có $AH = \dfrac{AK}{\sin 60^0} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH.\tan 60^0 = 6 \\ AB = \dfrac{2.2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4 \end{cases}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.AA' = 4\sqrt{3}.6 = 24\sqrt{3}$.

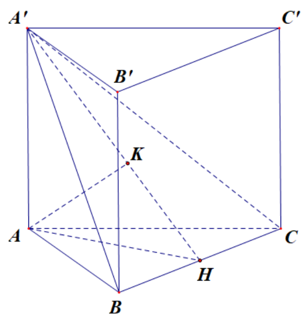
Câu 67: Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

A. $V = 24\sqrt{3}$. **B.** $V = 8\sqrt{3}$. **C.** $V = 72$. **D.** $V = 24$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H hình chiếu của A lên BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.



Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow (ABC) \perp (AA'H)$

Mà $AK \perp A'H \Rightarrow AK \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AK = 3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra

$\widehat{A'HA} = 60^0$. Ta có $AH = \dfrac{AK}{\sin 60^0} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} A'A = AH.\tan 60^0 = 6 \\ BC = 2AH = 4\sqrt{3};\ AB = 2\sqrt{6} \end{cases}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}.\left(2\sqrt{6}\right)^2.6 = 72$.

Câu 68: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

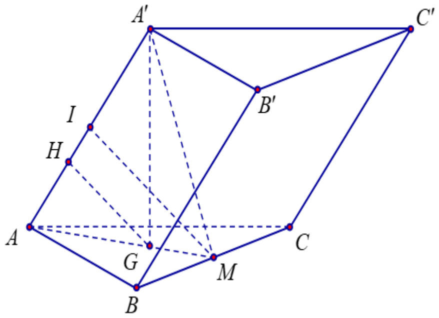
Lời giải

Chọn A

Ta có $A'G\perp(ABC)$ nên $A'G\perp BC$; $BC\perp AM$

$\Rightarrow BC\perp(MAA')$

Kẻ $MI\perp AA'$;



$BC\perp IM$ nên $d(AA';\,BC)=IM=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Kẻ $GH\perp AA'$,

Ta có $\dfrac{AG}{AM}=\dfrac{GH}{IM}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow GH=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{1}{HG^2}=\frac{1}{A'G^2}+\frac{1}{AG^2}\Leftrightarrow A'G=\frac{AG.HG}{\sqrt{AG^2-HG^2}}=\frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{12}}}=\frac{a}{3}$$

$$V_{ABC.A'B'C'}=A'G.S_{ABC}=\frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 69: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a; AD=a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và mặt phẳng (ACD') bằng 60^0. Tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

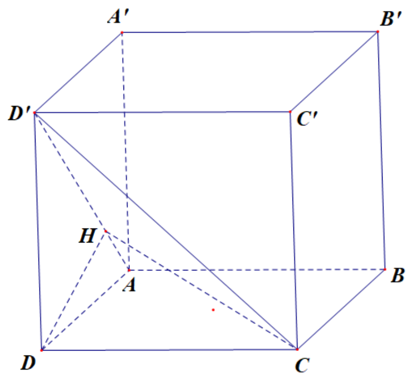
Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của D lên AD'.

Ta có

$AD'\perp(DHC)\Rightarrow\widehat{((ADD'A'),(ACD'))}=\widehat{DHC}=60^0$.



Có $DH=CD.\cot 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

Suy ra $\dfrac{1}{DH^2}=\dfrac{1}{DD'^2}+\dfrac{1}{DA^2}\Rightarrow DD'=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

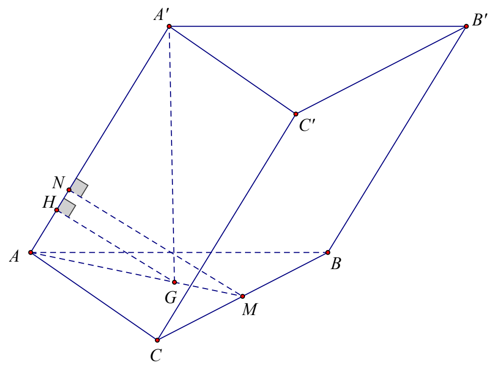
Thể tích khối hộp là $V=S_{ABCD}.DD'=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 70: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của $BC \Rightarrow A'G \perp (ABC)$.

Trong $(AA'M)$ dựng $MN \perp AA'$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp MN$.

$\Rightarrow d(AA', BC) = MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của G lên AA'.

Ta có: $GH // MN \Rightarrow \dfrac{GH}{MN} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GH = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G, ta có:

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GA'^2} \Rightarrow \frac{1}{GA'^2} = \frac{1}{GH^2} - \frac{1}{GA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{27}{3a^2}. \Rightarrow GA' = \frac{a}{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

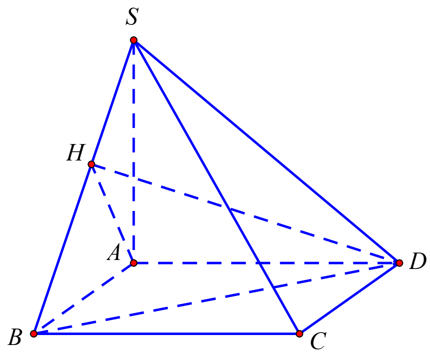
Câu 71: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a,\ AD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBD) là $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $0,25$. **B.** $0,5$. **C.** $0,75$. **D.** $1,5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.



Gọi H là hình chiếu của A trên SB

$\Rightarrow AH\perp SB$.

Dễ thấy $AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SB$.

Do đó: $SB\perp(AHD)\Rightarrow SB\perp HD$.

Khi đó ta có:

$$\begin{cases}(SAB)\cap(SBD)=SB\\AH\perp SB;\ HD\perp SB\\AH\subset(SAB);\ HD\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow((SAB);(SBD))=\widehat{AHD}=45^\circ.$$

Hay ΔAHD vuông cân tại A $\Rightarrow AH=AD=a$.

ΔSAB vuông tại A: $\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{3}{4a^2}\Rightarrow SA=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $V=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.2a^2=\dfrac{4a^3}{3\sqrt{3}}$. Vậy $\dfrac{V}{a^3}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\approx 0{,}77$.

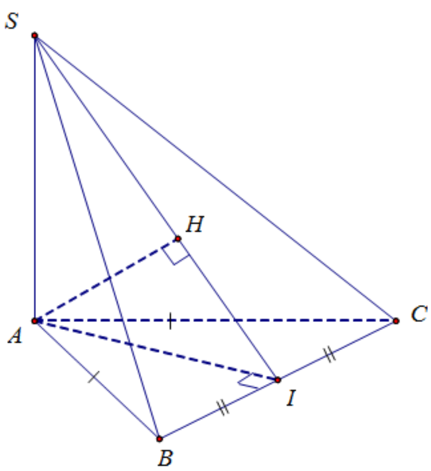
Câu 72: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{8a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $V=8a^3$. **D.** $V=\dfrac{27a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Vì ΔABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a,$ nên $BC=2\sqrt{2}a$



Gọi I là trung điểm BC suy ra $AI=\dfrac{1}{2}BC=a\sqrt{2}.$

Khi đó $\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI).$

Goi H là hình chiếu của A lên SI suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

$\Rightarrow AH=\dfrac{4a}{3}$. Ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{SA^2}\Rightarrow SA=\sqrt{\frac{AI^2.AH^2}{AI^2-AH^2}}=4a.$$

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}2a.2a=2a^2$. $\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.2a^2.4a=\frac{8a^3}{3}$.

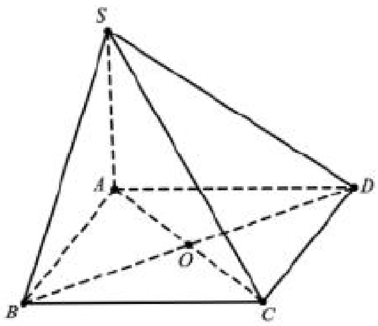
Câu 73: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=2a$, $\mathrm{BC}=\mathrm{a}$ $\widehat{ABC}=120^0$ và SD vuông góc với đáy. Sin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{1}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $3a^3$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $SD=h$, ta có



$BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AB.AD.\cos 60^0}=\sqrt{3}a$

Suy ra $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{h^2+3a^2}$

Ta có $d(B;(SAC))=d(D;(SAC))$

và

$$\frac{1}{d^2(D;(SAC))}=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{d^2(D;AC)}=\frac{1}{h^2}+\frac{AC^2}{4S_{DAC}^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{7}{3a^2}$$

$\Rightarrow d(D;(SAC))=\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}$ (Do $AC^2=7a^2$; $S_{DAC}=\frac{1}{2}a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$)

Do đó $\sin(\mathrm{SB};(SAC))=\frac{d(B;(SAC))}{SB}=\frac{\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}}{\sqrt{h^2+3a^2}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow h=a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD}=a^3$

BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

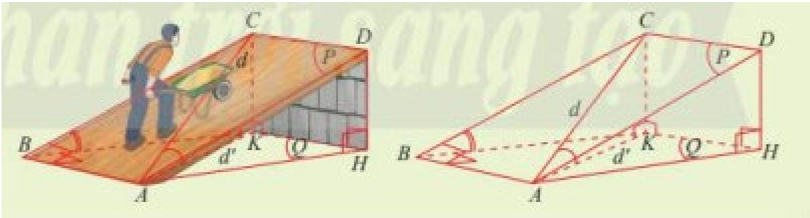
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng trong lao động vì tính tiện dụng của nó.

Quan sát hình mặt phẳng nghiêng (P) và mặt đất (Q) trong hình dưới đây và hãy tìm hiểu tại sao:

*** $\widehat{CAK}$ được gọi là góc hợp bởi đường thẳng d và (Q).**

*** $\widehat{CBK}$ được xem là góc hợp bởi hai mặt phẳng (P) và (Q).**



Lời giải

K là hình chiếu vuông góc của C lên (Q). Nên $\widehat{CAK}$ được gọi là góc hợp bởi đường thẳng d và (Q)

$(P)\cap(Q), CB\perp AB, BK\perp AB$ nên $\widehat{CBK}$ được gọi là góc hợp bởi hai mặt phẳng (P) và (Q)

1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).

a) Trong trường hợp a vuông góc với (P), tìm góc giữa a và một đường thẳng b tuỳ ý trong (P).

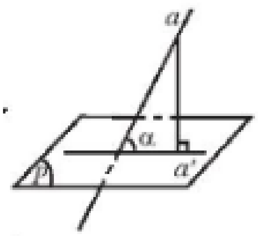
b) Trong trường hợp a không vuông góc với (P), tìm góc giữa a và đường thẳng a' là hình chiếu vuông góc của a trên (P).

Lời giải

a) Nếu $a\perp(P)$ thì a vuông góc với mọi đường thẳng thuộc (P)

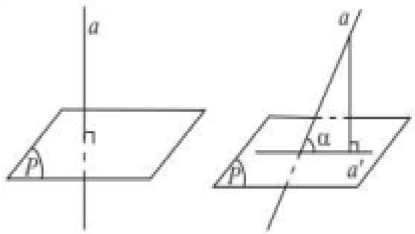
Góc giứa a và một đường thẳng b tuỳ ý trong (P) là 90°

b) $(a,a')=\alpha$



Định nghĩa

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng $90°$.
Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P).



Hình 1

Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu là $(a,(P))$.

Chú ý: a) Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thoả mãn $0° \le \alpha \le 90°$.

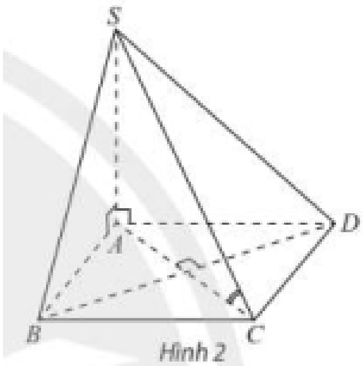
b) Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $\left(a,(P)\right) = 0°$.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Tính:

a) Góc giữa đường thẳng BC và (SAB);

b) Góc giữa đường thẳng BD và (SAD);

c) Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$.



Hình 2

Giải

a) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BC \perp SA$. Ta lại có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra góc giữa đường thẳng BC và (SAB) bằng $90°$.

b) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BA \perp SA$. Ta lại có $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$. Vậy AD là hình chiếu của BD trên (SAD). Nếu gọi φ là góc giữa đường thẳng BD và (SAD) thì

$\varphi = (BD, AD) = \widehat{BDA} = 45°$ (vì tam giác ABD vuông cân tại A).

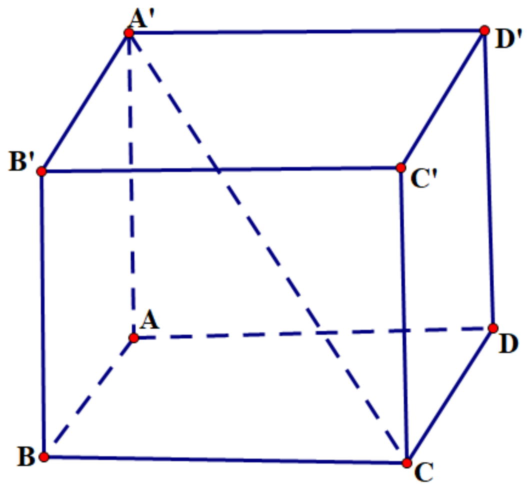
c) Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Nếu gọi φ' là góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ thì $\varphi' = (SC, CA) = \widehat{SCA}$.

Trong tam giác SCA vuông tại A, ta có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng $60°$.

1 Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa các đường thẳng sau đây với mặt phẳng $(ABCD)$:

a) AA'; b) BC'; c) $A'C$.

Lời giải



a) Vì $AA' \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng AA' và (ABCD) là 90°

b) $CC' \perp (ABCD)$ nên C là hình chiếu vuông góc của C' lên (ABCD).

Suy ra góc giữa BC' và (ABCD) là $\widehat{C'BC} = 45^\circ$ (Vì $\mathrm{BCC}C'$ ' là hình vuông)

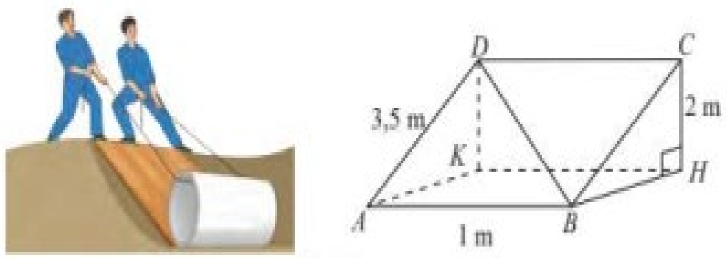
c) Gọi cạnh của hình lập phương là a

Ta có: $AC = a\sqrt{2}, \tan\widehat{ACA'} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\widehat{ACA'} = 35^\circ$

$AA' \perp (ABCD)$ nên A là hình chiếu vuông góc của A' lên (ABCD)

Suy ra góc giữa $\mathrm{A'C}$ và (ABCD) là $\widehat{ACA'} = 35^\circ$

1 Một tấm ván hình chữ nhật $ABCD$ được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu $2\,\mathrm{m}$. Cho biết $AB = 1\,\mathrm{m}, AD = 3,5\,\mathrm{m}$. Tính góc giữa đường thẳng BD và đáy hố.



Hình 3

Lời giải

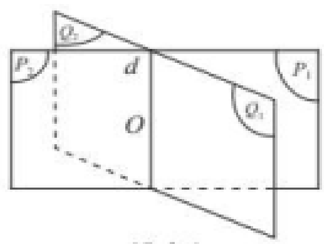
Ta có: $DK = CH = 2, AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$ $BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \dfrac{\sqrt{37}}{2}$ $\tan\widehat{DBK} = \dfrac{DK}{KB}$. Nên

$\widehat{DBK} = 43,4^\circ$ Góc giữa đường thẳng BD và đáy hố là $43,4^\circ$

2. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

Góc nhị diện

2 Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Hãy gọi tên các nửa mặt phẳng có chung bờ d. Các nửa mặt phẳng này chia không gian thành bao nhiêu phần?



Hình 4

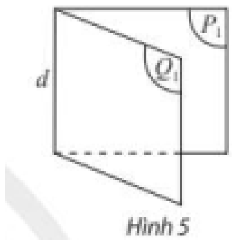
Lời giải

Các nửa mặt phẳng chia không gian thành 4 phần

Định nghĩa

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi $(P_1),(Q_1)$ và d được gọi là ***góc nhị diện*** tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1,d,Q_1]$.

Hai nửa mặt phẳng $(P_1),(Q_1)$ gọi là ***hai mặt của nhị diện*** và d gọi là ***cạnh của nhị diện***.



Hình 5

Chú ý:

a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

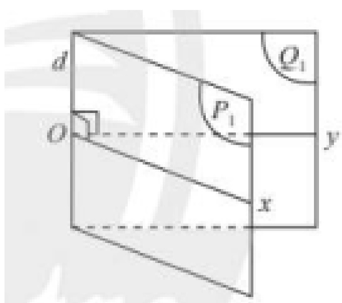
b) Góc nhị diện $[P_1,d,Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M,d,N]$ với M,N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1),(Q_1)$.

Góc phẳng nhị diện

Cho góc nhị diện $[P_1,d,Q_1]$. Gọi O là một điểm tuỳ ý trên d, Ox là tia nằm trong (P_1) và vuông góc với d, Oy là tia nằm trong (Q_1) và vuông góc với d (Hình 6).

a) Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa d và mp(Ox,Oy).

b) Nêu nhận xét về số đo của góc xOy khi O thay đổi trên d.



Hình 6

Lời giải

a) $d \perp mp(Ox,Oy)$

b) Khi O thay đổi trên d thì số đo góc $\widehat{xOy}$ không đổi

Định nghĩa

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt $(P_1),(Q_1)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P_1),(Q_1)$.

c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

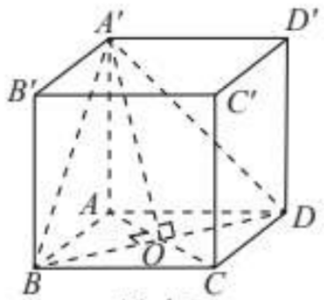
d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.

e) Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ $0°$ đến $180°$.

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a. Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

a) $[A,BD,A']$; b) $[C,BD,A']$.

Giải



Hình 7

a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OA \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{AOA'}$ là góc phẳng nhị diện $\left[A, BD, A'\right]$.

Trong tam giác AOA' vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{A'OA} = \frac{AA'}{AO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{A'OA} \approx 54,7^\circ$$

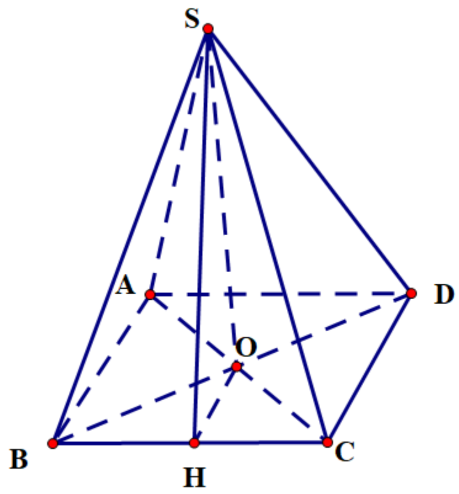
b) Ta có $OC \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\widehat{A'OC}$ là góc phẳng nhị diện $\left[C, BD, A'\right]$.

Ta có $\widehat{A'OC} = 180^\circ - \widehat{A'OA} \approx 125,3^\circ$.

2 Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh đều bằng a. Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

a) $\left[S, BC, O\right]$; b) $\left[C, SO, B\right]$.

Lời giải



a) Kẻ $SH \perp BC$

Mà $BC \perp SO$ nên $BC \perp (SOH)$. Suy ra $OH \perp BC$.

Do đó $\left[S, BC, O\right] = \widehat{SHO}$

Ta có: $OH = \frac{a}{2}, OC = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$\tan\widehat{SHO} = \frac{SH}{OH} = \sqrt{2}$. Suy ra $\widehat{SHO} = 54,7^\circ$

Vậy $[S,BC,O]=54,7^\circ$

b) Vì $SO\perp(ABCD)$ nên $SO\perp OB, SO\perp OC$

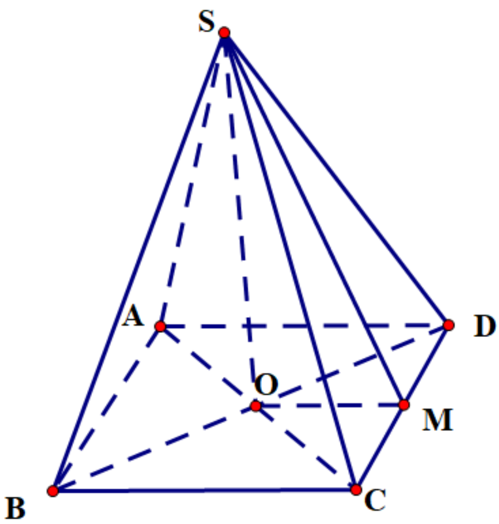
Suy ra $[C,SO,B]=\widehat{BOC}=90^\circ$

2 Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis_Pyramid)

Hình 8

Lời giải



Kẻ $SM\perp BC$

Mà $BC\perp SO$ nên $BC\perp(SOM)$. Suy ra $BC\perp OM$

Do đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SMO}$

Ta có: $SO=98; OM=\frac{1}{2}\cdot 180=90$

$\tan\widehat{SMO}=\frac{SO}{OM}=1,1$. Suy ra $\widehat{SMO}=47,4^\circ$

Vậy góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $47,4^\circ$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

1. Phương pháp

Tìm góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC).

Như vậy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC).

Vậy $\widehat{(SA;(ABC))}=\widehat{(SA;HA)}=\widehat{SAH}$.

2. Ví dụ

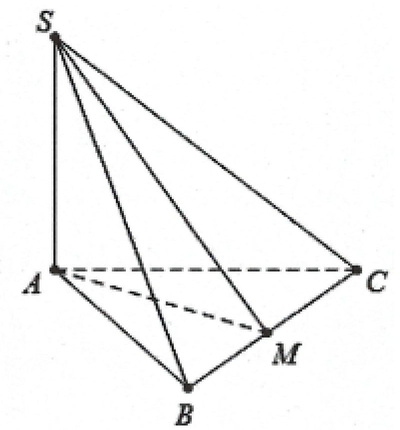
Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB=a;BC=a\sqrt{3}$. Biết $SA\perp(ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và M là trung điểm của BC.

a) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

b) Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

a) Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABC))}=\widehat{SBA}=60^\circ$.



Do đó $SA=AB\tan\widehat{SBA}=a\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a;\widehat{(SC;(ABC))}=\widehat{SCA}$.

Khi đó: $\cos\widehat{SCA}=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{3a^2+4a^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

b) Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow\widehat{(SM;(ABC))}=\widehat{SMA}=\varphi$.

Ta có: $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Khi đó $\cos\varphi=\dfrac{AM}{SM}=\dfrac{AM}{\sqrt{SA^2+AM^2}}=\dfrac{\sqrt{133}}{19}$.

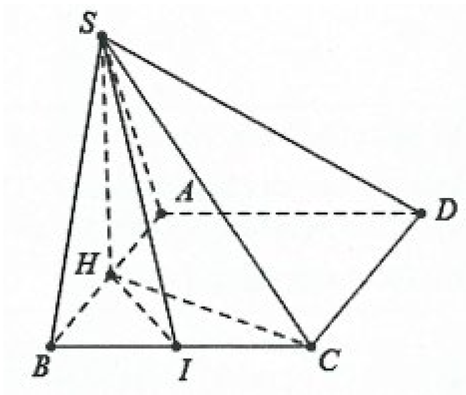
Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật có $AB=2a;AD=a$. Tam giác (SAB) đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc giữa SB, SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH\perp AB$.



Mặt khác $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\AB=(SAB)\cap(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$.

Tam giác SAB đều cạnh 2a nên $SH=a\sqrt{3}$.

$HC=\sqrt{HB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.

Do $SH\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABCD))}=\widehat{SBH}=60^\circ$

$\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCH}$ và $\tan\widehat{SCH}=\dfrac{SH}{HC}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

b) Ta có: $HI=\sqrt{HB^2+BI^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{(SI;(ABCD))}=\widehat{SIH}$ và $\tan\widehat{SIH}=\dfrac{SH}{SI}=a\sqrt{3}:\dfrac{a\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

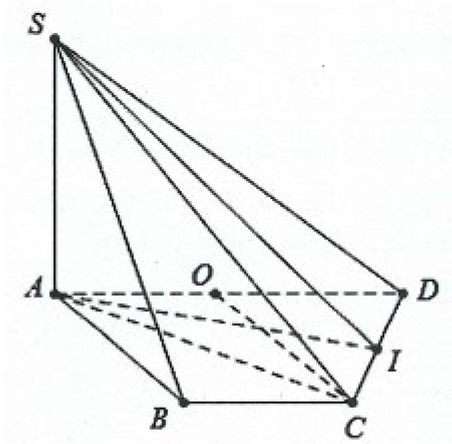
Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, $AD=2a$. Biết $SA\perp(ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 45°.

a) Tính cosin góc tạo bởi các cạnh SC, SD và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của CD, tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO=a=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại C.



Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABCD))}=\widehat{SBA}=45^\circ$.

Do đó $SA=AB\tan 45^\circ=a$

$AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow\cos\widehat{(SC;(ABC))}=\cos\widehat{SCA}$

$=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

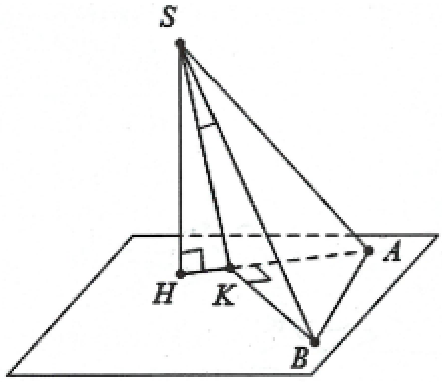
$\cos\widehat{(SD;(ABCD))}=\cos\widehat{SDA}=\dfrac{AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Ta có: $AI=\sqrt{AC^2+CI^2}=\sqrt{3a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan\widehat{(SI;(ABCD))}=\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$.

Dạng 2: Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng chứa đường cao

1. Phương pháp



Tìm góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (SHA) với

$(SHA)\perp(ABH)$.

Dựng $BK\perp AH$, có $BK\perp SH\Rightarrow BK\perp(SHA)$.

Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH).

Vậy $\widehat{(SB;(SAH))}=\widehat{(SB;SK)}=\widehat{BSK}$.

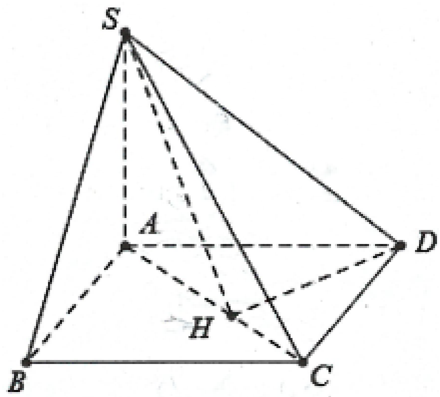
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB=a, AD=a\sqrt{3}, SA\perp(ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB); SC và mặt phẳng (SAD).

b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



a) Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCA}=60°$.

Lại có: $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a\Rightarrow SA=AC\tan 60°=2a\sqrt{3}$.

Khi đó $\begin{cases} SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{13} \\ SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{15} \\ SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=4a \end{cases}$

Do $\begin{cases} CB\perp SA \\ CB\perp AB \end{cases}\Rightarrow CB\perp(SAB)\Rightarrow\widehat{(SC;(SAB))}=\widehat{CSB}$.

Mặt khác $\cos\widehat{CSB}=\dfrac{SB}{SC}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

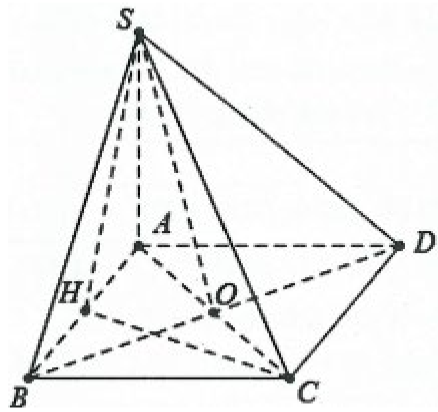
Tương tự $CD\perp(SAD)\Rightarrow\widehat{(SC;(SAD))}=\widehat{CSD}$ và $\cos\widehat{CSD}=\dfrac{SD}{SC}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $BD=a\sqrt{3}, SA\perp(ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB). b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Ta có: $AC \perp BD$ tại O. Khi đó $OA = OC, OB = OD$.



Xét tam giác vuông OAB ta có: $\sin \widehat{OAB} = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAB} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh a.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$.

Suy ra $SA = AC \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAB))} = \widehat{CSH}$.

Do ΔABC đều cạnh a nên H là trung điểm của AB.

Ta có: $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{CSH} = \dfrac{CH}{SH}$ trong đó $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan \widehat{CSH} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

b) Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SD;(SAC))} = \widehat{DSO}$ và $\tan \widehat{DSO} = \dfrac{OD}{SO}$.

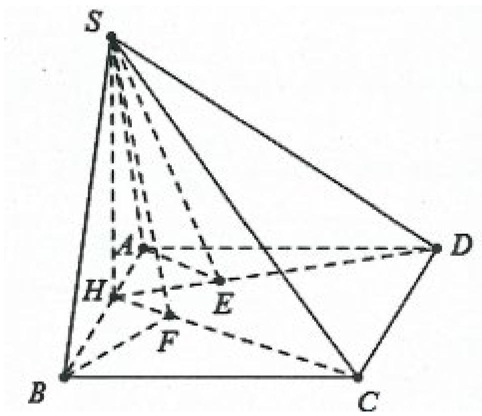
Trong đó $OD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{DSO} = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB = 3, AD = 6$ và $SH = 2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SHD). b) SB và mặt phẳng (SHC).

Lời giải

a) Ta có: $AH = 1, HB = 2 \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{5} \\ SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$



Dựng $AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow \widehat{(SA;(SHD))} = \widehat{ASE}$

Mặt khác $AE = \dfrac{AH.AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{37}}$

Suy ra $\tan \widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{6}{\sqrt{185}}$.

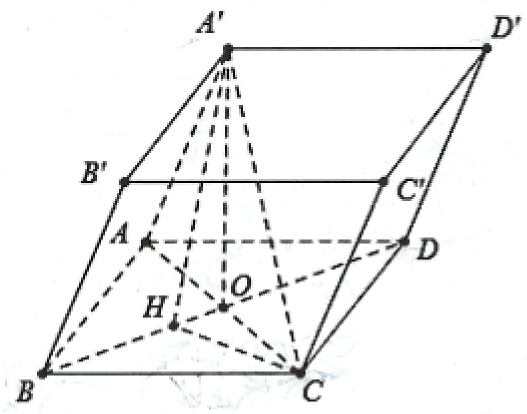
b) Dựng $BF \perp HC \Rightarrow BF \perp (SHC)$.

Khi đó $\widehat{(SB;(SHC))} = \widehat{BSF}$, $BF = \dfrac{BH.BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Ta có: $\tan\left(\widehat{SB;(SHC)}\right)=\tan\widehat{BSF}=\frac{BF}{SB}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB=2a, AD=2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật ABCD, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $(A'BD)$.

Lời giải



Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4a\Rightarrow OA=2a=OC$.

Do $A'O\perp(ABCD)\Rightarrow\left(\widehat{A'O;(ABCD)}\right)=\widehat{A'AO}=60°$.

$\Rightarrow A'O=OA\tan60°=2a\sqrt{3}$

Dựng $CH\perp BD\Rightarrow CH\perp(A'BD)$

$\Rightarrow\left(\widehat{A'C;(A'BD)}\right)=\widehat{CA'H}$.

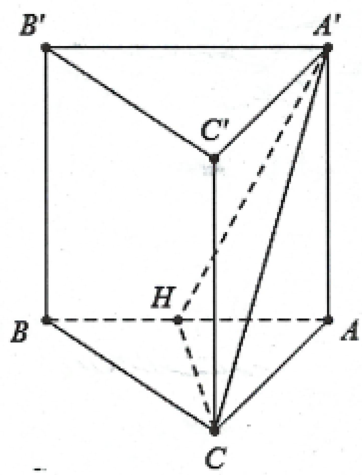
Ta có: $CH=\frac{BC.CD}{\sqrt{BC^2+CD^2}}=a\sqrt{3}$,

$A'C=\sqrt{OA'^2+OC^2}=\sqrt{12a^2+4a^2}=4a$.

Suy ra $\cos\widehat{CA'H}=\frac{A'H}{A'C}=\frac{\sqrt{A'C^2-HC^2}}{A'C}=\frac{\sqrt{16a^2-3a^2}}{4a}=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Dựng $CH\perp AB\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $\begin{cases}CH\perp AB\\CH\perp AA'\end{cases}\Rightarrow CH\perp(ABB'A')\Rightarrow\left(\widehat{A'C;(ABB'A')}\right)=\widehat{CA'H}$.

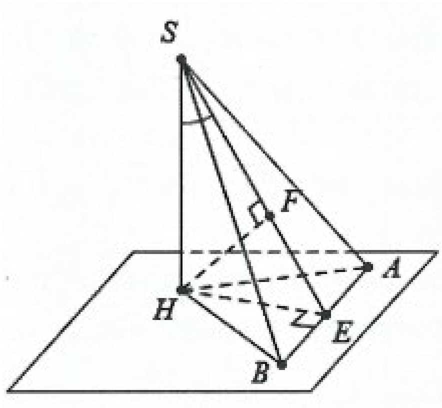
Lại có: $A'H=\sqrt{AA'^2+AH^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $\tan\widehat{CA'H}=\frac{CH}{A'H}=1\Rightarrow\widehat{CA'H}=45°$.

Vậy $\left(\widehat{A'C;(ABB'A')}\right)=\widehat{CA'H}=45°$.

Dạng 3: Góc giữa đường cao và mặt bên

1. Phương pháp



Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB).

Dựng $HE \perp AB, HF \perp SE$.

Ta có: $AB \perp SH \Rightarrow AB \perp (SHE) \Rightarrow AB \perp HF$.

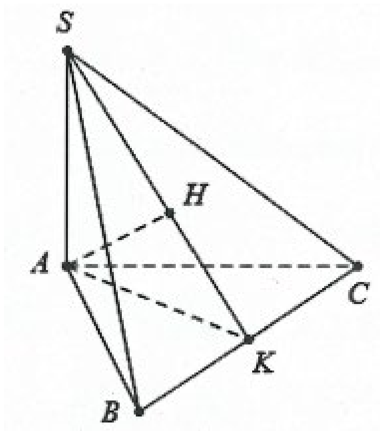
Mặt khác $HF \perp SE \Rightarrow HF \perp (SAB) \Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB).

Vậy $\left(\widehat{SH;(SAB)}\right) = \left(\widehat{HF;SF}\right) = \widehat{HSF}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh 2a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K.

Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow \left(\widehat{SA;(SBC)}\right) = \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$.

Tam giác SAK vuông tại A, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

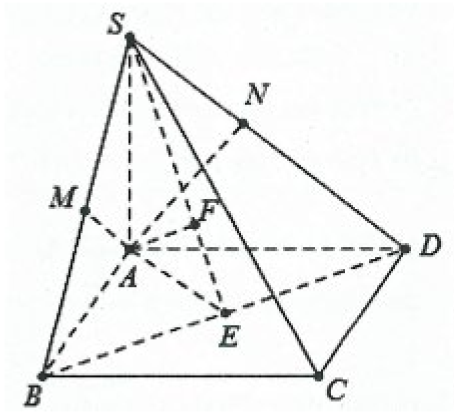
$\Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $\widehat{ASK} = 45°$.

Vậy $\left(\widehat{SA;(SBC)}\right) = 45°$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC), (SBD)$ và (SCD).

Lời giải

Do $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp (SAB)$.



Dựng $AM\perp SB \Rightarrow AM\perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC).

Khi đó: $\widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASM} = \widehat{ASB} = \alpha$.

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự ta có: $\widehat{(SA;(SCD))} = \widehat{ASD} = \beta$ và $\tan\beta = \dfrac{AD}{SA} = 1$.

Dựng $AE\perp BD, AF\perp SE$ ta có: $\begin{cases} BD\perp AE \\ BD\perp SA \end{cases} \Rightarrow BD\perp (SAE) \Rightarrow BD\perp AF$.

Mặt khác $\text{AF}\perp SE \Rightarrow AF\perp (SBD) \Rightarrow \widehat{(SA;(SBD))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

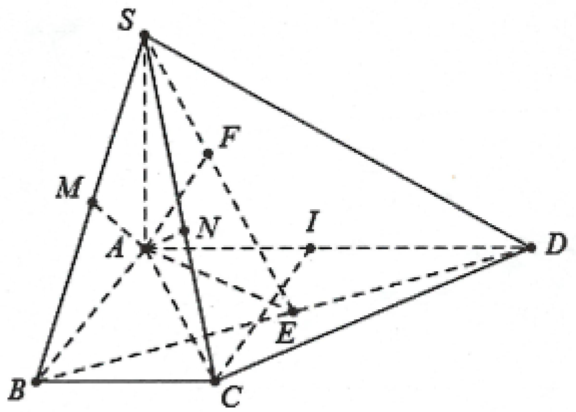
Khi đó $\tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA}$, trong đó $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA\perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC),(SCD)$ và (SBD).

Lời giải

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2+BC^2} = a\sqrt{2}$

Do $SA\perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$.



Suy ra $SA = AC\tan 60° = a\sqrt{6}$.

Dựng $AM\perp SB$, có $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases} \Rightarrow BC\perp AM$.

Do đó $AM\perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

Suy ra: $\widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASM} = \widehat{ASB}$.

Ta có: $\tan\widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh a $\Rightarrow CI = \dfrac{AD}{2} = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C. Khi đó $\begin{cases} CD\perp SA \\ CD\perp AC \end{cases} \Rightarrow CD\perp (SAC)$.

Dựng $AN \perp SC \Rightarrow \widehat{(SA;(SCD))} = \widehat{ASN} = \widehat{ASC}$. Ta có: $\tan\widehat{ASC} = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựng $\begin{cases} AE \perp BD \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SA;(SBD))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Mặt khác $AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{30}}{15}$.

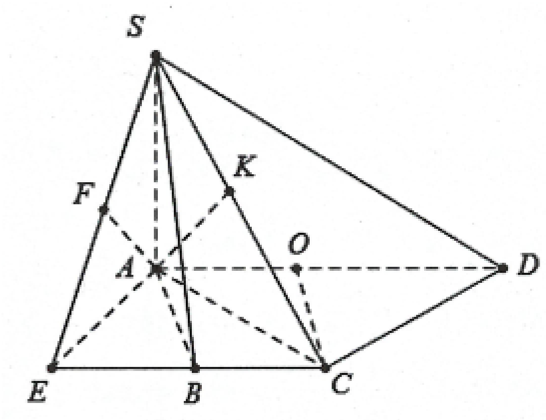
Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc $60°$.

a) Tính tan góc tạo bởi SA và (SBC).

b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD).

Lời giải:

a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60°$.

$\Rightarrow SA = AB\tan 60° = a\sqrt{3}, AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Dựng $AE \perp BC, AF \perp SE \Rightarrow \widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Do $\widehat{ABE} = 120° \Rightarrow \widehat{ABE} = 60°$.

Mặt khác $AE = AB\sin\widehat{ABE} = AB\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{(SA;(SBC))} = \tan\widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{2}$.

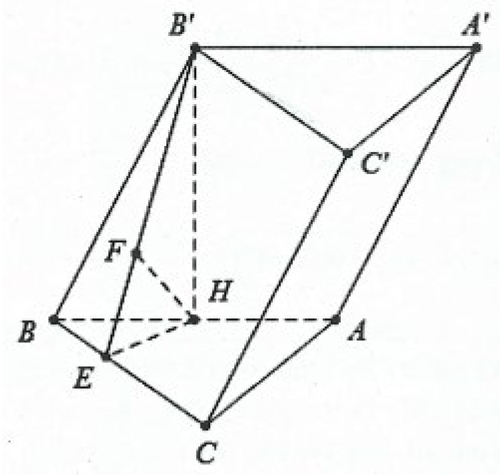
b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Khi đó $\widehat{(SA;(SCD))} = \widehat{ASK} = \widehat{ASC} = \varphi$.

Ta có: $\tan\varphi = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$. Vậy $\widehat{(SA;(SCD))} = 45°$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB, đường cao $B'H = \frac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải



Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$ suy ra

$BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC') \Rightarrow \widehat{(B'H;(BCC'B'))}$

$= \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E}$.

Ta có: $HE = HB\sin\widehat{HBE} = \frac{a}{2}\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos\widehat{HB'E} = \frac{B'H}{B'E} = \frac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Loại 4: Góc giữa cạnh bên và mặt bên (Nâng cao)

Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng (SAB). Đặt $\widehat{(SC;(SAB))} = \varphi\,(0° \le \varphi \le 90°)$.

Ta có công thức: $\sin\varphi = \frac{d(C;(SAB))}{SC}$.

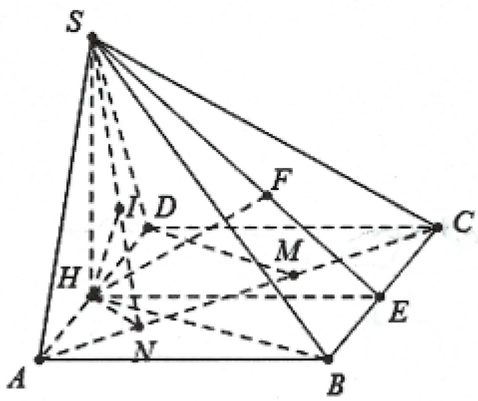
Từ đó suy ra các giá trị $\cos\varphi$ hoặc $\tan\varphi$ nếu đề bài yêu cầu.

Dạng 4: Tính góc dựa vào khoảng cách

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AD = 2a, AB = a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SB tạo với đáy một góc $30°$. Tính sin góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SBC). b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải:



Gọi H là trung điểm của AD ta có: $SH \perp AD$

Lại có: $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $HA = a; HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBH} = 30°$

Suy ra $SH = HB\tan 30° = a$.

a) Do AD // BC $\Rightarrow$ AD // (SBC).

Do vậy $d(A;(SBC)) = d(H;(SBC))$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp BC \\ HF \perp SE \end{cases}$ ta có: $BC \perp HF$ từ đó suy ra $HF \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(H;(SBC)) = HF = d(A;(SBC))$. Ta có: $SA = \sqrt{SH^2 + SA^2} = a\sqrt{2} = SD$.

Mặt khác: $\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HE^2}\Rightarrow HF=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow \sin\left(\widehat{SA;(SBC)}\right)=\frac{d\left(A;(SBC)\right)}{SA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Dựng $HN\perp AC\Rightarrow AC\perp(SHN)$, dựng $HI\perp SN\Rightarrow HI\perp(SAC)$

Do $\frac{DA}{HA}=2=\frac{d\left(D;(SAC)\right)}{d\left(H;(SAC)\right)}\Rightarrow d\left(D;(SAC)\right)=2d\left(H;(SAC)\right)=2HI$

Dựng $DM\perp AC\Rightarrow DM=\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\Rightarrow HN=\frac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow HI=\frac{HN.SH}{\sqrt{HN^2+SH^2}}=\frac{a}{2}\Rightarrow d\left(D;(SAC)\right)=a$.

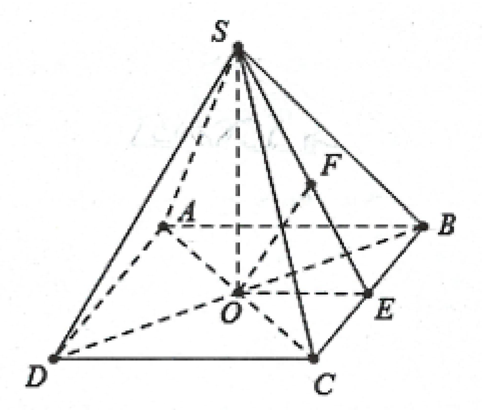
Ta có: $\sin\left(\widehat{SD;(SAC)}\right)=\frac{d\left(D;(SAC)\right)}{SD}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB=a\sqrt{3};AD=a$, tam giác SBD là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Gọi O là trung điểm của BD ta có: $SO\perp BC$ mặt khác

$(SBD)\perp(ABC)\Rightarrow SO\perp(ABC)$



Ta có: $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a\Rightarrow SO=\frac{1}{2}BD=a$.

Dựng $OE\perp BC, OF\perp SE\Rightarrow OF\perp(SBC)$.

$d\left(D;(SBC)\right)=2d\left(O;(SBC)\right)=2HF$

Ta có: $HE=\frac{1}{2}AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OF=\frac{SH.OE}{\sqrt{SH^2+OE^2}}=a\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Suy ra $d\left(A;(SBC)\right)=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. Mặt khác $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=a\sqrt{2}$.

Do đó $\sin\left(\widehat{SA;(SBC)}\right)=\frac{d\left(A;(SBC)\right)}{SA}=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB=a;AC=a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của BC. Biết $A'H=a\sqrt{2}$. Tính cosin góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

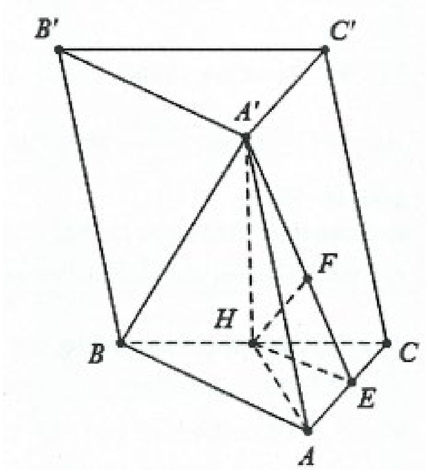
Lời giải

Dựng $HE\perp AC$ và $HF\perp A'E$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp HE \end{cases} \Rightarrow AC \perp HF \Rightarrow HF \perp (AA'C)$.

Khi đó $d(H;(A'AC)) = HF$.

Lại có $BC = 2HC$ nên $d(B;(AA'C)) = 2d(H;(AA'C))$.



Mặt khác ME là đường trung bình trong tam giác ABC nên $ME = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Khi đó: $HF = \frac{HE.A'M}{\sqrt{HE^2 + A'M^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $d(B;(AA'C)) = \frac{2a\sqrt{2}}{3}; BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$.

Lại có $A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra

$$\sin\left(\widehat{A'B;(A'AC)}\right) = \sin\varphi = \frac{d(B;(A'AC))}{BA'} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \frac{\sqrt{57}}{9}.$$

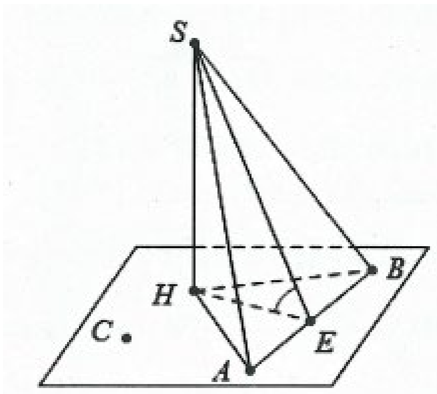
Dạng 5: Góc giữa mặt bên và mặt đáy

1. Phương pháp giải:

Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC).

Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$, dựng $HE \perp AB$.

Khi đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow \widehat{((SAB);(ABC))} = \widehat{SEH}$.



2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60°.

a) Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60^o$

Suy ra $SA = AD\tan 60^o = 3a$.

Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SBA}$

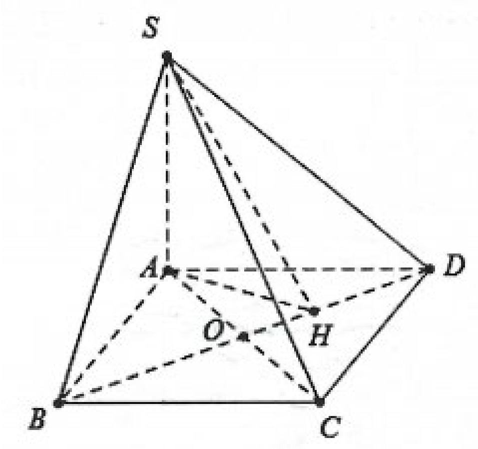
Mặt khác $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

b) Dựng $AH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHA) \Rightarrow \left(\widehat{(SBD);(ABC)}\right) = \widehat{SHA}$.

Lại có: $AH = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}$.



Ví dụ 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60°. Tính góc $\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AC, do tam giác SAC cân nên ta có: $SH \perp AC$. Mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Khi đó: $\left(\widehat{SB;(ABC)}\right) = \widehat{SBH} = 60^o$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow BH = \dfrac{1}{2}AC = a$.

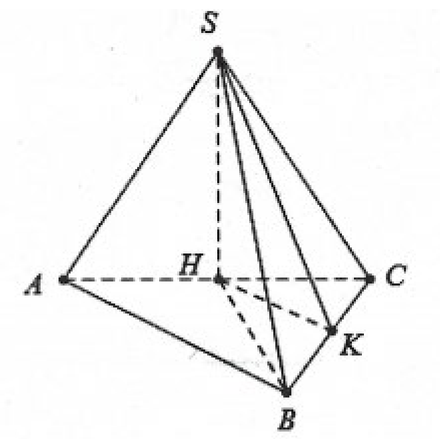
Khi đó: $SH = a\tan 60^o = a\sqrt{3}$.

Dựng $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHK)$.

$\Rightarrow \widehat{SKH} = \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)$, trong đó ta có:

$HK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos\widehat{SKH} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \varphi$ với $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

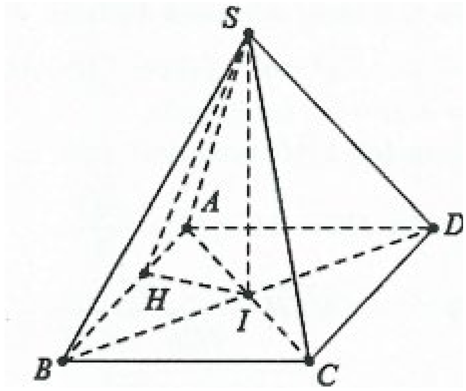


Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\widehat{BAD} = 120^o$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \dfrac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI)$.



Do đó $\varphi = \widehat{(SH;IH)} = \widehat{SHI}$.

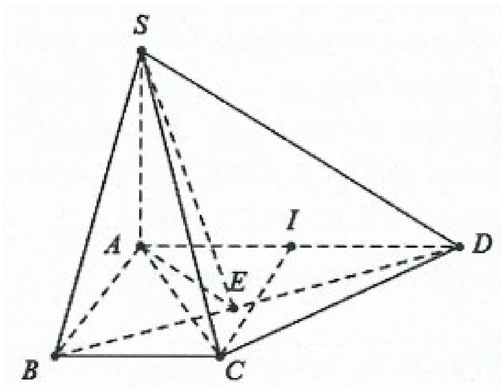
Do $\widehat{BAD} = 120^o \Rightarrow \widehat{BAI} = 60^o \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $2a$ nên

$IA = a \Rightarrow IH = IA\sin\widehat{IAB} = IA\sin 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $\tan\varphi = \dfrac{SI}{IH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^o$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA)$.

Khi đó: $\widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^o$

$\Rightarrow SA = AB\tan 60^o = a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = a = \dfrac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCA)$.

Do đó $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$ và $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Dựng $AE \perp BD$, lại có $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SEA) \Rightarrow \widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SEA}$.

Ta có: $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{SEA} = \dfrac{SA}{AE} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng 60°. Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC).

Lời giải

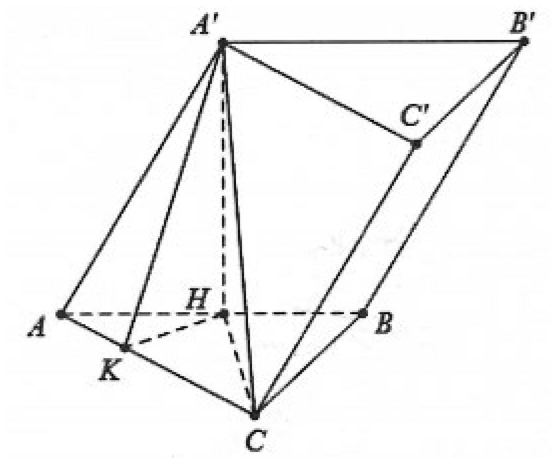
Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có: $A'H\perp(ABC)$

Do đó $\widehat{A'CH}=60^o$. Lại có: $CH=AC\sin 60^o=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow A'H=CH\tan 60^o=3a$.

Dựng $HK\perp AC$ ta có $A'H\perp AC\Rightarrow (A'HK)\perp AC$

Khi đó $HK=HA\sin 60^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Ta có: $\cos\widehat{A'KH}=\dfrac{HK}{\sqrt{HK^2+A'H^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{13}}>0$.

Do vậy $\cos\left(\widehat{(A'AC);(ABC)}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Dạng 6: Góc giữa hai mặt bên

1. Phương pháp giải:

Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC).

Cách 1: Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC).

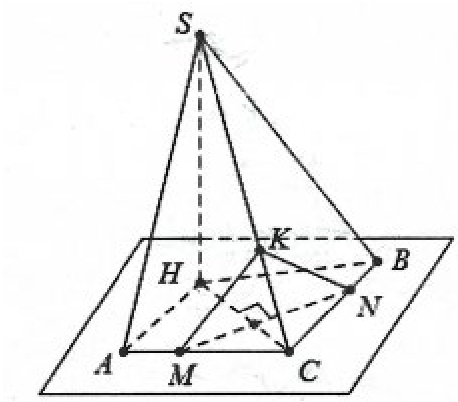
Cách 2: Dựng đường cao $SH\perp(ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC, dựng $MN\perp HC$.

Lại có: $MN\perp SH\Rightarrow MN\perp(SHC)\Rightarrow MN\perp SC$.

Dựng $MK\perp SC\Rightarrow SC\perp(MKN)$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SAC);(SBC)}\right)=\left(\widehat{MK,KN}\right)$.



2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Biết $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Lời giải

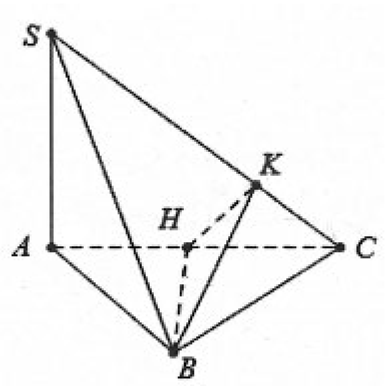
Dựng $BH\perp AC\Rightarrow BH\perp(SAC)\Rightarrow BH\perp SC$.

Dựng $HK\perp SC\Rightarrow(HKB)\perp SC$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SBC);(SAC)}\right)=\widehat{HKB}$.

Ta có: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a$.

Khi đó $\sin\widehat{KCH}=\dfrac{HK}{HC}=\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow HK=\dfrac{a}{3}$.



Mặt khác: $BH=\frac{BA.BC}{AC}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \tan\widehat{HKB}=\frac{BH}{HK}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{HKB}=60^o$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°.

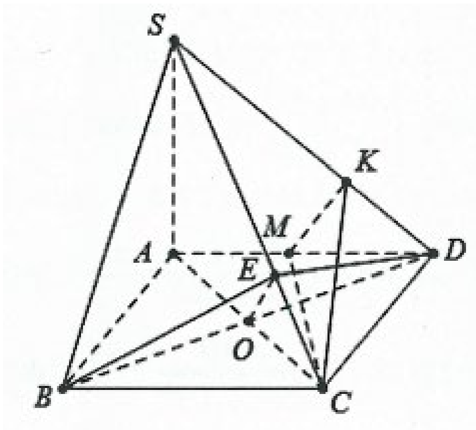
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC}=60^o$, $SA\perp(ABC)$ và $SA=a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD).

b) (SAD) và (SCD).

Lời giải

a) Nhận xét ΔABC là tam giác đều cạnh a vì $AB=BC=a$ và $\widehat{ABC}=60^o$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.



Ta có: $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC.$

Dựng $BE\perp SC\Rightarrow SC\perp(BED)$.

Mặt khác: $SA=AC=a\Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A suy ra $\widehat{ECO}=45^o$. Khi đó $OE=OC\sin 45^o=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lại có: $OB=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \tan\widehat{BEO}=\frac{OB}{OE}=\sqrt{6}$.

Do $\widehat{BED}=2\widehat{BEO}$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy tính **CASIO** ta tính được $\cos\widehat{BED}=\frac{-5}{7}$

Cách khác: Ta có: $BE=DE=\sqrt{OE^2+OB^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}\Rightarrow \cos\widehat{BED}=\frac{EB^2+ED^2-BD^2}{2.EB.ED}=\frac{-5}{7}$.

Suy ra $\cos\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right)=\frac{5}{7}$.

b) Dựng $CM\perp AD$ ta có: $\begin{cases} CM\perp AD \\ CM\perp SA\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAD)\Rightarrow CM\perp SD.$

Dựng $CK\perp SD\Rightarrow SD\perp(MKC)$.

Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA=AD=a\Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A suy ra $\widehat{SDM}=45^o$. Do đó $MK=MD\sin 45^o=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

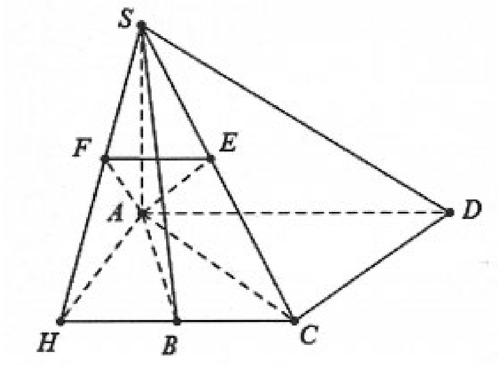
Suy ra $\tan\widehat{MKC}=\frac{CM}{MK}=\sqrt{6}\Rightarrow \cos\widehat{MKC}=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{(SCD);(SAD)}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AD=2a$, biết rằng $SA\perp(ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 45°. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC).

Lời giải

Do $AD=2a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD=2a$



Ta có: $\begin{cases} AC\perp CD \\ CD\perp SA \end{cases} \Rightarrow CD\perp(SAC)$

Suy ra $\widehat{((SCD);(ABCD))}=\widehat{SCA}=45^o$

$\Rightarrow SA=AC=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Dựng $AE\perp SC\Rightarrow AE\perp(SCD)$

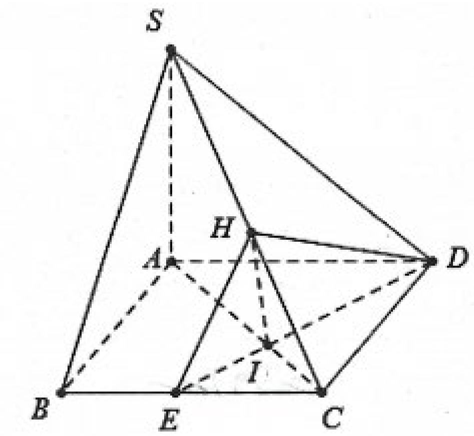
Dựng $\begin{cases} AH\perp BC \\ AF\perp SH \end{cases} \Rightarrow AF\perp(SBC)$, góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc giữa AE và AF.

Ta có: $AE=\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $AH=AC\sin 30^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AF=\dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2+AH^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, do $AF\perp(SBC)\Rightarrow AF\perp FE$. Do đó $\cos\widehat{FAE}=\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$; $AD=a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA\perp(ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải



Do $SA\perp(ABCD)$ và $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp(SBA)$

Do đó $\widehat{(SBC);(ABC)}=\widehat{SBA}=60^o$; $AC=2a$

$\Rightarrow SA=AB\tan 60^o=a\sqrt{3}$.

Dựng $DE\perp AC(E\in BC)$ tại I, mặt khác $DE\perp SA$

$\Rightarrow DE\perp(SAC)\Rightarrow DE\perp SC$.

Dựng $IH\perp SC\Rightarrow SC\perp(EHD)$. Ta có: $DI=DC\sin\widehat{ICD}$

trong đó $\tan\widehat{ICD}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{ICD}=60^o$.

Suy ra $DI=a\sin 60^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $DE=\dfrac{DC^2}{DI}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

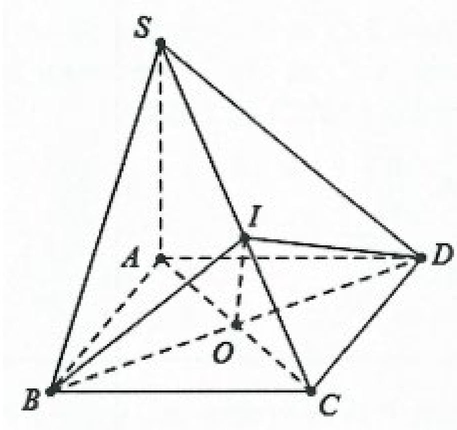
$\Rightarrow IE=DE-DI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\Rightarrow CI=\sqrt{EI.DI}=\dfrac{a}{2}$; $\sin\widehat{ICH}=\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\Rightarrow IH=IC\sin\widehat{IHC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Suy ra $EH=\sqrt{EI^2+IH^2}=\dfrac{2a}{\sqrt{21}}$; $ED=\dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Do đó $\cos\widehat{EHD}=\dfrac{EH^2+HD^2-ED^2}{2.EH.HD}=\dfrac{-\sqrt{2}}{4}<0\Rightarrow\cos\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60°.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\ BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC.$

Kẻ $BI\perp SC\Rightarrow SC\perp(BID)$.

Vậy $\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right)=\left(\widehat{BI;ID}\right)=60^o.$

Dễ thấy $\begin{cases}OI\perp SC\\ \widehat{BIO}=\dfrac{1}{2}\widehat{BID}\end{cases}.$

- **Trường hợp 1:** $\widehat{BID}=60^o\Rightarrow\widehat{BIO}=30^o.$

  Ta có:

  $\tan\widehat{BIO}=\dfrac{BO}{IO}=\tan30^o\Rightarrow OI=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}>OC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý).

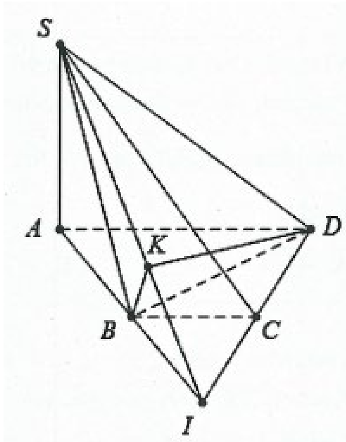
- **Trường hợp 2:** $\widehat{BID}=120^o\Rightarrow\widehat{BIO}=60^o.$

  Ta có: $\tan\widehat{BIO}=\dfrac{BO}{IO}=\tan60^o\Rightarrow OI=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}.$

  Mặt khác: $\sin\widehat{ICO}=\dfrac{OI}{OC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\tan\widehat{ICO}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow SA=AC\tan\widehat{ICO}=a.$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB=2a$, biết rằng $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải



Do $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB=2a$ $\Rightarrow$ $ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Do đó $\widehat{ABD}=90^o$.

Gọi $I=AB\cap CD\Rightarrow SI=(SAB)\cap(SCD)$.

Do $\begin{cases}AI\perp BD\\ BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAI)\Rightarrow BD\perp SI.$

Dựng $BK\perp SI\Rightarrow SI\perp(BKD)$.

Khi đó $\left(\widehat{(SAB);(SCD)}\right)=\left(\widehat{BK,KD}\right)=\widehat{BKD}.$

Do $BD\perp(SAI)\Rightarrow BD\perp BK\Rightarrow\Delta KBD$ vuông tại B có

$BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=a\sqrt{3}.$

Do $\begin{cases} BC//AD \\ BC = \dfrac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow BC$ là đường trung bình trong tam giác $AID \Rightarrow AB = BI$ và $AI = 2a$

$\Rightarrow BK = \dfrac{1}{2}d\left(A;SI\right) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2+AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan\widehat{BKD} = \dfrac{BD}{BK} = \sqrt{7}.$

Dạng 7: Xác định và tính số đo của góc phẳng nhị diện

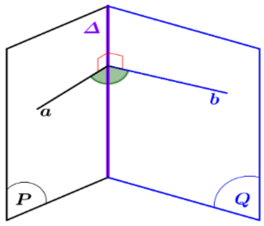
1. phương pháp:

+ Ta xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) theo 3 bước:

Bước 1: Tìm giao tuyến $\Delta = (P)\cap(Q)$.

Bước 2: Tìm $a\subset(P): a\perp\Delta$ và $b\subset(Q): b\perp\Delta$.

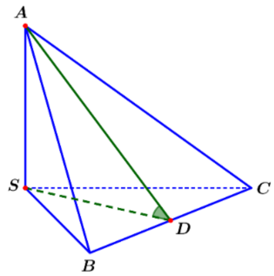
Bước 3: Kết luận $[P,\Delta,Q]$



2. Ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$. Tính $\cos\alpha$?

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

Suy ra $SD\perp BC$ (vì tam giác SBC cân tại S).

$\begin{cases} SA\perp SB \\ SA\perp SC \end{cases} \Rightarrow SA\perp(SBC) \Rightarrow SA\perp BC$.

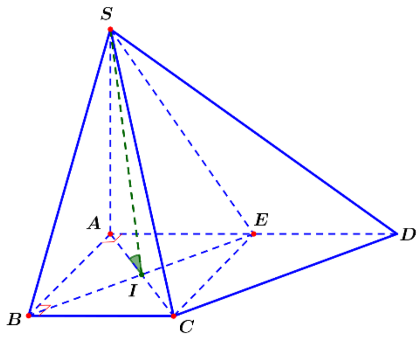
Và $SD\perp BC$ $\Rightarrow BC\perp(SAD) \Rightarrow BC\perp SD$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBC)\cap(ABC) = BC \\ SD\perp BC \\ AD\perp BC \end{cases} \Rightarrow [S,BC,A] = \widehat{SDA} = \alpha$.

Xét ΔSAD vuông tại S, ta có: $\cos\alpha = \cos\widehat{SDA} = \dfrac{SD}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BE, A]$.

Lời giải



Nhận xét: $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a.

Gọi $I = AC \cap BE$.

Ta có: $\begin{cases} BE \perp AI \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAI) \Rightarrow BE \perp SI$.

Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABE) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases} \Rightarrow [S, BE, A] = \widehat{SIA}$

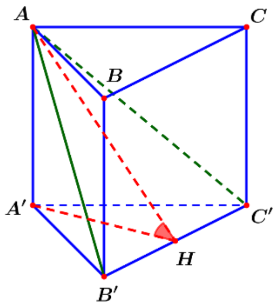
Xét ΔSIA vuông tại A, ta có:

$$\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{IA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ.$$

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ?

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh $B'C'$. Suy ra $A'H \perp B'C'$.



Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'AH) \Rightarrow B'C' \perp AH$.

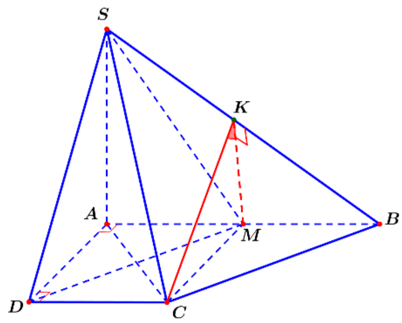
$\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ A'H \perp B'C' \\ AH \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA}$.

Xét $\Delta A'AH$ vuông tại A, ta có:

$$\tan\widehat{A'HA}=\frac{AA'}{AH}=\frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{A'HA}=\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Biết $AB=2AD=2DC=2a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[C,SB,A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\begin{cases}CM\perp AB\\CM\perp SA\end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAB)$.

Trong mặt phẳng (SAB), từ M kẻ $MK\perp SB$ tại K.

Khi đó: $\begin{cases}SB\perp MK\\SB\perp CM\end{cases}\Rightarrow SB\perp(CMK)\Rightarrow SB\perp CK$.

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SBC)=SB\\MK\perp SB\\CK\perp SB\end{cases}\Rightarrow[C,SB,A]=\widehat{CKM}$.

$\Delta BKM\sim\Delta BAS$ nên $\frac{KM}{SA}=\frac{BM}{SB}=\frac{a}{a\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow KM=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

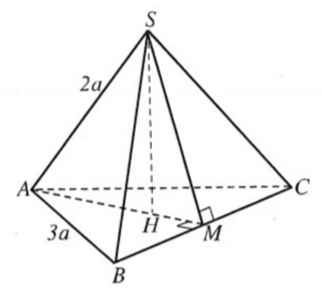
Xét ΔCKM vuông tại M, ta có:

$$\tan\widehat{CKM}=\frac{CM}{MK}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{CKM}=60^\circ.$$

Ví dụ 5. *S.ABC* có cạnh đáy 3a, cạnh bên 2a. Tính số đo nhị diện [S, BC, A].

Lời giải

Gọi M là trong điểm của BC thì $mp(SAM)\perp BC$ từ đó $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện [S, BC, A]



Ta có $AM=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, từ đó $HM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$SM^2=SB^2-BM^2=4a^2-\frac{9a^2}{4}=\frac{7a^2}{4}$, từ đó $SM=\frac{a\sqrt{7}}{2}$

Vậy $\cos\widehat{SMH}=\frac{HM}{SM}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Số đo nhị diện [S, BC, A] là φ được xác định bởi

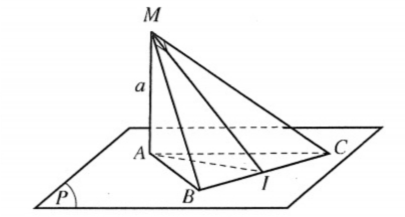
$\cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}, 0^o < \varphi < 180^o$.

Ví dụ 6. Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P). Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P). Cho biết MA = a; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

a.Tính độ dài BC;

b. Tính số đo nhị diện [M, BC, A].

Lời giải



a. Vì $MA \perp mp(P)$ nên $\widehat{MBA}$ và $\widehat{MCA}$

là góc giữa MB và MC với mp (P).

Theo giả thiết. $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = 30^O$.

Từ đó . $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}$.

b. Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp mp(MIA)$,

Từ đó $\widehat{MIA}$ là góc phẳng nhị diện [M, BC, A] .

Đặt $\widehat{MIA} = \varphi$. Ta có $MI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$. $\sin\varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^O$.

Vậy góc nhị diện [M, BC, A] bằng 45°.

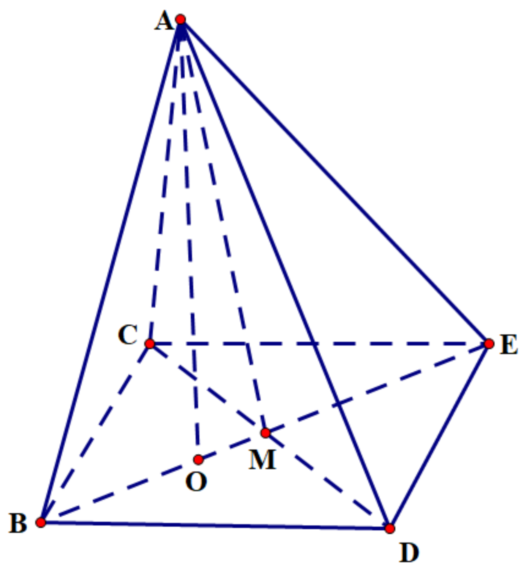
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Cho tứ diện đều $ABCD$. Vẽ hình bình hành $BCED$.

a) Tìm góc giữa đường thẳng AB và (BCD).

b) Tìm góc phẳng nhị diện $[A,CD,B]$;$[A,CD,E]$.

Lời giải



a) Gọi O là tâm tam giác BCD. Do tứ diện ABCD đều nên $AO \perp (BCD)$

Nên góc giữa đường thẳng AB và (BCD) là $\widehat{ABO}$

Gọi a là độ dài cạnh của tứ diện đều $ABCD$.

là trọng tâm tam giác BCD nên $BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\cos\widehat{ABO} = \frac{BO}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ nên $\widehat{ABO} = 54,7^\circ$

Suy ra góc giữa đường thẳng AB và (BCD) bằng $54,7^\circ$

b) Gọi M là trung điểm CD.

BCED là hình bình hành nên ED = BC = a, CE = BD = a. Nên BCED là hình thoi

Ta có $BM \perp CD, EM \perp CD$

Mà $CD \perp AO$ nên $CD \perp (ABM)$. Suy ra $CD \perp AM$

$[A,CD,B] = \widehat{AMB}, [A,CD,E] = \widehat{AME}$

Ta có: $OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

$AO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\tan\widehat{AMO} = \frac{AO}{OM} = 2\sqrt{2}$.

Nên $\widehat{AMO} = 70,5^\circ, \widehat{AME} = 180^\circ - 70,5^\circ = 109,5^\circ$

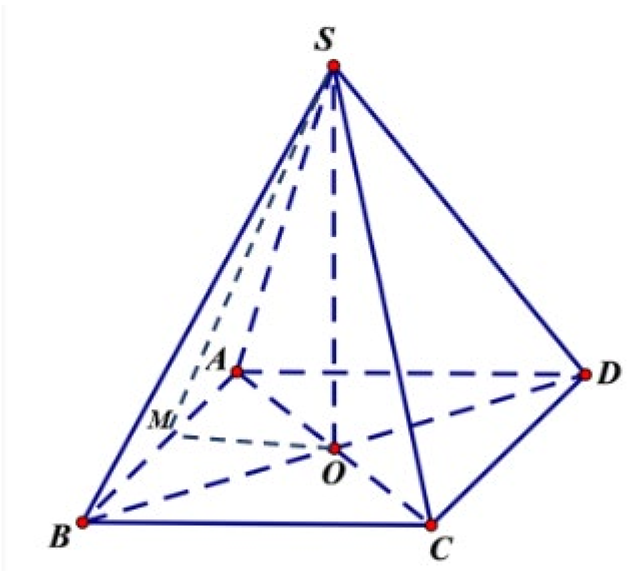
Vậy $[A,CD,B] = 70,5^\circ, [A,CD,E] = 109,5^\circ$

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là tâm của đáy và có tất cả các cạnh bằng nhau.

a) Tìm góc giữa đường thẳng SA và $(ABCD)$.

b) Tìm góc phẳng nhị diện $[A,SO,B],[S,AB,O]$.

Lời giải



a) $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có O là tâm của đáy

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = (SA,OA) = \widehat{SAO}$$

Giả sử hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\cos\widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 45^\circ$

Vậy $(SA,(ABCD)) = 45^\circ$

b) Gọi I là trung điểm của AB

$SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AO, SO \perp BO$

Vậy $\widehat{AOB}$ là góc phẳng nhị diện $[A,SO,B]$.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow \widehat{AOB} = 90^\circ$
ΔSAB đều $\Rightarrow SI \perp AB$
ΔOAB vuông cân tại $O \Rightarrow OI \perp AB$
Vậy $\widehat{SIO}$ là góc phẳng nhị diện $[S,AB,O]$.
Ta có: O là trung điểm của BD
I là trung điểm của AB
$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔABD

$\Rightarrow OI = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

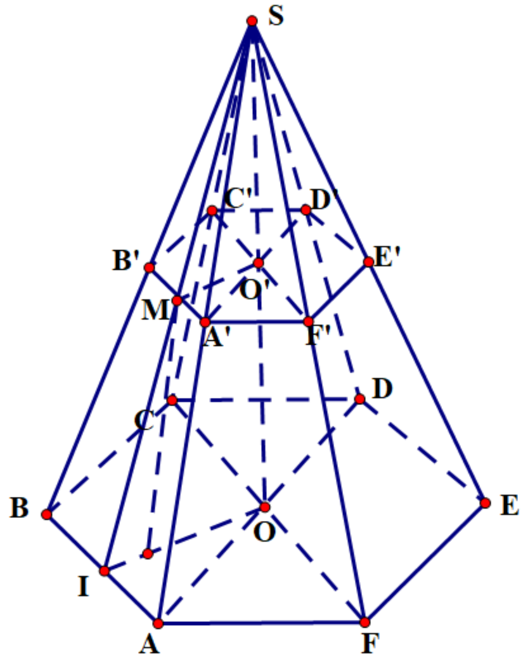
$\tan\widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SIO} \approx 54,7^\circ$

Bài 3. Cho hình chóp cụt lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}, OO' = a$.

a) Tìm góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

b) Tìm góc phẳng nhị diện $[O,AB,A'],[O',A'B',A]$.

Lời giải



a) $OO' =$ a nên SO = 2a

$SO \perp (ABCDEF)$ nên góc giữa cạnh bên và đáy là $\widehat{SAO}$

Ta có: $AO = BC = a; SO = 2OO' = 2a$

$\tan\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{OA} = 2$

Nên $\widehat{SAO} = 63,4^o$

b) Kẻ $MH \perp (ABCDEF)$ nên $MH = OO' = a$

$MO' = HO = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}; OI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

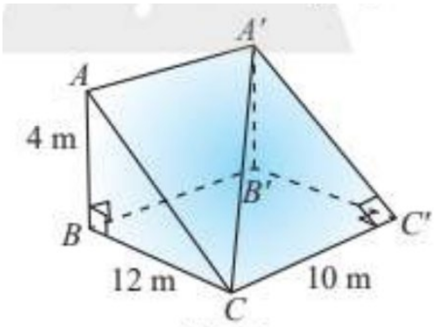
$IH = OI - OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\tan\widehat{MIO} = \dfrac{MH}{IH} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}$ nên $\widehat{MIO} = 73,9^\circ$

$[O, AB, A'] = \widehat{MIO} = 73,9^\circ$

$[O', A'B', A] = \widehat{IMO} = 180^\circ - 73,9^\circ = 106,1^o$

Bài 4. Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình 9.



Hình 9

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và $(CC'B'B)$.

b) Tính số đo góc nhị diện cạnh CC'.

Lời giải

a) Góc giữa CA' và (CC'B'B) là $\widehat{A'CB'}$

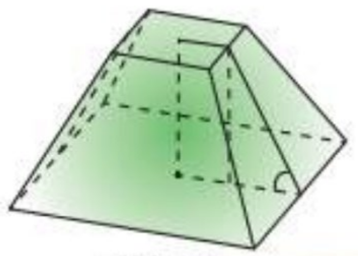
Ta có: $CB' = \sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$

$\tan\widehat{A'CB'} = \dfrac{A'B'}{CB'} = 0,256$. Nên $\widehat{A'CB'} = 14,36^\circ$

b) Góc nhị diện cạnh CC' là $\widehat{ACB}$

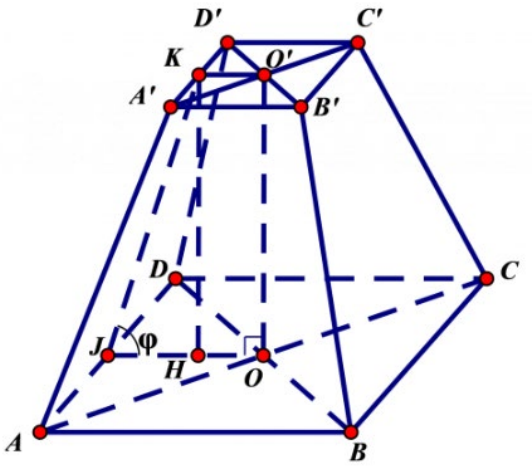
Ta có $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{3}$. Nên $\widehat{ACB} = 18,4^\circ$

Bài 5. Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có hai cạnh đáy là 14 m và 10 m. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135°. Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.



Hình 10

Lời giải



Ta có: $OJ = \dfrac{1}{2}\cdot 14 = 7; O'K = \dfrac{1}{2}\cdot 10 = 5$, suy ra $OH = 5, JH = 7 - 5 = 2$ Mặt bên tạo với đáy nhỏ 1 góc $\widehat{O'KJ} = 135^\circ$ nên $\widehat{KJH} = 45^\circ$ $KH = OO' = JH\cdot\tan 45^\circ = 2$ Thể tích khối chóp cụt là:

$V = \dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot\left(10^2 + \sqrt{10^2\cdot 14^2} + 14^2\right) = 290,7\left(\text{ m}^3\right)$

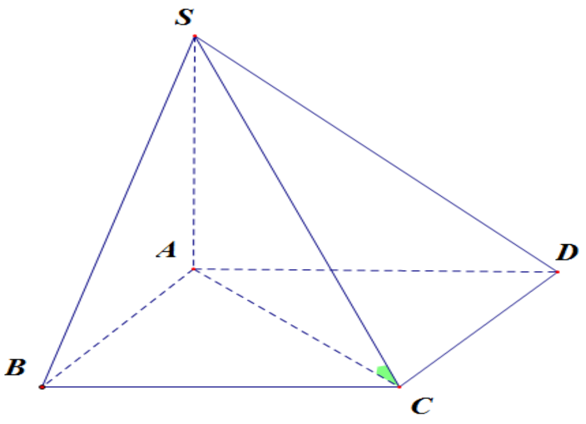
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\widehat{SCB}$. **B.** $\widehat{CAS}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{ASC}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

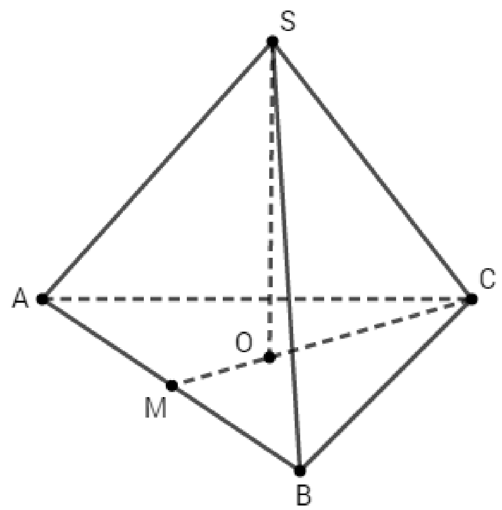
Do đó $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$.

Câu 2: A Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng chiều cao. Tính góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

A. 30^o. **B.** 60^o. **C.** 45^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn B



Gọi O trọng tâm của tam giác đều ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

$SO \perp (ABC) \Rightarrow CO$ là hình chiếu của SC trên (ABC) $\Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC,OC}\right)$.

ΔSCO vuông tại $O \Rightarrow \widehat{SCO} < 90° \Rightarrow \left(\widehat{SC,OC}\right) = \widehat{SCO}.$

Đặt $AB = SO = a$. Gọi M là trung điểm AB thì $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CO = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó suy ra $\tan\widehat{SCO}=\dfrac{SO}{OC}=\dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SCO}=60^o\Rightarrow\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=60°$.

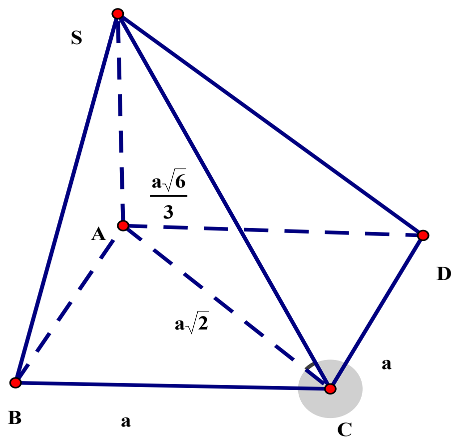
Vậy góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60^o.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



$AC=a\sqrt{2}$,

AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)\Rightarrow\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SC;AC}\right)=\widehat{SCA}$

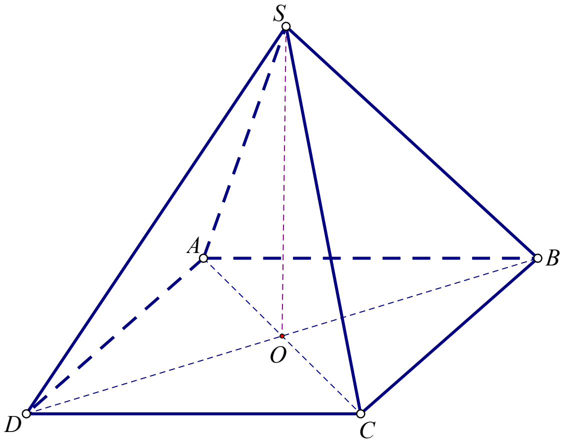
$\Delta SAC:\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}:\left(a\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SCA}=30°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Hai mặt phẳng $(SAC),(SBD)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

A. (SB,SO). **B.** (SB,BD). **C.** (SB,SA). **D.** (SO,BD).

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $(SAC)\cap(SBD)=SO$

Vì $(SAC),(SBD)$ cùng vuông góc với đáy nên $SO\perp(ABCD)$.

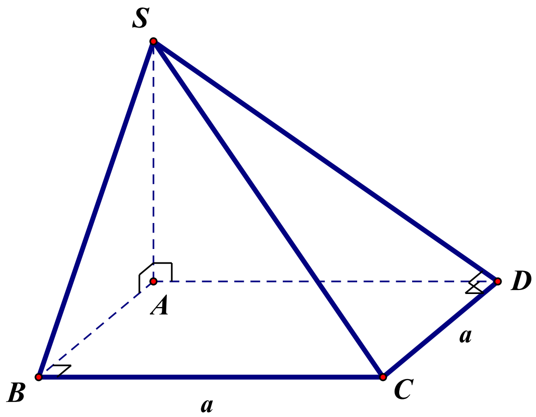
Góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$ là góc giữa SB và BD.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD) là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{CSA}$. **C.** $\widehat{SCD}$. **D.** $\widehat{CSD}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SC\cap(SAD)=\{S\}$

Mặt khác:

$$\left.\begin{array}{l} CD\perp AD \\ CD\perp SA \\ AD\cap SA=\{A\} \end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp(SAD)$$, tức là D là hình chiếu vuông góc của C lên (SAD)

Từ, suy ra SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD).

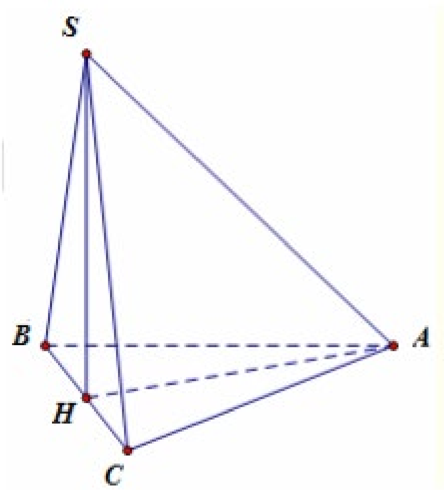
Vậy góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD) là $\widehat{CSD}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 45^0 **B.** 75^0 **C.** 60^0 **D.** 30^0

Lời giải

Chọn A



Hai tam giác SBC, ABC là tam giác đều cạnh a, suy ra $SH = HA \Rightarrow \Delta SAH$ vuông cân

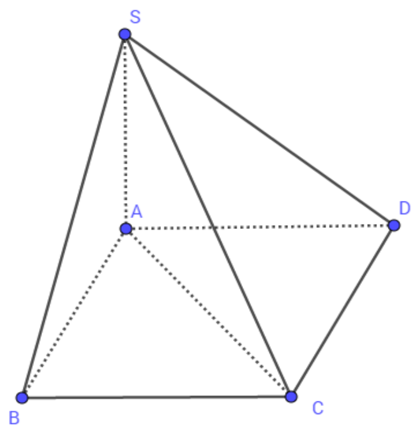
$\Rightarrow \widehat{SA,(ABC)} = \widehat{SAH} = 45^0$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $75°$ **D.** $45°$

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC = a\sqrt{2}$

Vì AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC

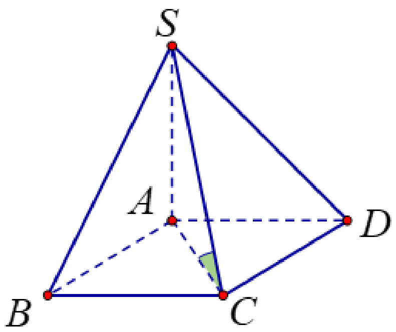
Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\widehat{SCA}=30^0$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA\perp(ABCD)$. Biết $SA=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$

Lời giải

Chọn A



Vì $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{(SC;AC)}=\widehat{SCA}$.

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}.$

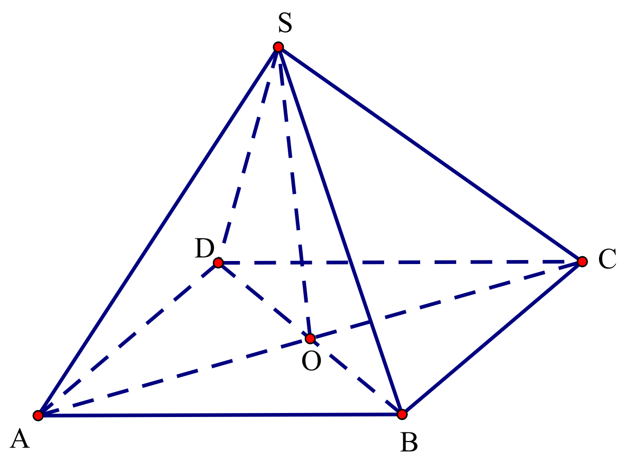
$\Rightarrow\tan\widehat{SAC}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1\Rightarrow\widehat{SCA}=45^0.$

Câu 10: Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, chiều cao $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là

A. $60°$ **B.** $15°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Lời giải

Chọn C



Gọi SO là đường cao của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Do đó góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBO}$.

Ta có $SO = h = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $OB = \frac{BD}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Tam giác vuông SBO tại O có $SO = OB = \frac{a}{\sqrt{2}}$ nên cân tại O.

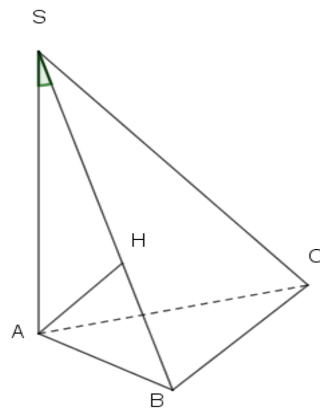
Suy ra $\widehat{SBO} = 45°$

Câu 11: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Do tam giác ABC vuông tại B nên $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBC)$

Gọi H là hình chiếu của A lên SB khi đó $AH \perp (SBC)$ và SH là hình chiếu của AH lên mặt phẳng (SBC) nên góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là góc $\widehat{ASH}$

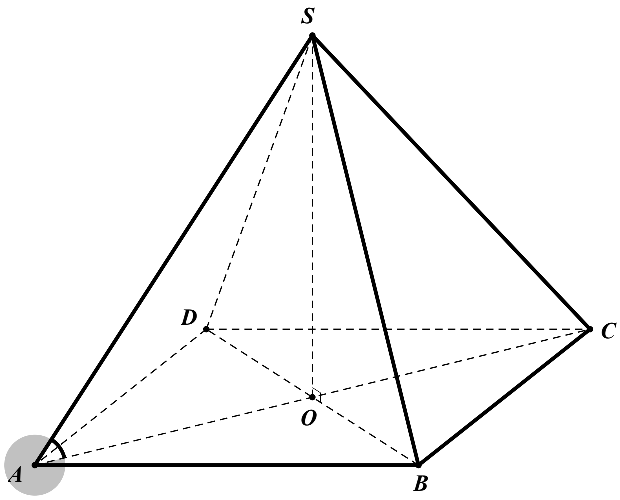
Trong tam giác vuông SAB $\sin\widehat{ASB} = \frac{AB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ góc cần tìm là $30°$.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng:

A. 45^0 **B.** 75^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SO \perp (ABCD)$

Do đó: $\left[\widehat{SA,(ABCD)}\right] = \widehat{SAO}$

Xét ΔSAO vuông tại O:

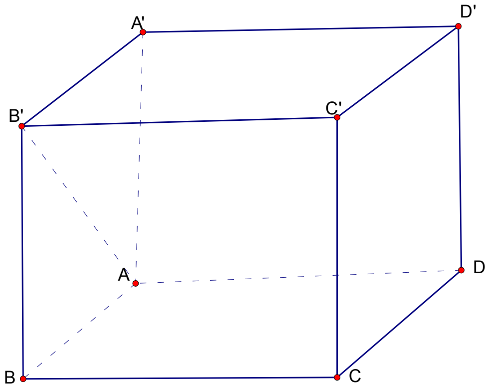
$\cos\widehat{SAO} = \dfrac{AO}{SO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} : a\sqrt{2} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra: $\widehat{SAO} = 60^0$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng?

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn D



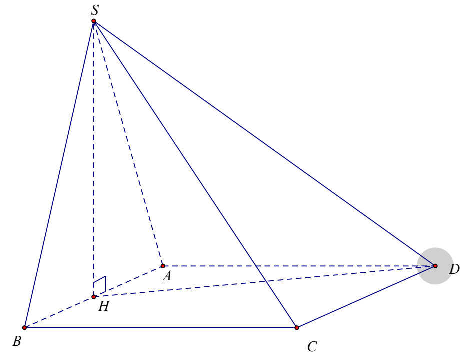
Góc giữa AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{B'AB} = 45^0$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\alpha = 2\sqrt{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **D.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SD,(ABCD))} = \widehat{SDH} = \alpha$.

Ta có:

$SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

$DH = \sqrt{AD^2 + HA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

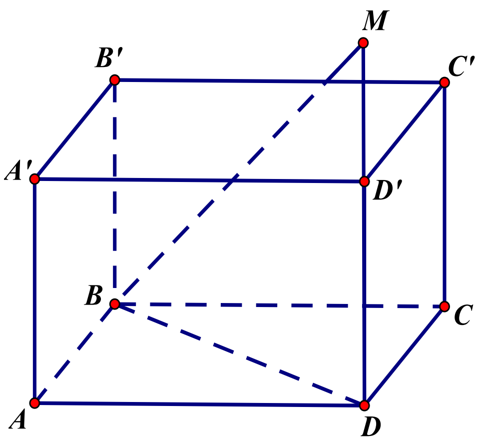
Suy ra, $\tan\alpha = \frac{SH}{DH} = \sqrt{3}$.

Câu 15: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Điểm M thuộc tia DD' thỏa mãn $DM = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $30°$ **B.** $45°$. **C.** $75°$ **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có BM cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại B.

$DM \perp (ABCD)$ tại D.

Suy ra $\widehat{(BM,(ABCD))} = \widehat{(BM,BD)} = \widehat{MBD}$.

Xét tam giác DBM vuông tại D, ta có

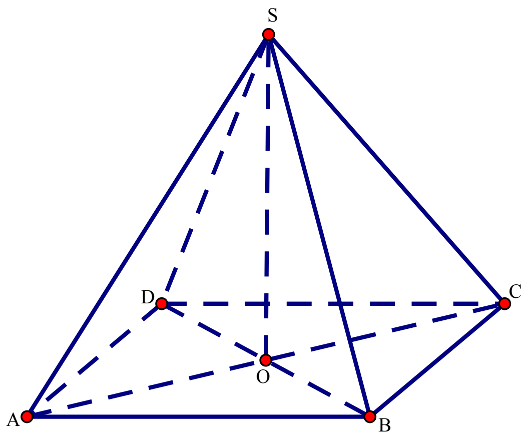
$\tan\widehat{MBD} = \frac{DM}{BD} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MBD} = 60° \Rightarrow \widehat{(BM,(ABCD))} = 60°$.

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°. **B.** 75°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra AO là hình chiếu của AS trên mặt phẳng $(ABCD)$ $\Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SA;AO}\right) = \widehat{SAO}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA: $\cos\widehat{SAO} = \dfrac{AO}{SA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ$.

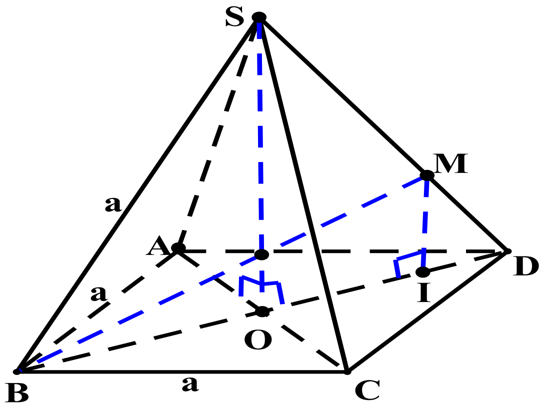
Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 60°.

Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là điểm nằm trên đoạn SD sao cho $SM = 2MD$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{5}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $AC \cap BD = \{O\} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Xét ΔSAO vuông tại O có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $MI \perp BD$ tại I. Suy ra: $MI \parallel SO$ nên $MI \perp (ABCD)$.

Vậy góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{MBI}$.

Ta có: $MI = \frac{1}{3}SO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$; $BI = \frac{5}{6}BD = \frac{5\sqrt{2}a}{6}$.

Xét ΔMBI vuông tại I ta có: $\tan\widehat{MBI} = \frac{MI}{BI} = \frac{1}{5}$.

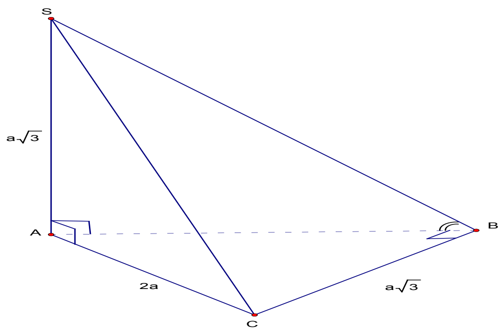
Vậy giá trị tan của góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\frac{1}{5}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



+ Ta có: $(SB,(ABC)) = (SB,BA) = \widehat{SBA} = \varphi$

+ Tính: $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AB}$.

+ Tính: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{a^2} = a$.

Suy ra: $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

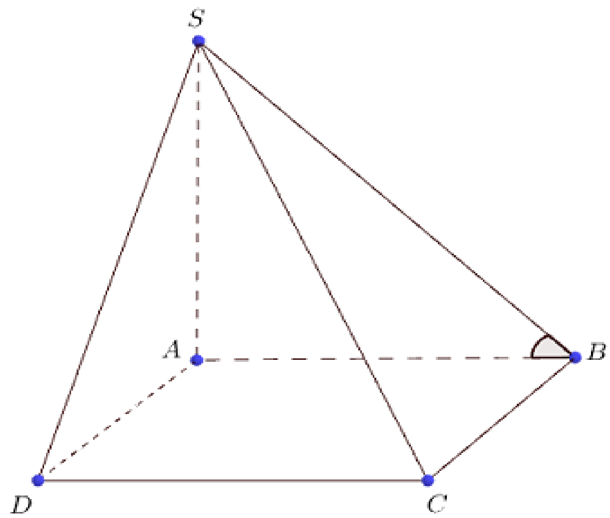
Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60°.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mặt khác, theo giả thiết $AB \perp BC$. Do đó $BC \perp (SAB)$ nên $SB \perp BC$.

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

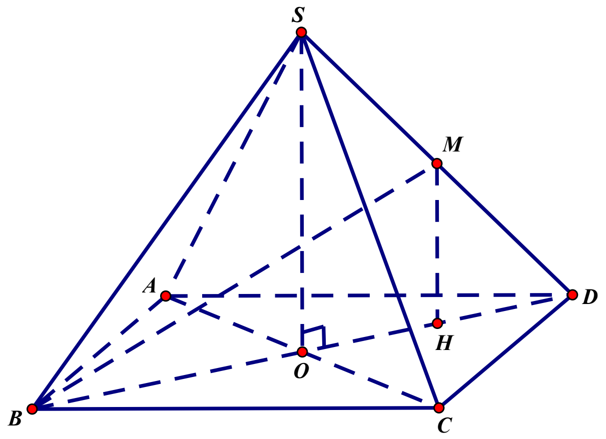
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong tam giác SOD dựng $MH//SO, H \in OD$ ta có $MH \perp (ABCD)$.

Vậy góc tạo bởi BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$BH = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}2a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

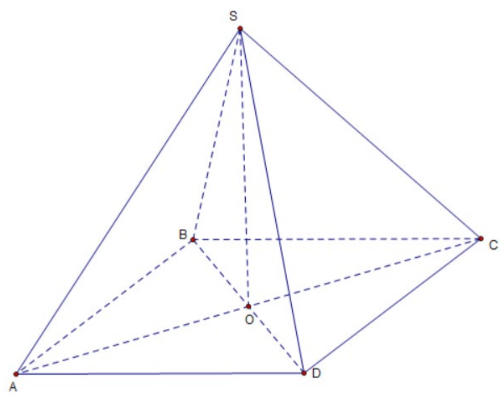
Vậy $\tan\widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{1}{3}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc

A. $\widehat{ASO}$. **B.** $\widehat{SAO}$. **C.** $\widehat{SAC}$. **D.** $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AO$

$ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow BD \perp AO$

Từ và, suy ra $AO \perp (SBD)$.

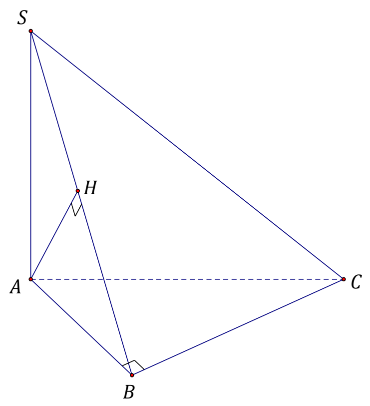
Vậy gócgiữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{ASO}$.

Câu 22: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC=2a$, $BC=a$, $SB=2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Trong (SAB) kẻ $AH\perp SB$ $(H\in SB)$.

Vì $\begin{cases} SA\perp BC \\ AB\perp BC \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $SB\perp AH$ do cách dựng nên $AH\perp(SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

Tam giác ABC vuông ở B $\Rightarrow AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=a\sqrt{3}$

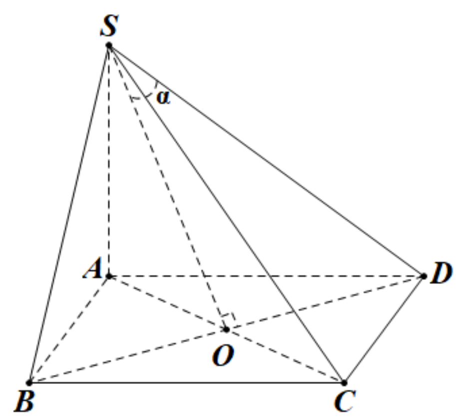
Tam giác SAB vuông ở A $\Rightarrow \sin\widehat{ASB}=\frac{AB}{SB}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{ASB}=30°$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(SAC) \Rightarrow \widehat{(SD;(SAC))} = \widehat{(SD;SO)} = \widehat{DSO} = \alpha$.

Xét ΔSAD vuông tại A: $SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

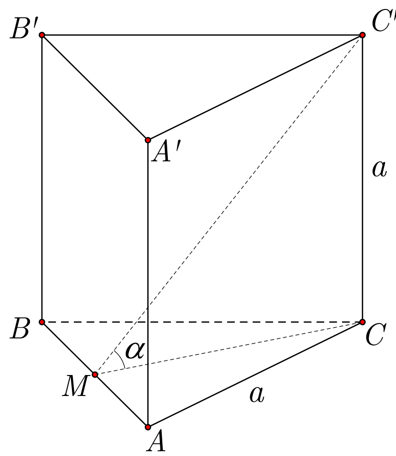
Xét ΔSOD vuông tại O: có $SD = 2a$, $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{DSO} = \dfrac{DO}{SD} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MC là hình chiếu của MC' trên mặt phẳng (ABC).

Do đó góc giữa đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi hai đường thẳng MC' và MC. Đó là góc $\alpha = \widehat{CMC'}$.

Ta có, CM là đường cao của tam giác đều ABC cạnh a nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

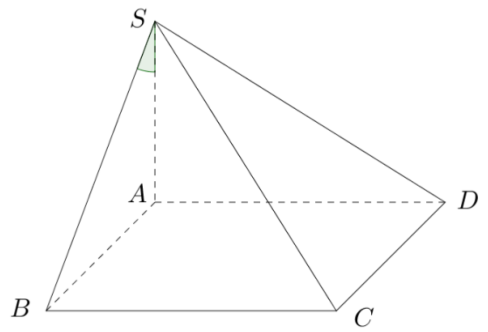
Xét tam giác CMC', ta có $\tan\alpha = \tan\widehat{CMC'} = \dfrac{CC'}{CM} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD).$$

$$\begin{cases}AB\perp AD\\AB\perp SA\left(SA\perp(ABCD)\right)\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD).$$

Do hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là góc giữa hai đường thẳng SB và SA.

$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{5}$.

$\cos\widehat{BSA}=\dfrac{SA}{SB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

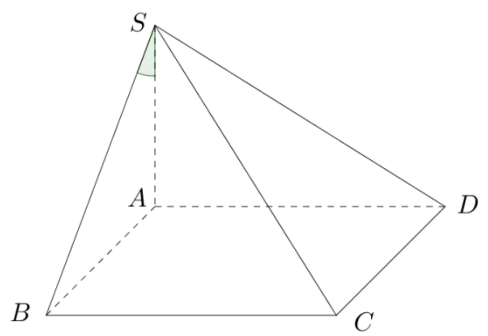
Vậy cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA=2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAC) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$$

$$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA(SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD).$$

Do hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là góc giữa hai đường thẳng SB và SA.

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.

$\cos\widehat{BSA} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

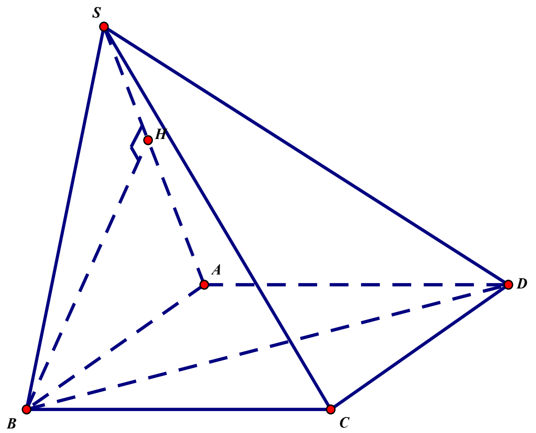
Vậy cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

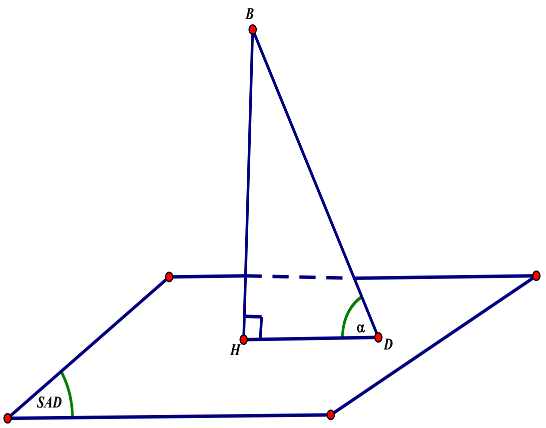
Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

Lời giải

Chọn C





Ta có $\sin(BD,(SAD)) = \sin\alpha = \dfrac{BH}{BD}$

$ABCD$ là hình vuông cạnh a, suy ra $BD = a\sqrt{2}$

Kẻ BH vuông góc SA (H thuộc SA), BH vuông góc AD suy ra BH vuông góc (SAD).

Tam giác SAD đều cạnh a, đường cao $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

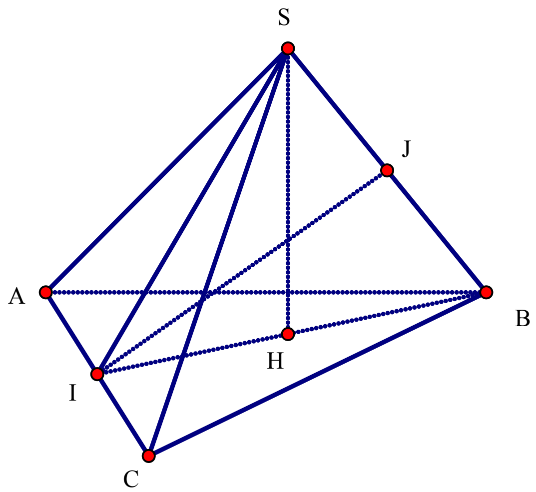
Từ, và suy ra $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Câu 28: Cho hình chóp S.ABC có $SA=SC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB=a\sqrt{2}$, $AB=BC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC=a$. Tính góc (SB,ABC)

A. 90^0 **B.** 45^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Lời giải

Chọn B



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, SB, H là điểm chiếu của S lên IB

Có $SA=SC$. Suy ra ΔSAC cân tại S, Suy ra $SI\perp AC$

Có SA=SC, $BA=BC$, BC chung. Suy ra $\Delta SAB=\Delta SCB$. Suy ra $JA=JC$.

Suy ra ΔJAC cân tại J, I là trung điểm AC. Suy ra $IJ\perp AC$

Có $AC\perp SI; AC\perp IJ$. Suy ra $AC\perp(SIB)$

Suy ra $(ABC)\perp(SIB)$, Có $(ABC)\cap(SIB)=IB$, $SH\perp IB$. Suy ra $SH\perp(ABC)$

Suy ra BH là hình chiếu của SB lên (ABC)

Suy ra $(SB,(ABC))=\widehat{SBI}$

Có $SI=\sqrt{SA^2-AI^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $IB=\sqrt{AB^2-AI^2}=\dfrac{a}{2}$, $SB=a\sqrt{2}$

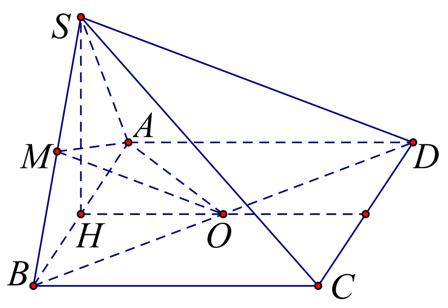
Có $\text{Cos}\,\widehat{SBI}=\dfrac{SB^2+IB^2-SI^2}{2SB.IB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\widehat{SBI}=45^0$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, SB; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $MO // SD$.

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$ nên $AM \perp (SBC)$.

Xét tam giác AMO, có:

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$;

$MO = \dfrac{1}{2}SD = \dfrac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{SH^2 + HA^2 + AD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + 3a^2} = a$.

$\Rightarrow \Delta AMO$ cân tại O

$$\Rightarrow \sin\widehat{AMO} = \frac{d(O;AM)}{OM} = \frac{\sqrt{MO^2 - \dfrac{AM^2}{4}}}{OM} = \frac{\sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{16}}}{a} = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

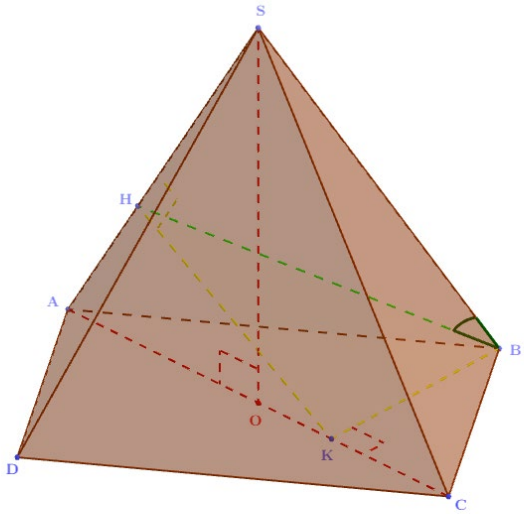
$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{SD;(SBC)}\right) = \sin\widehat{AMO} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

Câu 30: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$; $BC = a$ và $SA = SB = SC = SD = 2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC, H là hình chiếu vuông góc của K trên SA. Tính cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (BKH).

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{8}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



+ Ta có $BD = AC = a\sqrt{3}$; $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

$\dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BC^2} + \dfrac{1}{BA^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Leftrightarrow BK = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

$AK = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}; BE = a\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}BK$ nên K là trọng tâm của tam giác BCD.

+ Ta dễ dàng chứng minh được $SH \perp (BKH) \Rightarrow \widehat{SB,(BKH)} = \widehat{SBH}$.

+ Ta có $\Delta SOA \backsim \Delta KHA\,(S = K) \Rightarrow KH.SA = SO.KA \Leftrightarrow KH = \dfrac{a\sqrt{39}}{6}$.

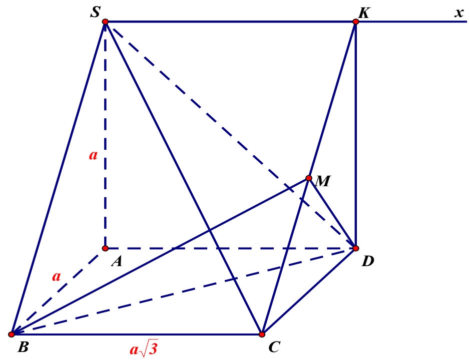
Vậy $\cos\widehat{SBH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$ với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{8}$. **C.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $Sx//BC$, dựng $K \in Sx$ sao cho $SK = BC$.

Trong (KDC), kẻ $DM \perp KC \Rightarrow DM \perp (SBCK)$ $\Rightarrow MB$ là hình chiếu vuông góc của DB lên $(SBCK)$. Khi đó: $\widehat{BD,(SBC)} = \widehat{BD,(SBCK)} = \widehat{MBD}$.

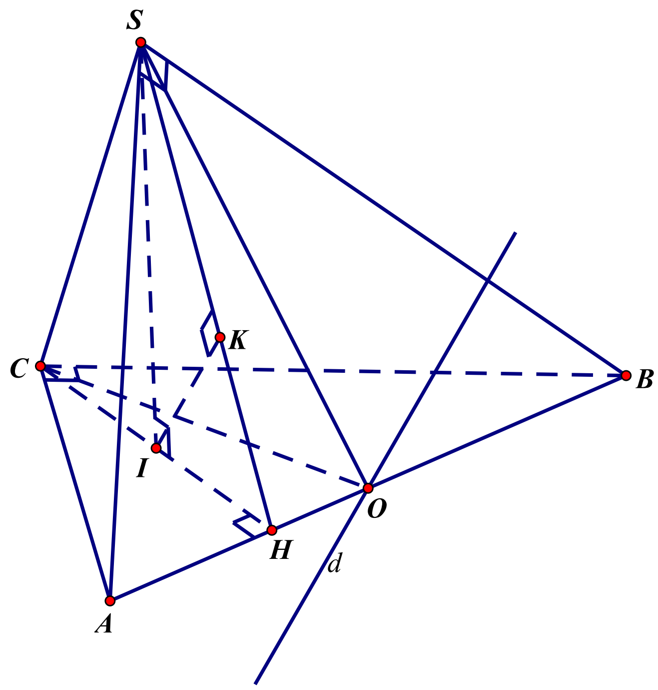
Ta có: $\sin \widehat{MBD} = \dfrac{DM}{BD} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, CH vuông góc với AB tại H, I là trung điểm của đoạn HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90°$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Do $\widehat{ASB}=90^\circ$ nên tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ nằm trên đường thẳng d đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $d\perp(SAB)$. (1)

Trong mặt phẳng (SCH) kẻ $IK\perp SH$ tại K.

Theo giả thiết $SI\perp(ABC)$ suy ra $SI\perp AB$. Từ $SI\perp AB$ và $AB\perp CH$ suy ra $AB\perp(SCH)\Rightarrow AB\perp IK$.

Từ $IK\perp SH$ và $AB\perp IK$ ta có $IK\perp(SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $IK\parallel d$. Bởi vậy $\widehat{(OO';(ABC))}=\widehat{(d;(ABC))}=\widehat{(IK;(ABC))}$.

Vì $(SCH)\perp(ABC)$ nên IH là hình chiếu vuông góc của IK trên mặt phẳng (ABC). Bởi vậy $\widehat{(IK;(ABC))}=\widehat{(IK,IH)}=\widehat{HIK}=\widehat{HSI}$.

Do tam giác ABC vuông tại C và SAB vuông tại S nên $CO=SO=\dfrac{AB}{2}$.

Xét hai tam giác vuông CHO và SHO có $CO=SO$, cạnh OH chung nên $\Delta CHO=\Delta SHO(\text{c.g.c})$, bởi vậy $CH=SH$.

Xét tam giác SIH vuông tại I có $IH=\dfrac{CH}{2}=\dfrac{SH}{2}$, ta có $\sin\widehat{HSI}=\dfrac{IH}{SH}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{HSI}=30^\circ$.

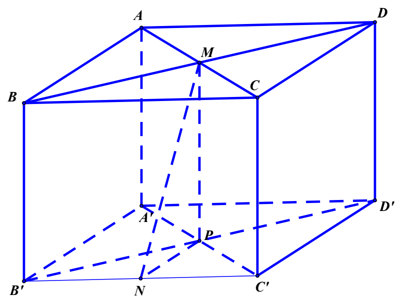
Vậy $\widehat{(OO';(ABC))}=30^\circ$.

Câu 33: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB=a>0$. Gọi P là trung điểm của cạnh $A'C'\Rightarrow MP\perp(A'B'C'D')$.

Suy ra $\alpha=(MN,(A'B'C'D'))=\widehat{MNP}$.

Xét tam giác vuông MNP ta có $MN=\sqrt{MP^2+PN^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

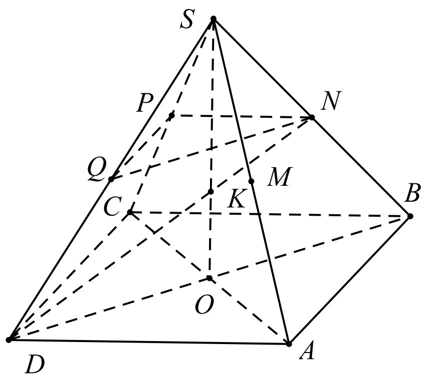
$$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{MNP} = \frac{MP}{MN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 34: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = \sqrt{5}a$, $AB = a$. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính cosin của góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Do $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD nên mặt phẳng $(ABCD)$ song song mặt phẳng (MPQ) suy ra góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP) cũng là góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(ABCD)$.

Có $K = SO \cap DN$. Do $S.ABCD$ hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra hình chiếu vuông góc của đường thẳng DN trên mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng DO nên

$\widehat{(DN,(ABCD))} = \widehat{(DN,DO)}$.

Xét tam giác vuông SOA có $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}a; SA = \sqrt{5}a \Rightarrow SO = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Mà K là trọng tâm tam giác $SBD \Rightarrow OK = \frac{1}{3}SO = \frac{\sqrt{2}a}{2} = OD \Rightarrow \Delta OKD$ vuông cân tại O hay $\widehat{KDO} = 45^0$.

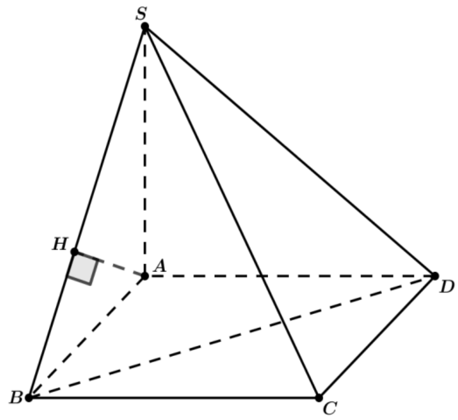
Hay $\left(\widehat{DN,(MPQ)}\right) = 45^0 \Rightarrow \cos\left(\widehat{DN,(MPQ)}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$ **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$

Lời giải

Chọn C



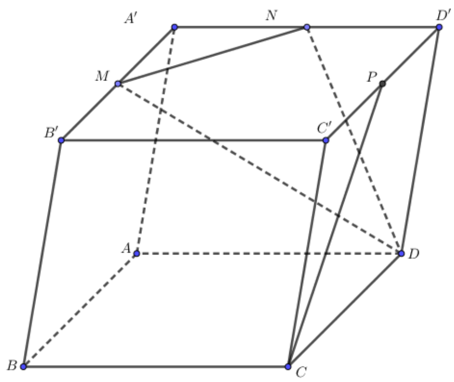
$ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = 2a$, ta có $AD // (SBC)$ nên suy ra

$d\left[D,(SBC)\right] = d\left[A,(SBC)\right] = AH$ với $AH \perp SB$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên H là trung điểm của SB suy ra $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

vậy $\sin \widehat{BD,(SBC)} = \dfrac{d\left[D,(SBC)\right]}{BD} = \dfrac{d\left[A,(SBC)\right]}{BD} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

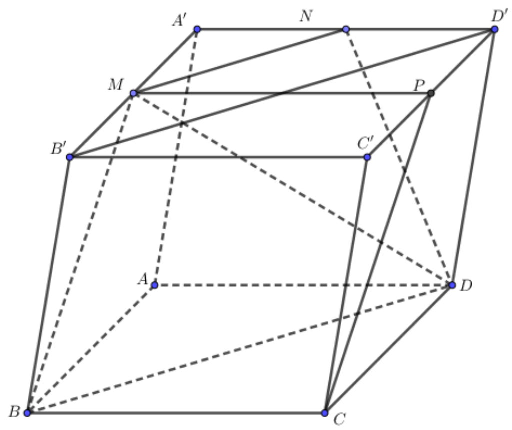
Câu 36: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$. Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng



A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $0°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác $A'B'D'$ có:

M là trung điểm của $A'B'$ và N là trung điểm của $A'D'$

nên MN là đường trung bình của tam giác $A'B'D'$

Suy ra $MN\,//\,B'D'$, mà $B'D'\,//\,BD$ nên $MN\,//\,BD \Rightarrow M, N, B, D$ đồng phẳng.

Ta có $\begin{cases} MP\,//=B'C' \\ BC\,//=B'C' \end{cases} \Rightarrow MP\,//=BC$ nên tứ giác $MPCB$ là hình bình hành$\Rightarrow CP\,//\,BM$.

Ta có $\begin{cases} CP\,//\,BM \\ BM \subset (BMND) \end{cases} \Rightarrow CP\,//\,(BMND) \Rightarrow CP\,//\,(MND)$.

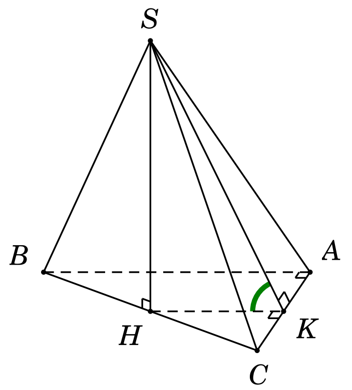
Do đó $(CP,(MND)) = 0^\circ$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60^0$. **B.** $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK.$

Do đó $\widehat{(SAC),(ABC)} = \widehat{(SK,HK)} = \widehat{SKH}.$

Tam giác vuông ABC, có $AB = BC.\cos\widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}.$

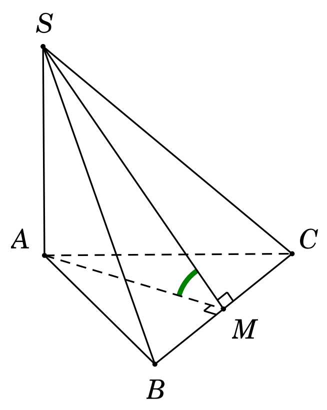
Tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{SKH} = \dfrac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30^0$. **B.** $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi = 60^0$. **D.** $\sin\varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $\widehat{(SBC),(ABC)} = \widehat{(SM, AM)} = \widehat{SMA}.$

Tam giác ABC đều cạnh a, suy ra trung tuyến $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông SAM, có $\sin\widehat{SMA} = \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C

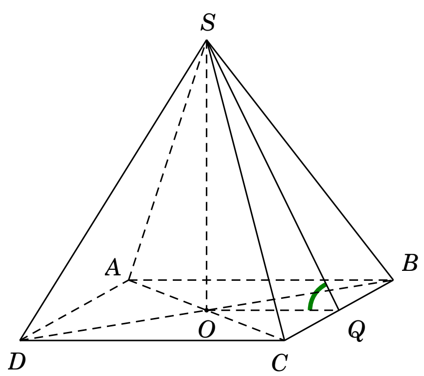
Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ.$

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SQ, OQ} = \widehat{SQO}.$

Tam giác vuông SOQ, có $\tan\widehat{SQO} = \frac{SO}{OQ} = \sqrt{3}.$

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60^0.

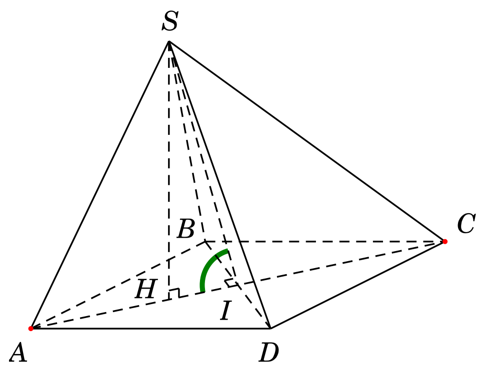


Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\sqrt{5}$. **B.** $\tan\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\varphi=45^0$.

Lời giải

Chọn A



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA=SB=SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam gác đều ABD.

Suy ra $HI=\frac{1}{3}AI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI\perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI\perp BD$.

Do đó $\widehat{(SBD),(ABCD)}=\widehat{SI,AI}=\widehat{SIH}$.

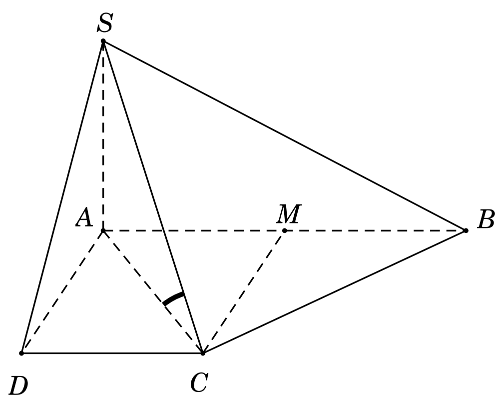
Trong tam vuông SHI, có $\tan\widehat{SIH}=\frac{SH}{HI}=\sqrt{5}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB=2a$, $AD=CD=a$. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\varphi=45^0$. **C.** $\varphi=60^0$. **D.** $\varphi=30^0$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow ADCM$ là hình vuông $CM=AD=a=\frac{AB}{2}$.

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC.$

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}.$

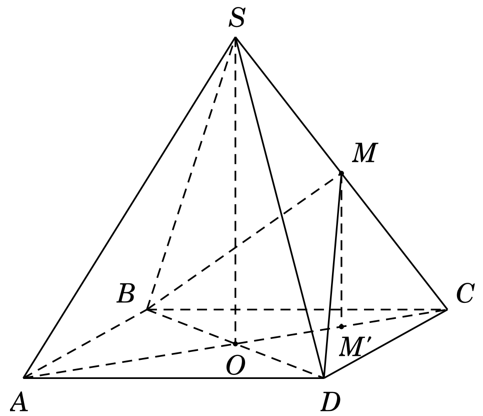
Tam giác SAC vuông tại A $\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

Câu 42: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90°$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi = 30°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' // SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD).$

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có $S_{\Delta M'BD} = \cos\varphi . S_{\Delta MBD}$

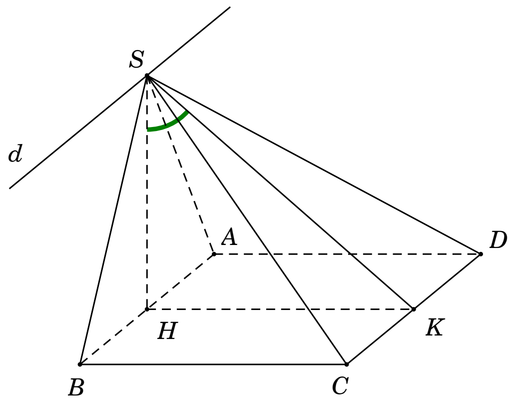
$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{\Delta M'BD}}{S_{\Delta MBD}} = \frac{BD.MO}{BD.M'O} = \frac{MO}{M'O} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0.$$

Câu 43: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK$.

Từ đó suy ra $\widehat{(SAB),(SCD)} = \widehat{SH,SK} = \widehat{HSK}$.

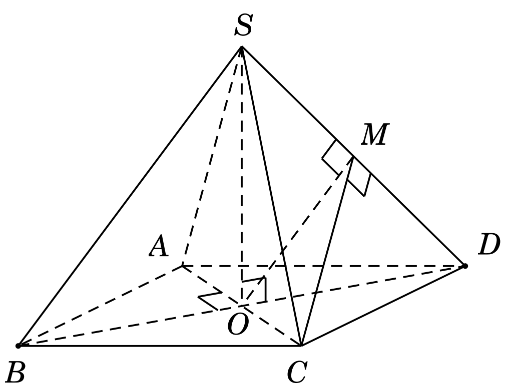
Trong tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 44: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{6}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\varphi = \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD$.

Do đó $\widehat{(SBD),(SCD)} = \widehat{OM,CM}$.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

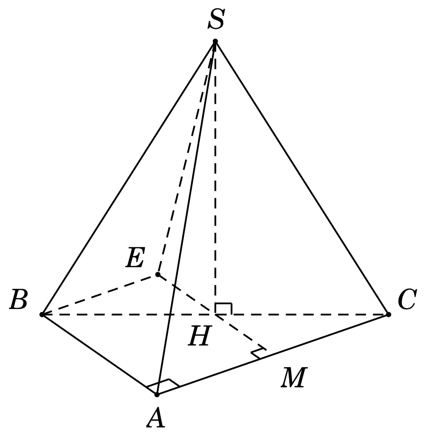
Tam giác vuông MOC, có $\tan\widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\cot\varphi = \sqrt{7}$. **C.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\cot\varphi = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo giả thiết, ta có $SH\perp(ABC)$.

Qua B kẻ $Bx \parallel AC$. Khi đó $\widehat{SB,AC}=\widehat{SB,Bx}$.

Kẻ $HE\perp Bx$ tại E, cắt AC tại M.

Suy ra $AMEB$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} BE=AM=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a}{2} \\ HE=HM=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2} \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} Bx\perp HE \\ Bx\perp SH \end{cases} \Rightarrow Bx\perp(SHE)\Rightarrow Bx\perp SE$.

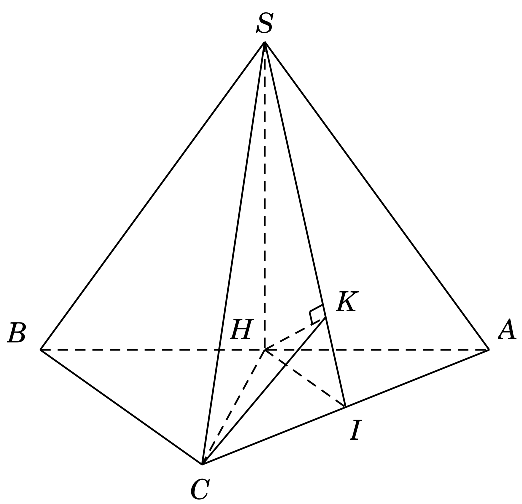
Tam giác vuông SEB, có $\cot\widehat{SBE}=\dfrac{BE}{SE}=\dfrac{AM}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB=SH=a$. Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SH\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH\perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH\perp(SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC\longrightarrow HI\parallel BC\xrightarrow{BC\perp AC}HI\perp AC$. (3)

Mặt khác $AC\perp SH$ (do $SH\perp(ABC)$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $AC\perp(SHI)$.

Kẻ $HK\perp SI$ $(K\in SI)$. (5)

Từ $AC\perp(SHI)\Rightarrow AC\perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK\perp(SAC)$.

Vì $\begin{cases}HK\perp(SAC)\\HC\perp(SAB)\end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC.

Xét tam giác CHK vuông tại K, có $CH=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$; $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HI^2}\Rightarrow HK=\frac{a}{3}$.

Do đó $\cos\widehat{CHK}=\frac{HK}{CH}=\frac{2}{3}$.

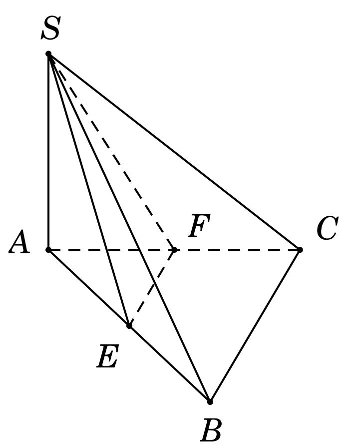
Nhận xét. Bài làm sử dụng lý thuyết "$\begin{cases}d_1\perp(\alpha)\\d_2\perp(\beta)\end{cases}\Rightarrow\widehat{(\alpha),(\beta)}=\widehat{d_1,d_2}$". Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (d) là đường thẳng đi qua S và song song với EF.

Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF\,//\,BC$.

Khi đó $(d)//EF//BC \Rightarrow (SEF)\cap(SBC)=(d)$ (1).

Ta có $\begin{cases} SA\perp BC & (SA\perp(ABC)) \\ AB\perp BC \end{cases}$ suy ra $BC\perp(SAB)\Rightarrow\begin{cases} BC\perp SE \\ BC\perp SB \end{cases}$ (2).

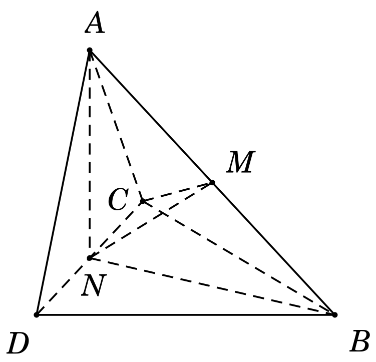
Từ (1),(2) suy ra $\begin{cases} (d)\perp SE \\ (d)\perp SB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SEF);(SBC)}=\widehat{(SE;SB)}=\widehat{BSE}$.

Câu 48: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=a$, $CD=2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có $AN\perp CD$ mà $(ACD)\perp(BCD)$ suy ra $AN\perp(BCD)\Rightarrow AN\perp BN$.

Tam giác ABC cân tại C, có M là trung điểm của AB suy ra $CM\perp AB$.

Giả sử $(ABC)\perp(BCD)$ mà $CM\perp AB$ suy ra $CM\perp(ABD)\Rightarrow CM\perp DM$.

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại M $\Rightarrow MN=\frac{AB}{2}=\frac{CD}{2}\Rightarrow AB=CD=2x$.

Lại có $AN=BN=\sqrt{AC^2-AN^2}=\sqrt{a^2-x^2}$, mà $AB^2=AN^2+BN^2$.

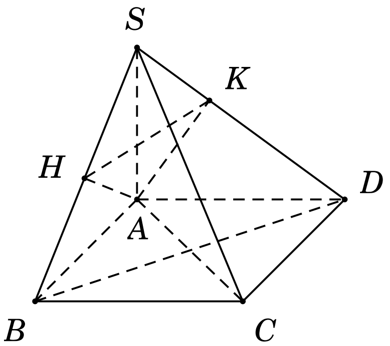
Suy ra $2(a^2-x^2)=4x^2\Leftrightarrow a^2=3x^2\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60^0.

A. $x=\frac{3a}{2}$. **B.** $x=\frac{a}{2}$. **C.** $x=a$. **D.** $x=2a$.

Lời giải

Chọn C



Từ A kẻ AH vuông góc với SB $(H \in SB)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với SD $(K \in SD)$, tương tự, chứng minh được $SK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $\widehat{(SBC);(SCD)} = \widehat{(AH;AK)} = \widehat{HAK} = 60^0$.

Lại có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^0$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S, có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$.

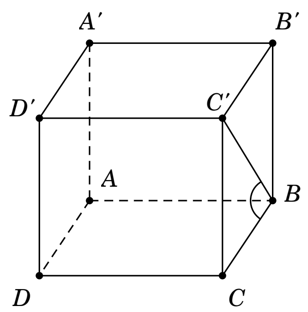
Vì $HK // BD$ suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}.a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$.

Câu 50: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60^0. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BB'C'B)$.

Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$ suy ra $\widehat{(ABC');(ABCD)} = \widehat{(BC';BC)} = \widehat{C'BC} = 60^0$.

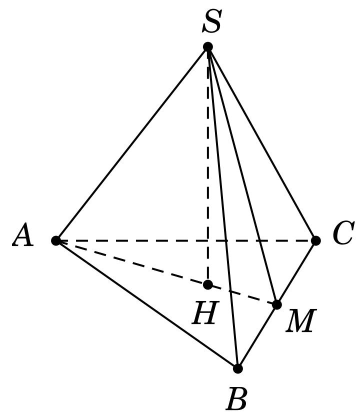
Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C, có $\tan \widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^0.a = a\sqrt{3}$.

Câu 51: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A. $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $SH=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH=\frac{a}{2}$. **D.** $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA=SB=SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC\perp AM \\ BC\perp SH \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)$.

Khi đó $\widehat{(SBC);(ABC)}=\widehat{(SM;AM)}=\widehat{SMA}=60^0$.

Tam giác ABC đều có $AM=\sqrt{AB^2-MB^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HM=\frac{AM}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác AHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMA}=\frac{SH}{HM}\Rightarrow SH=\tan 60^0.\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a}{2}$.

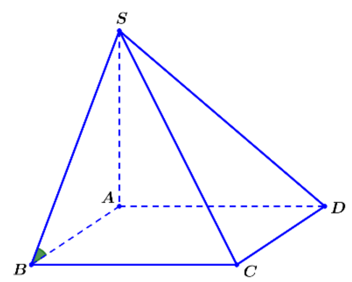
Vậy độ dài đường cao $SH=\frac{a}{2}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ là

A. $\widehat{SBA}$. **B.** $\widehat{SCA}$. **C.** $\widehat{ASC}$. **D.** $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SB \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.

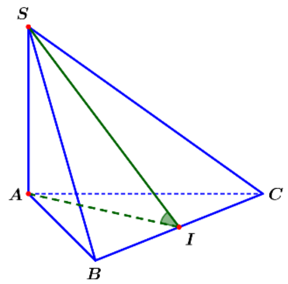
Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC \\ SB\perp BC \\ AB\perp BC\end{cases} \Rightarrow [S,BC,A]=\widehat{SBA}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=\dfrac{3a}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC\Rightarrow AI\perp BC$ (vì ABC là tam giác đều).

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AI \\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp SI$.

Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC \\ SI\perp BC \\ AI\perp BC\end{cases} \Rightarrow [S,BC,A]=\widehat{SIA}$.

Mà ΔABC đều cạnh $a\Rightarrow AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

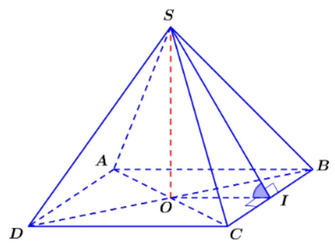
Xét ΔSAI vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}=\sqrt{3}\Rightarrow \widehat{SIA}=60°$.

Câu 54: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao hình chóp bằng $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ bằng

A. $60°$. **B.** $75°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của BC.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$ và $SO=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Và $SC=SB$ nên tam giác SBC cân tại $S\Rightarrow SI\perp BC$.

Ta có: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ BC\perp SI\\ BC\perp OI\end{cases}\Rightarrow[S,BC,A]=\widehat{SIO}$

Ta có: OI là đường trung bình tam giác ABC nên $OI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$.

Xét ΔSIO vuông tại O, ta có: $\tan\widehat{SIO}=\frac{SO}{OI}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SIO}=30^\circ$.

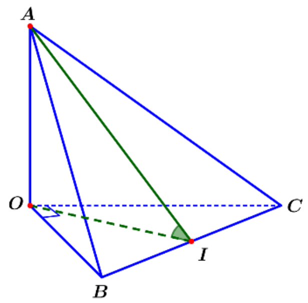
Vậy số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ bằng 30°.

Câu 55: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[O,BC,A]$.

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow AI\perp BC$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp OI\\ BC\perp OA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AOI)\Rightarrow BC\perp AI$

Khi đó: $\begin{cases}(OBC)\cap(ABC)=BC\\ BC\perp AI\\ BC\perp OI\end{cases}\Rightarrow[O,BC,A]=\widehat{OIA}$.

Và $OI=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{OB^2+OC^2}=a\sqrt{3}$.

Xét ΔOAI vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{OIA}=\frac{OA}{OI}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{OIA}=30^\circ$.

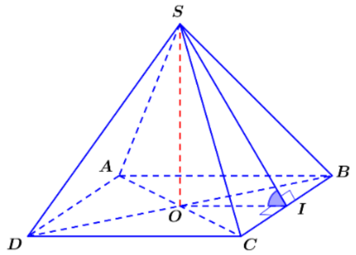
Vậy $[O,BC,A]=30^\circ$.

Câu 56: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính cosin của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I trung điểm của BC.

Khi đó: $SO \perp (ABCD)$ và $SI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ OI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SIO}$.

Và ΔSCD đều cạnh $a \Rightarrow SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

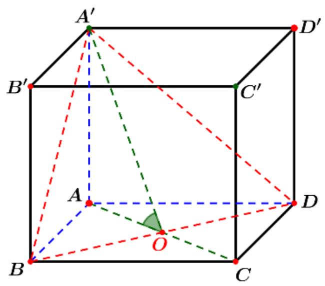
Xét ΔSOI vuông tại O, ta có: $\cos \widehat{SIO} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 57: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$ bằng $30°$. Tính độ dài cạnh AA'

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp A'O$.

Khi đó: $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABD) = BD \\ A'O \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow [A', BD, A] = \widehat{A'OA} = 30°$.

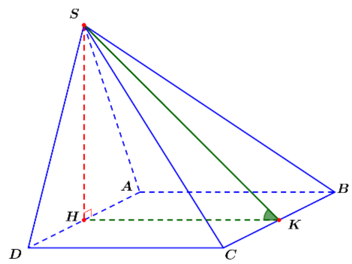
Xét $\Delta A'AO$ vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{A'OA} = \dfrac{AA'}{AO} \Rightarrow AA' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.a = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a$, ΔSAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\varphi = 60°$. **B.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\varphi = 30°$. **D.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $HK \perp BC$.

Khi đó: $\begin{cases} BC \perp HK \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHK) \Rightarrow BC \perp SK$.

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ HK \perp BC \\ SK \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SKH} = \varphi$.

Xét ΔSHK vuông tại H, ta có:

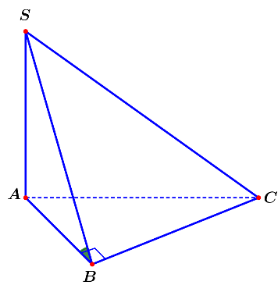
$\tan\varphi = \tan\widehat{SKH} = \dfrac{SH}{HK} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60°$.

Câu 59: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là

A. $90°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AB \\ BC \perp SB \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SBA}$.

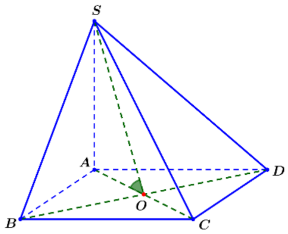
Xét ΔSAB vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ là

A. $30°$. **B.** $75°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp OA$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABD) = BD \\ OA \perp BD \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow [S, BD, A] = \widehat{SOA}$.

Xét ΔSOA vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 30°$

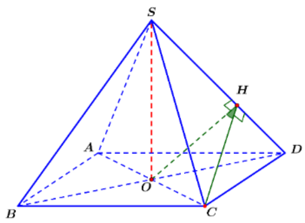
Vậy goc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ bằng $30°$.

Câu 61: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[B, SD, C]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$. **B.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan \varphi = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp SD \quad (1)$

Trong mặt phẳng (SBD), từ O kẻ $OH \perp SD$ tại H (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow SD \perp (COH) \Rightarrow SD \perp CH$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ OH \perp SD \\ CH \perp SD \end{cases} \Rightarrow [B, SD, C] = \widehat{OHC} = \varphi$

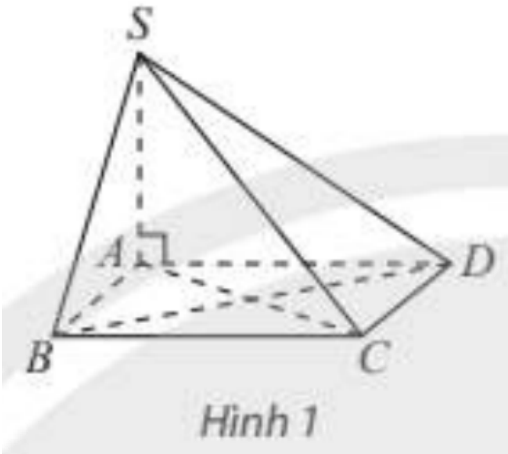
Xét ΔOHC vuông tại H, ta có:

$\tan \varphi = \tan \widehat{OHC} = \dfrac{OC}{OH} = \sqrt{2}$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?



Hình 1

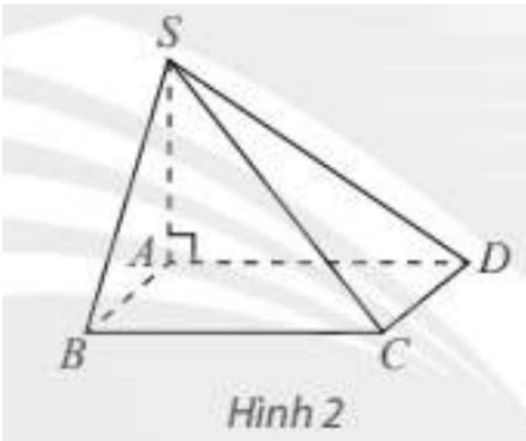
A. (SAD). **B.** (SAC). **C.** (SAB). **D.** (SBD).

Lời giải

Chọn A

Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp CD$. $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow CD\perp AD$ $\Rightarrow CD\perp(SAD)$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh b, SA vuông góc với mặt đáy, $SC=2b\sqrt{2}$. Số đo góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy là



Hình 2

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $50°$.

Lời giải

Chọn A

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow(SC,(ABCD))=(SC,AC)=\widehat{SCA}$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=b\sqrt{2}$ $\cos\widehat{SCA}=\dfrac{AC}{SC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{SCA}=60^\circ$

Vậy $(SC,(ABCD))=60^\circ$

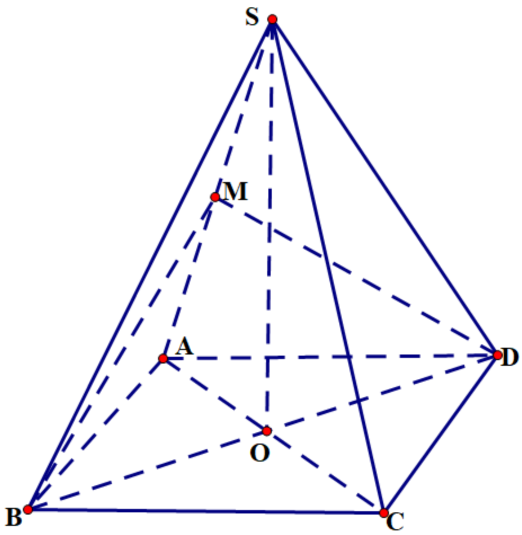
Chọn A.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Gọi M là trung điểm của SA. Mặt phẳng (MBD) vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (SBC). **B.** (SAC). **C.** (SBD). **D.** $(ABCD)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của hình vuông ABC**D.** Ta có: $SO \perp (ABCD)$. Suy ra: $SO \perp BD$ Mà $BD \perp AC$ nên $BD \perp (SAC)$

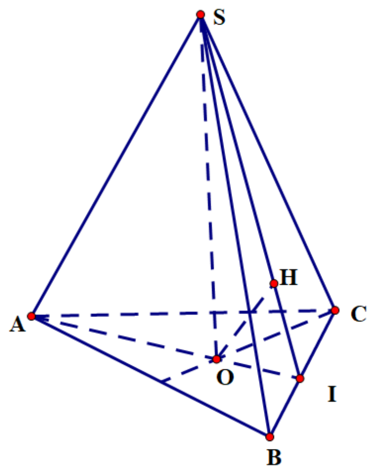
Suy ra $(MBD) \perp (SAC)$

Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S \cdot ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên là

A. $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{14}}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC, kẻ $OH \perp SI\,(H \in SI)$.

ABC là tam giác đều $\Rightarrow AI \perp BC$

$SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp OH$

Mà $OH \perp SI$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$

ABC là tam giác đều $\Rightarrow AI = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow OI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$SO = a\sqrt{2} \Rightarrow OH = \dfrac{SO.OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \dfrac{a\sqrt{14}}{7}$

Câu 5: Thể tích của khối chóp cụt tam giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ là

A. $\dfrac{7\sqrt{2}}{8}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **C.** $\dfrac{7\sqrt{2}}{12}a^3$. **D.** $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}a^3$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích đáy nhỏ là: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2$

Diện tích đáy lớn là: $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(2a)^2 = \sqrt{3}a^2$

Thể tích khối chóp là:

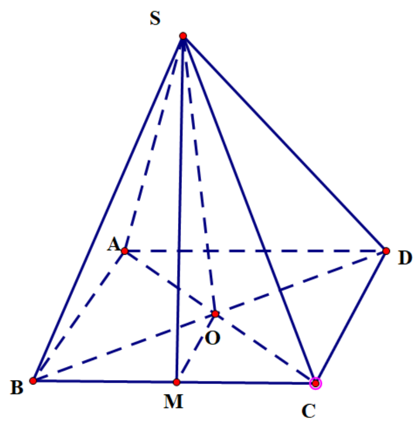
$$\frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2 + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2\cdot\sqrt{3}a^2} + \sqrt{3}a^2\right) = \frac{7\sqrt{2}}{12}\cdot a^3$$

Câu 6: Cho chóp tứ giác $S \cdot ABCD$. có đáy là hình chữ nhật với $AB = 4a, AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Góc nhị diện $[S, BC, A]$ có số đo là

A. $75^\circ 46'$. **B.** $71^\circ 21'$. **C.** $68^\circ 31'$. **D.** $65^\circ 12'$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm BC .

Ta có: $OM = \frac{1}{2} \cdot AB = 2a; AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a; OC = \frac{1}{2} AC = \frac{5}{2} a$

$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} a$

$[S, BC, A] = \widehat{SMO}$

$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$ $Suy\ ra: \widehat{SMO} = 65,2^\circ$

Câu 7: Nếu hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $3; 4; 5$ thì độ dài đường chéo của nó là

A. $5\sqrt{2}$. **B.** 50. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật là: $\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

Câu 8: Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Diện tích mặt đáy là: $\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ Thể tích khối lăng trụ là: $a \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{3}}{4}$

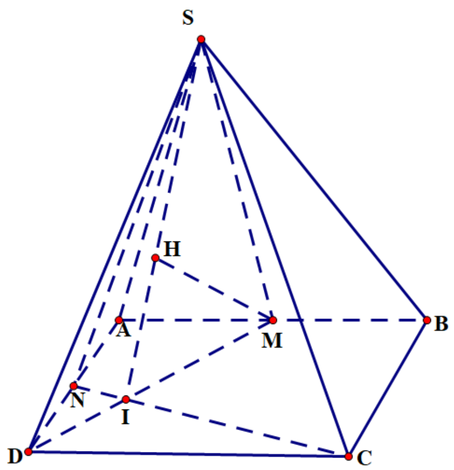
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD.

a) Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SNC)$.

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SNC).

Lời giải



Gọi $I = CN \cap DM$

ΔSAB đều $\Rightarrow SM \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD), (SAB) \cap (ABCD) = AB$

$\Rightarrow SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp CN$

$\Delta ADM = \Delta DCN$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{CND}$

Mà $\widehat{AMD} + \widehat{ADM} = 90^\circ$

$\widehat{CND} + \widehat{ADM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NID} = 180^\circ - \left(\widehat{CND} + \widehat{ADM}\right) = 90^\circ \Rightarrow CN \perp DM$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} SM \perp CN \\ CN \perp DM \end{array}\right\} \Rightarrow CN \perp (SMD) \\ \quad\quad CN \subset (SNC) \end{array}\right\} \Rightarrow (SNC) \perp (SMD)$$

b) Kẻ $MH \perp SI \, (H \in SI)$

$CN \perp (SMD) \Rightarrow CN \perp MH$

$\Rightarrow MH \perp (SNC) \Rightarrow d(M,(SNC)) = MH$

ΔCDN vuông tại D có đường cao DI

$DN = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}, CN = \sqrt{CD^2 + DN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}, DI = \frac{CD \cdot DN}{CN} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$

$DM = CN = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow MI = DM - DI = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$

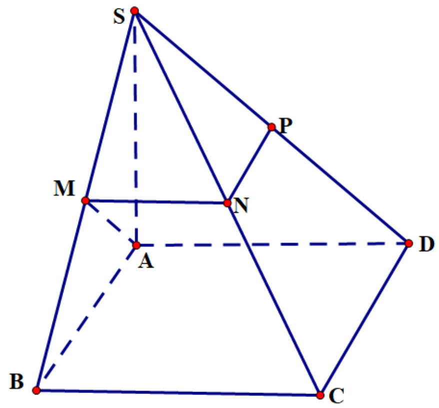
ΔSAB đều $\Rightarrow SM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

ΔSMI vuông tại M có đường cao MH

$\Rightarrow MH = \frac{SM \cdot MI}{\sqrt{SM^2 + MI^2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC và SD. Tính khoảng cách giữa AM và NP.

Lời giải



$SA \perp (SBCD)$ nên $SA \perp BC$

Mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$

Tam giác SBC có MN là đường trung bình nên $MN//BC, MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$

Suy ra: $MN \perp (SAB)$ và $MN \perp AM$

Tam giác SCD có NP là đường trung bình nên $NP//CD$

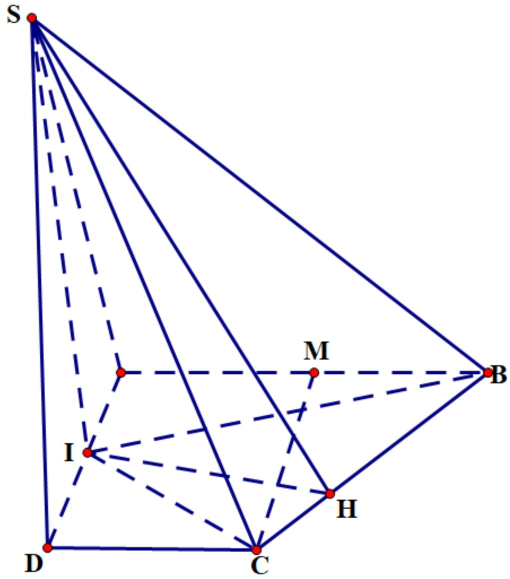
Mà $MN//BC, BC \perp CD$

Suy ra $MN \perp NP$

Vậy $d(AM, NP) = MN = \frac{a}{2}$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $D; AB = AD = 2a$; $CD = a$; số đo góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng $60°$. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Lời giải



$$\left.\begin{array}{l}(SBI)\perp(ABCD)\\(SCI)\perp(ABCD)\\(SBI)\cap(SCI)=SI\end{array}\right\}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$$

Kẻ $IH\perp BC\left(H\in BC\right)$

$SI\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp BC$

$\Rightarrow BC\perp(SIH)\Rightarrow BC\perp SH$

Vậy $\widehat{AHI}$ là góc nhị diện $[S,BC,A]\Rightarrow\widehat{AHI}=60^\circ$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)\cdot AD=3a^2$

$AI=ID=\frac{1}{2}AD=a$

$S_{AIB}=\frac{1}{2}AB\cdot AI=a^2,S_{CID}=\frac{1}{2}CD\cdot ID=\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow S_{BIC}=S_{ABCD}-S_{AIB}-S_{CID}=\frac{3a^2}{2}$

Gọi M là trung điểm của AB

$\Rightarrow BM=\frac{1}{2}AB=a,CM=AD=2a\Rightarrow BC=\sqrt{BM^2+CM^2}=a\sqrt{5}$

$\Rightarrow IH=\frac{2\,S_{BIC}}{BC}=\frac{3a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow SI=IH\cdot\tan\widehat{SHI}=\frac{3a\sqrt{15}}{5}$

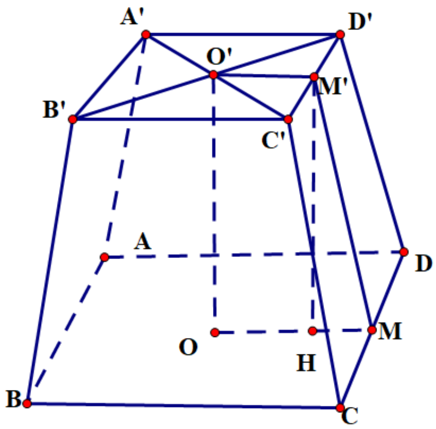
$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot SI=\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$

Câu 12: Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a, chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

a) Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

b) Tính thể tích chân cột nói trên theo a.

Lời giải



Mô hình hoá chân cột bằng gang bằng cụt chóp tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ với O, O' là tâm của hai đáy. Vậy $AB = 2a, A'B' = a, OO' = 2a$.

Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $CD, C'D'$.

$A'B'C'D'$ là hình vuông $\Rightarrow O'M' \perp C'D'$

$CDD'C'$ là hình thang cân $\Rightarrow MM' \perp C'D'$

Vậy $\widehat{MM'O'}$ là góc phẳng nhị diện giữa mặt bên và đáy nhỏ, $\widehat{M'MO}$ là góc phẳng nhị diện giữa mặt bên và đáy lớn.

Kẻ $M'H \perp OM \left(H \in OM\right)$

$OMM'O'$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow OH = O'M' = \frac{a}{2}, OM = a, MH = OM - OH = \frac{a}{2}$

$\tan\widehat{M'MO} = \frac{M'H}{MH} = 4$

$\Rightarrow \widehat{M'MO} = 75,96^\circ \Rightarrow \widehat{MM'O'} = 180^\circ - \widehat{M'MO} = 104,04^\circ$

b) Diện tích đáy lớn là: $S = AB^2 = 4a^2$

Diện tích đáy bé là: $S' = A'B'^2 = a^2$

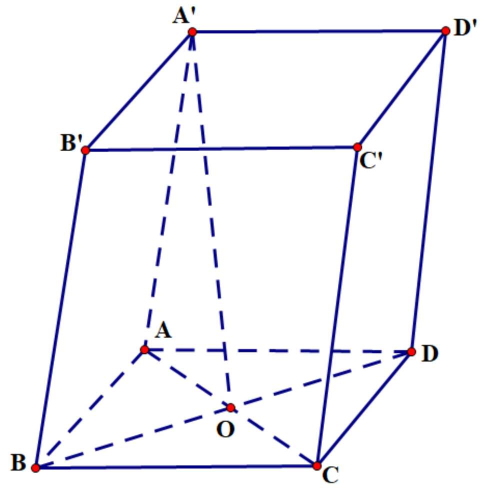
Thể tích hình chóp cụt là: $V_1 = \frac{1}{3}h\left(S + \sqrt{SS'} + S'\right) = \frac{1}{3} \cdot 2a\left(4a^2 + \sqrt{4a^2 \cdot a^2} + a^2\right) = \frac{14a^3}{3}$

Thể tích hình trụ rỗng là: $V_2 = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 2a = \frac{\pi a^3}{2}$

Thể tích chân cột là: $V = V_1 - V_2 = \left(\frac{14}{3} - \frac{\pi}{2}\right)a^3$.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = a$, đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = BD = a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với điểm O là giao điểm hai đường chéo của đáy. Tính thể tích của khối hộp.

Lời giải



$AB = BD = AD = a \Rightarrow \Delta ABD$ đều $\Rightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$

O là trung điểm của $BD \Rightarrow AO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp AO$

$\Rightarrow A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \frac{a}{2}$

$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\widehat{BAD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot A'O = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ.

Câu 2: Trong không gian cho các đường thẳng a,b,c và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a\perp(P)$ và $b//(P)$ thì $a\perp b$.

B. Nếu $a\perp b,\, c\perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c.

C. Nếu $a//b$ và $b\perp c$ thì $c\perp a$.

D. Nếu $a\perp b$ và $b\perp c$ thì $a//c$.

Lời giải

Chọn D

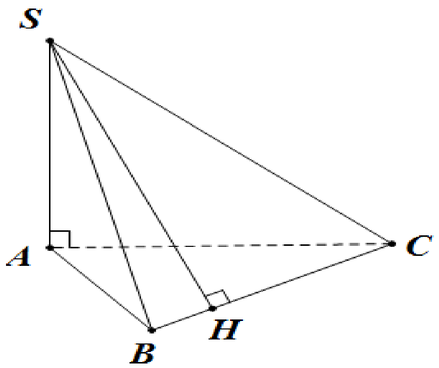
Sai vì a và c có có thể không đồng phẳng.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

A. $BC\perp SC$. **B.** $BC\perp AH$. **C.** $BC\perp AB$. **D.** $BC\perp AC$.

Lời giải

Chọn B



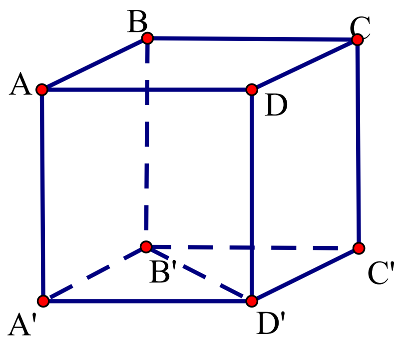
Ta có: $\begin{cases} BC\perp SH \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp AH$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $A'A$.

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên cạnh $A'A\perp(A'B'C'D')$ và $B'D'\in(A'B'C'D')$

Nên $A'A\perp B'D' \Rightarrow \measuredangle(A'A,B'D')=90°$.

Câu 5: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Đáp án **A** sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$. Dễ thấy AA' và AD cắt nhau.

Đáp án **C** sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

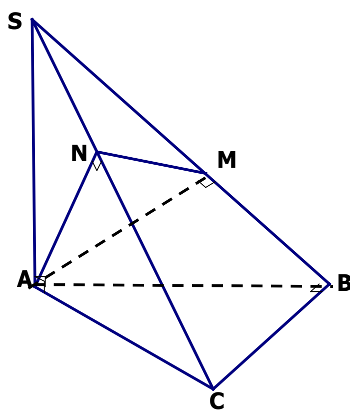
Đáp án D sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

Câu 6: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM \perp SC$. **B.** $AM \perp MN$. **C.** $AN \perp SB$. **D.** $SA \perp BC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Vậy $\begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC \Rightarrow$ Đáp án **A** đúng.

Vì $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ MN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp MN \Rightarrow$ Đáp án **B** đúng.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow$ Đáp án **D** đúng.

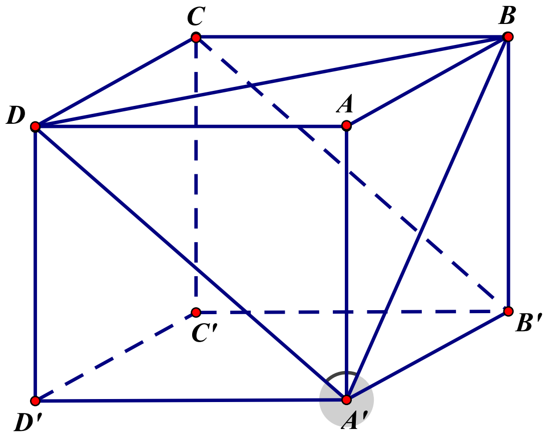
Vậy **C** sai.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. 90°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C\ //\ A'D \Rightarrow \left(A'B;B'C\right)=\left(A'B;A'D\right)=\widehat{DA'B}$.

Xét $\Delta DA'B$ có $A'D=A'B=BD$ nên $\Delta DA'B$ là tam giác đều.

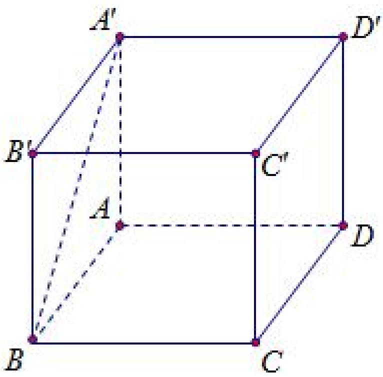
Vậy $\widehat{DA'B}=60°$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng:

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Có $CD//AB \Rightarrow \left(BA',CD\right)=\left(BA',BA\right)=\widehat{ABA'}=45°$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB=AC=AD=1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

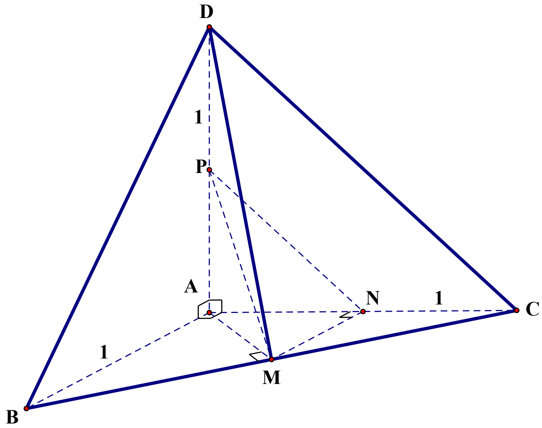
A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn D

CÁCH 1. Vì $\left.\begin{matrix} AB\perp AC \\ AB\perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB\perp\left(ACD\right)\Rightarrow AB\perp CD$.

CÁCH 2.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC,\ AC,\ AD$.

Trong ΔABC, có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \end{cases}$

Trong ΔACD, có $\begin{cases} NP \,//\, CD \\ NP = \frac{1}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Trong ΔAMP, có $MP = \sqrt{AP^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

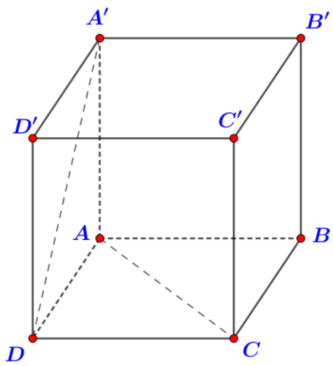
Ta có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ NP \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow (AB;CD) = (MN;NP) = \widehat{MNP}$

Áp dụng định lý Cosin cho ΔMNP, có

$$\cos\widehat{MNP} = \frac{NP^2 + NM^2 - MP^2}{2NP.NM} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ$$

Hay $(AB;CD) = 90^\circ$.

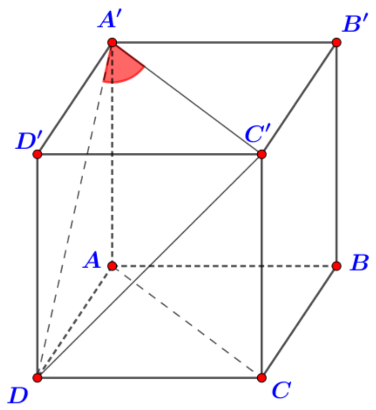
Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\left(\widehat{AC, A'D}\right) = \left(\widehat{A'C', A'D}\right) = \widehat{DA'C'} = 60°$.

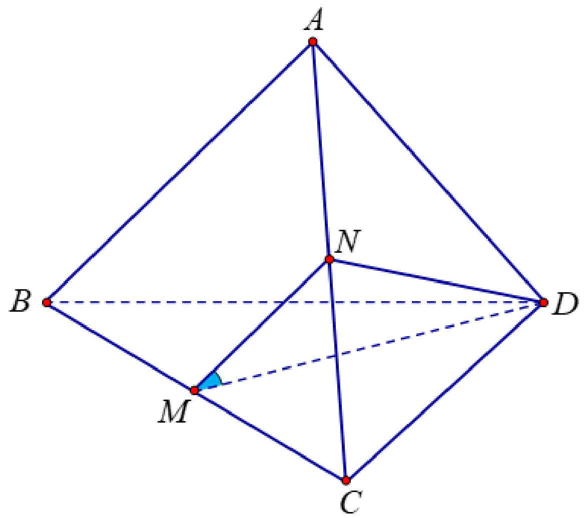
Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB, DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC và a là độ dài cạnh tứ diện đều.

Ta có $MN // AB \Rightarrow \left(AB, DM\right) = \left(MN, DM\right) = \widehat{DMN}$.

Tam giác DMN có $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $\cos\widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2.DM.MN}$.

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{DMN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos\left(AB, DM\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H, K lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho $BH = 3HA,\ AK = 3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC.

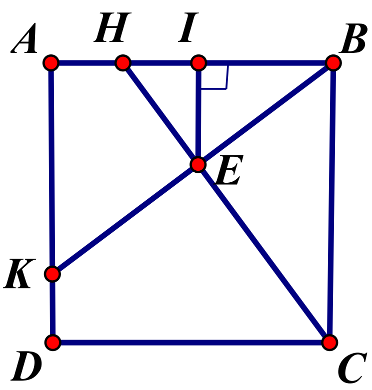
A. $\dfrac{28}{5\sqrt{39}}$. **B.** $\dfrac{18}{5\sqrt{39}}$. **C.** $\dfrac{36}{5\sqrt{39}}$. **D.** $\dfrac{9}{5\sqrt{39}}$.

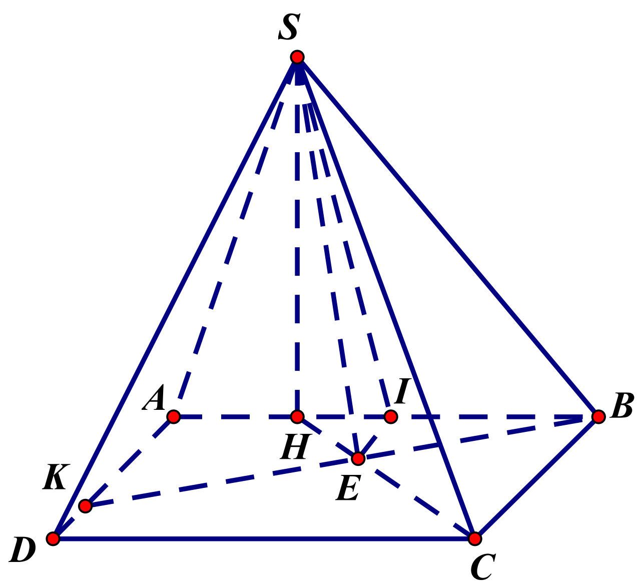
Lời giải

Chọn B

Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên AB ta có $\Delta ABD = \Delta BCH$.

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BCH} \Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ$.





Ta có: $\cos(SE;BC) = \cos(SE;EI) = \left|\cos\widehat{SEI}\right|$, $SH = BH.\tan 30^\circ = a\sqrt{3}$.

$\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{HE}{HB} \Rightarrow HE = \dfrac{HB^2}{HC} = \dfrac{9a}{5}$, $SE = \sqrt{SH^2 + HE^2} = \sqrt{3a^2 + \dfrac{81a^2}{25}} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{5}$.

$\dfrac{HE}{HB} = \dfrac{HI}{HE} \Rightarrow HI = \dfrac{HE^2}{HB} = \dfrac{27a}{25}$, $SI = \sqrt{SH^2 + HI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\dfrac{27a}{25}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{651}}{25}$.

$\dfrac{EI}{BC} = \dfrac{HI}{HB} = \dfrac{9}{25} \Rightarrow EI = \dfrac{36a}{25}$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SEI ta được:

$$\cos\widehat{SEI}=\frac{SE^2+EI^2-SI^2}{2.SE.EI}=\frac{\left(\frac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2+\left(\frac{36a}{25}\right)^2-\left(\frac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2.\frac{2a\sqrt{39}}{5}.\frac{36a}{25}}=\frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$

Câu 13: ***Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào ĐÚNG?***

***A.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau*

***B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau*

***C.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau*

***D.** Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau*

Lời giải

Chọn B

Câu ***A sai vì có thể hai đường thẳng chéo nhau.***

Câu C sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng đã cho.

Câu D sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

Câu 14: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a\perp(P)$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. Nếu $b // a$ thì $b // (P)$.

B. Nếu $b // a$ thì $b\perp(P)$.

C. Nếu $b\perp(P)$ thì $b // a$.

D. Nếu $b // (P)$ thì $b\perp a$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $a\perp(P)$ và $b // a$ thì $b\perp(P)$.

Câu 15: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a\perp b$. Luôn có mặt phẳng (α) chứa a và $(\alpha)\perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng (α) chứa a và mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

Lời giải

Chọn B

Hiển nhiên **B** đúng.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Do đó, **A** sai.

Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau và cắt nhau thì mặt phẳng chứa cả a và b không thể vuông góc với b. Do đó, **C** sai.

Qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác. Do đó, **D** sai.

Câu 16: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song

Lời giải

Chọn A

Theo lý thuyết.

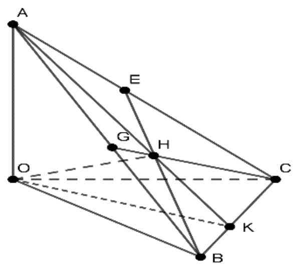
Câu 17: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. H là trung điểm của AC. **B.** H là trọng tâm tam giác ABC.

C. H là trung điểm của BC. **D.** H là trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OK \perp BC$; $OH \perp AK$.

Ta có: $\begin{cases} OK \perp BC \\ OA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAK) \Rightarrow BC \perp OH$.

$\begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp AK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow H$ là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

$AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC.

Câu 18: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là hình chiếu của A trên SB, trong các khẳng định sau:

$(1): AH \perp SC$.

$(2): BC \perp (SAB)$.

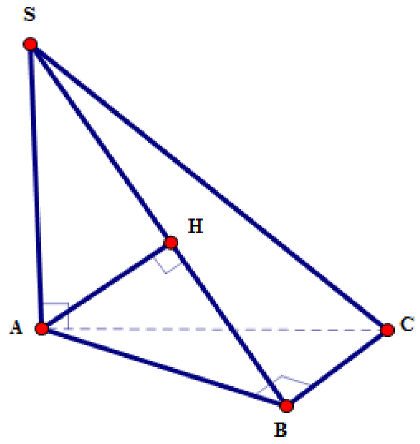
$(3): SC \perp AB$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp SA$, $\mathrm{BC} \perp \mathrm{AB}$ nên $BC \perp (SAB)$.

Và $(SBC) \perp (SAB)$, $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp SC$

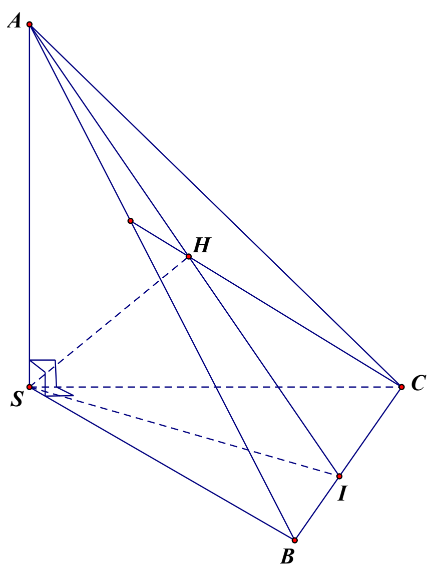
Vậy có hai khẳng định đúng.

Câu 19: Cho tứ diện $SABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC.
B. trọng tâm tam giác ABC.
C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
D. tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp (SBC).$$

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH \ (1).$$

Tương tự, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (SAB).$$

$\left.\begin{matrix} AB \perp SC \\ AB \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp CH \ \ (2)$.

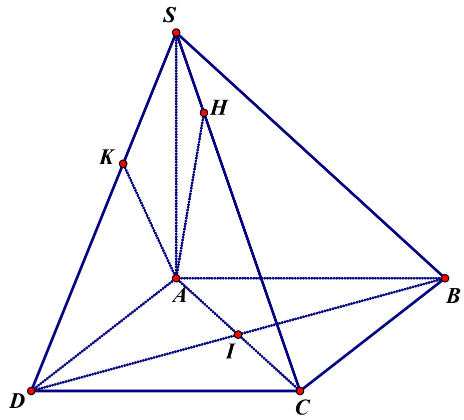
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AH \perp (SCD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AK \perp (SCD)$. **D.** $BC \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn C



Có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

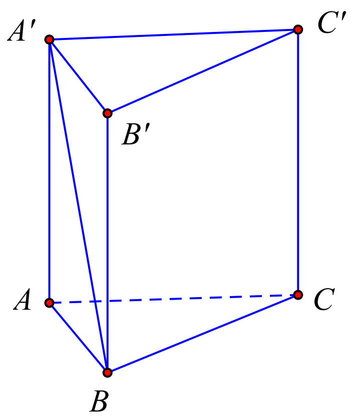
Có $\left.\begin{matrix} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SCD)$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp A'B' \Rightarrow A'B' \perp BB' \ \ (1)$

Bài ra có $AB \perp BC \Rightarrow A'B' \perp B'C'$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow A'B' \perp (BCC'B')$ $\Rightarrow \widehat{(A'B;(BCC'B'))} = \widehat{A'BB'}$

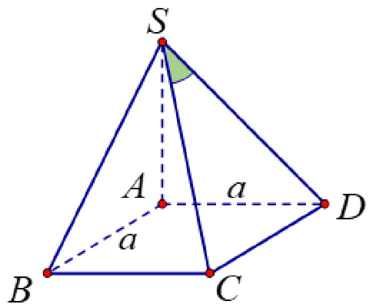
$\Rightarrow \tan\left(\widehat{A'B;\left(BCC'B'\right)}\right) = \tan\widehat{A'BB'} = \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(\widehat{A'B;\left(BCC'B'\right)}\right) = 30°$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của **góc giữa đường thẳng** SC **và mặt phẳng** (SAB).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).

Vậy góc giữa **đường thẳng** SC **và mặt phẳng** (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\widehat{B} = 90°; CB = a; SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan\widehat{CSB} = \dfrac{CB}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{CSB} = 30°$.

Câu 23: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $SA = x$.

Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (BCD) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $\widehat{SAO} = 60°$.

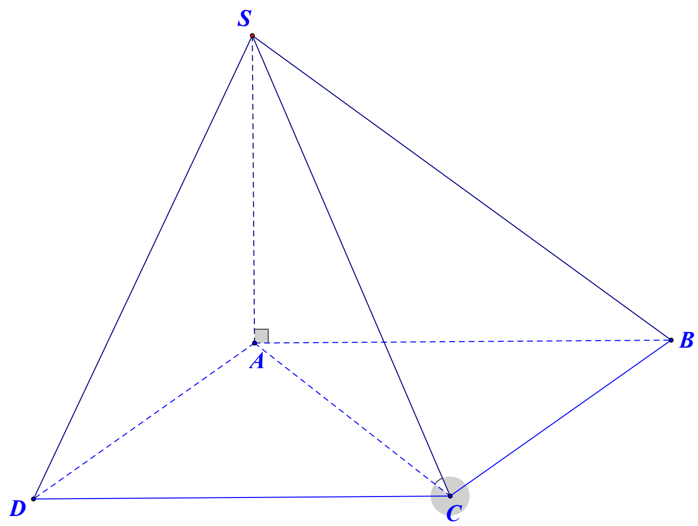
Xét tam giác vuông SAO: $\cos 60° = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{AO}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60^0 **B.** 120^0 **C.** 30^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

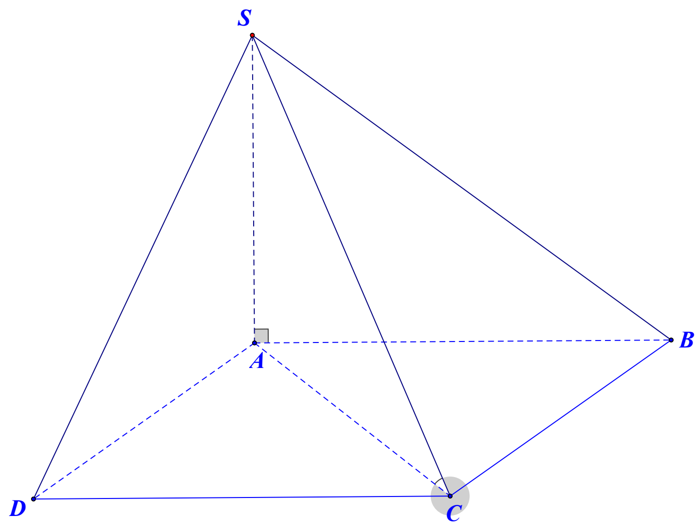
$\Rightarrow \tan \widehat{SAC} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60^0 **B.** 120^0 **C.** 30^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \overline{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}.$

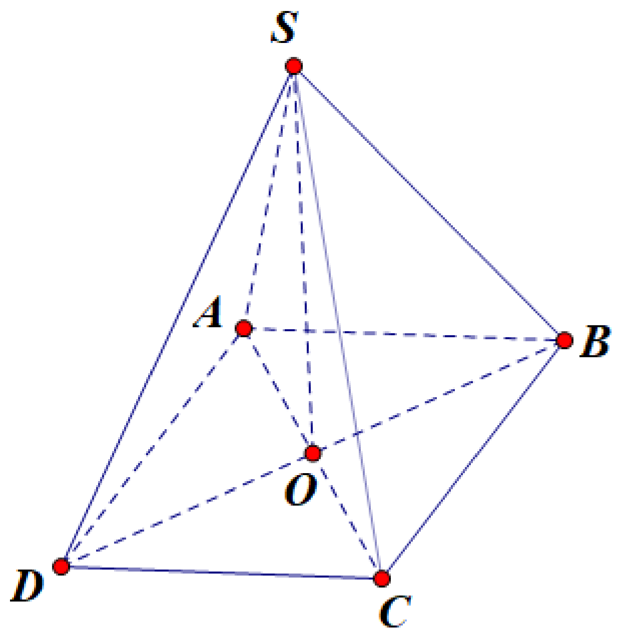
$\Rightarrow \tan \widehat{SAC} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0.$

Câu 26: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $60°$ **B.** $75°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

Lời giải

Chọn C



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC} = 60°$ nên ΔACD đều và $OD = \dfrac{2a.\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

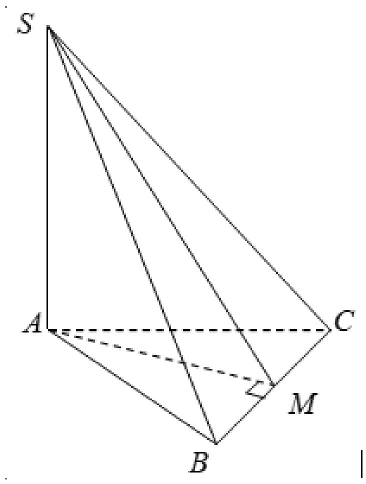
Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan\widehat{SDO}=\dfrac{SO}{DO}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\widehat{SDO}=30^\circ$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. **Khẳng định nào sau đây đúng?**

A. $BC\perp(SAB)$ **B.** $BC\perp(SAM)$ **C.** $BC\perp(SAC)$ **D.** $BC\perp(SAJ)$

Lời giải

Chọn B



Vì $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA$.

Theo giải thiết tam giác ABC là tam giác cân tại A và M là trung điểm $BC\Rightarrow BC\perp AM$.

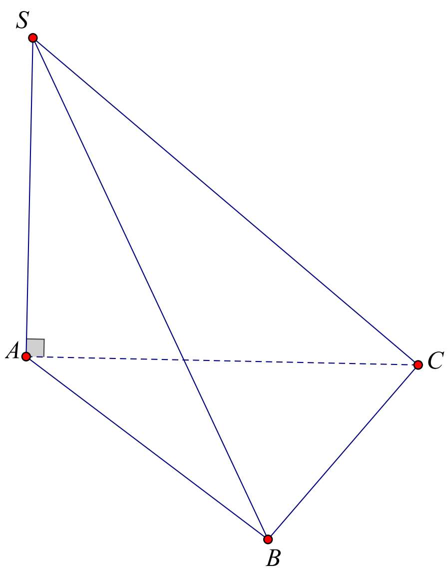
Ta có $\begin{cases}BC\perp SA\\ BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, kết luận nào sau đây sai?

A. $(SAC)\perp(SBC)$. **B.** $(SAB)\perp(ABC)$. **C.** $(SAC)\perp(ABC)$. **D.** $(SAB)\perp(SBC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ SA \subset (SAB),(SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB),(SAC) \perp (ABC) \Rightarrow$ B, C đúng.

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB); BC \subset (SBC)$

$\Rightarrow (SAB) \perp (SBC) \Rightarrow$ D đúng.

Câu 29: Cho a,b,c là các đường thẳng. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. Nếu $a \perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a, mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

B. Cho $a \perp b, a \subset (\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa b và vuông góc với a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho a,b. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c \perp a, c \perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} (\beta) \perp a \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\beta) \perp (\alpha)$.

Câu 30: Trong các khẳng định sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B. Hình chóp có đáy là tam giác đều là hình chóp đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải

Chọn A

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD) đôi một vuông góc.

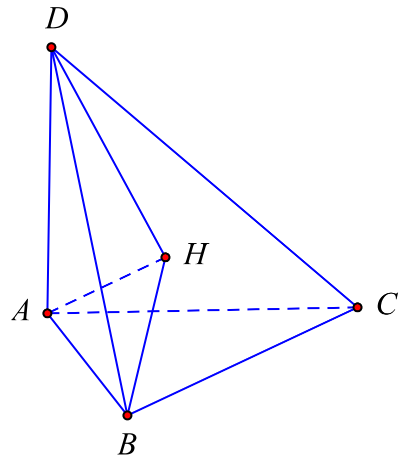
B. Tam giác BCD vuông.

C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD.

D. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

Lời giải

Chọn B



 Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp AC \end{cases} \Rightarrow DA \perp (ABC)$.

Mà $DA \subset (ABD) \Rightarrow (ABD) \perp (ABC)$.

Tương tự $(ACD) \perp (ABC)$, $(ACD) \perp (ABD)$ do đó A đúng.

 Nếu ΔBCD vuông, chẳng hạn $BC \perp BD$ mà $BC \perp DA$

$\Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB$, điều này không thể xảy ra vì $AB \perp AC$ nên B sai.

 Kẻ $AH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH \quad (1)$

Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Từ $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp CD$, từ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta được C đúng.

 Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD$.

Từ $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$, do đó D đúng.

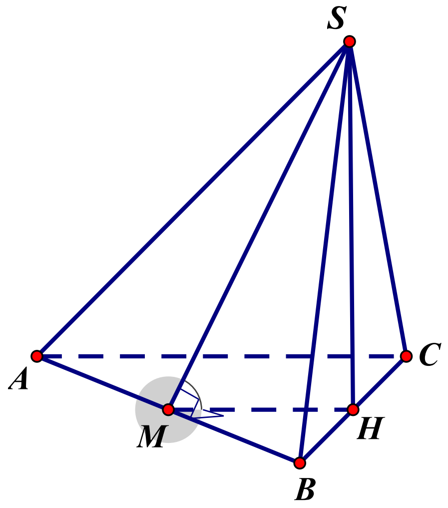
Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A, cạnh $BC = a$, $AC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ các cạnh bên $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC)

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên hình chiếu của S trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy ABC. Nhận xét H là trung điểm BC.



Gọi M là trung điểm AB, nhận xét $AB \perp (SMH)$ nên góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) là góc $\widehat{SMH}$.

Xét tam giác SBH có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

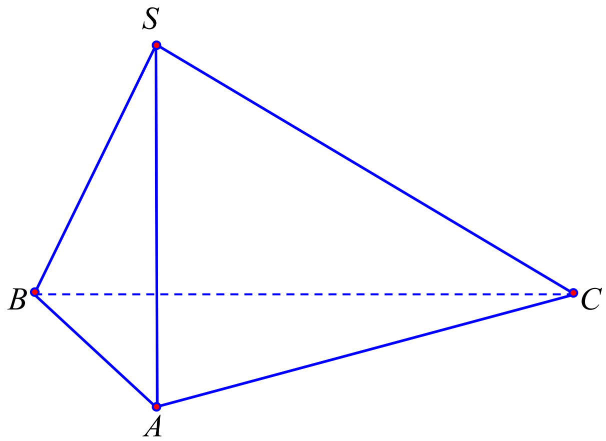
Xét tam giác SMH có $\tan\widehat{M} = \dfrac{SH}{MH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{M} = 60^{\circ}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. 30°. **B.** 150°. **C.** 60°. **D.** 120°.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right) = \left(\widehat{AB, AC}\right) = \widehat{BAC}$.

Xét ΔABC có $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}=\dfrac{a^2+a^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right)=120^\circ$.

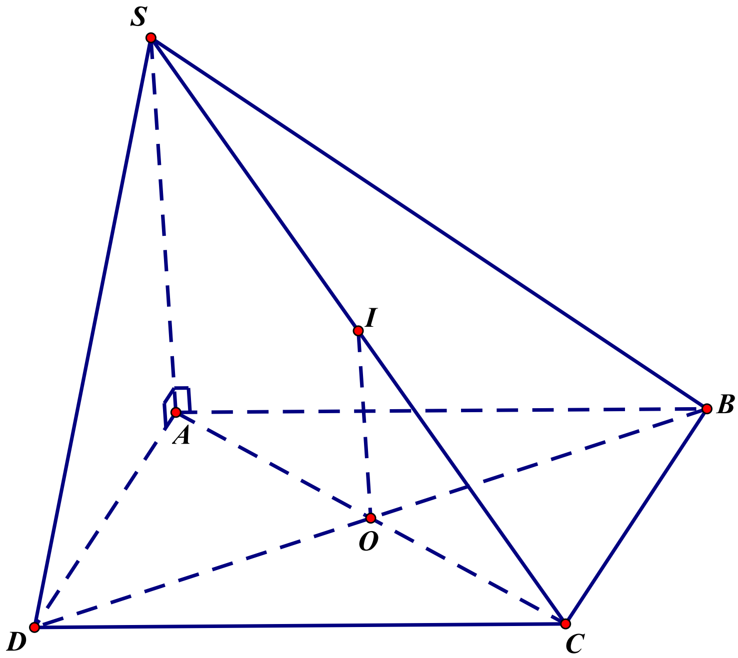
Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA\perp(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IO. **B.** IA. **C.** IC. **D.** IB.

Lời giải

Chọn A

Do I là trung điểm của SC và O là trung điểm AC nên $IO//SA$. Do $SA\perp(ABCD)$ nên $IO\perp(ABCD)$, hay khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.



Câu 35: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm *A, B* không nằm trong (P). Đặt $d_1=(A,(P))$ và $d_2=(B,(P))$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. $\dfrac{d_1}{d_2}=1$ khi và chỉ khi *AB* song song với (P).

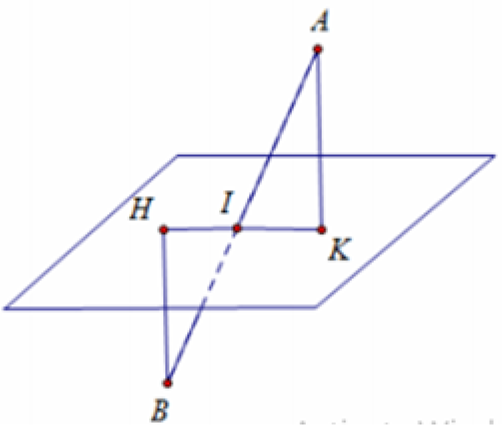
B. $\dfrac{d_1}{d_2}\neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng *AB* cắt (P).

C. Nếu $\dfrac{d_1}{d_2}\neq 1$ thì đoạn thẳng *AB* cắt (P).

D. Nếu đường thẳng *AB* cắt (P) tại điểm *I* thì $\dfrac{IA}{IB}=\dfrac{d_1}{d_2}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $AK \perp (P); BH \perp (P)$

Khi đó theo định lý Talet ta có: $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{AK}{BH} = \dfrac{d_1}{d_2}$

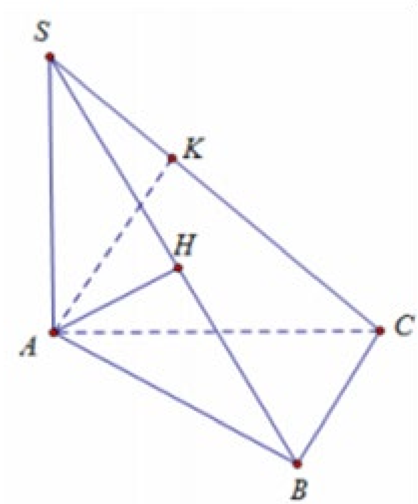
Câu 36: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B, SA* vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi *H* và *K* lần lượt là hình chiếu của *A* lên *SB* và *SC.* Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $d(A,(SBC)) = AH$ **B.** $d(A,(SBC)) = AK$

C. $d(C,(SAB)) = BC$ **D.** $d(S,(ABC)) = SA$

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = BC$.

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$

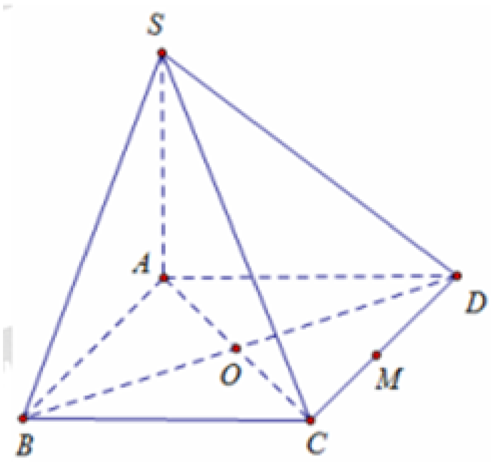
Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow d(S,(ABC)) = SA$.

Câu 37: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Đường thẳng *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi *M* là trung điểm của *CD.* Khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (SAB) nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** a **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $2a$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AB//CD \Rightarrow d\left(M,(SAB)\right) = d\left(D,(SAB)\right)$

Mặt khác $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

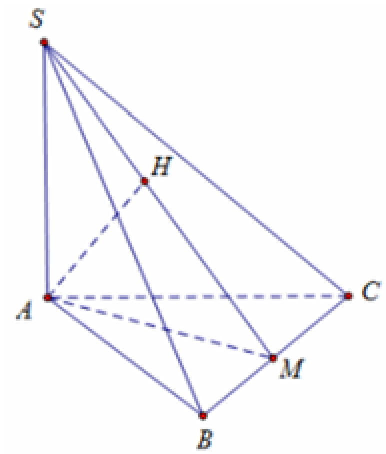
Do vậy $d\left(M,(SAB)\right) = AD = a$.

Câu 38: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh 2*a*, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*, khi đó khoảng cách từ *A* đến đường thẳng *SM* bằng:

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $a\sqrt{6}$ **D.** $a\sqrt{11}$

Lời giải

Chọn A



Dựng $AH \perp SM \Rightarrow d(A,SM) = AH; AM = \frac{(2a)\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác *SAM* vuông tại *A* ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AM^2}\Rightarrow AH=a\sqrt{2}$

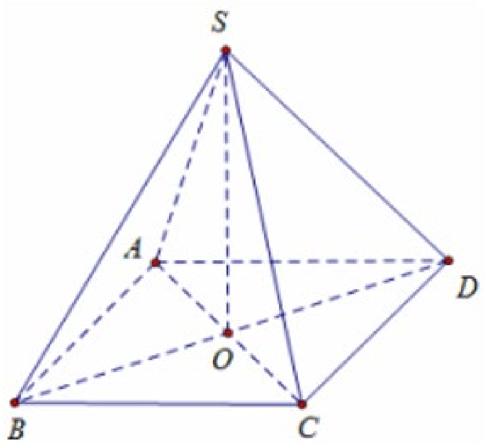
Do đó $d=a\sqrt{2}$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AA'=a$. Khoảng cách giữa AB' và CC':

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $d(AB',CC')=d(CC',(ABB'A'))=d(C,(ABB'A'))=d(C,(AB))=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 40: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, biết $2SA=AC=2a$ và *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} SA\perp BC \\ AB\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$, kẻ $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

$$\Rightarrow d(A,(SBC))=AH=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 41: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giac vuông tại *B* với $AB=a$, $BC=2a$ và $SA\perp(ABC)$. Khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng (SAC) bằng:

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\frac{2a}{5}$ **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{a}{5}$

Lời giải

Chọn A

Kẻ $BH\perp AC\,(H\in AC)$ mà $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BH$

$$\Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B,(SAC)) = BH = \frac{AB.BC}{\sqrt{AB^2+BC^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 42: Cho hình chóp *S.ABC* có *SA, SB, SC* đôi một vuông góc nhau và $SA = SB = SC = a$. Khi đó khoảng cách từ *S* đến mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Lời giải

Chọn B

Gọi $h = d(S,(ABC)) \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60°$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC.

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $AH \perp SC$, khi đó $d(A;SC) = AH$.

$ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60° \Rightarrow \triangle ABC$ đều nên $AC = a$.

Trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{4a^2+a^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $OH \perp SC$, khi đó $d\left(O;SC\right)=OH$. Ta có: $\Delta SAC \sim \Delta OHC$ nên:

$\frac{OH}{SA}=\frac{OC}{SC} \Rightarrow OH=\frac{OC}{SC}.SA$.

Mà: $OC=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{6}$.

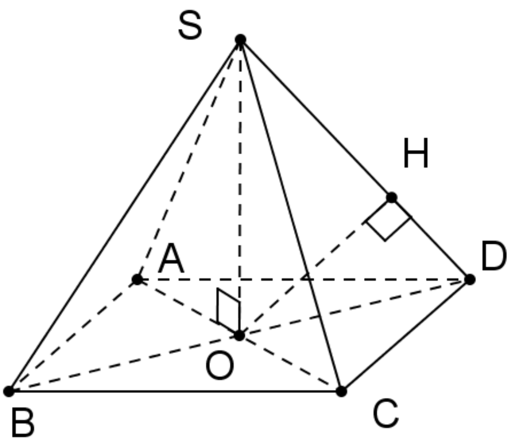
Vậy $OH=\frac{OC}{SC}.SA=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 45: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. $a\sqrt{2}\cot\alpha$. **B.** $a\sqrt{2}\tan\alpha$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Lời giải

Chọn D



$SO \perp \left(ABCD\right)$, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Kẻ $OH \perp SD$, khi đó $d\left(O;SD\right)=OH$, $\alpha=\widehat{SDO}$.

Ta có: $OH=OD\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA=3a$, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

Kẻ $BH \perp SC$, khi đó $d\left(B;SC\right) = BH$.

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

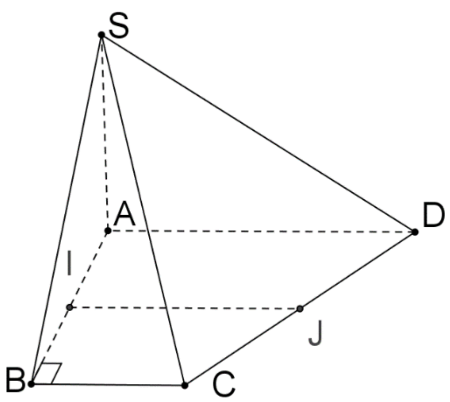
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{SB.BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a.$$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông cạnh $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và $\left(SAD\right)$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



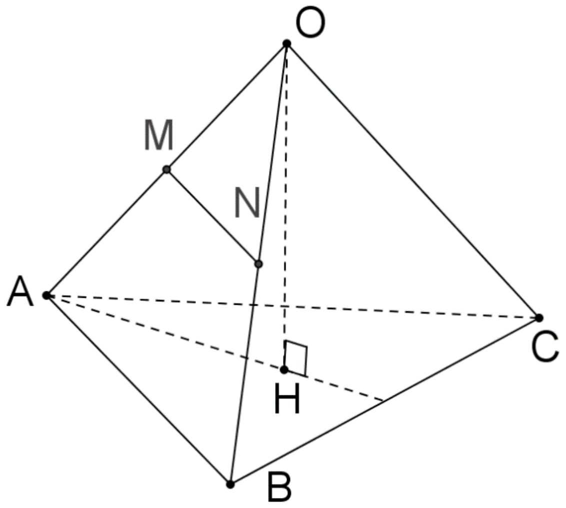
Ta có: Vì $IJ \,//\, AD$ nên $IJ \,//\, \left(SAD\right) \Rightarrow d\left(IJ;\left(SAD\right)\right) = d\left(\text{I};\left(SAD\right)\right) = IA = \frac{a}{2}$.

Câu 48: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và $\left(ABC\right)$ bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Vì M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB nên $MN // AB$ $MN // (ABC)$.

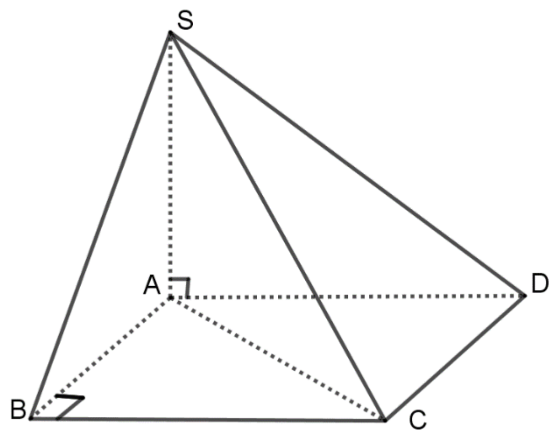
Ta có: $d\left(MN;(ABC)\right)=d\left(M;(ABC)\right)=\dfrac{1}{2}OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC=a\sqrt{5}$ và $BC=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{2a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC//(SAD)$

$\Rightarrow d(BC;SD)=d\left(BC;(SAD)\right)=d\left(B;(SAD)\right)$.

Mà $\begin{cases} AB\perp AD \\ AB\perp SA \end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow d\left(B;(SAD)\right)=AB$.

Ta có: $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{5a^2-2a^2}=\sqrt{3}a$.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d\left(BB';AC\right)=d\left(BB';\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{1}{2}DB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d\left(AA';BD'\right)=d\left(AA';\left(DBB'D'\right)\right)=\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 52: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $\left(MNP\right)$ và $\left(ACC'\right)$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

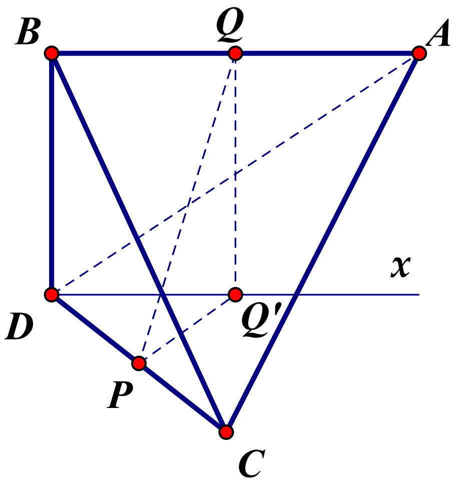
Chọn D

Ta có: $(MNP)//(ACA') \Rightarrow d\left((MNP);(ACA')\right) = d\left(\mathrm{P};(ACA')\right) = \frac{1}{2}OD' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

B. TỰ LUẬN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có BD vuông góc với AB và CD. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của CD và AB thỏa mãn $BD:CD:PQ:AB = 3:4:5:6$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Tính $\cos\varphi$

Lời giải



Do $BD:CD:PQ:AB = 3:4:5:6$ nên ta chọn $\begin{cases} BD = 3 \\ CD = 4 \\ PQ = 5 \\ AB = 6 \end{cases}$

Dựng $Dx//AB \Rightarrow Dx \perp BD \Leftrightarrow BD \perp (CDx)$

Gọi Q' là hình chiếu của Q lên Dx $\Rightarrow QQ' \perp PQ'$

$\Rightarrow \varphi = (AB;CD) = (Dx;DC)$

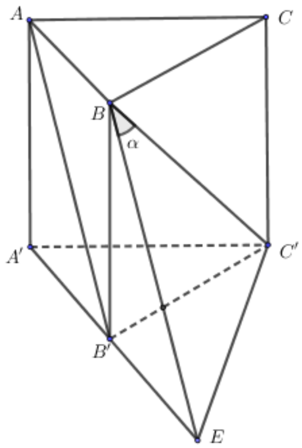
Ta có $PQ' = \sqrt{PQ^2 - QQ'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Xét $\Delta DPQ'$: $\cos\widehat{PDQ'} = \dfrac{DP^2 + DQ'^2 - PQ'^2}{2DP.DQ'} = \dfrac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2.2.3} = -\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \cos\left(180^o - \widehat{PDQ'}\right) = -\cos\widehat{PDQ'} = \dfrac{1}{4}$

Câu 2: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng của A' qua B'.

Ta có $AB//B'E$ và $AB = B'E = a$ suy ra $ABEB'$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AB'//BE \Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = \widehat{(BE, BC')} = \widehat{EBC'}$.

Xét tam giác $BB'E$ có $BB' \perp B'E \Rightarrow \Delta BB'E$ vuông tại B'.

$\Rightarrow BE = \sqrt{BB'^2 + B'E^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $BB'C'$ có $BB' \perp B'C' \Rightarrow \Delta BB'C'$ vuông tại B'.

$\Rightarrow BC' = \sqrt{BB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $A'C'E$ có $C'B' = A'B' = B'E = \frac{1}{2}A'E$.

$\Rightarrow \Delta A'C'E$ vuông tại $C' \Rightarrow C'E = \sqrt{A'E^2 - A'C'^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra tam giác BEC' có $BE = C'E = BC' = a\sqrt{3} \Rightarrow \Delta BEC'$ là tam giác đều.

$\Rightarrow \widehat{EBC'} = 60° \Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = 60°$.

Vậy góc giữa đường thẳng AB' và BC' bằng $60°$.

Câu 3: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G, cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc 30^0. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải

Vì hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SG \perp (ABC)$ do đó góc giữa SA tạo với đáy (ABC) là góc $\widehat{SAG}$ nên $\widehat{SAG} = 30^0$.

Gọi D sao cho $ABCD$ là hình bình hành do ΔABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông. Khi đó góc giữa SA và BC là góc giữa SA và AD.

Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

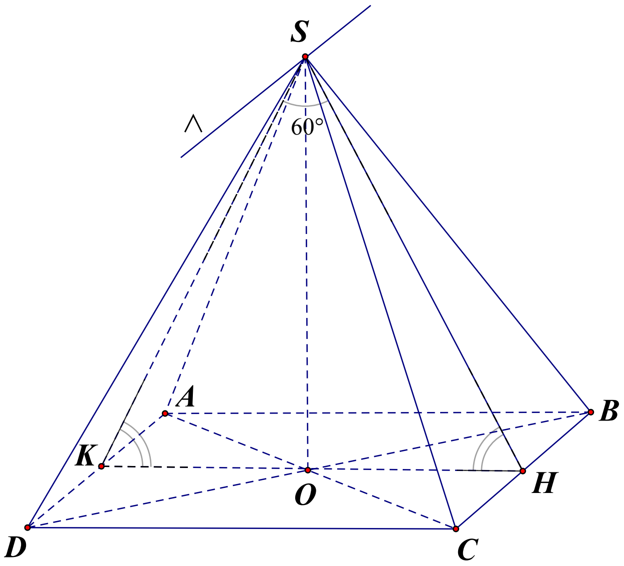
$AG = CG = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3}\sqrt{CB^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$; $DG = \frac{2}{3}DB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Tam giác SAG vuông tại

G có $SG = AG.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{9}$ và $SA = \dfrac{AG}{\cos 30^0} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{9}$. Tam giác SGD vuông tại G ta có $SD^2 = SG^2 + GD^2 = \dfrac{29}{27}a^2$. Tam giác SAD có $\cos\widehat{SAD} = \dfrac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA.AD} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{SA, BC}\right) = \left|\cos\widehat{SAD}\right| = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều, biết hai mặt bên đối diện diện tạo với nhau góc $60°$, tính góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

Lời giải



Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm S và song song AD và BC $\Rightarrow (SAD)\cap(SBC) = \Delta$.

Gọi H và K lần lượt là trung điểm cạnh BC và AD, do ΔSBC và ΔSAD cân đỉnh S nên:

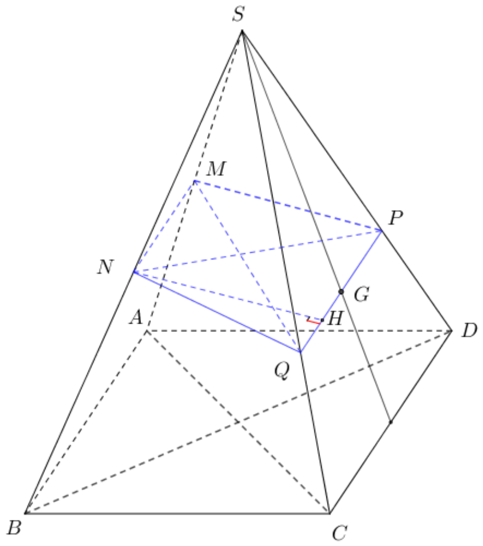
$$\left.\begin{array}{l} SH \perp BC \Rightarrow SH \perp \Delta \\ SK \perp AD \Rightarrow SK \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{HSK} = \left(\widehat{(SBC),(SAD)}\right) = 60°$$

Mặt khác: $\Delta SBC = \Delta SAD \Rightarrow SK = SH$

Từ và $\Rightarrow \Delta SHK$ đều $\Rightarrow \widehat{SHK} = \widehat{SKH} = 60° \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABCD)}\right) = 60°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng $12a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB và G là trọng tâm tam giác SCD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MNG).

Lời giải



Qua G kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC, SD lần lượt tại Q, P.

Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MNG) là hình thang cân $NMPQ$.

Ta có $MN=\frac{1}{2}AB=6a,\ PQ=\frac{2}{3}CD=8a$.

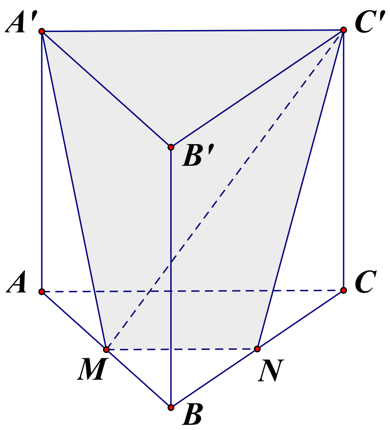
$NQ=2\sqrt{13}a$.

$NH=\sqrt{NQ^2-QH^2}=\sqrt{51}a.$

Vậy $S_{NMPQ}=\frac{NM+PQ}{2}\times NH=7\sqrt{51}a^2$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AB. Tính diện tích thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$.

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA'\perp(ABC)$ và ΔABC đều cạnh a.

Gọi N là trung điểm BC suy ra $MN//AC//A'C'$ và $MN=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}a$.

Vì $MN//A'C'$ nên A',C',M,N đồng phẳng do đó thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là hình thang cân $NMA'C'$.

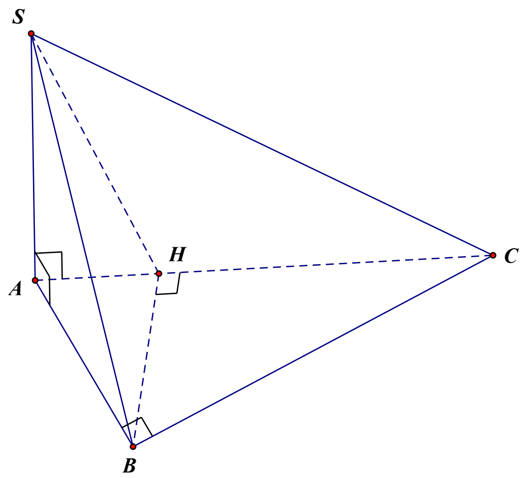
Lại có $C'N = A'M = \sqrt{A'A^2 + AM^2} = \dfrac{3}{2}a$ nên đường cao của hình thang cân $NMA'C'$ là

$$h = \sqrt{A'M^2 - \left(\dfrac{A'C' - MN}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{35}}{4}a$$

Do đó diện tích thiết diện là $S = \dfrac{1}{2}\left(A'C' + MN\right).h = \dfrac{3\sqrt{35}}{16}a^2$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\cos\varphi$

Lời giải



+) Có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

+) Kẻ $BH \perp AC$ tại H $\Rightarrow BH \perp (SAC)$

+) Trong tam giác ABC có $CH.CA = CB^2 \Rightarrow CH = \dfrac{CB^2}{CA} = \dfrac{3a}{2}$.

+) $\Rightarrow S_{\Delta SHC} = \dfrac{1}{2}SA.CH = \dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$.

+) Theo giả thiết $\begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ BC \perp BA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$.

$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}SB.BC = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{5}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{2}$.

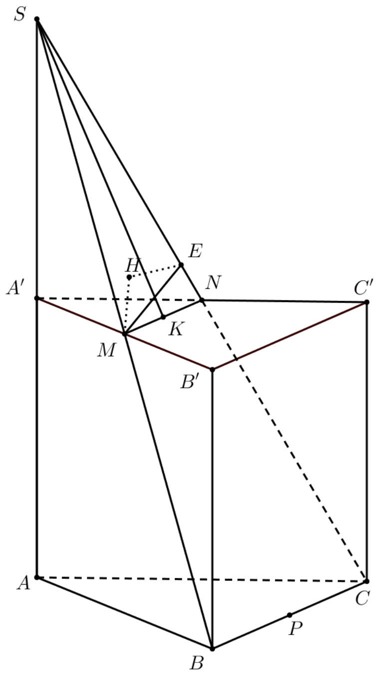
+) ΔSHC là hình chiếu của ΔSBC trên mặt phẳng (SAC).

$\Rightarrow S_{\Delta SHC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi \quad \left(\varphi = \widehat{\left((SAC);(SBC)\right)}\right)$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 8: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}, BB' = 2$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của $A'B', A'C'$ và BC. Nếu gọi α là độ lớn của góc của hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') thì $cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Dễ thấy (MNP) chính là $(MNCB)$ và (ACC') chính là $(ACC'A')$; giao tuyến của (MNP) và $(ACC'A')$ là (CP).

Dễ chứng minh được theo định lý Talet là AA', MB, NC đồng quy tại một điểm S.

Hạ $ME \perp SC$, $MH \perp (ACC'A')$ khi đó $\alpha = \widehat{MEH}$. $\sin\alpha = \dfrac{MH}{ME}$.

Gọi $AB = a; AA' = b$

Có $MH = d\left(M;\left(ACC'A'\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(B';\left(ACC'A'\right)\right) = \dfrac{1}{2}BN = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{2}$

Có $SM = SN = MB = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{7}$; $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} = \sqrt{3}$

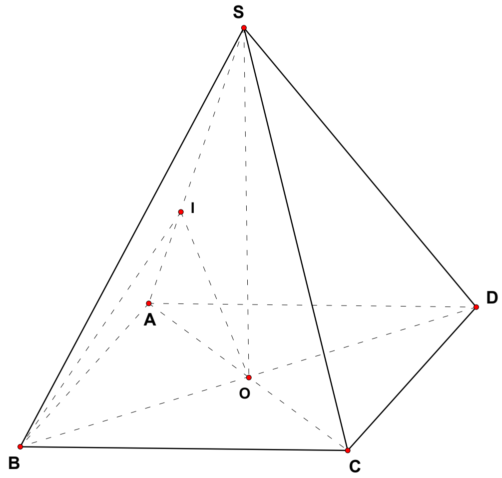
K là trung điểm MN thì $SK = \sqrt{SM^2 - MK^2} = \sqrt{7 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{5}{2}$

Xét tam giác SMN thì $ME.SN = SK.MN$ nên $ME = \dfrac{5}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{21}}{14}$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{3}{2}:\dfrac{5\sqrt{21}}{14} = \dfrac{7\sqrt{3}}{5\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ hay $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Câu 9: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$. Gọi α là góc của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAB). Tính $\cos\alpha$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. $SA = (SAC) \cap (SAB)$, $BO \perp (SAC)$.

Kẻ $OI \perp SA \Rightarrow \alpha = \widehat{((SAC),(SAB))} = \widehat{BIO}$.

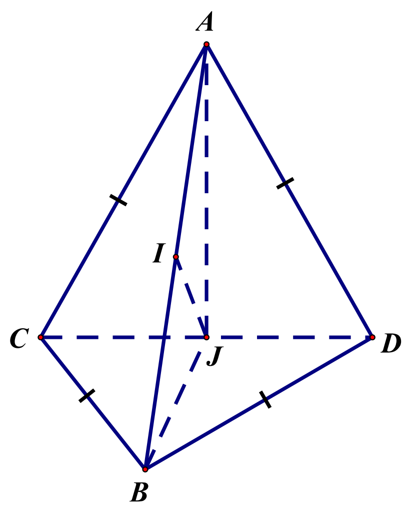
$OA = OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$.

$OI = \dfrac{SO.OA}{SA} = \dfrac{\sqrt{6}.\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $BI = \sqrt{OB^2 + OI^2} = \sqrt{2 + \dfrac{6}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{OI}{BI} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 10: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc nhau.

Lời giải



Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD. Vì J là trung điểm CD và $AC = AD$ nên $AJ \perp CD$. Do $(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp (BCD)$.

Ta thấy ΔAJD vuông tại J nên $AJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Mặt khác $AC = AD = BC = BD = a$ nên ΔAJB vuông cân tại J.

Suy ra: $AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

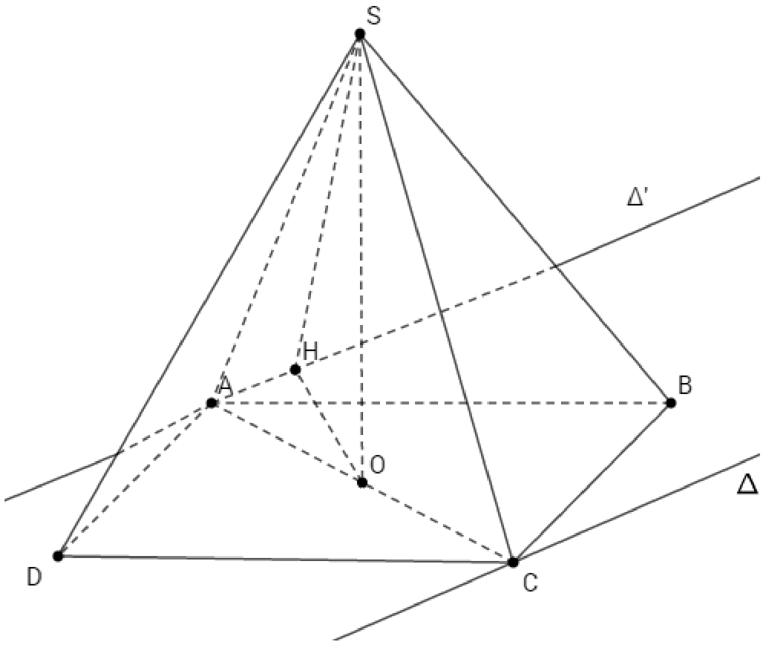
Do $IA = IB$, ΔAJB vuông tại J nên $IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

Vì CI và DI vuông góc với AB nên $(ABC) \perp (ABD)$ suy ra $\widehat{CID} = 90°$.

Ta có $IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C, (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA),(\Delta))$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi (Δ') là đường thẳng đi qua A và song song với (Δ). Hạ $OH \perp (\Delta')\left(H \in (\Delta')\right)$. Do O là trung điểm của AC và $(\Delta)//(\Delta')$ nên $d\left(O,(\Delta')\right) = d\left(O,(\Delta)\right)$ hay $OH = \frac{a\sqrt{14}}{6}$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Do $AH \perp OH$ và $AH \perp SO$ nên, suy ra $AH \perp SH$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông AHO ta có $OA^2 = OH^2 + AH^2$, suy ra

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{14}}{6}\right)^2} = \frac{a}{3}.$$

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông SAO ta có $SA^2 = OA^2 + SO^2$, suy ra

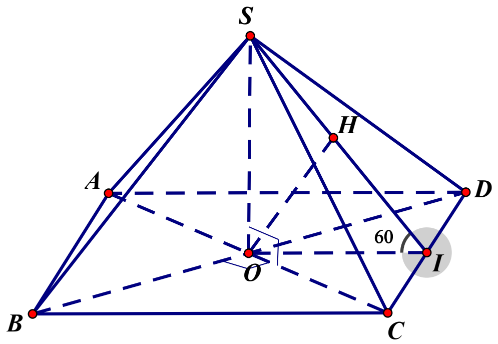
$$SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2a^2 + 4b^2}}{2}.$$

Do $(\Delta)//(\Delta')$ nên $\cos((SA),(\Delta)) = \cos((SA),(\Delta')) = \cos\widehat{SAH} = \frac{AH}{SA} = \frac{2a}{3\sqrt{2a^2+4b^2}}$.

Câu 12: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải

* Ta có: $\frac{d(B;(SCD))}{d(O;(SCD))} = \frac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow d(B;(SCD)) = 2.d(O;(SCD)) = 2OH$. Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD).



* Gọi I là trung điểm của CD ta có:

$$\begin{cases} (SCD)\cap(ABCD) = CD \\ SI \perp CD \\ OI \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD);(ABCD)) = (OI;SI) = \widehat{SIO} = 60°.$$

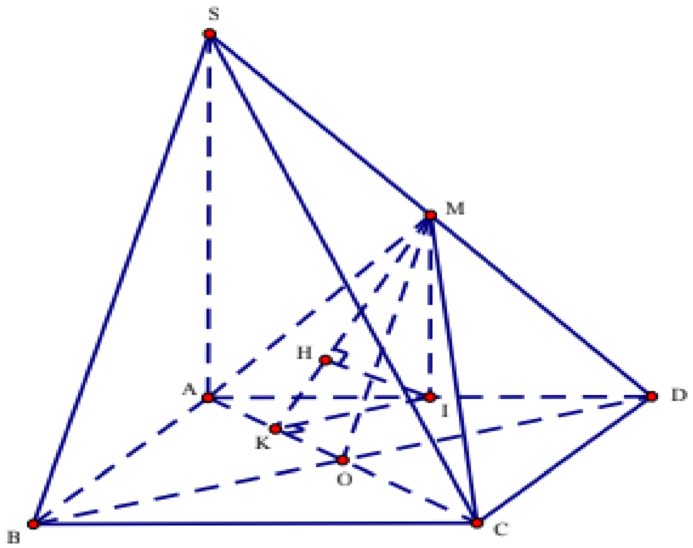
Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSOI, ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{3a^2}$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d(B;(SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM)

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông. Ta có: $MO//SB \Rightarrow SB//(ACM)$

$\Rightarrow d(SB,(ACM)) = d(B,(ACM)) = d(D,(ACM))$

Gọi I là trung điểm AD $\Rightarrow \begin{cases} MI//SA \Rightarrow MI \perp (ABCD) \\ d(D,(ACM)) = 2d(I,(ACM)) \end{cases}$

Trong $(ABCD)$ kẻ $IK \perp AC$ tại K

Trong (MIK) kẻ $IH \perp MK$ tại H

Ta có: $AC \perp MI, AC \perp IK \Rightarrow AC \perp (MIK) \Rightarrow AC \perp IH (2)$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow IH \perp (ACM) \Rightarrow d(I,(ACM)) = IH$

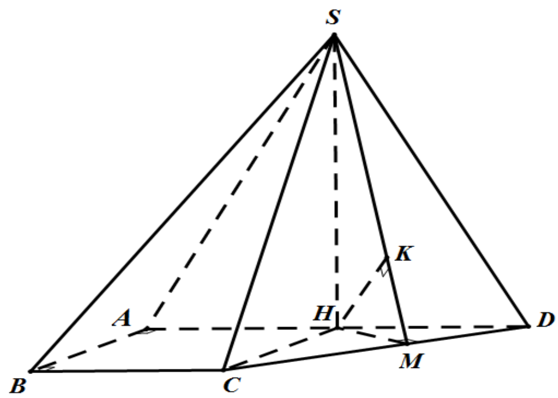
Trong tam giác MIK ta có: $\mathrm{IH} = \dfrac{\mathrm{IM.IK}}{\sqrt{\mathrm{IM}^2 + \mathrm{IK}^2}}$

Biết $MI = \dfrac{SA}{2} = a, IK = \dfrac{OD}{2} = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{8}}} = \dfrac{a}{3}$

Vậy: $d(SB,(ACM)) = \dfrac{2a}{3}$

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AD và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD, K là hình chiếu của H lên SM

Tam giác HCD vuông tại H có $CD = a\sqrt{2}$ và $HM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

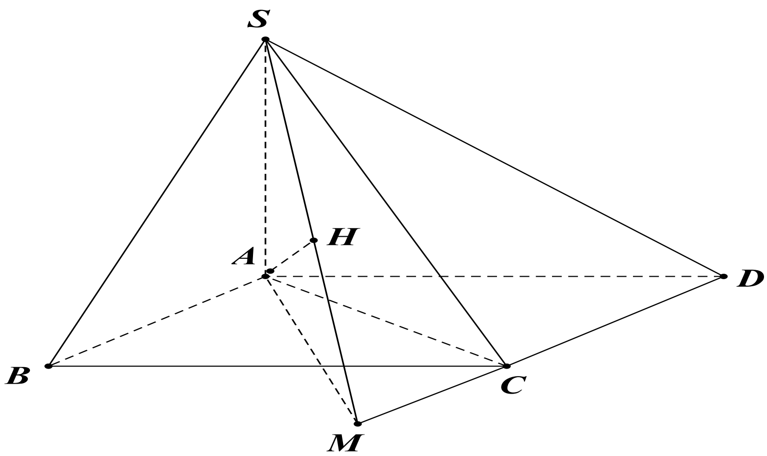
Ta có $BH // CD \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right) = d\left(H,(SCD)\right) = HK$

Tam giác SHM vuông tại H có $HK = \dfrac{HM.HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Vậy $d\left(B,(SCD)\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách tứ B đến (SCD) bằng?

Lời giải



Ta có $AB // CD \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = d\left(\mathrm{A};(SCD)\right)$.

Kẽ $MA \perp CD\left(M \in CD\right)$,kẽ $AH \perp SM \Rightarrow SH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right) = SH$.

$SA = a$; $AM = \dfrac{2S_{ACD}}{CD} = \dfrac{S_{ABCD}}{CD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow SM = \dfrac{\sqrt{21}}{7}a$