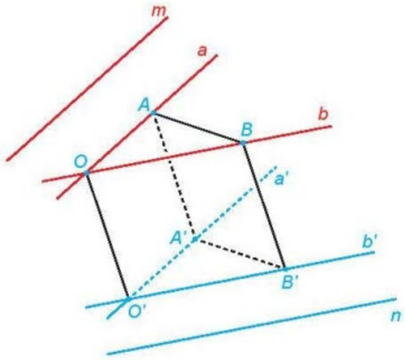
CHƯƠNG VII: QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 22: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1.GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

HĐ1. Trong không gian, cho hai đường thẳng chéo nhau m và n. Từ hai điểm phân biệt O, O' tuỳ ý lần lượt kẻ các cặp đường thẳng a, b ,và a', b' tương ứng song song với $m,\ n(H.7.2)$.



Hình 7.2

a) Mỗi cặp đường thẳng a, a' và b, b' có cùng thuộc một mặt phẳng hay không?

b) Lấy các điểm A, B (khác O) tương ứng thuộc a, b. Đường thẳng qua A song song với OO' cắt a' tại A', đường thẳng qua B song song với OO' cắt b' tại B'. Giải thích vì sao $OAA'O',\ OBB'O',\ ABB'A'$ là các hình bình hành.

c) So sánh góc giữa hai đường thẳng a, b và góc giữa hai đường thẳng a', b'.

(*Gợi ý*: Áp dụng định lí côsin cho các tam giác $OAB,\ O'A'B'$).

Lời giải

a) Mỗi cặp đường thẳng a, a' và b, b' cùng thuộc một mặt phẳng.

Vì $a // a',\ b//b'$ khi đó $(a,b) = (a,b')$.

b) Ta có: $\begin{cases} OA // O'A' \\ OB // O'B' \\ AB // A'B' \end{cases} \Rightarrow$ Do đó $OAA'O', OBB'O', ABB'A'$ là hình bình hành.

c) Áp dụng định lí côsin cho các tam giác OAB và $O'A'B'$, ta có: $\cos(a,b) = \dfrac{OA}{OB};\quad \cos(a',b') = \dfrac{O'A'}{O'B'}$

Vì $O'A' = OA$ và $O'B' = OB$ do a', b' là các đường song song với a, b nên ta có: $\cos(a,b) = \cos(a',b')$

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m,n), là góc giữa hai đường thẳng a, b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n.

Chú ý

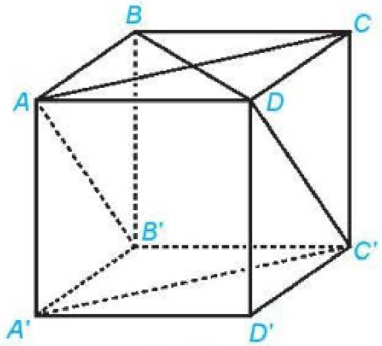
- Để xác định góc giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b, ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b. Khi đó $(a,b) = (a,b')$.
- Với hai đường thẳng a, b bất kì: $0^\circ \le (a,b) \le 90^\circ$.

? Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì (a,b) và (a',b') có mối quan hệ gì?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông. Tính các góc $(AA',CD),(A'C',BD),(AC,DC')$.

Lời giải. $(H.7.3)$



Hình 7.3

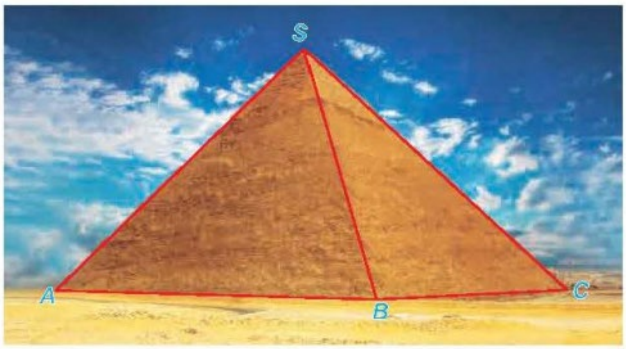
Vì $CD//AB$ nên $\left(\widehat{AA',CD}\right)=\left(\widehat{AA',AB}\right)=90^{\circ}$. Tứ giác $ACC'A'$ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó, $A'C'//AC$. Vậy $\left(\widehat{A'C',BD}\right)=(\widehat{AC,BD})=90^{\circ}$.

Tương tự, $DC'//AB'$ $DC'//AB'$. Vậy $(\widehat{AC,DC'})=\left(\widehat{AC,AB'}\right)$. Tam giác $AB'C$ có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên nó là một tam giác đều.

Từ đó, $(\widehat{AC,DC'})=(\widehat{AC,AB'})=60^{\circ}$.

Vận dụng. Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219m$ (kích thước hiện nay). (Theo *britannica.com*).

Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp $H.7.4$



Hình 7.4

Lời giải

Xét tam giác vuông ASC.

Với AC là độ dài đường chéo của đáy kim tự tháp, ta có: $AC=AB\sqrt{2}\approx 325.27m$

Theo pytago ta có: $AS^2=AC^2-SC^2\approx 325.27^2-219^2\approx 124108,44m$

$AS=\sqrt{124108.44}\approx 3522.24m$

Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB bằng cách sử dụng định lý sin trong tam giác vuông ASC:

$$\sin\left(\widehat{ASC}\right)=\frac{SC}{AC}=\frac{219}{325.27}\approx 0.6736 \Rightarrow \widehat{ASC}\approx \arcsin(0.6736)\approx 42,79^{\circ}$$

Vậy góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp Cheops là khoảng 42.79°.

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

HĐ2. Đối với hai cánh cửa trong Hình 7.5, tính góc giữa hai đường mép cửa BC và MN.

Lời giải

Hình 7.5

Vì BC vuông góc với MN nên góc giữa hai đường mép này bằng góc giữa đường BC và mặt phẳng $(MNPQ)$

$$\cos(\alpha)=\frac{|BC|}{|BM|}$$

Hai đường thẳng a,b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a\perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90°.

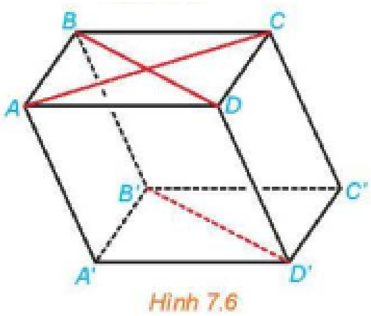
? Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b thì a có vuông góc với các đường thẳng song song với b hay không?

Ví dụ 2. Cho hình hộp . $ABCD.A'B'C'D'(H.7.6)$

a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.

b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.

Lời giải



Hình 7.6

a) Hai đường thẳng AC và $B'D'$ lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ nên chúng không có điểm chung, tức là chúng không thể trùng nhau hoặc cắt nhau.

Tứ giác $BDD'B'$ có hai cạnh đối BB' và DD' song song và bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó $B'D'$ song song với BD. Mặt khác, BD không song song với AC nên $B'D'$ không song song với AC.

Từ những điều trên suy ra AC và $B'D'$ chéo nhau.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

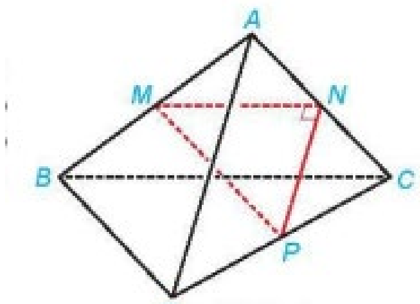
b) Do $B'D'$ song song với BD nên $\left(\widehat{AC,B'D'}\right)=\left(\widehat{AC,BD}\right)$. Do đó, AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi AC và BD vuông góc với nhau. Do $ABCD$ là hình bình hành nên AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $ABCD$ là hình thoi.

Luyện tập 1. Cho tam giác MNP vuông tại N và một điểm A nằm ngoài mặt phẳng (MNP). Lần lượt lấy các

điểm B,C,D sao cho M,N,P tương ứng là trung điểm của AB,AC,CD $(H.7.7)$. Chứng minh rằng AD và

BC vuông góc với nhau và chéo nhau.

Lời giải



Hình 7.7

Ta biết rằng tam giác MNP là tam giác vuông tại N, do đó ta có: $MN^2+NP^2=MP^2$

Theo giả thiết, M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AC và CD, nên ta có:

$MN=\frac{1}{2}AB,\ NP=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}CD$

Thay các giá trị này vào công thức trên, ta có: $\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{1}{2}AC\right)^2=\left(\frac{1}{2}CD\right)^2\Rightarrow AB^2+AC^2=CD^2$

Như tam giác ABC và tam giác CDA là hai tam giác vuông cân có đỉnh C và D lần lượt là các đỉnh vuông góc.

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB. Khi đó, ta có:

NH là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

DH là đường trung trực của đoạn thẳng CD.

Do đó, ta có thể kết luận rằng đường NH và DH đường cắt nhau tại một điểm O, và O là trung điểm của đoạn thẳng BC. Vậy ta đã chứng minh rằng AD và BC chéo nhau.

Vì NH là đường trung trực của đoạn thẳng AB, nên NH vuông góc với AB. Tương tự, DH vuông góc với CD và BC vuông góc với NH. Do đó, ta có thể kết luận rằng AD và BC vuông góc với nhau.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính góc giữa hai đường thẳngHu

1. Phương pháp

- Lấy điểm O tùy ý (ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng), qua đó vẽ các đường thẳng lần lượt song song (hoặc trùng) với hai đường thẳng đã cho.
- Tính một góc trong các góc được tạo bởi giữa hai đường thẳng cắt nhau tại O.
- Nếu góc đó nhọn thì đó là góc cần tìm, nếu góc đó tù thì góc cần tính là góc bù với góc đã tính.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho tứ diện đều ABCD. Gọi I là trung điểm của BC. Tính côsin của góc tạo bởi hai đường thẳng DI và AB.

Lời giải

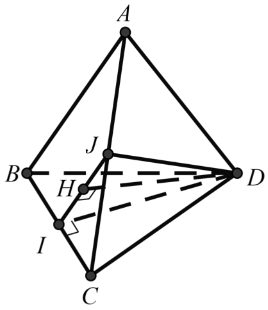
Đặt cạnh của tứ diện có độ dài là a.

Gọi J là trung điểm của AC.

Ta có: $IJ//AB \Rightarrow \left(AB,DI\right)=\left(IJ,DI\right)=\widehat{DIJ}$

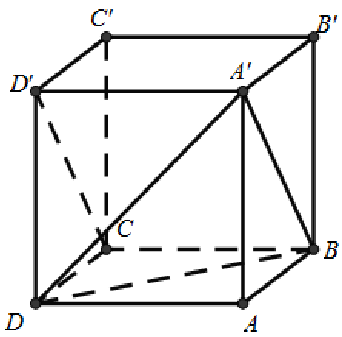
Kẻ $HD\perp IJ,\left(H\in IJ\right)$

Ta có: $\cos\widehat{DIJ}=\dfrac{IH}{DI}=\dfrac{\frac{a}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}.$



Ví dụ 2: Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’. Xác định Góc tạo bởi hai đường thẳng BD và CD’.

Lời giải



Do $BA'//CD'$ nên góc giữa BD và CD’ là góc giữa BD và BA’

Mà $\Delta A'BD$ là tam giác đều nên góc giữa BD và BA’ là 60^{o}.

Vậy góc giữa BD và CD’ là 60^{o}.

Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và AD. Cho biết $AB=CD=2a$ và $MN=a\sqrt{3}$. Xác định góc tạo bởi hai đường thẳng AB và CD

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AC ta có: $IM=IN=a$

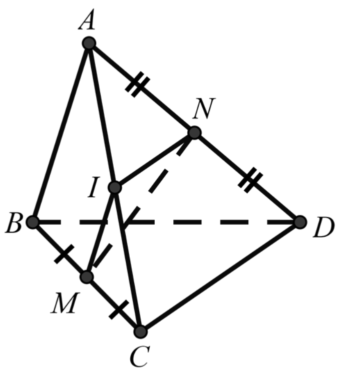
Áp dụng định lí côsin trong ΔIMN:

$MN^2=IM^2+IN^2-2IM.IN\cos\widehat{MIN}$

$3a^2=a^2+a^2-2a.a\cos\widehat{MIN}\Rightarrow\cos\widehat{MIN}=-\dfrac{1}{2}$

Suy ra: $\widehat{MIN}=120°$

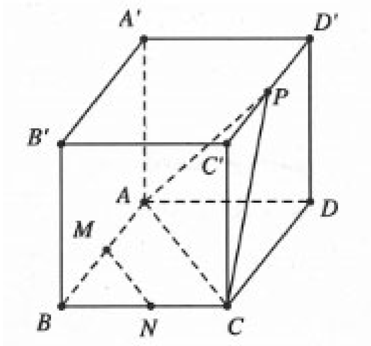
Vậy: $\widehat{\left(AB,CD\right)}=\widehat{\left(IM,IN\right)}=180°-120°=60°.$



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, $C'D'$. Xác định góc giữa hai đường thẳng MN và AP.

Lời giải



Dễ thấy MN là đường trung bình trong tam giác ABC nên $MN // AC \Rightarrow \widehat{(MN;AP)} = \widehat{(AC;AP)}$.

Lại có $AC = a\sqrt{2}, CP = \sqrt{CC'^2 + C'P^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

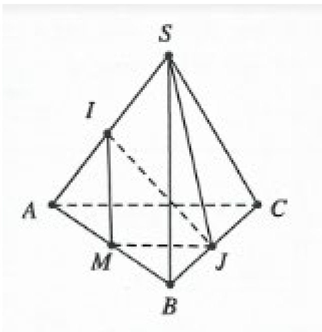
$AP = \sqrt{A'P^2 + AA'^2} = \sqrt{A'D'^2 + D'P^2 + AA'^2} = \dfrac{3a}{2}$

Do đó $\cos\widehat{CAP} = \dfrac{AP^2 + AC^2 - CP^2}{2.AP.AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{CAP} = 45° = \widehat{(MN;CP)}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA, BC. Tính số đo của góc hợp bởi IJ và SB.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB thì MI, MJ lần lượt là đường trung bình của tam giác ASB và ABC.

Ta có: $MI = MJ = \dfrac{a}{2}$

Mặt khác $JA = JS = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ tam giác JSA cân tại $J \Rightarrow JI \perp SA$

Khi đó $IJ = \sqrt{SJ^2 - SI^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow MI^2 + MJ^2 = IJ^2$ nên tam giác MIJ vuông cân tại M

$\Rightarrow \widehat{(IJ;SB)} = \widehat{(IJ;IM)} = 45°$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong không gian

1. Phương pháp

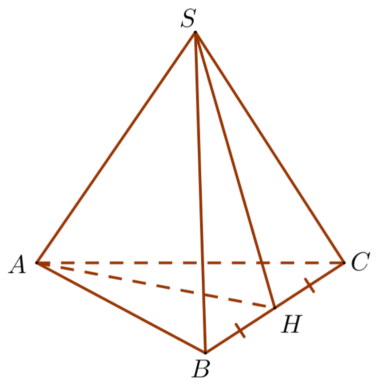
Cách 1: Dùng định nghĩa: $a \perp b \Leftrightarrow \left(\widehat{a,b}\right) = 90^0$

Cách 2: Dùng định lí: $\begin{cases} b // c \\ a \perp c \end{cases} \Rightarrow a \perp b$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Chứng minh SA vuông góc với BC.

Lời giải



Vì $AB = AC$, $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$ nên $\Delta SAC = \Delta SAB$, suy ra $SB = SC$, nên hai tam giác ABC và SBC là tam giác cân. Gọi H là trung điểm BC, ta có $\begin{cases} AH \perp BC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAH) \perp BC$ nên $SA \perp BC$ $\Rightarrow (SA, BC) = 90°$

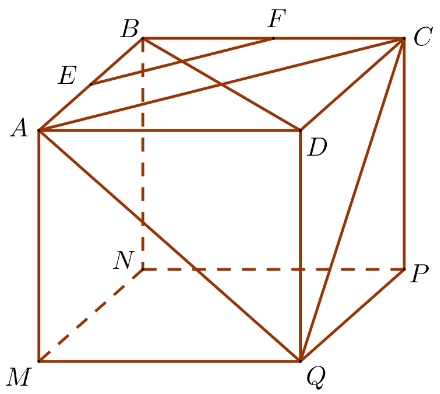
Vậy $SA \perp BC$

Ví dụ 2. Cho hình hộp $ABCD.MNPQ$ có sáu mặt đều là các hình vuông. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a)Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

b) Tính góc giữa EF và AQ.

Lời giải



a)Chứng minh: $EF \perp BD$, $EF \perp AM$.

Ta thấy: EF là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow EF // AC$.

Mà: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp AA' \end{cases}$ nên $EF \perp BD, EF \perp AM$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

b) Tính góc giữa EF và AQ.

Ta có: $EF // AC \Rightarrow (EF, AQ) = (AC, AQ) = \widehat{CAQ}$.

Nhận thấy: $AC = AQ = CQ = a\sqrt{2}$.

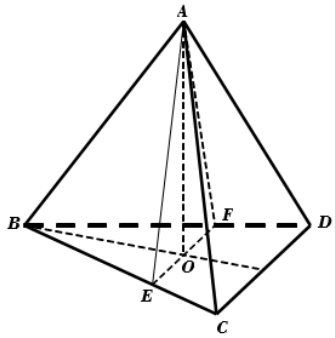
$\Rightarrow \Delta ACQ$ đều $\widehat{CAQ} = 60°$.

$\Rightarrow (EF, AQ) = \widehat{CAQ} = 60°$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.

Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$.

Lời giải



- Qua O vẽ đường thẳng song song với CD cắt BC tại E và cắt BD tại F.
- Ta cần chứng minh $AO \perp EF$. Ta có $\widehat{AOE} = \left(\widehat{AO, CD}\right)$.
- Vì $EF // CD$ nên BEF là tam giác đều nên $BE = BF$ và $OE = OF$. (1)
- Xét hai tam giác ABE và ABF, ta có

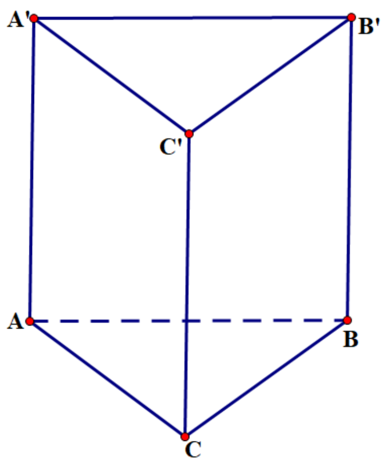
$\begin{cases} AB \text{ chung} \\ BE = BF \\ \widehat{ABE} = \widehat{ABF} \end{cases}$ nên $\Delta ABE = \Delta ABF$ $(c-g-c)$. Suy ra $AE = AF$. (2)

- Từ (1) và (2), suy ra tam giác AEF cân tại A có AO là trung tuyến nên cũng là đường cao.
- Do đó $\widehat{AOE} = 90^0$. Vậy $AO \perp CD$.

C. BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đáy là các tam giác đều. Tính góc $(AB, B'C')$.

Lời giải

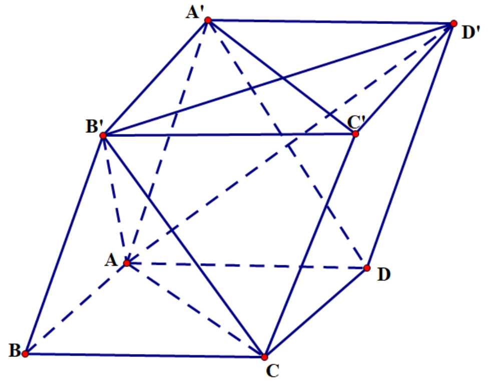


Vì $B'C' // BC$ nên $(AB, B'C') = (AB, BC) = \widehat{ABC} = 60^\circ$ (do tam giác ABC đều)

Bài 7.2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



+) Vì hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau nên tứ giác $A'B'C'D'$; $ADD'A'; C'D'D$ là hình thoi.

+) $AB' // C'D$ và $C'D \perp CD'$ nên $AB' \perp CD'$

+) $AC // A'C'$ và $A'C' \perp B'D'$ nên $AC \perp B'D'$

+) $B'C // A'D$ và $A'D \perp AD'$ nên $B'C \perp AD'$

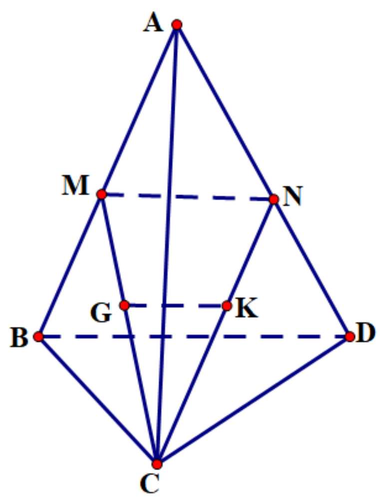
Vậy ta đã chứng minh được rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Bài 7.3. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^\circ$.

a) Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD. Chứng minh rằng MN vuông góc với BC.

b) Gọi G, K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD. Chứng minh rằng GK vuông góc với BC.

Lời giải



a) Xét tam giác ABD có

M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABD

$\Rightarrow MN // BD$ mà $BD \perp BC \left(\widehat{CBD} = 90^\circ\right)$

$\Rightarrow MN \perp BC$.

b) Vì G, K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD nên $\dfrac{CG}{CM} = \dfrac{CK}{CN} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow GK // MN$ (Định lý Talet) mà $MN \perp BC$

$\Rightarrow GK \perp BC$.

Bài 7.4. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số $1, 2, 3, 4, 5$ như trong Hình 7.8, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?

Hình 7.8

Lời giải

Trong nhà gỗ truyền thống, các cấu kiện thường được lắp ráp với nhau bằng các mối ghép chéo, do đó các cặp cấu kiện vuông góc với nhau là:

- Hoành (1) và quá giang (2).
- Xà cái (3) và cột (5).
- Quá giang (2) và rui (4).

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chọn D

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt $a,\ b$ và mặt phẳng (P), trong đó $a\perp(P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b\perp(P)$ thì $b//a$. **B.** Nếu $b//(P)$ thì $b\perp a$.

C. Nếu $b//a$ thì $b\perp(P)$. **D.** Nếu $b\perp a$ thì $b//(P)$.

Lời giải

Chọn D

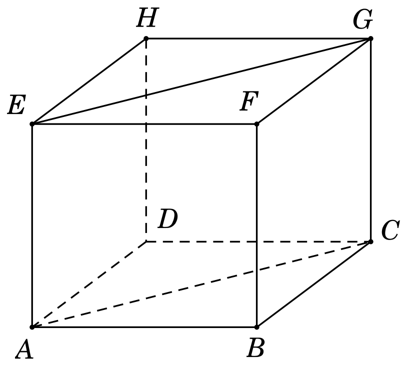
Vì b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



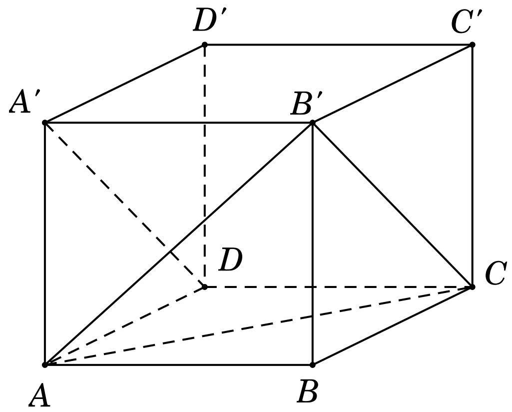
Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình chữ nhật) nên $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45^0$ ($ABCD$ là hình vuông).

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa AC và DA' là:

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 120^0.

Lời giải

Chọn C



Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương. Khi đó, tam giác $AB'C$ đều ($AB' = B'C = CA = a\sqrt{2}$) do đó $\widehat{B'CA} = 60^0$.

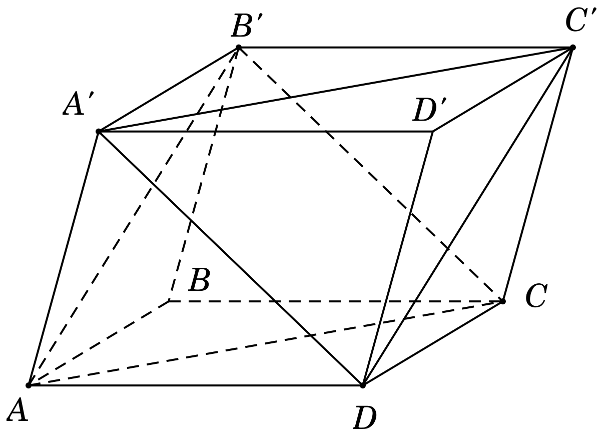
Lại có, DA' song song CB' nên $(AC, DA') = (AC, CB') = \widehat{ACB'} = 60^0$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có ba góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?

A. $\widehat{AB'C}$. **B.** $\widehat{DA'C'}$. **C.** $\widehat{BB'D}$. **D.** $\widehat{BDB'}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $AC\,//\,A'C'$ ($A'B'CD$ là hình bình hành) mà $\widehat{DA'C'}$ nhọn nên

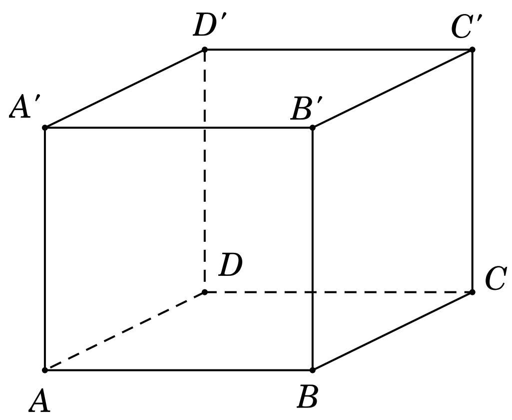
$(AC, A'D) = (A'C', A'D) = \widehat{DA'C'}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định **sai?**

A. Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90^0.
B. Góc giữa $B'D'$ và AA' bằng 60^0.
C. Góc giữa AD và $B'C$ bằng 45^0.
D. Góc giữa BD và $A'C'$ bằng 90^0.

Lời giải

Chọn B



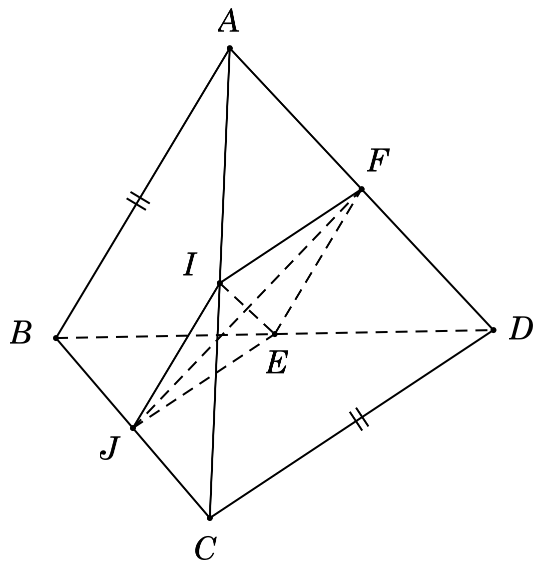
Ta có $(AA', B'D') = (BB', B'D') = \widehat{BB'C} = 90^0$. Khẳng định B sai.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Góc (IE, JF) bằng

A. $30°$.
B. $45°$.
C. $60°$.
D. $90°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có IF là đường trung bình của ΔACD $\Rightarrow \begin{cases} IF // CD \\ IF = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

Lại có JE là đường trung bình của ΔBCD $\Rightarrow \begin{cases} JE // CD \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases} IF = JE \\ IF // JE \end{cases}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $IJEF$ là hình bình hành.

Mặt khác: $\begin{cases} IJ = \dfrac{1}{2}AB \\ JE = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$. Mà $AB = CD \Rightarrow IJ = JE$.

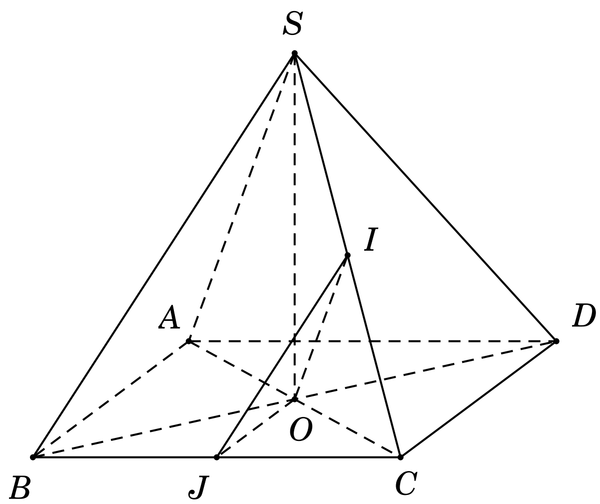
Do đó $IJEF$ là hình thoi. Suy ra $(IE, JF) = 90^\circ$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD \Rightarrow OJ$ là đường trung bình của $\triangle BCD$.

Suy ra $\begin{cases} OJ // CD \\ OJ = \frac{1}{2}CD \end{cases}$.

Vì $CD // OJ \Rightarrow (IJ, CD) = (IJ, OJ)$.

Xét tam giác IOJ, có $\begin{cases} IJ = \frac{1}{2}SB = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{1}{2}CD = \frac{a}{2} \\ IO = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta IOJ$ đều.

Vậy $(IJ, CD) = (IJ, OJ) = \widehat{IJO} = 60°$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = x$, tất cả các cạnh còn lại đều bằng a. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng SA và SC.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D

Theo giả thiết, ta có $AB = BC = CD = DA = a$ nên $ABCD$ là hình thoi cạnh a.

Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $\Delta CBD = \Delta SBD$ $(c - c - c)$.

Suy ra hai đường trung tuyến tương ứng CO và SO bằng nhau.

Xét tam giác SAC, ta có $SO = CO = \frac{1}{2}AC$.

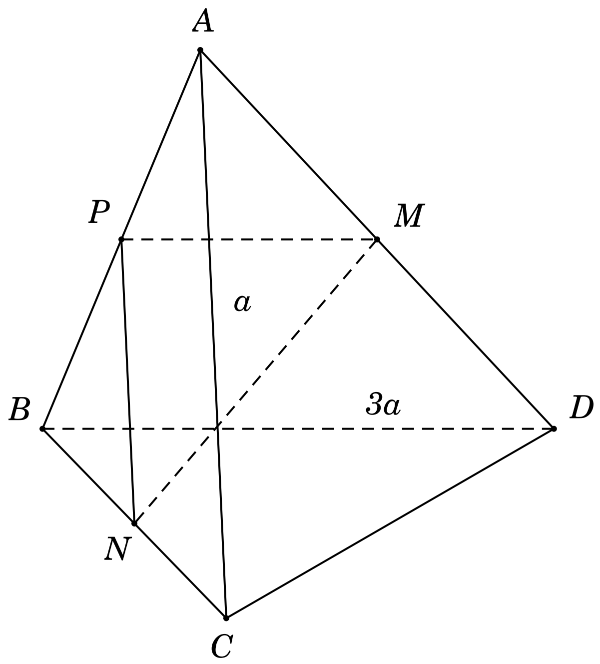
Do đó tam giác SAC vuông tại S (tam giác có đường trung tuyến bằng nửa cạnh đáy). Vậy $SA \perp SC$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a,\ BD = 3a$. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của AD và BC. Biết AC vuông góc với BD. Tính MN.

A. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm của AB $\Rightarrow PN, PM$ lần lượt là đường trung bình của tam giác ΔABC và ΔABD. Suy ra $\begin{cases} PN = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{2} \\ PM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3a}{2} \end{cases}$.

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow PN \perp PM$ hay tam giác ΔPMN vuông tại P

Do đó $MN = \sqrt{PN^2 + PM^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{9a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.

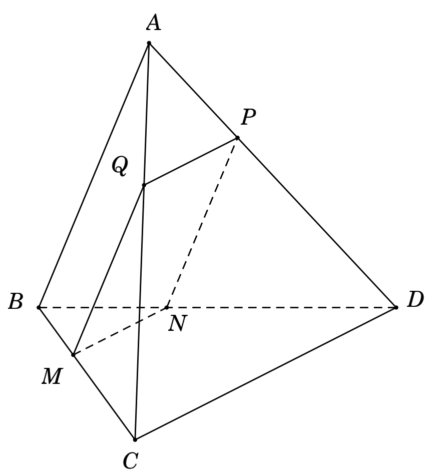
Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Tứ giác không phải hình thang.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} (MNPQ)//AB \\ (MNPQ) \cap (ABC) = MQ \end{cases} \Rightarrow MQ//AB.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Tương tự ta có $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Lại có $MN \perp MQ\left(do\ AB \perp CD\right)$.

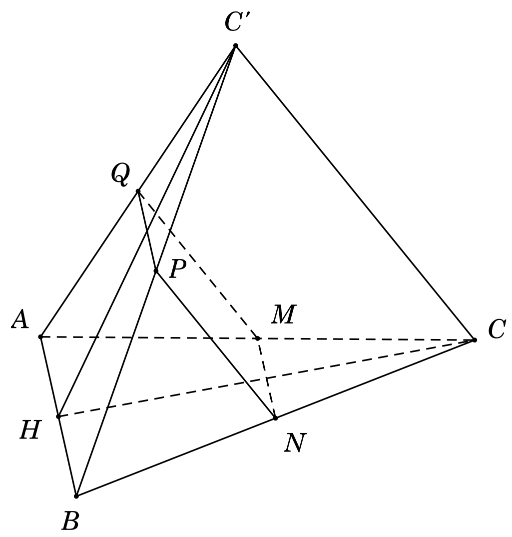
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 12: Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC,\ CB,\ BC'$ và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Hình thang.

Lời giải

Chọn B



Vì $M,\ N,\ P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC,\ CB,\ BC'$ và $C'A$

$\Rightarrow \begin{cases} PQ = MN = \dfrac{1}{2}AB \\ PQ//AB//MN \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Gọi H là trung điểm của AB. Vì hai tam giác ABC và ABC' đều nên $\begin{cases} CH \perp AB \\ C'H \perp AB \end{cases}$.

Suy ra $AB \perp \left(CHC'\right)$. Do đó $AB \perp CC'$.

Ta có $\begin{cases} PQ//AB \\ PN//CC' \\ AB \perp CC' \end{cases} \Rightarrow PQ \perp PN$.

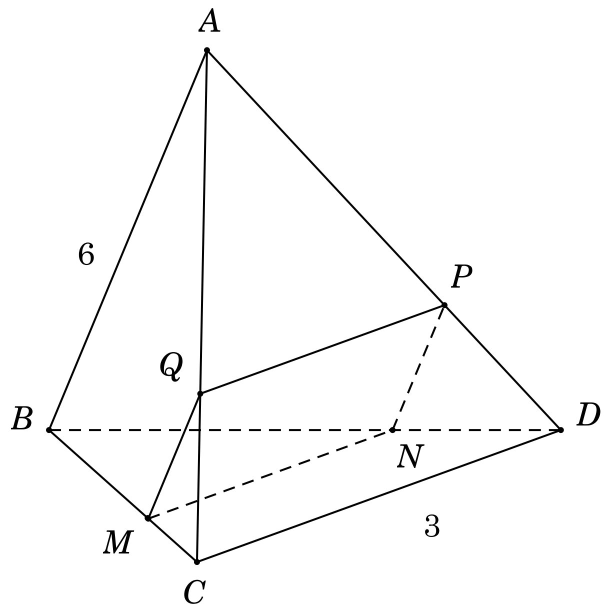
Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$ trong đó $AB = 6,\ CD = 3$, góc giữa AB và CD là 60° và điểm M trên BC sao cho $BM = 2MC$. Mặt phẳng (P) qua M song song với AB và CD cắt $BD,\ AD,\ AC$ lần lượt tại $M,\ N,\ Q$. Diện tích $MNPQ$ bằng:

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB\\(MNPQ)\cap(ABC)=MQ\end{cases}\Rightarrow MQ//AB.$

Tương tự ta có $MN//CD,\ NP//AB,\ QP//CD$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{QM;MP}\right)=60^0$. Suy ra $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0$.

Ta có $\Delta CMQ \backsim \Delta CBA \Rightarrow \dfrac{CM}{CB}=\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MQ=2.$

$\Delta AQN \backsim \Delta ACD \Rightarrow \dfrac{AQ}{AC}=\dfrac{QN}{CD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow QN=2.$

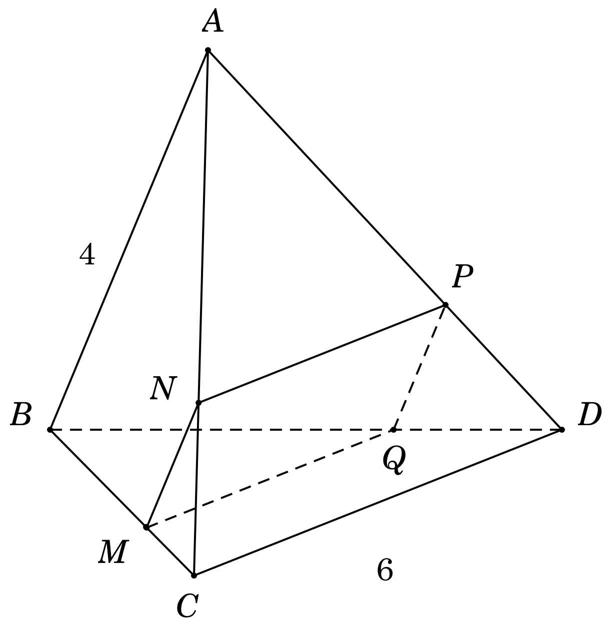
Vậy $S_{MNPQ}=QM.QN.\sin 60^0=2.2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=4,\ CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD. Diện tích thiết diện của (P) với tứ diện là:

A. $5.$ **B.** $6.$ **C.** $\dfrac{17}{3}.$ **D.** $\dfrac{16}{3}.$

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases}(MNPQ)//AB \\ (MNPQ)\cap(ABC)=MN\end{cases} \Rightarrow MN//AB.$

Tương tự ta có $MQ//CD,\ NP//CD,\ QP//AB$. Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Ta có $\left(\widehat{AB;CD}\right)=\left(\widehat{MN;MQ}\right)=\widehat{NMQ}=90^0 \Rightarrow$ tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Lại có $\Delta CMN \backsim \Delta CBA \Rightarrow \frac{CM}{CB}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3} \Rightarrow MN=\frac{4}{3};$

$\Delta ANP \backsim \Delta ACD \Rightarrow \frac{AN}{AC}=\frac{NP}{CD}=\frac{2}{3} \Rightarrow MP=4.$

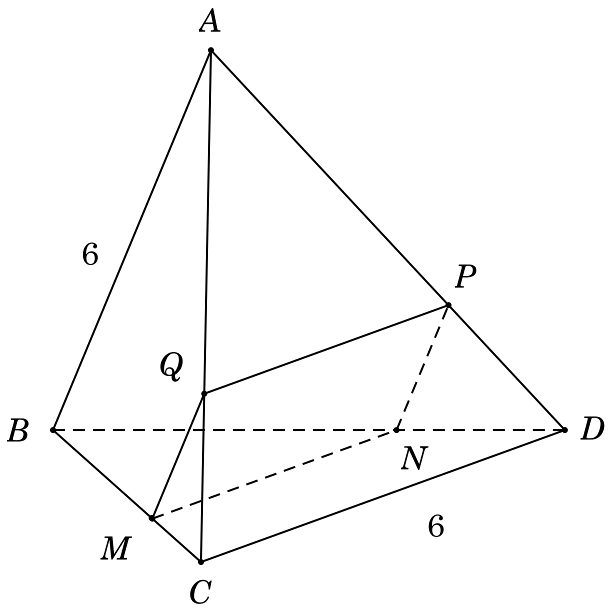
Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\frac{16}{3}.$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $(0<x<1)$. Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

A. 9. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases} MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác, $AB \perp CD \Rightarrow MQ \perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB} = x \Rightarrow MQ = x.AB = 6x$.

Theo giả thiết $MC = x.BC \Rightarrow BM = (1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\frac{MN}{CD} = \frac{BM}{BC} = 1-x \Rightarrow MN = (1-x).CD = 6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

$$S_{MNPQ} = MN.MQ = 6(1-x).6x = 36.x.(1-x) \leq 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2 = 9.$$

Ta có $S_{MNPQ} = 9$ khi $x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

BÀI 23: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

HĐ1. Đối với cánh cửa như trong Hình 7.10, khi đóng – mở cánh cửa, ta coi mép dưới BC của cánh cửa luôn sát sàn nhà (khe hở không đáng kể).

a) Từ quan sát trên, hãy giải thích vì sao đường thẳng AB vuông góc với mọi đường thẳng đi qua B trên sàn nhà.

b) Giải thích vì sao đường thẳng AB vuông góc với mọi đường thẳng trên sàn nhà.

Hình 7.10

Lời giải

a) Vì mép dưới BC của cánh cửa luôn sát sàn nhà nên khi cánh cửa đóng, điểm A trên cánh cửa sẽ nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường sát sàn nhà. Khi mở cánh cửa, điểm A sẽ di chuyển theo đường thẳng song song với đường sát sàn nhà và vẫn giữ nguyên góc vuông với các đường thẳng đi qua B trên sàn nhà. Do đó, đường thẳng AB luôn vuông góc với mọi đường thẳng đi qua B trên sàn nhà.

b) Theo tính chất của góc phẳng, khi hai đường thẳng AB và BC vuông góc với một đường thẳng CD chung, thì AB cũng vuông góc với AB. Vì vậy, khi đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng đi qua điểm B trên sàn nhà, thì đường thẳng AB cũng vuông góc với mọi đường thẳng khác trên sàn nhà.

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P).

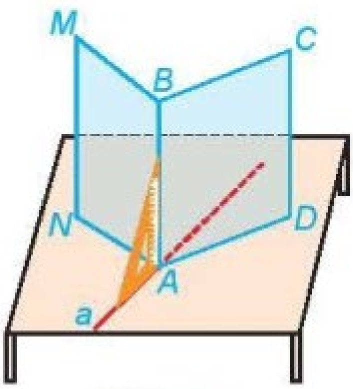
Chú ý. Khi Δ vuông góc với (P), ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.

HĐ2. Gấp tấm bìa cứng hình chữ nhật sao cho nếp gấp chia tấm bìa thành hai hình chữ nhật, sau đó đặt nó lên mặt bàn như Hình 7.11.

a) Bằng cách trên, ta tạo được đường thẳng AB vuông góc với hai đường thẳng nào thuộc mặt bàn?

b) Trên mặt bàn, qua điểm A kẻ một đường thẳng a tuỳ ý. Dùng ê ke, hãy kiểm tra trên mô hình xem AB có vuông góc với a hay không.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Hình 7.11

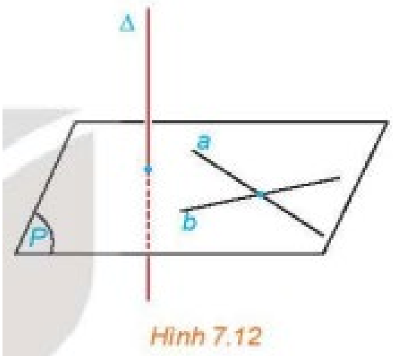
Lời giải

a) Sau khi gấp tấm bìa cứng hình chữ nhật, ta sẽ có hai hình chữ nhật nằm chồng lên nhau, với đường chéo của chúng chính là đường thẳng AB. Do đó, đường thẳng AB sẽ vuông góc với đường chéo của hai hình chữ nhật đó.

b) Để kiểm tra xem đường thẳng AB có vuông góc với đường thẳng a hay không, ta có thể sử dụng một ê-ke. Đặt một đầu ê-ke lên điểm A và đưa đầu kia đi dọc theo đường thẳng a. Nếu đầu ê-ke không thay đổi hướng khi di chuyển qua đường thẳng AB, tức là đường thẳng vuông góc với đường thẳng a. Nếu đầu ê-ke thay đổi hướng khi di chuyển qua đường thẳng AB, tức là hai đường không vuông góc nhau.

Người ta chứng minh được rằng:

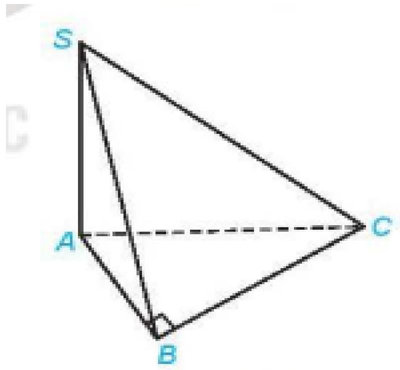
Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng th nó vuông góc với mặt phẳng đó.



Hình 7.12

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC. Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

Lời giải. (H.7.13)



Hình 7.13

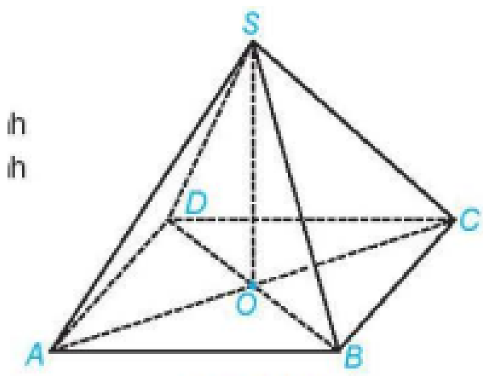
Vì SA vuông góc với hai đường thẳng AB và AC nên $SA \perp (ABC)$. Suy ra $SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp BA$.

Vì BC vuông góc với hai đường thẳng SA và BA nên $BC \perp (SAB)$.

Luyện tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O, SA = SC$ và $SB = SD(H.7.14)$. Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải



Hình 7.14

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$ và $OB = OD$.

Từ $SA = SC$ và $SB = SD$, ta có $\Delta SAB = \Delta SDC$. Suy ra $\widehat{SBA} = \widehat{SCD}$.

Tương tự, từ $SA = SC$ và $SB = SD$, ta có $\Delta SAC = \Delta SBD$. Suy ra $\widehat{SAC} = \widehat{SBD}$.

Do đó, $\widehat{BSC} = \widehat{SBD} + \widehat{SCD} = \widehat{SAC} + \widehat{SBA} = 180^{\circ} - \widehat{AOB}$.

Mà $\widehat{BOC} = 180^{\circ}$, nên $\widehat{BOS} = \widehat{COS} = \frac{\widehat{BOS}}{2}$.

Từ đó suy ra $\widehat{BOS} + \widehat{BSC} = 90^{\circ}$ tức $SO \perp (ABCD)$.

Vận dụng. Khi làm cột treo quần áo, ta có thể tạo hai thanh đế thẳng đặt dưới sàn nhà và dựng cột treo vuông góc với hai thanh đế đó $(H.7.15)$. Hãy giải thích vì sao bằng cách đó ta có được cột treo vuông góc với sàn nhà.

Lời giải

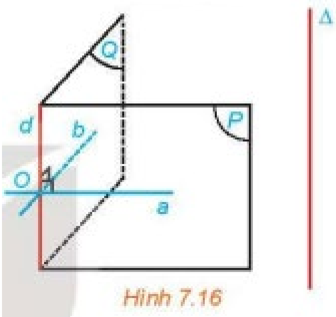
Hình 7.15

Điều này được giải thích bởi tính chất của đường thẳng và góc vuông. Một đường thẳng là đường đi qua hai điểm bất kỳ trên không gian và tạo thành một góc 180 độ. Trong khi đó, một góc vuông là một góc có độ lớn là 90 độ. Vì vậy, nếu ta đặt cột treo lên sao cho nó vuông góc với đường thẳng trên sàn nhà, thì chắc chắn cột treo sẽ đứng vuông góc với sàn nhà.

Bằng cách này, ta có thể đảm bảo rằng cột treo sẽ được đặt đúng vị trí và đứng thẳng đứng góc với sàn nhà, giúp cho quá trình sử dụng cột treo quần áo được dễ dàng hơn và tiện lợi hơn

2. TÍNH CHẤT

HĐ3. Cho điểm O và đường thẳng Δ không đi qua O. Gọi d là đường thẳng đi qua O và song song với Δ. Xét hai mặt phẳng phân biệt tuỳ ý (P) và (Q) cùng chứa d. Trong các mặt phẳng $(P),(Q)$ tương ứng kẻ các đường thẳng a,b cùng đi qua O và vuông góc với $d\left(H.7.16\right)$. Giải thích vì sao $\mathrm{mp}(a,b)$ đi qua O và vuông góc với Δ.



Hình 7.16

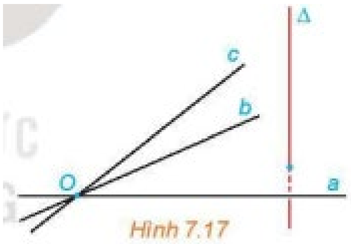
Lời giải

Ta biết rằng nếu hai đường thẳng đứng trên hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng d cùng vuông góc với d thì chúng sẽ song song với nhau (do cùng vuông góc với đường thẳng d). Do đó, đường thẳng $mp(a,b)$ cũng sẽ là một đường song song với đường thẳng d.

Vì đường thẳng d là đường song song với Δ, nên đường thẳng $mp(a,b)$ cũng sẽ là đường song song với Δ. Vì vậy, $mp(a,b)$ sẽ là đường thẳng đi qua điểm O và song song với đường thẳng Δ, tức là $mp(a,b)$ vuông góc với Δ.

Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

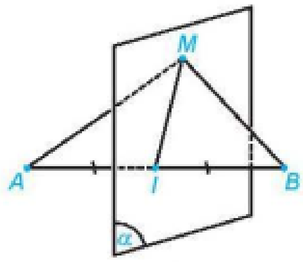
Nhận xét. Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a,b,c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với $\Delta(H.7.17)$.



Hình 7.17

Ví dụ 2. Chứng minh rằng điểm M cách đều hai điểm phân biệt A,B cho trước khi và chỉ khi M thuộc mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.

Lời giải. (H.7.18)



Hình 7.18

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB.

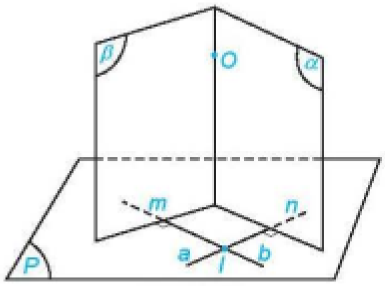
Ta có $MA = MB$ khi và chỉ khi M trùng I hoặc tam giác MAB cân tại M. Mặt khác, $\triangle MAB$ cân tại M khi và chỉ khi $MI \perp AB$, tức là M thuộc mặt phẳng (α). Do đó, $MA = MB$ khi và chỉ khi M thuộc (α).

Chú ý. Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A,B.

HĐ4. Cho mặt phẳng (P) và điểm O. Trong mặt phẳng (P), lấy hai đường thẳng cắt nhau a,b tuỳ ý. Gọi $(\alpha),(\beta)$ là các mặt phẳng qua O và tương ứng vuông góc với $a,b(H.7.19)$.

a) Giải thích vì sao hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ cắt nhau theo một đường thẳng đi qua O.

b) Nêu nhận xét về mối quan hệ giữa Δ và (P).



Hình 7.19

Lời giải

a)Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng a và b trong mặt phẳng (P). Theo định nghĩa, mặt phẳng (α) qua điểm O và vuông góc với đường thẳng a sẽ đi qua giao điểm Q của hai đường thẳng a và b. Tương tự, mặt phẳng (β) qua điểm O và vuông góc với đường thẳng b cũng sẽ đi qua giao điểm Q.

Như vậy, ta có hai mặt phẳng (α) và (β) đều đi qua điểm Q. Vì hai mặt phẳng này đều chứa đường thẳng đi qua điểm O, nên chúng sẽ cắt nhau theo một đường thẳng đi qua điểm Q.

b)Mối quan hệ giữa $\vartriangle$ và (P) là $\vartriangle$ là mặt phẳng đi qua giao điểm Q của hai đường thẳng a và b trong mặt phẳng (P), và vuông góc với cả hai đường thẳng a và b.

Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Luyện tập 2. Cho ba điểm phân biệt A,B,C sao cho các đường thẳng AB và AC cùng vuông góc với một mặt phẳng (P). Chứng minh rằng ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Lời giải

AB và AC đều vuông góc với mặt phẳng (P), ta có thể kết luận rằng AB và AC đều nằm trên một đường thẳng vuông góc với (P).

Gọi D là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (P). Ta có thể chứng minh rằng AD cũng vuông góc với (P) bằng cách sử dụng tính chất của giao điểm của hai đường thẳng.

Vì AB, AC và AD đều đi qua một điểm A, nên chúng phải nằm trên cùng một đường thẳng. Do đó, A,B và C thẳng hàng.

Vậy ta đã chứng minh được rằng nếu ba điểm A,B,C sao cho AB và AC cùng vuông góc với một mặt phẳng (P) thì ba điểm đó phải thẳng hàng.

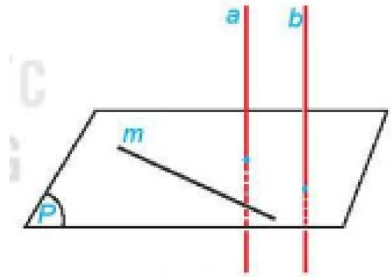
Ví dụ 3. Cho điểm A nằm ngoài mặt phẳng (P). Giải thích vì sao có duy nhất điểm H thuộc (P) sao cho đường thẳng AH vuông góc với (P).

Lời giải

Gọi a là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P). Lấy điểm H thuộc (P). Khi đó, đường thẳng AH vuông góc với (P) khi và chỉ khi AH trùng với a, tức là H là giao điểm của a và (P). Vậy có duy nhất điểm H thuộc (P) để AH vuông góc với (P), đó là giao điểm của a với (P).

3. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

HĐ5. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và song song với đường thẳng b. Lấy một đường thẳng m bất kì thuộc mặt phẳng (P). Tính (b,m) và từ đó rút ra mối quan hệ giữa b và (P).



Hình 7.20

Lời giải

Ta có $\widehat{(b,m)} = 90^\circ$, do đường thẳng b và m nằm trên mặt phẳng (P) và b song song với a, vậy góc giữa b và m là góc vuông.

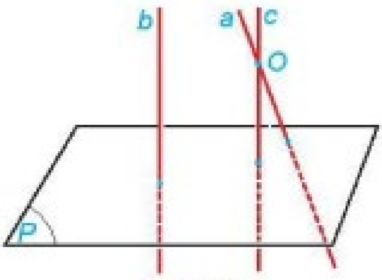
Từ đó, ta có thể rút ra mối quan hệ giữa b và (P) như sau:

- Đường thẳng b nằm trên mặt phẳng (P).
- Đường thẳng b vuông góc với một đường thẳng nào đó thuộc mặt phẳng (P) (vì $\widehat{(b,m)} = 90^\circ$ với m là đường thẳng nằm trong (P)).
- Vậy đường thẳng b cũng vuông góc với mặt phẳng (P).

HĐ6. Cho hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với mặt phẳng (P). Xét O là một điểm thuộc a nhưng không thuộc b. Gọi c là đường thẳng qua O và song song với b.

a) Hỏi c có vuông góc với (P) hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa a và c.

b) Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa hai đường thẳng a và b.



Hình 7.21

Lời giải

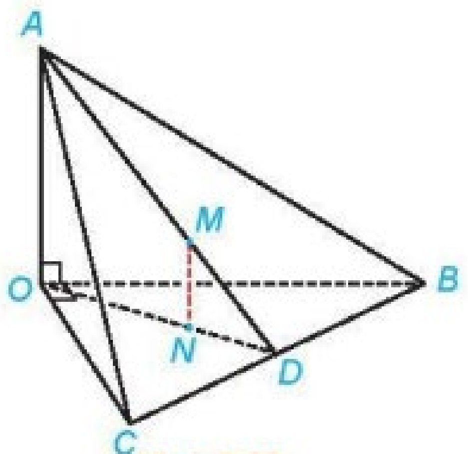
a) Để xác định liệu đường thẳng c có vuông góc với (P) hay không, ta cần xem xét vị trí tương đối giữa c và mặt phẳng (P). Ta thấy rằng c không nằm trên mặt phẳng (P) nên không thể nói rằng c vuông góc với (P) Tuy nhiên, vị trí tương đối giữa a và c là song song vì c và b là hai đường thẳng song song.

b) Hai đường thẳng a và b là hai đường thẳng vuông góc với cùng một mặt phẳng (P), vì vậy chúng là hai đường thẳng chéo nhau.

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P).
- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC tương ứng vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC. Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Lời giải. (H.7.22)



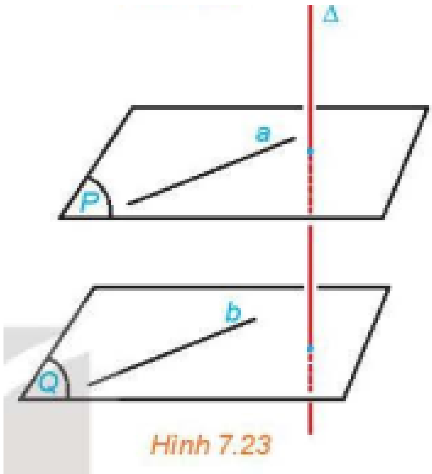
Hình 7.22

Vì AO vuông góc với các đường thẳng OB, OC nên $AO \perp (OBC)$. Kẻ các đường trung tuyến AD, OD tương ứng của các tam giác ABC, OBC.

Ta có $\frac{MA}{MD} = 2 = \frac{NO}{ND}$. Do đó, MN song song với AO.

Mặt khác, $AO \perp (OBC)$ nên $MN \perp (OBC)$.

HĐ7. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và đường thẳng Δ vuông góc với (P). Gọi b là một đường thẳng bất kì thuộc (Q). Lấy một đường thẳng a thuộc (P) sao cho a song song với $b(H.7.23)$. So sánh (Δ, b) và (Δ, a). Từ đó rút ra mối quan hệ giữa Δ và (Q).



Hình 7.23

Lời giải

$(\Delta,\ b)$: Do Δ vuông góc với (P) và (P) song song với (Q), nên Δ cũng vuông góc với (Q). Vậy $(\Delta,\ b)$ là đường thẳng vuông góc với (Q).

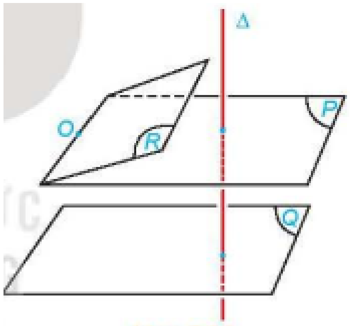
$(\Delta,\ a)$: Vì a song song với b nên $(\Delta,\ a)$ cũng song song với $(\Delta,\ b)$ và do đó cũng vuông góc với (Q).

Từ đó, ta có mối quan hệ giữa Δ và (Q) là Δ vuông góc với (Q).

HĐ 8. Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) cùng vuông góc với đường thẳng Δ. Xét O là một điểm thuộc mặt phẳng (P) nhưng không thuộc mặt phẳng (Q). Gọi (R) là mặt phẳng đi qua O và song song với (Q) $(H.7.24)$.

a) Hỏi (R) có vuông góc với Δ hay không? Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa (P) và (R).

b) Nêu vị trí tương đối giữa (P) và (Q).



Hình 7.24

Lời giải

a) Do (Q) và (R) song song với nhau nên chúng có cùng phương sai. Do đó, một đường thẳng nào đó trong (R) cũng song song với Δ. Mặt khác, (P) vuông góc với Δ, nên nó cắt (R) theo một đường thẳng vuông góc với Δ. Vậy (R) cắt Δ theo một đường thẳng vuông góc với Δ, tức là (R) cũng vuông góc với Δ.

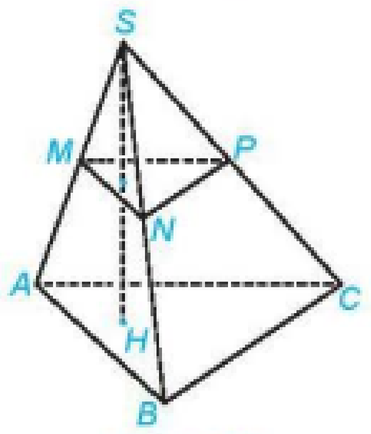
Vì (R) vuông góc với Δ và song song với (Q), nên nó cắt (Q) theo một đường thẳng vuông góc với (Q). Do (P) cùng vuông góc với Δ, nên (R) và (P) có vị trí tương đối giống nhau.

b) Vì cả (P) và (Q) đều vuông góc với Δ, nên chúng có vị trí tương đối giống nhau. Tuy nhiên, do (R) song song với (Q) nên vị trí của (R) và (P) khác nhau.

- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P).
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M,N,P tương ứng là trung điểm của SA,SB,SC. Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H. Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

Lời giải. (H.7.25)



Hình 7.25

Do $MN // AB, MP // AC$ nên $(MNP) // (ABC)$.

Mặt khác, $SH \perp (ABC)$. Do đó $SH \perp (MNP)$.

Luyện tập 3. Một chiếc bàn có các chân cùng vuông góc với mặt phẳng chứa mặt bàn và mặt phẳng chứa mặt sàn. Hỏi hai mặt phẳng đó có song song với nhau hay không? Vì sao?

Lời giải

Hai mặt phẳng đó không nhất thiết phải song song với nhau. Vì nếu mặt sàn không phẳng, tức là có sự chênh lệch độ cao giữa các điểm trên sàn, thì chiếc bàn khi đặt lên sàn sẽ không còn nằm trong một mặt phẳng duy nhất, mà sẽ nghiêng theo hướng chênh lệch độ cao của sàn.

HĐ9. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P). Tính (Δ, a).

Lời giải

Vì đường thẳng a và mặt phẳng (P) là song song nhau và đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P).

Do đó, ta có (Δ, a) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên đường thẳng a đến mặt phẳng (P).

HĐ10. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ.

a) Qua một điểm O thuộc (P), kẻ đường thẳng a' song song với a. Nêu vị trí tương đối giữa a' và (P).

b) Nêu vị trí tương đối giữa a và (P).

Lời giải

a)Vị trí tương đối giữa a' và (P) là hai đường thẳng song song với nhau.

b)Vị trí tương đối giữa a và (P) là hai mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ.

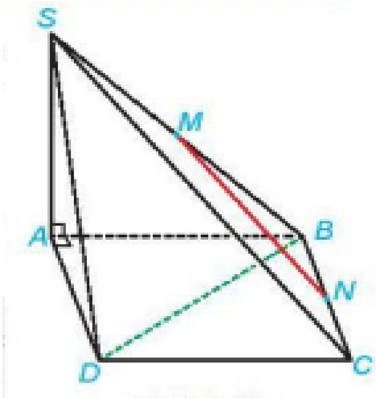
- Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P)
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc

song song với (P).

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA\perp(ABCD)$. Gọi M,N tương ứng là trung điểm của SB,BC. Chứng minh rằng $BD\perp MN$.

Lời giải. $(\text{H}.7.26)$



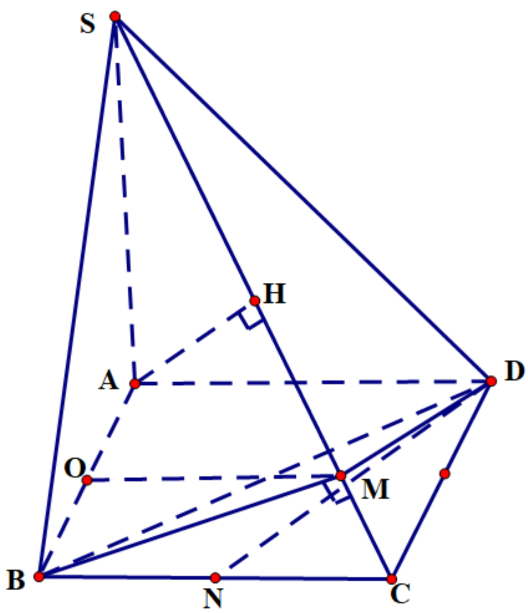
Hình 7.26

Do $SA\perp(ABCD)$ nên $BD\perp SA$. Mặt khác, $BD\perp AC$ nên $BD\perp(SAC)$.

Ta lại có $MN//SC$ nên $MN//(SAC)$. Do đó $BD\perp MN$.

Luyện tập 4. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA\perp(ABCD)$. Kẻ AH vuông góc với SC (H thuộc SC), BM vuông góc với SC (M thuộc SC). Chứng minh rằng $SC\perp(MBD)$ và $AH//(MBD)$.

Lời giải



Đặt O là trung điểm của AB, E là trung điểm của CD, N là trung điểm của BC.

Ta có $OM//ND$ vì $OM//AB$ và $ND//AB$. Do đó, $\Delta OMB=\Delta NDB$.

Ta có $SA//BC$ vì $ABCD$ là hình vuông nên $AH=\dfrac{1}{\sqrt{2}}SC, BM=\dfrac{1}{2}SC,$ và $MN=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}SA.$

Kẻ BD. Ta có MBD là tam giác vuông tại M.

Vì $AH=\dfrac{1}{\sqrt{2}}SC$ và $\dfrac{OM}{MB}=\dfrac{1}{2}$ nên ΔOMB và ΔAHS, ΔOMB và ΔAHS đồng dạng.

Vậy $\widehat{AHS} = \widehat{OMB}$.

Tương tự, ΔNDB và ΔASC đồng dạng nên $\widehat{SCN} = \widehat{NDB}$.

Suy ra, $\widehat{MBD} = \widehat{AHS} = \widehat{OMB}$ và $SC \perp BD$. Do đó, $SC \perp (MBD)$ và $AH // (MBD)$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh đường thẳng *d* vuông góc với mặt phẳng (P) ta chứng minh:

- *d* vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P).
- *d* song song với đường thẳng *a* mà *a* vuông góc với (P).

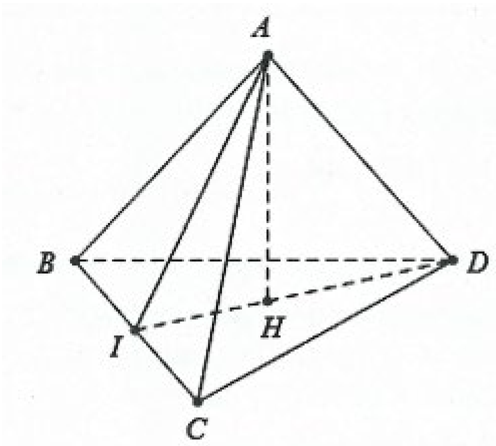
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện *ABCD* có hai mặt *ABC* và *BCD* là hai tam giác cân có chung đáy *BC*. Điểm *I* là trung điểm của cạnh *BC*.

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi *AH* là đường cao trong tam giác *ADI*. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$

Lời giải



a) Do các tam giác *ABC* và *BCD* là hai tam giác cân nên tại *A* và *D* ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao).

Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do *AH* là đường cao trong tam giác *ADI* nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

Do đó $AH \perp (BCD)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*, $SA \perp (ABCD)$. Gọi *M* và *N* lần lượt là hình chiếu của điểm *A* trên các đường thẳng *SB* và *SD*.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.

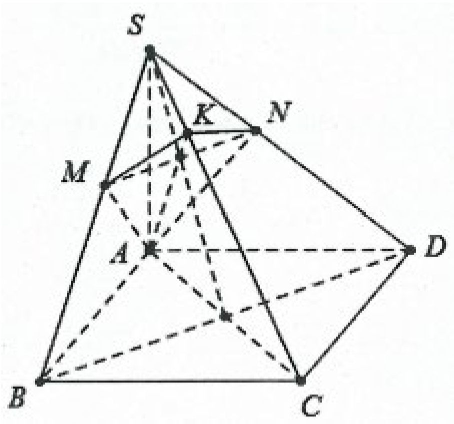
c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN // BD$.

d) Gọi *K* là giao điểm của *SC* với mặt phẳng (AMN). Chứng minh rằng tứ giác *AMKN* có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

a) Do $SA\perp (ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$.

Mặt khác *ABCD* là hình vuông nên $BC\perp AB$.



Khi đó $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD\perp (SAD)$.

b) Do $BC\perp (SAB)\Rightarrow BC\perp AM$.

Mặt khác $AM\perp SB\Rightarrow AM\perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN\perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM\perp (SBC) \\ AN\perp (SCD) \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} AM\perp SC \\ AN\perp SC \end{cases}\Rightarrow SC\perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông *SAB* và *SAD* bằng nhau có các đường cao tương ứng là *AM* và *AN* nên $CM=DN$.
Mặt khác tam giác *SBD* cân tại đỉnh *S* nên $MN\,//\,BD$.

d) Do *ABCD* là hình vuông nên $AC\perp BD$, mặt khác $SA\perp BD\Rightarrow BD\perp (SAC)$.

Do $MN\,//\,BD\Rightarrow MN\perp (SAC)\Rightarrow MN\perp AK$.

Ví dụ 3. Cho tứ diện *ABCD* có ba cạnh *AB, AC, AD* đôi một vuông góc.

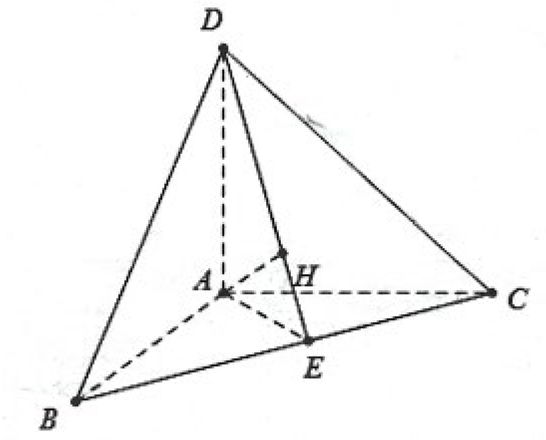
a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh *A* lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác *BCD*.

b) Chứng minh rằng $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác *BCD* có 3 góc nhọn.

Lời giải

a) Gọi *H* là hình chiếu vuông góc của điểm *A* trên mặt phẳng (BCD) thì $AH\perp (BCD)$.



Ta có: $\begin{cases} AD\perp AB \\ AD\perp AC \end{cases}\Rightarrow AD\perp (ABC)\Rightarrow AD\perp BC$.

Mặt khác $AH\perp BC\Rightarrow BC\perp (ADH)\Rightarrow BC\perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH\perp CD$

Do đó *H* là trực tâm của tam giác *BCD*.

b) Gọi $E=DH\cap BC$, do $BC\perp (ADH)\Rightarrow BC\perp AE$.

Xét ΔABC vuông tại *A* có đường cao *AE* ta có:

$\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AD^2}+\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}+\dfrac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB = x;\ AC = y$ và $AD = z$. Ta có: $\begin{cases} BC = \sqrt{x^2 + y^2} \\ BD = \sqrt{x^2 + z^2} \\ CD = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$

Khi đó $\cos B = \dfrac{BC^2 + BD^2 - CD^2}{2.BC.BD} = \dfrac{x^2}{BC.BD} > 0 \Rightarrow \widehat{CBD} < 90°$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \widehat{BDC} < 90° \\ \widehat{BCD} < 90° \end{cases} \Rightarrow$ tam giác *BCD* có 3 góc nhọn.

Ví dụ 4. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp (ABC)$, các tam giác *ABC* và *SBC* là các tam giác nhọn. Gọi *H* và *K* lần lượt là trực tâm của các tam giác *ABC* và *SBC*. Chứng minh rằng:

a) *AH, SK, BC* đồng quy.

b) $SC \perp (BHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

Lời giải

a) Giả sử $AH \perp BC$ tại *M*.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó *AH, SK, BC* đồng quy tại điểm *M*.

b) Do *H* là trực tâm tam giác *ABC* nên $BH \perp AC$

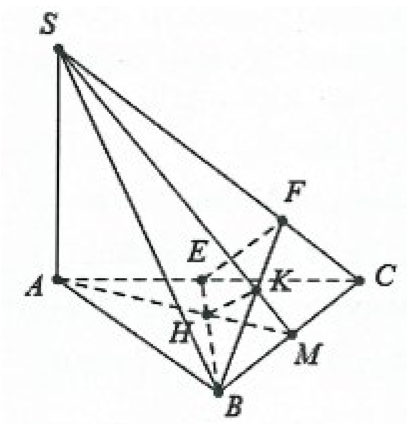
Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$, mặt khác

$BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SBC)$.



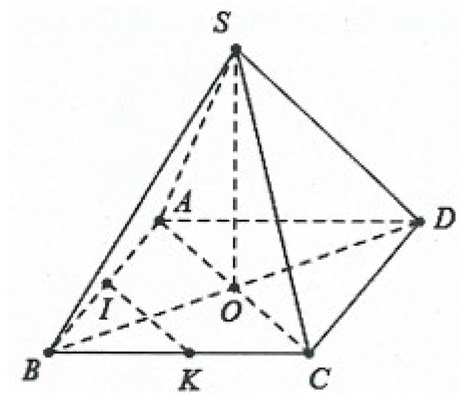
Ví dụ 5. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi *I, K* lần lượt là trung điểm của *BA* và *BC*. Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$.

Lời giải

a) Do $SA = AC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại *S* có trung tuyến *SO* đồng thời là đường cao suy ra $SO \perp AC$.



Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Do *ABCD* là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

Do vậy $AC \perp (SBD)$.

IK là đường trung bình trong tam giác *BAC* nên $IK \,//\, AC$ mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh *a*. Mặt bên *SAB* là tam giác đều, *SCD* là tam giác vuông cân đỉnh *S*. Gọi *I, J* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*.

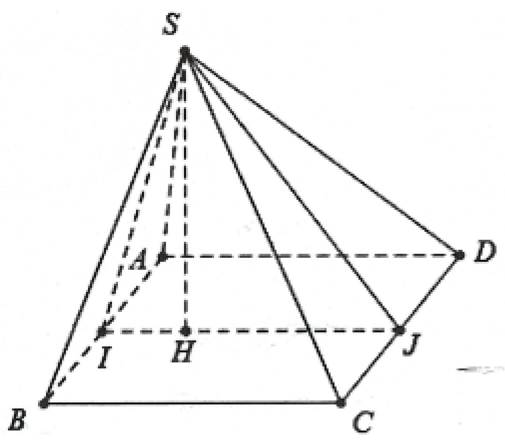
a) Tính các cạnh của tam giác *SIJ*, suy ra tam giác *SIJ* vuông.

b) Chứng minh rằng $SI \perp (SCD)$; $SJ \perp (SAB)$.

c) Gọi *H* là hình chiếu của *S* lên *IJ*, chứng minh rằng $SH \perp (ABCD)$.

Lời giải

a) Ta có: ΔSAB đều cạnh *a* nên $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



Tứ giác *IBCJ* là hình chữ nhật nên $IJ = BC = a$.

ΔSCD là tam giác vuông cân đỉnh *S* $\Rightarrow SJ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại *S*.

b) Do ΔSCD cân tại *S* nên $SJ \perp CD$

Do $AB \,//\, CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác cân tại *A*, điểm *I* và *H* lần lượt là trung điểm của *AB* và *BC*. Trên đoạn *CI* và *SA* lần lượt lấy hai điểm *M, N* sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$, chứng minh $MN \perp (ABC)$.

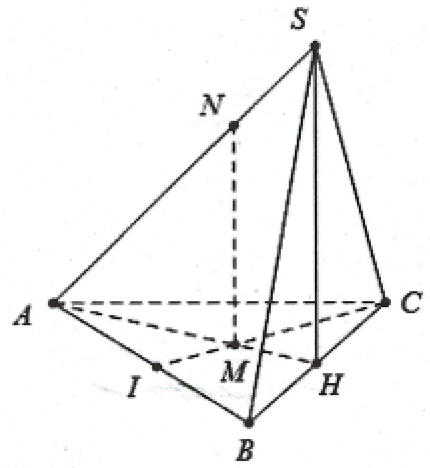
Lời giải

Do điểm *M* thuộc đường trung tuyến *CI* và $MC = 2MI$

$\Rightarrow$ *M* là trọng tâm tam giác *ABC* $\Rightarrow M = AH \cap CI$.

Ta có: $\dfrac{NA}{NS} = \dfrac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN // SH$.

Mặt khác $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.



Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc bằng cách chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia

1. Phương pháp giải:

■ Muốn chứng minh đường thẳng *a* vuông góc với đường thẳng *b*, ta đi tìm mặt phẳng (β) chứa đường thẳng *b* sao cho việc chứng minh $a \perp (\beta)$ dễ thực hiện.

■ Sử dụng định lý ba đường vuông góc.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện đều *ABCD*. Chứng minh các cặp cạnh đối diện của tứ diện này vuông góc với nhau từng đôi một.

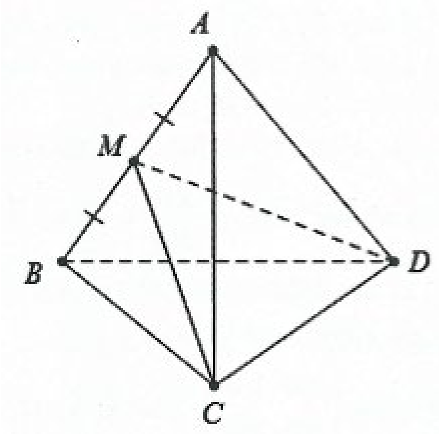
Lời giải

Gọi *M* là trung điểm của *AB*.

Tứ diện *ABCD* đều nên ΔABD và ΔABC là các tam giác đều suy ra $\begin{cases} DM \perp AB \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCD)$.

Do đó $AB \perp CD$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $BC \perp AD, AC \perp BD$.



Ví dụ 2. Hình chóp *S.ABCD* có cạnh *SA* vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và đáy *ABCD* là hình thang vuông tại *A* và *D* với $AD = CD = \dfrac{AB}{2}$.

a) Gọi *I* là trung điểm của đoạn *AB*, chứng minh $CI \perp AB$ và $DI \perp SC$.

b) Chứng minh các mặt bên của hình chóp *S.ABCD* là các tam giác vuông.

Lời giải

a) Đặt $AB = 2a \Rightarrow AD = CD = a$.

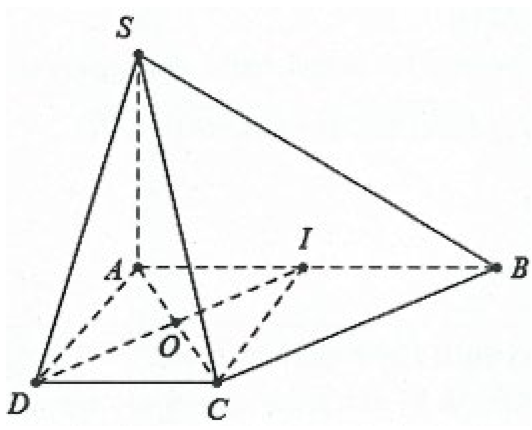
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Do $AB = 2CD \Rightarrow AI = AD = CD = CI = a$.

Khi đó *AICD* là hình vuông cạnh *a*.

Do $CI \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp DI \\ DI \perp SA \end{cases} \Rightarrow DI \perp (SAC) \Rightarrow DI \perp SC$.



b) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SAD, \Delta SAB$ vuông tại *S*.

Mặt khác $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$ nên ΔSCD vuông tại *D*.

Xét ΔACD có trung tuyến $CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại *C* $\Rightarrow BC \perp AC$.

Mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC \Rightarrow \Delta SCB$ vuông tại *C*.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh *a*. Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi *I* là trung điểm của *BC*. Chứng minh $AI \perp BC'$.

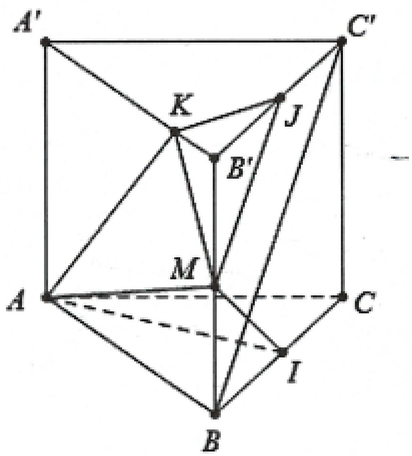
b) Gọi *M* là trung điểm của BB'. Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi *K* là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và *J* là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng: $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải

a) Do ΔABC là tam giác đều và *I* là trung điểm của *BC* nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.



b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác *MI* là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI \,//\, B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

c) Ta có: $\tan \widehat{KMB'} = \frac{KB'}{MB'} = \frac{1}{2}; \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{BM} = 2$

Suy ra $\tan \widehat{KMB'} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{KMB'} + \widehat{AMB} = 90°$.

Do đó $\widehat{AMK} = 90° \Rightarrow AM \perp MK$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \,//\, BC' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$.

Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$.

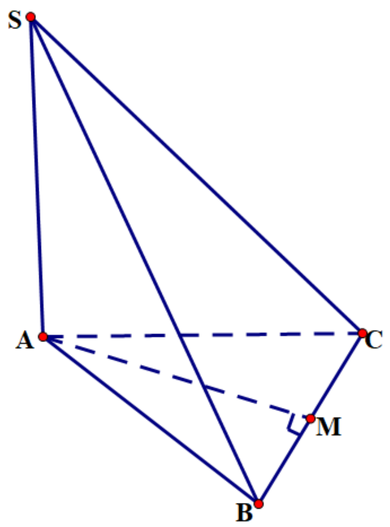
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.5. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có đáy là tam giác cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAM)$;

b) Tam giác SBC cân tại S.

Lời giải

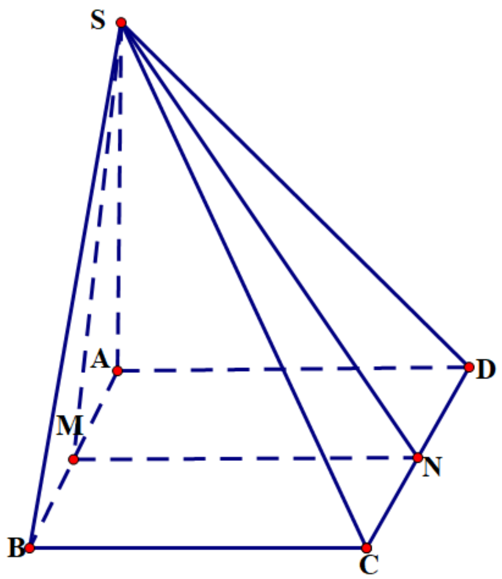


a) Ta có $SA \perp (ABC)$ và AM là đường trung bình trong tam giác đều ABC, nên $AM \perp BC$ và AM là đường cao của tam giác SBC. Khi đó, ta có $BC \perp (SAM)$ vì $BC \perp AM$.

b) Ta có $\widehat{SBC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{SAC}$. . Mặt khác, ta có $SA = SC$ vì S là đình cùa hình chóp $S \cdot ABC$ và AC là đường bờ của đáy ABC, vì ABC là tam giác cân tại A nên AC là đường trung trực của, suy ra $SC = SA$. Vậy SBC là tam giác cân tại S.

Bài 7.6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Lời giải



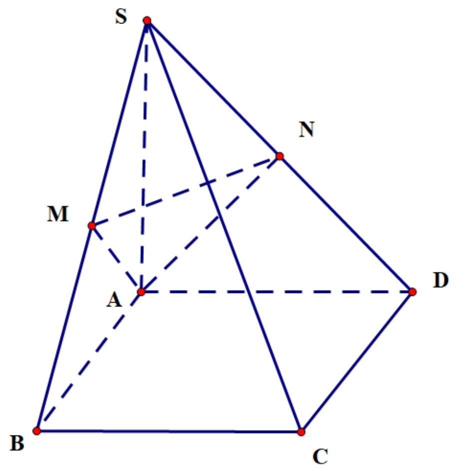
Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó, ta có $MN // AD$ và $MN // BC$ vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Do đó, SM và SN là hai đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, và do đó chúng cũng vuông góc với tất cả các đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó, bao gồm các cạnh AB, BC, CD và AD.

Vì $SM \perp AB$ và $SN \perp CD$, nên ΔSMB và ΔSND là hai tam giác vuông. Tương tự, ΔSMC và ΔSNA cũng là hai tam giác vuông. Do đó, các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ đều là các tam giác vuông.

Bài 7.7. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng: $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD), SC \perp (AMN)$.

Lời giải



$$\left.\begin{array}{r} +)BC \perp AB(\text{ hcn } ABCD) \\ BC \perp SA(SA \perp (ABCD)) \\ AB \cap SA = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB); AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$$

$$\left.\begin{array}{r} +)CD \perp AD(\text{ hcn } ABCD) \\ CD \perp SA(SA \perp (ABCD)) \\ AD \cap SA = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD); AN \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$\left.\begin{array}{r} +)AM \perp SB \\ AM \perp BC \\ SB \cap BC = \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SBC); SC \subset (SBC) \Rightarrow SC \perp AM$$

$$\left.\begin{array}{l} +)AN \perp SD \\ AN \perp CD \\ SD \cap CD = \{D\} \end{array}\right\} \Rightarrow AN \perp (SCD); SC \subset (SCD) \Rightarrow SC \perp AN$$

$$\left.\begin{array}{r} +)AM \perp SC \\ AN \perp SC \\ AM \cap AN = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (AMN)$$

Bài 7.8. Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

Lời giải

Khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng, đường thẳng chứa dây dọi vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng.

Bài 7.9. Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột 1 m đến một điểm trên cột, cách chân cột 1 m được kết quả là $1,5 \text{ m}$ (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Hình 7.27

Nếu phép đo của Hùng là chính xác ta có: $1^2+1^2 \neq 1,5^2$

Do đó theo định lý Pytago thì cột có không vuông góc với sân.
Do đó cột không có phương thẳng đứng.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α).

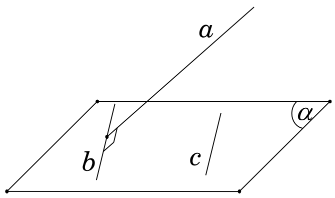
B. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α).

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.

D. Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \,//\, (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề **C** sai vì thiếu điều kiện "cắt nhau" của hai đường thẳng nằm trong (α). Ví dụ: đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b và c nằm trong (α) nhưng b và c song song với nhau thì khi đó a chưa chắc vuông góc với (α).

Câu 2: Trong không gian cho đường thẳng Δ không nằm trong mặt phẳng (P), đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mp (P) nếu:

A. vuông góc với hai đường thẳng phân biệt nằm trong mp (P).

B. vuông góc với đường thẳng a mà a song song với mp (P).

C. vuông góc với đường thẳng a nằm trong mp (P).

D. vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mp (P).

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng (P).(Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng).

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

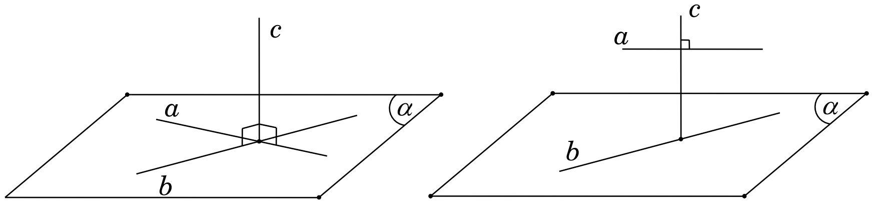
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

Lời giải

Chọn B



Mệnh đề ở câu B sai vì: Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có thể cắt nhau, chéo nhau.

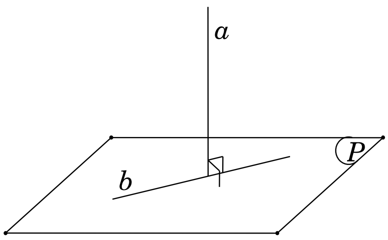
Câu 4: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $a // b$. **B.** Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

C. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$. **D.** Nếu $a \perp b$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D



`Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).

Câu 5: Cho hai đường thẳng a, b và mặt phẳng (P). Chỉ ra mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

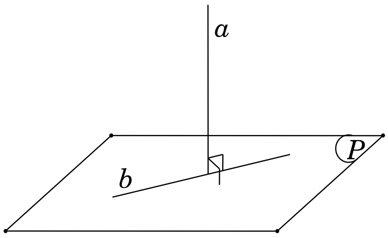
A. Nếu $a \perp (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$. **B.** Nếu $a // (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

C. Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b // (P)$. **D.** Nếu $a // (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

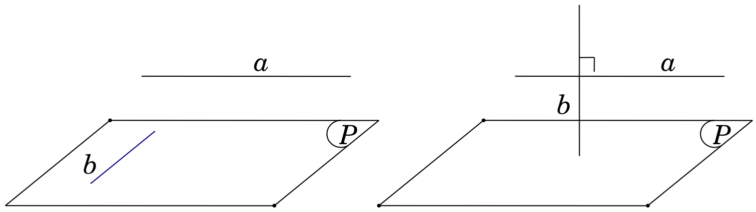
Lời giải

Chọn B

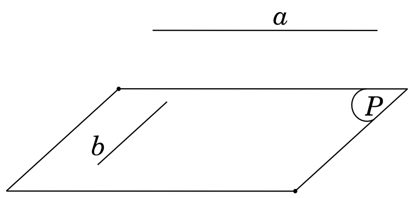
Mệnh đề A sai vì b có thể nằm trong (P).



Mệnh đề C sai vì b có thể cắt (P) hoặc b nằm trong (P).



Mệnh đề D sai vì b có thể nằm trong (P).



Câu 6: Cho $a,\ b,\ c$ là các đường thẳng trong không gian. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Nếu $a\perp b$ và $b\perp c$ thì $a\,//\,c$.

B. Nếu a vuông góc với mặt phẳng (α) và $b\,//\,(\alpha)$ thì $a\perp b$.

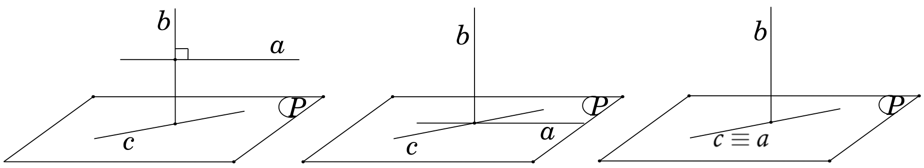
C. Nếu $a\,//\,b$ và $b\perp c$ thì $c\perp a$.

D. Nếu $a\perp b$, $b\perp c$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng (a,c).

Lời giải

Chọn D

Nếu $a\perp b$ và $b\perp c$ thì $a\,//\,c$ hoặc a cắt c hoặc a trùng c hoặc a chéo c.



Câu 7: Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Khi đó có một và chỉ một mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

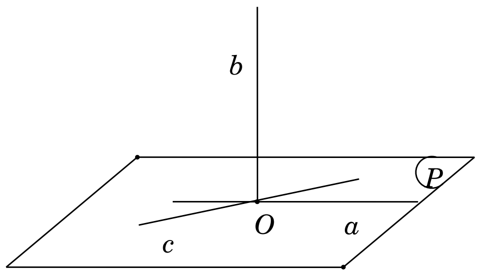
B. Qua một điểm O cho trước có một mặt phẳng duy nhất vuông góc với một đường thẳng Δ cho trước.

C. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Qua một điểm O cho trước có một và chỉ một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C



Mệnh đề C sai vì qua một điểm O cho trước có **vô số** đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

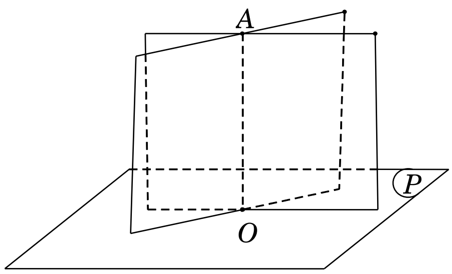
B. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn D



Qua một điểm cho trước có thể kẻ được vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước.

Câu 9: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

C. Với mỗi điểm $A \in (\alpha)$ và mỗi điểm $B \in (\beta)$ thì ta có đường thẳng AB vuông góc với giao tuyến d của (α) và (β).

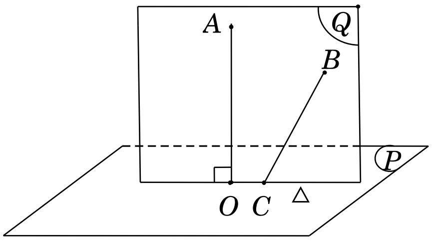
D. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Lời giải

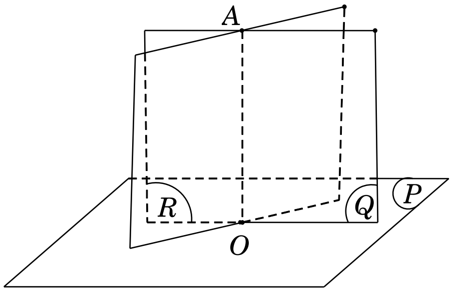
Chọn D

Mệnh đề A sai vì nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này vuông góc với giao tuyến sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Mệnh đề B sai vì còn trường hợp hai mặt phẳng cắt nhau.



Mệnh đề C sai vì đường thẳng AB có thể không vuông góc với giao tuyến.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và hình chiếu của nó trên mặt phẳng đã cho.

B. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng góc giữa đường thẳng đó và đường thẳng b với b vuông góc với (P).

C. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) thì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q).

D. Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng góc giữa đường thẳng b và mặt phẳng (P) thì a song song với b.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề B sai vì hai góc này phụ nhau.

Mệnh đề C sai vì (P) có thể trùng (Q).

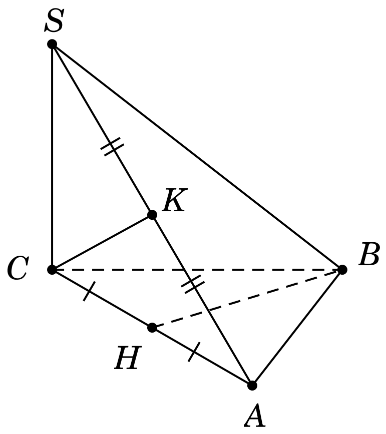
Mệnh đề D sai vì a có thể trùng b.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $CH \perp AK$. **B.** $CH \perp SB$. **C.** $CH \perp SA$. **D.** $AK \perp SB$.

Lời giải

Chọn D



Vì H là trung điểm của AB, tam giác ABC cân suy ra $CH \perp AB$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$ mà $CH \perp AB$ suy ra $CH \perp (SAB)$.

Mặt khác $AK \subset (SAB) \longrightarrow CH$ vuông góc với các đường thẳng SA, SB, AK.

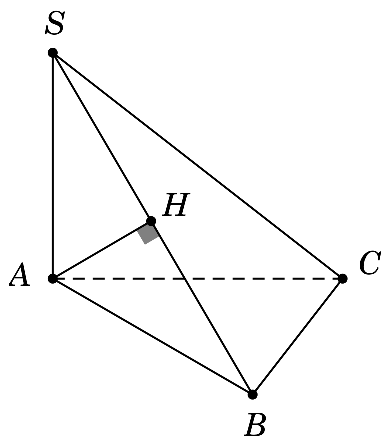
Và $AK \perp SB$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi tam giác SAB cân tại S.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



Theo bài ra, ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B, có $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

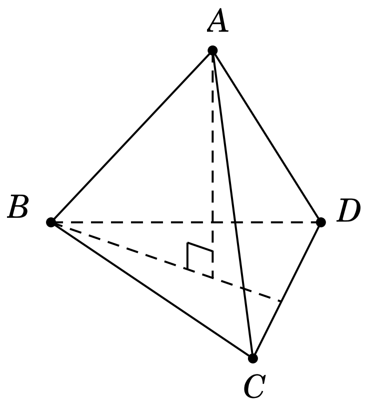
Nếu $AH \perp AC$ mà $SA \perp AC$ suy ra $AC \perp (SAH) \Rightarrow AC \perp AB$ (vô lý).

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $CD \perp BD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB = CD$. **D.** $AB \perp CD$.

Lời giải

Chọn D



Vì AH vuông góc với $mp\,(BCD)$ suy ra $AH \perp CD.$ (1)

Mà H là trực tâm của tam giác $BCD \Rightarrow BH \perp CD.$ (2)

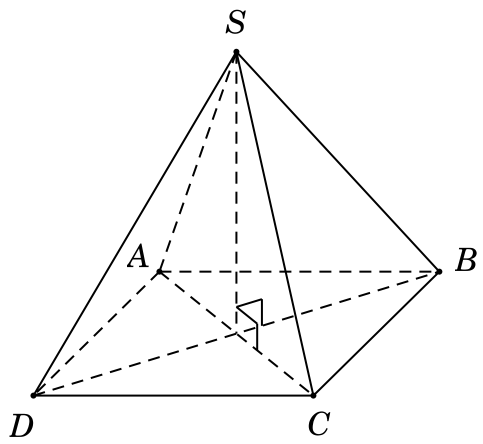
Từ $(1),(2)$ suy ra $\begin{cases} CD \perp AH \\ CD \perp BH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB.$

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O.$ Biết rằng $SA = SC,$ $SB = SD.$ Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $AB \perp (SAC).$ **B.** $CD \perp AC.$ **C.** $SO \perp (ABCD).$ **D.** $CD \perp (SBD).$

Lời giải

Chọn C



Vì $SA = SC$ $\Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S mà O là trung điểm $AC \Rightarrow SO \perp AC.$

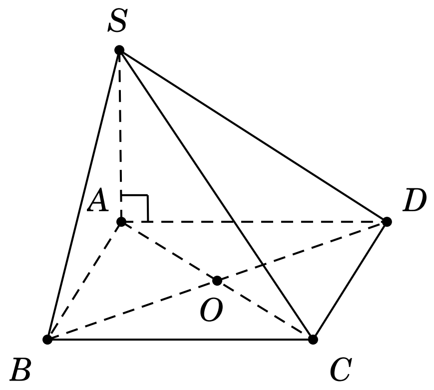
Tương tự, ta cũng có $SO \perp BD$ mà $AC \cap BD = O \subset (ABCD) \Rightarrow SO \perp (ABCD).$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm $O.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $SA \perp BD.$ **B.** $SC \perp BD.$ **C.** $SO \perp BD.$ **D.** $AD \perp SC.$

Lời giải

Chọn D



Vì SA vuông góc với $mp\left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp BD.$

Mà $ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow AC \perp BD$ nên suy ra $BD \perp (SAC)$.

Mặt khác $SO \subset (SAC)$ và $SC \subset (SAC)$ suy ra $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp SC \end{cases}$.

Và $AD,\ SC$ là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm $O.$ Đường thẳng SA cuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm của $SC.$ Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $IO \perp (ABCD)$.

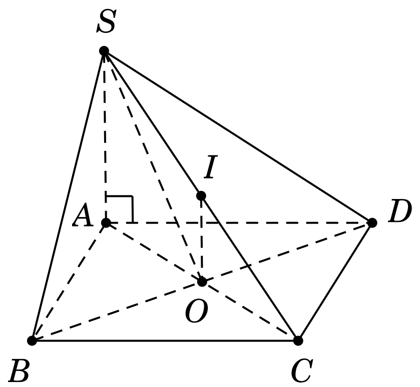
B. $BC \perp SB.$

C. Tam giác SCD vuông ở $D.$

D. (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD.$

Lời giải

Chọn D



Vì $O,\ I$ lần lượt là trung điểm của $AC,\ SC$ suy ra OI là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow$ $OI\ //\ SA$ mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp AB$ mà $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp SB.$

Tương tự, ta có được $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \quad \left(SA \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD.$

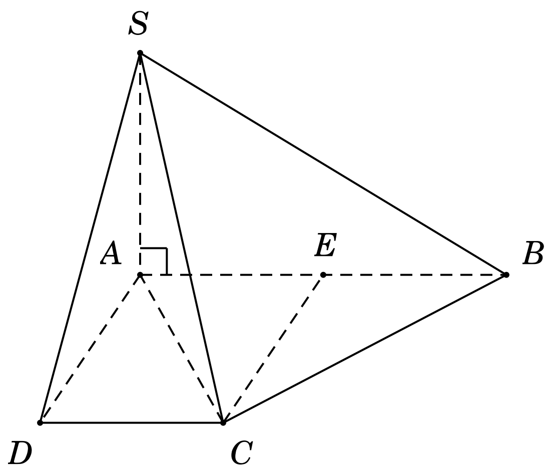
Nếu (SAC) là mặt phẳng trung trực của $BD \longrightarrow BD \perp AC$: điều này không thể xảy ra vì $ABCD$ là hình chữ nhật.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, có $AD=CD=a$, $AB=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. $CE\perp(SAB)$.
B. $CB\perp(SAC)$.
C. Tam giác SDC vuông tại D.
D. $CE\perp(SDC)$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thết suy ra $ADCE$ là hình vuông $\Rightarrow\begin{cases}CE\perp AB\\CE=AD=a\end{cases}$.

Ta có $\begin{cases}CE\perp AB\\CE\perp SA\ (\text{do } SA\perp ABCD)\end{cases}\Rightarrow CE\perp(SAB)$. Do đó A đúng.

Vì $CE=AD=a\Rightarrow CE=\frac{1}{2}AB\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại $C\Rightarrow CB\perp AB$. Kết hợp với $CB\perp SA$ (do $SA\perp(ABCD)$) nên suy ra $CB\perp(SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\ (\text{do } SA\perp ABCD)\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp SD.$ Do đó C đúng.

Dùng phương pháp loại trừ, suy ra D là đáp án sai.

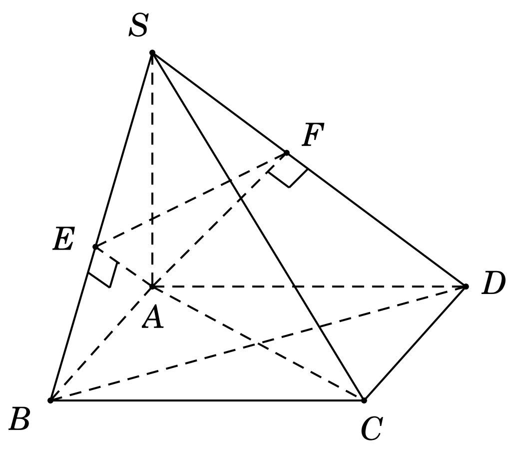
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác $SAD.$ Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $SC\perp(AFB)$.
B. $SC\perp(AEC)$.
C. $SC\perp(AED)$.
D. $SC\perp(AEF)$.

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

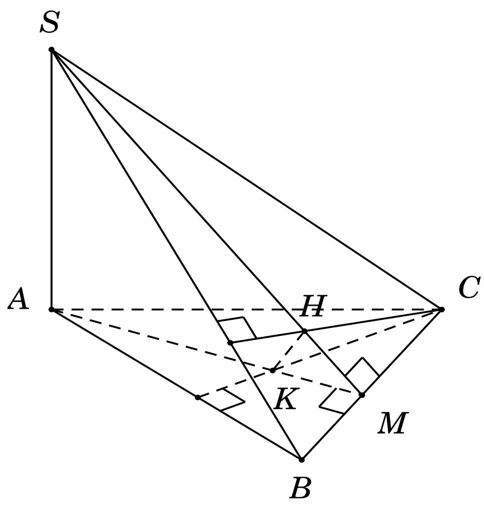
Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 19: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $SB \perp (CHK)$. **C.** $HK \perp (SBC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



● Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$. Do đó A đúng.

● Ta có $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$.

Mặt khác có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$. Do đó B đúng.

● Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$. Do đó C đúng.

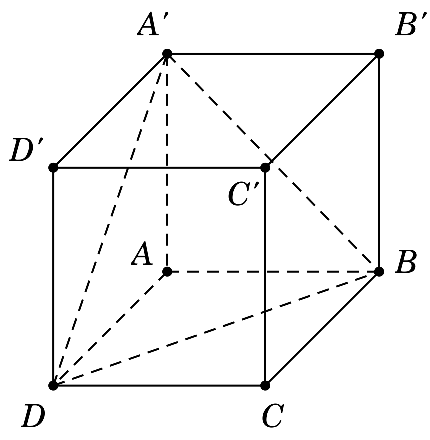
Dùng phương pháp lại trừ, suy ra D sai.

Câu 20: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AA'D'A$ là hình vuông suy ra $AD' \perp A'D$. (1)

Và $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương suy ra $AB \perp A'D$. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $A'D \perp (ABC'D') \Rightarrow A'D \perp AC'$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BD$ mà $AA' \perp BD$ $(AA' \perp (ABCD))$

$\Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC'$. Kết hợp với $A'D \perp AC'$ suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

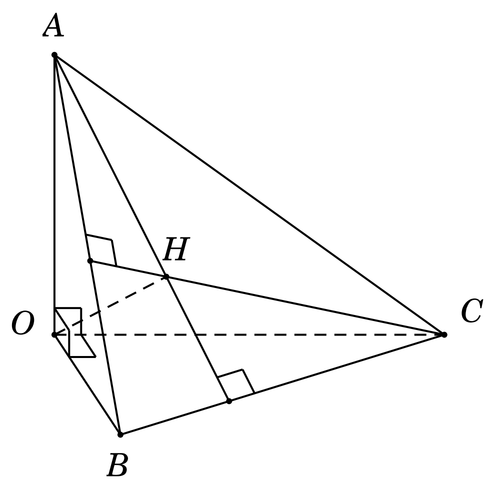
Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $OA \perp BC$. **B.** $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

C. H là trực tâm ΔABC. **D.** $3OH^2 = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Lời giải

Chọn D



- $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$. Do đó A đúng. (1)
- Gọi $I = AH \cap BC$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Theo giả thiết ta có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp OI$.

Tam giác vuông BOC, ta có $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

Tam giác vuông AOI, ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$. Do đó B đúng.

- Từ chứng minh trên $BC \perp (AOI) \Rightarrow BC \perp AI$. (3)

Gọi $J = BH \cap AC$. Chứng mình tương tự ta có $AC \perp BJ$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra H là trực tâm ΔABC. Do đó C đúng.

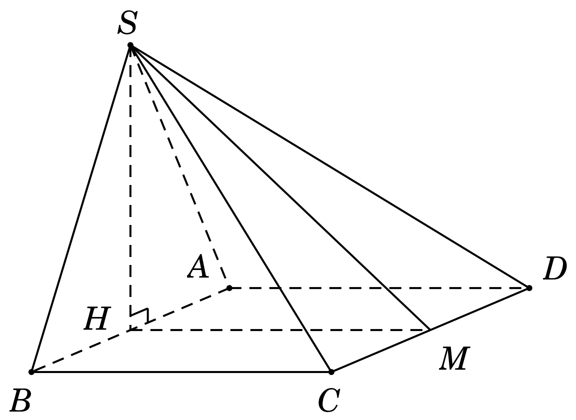
Vậy D là đáp án sai.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = 2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua S vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $S = a^2\sqrt{3}$. **D.** $S = \frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB$. Suy ra:

- $SH \subset (\alpha)$.
- $SH \perp (ABCD)$ (do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB).

Kẻ $HM \perp AB$ $(M \in CD) \Rightarrow HM \subset (\alpha)$.

Do đó thiết diện là tam giác SHM vuông tại H.

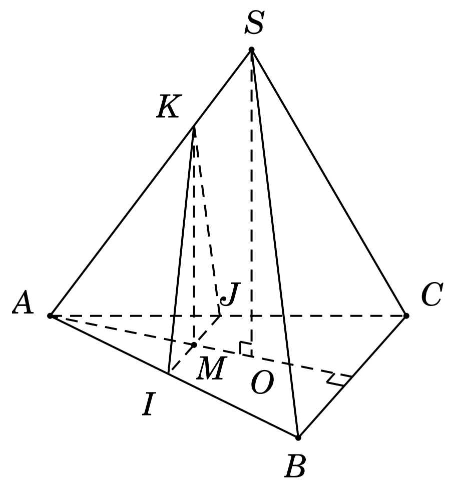
Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = BC = 2a$. Vậy $S_{\Delta SHM} = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O; $SO = 2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn AO $(M \neq A; M \neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AO. Đặt $AM = x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S = 2a^2$. **B.** $S = 2x^2$. **C.** $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$. **D.** $S = 2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn B



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO \perp AA'$ mà $(\alpha) \perp AA'$ suy ra $SO \,//\, (\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC \,//\, (\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ \,//\, BC$ với $I \in AB,\ J \in AC$; kẻ $MK \,//\, SO$ với $K \in SA.$

Khi đó thiết diện là tam giác KIJ.

Diện tích tam giác IJK là $S_{\Delta IJK} = \dfrac{1}{2} IJ.MK$.

Trong tam giác ABC, ta có $\dfrac{IJ}{BC} = \dfrac{AM}{AA'}$ suy ra $IJ = \dfrac{AM.BC}{AA'} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tương tự trong tam giác SAO, ta có $\dfrac{MK}{SO} = \dfrac{AM}{AO}$ suy ra $MK = \dfrac{AM.SO}{AO} = 2x\sqrt{3}$.

Vậy $S_{\Delta IJK} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x\sqrt{3}}{3}.2x\sqrt{3} = 2x^2$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

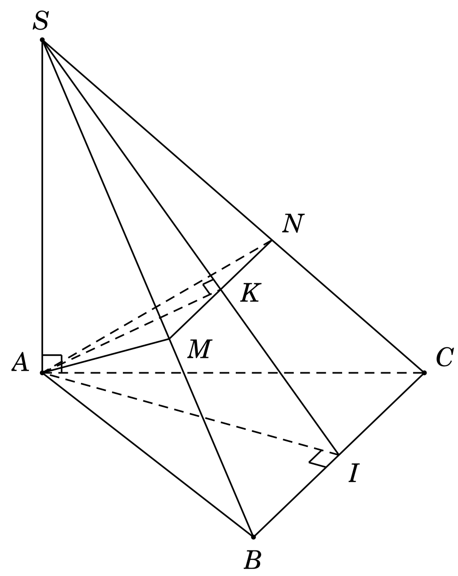
A. $S_{\Delta AMN} = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$. **B.** $S_{\Delta AMN} = \dfrac{4a^2\sqrt{21}}{49}$.

C. $S_{\Delta AMN} = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{7}$. **D.** $S_{\Delta AMN} = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi I là trung điểm $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Kẻ $AK \perp SI\ \ (K \in SI)$.

Từ K kẻ đường thẳng song song với BC cắt $SB,\ SC$ lần lượt tại $M,\ N$.

Khi đó thiết diện là tam giác AMN.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK \Rightarrow MN \perp AK.$

Tam giác vuông SAI, có $AK = \dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Tam giác SBC, có $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{SK}{SI} = \dfrac{SA^2}{SI^2} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AI^2} = \dfrac{4}{7} \Rightarrow MN = \dfrac{4a}{7}.$

Vậy $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2} AK.MN = \dfrac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

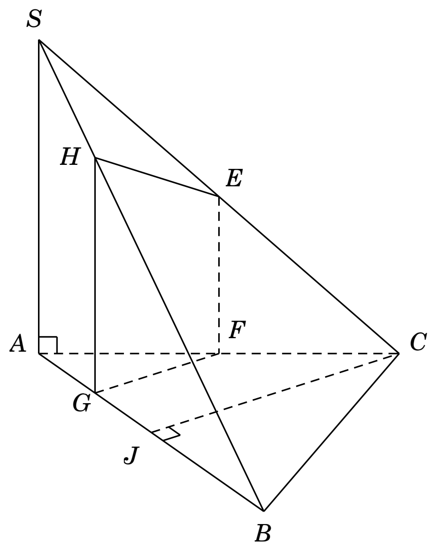
Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua trung điểm E của SC và vuông góc với AB. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{16}$. **B.** $S_{EFGH} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{32}$. **C.** $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{32}$. **D.** $S_{EFGH} = \dfrac{5a^2\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Chọn C

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi F là trung điểm AC, suy ra $EF \,//\, SA$.

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$ nên $EF \perp AB$. (1)

Gọi J, G lần lượt là trung điểm AB, AG.

Suy ra $CJ \perp AB$ và $FG \,//\, CJ$ nên $FG \perp AB$. (2)

Trong ΔSAB kẻ $GH \,//\, SA \quad (H \in SB)$, suy ra $GH \perp AB$. (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra thiết diện cần tìm là hình thang vuông $EFGH$.

Do đó $S_{EFGH} = \frac{1}{2}(EF + GH).FG$.

Ta có $EF = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$; $FG = \frac{1}{2}CJ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$; $\frac{GH}{SA} = \frac{BG}{BA} \Rightarrow GH = BG = \frac{3a}{4}$.

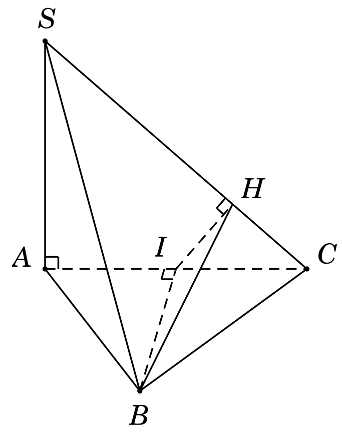
Vậy $S_{EFGH} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right).\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{10}$. **B.** $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **C.** $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **D.** $S_{\Delta BIH} = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của AC, suy ra $BI \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp SC$. (1)

Kẻ $IH \perp SC$ $(H \in SC)$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (BIH)$.

Vậy thiết diện cần tìm là tam giác IBH.

Do $BI \perp (SAC) \Rightarrow BI \perp IH$ nên ΔIBH vuông tại I.

Ta có BI đường cao của tam giác đều cạnh a nên $BI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác CHI đồng dạng tam giác CAS, suy ra

$\dfrac{IH}{SA} = \dfrac{CI}{CS} \Rightarrow IH = \dfrac{CI.SA}{CS} = \dfrac{CI.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

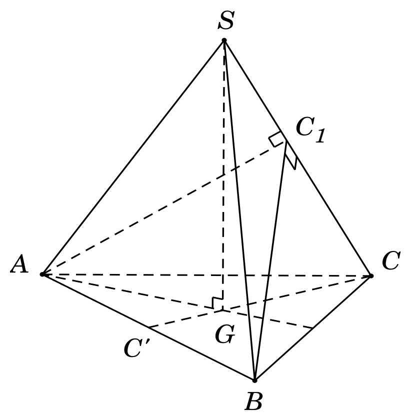
Vậy $S_{\Delta BIH} = \dfrac{1}{2} BI.IH = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Câu 27: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với SC. Tìm hệ thức giữa a và b để (α) cắt SC tại điểm C_1 nằm giữa S và C.

A. $a > b\sqrt{2}$. **B.** $a > b\sqrt{3}$. **C.** $a < b\sqrt{2}$. **D.** $a < b\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

Gọi C' là trung điểm AB. Suy ra C, C', G thẳng hàng.

Ta có $\begin{cases} AB \perp CC' \\ SG \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SCC') \Rightarrow AB \perp SC$. (1)

Trong tam giác SAC, kẻ $AC_1 \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (ABC_1)$.

Suy ra thiết diện cần tìm là tam giác ABC_1 thỏa mãn đi qua A và vuông góc với SC.

Tam giác SAC cân tại S nên để C_1 nằm giữa S và C khi và chỉ khi $\widehat{ASC} < 90^0$.

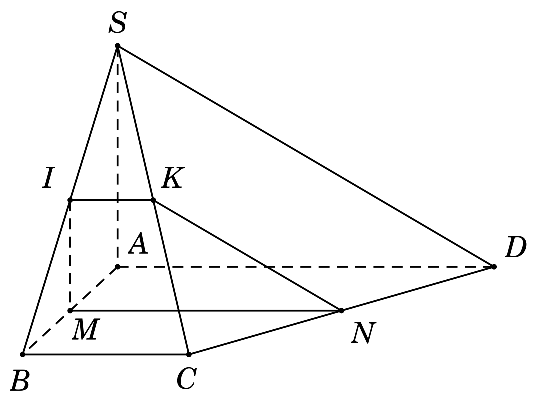
Suy ra $\cos\widehat{ASC} > 0 \Leftrightarrow SA^2 + SC^2 - AC^2 > 0 \Leftrightarrow 2b^2 - a^2 > 0 \to a < b\sqrt{2}.$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, $BC = 6$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của (P) và hình chóp có diện tích bằng:

A. 10. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn C



Do $(P) \perp AB \Rightarrow (P) // SA.$

Gọi I là trung điểm của $SB \Rightarrow MI // SA \Rightarrow MI \subset (P).$

Gọi N là trung điểm của $CD \Rightarrow MN \perp AB \Rightarrow MN \subset (P).$

Gọi K là trung điểm của $SC \Rightarrow IK // BC$, mà $MN // BC \Rightarrow MN // IK \Rightarrow IK \subset (P).$

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp là hình thang $MNKI$ vuông tại M.

Ta có:

MI là đường trung bình của tam giác SAB $\Rightarrow MI = \frac{1}{2}SA = 3.$

IK là đường trung bình của tam giác SBC $\Rightarrow IK = \frac{1}{2}BC = 3.$

MN là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 7.$

Vậy $S_{MNKI} = \frac{IK + MN}{2}.MI = 15.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 29: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tâm O, đường cao AA'; $SO=2a$. Gọi M là điểm thuộc đoạn OA' $(M\neq A';M\neq O)$. Mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc với AA'. Đặt $AM=x$. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp $S.ABC$.

A. $S_{IJEF}=-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$.

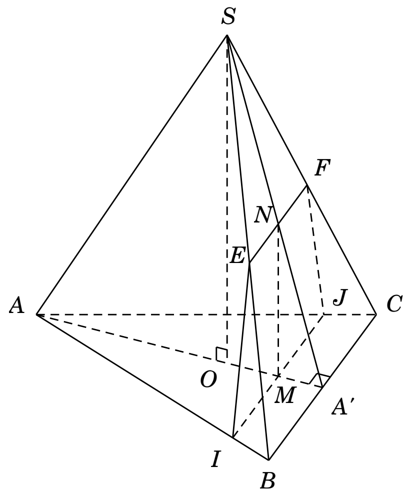
B. $S_{IJEF}=2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$.

C. $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)^2$.

D. $S=2(a-x)^2$.

Lời giải

Chọn A



Vì $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABC)$ (O là tâm của tam giác ABC).

Do đó $SO\perp AA'$ mà $(\alpha)\perp AA'$ suy ra $SO\,//\,(\alpha)$.

Tương tự ta cũng có $BC\,//\,(\alpha)$.

Qua M kẻ $IJ\,//\,BC$ với $I\in AB,\ J\in AC$; kẻ $MN\,//\,SO$ với $N\in SA'$.

Qua N kẻ $EF\,//\,BC$ với $E\in SB,\ F\in SC$.

Khi đó thiết diện là hình thang $IJFE$.

Diện tích hình thang $S_{IJEF}=\dfrac{1}{2}(IJ+EF)MN$.

Tam giác ABC, có $\dfrac{IJ}{BC}=\dfrac{AM}{AA'}\Rightarrow IJ=\dfrac{AM.BC}{AA'}=\dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SBC, có $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{SN}{SA'}=\dfrac{OM}{OA'}\Rightarrow EF=\dfrac{OM.BC}{OA'}=2\left(x\sqrt{3}-a\right)$.

Tam giác SOA', có $\dfrac{MN}{SO}=\dfrac{MA'}{OA'}\Rightarrow MN=\dfrac{SO.MA'}{OA'}=2\left(3a-2x\sqrt{3}\right)$.

Vậy $S_{IJEF}=\dfrac{2}{3}\left(4x\sqrt{3}-3a\right)\left(3a-2x\sqrt{3}\right)=-2\left(8x^2-6\sqrt{3}ax+3a^2\right)$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với SC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

A. $S_{AMIN}=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{7}$.

B. $S_{AMIN}=\dfrac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

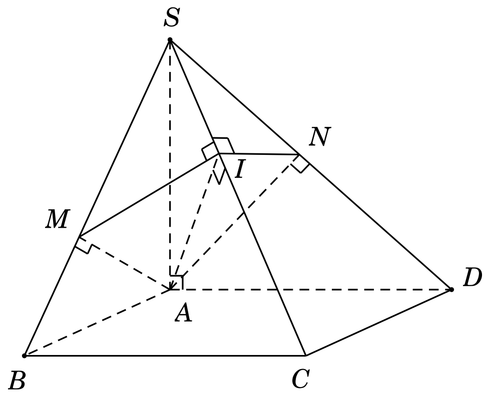
C. $S_{AMIN}=\dfrac{6a^2\sqrt{6}}{35}$.

D. $S_{AMIN}=\dfrac{a^2\sqrt{6}}{5}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác SAC, kẻ $AI \perp SC$ $(I \in SC)$.

Trong mp(SBC), dựng đường thẳng đi qua I vuông góc với SC cắt SB tại M.

Trong mp(SCD), dựng đường thẳng qua I vuông góc với SC cắt SD tại N.

Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mp (α) là tứ giác $AMIN$.

Ta có $SC \perp (\alpha) \Rightarrow SC \perp AM$. (1)

Lại có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp MI$.

Chứng minh tương tự, ta được $AN \perp NI$.

Do đó $S_{AMIN} = S_{\Delta AMI} + S_{\Delta ANI} = \frac{1}{2}AM.MI + \frac{1}{2}AN.NI$.

Vì AM, AI, AN là các đường cao của các tam giác vuông SAB, SAC, SAD nên

$AM = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$; $AI = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = a\sqrt{2}$; $AN = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Suy ra $MI = \sqrt{AI^2 - AM^2} = \frac{a\sqrt{30}}{5}$ và $NI = \sqrt{AI^2 - AN^2} = \frac{a\sqrt{14}}{7}$.

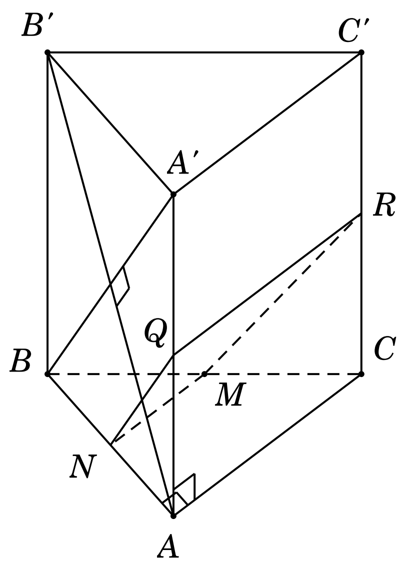
Vậy $S_{AMIN} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{a\sqrt{30}}{5} + \frac{2a\sqrt{21}}{7}.\frac{a\sqrt{14}}{7}\right) = \frac{12a^2\sqrt{6}}{35}$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a\sqrt{2}$; $AA' = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua M là trung điểm của BC và vuông góc với AB'. Thiết diện tạo bởi (α) với hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

A. Hình thang cân.
B. Hình thang vuông.
C. Tam giác.
D. Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} MN \perp AB \\ MN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (ABB'A') \Rightarrow MN \perp AB' \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Từ giả thiết suy ra $AB = a = AA' \Rightarrow ABB'A'$ là hình vuông $\Rightarrow BA' \perp AB'$.

Trong mp $(ABB'A')$ kẻ $NQ \,//\, BA'$ với $Q \in AA'$.

Trong mp $(ACC'A')$ kẻ $QR \,//\, AC$ với $R \in CC'$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNQR$ vuông (do MN và QR cùng song song với AC và $MN \perp NQ$).

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

BÀI 24: PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

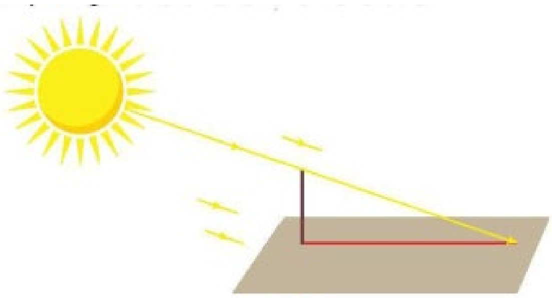
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

HĐ1. Trên sân phẳng có một cây cột thẳng vuông góc với mặt sân.

a) Dưới ánh sáng mặt trời, bóng của cây cột trên sân có thể được nhìn như là hình chiếu của cây cột qua phép chiếu song song nào không?

b) Khi tia sáng mặt trời vuông góc với mặt sân, liệu ta có thể quan sát được bóng của cây cột trên sân hay không?



Hình 7.33

Lời giải

a) Bóng của cây cột trên sân phẳng có thể được nhìn như là hình chiếu của cây cột qua phép chiếu vuông góc với mặt sân. Điều này có nghĩa là nếu ta kéo một tia sáng từ đỉnh cây cột theo hướng vuông góc với mặt sân, thì bóng của cây cột sẽ xuất hiện trên mặt sân tại điểm mà tia sáng đó chạm vào mặt sân.

b) Khi tia sáng mặt trời vuông góc với mặt sân, bóng của cây cột sẽ không xuất hiện trên mặt sân vì không có tia sáng nào có thể chiếu trực tiếp lên bề mặt sân để tạo ra bóng của cây cột. Tuy nhiên, nếu có các nguồn ánh sáng khác chiếu lên sân, chẳng hạn như đèn chiếu sáng ban đêm, thì bóng của cây cột sẽ xuất hiện trên mặt sân như mô tả ở câu a.

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Chú ý

- Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P). Hình chiếu vuông góc H' của hình H trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của H trên mặt phẳng (P).

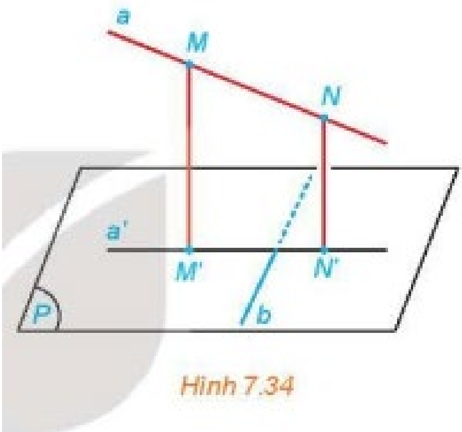
? a) Nếu A là một điểm không thuộc mặt phẳng (P) và A' là hình chiếu của A trên (P) thì đường thẳng AA' có quan hệ gì với mặt phẳng (P)?

b) Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì hình chiếu của a trên (P) là gì?

HĐ2. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Xét b là một đường thẳng nằm trong (P). Trên a, lấy hai điểm M,N tuỳ ý. Gọi M',N' tương ứng là hình chiếu của M,N trên mặt phẳng (P)

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

(H. 7.34).



Hình 7.34

a) Hình chiếu của a trên mặt phẳng (P) là đường thẳng nào?

b) Nếu b vuông góc với MN' thì b có vuông góc với a hay không?

c) Nếu b vuông góc với a thì b có vuông góc với MN' hay không?

Lời giải

a) Hình chiếu của đường thẳng a trên mặt phẳng (P) là một đường thẳng cắt (P) tạo thành một góc bằng với góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P). Điều này có nghĩa là ta có thể lấy hai điểm P và Q bất kỳ trên đường thẳng a, rồi vẽ các đường thẳng PM', QN' lần lượt là hình chiếu của P, Q trên (P). Đường thẳng PQ sẽ là hình chiếu của a trên (P).

b) Nếu $b \perp M'N'$, thì b không nhất thiết phải vuông góc với a. Tuy nhiên, nếu ta vẽ đường thẳng PQ như đã mô tả ở câu a), thì $b \perp PQ$.

c) Nếu $b \perp a$, thì b không nhất thiết phải vuông góc với $M'N$. Tuy nhiên, ta có thể chứng minh rằng $b // M'N$ bằng cách sử dụng tính chất của hình chiếu. Nếu $b \perp a$, thì b sẽ vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng (P) mà song song với a. Do đó, ta có thể vẽ đường thẳng AB trong (P) song song với a, rồi vẽ đường thẳng $A'C \perp AB$ tại C. Ta có $M'C \; // \; AB$, nên theo tính chất của hình chiếu, ta có $M'N' \; // \; AC$. Vì vậy, nếu $b \perp a$ thì b sẽ cắt $M'N'$ tại một điểm A nằm trên AC, và do đó $b \; // \; M'N'$.

Định lí ba đường vuông góc:

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).

Định lí ba đường vuông góc cho phép chuyển việc kiểm tra tính vuông góc giữa a và b (có thể chéo nhau) sang kiểm tra tính vuông góc giữa b và a' (cùng thuộc mặt phẳng (P)).

Ví dụ 1. Trên một sân phẳng nằm ngang, tại các điểm A, B, C, D, người ta dựng các cột thẳng đứng AM, BN, CP, DQ và nối các sợi dây thẳng giữa M và P, N. và Q như Hình 7.35 .

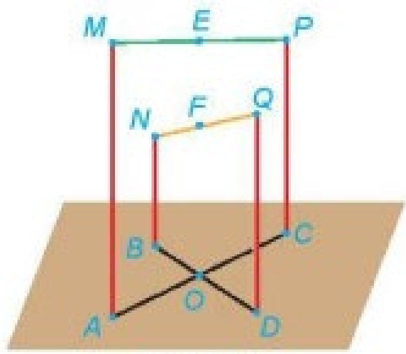
a) Hãy chỉ ra hình chiếu của các dây MP và NQ trên sân.

b) Chứng minh rằng nếu $BD \perp AC$ thì $BD \perp MP$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

c) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các trung điểm E,F tương ứng của các đoạn thẳng MP và có cùng hình chiếu trên sân.

Lời giải



Hình 7.35

a) Do các cột có phương thẳng đứng và sân thuộc mặt phẳng nằm ngang nên các cột vuông góc với sân. Vậy A,B,C,D tương ứng là hình chiếu của M,N,P,Q trên sân. Do đó AC,BD tương ứng là hình chiếu của MP,NQ trên sân.

b) Nếu $BD \perp AC$, mà AC là hình chiếu của MP trên sân và BD thuộc sân nên theo định lí ba đường vuông góc ta có $BD \perp MP$.

c) Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các đoạn thẳng AC,BD có chung trung điểm O. Do EO là đường trung bình của hình thang $ACPM$ nên $EO//MA$. Mặt khác, MA vuông góc với sân nên EO cũng vuông góc với sân. Vậy O là hình chiếu của E trên sân. Tương tự, O cũng là hình chiếu của F trên sân. Vậy E và F có cùng hình chiếu trên sân.

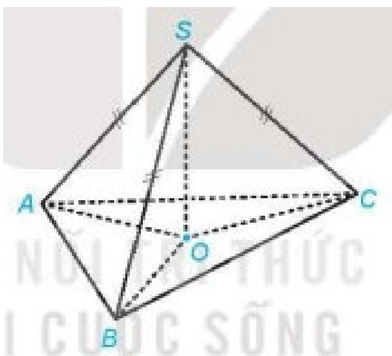
Luyện tập 1. Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) (H.7.36).

a) Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC).

c) Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.

d) Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC).



Hình 7.36

Lời giải

a) Ta có $SA = SB = SC$ (điều kiện của đề bài). Khi đó, OA, OB, OC đều là hình chiếu của S lên đường thẳng (ABC) theo các đỉnh tương ứng A, B, C. Vì $SA = SB = SC$, ta có thể suy ra rằng OA, OB, OC đều nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC, CA, AB tương ứng.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Khi đó, ta có $OA = OB = OC$, và O nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BC, CA, AB, nên O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy, ta đã chứng minh được rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC) là đoạn thẳng AB, vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và AB là một cạnh của tam giác đều ABC.

c) Nếu $b \perp a$ thì b sẽ cắt $M'N'$ tại một điểm D nằm trên AC, và do đó $b // M'N'$.

d) Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của S lên BC, CA, AB.

Do SA vuông góc với OM và SA song song với đường thẳng d nên d cũng vuông góc với OM. Khi đó, hình chiếu của tam giác SBC lên mặt phẳng (ABC) là tam giác có đỉnh M và đường cao là đường thẳng d.

Tương tự, ta có thể tìm hình chiếu của tam giác SCA lên (ABC) là tam giác có đỉnh N và đường cao là đường thẳng e đi qua N và song song với SB, cũng như tìm hình chiếu của tam giác SAB lên (ABC) là tam giác có đỉnh B và đường cao là đường thẳng f đi qua P và song song với SC.

2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

HĐ3. Một máy bay giữ vận tốc không đổi, với độ lớn 240 km/h trong suốt 2 phút đầu kể từ khi cất cánh. Hỏi thông tin trên có đủ để ta xác định độ cao của máy bay so với mặt đất phẳng. tại thời điểm 1 phút kể từ khi máy bay cất cánh không?

Hình 7.37

Lời giải

Độ cao của máy bay bằng cách sử dụng công thức sau: độ cao = vận tốc x thời gian bay.

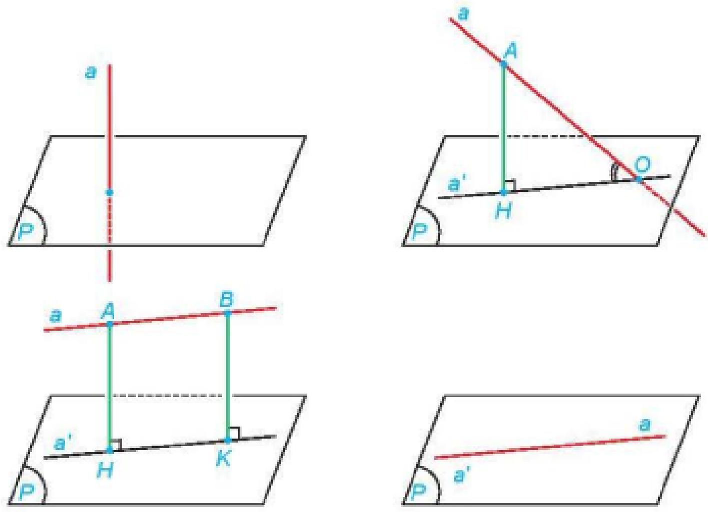
Ta có vận tốc của máy bay là 240 km/h = 66,67 m/s 1 phút hoặc 60 giây.

Do đó, ta có thể tính được độ cao của máy bay như sau: độ cao = 66.67 m/s x 60 giây = 4000 mét

Tại thời điểm 1 phút kể từ khi máy bay cất cánh là 4000 mét.

Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90°.

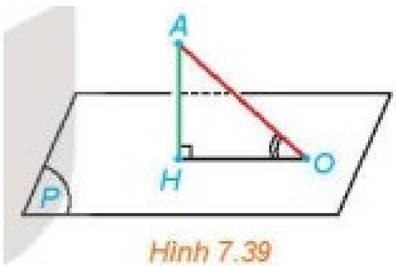
Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



Hình 7.38

Chú ý. Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \le \alpha \le 90^\circ$.

Nhận xét. Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P). Lấy điểm O thuộc mặt phẳng $(P), O$ không trùng H. Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc $\widehat{AOH}$ $(H.7.39)$.



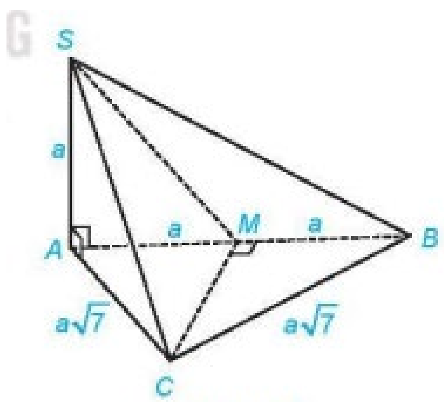
Hình 7.39

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S \perp (ABC), SA = a, CA = CB = a\sqrt{7}, AB = 2a$

a) Gọi α là góc giữa SB và (ABC). Tính $\tan\alpha$.

b) Tính góc giữa SC và (SAB).

Lời giải. $(H.7.40)$



Hình 7.40

a) $Do\, SA \perp (ABC)$ nên $\alpha = \widehat{SBA}$. Tam giác SAB vuông tại A nên $\tan\alpha = \tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

b) Gọi M là trung điểm của AB. Tam giác ABC cân tại C nên $CM \perp AB$.
Mặt khác, từ $SA \perp (ABC)$ ta có $CM \perp SA$. Do đó $CM \perp (SAB)$.

Vậy góc giữa SC và (SAB) bằng $\widehat{CSM}$.

Tam giác SAC vuông tại A nên $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{a^2+7a^2}=a\sqrt{8}$.

Ta có $AM=\frac{1}{2}AB=a$. Do đó, tam giác SAM vuông cân tại A và $SM=a\sqrt{2}$.

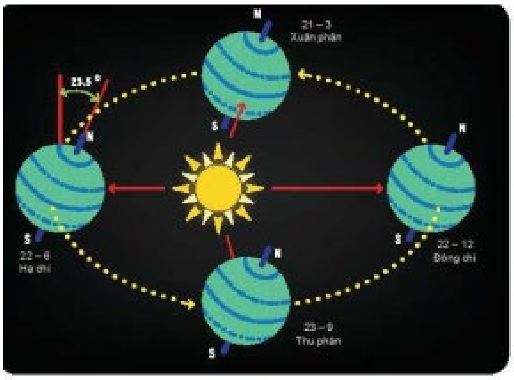
Tam giác CMS vuông tại M và $\cos\widehat{CSM}=\frac{SM}{SC}=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{8}}=\frac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{CSM}=60^\circ$ và do đó góc giữa SC và (SAB) bằng 60°.

Vận dụng. Tâm Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Trong quá trình chuyển động, Trái Đất lại quay quanh trục Bắc Nam. Trục này có phương không đổi và luôn tạo với mặt phẳng chứa quỹ đạo một góc khoảng $66,5^\circ$. (Theo *nationalgeographic.org*).

a) Giải thích vì sao hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo (P) cũng có phương không đổi.

b) Giải thích vì sao có hai thời điểm trong năm mà tại đó hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng (P) thuộc đường thẳng nối tâm Mặt Trời và tâm Trái Đất.



Hình 7.41

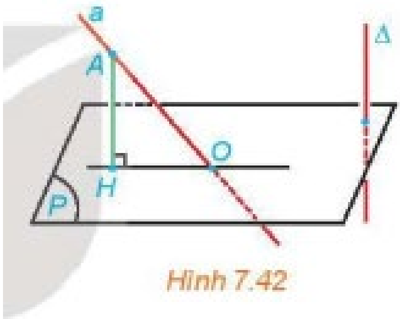
Lời giải

a) Vì trục quay của Trái Đất luôn cố định hướng về một phương cố định trong không gian, và mặt phẳng quỹ đạo cũng không thay đổi trong quá trình quay quanh Mặt Trời.

b) Trong quá trình chuyển động quanh Mặt Trời, hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo sẽ thay đổi theo thời gian và tạo thành một đường tròn có bán kính bằng góc nghiêng của trục quay so với mặt phẳng quỹ đạo. Khi Trái Đất ở vị trí xa nhất (khoảng $\frac{4}{7}$ quỹ đạo) và gần nhất (khoảng $\frac{3}{7}$ quỹ đạo) so với Mặt Trời, thì hình chiếu của trục quay của Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo sẽ nằm trên đường thẳng nối tâm Trái Đất và Mặt Trời.

Khám phá. Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P). Khi đó, với một đường thẳng a bất kì, góc giữa a và (P) có mối quan hệ gì với góc giữa a và Δ?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Hình 7.42

Lời giải

- Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), thì góc giữa a và (P) là góc 0° và góc giữa a và Δ cũng là góc 0°.
- Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng (P), thì góc giữa a và (P) bằng góc giữa đường thẳng a và một đường thẳng nằm trên (P) và song song với Δ. Vì Δ vuông góc với (P), nên góc giữa đường thẳng này và Δ cũng là góc vuông. Do đó, góc giữa a và (P) bằng góc giữa a và Δ.
- Nếu đường thẳng a song song với Δ, thì góc giữa a và (P) là góc vuông và góc giữa a và Δ cũng là góc vuông.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

1. Phương pháp

Tìm góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC).

Như vậy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC).

Vậy $\widehat{(SA;(ABC))} = \widehat{(SA;HA)} = \widehat{SAH}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc $60°$ và M là trung điểm của BC.

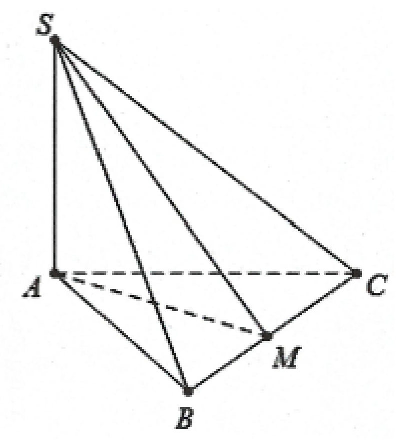
a) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

b) Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{SBA} = 60°$.

Do đó $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a \tan 60° = a\sqrt{3}$.



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; \widehat{(SC;(ABC))} = \widehat{SCA}$.

Khi đó: $\cos \widehat{SCA} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

b) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(SM;(ABC))} = \widehat{SMA} = \varphi$.

Ta có: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Khi đó $\cos \varphi = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{\sqrt{133}}{19}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a; AD = a$. Tam giác (SAB) đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

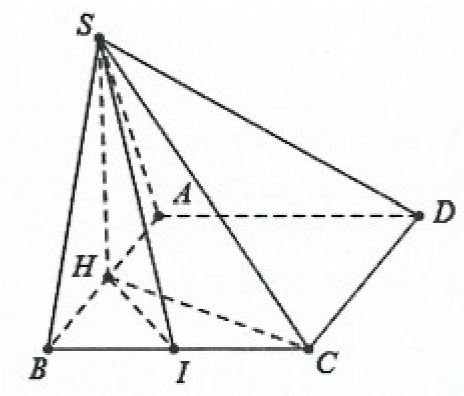
a) Tính góc giữa SB, SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của BC. Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.



Tam giác SAB đều cạnh 2a nên $SH = a\sqrt{3}$.

$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBH} = 60°$

$\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCH}$ và $\tan \widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

b) Ta có: $HI = \sqrt{HB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Mặt khác $\widehat{(SI;(ABCD))} = \widehat{SIH}$ và $\tan \widehat{SIH} = \dfrac{SH}{SI} = a\sqrt{3} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc $45°$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

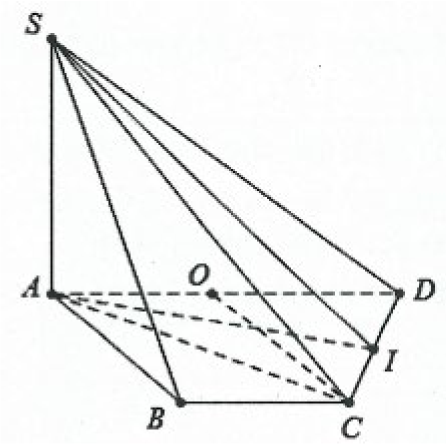
a) Tính cosin góc tạo bởi các cạnh SC, SD và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Gọi I là trung điểm của CD, tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA} = 45°$.



Do đó $SA = AB\tan 45° = a$

$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos\widehat{(SC;(ABC))} = \cos\widehat{SCA}$

$= \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\widehat{(SD;(ABCD))} = \cos\widehat{SDA} = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

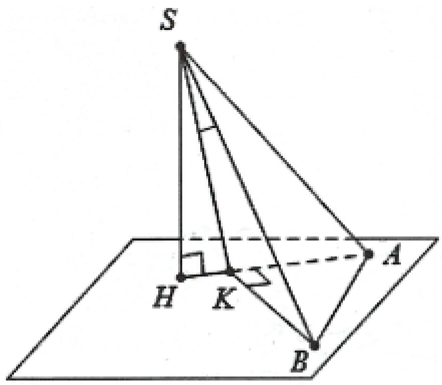
b) Ta có: $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan\widehat{(SI;(ABCD))} = \tan\widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Dạng 2: Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng chứa đường cao

1. Phương pháp

Tìm góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (SHA) với $(SHA) \perp (ABH)$.



Dựng $BK \perp AH$, có $BK \perp SH \Rightarrow BK \perp (SHA)$.

Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH).

Vậy $\widehat{(SB;(SAH))} = \widehat{(SB;SK)} = \widehat{BSK}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo bởi:

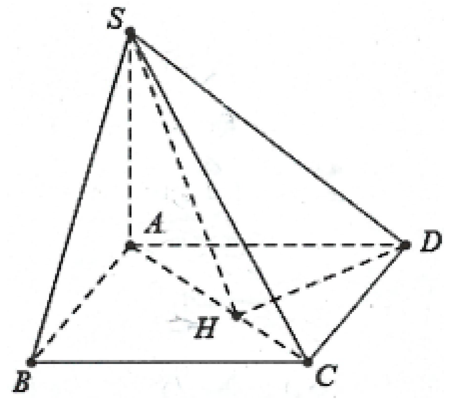
a) SC và mặt phẳng (SAB); SC và mặt phẳng (SAD).

b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCA}=60°$.

Lại có: $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a\Rightarrow SA=AC\tan 60°=2a\sqrt{3}$.



Khi đó $\begin{cases} SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{13} \\ SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=a\sqrt{15} \\ SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=4a \end{cases}$

Do $\begin{cases} CB\perp SA \\ CB\perp AB \end{cases}\Rightarrow CB\perp(SAB)\Rightarrow\widehat{(SC;(SAB))}=\widehat{CSB}$.

Mặt khác $\cos\widehat{CSB}=\dfrac{SB}{SC}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

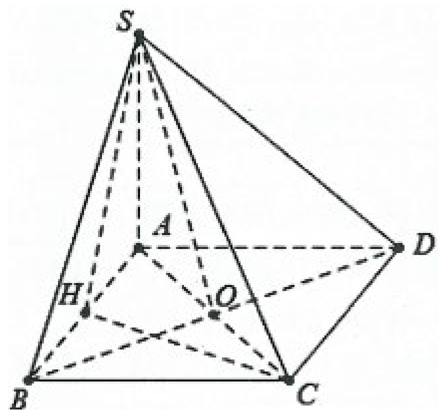
Tương tự $CD\perp(SAD)\Rightarrow\widehat{(SC;(SAD))}=\widehat{CSD}$ và $\cos\widehat{CSD}=\dfrac{SD}{SC}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $BD=a\sqrt{3}, SA\perp(ABCD)$. Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB). b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Ta có: $AC\perp BD$ tại O. Khi đó $OA=OC, OB=OD$.



Xét tam giác vuông OAB ta có: $\sin\widehat{OAB}=\dfrac{OB}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\widehat{OAB}=60°\Rightarrow\Delta ABC$ đều cạnh a.

Mặt khác $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCA}=60°$.

Suy ra $SA=AC\tan 60°=a\sqrt{3}$.

Dựng $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow\widehat{(SC;(SAB))}=\widehat{CSH}$.

Do ΔABC đều cạnh a nên H là trung điểm của AB.

Ta có: $CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\tan\widehat{CSH}=\dfrac{CH}{SH}$ trong đó $SH=\sqrt{SA^2+AH^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan\widehat{CSH}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

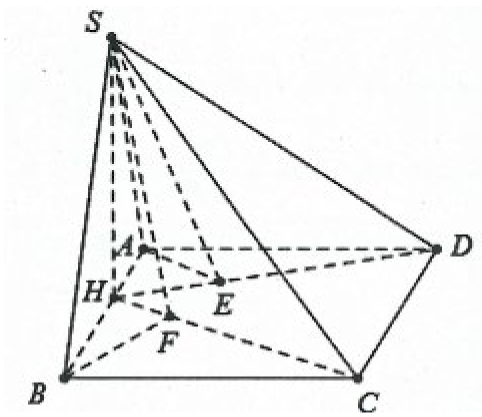
b) Ta có: $\begin{cases} DO\perp AC \\ DO\perp SA \end{cases}\Rightarrow\widehat{(SD;(SAC))}=\widehat{DSO}$ và $\tan\widehat{DSO}=\dfrac{OD}{SO}$.

Trong đó $OD = \frac{a\sqrt{3}}{2}; SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{DSO} = \frac{\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HB} = -2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB = 3, AD = 6$ và $SH = 2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SHD). b) SB và mặt phẳng (SHC).

Lời giải



a) Ta có: $AH = 1, HB = 2 \Rightarrow \begin{cases} SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{5} \\ SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Dựng $AE \perp DH \Rightarrow AE \perp (SHD) \Rightarrow \widehat{(SA;(SHD))} = \widehat{ASE}$

Mặt khác $AE = \frac{AH.AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \frac{6}{\sqrt{37}}$

Suy ra $\tan \widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{6}{\sqrt{185}}$.

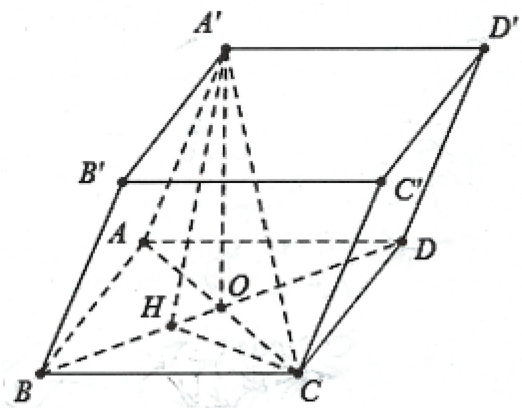
b) Dựng $BF \perp HC \Rightarrow BF \perp (SHC)$.

Khi đó $\widehat{(SB;(SHC))} = \widehat{BSF}$, $BF = \frac{BH.BC}{\sqrt{BH^2 + BC^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Ta có: $\tan\widehat{(SB;(SHC))} = \tan \widehat{BSF} = \frac{BF}{SB} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = 2a, AD = 2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với tâm O của hình chữ nhật ABCD, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $(A'BD)$.

Lời giải



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow OA = 2a = OC$.

Do $A'O \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(A'O;(ABCD))} = \widehat{A'AO} = 60°$.

$\Rightarrow A'O = OA \tan 60° = 2a\sqrt{3}$

Dựng $CH \perp BD \Rightarrow CH \perp (A'BD)$

$\Rightarrow \widehat{(A'C;(A'BD))} = \widehat{CA'H}$.

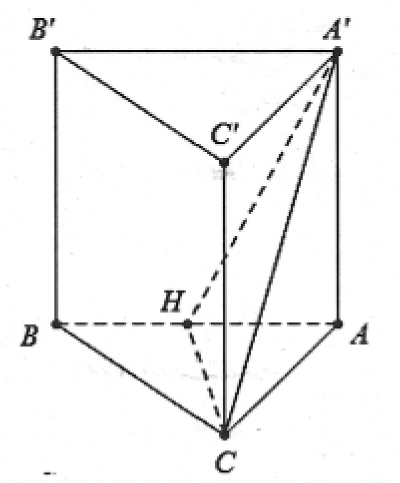
Ta có: $CH = \frac{BC.CD}{\sqrt{BC^2 + CD^2}} = a\sqrt{3}$,

$A'C = \sqrt{OA'^2 + OC^2} = \sqrt{12a^2 + 4a^2} = 4a$.

Suy ra $\cos\widehat{CA'H}=\frac{A'H}{A'C}=\frac{\sqrt{A'C^2-HC^2}}{A'C}=\frac{\sqrt{16a^2-3a^2}}{4a}=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA'=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Dựng $CH\perp AB\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $\begin{cases}CH\perp AB\\CH\perp AA'\end{cases}\Rightarrow CH\perp(ABB'A')\Rightarrow\widehat{(A'C;(ABB'A'))}=\widehat{CA'H}$.

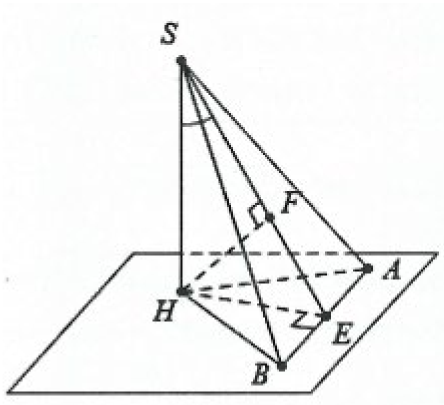
Lại có: $A'H=\sqrt{AA'^2+AH^2}=\sqrt{\frac{a^2}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $\tan\widehat{CA'H}=\frac{CH}{A'H}=1\Rightarrow\widehat{CA'H}=45^\circ$.

Vậy $\widehat{(A'C;(ABB'A'))}=\widehat{CA'H}=45^\circ$.

Dạng 3: Góc giữa đường cao và mặt bên

1. Phương pháp



Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB).

Dựng $HE\perp AB, HF\perp SE$.

Ta có: $AB\perp SH\Rightarrow AB\perp(SHE)\Rightarrow AB\perp HF$.

Mặt khác $HF\perp SE\Rightarrow HF\perp(SAB)\Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB).

Vậy $\widehat{(SH;(SAB))}=\widehat{(HF;SF)}=\widehat{HSF}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh 2a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K.

Ta có: $SA \perp BC$ và $AK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAK)$.

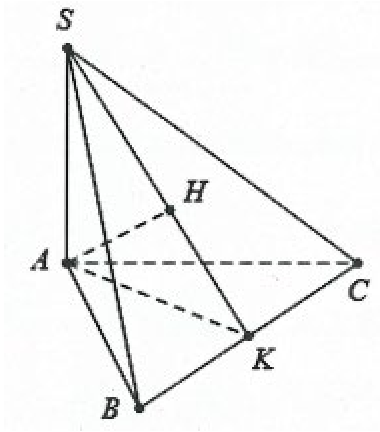
Kẻ $AH \perp SK, H \in SK$. Mà $BC \perp AH$.

Suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow \widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASH} = \widehat{ASK}$.

Tam giác SAK vuông tại A, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $\widehat{ASK} = 45°$.

Vậy $\widehat{(SA;(SBC))} = 45°$.

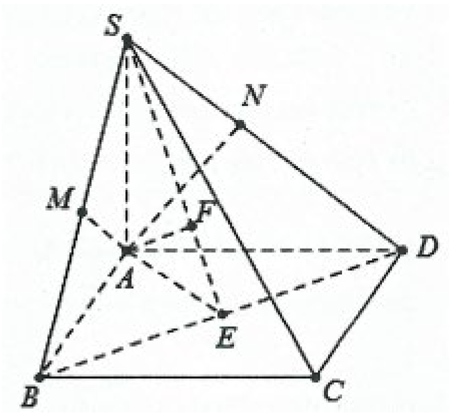


Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC),(SBD)$ và (SCD).

Lời giải

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC).



Khi đó: $\widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASM} = \widehat{ASB} = \alpha$.

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự ta có: $\widehat{(SA;(SCD))} = \widehat{ASD} = \beta$ và $\tan\beta = \dfrac{AD}{SA} = 1$.

Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AF$.

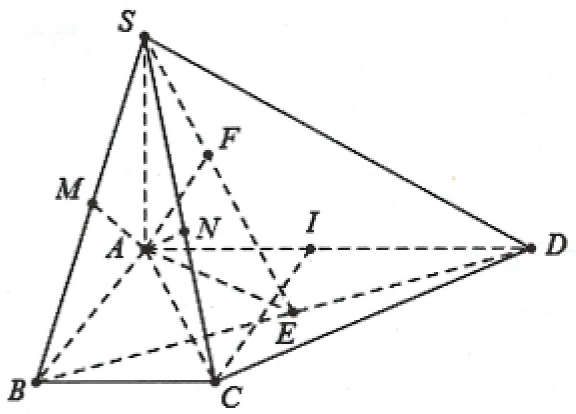
Mặt khác $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp (SBD) \Rightarrow \widehat{(SA;(SBD))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Khi đó $\tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA}$, trong đó $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng $(SBC),(SCD)$ và (SBD).

Lời giải

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$



Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCA}=60^\circ$.

Suy ra $SA=AC\tan 60^\circ=a\sqrt{6}$.

Dựng $AM\perp SB$, có $\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp AM$.

Do đó $AM\perp(SBC)\Rightarrow M$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

Suy ra: $\widehat{(SA;(SBC))}=\widehat{ASM}=\widehat{ASB}$.

Ta có: $\tan\widehat{ASB}=\dfrac{AB}{SA}=\dfrac{a}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh a $\Rightarrow CI=\dfrac{AD}{2}=a\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại C. Khi đó $\begin{cases}CD\perp SA\\CD\perp AC\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAC)$.

Dựng $AN\perp SC\Rightarrow\widehat{(SA;(SCD))}=\widehat{ASN}=\widehat{ASC}$. Ta có: $\tan\widehat{ASC}=\dfrac{AC}{SA}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựng $\begin{cases}AE\perp BD\\AF\perp SE\end{cases}\Rightarrow\widehat{(SA;(SBD))}=\widehat{ASF}=\widehat{ASE}$.

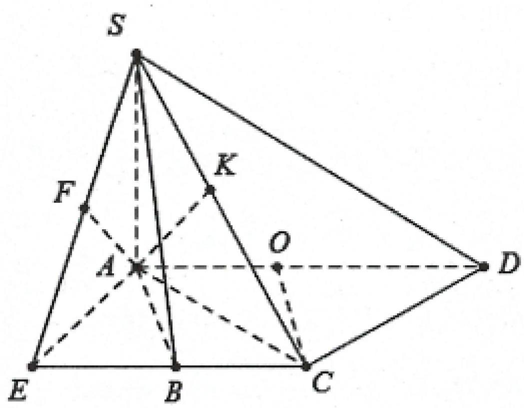
Mặt khác $AE=\dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}\Rightarrow\tan\widehat{ASE}=\dfrac{AE}{SA}=\dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, $AD=2a$. Biết $SA\perp(ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60°.

a) Tính tan góc tạo bởi SA và (SBC).

b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD).

Lời giải:



a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow OABC$ là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO=a=\dfrac{1}{2}AD\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại C.

Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABCD))}=\widehat{SBA}=60^\circ$.

$\Rightarrow SA=AB\tan 60^\circ=a\sqrt{3}, AC=\sqrt{AD^2-CD^2}=a\sqrt{3}$.

Dựng $AE\perp BC, AF\perp SE\Rightarrow\widehat{(SA;(SBC))}=\widehat{ASF}=\widehat{ASE}$.

Do $\widehat{ABE}=120^\circ\Rightarrow\widehat{ABE}=60^\circ$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Mặt khác $AE = AB\sin\widehat{ABE} = AB\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\left(\widehat{SA;(SBC)}\right) = \tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{1}{2}$.

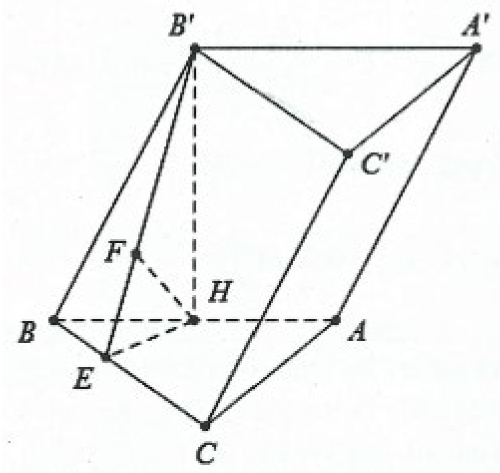
b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

Khi đó $\left(\widehat{SA;(SCD)}\right) = \widehat{ASK} = \widehat{ASC} = \varphi$.

Ta có: $\tan\varphi = \dfrac{AC}{SA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45^\circ$. Vậy $\left(\widehat{SA;(SCD)}\right) = 45^\circ$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB, đường cao $B'H = \dfrac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải



Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$ suy ra

$BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC') \Rightarrow \left(\widehat{B'H;(BCC'B')}\right)$

$= \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E}$.

Ta có: $HE = HB\sin\widehat{HBE} = \dfrac{a}{2}\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos\widehat{HB'E} = \dfrac{B'H}{B'E} = \dfrac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Loại 4: Góc giữa cạnh bên và mặt bên (Nâng cao)

Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng (SAB). Đặt $\left(\widehat{SC;(SAB)}\right) = \varphi\left(0^\circ \le \varphi \le 90^\circ\right)$.

Ta có công thức: $\sin\varphi = \dfrac{d\left(C;(SAB)\right)}{SC}$.

Từ đó suy ra các giá trị $\cos\varphi$ hoặc $\tan\varphi$ nếu đề bài yêu cầu.

Dạng 4: Tính góc dựa vào khoảng cách

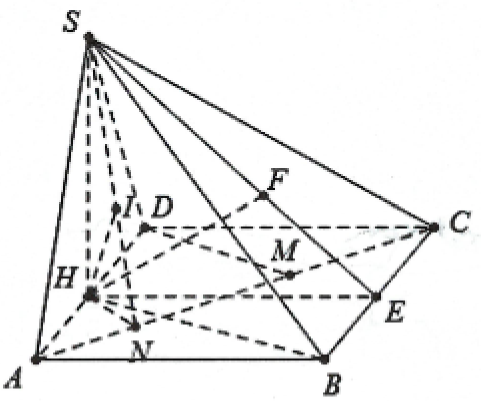
Để hiểu được nội dung này các bạn phải nắm được kiến thức về khoảng cách, nếu chưa rõ thì sau khi học xong khoảng cách quay lại nghiên cứu nội dung này nhé!

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AD = 2a, AB = a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SB tạo với đáy một góc 30°. Tính sin góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SBC). b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải:

Gọi H là trung điểm của AD ta có: $SH \perp AD$



Lại có: $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $HA = a; HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBH} = 30°$

Suy ra $SH = HB\tan 30° = a$.

a) Do $AD \,//\, \mathrm{BC} \Rightarrow \mathrm{AD} \,//\, (SBC)$.

Do vậy $d(A;(SBC)) = d(H;(SBC))$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp BC \\ HF \perp SE \end{cases}$ ta có: $BC \perp HF$ từ đó suy ra $HF \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(H;(SBC)) = HF = d(A;(SBC))$. Ta có: $SA = \sqrt{SH^2 + SA^2} = a\sqrt{2} = SD$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin\widehat{(SA;(SBC))} = \dfrac{d(A;(SBC))}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Dựng $HN \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHN)$, dựng $HI \perp SN \Rightarrow HI \perp (SAC)$

Do $\dfrac{DA}{HA} = 2 = \dfrac{d(D;(SAC))}{d(H;(SAC))} \Rightarrow d(D;(SAC)) = 2d(H;(SAC)) = 2HI$

Dựng $DM \perp AC \Rightarrow DM = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow HN = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HI = \dfrac{HN.SH}{\sqrt{HN^2 + SH^2}} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow d(D;(SAC)) = a$.

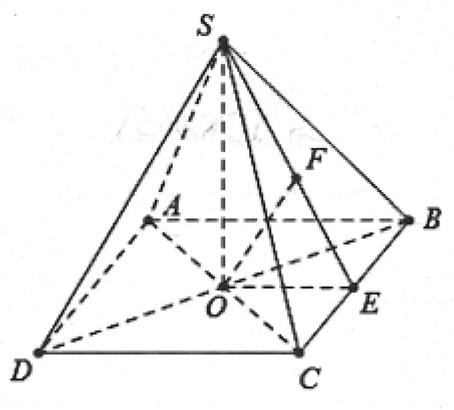
Ta có: $\sin\widehat{(SD;(SAC))} = \dfrac{d(D;(SAC))}{SD} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = a\sqrt{3}; AD = a$, tam giác SBD là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC).

Lời giải

Gọi O là trung điểm của BD ta có: $SO \perp BC$ mặt khác

$(SBD)\perp(ABC)\Rightarrow SO\perp(ABC)$



Ta có: $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a\Rightarrow SO=\frac{1}{2}BD=a$.

Dựng $OE\perp BC, OF\perp SE\Rightarrow OF\perp(SBC)$.

$d(D;(SBC))=2d(O;(SBC))=2HF$

Ta có: $HE=\frac{1}{2}AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow OF=\frac{SH.OE}{\sqrt{SH^2+OE^2}}=a\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$

Suy ra $d(A;(SBC))=\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. Mặt khác $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=a\sqrt{2}$.

Do đó $\sin\widehat{(SA;(SBC))}=\frac{d(A;(SBC))}{SA}=\frac{\sqrt{42}}{7}$.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB=a; AC=a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của BC. Biết $A'H=a\sqrt{2}$. Tính cosin góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

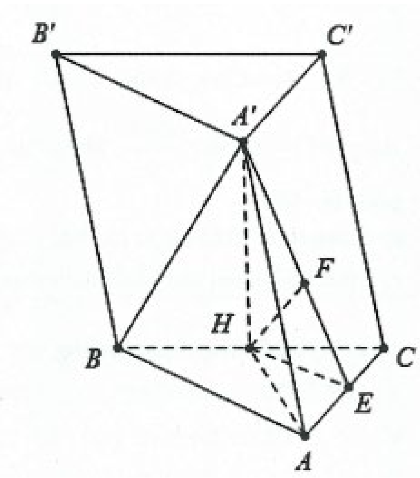
Lời giải

Dựng $HE\perp AC$ và $HF\perp A'E$

Ta có: $\begin{cases}AC\perp A'H\\AC\perp HE\end{cases}\Rightarrow AC\perp HF\Rightarrow HF\perp(AA'C)$.

Khi đó $d(H;(A'AC))=HF$.

Lại có $BC=2HC$ nên $d(B;(AA'C))=2d(H;(AA'C))$.



Mặt khác ME là đường trung bình trong tam giác ABC nên $ME=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$.

Khi đó: $HF=\frac{HE.A'M}{\sqrt{HE^2+A'M^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Suy ra $d(B;(AA'C))=\frac{2a\sqrt{2}}{3}; BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2a$.

Lại có $A'B=\sqrt{A'H^2+HB^2}=a\sqrt{3}$.

Suy ra

$$\sin\left(\widehat{A'B;\left(A'AC\right)}\right)=\sin\varphi=\frac{d\left(B;\left(A'AC\right)\right)}{BA'}=\frac{2\sqrt{6}}{9}\Rightarrow\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\frac{\sqrt{57}}{9}.$$

C. GIẢI BÀI TẬP BÀI TẬP

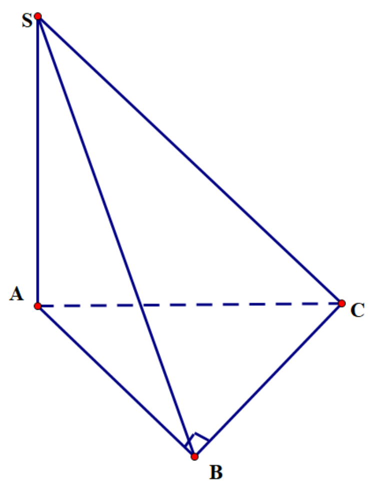
Bài 7.10. Cho hình chóp $S\cdot ABC$ có $SA\perp(\mathrm{ABC})$, tam giác ABC vuông tại B.

a) Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC).

b) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC).

c) Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB).

Lời giải



a) Ta có $SA\perp(ABC)$ nên A là hình chiếu của S trên (ABC)

b) A là hình chiếu của S trên (ABC)

B là hình chiếu của B trên (ABC)

C là hình chiếu của C trên (ABC)

$\Rightarrow$ Tam giác ABC là hình chiếu của tam giác SBC.

c) B là hình chiếu của C trên (SAB)

$\mathrm{S,B}$ là hình chiếu của chính nó trên (SAB)

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu của tam giác SBC trên (SAB)

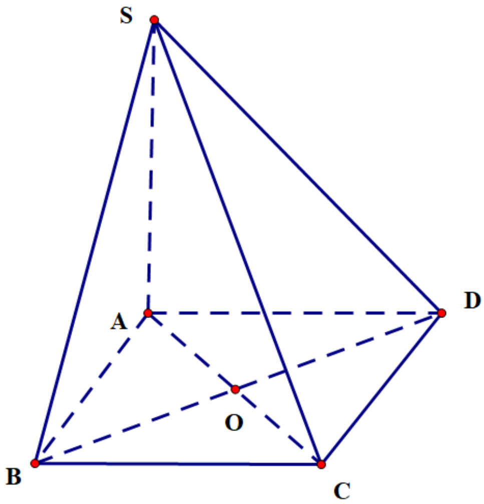
Bài 7.11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh $a, SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$.

a) Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính góc giữa BD và mặt phẳng (SAC).

c) Tìm hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAC).

Lời giải



a) A là hình chiếu của S trên (ABCD)$\left(SA\perp(ABCD)\right)$

C là hình chiếu của C trên (ABCD)

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên (ABCD)

$\Rightarrow \left(SC,(ABCD)\right)=(SC,AC)=\widehat{SCA}$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$AC^2=AB^2+BC^2=2a^2\Rightarrow AC=a\sqrt{2}$

Xét tam giác SAC vuông tại A có

$\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1\Rightarrow \widehat{SCA}=45^0$

Vậy $\left(SC,(ABCD)\right)=45^0$

b) $\left.\begin{array}{l}AC\perp BD(hvABCD)\\ AC\cap SA=\{A\}\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow\left(BD,(SAC)\right)=90^\circ$

c) Gọi $AC\cap BD=\{O\}$ mà $BD\perp(SAC)$

$\Rightarrow O$ là hình chiếu của B trên (SAC)

S là hình chiếu của S trên (SAC)

$\Rightarrow$ SO là hình chiếu của SB trên (SAC).

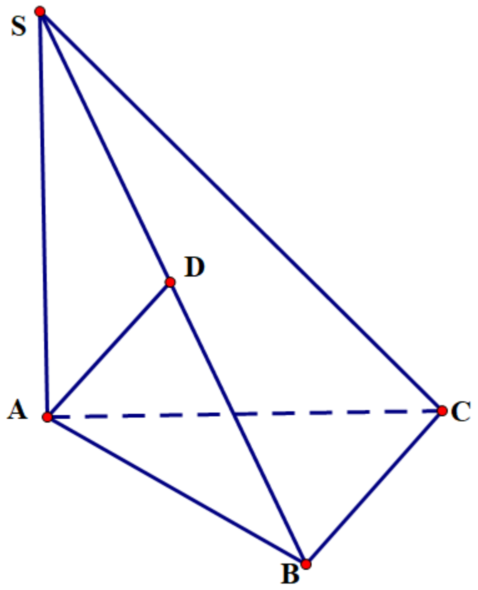
Bài 7.12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại $B, SA=AB=BC=a$.

a) Xác định hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

b) Tính góc giữa SC và mặt phẳ (ABC).

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



a) Trong (SAB) kẻ $AD \perp SB$ tại D.

$\left.\begin{array}{l} BC \perp AD \\ SB \perp AD \\ BC \cap SB = \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SBC) \Rightarrow$ D là hình chiếu của A trên (SBC).

b) A là hình chiếu của S trên $(\mathrm{ABC})(SA \perp (ABC))$

C là hình chiếu của C trên (ABC)

$\Rightarrow$ AC là hình chiếu của SC trên (ABC)

$\Rightarrow (SC,(ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có

$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SCA} = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

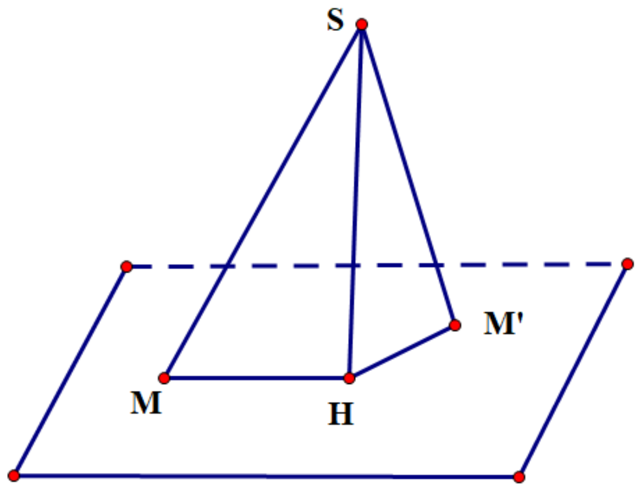
Vậy $(SC,(ABCD)) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 7.13. Cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P), có hình chiếu H trên (P). Với mỗi điểm M bất kì (không trùng H) trên mặt phẳng (P), ta gọi đoạn thẳng SM là đường xiên, đoạn thẳng HM là hình chiếu trên (P) của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên SM và SM' bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu HM, HM' tương ứng của chúng bằng nhau;

b) Đường xiên SM lớn hơn đường xiên SM nếu hình chiếu HM lớn hơn hình chiếu HM'.

Lời giải



a)

+) Giả sử $SM = SM'$

Xét tam giác SHM vuông tại H có

$SM^2 = SH^2 + MH^2$ (định lí Pytago)

Xét tam giác SHM' vuông tại H có

$SM'^2 = SH^2 + M'H^2$ (định lí Pytago)

Mà $SM = SM'$ nên $MH = MH'$

+) Giả sử $HM = HM'$

Xét tam giác SHM vuông tại H có

$SM^2 = SH^2 + MH^2$ (định lí Pytago)

Xét tam giác SHM' vuông tại H có

$SM'^2 = SH^2 + M'H^2$ (định lí Pytago)

Mà $HM = HM'$ nên $SM = SM'$

b) $MH > M'H \Leftrightarrow MH^2 > M'H^2$

$\Leftrightarrow MH^2 + SH^2 > M'H^2 + SH^2 \Leftrightarrow SM^2 > SM'^2 \Leftrightarrow SM > SM'$

Bài 7.14. Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Hai máy bay cất cánh và bay thẳng với cùng độ lớn vận tốc trong 5 phút đầu, với các góc cất cánh lần lượt là $10^\circ, 15^\circ$. Hỏi sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay nào ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) lớn hơn?

Chú ý. Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

Lời giải

Áp dụng công thức tính độ cao của máy bay so với mặt đất, ta tính được độ cao của hai máy bay 1và 2 như sau:

Độ cao của máy bay $1: h_A = v.1.\sin\left(10^\circ\right) = 0,17365v$

Độ cao của máy bay : $h_B = v.1.\sin\left(15^\circ\right) = 0,25882v$

Do đó, ta thấy rằng độ cao của máy bay 2 lớn hơn độ cao của máy bay 1. Vì vậy, máy bay 2 ở độ cao so với mặt đất lớn hơn sau 1 phút kể từ khi cất cánh.

Bài 7.15. Hãy nêu cách đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm.

Chú ý. Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời lúc giữa trưa với mặt phẳng nằm ngang tại vị trí đó được gọi là góc Mặt Trời. Giữa trưa là thời điểm ban ngày mà tâm Mặt Trời thuộc mặt phẳng chứa kinh tuyến đi qua điểm đang xét. Góc Mặt Trời ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất.

Lời giải

Để đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm cụ thể, ta cần sử dụng một thiết bị đo góc, thường được gọi là gnomon.

Cách thực hiện đo góc Mặt Trời như sau:

Chọn một vị trí cố định trên mặt đất và đặt gnomon vào vị trí đó sao cho nó đứng thẳng đứng và vuông góc với mặt đất.

Đợi cho đến khi đến thời điểm giữa trưa, khi tia sáng Mặt Trời đứng thẳng trên vị trí của bạn. Bạn có thể biết được thời điểm này thông qua các trang web hoặc ứng dụng dựa trên vị trí của bạn.

Xác định bóng của gnomon trên mặt phẳng ngang và vẽ một đường thẳng từ đỉnh của gnomon đến đỉnh của bóng.

Sử dụng thiết bị đo góc để đo góc giữa đường thẳng này và mặt phẳng ngang. Đó chính là góc Mặt Trời tại vị trí và thời điểm đó.

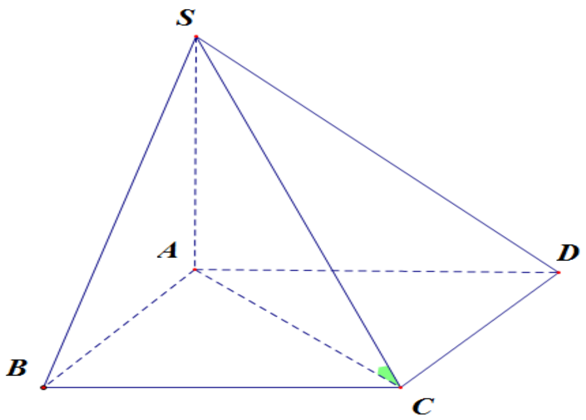
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\widehat{SCB}$. **B.** $\widehat{CAS}$. **C.** $\widehat{SCA}$. **D.** $\widehat{ASC}$.

Lời giải

Chọn C



Từ giả thiết ta có $SA\perp(ABCD)$ suy ra AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó $\widehat{(SC,(ABCD))}=\widehat{(SC,AC)}=\widehat{SCA}$.

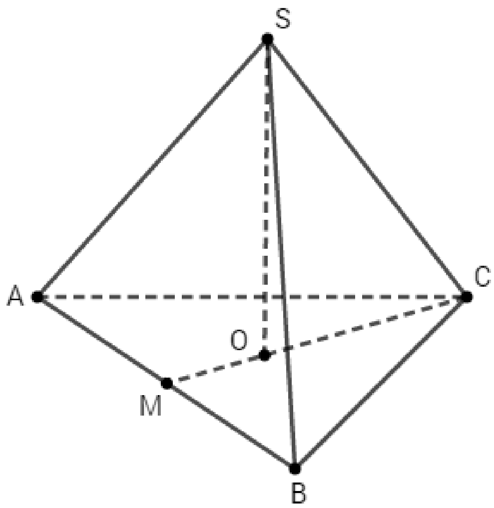
Câu 2: A Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng chiều cao. Tính góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

A. 30^o. **B.** 60^o. **C.** 45^o. **D.** 90^o.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi O trọng tâm của tam giác đều ABC. Do $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

$SO \perp (ABC) \Rightarrow CO$ là hình chiếu của SC trên (ABC) $\Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SC,OC}\right)$.

ΔSCO vuông tại $O \Rightarrow \widehat{SCO} < 90° \Rightarrow \left(\widehat{SC,OC}\right) = \widehat{SCO}$.

Đặt $AB = SO = a$. Gọi M là trung điểm AB thì $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$CO = \dfrac{2}{3}CM = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó suy ra $\tan\widehat{SCO} = \dfrac{SO}{OC} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCO} = 60^o \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = 60°$.

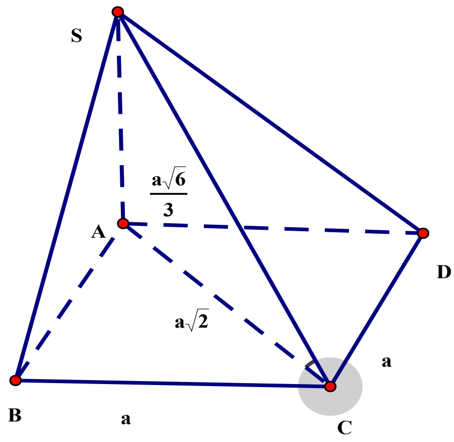
Vậy góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60^o.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



$AC = a\sqrt{2}$,

AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$

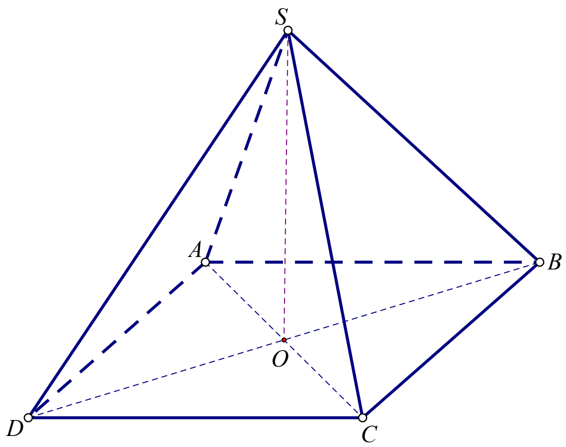
$\Delta SAC : \tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} : \left(a\sqrt{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Hai mặt phẳng $(SAC),(SBD)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc giữa cặp đường thẳng nào sau đây?

A. (SB,SO). **B.** (SB,BD). **C.** (SB,SA). **D.** (SO,BD).

Lời giải

Chọn B



Gọi O là giao điểm của AC và BD thì $(SAC)\cap(SBD) = SO$

Vì $(SAC),(SBD)$ cùng vuông góc với đáy nên $SO \perp (ABCD)$.

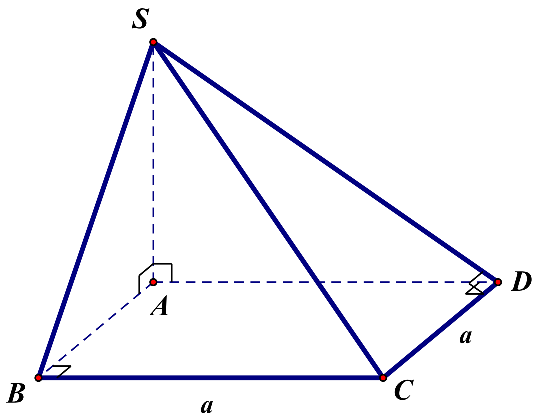
Góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$ là góc giữa SB và BD.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD) là góc nào sau đây?

A. $\widehat{SCA}$. **B.** $\widehat{CSA}$. **C.** $\widehat{SCD}$. **D.** $\widehat{CSD}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SC \cap (SAD) = \{S\}$

Mặt khác:

$$\left.\begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SA \\ AD \cap SA = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD)$$, tức là D là hình chiếu vuông góc của C lên (SAD)

Từ, suy ra SD là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAD).

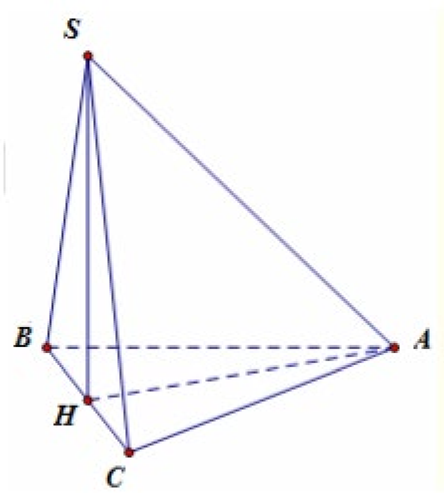
Vậy góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD) là $\widehat{CSD}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC).

A. 45^0 **B.** 75^0 **C.** 60^0 **D.** 30^0

Lời giải

Chọn A



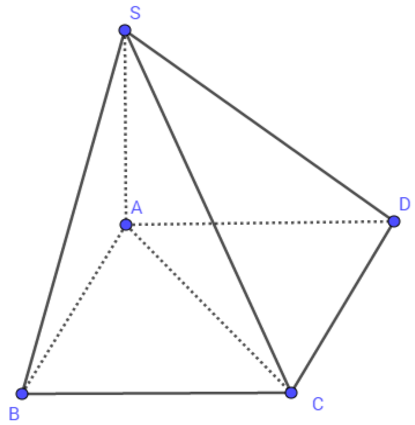
Hai tam giác SBC, ABC là tam giác đều cạnh a, suy ra $SH = HA \Rightarrow \Delta SAH$ vuông cân
$\Rightarrow \widehat{SA,(ABC)} = \widehat{SAH} = 45^0$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $75°$ **D.** $45°$

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC = a\sqrt{2}$

Vì AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc giữa SC và AC

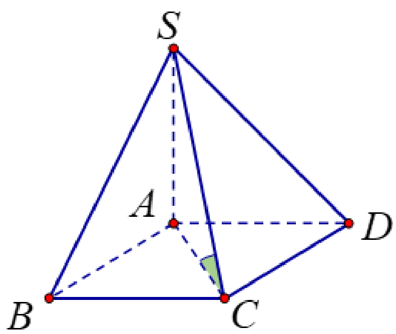
Xét ΔSAC vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra $\widehat{SCA} = 30^0$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $60°$ **D.** $75°$

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

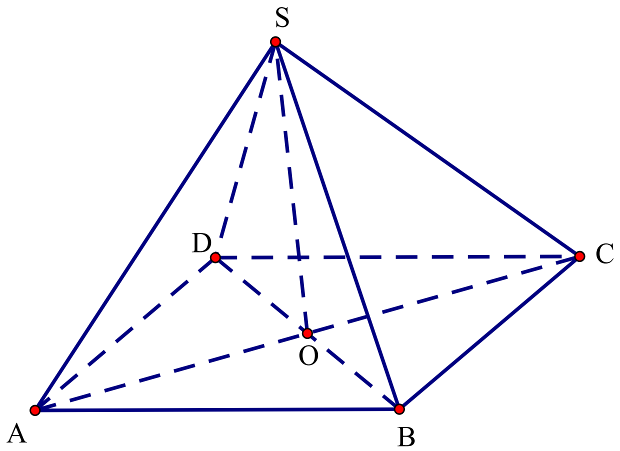
$\Rightarrow \tan \widehat{SAC} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^0$.

Câu 10: Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, chiều cao $h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Góc giữa cạnh bên với mặt đáy là

A. $60°$ **B.** $15°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Lời giải

Chọn C



Gọi SO là đường cao của hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Do đó góc giữa cạnh bên và mặt đáy là góc $\widehat{SBO}$.

Ta có $SO = h = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$; $OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Tam giác vuông SBO tại O có $SO = OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ nên cân tại O.

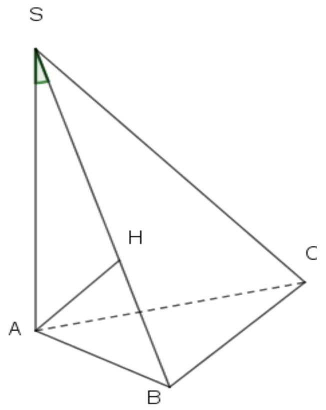
Suy ra $\widehat{SBO} = 45°$

Câu 11: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Do tam giác ABC vuông tại B nên $AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SBC)$

Gọi H là hình chiếu của A lên SB khi đó $AH\perp(SBC)$ và SH là hình chiếu của AH lên mặt phẳng (SBC) nên góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) là góc $\widehat{ASH}$

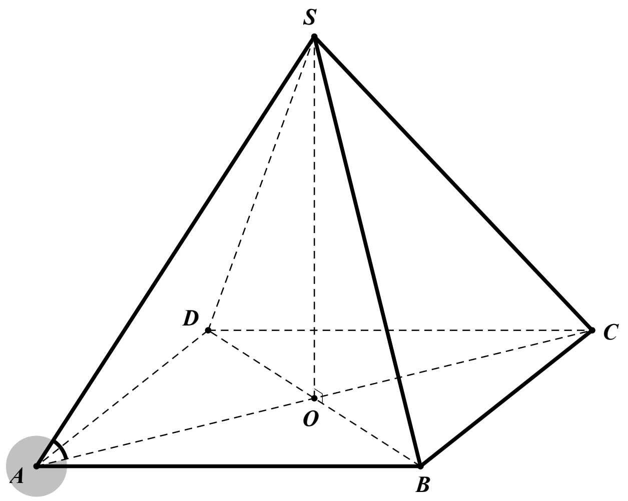
Trong tam giác vuông SAB $\sin\widehat{ASB}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ góc cần tìm là $30°$.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng:

A. 45^0 **B.** 75^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Lời giải

Chọn D



Ta có: $SO\perp(ABCD)$

Do đó: $\left[\widehat{SA,(ABCD)}\right]=\widehat{SAO}$

Xét ΔSAO vuông tại O:

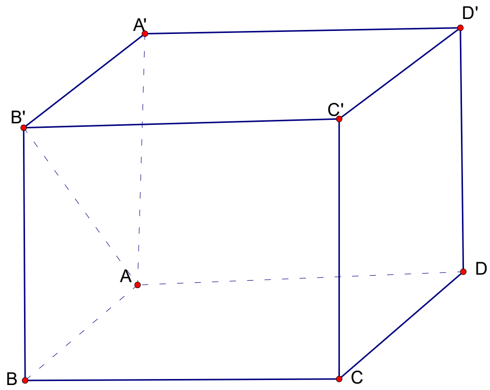
$\cos\widehat{SAO}=\dfrac{AO}{SO}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}:a\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra: $\widehat{SAO}=60^0$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng?

A. 60^0. **B.** 90^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn D



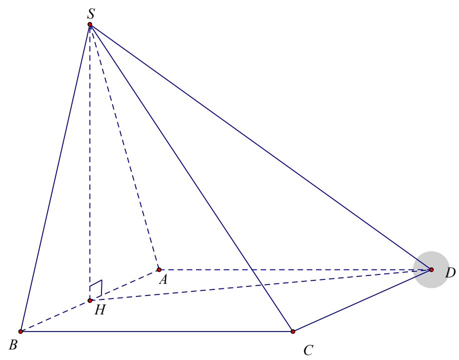
Góc giữa AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{B'AB} = 45^0$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB cân tại S có $SA = SB = 2a$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $ABCD$. Gọi α là góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\alpha = 2\sqrt{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **D.** $\cot\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SD,(ABCD))} = \widehat{SDH} = \alpha$.

Ta có:

$$SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$DH = \sqrt{AD^2 + HA^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra, $\tan\alpha = \dfrac{SH}{DH} = \sqrt{3}$.

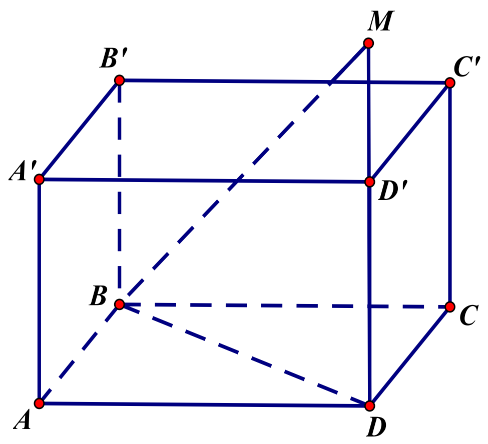
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 15: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Điểm M thuộc tia DD' thỏa mãn $DM = a\sqrt{6}$. Góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $30°$ **B.** $45°$. **C.** $75°$ **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn D



Ta có BM cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại B.

$DM \perp (ABCD)$ tại D.

Suy ra $\widehat{(BM,(ABCD))} = \widehat{(BM,BD)} = \widehat{MBD}$.

Xét tam giác DBM vuông tại D, ta có

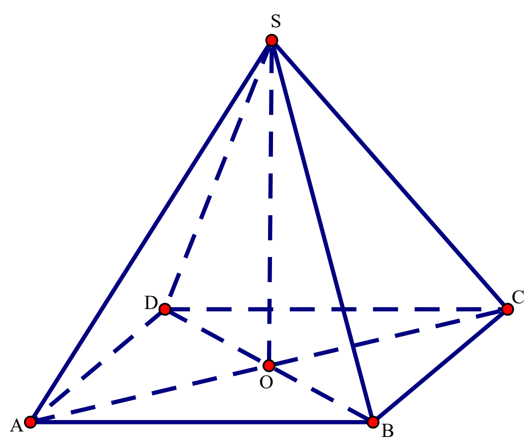
$\tan\widehat{MBD} = \dfrac{DM}{BD} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{MBD} = 60° \Rightarrow \widehat{(BM,(ABCD))} = 60°$.

Câu 16: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Độ lớn góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°. **B.** 75°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$ suy ra AO là hình chiếu của AS trên mặt phẳng $(ABCD)$ $\Rightarrow\left(\widehat{SA,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{SA;AO}\right)=\widehat{SAO}$.

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a suy ra $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SOA: $\cos\widehat{SAO}=\frac{AO}{SA}=\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\widehat{SAO}=60^\circ$.

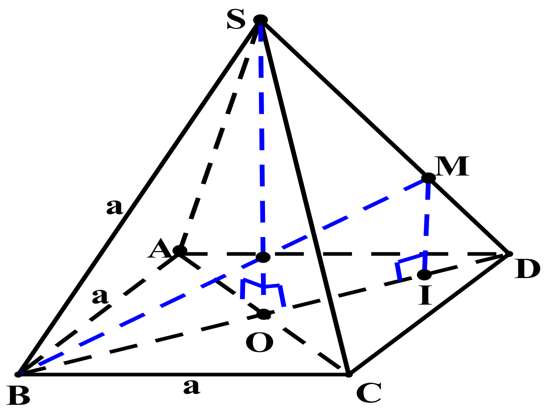
Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng 60°.

Câu 17: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là điểm nằm trên đoạn SD sao cho $SM=2MD$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{1}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$

Xét ΔSAO vuông tại O có: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ $MI\perp BD$ tại I. Suy ra: $MI\parallel SO$ nên $MI\perp(ABCD)$.

Vậy góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{MBI}$.

Ta có: $MI=\frac{1}{3}SO=\frac{a\sqrt{2}}{6}$; $BI=\frac{5}{6}BD=\frac{5\sqrt{2}a}{6}$.

Xét ΔMBI vuông tại I ta có: $\tan\widehat{MBI}=\frac{MI}{BI}=\frac{1}{5}$.

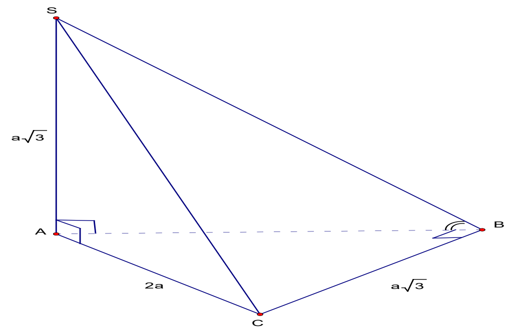
Vậy giá trị tan của góc giữa BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\frac{1}{5}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a\sqrt{3}$, $AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C



+ Ta có: $\left(SB,(ABC)\right) = \left(SB,BA\right) = \widehat{SBA} = \varphi$

+ Tính: $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AB}$.

+ Tính: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{a^2} = a$.

Suy ra: $\tan\varphi = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

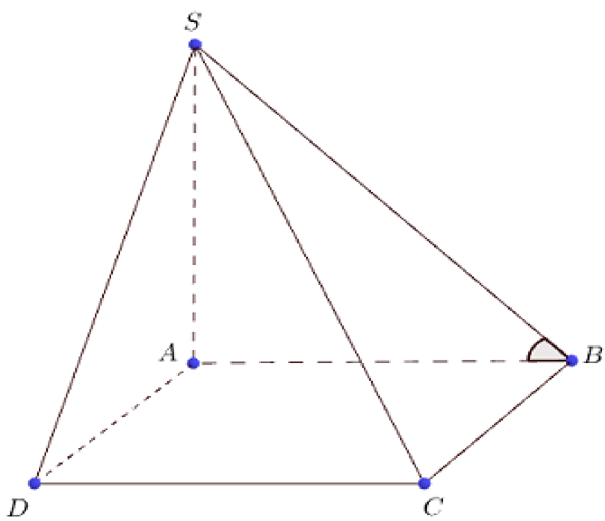
Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng $60°$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BC$.

Mặt khác, theo giả thiết $AB \perp BC$. Do đó $BC \perp (SAB)$ nên $SB \perp BC$.

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$.

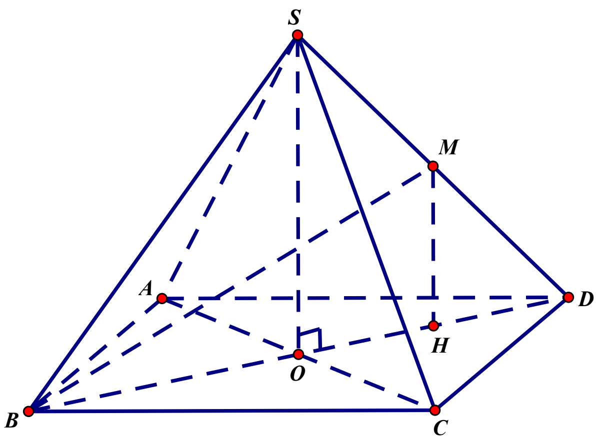
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $60°$.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của SD Tính tan của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Trong tam giác SOD dựng $MH // SO, H \in OD$ ta có $MH \perp (ABCD)$.

Vậy góc tạo bởi BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $MH = \dfrac{1}{2}SO = \dfrac{1}{2}\sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - 2a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$BH = \dfrac{3}{4}BD = \dfrac{3}{4}2a\sqrt{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

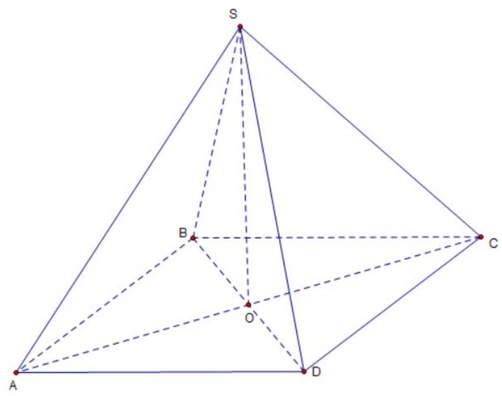
Vậy $\tan\widehat{MBH} = \dfrac{MH}{BH} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc

A. $\widehat{ASO}$. **B.** $\widehat{SAO}$. **C.** $\widehat{SAC}$. **D.** $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AO$

$ABCD$ là hình thoi tâm $O \Rightarrow BD \perp AO$

Từ và, suy ra $AO \perp (SBD)$.

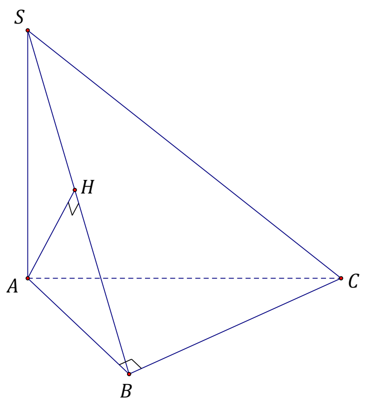
Vậy gócgiữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\widehat{ASO}$.

Câu 22: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ $(H \in SB)$.

Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay góc $\widehat{ASB}$.

Tam giác ABC vuông ở B $\Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$

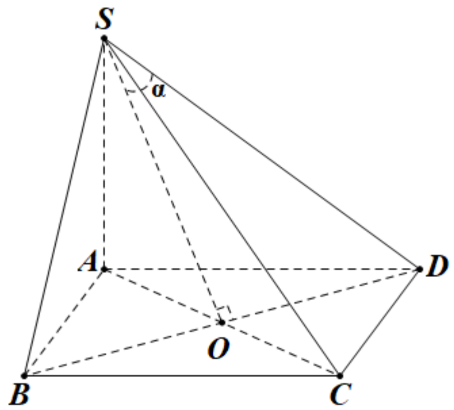
Tam giác SAB vuông ở A $\Rightarrow \sin \widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASB} = 30°$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(SAC) \Rightarrow \widehat{\left(SD;(SAC)\right)} = \widehat{(SD;SO)} = \widehat{DSO} = \alpha$.

Xét ΔSAD vuông tại A: $SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

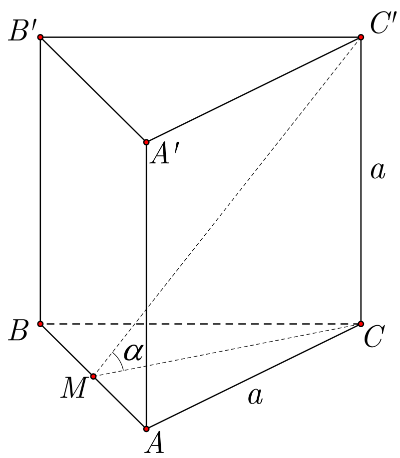
Xét ΔSOD vuông tại O: có $SD = 2a$, $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{DSO} = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\sqrt{\frac{3}{7}}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MC là hình chiếu của MC' trên mặt phẳng (ABC).

Do đó góc giữa đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi hai đường thẳng MC' và MC. Đó là góc $\alpha = \widehat{CMC'}$.

Ta có, CM là đường cao của tam giác đều ABC cạnh a nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

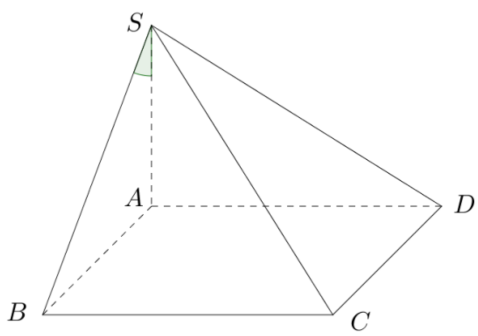
Xét tam giác CMC', ta có $\tan\alpha = \tan\widehat{CMC'} = \dfrac{CC'}{CM} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABCD).$$

$$\begin{cases}AB\perp AD\\AB\perp SA\,(SA\perp(ABCD))\end{cases} \Rightarrow AB\perp(SAD).$$

Do hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là góc giữa hai đường thẳng SB và SA.

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{5}$.

$\cos\widehat{BSA} = \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

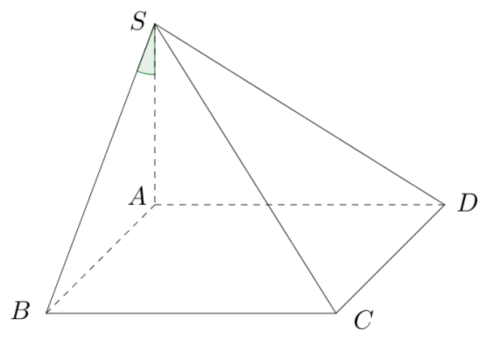
Vậy cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SA = 2a$. Tính cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD).

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAC)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAC)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD).$$

$$\begin{cases}AB\perp AD\\AB\perp SA(SA\perp(ABCD))\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD).$$

Do hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAD) là SA nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là góc giữa hai đường thẳng SB và SA.

$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{5}$.

$\cos\widehat{BSA}=\frac{SA}{SB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

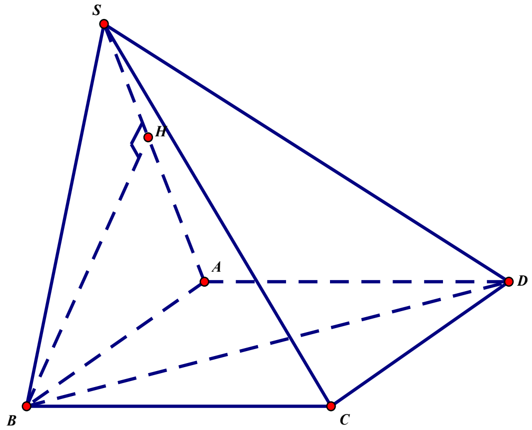
Vậy cosin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) là $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

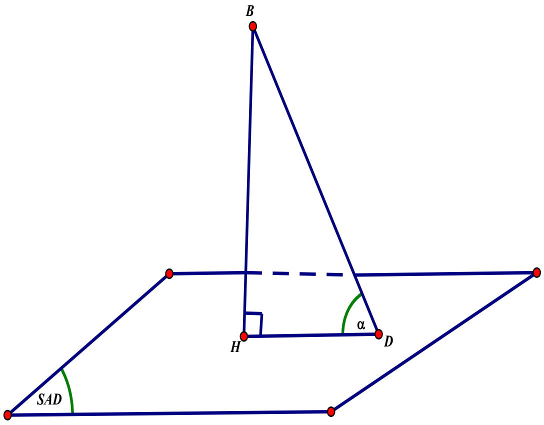
Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng BD với (SAD). Tính $\sin\alpha$?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$

Lời giải

Chọn C





Ta có $\sin\left(BD,\left(SAD\right)\right)=\sin\alpha=\dfrac{BH}{BD}$

$ABCD$ là hình vuông cạnh a, suy ra $BD=a\sqrt{2}$

Kẻ BH vuông góc SA (H thuộc SA), BH vuông góc AD suy ra BH vuông góc $\left(SAD\right)$.

Tam giác SAD đều cạnh a, đường cao $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

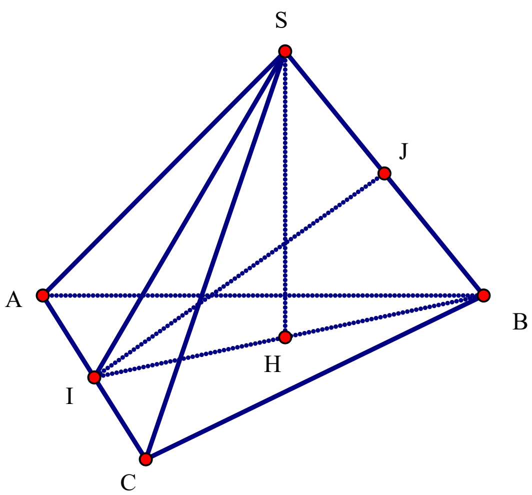
Từ, và suy ra $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Câu 28: Cho hình chóp S.ABC có $SA=SC=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $SB=a\sqrt{2}$, $AB=BC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC=a$. Tính góc $\left(SB,ABC\right)$

A. 90^0 **B.** 45^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Lời giải

Chọn B



Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, SB, H là điểm chiếu của S lên IB

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Có $SA = SC$. Suy ra ΔSAC cân tại S, Suy ra $SI \perp AC$

Có SA=SC, $BA = BC$, BC chung. Suy ra $\Delta SAB = \Delta SCB$. Suy ra $JA = JC$.

Suy ra ΔJAC cân tại J, I là trung điểm AC. Suy ra $IJ \perp AC$

Có $AC \perp SI; AC \perp IJ$. Suy ra $AC \perp (SIB)$

Suy ra $(ABC) \perp (SIB)$, Có $(ABC) \cap (SIB) = IB$, $SH \perp IB$. Suy ra $SH \perp (ABC)$

Suy ra BH là hình chiếu của SB lên (ABC)

Suy ra $(SB,(ABC)) = \widehat{SBI}$

Có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $IB = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \frac{a}{2}$, $SB = a\sqrt{2}$

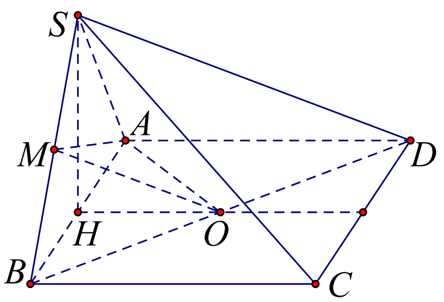
Có $\text{Cos}\,\widehat{SBI} = \frac{SB^2 + IB^2 - SI^2}{2SB.IB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Suy ra $\widehat{SBI} = 45^0$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Cosin của góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{4}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, SB; O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Ta có $MO // SD$.

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$, mà $SB \perp AM$ nên $AM \perp (SBC)$.

Xét tam giác AMO, có:

$AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$;

$$MO=\frac{1}{2}SD=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{SH^2+HA^2+AD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+3a^2}=a.$$

$\Rightarrow \Delta AMO$ cân tại O

$$\Rightarrow \sin\widehat{AMO}=\frac{d(O;AM)}{OM}=\frac{\sqrt{MO^2-\frac{AM^2}{4}}}{OM}=\frac{\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{16}}}{a}=\frac{\sqrt{13}}{4}.$$

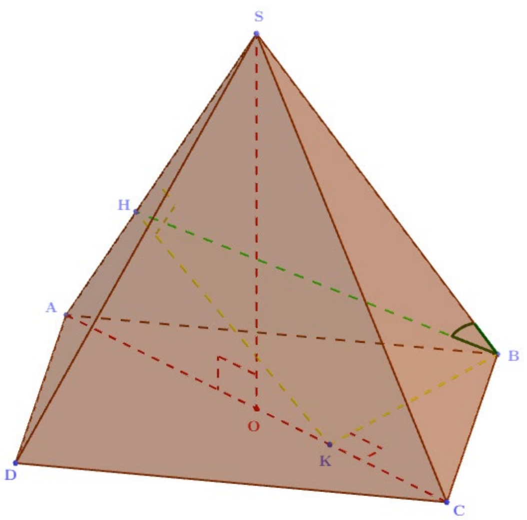
$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{SD;(SBC)}\right)=\sin\widehat{AMO}=\frac{\sqrt{13}}{4}$$

Câu 30: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a\sqrt{2}$; $BC=a$ và $SA=SB=SC=SD=2a$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên AC, H là hình chiếu vuông góc của K trên SA. Tính cosin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (BKH).

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{8}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



+ Ta có $BD=AC=a\sqrt{3}$; $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

$$\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{BC^2}+\frac{1}{BA^2}=\frac{3}{2a^2}\Leftrightarrow BK=a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$AK=\frac{2}{3}AC=\frac{2a}{\sqrt{3}};BE=a\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}BK$ nên K là trọng tâm của tam giác BCD.

+ Ta dễ dàng chứng minh được $SH\perp(BKH)\Rightarrow \widehat{SB,(BKH)}=\widehat{SBH}$.

+ Ta có $\Delta SOA\backsim\Delta KHA(S=K)\Rightarrow KH.SA=SO.KA\Leftrightarrow KH=\frac{a\sqrt{39}}{6}$.

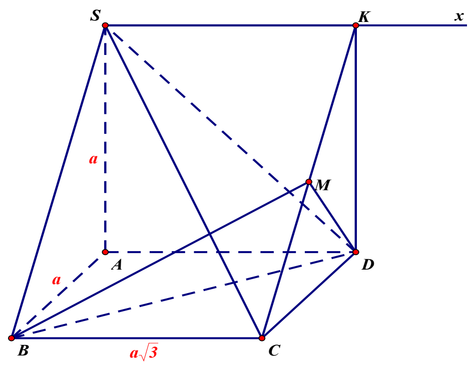
Vậy $\cos\widehat{SBH} = \frac{BH}{SB} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$ với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $Sx // BC$, dựng $K \in Sx$ sao cho $SK = BC$.

Trong (KDC), kẻ $DM \perp KC \Rightarrow DM \perp (SBCK) \Rightarrow MB$ là hình chiếu vuông góc của DB lên $(SBCK)$. Khi đó: $\widehat{BD,(SBC)} = \widehat{BD,(SBCK)} = \widehat{MBD}$.

Ta có: $\sin\widehat{MBD} = \frac{DM}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

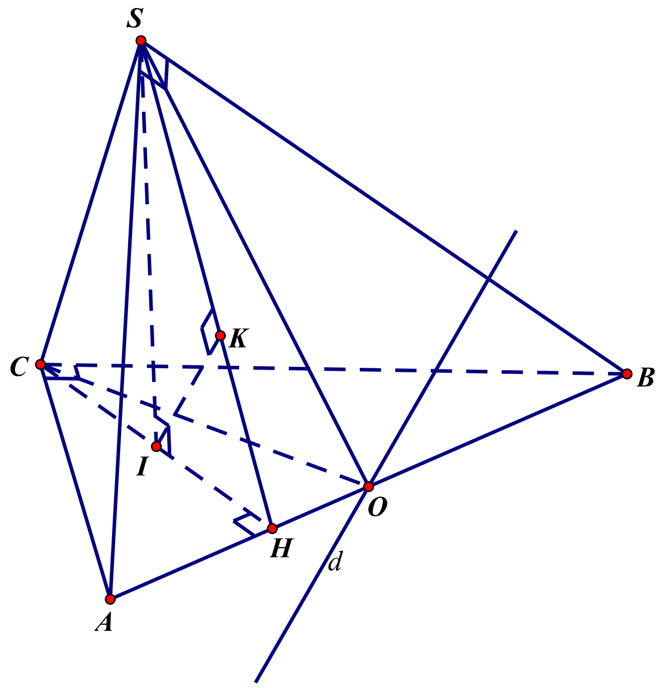
Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, CH vuông góc với AB tại H, I là trung điểm của đoạn HC. Biết SI vuông góc với mặt phẳng đáy, $\widehat{ASB} = 90°$. Gọi O là trung điểm của đoạn AB, O' là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$. Góc tạo bởi đường thẳng OO' và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Do $\widehat{ASB} = 90°$ nên tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABI$ nằm trên đường thẳng d đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và $d \perp (SAB)$. (1)

Trong mặt phẳng (SCH) kẻ $IK \perp SH$ tại K.

Theo giả thiết $SI \perp (ABC)$ suy ra $SI \perp AB$. Từ $SI \perp AB$ và $AB \perp CH$ suy ra $AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp IK$.

Từ $IK \perp SH$ và $AB \perp IK$ ta có $IK \perp (SAB)$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $IK \parallel d$. Bởi vậy $\widehat{(OO';(ABC))} = \widehat{(d;(ABC))} = \widehat{(IK;(ABC))}$.

Vì $(SCH) \perp (ABC)$ nên IH là hình chiếu vuông góc của IK trên mặt phẳng (ABC). Bởi vậy $\widehat{(IK;(ABC))} = \widehat{(IK, IH)} = \widehat{HIK} = \widehat{HSI}$.

Do tam giác ABC vuông tại C và SAB vuông tại S nên $CO = SO = \frac{AB}{2}$.

Xét hai tam giác vuông CHO và SHO có $CO = SO$, cạnh OH chung nên $\Delta CHO = \Delta SHO$(c.g.c), bởi vậy $CH = SH$.

Xét tam giác SIH vuông tại I có $IH = \frac{CH}{2} = \frac{SH}{2}$, ta có $\sin \widehat{HSI} = \frac{IH}{SH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HSI} = 30°$.

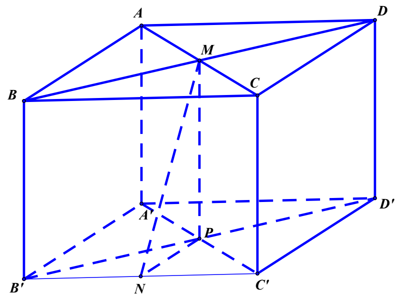
Vậy $\widehat{(OO';(ABC))} = 30°$.

Câu 33: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt trung điểm của cạnh AC và $B'C'$. Gọi α là góc hợp giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(A'B'C'D')$. Tính giá trị của $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $AB = a > 0$. Gọi P là trung điểm của cạnh $A'C' \Rightarrow MP \perp (A'B'C'D')$.

Suy ra $\alpha = (MN,(A'B'C'D')) = \widehat{MNP}$.

Xét tam giác vuông MNP ta có $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

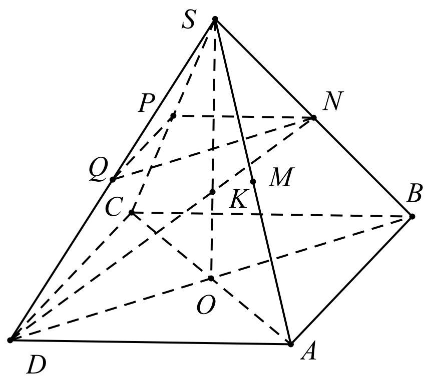
$\Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{MNP} = \dfrac{MP}{MN} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 34: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có $SA = \sqrt{5}a$, $AB = a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính cosin của góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Do M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD nên mặt phẳng $(ABCD)$ song song mặt phẳng (MPQ) suy ra góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng (MQP) cũng là góc giữa đường thẳng DN và mặt phẳng $(ABCD)$.

Có $K = SO \cap DN$. Do $S.ABCD$ hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra hình chiếu vuông góc của đường thẳng DN trên mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng DO nên $\widehat{(DN,(ABCD))} = \widehat{(DN,DO)}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Xét tam giác vuông SOA có $OA=\frac{\sqrt{2}}{2}a; SA=\sqrt{5}a \Rightarrow SO=\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. Mà K là trọng tâm tam giác $SBD \Rightarrow OK=\frac{1}{3}SO=\frac{\sqrt{2}a}{2}=OD \Rightarrow \Delta OKD$ vuông cân tại O hay $\widehat{KDO}=45^0$.

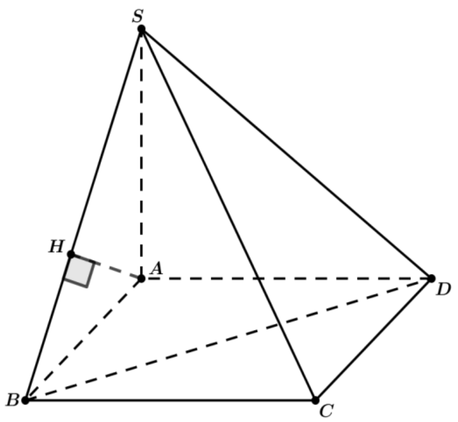
Hay $\widehat{(DN,(MPQ))}=45^0 \Rightarrow \cos\widehat{(DN,(MPQ))}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, $SA=a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin\alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC).

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{8}$ **B.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{5}$

Lời giải

Chọn C



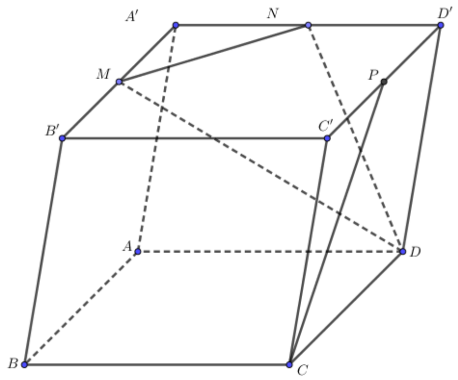
$ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD=2a$, ta có $AD//(SBC)$ nên suy ra

$d[D,(SBC)]=d[A,(SBC)]=AH$ với $AH\perp SB$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên H là trung điểm của SB suy ra $AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

vậy $\sin\widehat{BD,(SBC)}=\frac{d[D,(SBC)]}{BD}=\frac{d[A,(SBC)]}{BD}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

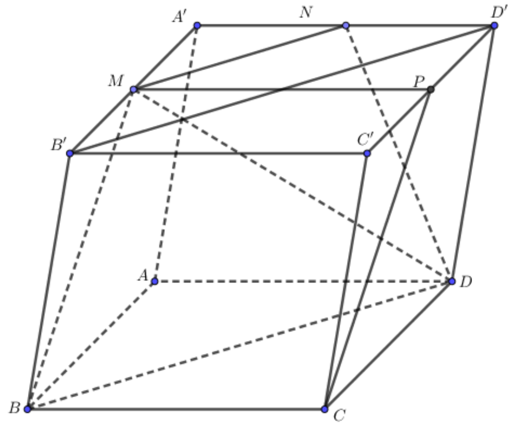
Câu 36: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $A'D'$, $C'D'$. Góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (DMN) bằng



A. 60°. **B.** 30°. **C.** 0°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác $A'B'D'$ có:

M là trung điểm của $A'B'$ và N là trung điểm của $A'D'$

nên MN là đường trung bình của tam giác $A'B'D'$

Suy ra $MN \,//\, B'D'$, mà $B'D' \,//\, BD$ nên $MN \,//\, BD \Rightarrow M, N, B, D$ đồng phẳng.

Ta có $\begin{cases} MP \,//=\, B'C' \\ BC \,//=\, B'C' \end{cases} \Rightarrow MP \,//=\, BC$ nên tứ giác $MPCB$ là hình bình hành $\Rightarrow CP \,//\, BM$.

Ta có $\begin{cases} CP \,//\, BM \\ BM \subset (BMND) \end{cases} \Rightarrow CP \,//\, (BMND) \Rightarrow CP \,//\, (MND)$.

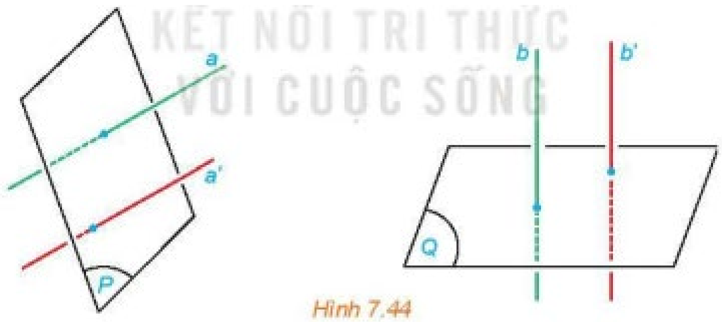
Do đó $(CP,(MND)) = 0^\circ$.

BÀI 25: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG, HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

HĐ1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy hai đường thẳng $a,\ a'$ cùng vuông góc với (P), hai đường thẳng $b,\ b'$ cùng vuông góc với (Q). Tìm mối quan hệ giữa các góc (a,b) và $(a',\ b')$.



Hình 7.44

Lời giải

Vì $a,\ a'$ đều vuông góc với (P), $b,\ b'$ đều vuông góc với (Q) nên ta có thể suy ra:

- Góc giữa a và b bằng góc giữa a' và b' (vì hai góc này đều là góc giữa hai đường thẳng vuông góc với nhau).
- Góc giữa a và a' bằng góc giữa b và b' (vì hai góc này đều là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với hai mặt phẳng khác nhau).
- Hai góc (a,b) và (a',b') đều bằng góc giữa đường thẳng a (a') và đường thẳng b (b').

Từ đó suy ra, góc (a,b) bằng góc (a',b') (do cùng bằng góc giữa a và b, và giữa a' và b' đều có mối quan hệ tương tự). Vậy mối quan hệ giữa hai góc (a,b) và (a',b') là bằng nhau.

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy các đường thẳng a,b tương ứng vuông góc với $(P),(Q)$. Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a,b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

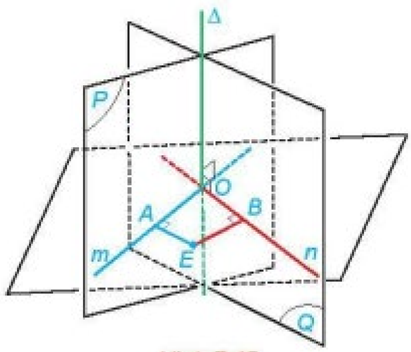
Chú ý. Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0 \le \varphi \le 90^\circ$.

? Góc giữa hai mặt phẳng bằng 0° khi nào, khác 0° khi nào?

Ví dụ 1. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy một điểm O bất kì thuộc đường thẳng Δ. Gọi m,n là các đường thẳng đi qua O, tương ứng thuộc $(P),(Q)$ và vuông góc với Δ. Chứng minh rằng góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n.

Lời giải (H.7.45)

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



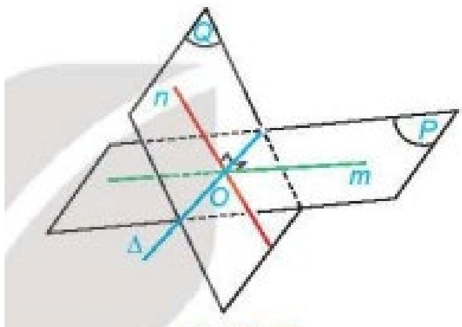
Hình 7.45

Trong mặt phẳng chứa m,n, lấy một điểm E không thuộc các đường thẳng m,n. Gọi A,B tương ứng là hình chiếu của E trên m,n. Khi đó Δ vuông góc với các đường thẳng EA,EB.

Do $EA\perp m, EA\perp \Delta$ nên $EA\perp (P)$. Tương tự, $EB\perp (Q)$. Do đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa EA và EB.

$\widehat{OAE}=90^\circ=\widehat{OBE}$ nên bốn điểm O,A,E,B thuộc một đường tròn. Do đó, $\widehat{AOB}$ và $\widehat{AEB}$ bằng hoặc bù nhau, tức là $(EA,EB)=(m,n)$. Vậy góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n.

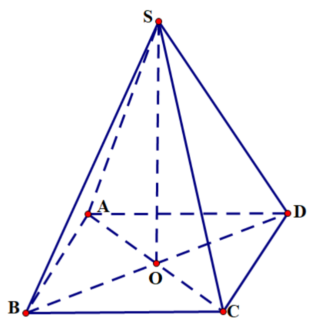
Nhận xét. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Lấy hai đường thẳng m,n tương ứng thuộc $(P),(Q)$ và cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ, cắt $(P),(Q)$ tương ứng theo các giao tuyến m,n). Khi đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n. Đặc biệt, (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n.



Hình 7.46

Luyện tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật có tâm O, $SO\perp (ABCD)$. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình vuông.

Lời giải



Vì $SO \perp (ABCD)$, ta có SO song song với đường chéo AC và BD của hình vuông $ABCD$. Do đó, để chứng minh $AC \perp SO$ và $BD \perp SO$. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, nên AC vuông góc với BD. Do đó, ta có $AC \perp SO$ và $BD \perp SO$.

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật có tâm O, nên $OA = OC$ và $OB = OD$. Từ đó, ta có $SA = SB$ và $\widehat{ASO} = \widehat{BSO}$. Do đó, tam giác ASO và BSO đồng dạng, từ đó suy ra $SA \perp SO$ và $SB \perp SO$.

Vì $ABCD$ là hình vuông, nên AC vuông góc với BD. Khi đó, góc giữa (SAC) và (SBD) là góc giữa đường thẳng AC và BD, mà đó chính là góc vuông. Do đó, (SAC) và (SBD) vuông góc với nhau.

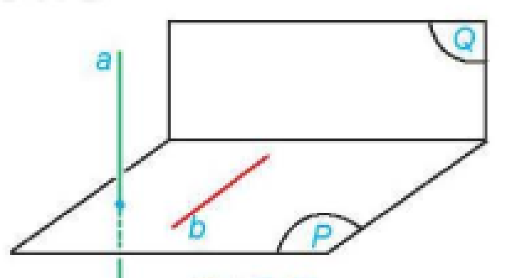
2. ĐIỀU KIỆN HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

HĐ2. Cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b vuông góc với mặt phẳng (Q). Lấy một đường thẳng $a \perp (P)$ (H.7.47).

a) Tính góc giữa a và b.

b) Tính góc giữa (P) và (Q).

Lời giải



Hình 7.47

a) Chọn một điểm A trên đường thẳng a và kết nối A với bằng một đường thẳng tạo thành một mặt phẳng (S) vuông góc với cả a và b. Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng b, ta có thể xây được một mặt phẳng chứa a và b là mặt phẳng (T) qua A và H.

Khi đó, góc giữa a và b bằng góc giữa hai mặt phẳng (S) và (T).

b) Chọn một điểm B trên đường thẳng b và kết nối B với một điểm C trên (Q) bằng một đường thẳng tạo thành một mặt phẳng (U) vuông góc với cả b và (Q). Gọi K là hình chiếu của B trên (P), ta có thể xây được đường thẳng c là đường thẳng (KL) đi qua K và vuông góc với (P).

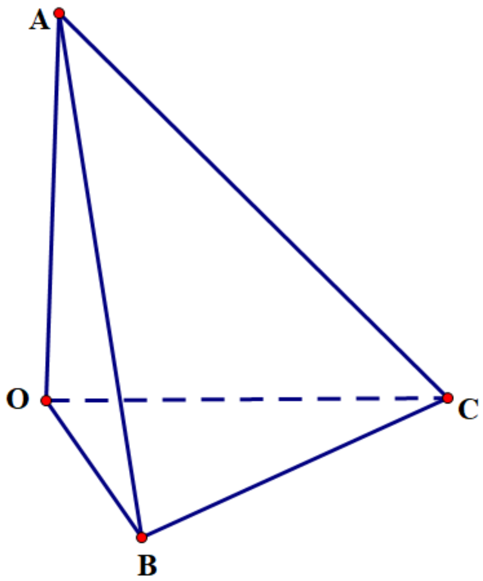
Khi đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa đường thẳng b và c.

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA vuông góc với OB và OC. Chứng minh rằng các mặt phẳng (OAB) và (OAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC).

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Do OA vuông góc với OB và OC nên $OA \perp (OBC)$. Mặt khác, các mặt phẳng $(OAB),(OAC)$ chứa OA Do đó chúng cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC).

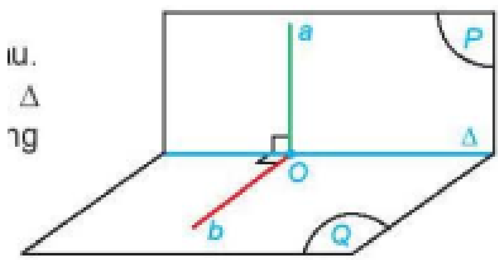
Luyện tập 2. Trong HĐ1 của Bài 23, ta đã nhận ra rằng đường thẳng nối các bản lề của cửa phòng vuông góc với sàn nhà. Hãy giải thích vì sao trong quá trình đóng - mở, cánh cửa luôn vuông góc với sàn nhà.

3. TÍNH CHẤT HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

HĐ3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Kẻ đường thẳng a thuộc (P) và vuông góc với giao tuyến Δ của (P) và (Q). Gọi O là giao điểm của a và Δ. Trong mặt phẳng (Q), gọi b là đường thẳng vuông góc với Δ tại O.

a) Tính góc giữa a và b.

b) Tìm mối quan hệ giữa a và (Q).



Hình 7.48

Lời giải

a) Vì a là đường thẳng vuông góc với giao tuyến Δ của (P) *và* (Q), nên khi kéo a sang mặt phẳng (Q), đường a sẽ song song với đường b (vì b là đường vuông góc với Δ).

Do đó, góc giữa a *và* b là 0°.

b) Mỗi quan hệ giữa a *và* (Q):

- Đường a và đường b là hai đường thẳng vuông góc với nhau.
- Điểm O là giao điểm của đường a *và* Δ. Khi kéo đường a sang mặt phẳng (Q), ta thu được đường a' song song với a. Do đó, đường a' cũng vuông góc với đường b.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

- Đường a và đường a' nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau, do đó (Q) và mặt phẳng qua a *và* a' cũng là hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

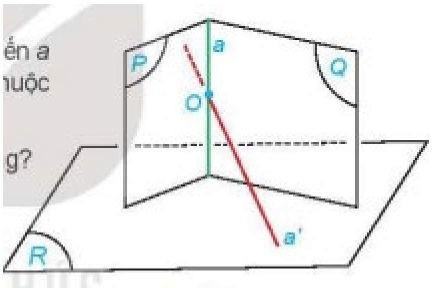
Nhận xét. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P).

HĐ4. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến a và cùng vuông góc với mặt phẳng (R). Gọi O là một điểm thuộc a và a' là đường thẳng qua O và vuông góc với (R).

a)Hỏi a' có nằm trong các mặt phẳng $(P),(Q)$ hay không?

b) Tìm mối quan hệ giữa a và a'.

c) Tìm mối quan hệ giữa a và (R).



Hình 7.49

Lời giải

a) Vì a là giao tuyến của (P) *và* (Q) cùng vuông góc với (R), nên a nằm trong cả hai mặt phẳng (P) *và* (Q).

b) Vì a' vuông góc với (R), nên khi kéo a' sang mặt phẳng (P) hoặc (Q), a' sẽ vẫn vuông góc với đường thẳng nối hai điểm bất kỳ trên mỗi mặt phẳng đó. Vì vậy, a' song song với a.

c) Giao tuyến a của (P) và (Q) cắt mặt phẳng (R) tạo thành một góc vuông. Do đó, a vuông góc với mặt phẳng (R).

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

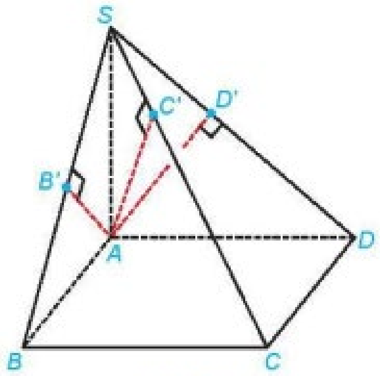
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA\perp(ABCD)$. Gọi B',C',D' tương ứng là hình chiếu của A trên SB,SC,SD. Chứng minh rằng:

a) $(SBC)\perp(SAB), AB'\perp(SBC), AD'\perp(SCD)$.

b) Các điểm A,B',C',D' cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Hình 7.50

a) Vì $BC \perp SA$ và $BC \perp AB$ nên $BC \perp (SAB)$. Do đó, $(SBC) \perp (SAB)$. Đường thẳng AB' thuộc (SAB) và vuông góc với SB nên $AB' \perp (SBC)$. Tương tự $AD' \perp (SCD)$.

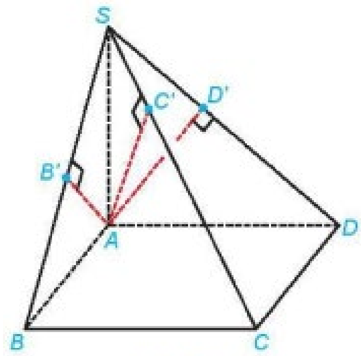
b) Từ câu a) ta có $AB' \perp SC, AD' \perp SC$. Các đường thẳng AB', AC', AD' cùng đi qua A và vuông góc với SC nên cùng thuộc một mặt phẳng. Do đó bốn điểm A, B', C', D' cùng thuộc một mặt phẳng.

Luyện tập 3. Với giả thiết như ở Ví dụ 3 , chứng minh rằng:

a) Các mặt phẳng $(AB'C'D')$ và $(ABCD)$ cùng vuông góc với (SAC);

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C'D')$ và $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ và vuông góc với AC.

Lời giải



Hình 7.50

a) Ta đã chứng minh được $AB' \perp (SBC) và AD' \perp (SCD)$. Vì vậy, AB' $và$ AD' cùng nằm trong mặt phẳng vuông góc với đường) thẳng $(SBC) và$ (SCD) khi đi qua A, tức là cùng vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Tương tự, ta có $B'C' \perp (SAB) và B'D' \perp (SCD)$, nên $B'C'$ $và$ $B'D'$ cùng nằm trong mặt phẳng vuông góc với đường thẳng (SAB) $và$ (SCD) khi đi qua A, tức là cùng vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Vậy $(AB'C'D')$ $và$ $(ABCD)$ đều vuông góc với (SAC).

b) Từ câu a, ta biết rằng mặt phẳng $(ABCD) \perp (SAC)$, do đó đường thẳng đi qua A và vuông góc với (SAC) chính là đường thẳng AC.

Do đó, để chứng minh giao tuyến của hai mặt phẳng $(AB'C'D')$ $và$ $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua A, nằm trong mặt phẳng $(ABCD) \perp AC$, ta chỉ cần chứng minh rằng đường thẳng AC đi qua các điểm B', C', D'.

Từ đó suy ra đường thẳng AC là đường thẳng giao của hai mặt phẳng $(AB'C'D')$ và $(ABCD)$, và nó nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ và vuông góc với AC.

4. GÓC NHỊ DIỆN

HĐ5. Một tài liệu hướng dẫn rằng đối với ghế bàn ăn, nên thiết kế lưng ghế tạo với mặt ghế một góc có số đo từ 100° đến 105°. Trong Hình 7.51, các tia Ox, Oy được vẽ tương ứng trên mặt ghế, lưng ghế đồng thời vuông góc với giao tuyến a của mặt ghế và lưng ghế.

a) Theo tài liệu nói trên, góc nào trong hình nên có số đo từ 100° đến 105°?

b) Nếu thiết kế theo hướng dẫn đó thì góc giữa mặt phẳng chứa mặt ghế và mặt phẳng chứa lưng ghế có thể nhận số đo từ bao nhiêu đến bao nhiêu độ?

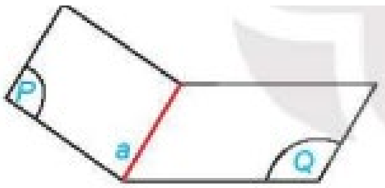
Hình 7.51

Lời giải

a) Theo tài liệu nói trên, góc giữa mặt ghế và lưng ghế $\widehat{xOy}$ cần có số đo từ 100° đến $105°$.

b) Góc giữa mặt phẳng chứa mặt ghế và mặt phẳng chứa lưng ghế là góc giữa hai mặt phẳng đó, và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng. Góc này là góc giữa hai đường thẳng vuông góc với giao tuyến a của hai mặt phẳng đó. Vì vậy, góc giữa hai mặt phẳng này là góc giữa hai đường thẳng Ox và Oy, và có thể nhận bất kỳ giá trị nào từ 0 độ đến 90 độ.

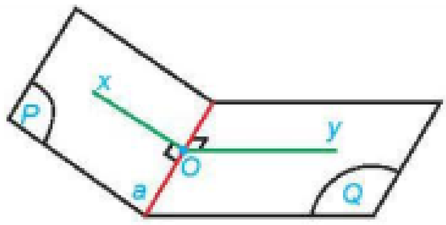
Hình gồm hai nửa mặt phẳng $(P),(Q)$ có chung bờ a được gọi là một góc nhị diện, kí hiệu là $[P,a,Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng $(P),(Q)$ tương ứng được gọi là cạnh và các mặt của góc nhị diện đó.



Hình 7.52

Mỗi đường thẳng a trong một mặt phẳng chia mặt phẳng thành hai phần, mỗi phần cùng với a là một nửa mặt phẳng bờ a.

Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P,a,Q]$ vẽ các tia Ox, Oy tương ứng thuộc $(P),(Q)$ và vuông góc với a. Góc xOy được gọi là một góc phẳng của góc nhị diện $[P,a,Q]$ (gọi tắt là góc phẳng nhị diện). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a, được gọi là số đo của góc nhị diện $[P,a,Q]$.



Hình 7.53

Mặt phẳng chứa góc phẳng nhị diện xOy của $[P, a, Q]$ vuông góc với cạnh a.

Chú ý

- Số đo của góc nhị diện có thể nhận giá trị từ 0° đến 180°. Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90°.
- Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a, ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt tương ứng chứa M, N.

Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng

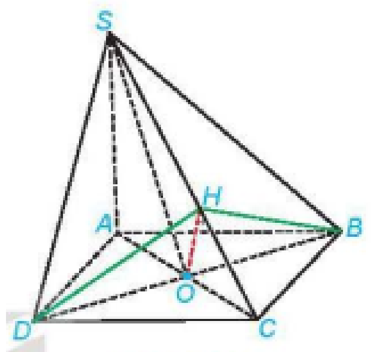
$a, AC = a, SA = \frac{1}{2}a$.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O trên SC.

a) Tính số đo của các góc nhị diện $[B, SA, D]; [S, BD, A]; [S, BD, C]$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SC, D]$.

Lời giải. (H.7.54)



Hình 7.54

a) Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA. Vậy $\widehat{BAD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$.

Hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $AC =$ a nên các tam giác ABC, ACD đều. Do đó $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 120°.

Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SA$ nên $BD \perp (SAC)$. Vậy AC và SO vuông góc với BD. Suy ra $\widehat{AOS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, A]$ và $\widehat{COS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, BD, C]$.

Tam giác SAO vuông tại A và có $SA=\frac{1}{2}a=AO$ nên $\widehat{AOS}=45^{\circ}$. Suy ra $\widehat{COS}=180^{\circ}-\widehat{AOS}=135^{\circ}$.

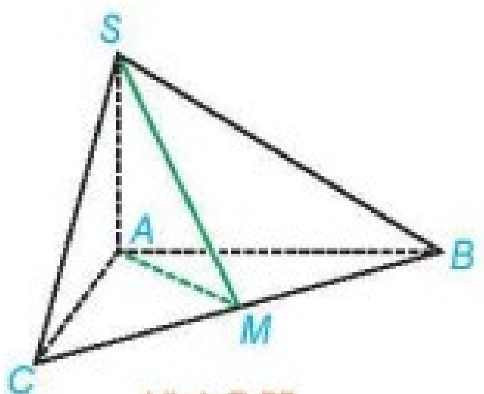
Vậy các góc nhị diện $[S,BD,A],[S,BD,C]$ tương ứng có số đo là $45^{\circ},135^{\circ}$.

b) Theo chứng minh trên, $BD\perp(SAC)$ nên $BD\perp SC$. Mătkhác, $OH\perp SC$ nên $SC\perp(BOD)$. Do đó, $\widehat{BHD}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[B,SC,D]$.

Luyện tập 4. Cho hình chóp $S\cdot ABC$ có $SA\perp(ABC), AB=AC=a, \widehat{BAC}=120^{\circ}, SA=\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{SMA}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S,BC,A]$.

b) Tính số đo của góc nhị diện $[S,BC,A]$.



Hình 7.55

Lời giải

a) Vì $SA\perp(ABC)$ nên $\widehat{SAB}=\widehat{SAC}=30^{\circ}$. Do đó, tam giác ABC là tam giác đều với $AB=AC=a$. Khi đó, $BM=CM=\frac{a}{2}$ và $SM\perp(ABC)$ vì SM là đường cao của tam giác ABC. Do đó, tam giác SMB và tam giác SMC là hai tam giác cân với SM là đường trung trực của BC. Vì vậy, $\widehat{SMB}=\widehat{SMC}$. Từ đó, suy ra $\widehat{SMA}=180^{\circ}-2\widehat{SMB}=180^{\circ}-2\widehat{SMC}$, tức là $\widehat{SMA}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S,BC,A]$.

b) Gọi I là trung điểm của SA. Ta có $\widehat{BAC}=120^{\circ}$, nên tam giác ABC là tam giác đều. Khi đó, $BC=a$ nên ta

có: $MI=\frac{1}{2}SI=\frac{a}{4\sqrt{3}}$, $\text{MA}=\sqrt{MI^2+IA^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{4\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{a}{4\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{a}{2}$

Suy ra, tam giác SMA cũng là tam giác đều. Do đó, $\widehat{SMA}=60^{\circ}$.

$\widehat{SMB}+\widehat{BMA}+\widehat{AMS}=180^{\circ}$. Vì BM là đường trung trực của AC, nên $\widehat{BMA}=30°$.

Suy ra: $\widehat{SMB}=180^{\circ}-\widehat{BMA}-\widehat{AMS}=180^{\circ}-30^{\circ}-60^{\circ}=90^{\circ}$.

Vậy góc nhị diện [S, BC, A] có số đo là 90^{0}.

Vận dụng 1. Trong cửa sổ ở Hình 7.56 , cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính 80 cm, bản lề được đính ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi $d=40$ cm.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Hình 7.56

Lời giải

Gọi X là giao điểm của đường thẳng qua M song song với AB và đường thẳng qua O vuông góc với AB. Ta có $XM = d = 40\ cm$ và $XO = \frac{AB}{2} = 40\ cm.$

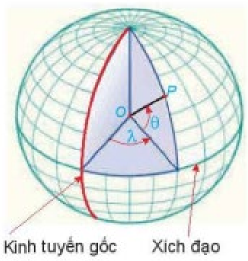
Do tam giác OXM vuông tại O nên ta có: $cos(\widehat{OXM}) = \frac{OM}{OX} = \frac{40}{40} = 1$

Từ đó, ta suy ra $\widehat{OXM} = 0^\circ$, $cos(\widehat{XOM}) = \frac{XM}{OX} = \frac{40}{40} = 1$

Từ đó, ta suy ra $\widehat{XOM} = 0^\circ$ ta có: $\widehat{AOM} = \widehat{AOX} + \widehat{XOM} = \widehat{AOX} = cos^{-1}(0,5) \approx 60^\circ$

Vậy số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi d = 40 cm là 60°.

Trở lại vấn đề được nêu ở đầu bài học. Trên Trái Đất, mỗi kinh tuyến là một nửa đường tròn có đường kính là trục của Trái Đất (đoạn thẳng nối cực Bắc và cực Nam). Kinh tuyến gốc là kinh tuyến đi qua Đài Thiên văn Greeanwich ở London. Mặt phẳng chứa kinh tuyến gốc chia Trái Đất làm hai nửa là Đông và Tây, nước ta nằm ở nửa Đông. Kinh độ của một điểm P trên Trái Đất là số đo của góc nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa kinh tuyến gốc và kinh tuyến đi qua P (cạnh của góc nhị diện này là trục Trái Đất). Do đó, các điểm trên cùng kinh tuyến thì có cùng kinh độ. Vĩ độ của điểm P là số đo của góc giữa mặt phẳng chứa đường xích đạo và đường thẳng nối P với tâm Trái Đất. Mỗi điểm trên Trái Đất sẽ thuộc một trong hai bán cầu Bắc hoặc Nam và thuộc nửa Đông hay nửa Tây. Vì vậy, đi kèm số đo vĩ độ còn có chữ E hoặc W nếu vị tri đó tương ứng thuộc nửa Đông, nửa Tây, và có chữ N, S nếu vị trí đó tương ứng ở bán cầu Bắc, bán cầu Nam. Chẳng hạn, Bia Chủ quyền đảo Song Tử Tây thuộc xã Song Tử Tây, huyện Hoàng Sa, tỉnh Khánh Hoà, có vị trí: 11²2'55"N, $114^\circ 8'00'' E$. (Theo *baokhanhhoa. vn*).



Hình 7.57

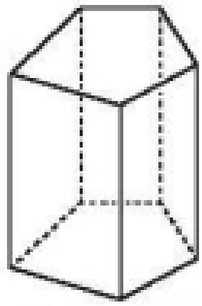
5. MỘT SỐ HÌNH LĂNG TRỤ ĐẶC BIỆT

Trong chương IV, ta đã biết khái niệm hình lăng trụ. Với các kiến thức về quan hệ vuông góc, ta có thể định nghĩa một số hình lăng trụ đặc biệt sau đây.

a) Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Hình 7.58

HĐ6. Các mặt bên của lăng trụ đứng là các hình gì và các mặt bên đó có vuông góc với mặt đáy không? Vì sao?

Lời giải

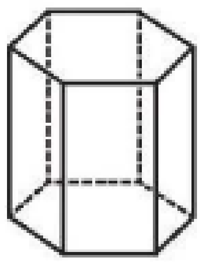
Các mặt bên của lăng trụ đứng là các hình chữ nhật, vì chúng được tạo thành bởi cặp đối xứng của các hình chữ nhật đồng dạng và song song với mặt đáy. Các cạnh của các hình chữ nhật này bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Các mặt bên của lăng trụ đứng vuông góc với mặt đáy, vì chúng được tạo thành bởi việc kéo các cạnh của hình đáy theo hướng vuông góc so với mặt đáy. Do đó, các mặt bên là các hình chữ nhật có hai cạnh đối diện vuông góc với mặt đáy.

Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

b) Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.



Hình 7.59

HĐ7. Các mặt bên của hình lăng trụ đều có phải là các hình chữ nhật có cùng kích thước hay không? Vì sao?

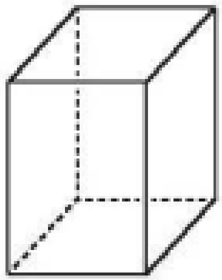
Lời giải

Các mặt bên của một hình lăng trụ đều là các hình chữ nhật có cùng kích thước, khi đường cong của đáy và đỉnh của lăng trụ nằm trên cùng một đường thẳng song song với mặt đáy, thì các hình chữ nhật bên của lăng trụ có cùng kích thước, vì chúng đều có chiều cao bằng độ dài của cạnh đáy và chiều dài bằng chu vi của đáy.

Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.

c) Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng, có đáy là hình bình hành.



Hình 7.60

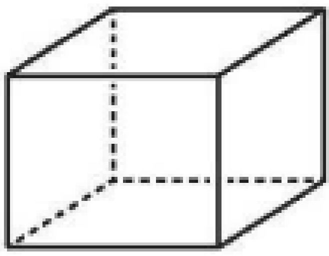
HĐ8. Trong 6 mặt của hình hộp đứng, có ít nhất bao nhiêu mặt là hình chữ nhật? Vì sao?

Lời giải

Trong 6 mặt của hình hộp đứng, ít nhất 4 mặt là hình chữ nhật. Đó là vì hình hộp được tạo thành từ hai hình vuông kề nhau và các đường thẳng nối các cạnh của hai hình vuông này đều là các đoạn thẳng và song song với các mặt hình vuông. Do đó, các mặt đối diện của hình hộp đó là các hình chữ nhật, tức là ít nhất có 4 mặt của hình hộp là hình chữ nhật.
Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.

d) Hình hộp chữ nhật

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.



Hình 7.61

HĐ9.

a) Hình hộp chữ nhật có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật? Vì sao?
b) Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường hay không? Vì sao?

Lời giải

a) Hình hộp chữ nhật có 6 mặt, trong đó 2 mặt đối diện là hình chữ nhật và các mặt bên là hình chữ nhật nữa. Vì vậy, hình hộp chữ nhật có tổng cộng 4 mặt là hình chữ nhật.

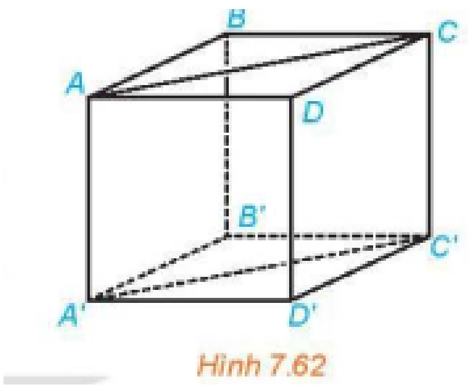
b) Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Điều này bởi vì hình hộp chữ nhật có đối xứng giữa các đường chéo dài. Một đường chéo là đoạn thẳng nối hai đỉnh không kề nhau của hình chữ nhật. Vì hình chữ nhật có hai cặp đỉnh đối diện, nên hình hộp chữ nhật sẽ có 2 đường chéo dài, mỗi đường chéo nối hai đỉnh đối diện của hình hộp. Do đó, do hình hộp chữ nhật có đối xứng giữa các đường chéo dài, nên các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường chéo.

Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau

và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ví dụ 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $AA'CC'$ là một hình chữ nhật.

Lời giải. (H. 7.62)



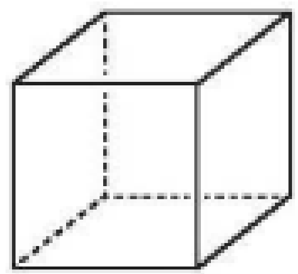
Hình 7.62

Ta có $AA'=CC'$ và $AA'//CC'$ (vì AA',CC' cùng bằng và cùng song song với DD'. Do đó $ACC'A'$ là một hình bình hành.

Mặt khác, $AA'\perp(A'B'C'D')$ nên $AA'\perp A'C'$. Do đó $ACC'A'$ là một hình chữ nhật.

e) Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.


Hình 7.63

HĐ10. Các mặt của một hình lập phương là các hình gì? Vì sao?

Lời giải

Mặt của một hình lập phương là các hình vuông.

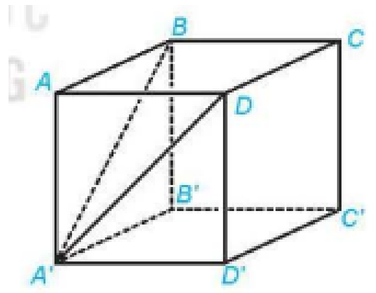
Vì hình lập phương có 6 mặt, mỗi mặt đều là một hình vuông có cạnh bằng nhau và góc giữa các cạnh là vuông góc. Do đó, các mặt của hình lập phương đều là các hình vuông.

Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.

Chú ý. Khi đáy của hình lăng trụ đứng (đều) là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... đôi khi ta cũng tương ứng gọi rõ là hình lăng trụ đứng (đều) tam giác, tứ giác, ngũ giác,...

Ví dụ 6. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $A'BD$ là tam giác đều.

Lời giải. (H.7.64)



Hình 7.64

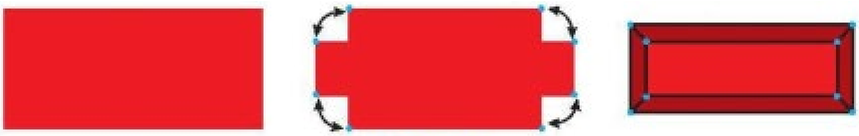
Gọi a là độ dài các cạnh của hình lập phương. Do các mặt của hình lập phương là các hình vuông nên

GV: TRẦN ĐÌNH CỪ – 0834332133

$$A'D = \sqrt{AA'^2 + AD^2} = a\sqrt{2};$$
$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2};$$
$$A'B = \sqrt{AA' + AB^2} = a\sqrt{2}.$$

Tam giác $A'BC$ có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều.

Vận dụng 2. Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắn các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.



Hình 7.65

Lời giải

Do các hình vuông được cắt ra từ tấm tôn góc ban đầu có kích thước giống nhau, do đó khi ghép các mép lại với nhau, ta sẽ có được đường biên của chiếc hộp chữ nhật. Các cạnh của hình vuông trùng với các cạnh của hộp chữ nhật, do đó khi các mặt được ghép lại với nhau, chúng sẽ tạo thành các mặt của hộp chữ nhật. Vì vậy, bằng cách này, bác Hùng đã tạo ra một chiếc thùng hình hộp chữ nhật từ một tấm tôn hình chữ nhật ban đầu.

6. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

HĐ11. Tháp lớn tại Bảo tàng Louvre ở Paris $(\mathrm{H}.7.66)$ (với kết cấu kính và kim loại) có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh bằng $34\ \mathrm{m}$, các cạnh bên bằng nhau và có độ dài xấp xỉ 32,3 m (theo *Wikipedia.org*).

Giải thích vì sao hình chiếu của đỉnh trên đáy là tâm của đáy tháp.

Hình 7.66

Lời giải

Vì tháp tại Bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp với đây là hình vuông có cạnh bằng 34m và các cạnh bên bằng nhau, do đó, khi ta ném một tia sáng từ đỉnh của tháp xuống đáy, tia sáng này sẽ đi thẳng theo phương vuông góc với mặt phẳng đáy (hình chiếu vuông góc). Vì hình chóp là một hình thể có tính chất đồng nhất, nên đường phân giác của tất cả các góc của đáy là một đường chung, chính là đường vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó, hình chiếu của đỉnh trên đáy tháp sẽ nằm ở trung tâm của hình vuông đáy.

Vì vậy, hình chiếu của đỉnh trên đây là tâm của đáy tháp.

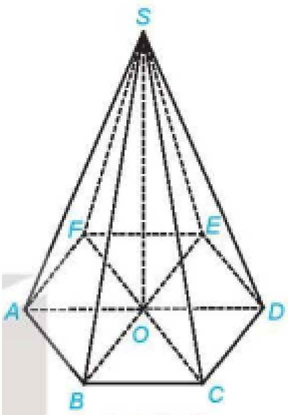
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Chú ý. Tương tự như đối với hình chóp, khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều,... đôi khi ta cũng gọi rõ chúng tương ứng là chóp tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều,...

HĐ12. Cho hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(A_1A_2\ldots A_n)$.

a) Trong trường hợp hình chóp đã cho là đều, vị trí của điểm O có gì đặc biệt đối với tam giác đều $A_1A_2\ldots A_n$?

b) Nếu đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ là đều và O là tâm của đa giác đó thì hình chóp đã cho có gì đặc biệt?



Hình 7.67

Lời giải

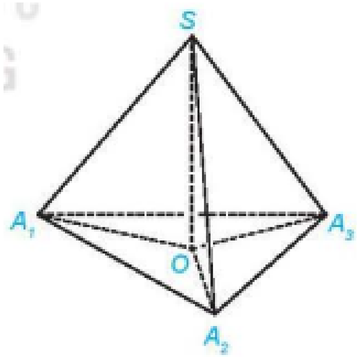
a) Trong trường hợp hình chóp đã cho là đều, vị trí của điểm O sẽ trùng với tâm của đường tròn này, tức là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$.

b) Nếu đa giác $A_1A_2...A_n$. là đều và O là tâm của đa giác đó, thì hình chóp đã cho sẽ là một hình chóp đều.

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

Ví dụ 7. Chứng minh rằng một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Lời giải. (H.7.68)



Hình 7.68

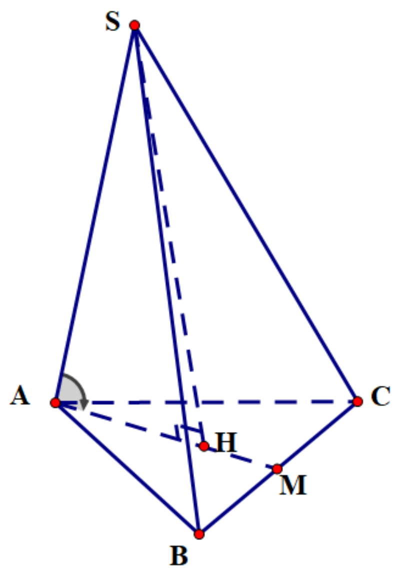
Xét hình chóp $S.A_1A_2\ldots A_n$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy.

Giả sử hình chóp là đều, khi đó O là tâm của đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n$. Các tam giác $SOA_1SOA_2,\ldots,SOA_n$ đều vuông tại O, có chung cạnh SO và có các cạnh $OA_1,OA_2,\ldots,OA_n$ bằng nhau, do đó chúng bằng nhau. Vậy $\widehat{SA_1O}=\widehat{SA_2O}=\cdots=\widehat{SA_nO}$, tức là các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau.

Ngược lại, giả sử hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau. Khi đó, $\widehat{SA_1O}=\widehat{SA_2O}=\cdots=\widehat{SA_nO}$. Từ đó suy ra các tam giác vuông $SOA_1,SOA_2,\ldots,SOA_n$ bằng nhau. Do đó, $SA_1 = SA_2 = \cdots = SA_n$. Mặt khác, $A_1A_2\ldots A_n$ là đa giác đều, do đó $S.A_1A_2\ldots A_n$ là hình chóp đều.

Luyện tập 5. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{\frac{5}{12}}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S,BC,A]$.

Lời giải



$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi M là trung điểm của BC.

ΔABC đều cạnh là a, tâm H, => $SH \perp (ABC)$

$SA = SB = SC = a\sqrt{\frac{5}{12}}$

ΔABC đều cạnh a

$=> AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, do H là trọng tâm tam giác ABC nên $AH = \frac{2}{3}AM$ => $\text{AH}=a\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$

$cos(\widehat{SAH}) = \frac{AH}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{3} : \sqrt{\frac{5}{12}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$=> \widehat{SAH} = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \approx 26,6^o$

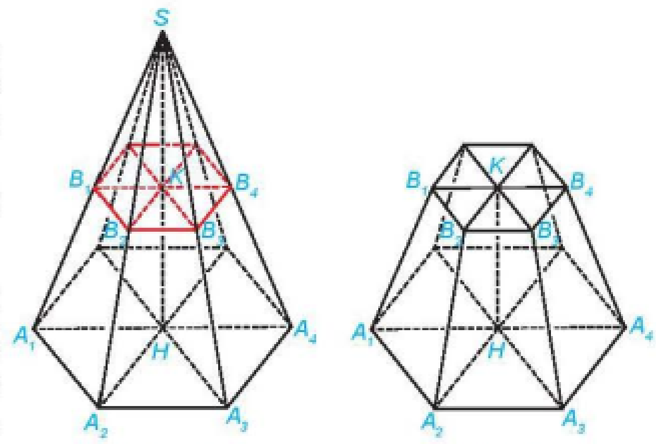
Vậy góc nhị diện $[S,\ BC,\ A]$ có số đo là: $\widehat{SAH} \approx 26,6^\circ$

HĐ13. Cho hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$. Một mặt phẳng không đi qua S và song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ tương ứng tại $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

a) Giải thích vì sao $S.B_1B_2\ldots B_n$ là một hình chóp đều.

b) Gọi H là tâm của đa giác $A_1A_2\ldots A_n$. Chứng minh rằng đường thẳng SH đi qua tâm K của đa giác đều $B_1B_2\ldots B_n$ và HK vuông góc với các mặt phẳng $(A_1A_2\ldots A_n)$, $(B_1B_2\ldots B_n)$.

GV: TRẦN ĐÌNH CỪ – 0834332133



Hình 7.69 Hình 7.70

Lời giải

a) Vì mặt phẳng cắt các cạnh SA_1, SA_2,.... SA_n, tương ứng tại $B_1, B_2, \ldots, B_n$ là một mặt phẳng song song với mặt

phẳng đáy nên các tam giác SA_1B_1, SA_2B_2,...., SA_nB_n đều và có cùng diện tích. Do đó, ta có thể kết luận rằng $S.B_1B_2...B_n$ là một hình chóp đều.

b) Từ câu a) ta suy ra rằng các đoạn thẳng $S.B_1$, SB_2, ..., SA_n đều có cùng độ dài, và K là trung điểm của đoạn thẳng $B_1B_2,...., B_n$.

Ta sử dụng tính chất của hình chóp đều và đa diện đều:

H nằm trên đường thẳng SA_1, do đó HK song song với SA_1 và vuông góc với mặt phẳng đáy $A_1A_2...A_n$.

HK vuông góc với các mặt phẳng $A_2A_3...A_nA_1$, $A_3A_4...A_1A_2$, ..., $A_nA_1...A_{(n-1)}$.

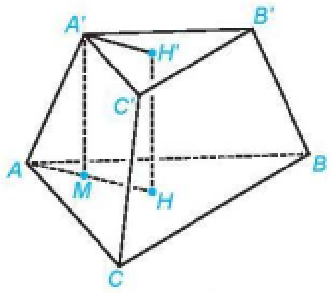
Vì các đoạn thẳng SB_1, SB_2, ..., SA_n đều có cùng độ dài nên $S.B_1B_2...B_n$ là một đa giác đều, và K là tâm của đa giác đều này. Do đó, ta có thể thấy rằng HK là đường cao của tam giác $S.B_1B_2$, vì vậy HK vuông góc với mặt phẳng $B_1B_2...B_n$.

Vậy ta đã chứng minh được rằng đường thẳng SH đi qua tâm K của đa giác đều $B_1, B_2, \ldots, B_n$ và HK vuông góc với các mặt phẳng $(A_1A_2\ldots A_n)$, $(B_1B_2\ldots B_n)$.

- Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2\ldots A_n, B_1B_2\ldots B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_1B_2$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trong HĐ13 được gọi là một hình chóp cụt đều (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2\ldots A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2\ldots B_n$), kí hiệu là $A_1A_2\ldots A_n \cdot B_1B_2\ldots B_n$.
- Các đa giác $A_1A_2\ldots A_n, B_1B_2\ldots B_n$ được gọi là hai mặt đáy, các hình thang $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2, \ldots, A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các mặt bên của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$ được gọi là các cạnh bên; các cạnh của mặt đáy được gọi là các cạnh đáy của hình chóp cụt.
- Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là đường cao của hình chóp cụt đều. Độ dài của đường cao được gọi là chiều cao của hình chóp cụt.

? Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau hay không?

Ví dụ 8. Cho hình chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có chiều cao bằng h, các đáy là các tam giác đều $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng là $a, a'\left(a > a'\right)$. Tính độ dài các cạnh bên của hình chóp cụt.



Hình 7.71

Lời giải. (H.7.71)

Gọi H, H' tương ứng là tâm của các tam giác $ABC, A'B'C'$.

Khi đó, HH' vuông góc với hai đáy của hình chóp cụt.

Trong tam giác đều ABC, ta có $HA = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Trong tam giác đều $A'B'C'$, ta có $H'A' = \dfrac{a'}{\sqrt{3}}$.

Hình thang $AHH'A'$ vuông tại H và H'. Kè $A'M \perp HA\left(M \in HA\right)$.

Ta có $AA' = \sqrt{A'M^2 + MA^2} = \sqrt{H'H^2 + \left(HA - H'A'\right)^2} = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}} - \dfrac{a'}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \dfrac{\left(a - a'\right)^2}{3}}$.

Vậy các cạnh bên của chóp cụt có độ dài bằng $\sqrt{h^2 + \dfrac{\left(a - a'\right)^2}{3}}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

1. Phương pháp giải:

Để chứng minh hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau ta sẽ chứng minh

Một đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) hoặc ngược lại, một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng (Q) và vuông góc với mặt phẳng (P).

Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng 90o.

2. Ví dụ

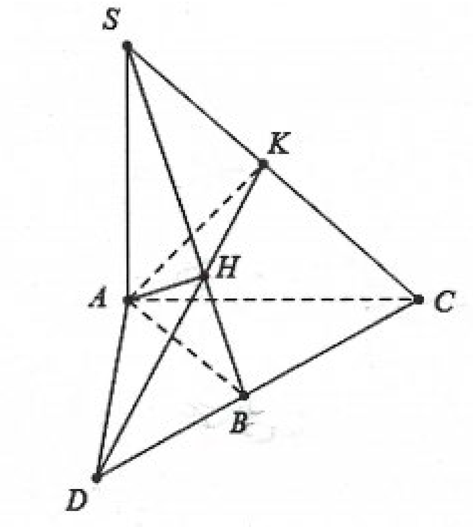
Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

a) Chứng minh $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao trong tam giác SAB và SAC. Chứng minh $(SBC) \perp (AKH)$.

c) Gọi D là giao điểm của HK và BC. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAC)$.

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp BC$.

Do đó $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

b) Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Mặt khác $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow (AHK) \perp (SBC)$.

c) Ta có: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Mặt khác $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$ hay $SC \perp (AKD)$.

Suy ra $AD \perp SC$ mà $SA \perp AD \Rightarrow AD \perp (SAC)$.

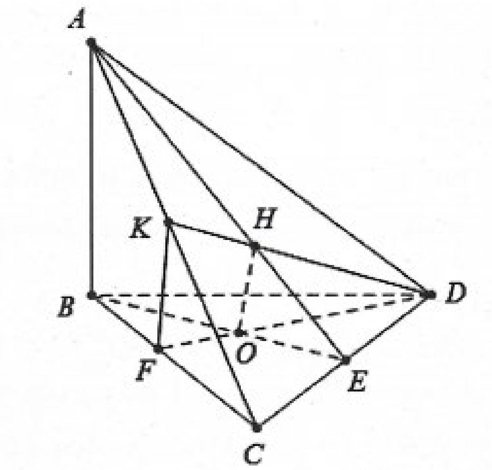
Do vậy $(SAD) \perp (SAC)$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mặt phẳng (ACD) vẽ DK vuông góc với AC tại K. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a) Chứng minh mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (ABE) và mặt phẳng (ADC) vuông góc với mặt phẳng (DFK).

b) Chứng minh rằng OH vuông góc với mặt phẳng (ACD).

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} BE \perp CD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABE)$

mà $CD \subset (ACD) \Rightarrow (ADC) \perp (ABE)$.

Lại có: $\begin{cases} DF \perp BC \\ DF \perp AB \end{cases} \Rightarrow DF \perp (ABC) \Rightarrow DF \perp AC$.

Mặt khác

$DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DKF) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

b) Do $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AE$.

Ta có: $\begin{cases} (ACD) \perp (ABE) \\ (ACD) \perp (DFK) \\ OH = (ABE) \cap (DFK) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ACD)$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a và $BD = a$. Biết cạnh $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Chứng minh rằng:

a) $(SAC) \perp (SBD)$.

b) $(SCD) \perp (SBC)$.

Lời giải

a) Do $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD.$

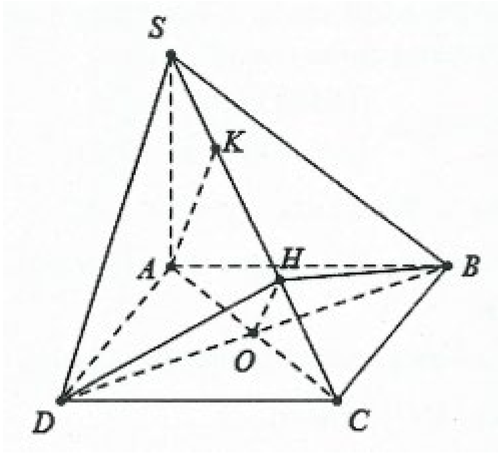
Mặt khác $ABCD$ là hình thoi nên $AC\perp BD.$

Do đó $BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC).$

b) Dựng $OH\perp SC$

Do $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$

Suy ra $SC\perp(DHB).$



Như vậy $\widehat{DHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SBC).

Tam giác ABD đều cạnh a nên

$$AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC=a\sqrt{3}.$$

Dựng $AK\perp SC\Rightarrow AK=\dfrac{SA.OC}{\sqrt{SA^2+OC^2}}=a\Rightarrow OH=\dfrac{AK}{2}=\dfrac{a}{2}.$

Tam giác DHB có đường trung tuyến $HO=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{a}{2}\Rightarrow\Delta DHB$ vuông tại H hay $\widehat{DHB}=90^o.$

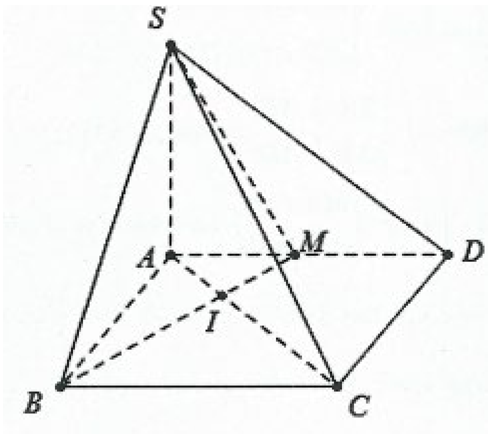
Do đó $(SCD)\perp(SBC).$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AB=a,\ AD=a\sqrt{2},\ SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của $AD,$ I là giao điểm của BM và $AC.$ Chứng minh rằng $(SAC)\perp(SMB).$

Lời giải

Ta có: $\tan\widehat{CAD}=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Mặt khác $\tan\widehat{AMB}=\dfrac{AB}{AM}=\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}.$



Do $\tan\widehat{CAD}=\cot\widehat{AMB}\Rightarrow\widehat{CAD}+\widehat{AMB}=90^o.$

Suy ra $\widehat{AIM}=90^o\Rightarrow AC\perp BM$ tại $I.$

Mặt khác $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BM$

Do đó $BM\perp(SAC)\Rightarrow(SMB)\perp(SAC).$

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của $AB.$ Biết $SA=SB=a\sqrt{2}.$

a) Chứng minh rằng $SH\perp(ABCD).$

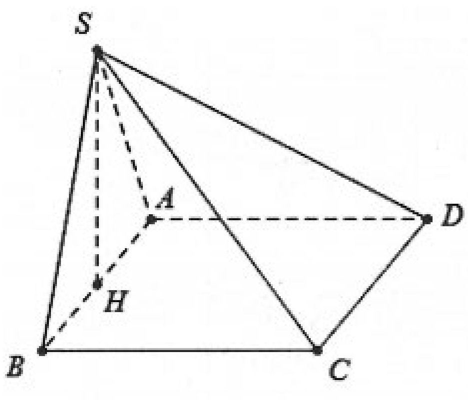
b) Chứng minh tam giác SBC vuông.

c) Chứng minh $(SAD)\perp(SAB);\ (SAD)\perp(SBC).$

Lời giải

a) Do ΔSAB cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH\perp AB.$

Mặt khác $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\ AB=(SAB)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD).$



b) Do $SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp BC.$

Mặt khác $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại $B.$

c) Tương tự câu b ta chứng minh được $AD\perp(SAB)$ suy ra $(SAD)\perp(SAB).$

Mặt khác: $SA^2+SB^2=AB^2=4a^2\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại $S\Rightarrow SA\perp SB.$

Lại có:

$AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SB\Rightarrow SB\perp(SAD)\Rightarrow(SBC)\perp(SAD).$

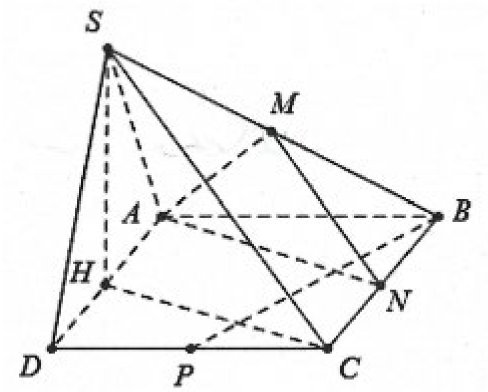
Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a.$ Mặt bên SAD là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SB,BC và $CD.$

a) Chứng minh $(SAD)\perp(SAB).$

b) Chứng minh $AM\perp BP$ và $(SBP)\perp(AMN).$

Lời giải

a) Gọi H là trung điểm của $AD.$



Do ΔSAD cân tại S nên đường trung tuyến đồng thời là đường cao suy ra $SH\perp AD.$

Mặt khác $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\ AD=(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD).$

Khi đó $\begin{cases}SH\perp AB\\ AB\perp AD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SAD)\Rightarrow(SAB)\perp(SAD).$

b) Ta có: $\begin{cases}MN//SC\\ AN//HC\end{cases}\Rightarrow(AMN)//(SHC).$

Dễ thấy $\tan\widehat{BPC}=2;\ \tan\widehat{HCD}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BPC}+\widehat{HCD}=90^o\Rightarrow HC\perp BP.$

Mặt khác $SH\perp BP\Rightarrow BP\perp(SHC)$

Mà $(AMN)//(SHC)\Rightarrow BP\perp(AMN)\Rightarrow\begin{cases}(SBP)\perp(AMN)\\ BP\perp AM\end{cases}.$

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA\perp(ABCD).$

a) Chứng minh $(SAC)\perp(SBD).$

b) Chứng minh $(SAD)\perp(SCD).$

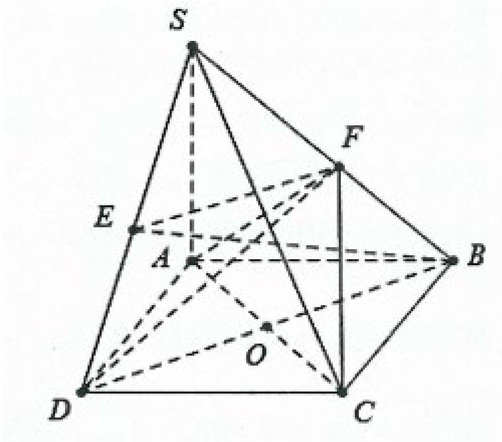
c) Gọi BE và DF là đường cao trong tam giác $SBD.$ Chứng minh rằng $(ACF)\perp(SBC);$ $(AEF)\perp(SAC).$

Lời giải

a) Ta có: $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.



b) Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

Do đó $(SAD) \perp (SAB)$.

c) Ta có: $AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Mặt khác: $DF \perp SB \Rightarrow (ADF) \perp SB \Rightarrow AF \perp SB$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AF$.

Do đó $AF \perp (SBC) \Rightarrow (ACF) \perp (SBC)$.

Dễ thấy tam giác SBD cân tại S có 2 đường cao BE và DF nên $EF//BD$

Mặt khác $BD \perp (SAC)$ (Chứng minh ở câu a) suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (AEF) \perp (SAC)$.

Cách khác: Ta có $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp SC$

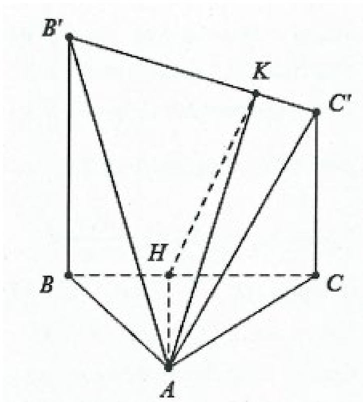
Chứng minh tương tự ta cũng có: $AE \perp SC$ suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow (SAC) \perp (AEF)$.

Ví dụ 8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB' và CC' cùng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh $(ABB') \perp (ACC')$.

b) Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và $\Delta AB'C'$. Chứng minh $(BCC'B')$ và $(AB'C')$ cùng vuông góc với (AHK).

Lời giải



a) Ta có: $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AB$

Mặt khác $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ACC') \Rightarrow (ABB') \perp (ACC')$.

b) Do $AH \perp BC$, $BB' \perp (ABC) \Rightarrow BB' \perp AH$

Suy ra $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow (AHK) \perp (BCC'B')$.

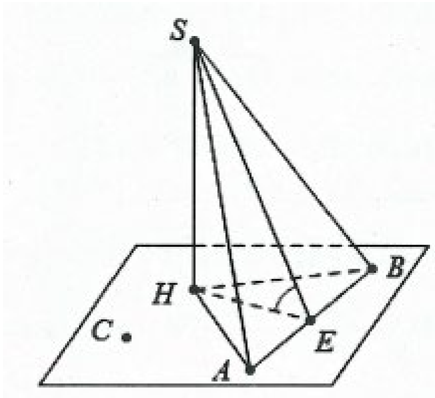
Mặt khác $AH \perp (BCC'B') \Rightarrow AH \perp B'C'$

Lại có: $AK \perp B'C' \Rightarrow B'C' \perp (AHK) \Rightarrow (AHK) \perp (AB'C')$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Dạng 2: Góc giữa mặt bên và mặt đáy

1. Phương pháp giải:



Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC).

Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$, dựng $HE \perp AB$.

Khi đó $AB \perp (SEH) \Rightarrow \widehat{((SAB);(ABC))} = \widehat{SEH}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy là hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a;\ AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 60°.

a) Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$.

b) Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

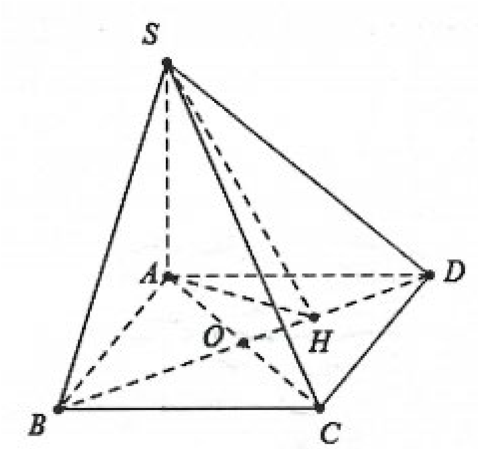
a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SDA)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60^o$

Suy ra $SA = AD \tan 60^o = 3a$.

Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA) \Rightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SBA}$

Mặt khác $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $\cos\widehat{((SBC);(ABC))} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.



b) Dựng $AH \perp BD \Rightarrow BD \perp (SHA) \Rightarrow \widehat{((SBD);(ABC))} = \widehat{SHA}$.

Lại có: $AH = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

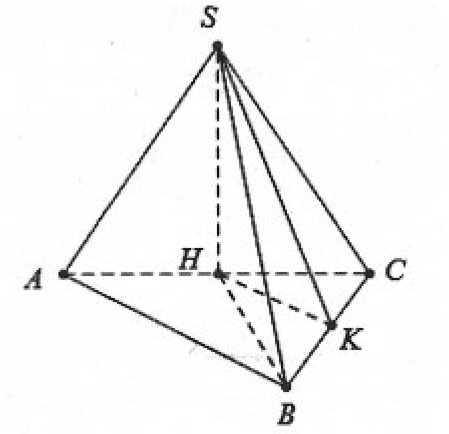
Suy ra $\tan\left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}$.

Ví dụ 2. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3};\ BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60°. Tính góc $\widehat{((SBC);(ABC))}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Gọi H là trung điểm của AC, do tam giác SAC cân nên ta có: $SH \perp AC$. Mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABC)$.



Khi đó: $\widehat{(SB;(ABC))} = \widehat{SBH} = 60^o$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow BH = \dfrac{1}{2}AC = a.$

Khi đó: $SH = a\tan 60^o = a\sqrt{3}.$

Dựng $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHK)$.

$\Rightarrow \widehat{SKH} = \widehat{((SBC);(ABC))}$, trong đó ta có:

$HK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos\widehat{SKH} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

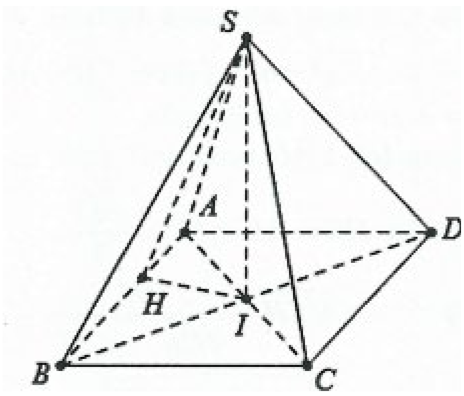
Vậy $\widehat{((SBC);(ABC))} = \varphi$ với $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\widehat{BAD} = 120^o$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy $(ABCD)$ trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \dfrac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI)$.



Do đó $\varphi = \widehat{(SH;IH)} = \widehat{SHI}$.

Do $\widehat{BAD} = 120^o \Rightarrow \widehat{BAI} = 60^o \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $2a$ nên

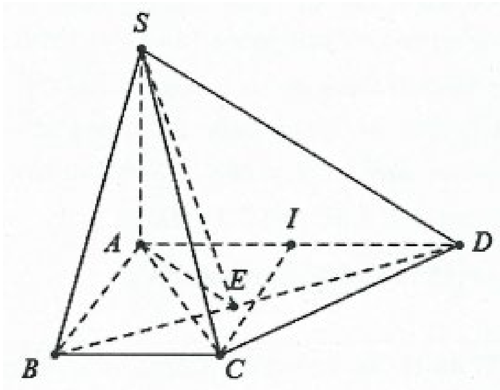
$IA = a \Rightarrow IH = IA\sin\widehat{IAB} = IA\sin 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $\tan\varphi = \dfrac{SI}{IH} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30^o$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60°. Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng $(ABCD)$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA)$.



Khi đó: $\widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^o$

$\Rightarrow SA = AB\tan 60^o = a\sqrt{3}$.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow CI = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCA)$.

Do đó $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$ và $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AB^2+BC^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

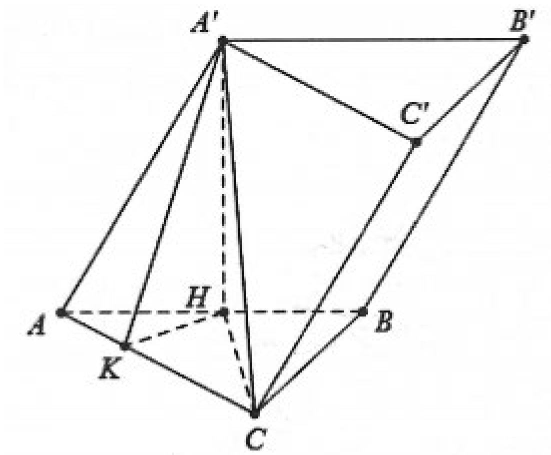
Dựng $AE \perp BD$, lại có $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SEA) \Rightarrow \widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SEA}$.

Ta có: $AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{SEA} = \frac{SA}{AE} = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

Ví dụ 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng 60°. Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC).

Lời giải

Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có: $A'H \perp (ABC)$



Do đó $\widehat{A'CH} = 60^o$. Lại có: $CH = AC\sin 60^o = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow A'H = CH\tan 60^o = 3a$.

Dựng $HK \perp AC$ ta có $A'H \perp AC \Rightarrow (A'HK) \perp AC$

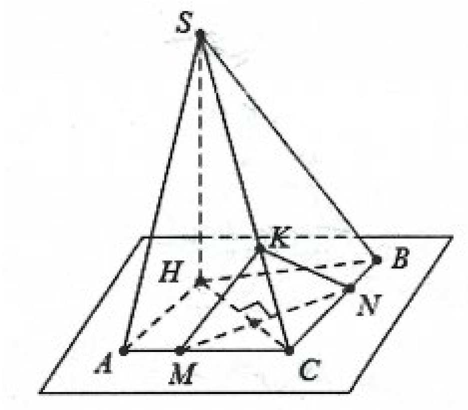
Khi đó $HK = HA\sin 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: $\cos\widehat{A'KH} = \frac{HK}{\sqrt{HK^2+A'H^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} > 0$.

Do vậy $\cos\widehat{((A'AC);(ABC))} = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

Dạng 3: Góc giữa hai mặt bên

1. Phương pháp giải:



Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC).

Cách 1: Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Cách 2: Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC, dựng $MN \perp HC$.

Lại có: $MN \perp SH \Rightarrow MN \perp (SHC) \Rightarrow MN \perp SC$.

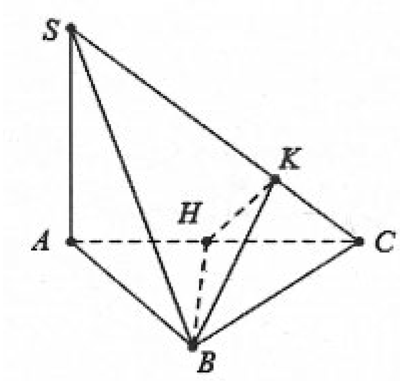
Dựng $MK \perp SC \Rightarrow SC \perp (MKN)$

$\Rightarrow \widehat{((SAC);(SBC))} = \widehat{(MK,KN)}$.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Lời giải



Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Dựng $HK \perp SC \Rightarrow (HKB) \perp SC$

$\Rightarrow \widehat{((SBC);(SAC))} = \widehat{HKB}$.

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$.

Khi đó $\sin\widehat{KCH} = \dfrac{HK}{HC} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{3}$.

Mặt khác: $BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{HKB} = \dfrac{BH}{HK} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{HKB} = 60^o$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°.

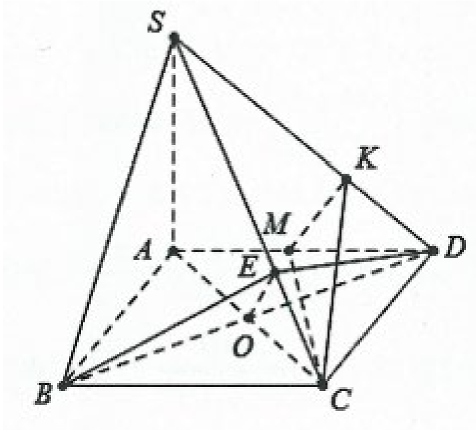
Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC} = 60^o$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD).

b) (SAD) và (SCD).

Lời giải

a) Nhận xét ΔABC là tam giác đều cạnh a vì $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60^o$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$.

Dựng $BE \perp SC \Rightarrow SC \perp (BED)$.

Mặt khác: $SA = AC = a \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A suy ra

$\widehat{ECO} = 45^o$. Khi đó $OE = OC \sin 45^o = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lại có: $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{BEO} = \dfrac{OB}{OE} = \sqrt{6}$.

Do $\widehat{BED} = 2\widehat{BEO}$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy tính **CASIO** ta tính được $\cos \widehat{BED} = \dfrac{-5}{7}$

Cách khác: Ta có: $BE = DE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{BED} = \dfrac{EB^2 + ED^2 - BD^2}{2.EB.ED} = \dfrac{-5}{7}$.

Suy ra $\cos\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right) = \dfrac{5}{7}$.

b) Dựng $CM \perp AD$ ta có: $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \Rightarrow CM \perp SD$.

Dựng $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (MKC)$.

Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA = AD = a \Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A suy ra

$\widehat{SDM} = 45^o$. Do đó $MK = MD \sin 45^o = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $\tan \widehat{MKC} = \dfrac{CM}{MK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos \widehat{MKC} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{(SCD);(SAD)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

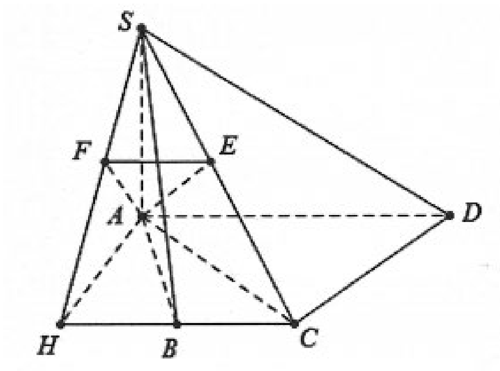
Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AD = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc 45°. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC).

Lời giải

Do $AD = 2a$ nên tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có: $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$



Suy ra $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^o$

$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Dựng $AE \perp SC \Rightarrow AE \perp (SCD)$

Dựng $\begin{cases} AH \perp BC \\ AF \perp SH \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC)$, góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc giữa AE và AF.

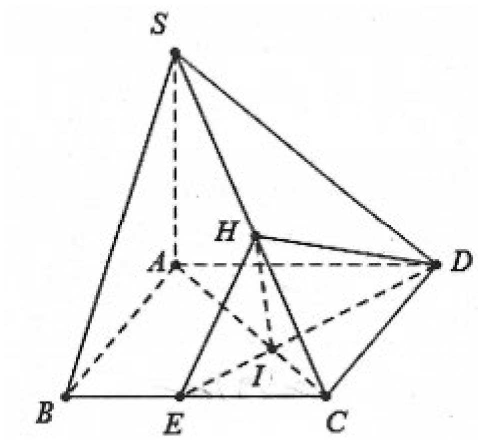
Ta có: $AE = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $AH = AC\sin 30^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AF = \dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, do $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp FE$. Do đó $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải

Do $SA \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SBA)$



Do đó $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SBA} = 60^o$; $AC = 2a$

$\Rightarrow SA = AB\tan 60^o = a\sqrt{3}$.

Dựng $DE \perp AC \, (E \in BC)$ tại I, mặt khác $DE \perp SA$

$\Rightarrow DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp SC$.

Dựng $IH \perp SC \Rightarrow SC \perp (EHD)$. Ta có: $DI = DC\sin\widehat{ICD}$

trong đó $\tan\widehat{ICD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ICD} = 60^o$.

Suy ra $DI = a\sin 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $DE = \dfrac{DC^2}{DI} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

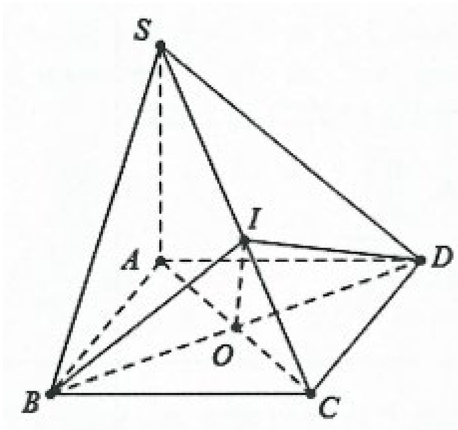
$\Rightarrow IE = DE - DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow CI = \sqrt{EI.DI} = \dfrac{a}{2}$; $\sin\widehat{ICH} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow IH = IC\sin\widehat{IHC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Suy ra $EH = \sqrt{EI^2 + IH^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{21}}$; $ED = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Do đó $\cos\widehat{EHD} = \dfrac{EH^2 + HD^2 - ED^2}{2.EH.HD} = \dfrac{-\sqrt{2}}{4} < 0 \Rightarrow \cos\widehat{((SBC);(SCD))} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 60°.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$

Kẻ $BI \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID)$.

Vậy $\widehat{((SBC);(SCD))} = \widehat{(BI;ID)} = 60^o$.

Dễ thấy $\begin{cases} OI \perp SC \\ \widehat{BIO} = \frac{1}{2}\widehat{BID} \end{cases}$.

- **Trường hợp 1:** $\widehat{BID} = 60^o \Rightarrow \widehat{BIO} = 30^o$.

  Ta có:

  $\tan\widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 30^o \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý).

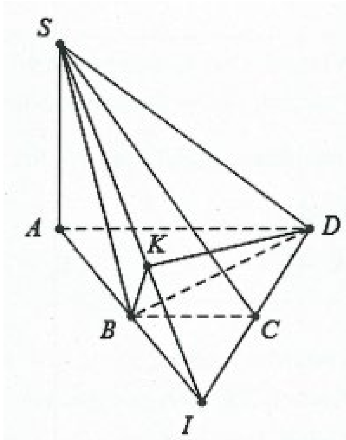
- **Trường hợp 2:** $\widehat{BID} = 120^o \Rightarrow \widehat{BIO} = 60^o$.

  Ta có: $\tan\widehat{BIO} = \frac{BO}{IO} = \tan 60^o \Rightarrow OI = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

  Mặt khác: $\sin\widehat{ICO} = \frac{OI}{OC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan\widehat{ICO} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC\tan\widehat{ICO} = a.$

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải



Do $ABCD$ là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a \Rightarrow ABCD$ nội tiếp đường tròn đường kính AB. Do đó $\widehat{ABD} = 90^o$.

Gọi $I = AB \cap CD \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD)$.

Do $\begin{cases} AI \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp SI.$

Dựng $BK \perp SI \Rightarrow SI \perp (BKD)$.

Khi đó $\widehat{((SAB);(SCD))} = \widehat{(BK,KD)} = \widehat{BKD}$.

Do $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp BK \Rightarrow \Delta KBD$ vuông tại B có

$BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Do $\begin{cases} BC // AD \\ BC = \frac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow BC$ là đường trung bình trong tam giác $AID \Rightarrow AB = BI$ và $AI = 2a$

$\Rightarrow BK = \frac{1}{2}d(A;SI) = \frac{1}{2}.\frac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan\widehat{BKD} = \frac{BD}{BK} = \sqrt{7}.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Dạng 4: xác định và tính số đo của góc phẳng nhị diện

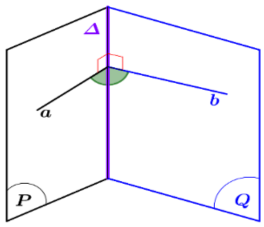
1. phương pháp:

+ Ta xác định góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) theo 3 bước:

Bước 1: Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$.

Bước 2: Tìm $a \subset (P): a \perp \Delta$ và $b \subset (Q): b \perp \Delta$.

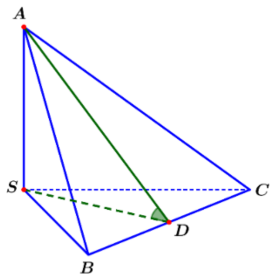
Bước 3: Kết luận $[P, \Delta, Q]$



2. Ví dụ.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Gọi α là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$. Tính $\cos\alpha$?

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC.

Suy ra $SD \perp BC$ (vì tam giác SBC cân tại S).

$\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

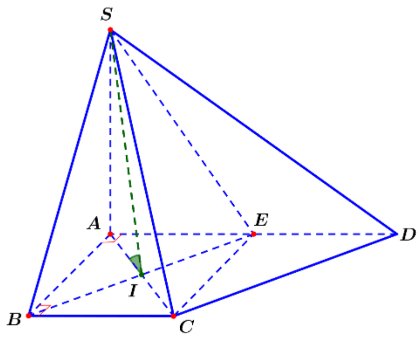
Và $SD \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SD$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SD \perp BC \\ AD \perp BC \end{cases} \Rightarrow [S, BC, A] = \widehat{SDA} = \alpha$.

Xét ΔSAD vuông tại S, ta có: $\cos\alpha = \cos\widehat{SDA} = \dfrac{SD}{AD} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[S, BE, A]$.

Lời giải



Nhận xét: $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a.

Gọi $I = AC \cap BE$.

Ta có: $\begin{cases} BE \perp AI \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAI) \Rightarrow BE \perp SI$.

Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABE) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases} \Rightarrow [S, BE, A] = \widehat{SIA}$

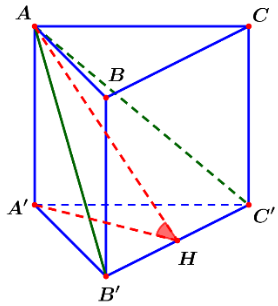
Xét ΔSIA vuông tại A, ta có:

$$\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{IA} = \frac{a\sqrt{6}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60^\circ.$$

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ?

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh $B'C'$. Suy ra $A'H \perp B'C'$.



Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'AH) \Rightarrow B'C' \perp AH$.

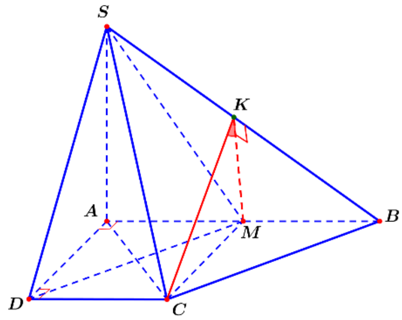
$\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ A'H \perp B'C' \\ AH \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA}$.

Xét $\Delta A'AH$ vuông tại A, ta có:

$$\tan \widehat{A'HA} = \frac{AA'}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'HA} = \arctan \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Biết $AB = 2AD = 2DC = 2a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[C, SB, A]$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB)$.

Trong mặt phẳng (SAB), từ M kẻ $MK \perp SB$ tại K.

Khi đó: $\begin{cases} SB \perp MK \\ SB \perp CM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (CMK) \Rightarrow SB \perp CK$.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ MK \perp SB \\ CK \perp SB \end{cases} \Rightarrow [C, SB, A] = \widehat{CKM}$.

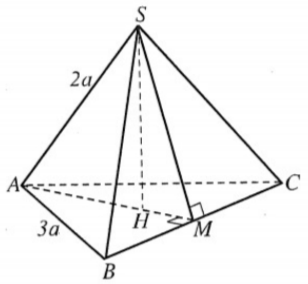
$\Delta BKM \sim \Delta BAS$ nên $\dfrac{KM}{SA} = \dfrac{BM}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow KM = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Xét ΔCKM vuông tại M, ta có:

$$\tan \widehat{CKM} = \frac{CM}{MK} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CKM} = 60^\circ.$$

Ví dụ 5. *S.ABC* có cạnh đáy 3a, cạnh bên 2a. Tính số đo nhị diện [S, BC, A].

Lời giải



Gọi M là trong điểm của BC thì $mp(SAM) \perp BC$ từ đó $\widehat{SMA}$ là góc phẳng nhị diện [S, BC, A]

Ta có $AM = \dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, từ đó $HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SM^2 = SB^2 - BM^2 = 4a^2 - \dfrac{9a^2}{4} = \dfrac{7a^2}{4}$, từ đó $SM = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

Vậy $\cos \widehat{SMH} = \dfrac{HM}{SM} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Số đo nhị diện [S, BC, A] là φ được xác định bởi

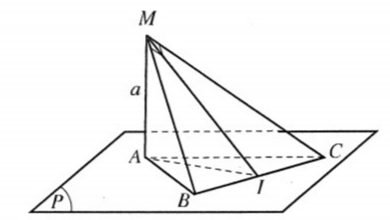
$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}, 0^o < \varphi < 180^o.$$

Ví dụ 6. Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P). Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P). Cho biết MA = a; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

a.Tính độ dài BC;

b. Tính số đo nhị diện [M, BC, A].

Lời giải



a. Vì $MA \perp mp(P)$ nên $\widehat{MBA}$ và $\widehat{MCA}$

là góc giữa MB và MC với mp (P).

Theo giả thiết. $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = 30^O$.

Từ đó . $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}$.

b. Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp mp(MIA)$,

Từ đó $\widehat{MIA}$ là góc phẳng nhị diện [M, BC, A] .

Đặt $\widehat{MIA} = \varphi$. Ta có $MI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$. $\sin\varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^O$.

Vậy góc nhị diện [M, BC, A] bằng 45º.

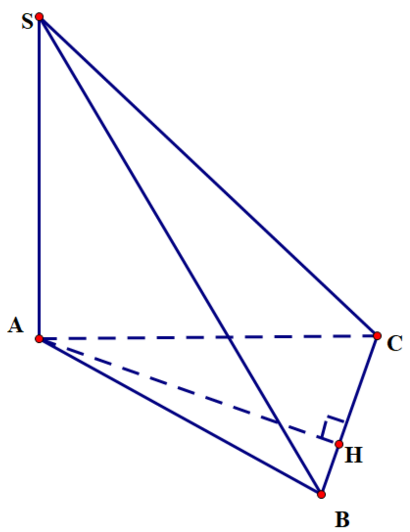
C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC.

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại $A, \widehat{ABC} = 30^\circ, AC = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



a) $SA \perp (ABC); SA \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp BC \\ SA \perp BC\left(SA \perp (ABC)\right) \\ AH \cap SA = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAH); BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAH) \perp (SBC)$$

b) Ta có $AH \perp BC, BC \perp SH\left(BC \perp (SAH)\right)$

$\Rightarrow [S, BC, A] = (SH, AH) = \widehat{SHA}$

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC}=30^\circ \Rightarrow \widehat{ACH}=60^0$

Xét tam giác ACH vuông tại H có $\sin\widehat{ACH}=\dfrac{AH}{AC} \Rightarrow AH=a\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SHA vuông tại A có $\tan\widehat{SHA}=\dfrac{SA}{AH}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}:\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=1 \Rightarrow \widehat{SHA}=45^0$

Vậy $\left[S,BC,A\right]=45^0$

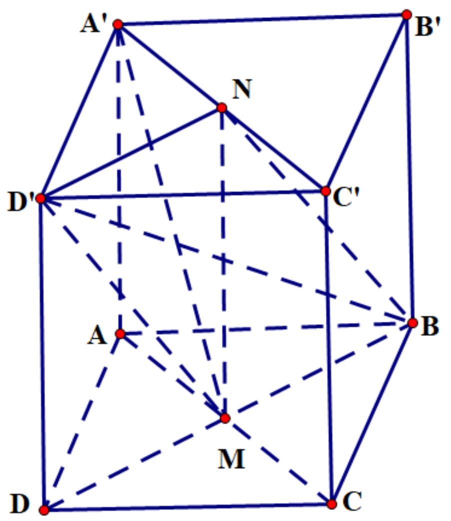
Bài 7.17. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.

b) Chứng minh rằng $\left(ACC'A'\right)\perp\left(BDD'B'\right)$.

c) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $\left[C,BD,C'\right]$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $\left[C,BD,C\right]$,$\left[A,BD,C'\right]$

Lời giải



a) Độ dài đường chéo của hình lập phương có thể tính từ công thức cạnh đường chéo của hình lập phương như sau: $d=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$

b) Ta có $AC^2+CA'^2=AA'^2$ do tam giác vuông ACA' nên ta có $AC=CA'=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Tương tự $BD^2=DB'^2=BC^2=CB'^2=AD^2=DA'^2=a^2$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh $BD,A'C'$ thì $MN//AC//A'C'$ và $MN=\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{1}{2}a^2a^2$

Do AMD' và $D'BN$ là hai tam giác vuông cân tại M,N.

Suy ra $\left(ACC'A'\right)\perp\left(BDD'B'\right)$

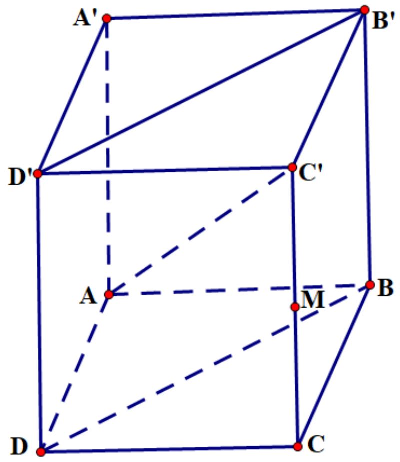
Bài 7.18. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$.

a) Chứng minh rằng $\left(BDD'B'\right)\perp\left(ABCD\right)$.

b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.

c) Cho $AB=a, BC=b, CC'=c$. Tính AC'.

Lời giải



a) Ta có $BB' \perp (ABCD); BB' \subset (BDD'B') \Rightarrow (BDD'B') \perp (ABCD)$.

b) A là hình chiếu của A trên $(ABCD)$

C là hình chiếu của C' trên $(ABCD)$ do $CC' \perp (ABCD)$

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của AC' trên $(ABCD)$

c) Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

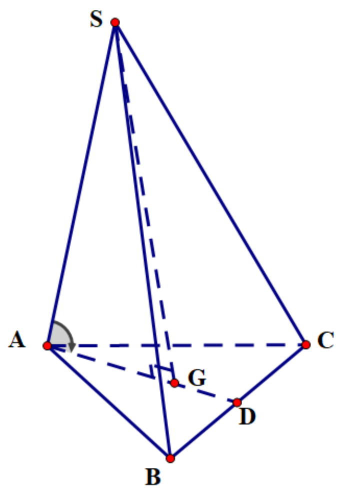
Xét tam giác AC'C vuông tại C có $AC'^2 = CC'^2 + AC^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow A'C = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Bài 7.19. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.

b) Tính tan của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

Lời giải



Vì hình chóp $S.ABC$ đều, gọi G là hình chiếu của S trên (ABC) nên G là tâm của đáy ABC là tam giác đều do đó G cũng là trọng tâm hay trực tâm của tam giác ABC.

Gọi AG cắt BC tại D

a) Ta có A là hình chiếu của A trên (ABC)

G là hình chiếu của S trên (ABC)

$\Rightarrow AG$ là hình chiếu của SA trên (ABC)

$\Rightarrow (SA,(ABC)) = (SA, AG) = \widehat{SAG}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà G là trọng tâm nên $AG=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G có

$$SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{3}}$$

$$\sin\widehat{SAG}=\dfrac{SG}{SA}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{3}}:b=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{3b^2}}$$

b) Ta có $AG\perp BC, SG\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAD); SD\subset(SAD)\Rightarrow BC\perp SD$

$BC\perp AD$ (G là trọng tâm)

$(SBC)\cap(ABC)=BC$

$\Rightarrow((SBC),(ABC))=(AD,SD)=\widehat{SDA}$

Mà G là trọng tâm nên $GD=\dfrac{1}{3}AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

Xét tam giác SGD vuông tại G có

$$\tan\widehat{SGD}=\dfrac{SG}{GD}=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{3}}:\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{6}{a\sqrt{3}}\cdot\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{3}}$$

Bài 7.20. Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB=4,8\text{ m}; OA=2,8\text{ m}; OB=4\text{ m}$.

a) Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.

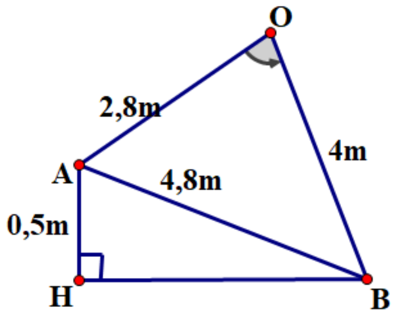
b) Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng.

Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.

c) Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điềm B là $0,5\text{ m}$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Hình 7.72

Lời giải



a) Vì hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật nên góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà là góc giữa hai đường thẳng OA và OB.

Xét tam giác OAB có

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2OA.OB}=\frac{2,8^2+4^2-4,8^2}{2.2,8.4}=\frac{1}{28}\Rightarrow\widehat{AOB}\approx 88^0$$

b) (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng đất.

c) Đường thẳng qua B song song với mặt đất cắt đường thẳng qua A vuông góc với mặt đất tại H

Ta có $\sin\widehat{ABH}=\frac{0,5}{4,8}\Rightarrow\widehat{ABH}\approx 6^0;\cos\widehat{OBA}=\frac{13}{16}\Rightarrow\widehat{OBA}\approx 36^0$

Do đó $\widehat{OBH}=\widehat{ABH}+\widehat{OBA}\approx 42^0$.

Vậy góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất khoảng 42^0

Bài 7.21. Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tan của góc tạo bởi mái nhà mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Giả sử góc tạo bởi đường thẳng dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang là a

Vì độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$ nên ta có

$$\tan\alpha\le\frac{1}{12}\Rightarrow\alpha\le 4,76^\circ$$

Vậy góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá $4,76^o$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn D

Gọi d là đường thẳng qua M và vuông góc với (P). Do $(P)/\!/(Q)\Rightarrow d\perp(Q)$.

Giả sử (R) là mặt phẳng chứa d. Mà $\begin{cases}d\perp(P)\\d\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(R)\perp(P)\\(R)\perp(P)\end{cases}$.

Có vô số mặt phẳng (R) chứa d. Do đó có vô số mặt phẳng qua M, vuông góc với (P) và (Q).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Cho hai đường thẳng song song a và b và đường thẳng c sao cho $c \perp a, c \perp b$. Mọi mặt phẳng (α) chứa c thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

B. Cho $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng (β) chứa a thì $(\beta) \perp (\alpha)$.

C. Cho $a \perp b$, mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho $a \perp b$, nếu $a \subset (\alpha)$ và $b \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp a và b trùng nhau, sẽ tồn tại mặt phẳng chứa a và b không vuông góc với mặt phẳng (α) chứa c.

C sai. Trong trường hợp a và b cắt nhau, mặt phẳng (a,b) chứa b nhưng không vuông góc với a.

D sai. Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(\alpha) \supset a$, $(\alpha) /\!/ b$ và $(\beta) \supset b$, $(\beta) /\!/ a$ thì $(\alpha) /\!/ (\beta)$.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

B sai. Qua một đường thẳng vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

D sai. Qua một điểm có vô số mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 4: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (P) và mỗi điểm B thuộc (Q) thì ta có AB vuông góc với d.

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì giao tuyến của (P) và (Q) nếu có cũng sẽ vuông góc với (R).

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

D. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn B

A sai. Trong trường hợp $a \in d$, $b \in d$, khi đó AB trùng với d.

GV: TRẦN ĐÌNH CỪ – 0834332133

C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ 3).

D sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, đường thẳng thuộc mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 5: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Chọn D

A sai. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì đường thẳng nằm trong mặt phẳng này, vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

B, C sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 6: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

B. Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước.

D. Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Chọn C

A sai. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song hoặc trùng nhau.

B sai. Nếu đường thẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước thì có vô số mặt phẳng qua đường thẳng và vuông góc với mặt phẳng đó. Nếu đường thẳng không vuông góc với mặt phẳng cho trước thì không có mặt phẳng nào vuông góc với mặt phẳng đó.

D sai. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc cắt nhau (giao truyến vuông góc với mặt phẳng kia).

Câu 7: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P). Mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q).

B. Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a, mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q).

C. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P), mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q).

D. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

Lời giải

Chọn B

Trong trường hợp a và b vuông góc nhau và tréo nhau, nếu $(P)\supset a$, $(P)//b$ và $(Q)\supset b$, $(Q)//a$ thì $(P)//(Q)$.

Câu 8: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R).

B. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng góc nhọn giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (R) khi mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (R) hoặc $(Q)\equiv(R)$.

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Cả 3 mệnh đề trên đều đúng.

Lời giải

Chọn D

Câu 9: Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào sai?

A. Đáy là đa giác đều.

B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.

C. Các cạnh bên là những đường cao.

D. Các mặt bên là những hình vuông.

Lời giải

Chọn D

Vì lăng trụ đều là lăng trụ đứng nên các cạnh bên bằng nhau và cùng vuông góc với đáy. Do đó các mặt bên là những hình chữ nhật.

Câu 10: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.

B. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

C. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.

D. Nếu hình hộp có sau mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.

Lời giải

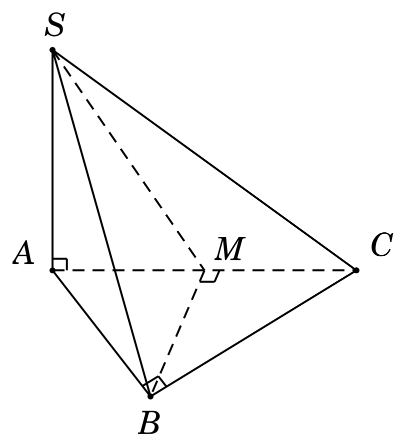
Chọn B

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM\perp AC$. **B.** $(SBM)\perp(SAC)$. **C.** $(SAB)\perp(SBC)$. **D.** $(SAB)\perp(SAC)$.

Lời giải

Chọn D



Tam giác ABC cân tại B có M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$. Do đó A đúng.

Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$. Do đó C đúng.

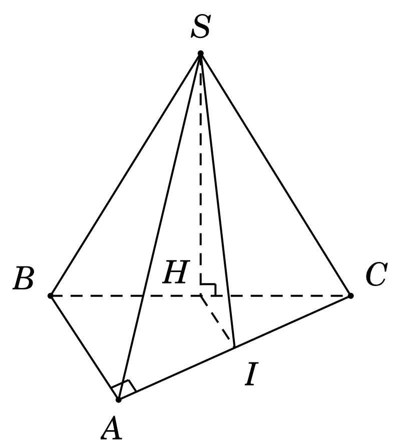
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 12: Cho tứ diện $SABC$ có SBC và ABC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác SBC đều, tam giác ABC vuông tại A. Gọi H, I lần lượt là trung điểm của BC và AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $SH \perp AB.$ **B.** $HI \perp AB.$ **C.** $(SAB) \perp (SAC).$ **D.** $(SHI) \perp (SAB).$

Lời giải

Chọn C



Do SBC là tam giác đều có H là trung điểm BC nên $SH \perp BC$.

Mà $(SBC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến $BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB.$ Do đó A đúng.

Ta có HI là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $HI \parallel AC \Rightarrow HI \perp AB.$ Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SH \perp AB \\ HI \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow (SAB) \perp (SHI).$ Do đó D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì C là đáp án sai.

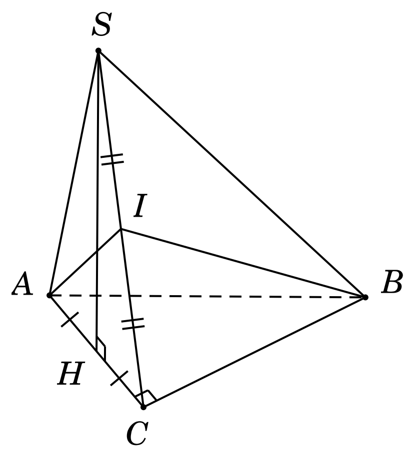
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và mằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $AI \perp SC$. **B.** $(SBC) \perp (SAC)$. **C.** $AI \perp BC$. **D.** $(ABI) \perp (SBC)$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI \perp SC$. Do đó A đúng.

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH \perp AC$. Mà $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$ do đó $SH \perp BC$. Hơn nữa theo giả thiết tam giác ABC vuông tại C nên $BC \perp AC$. Từ đó suy ra $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AI$. Do đó C đúng.

Từ mệnh đề A và C suy ra mệnh đề D đúng.

Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

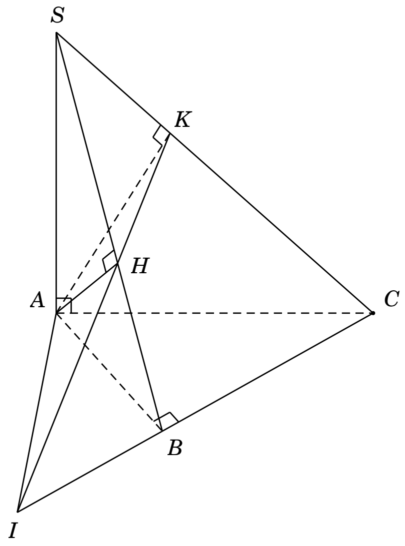
Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC và I là giao điểm của HK với mặt phẳng (ABC). Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BC \perp AH$. **B.** $(AHK) \perp (SBC)$. **C.** $SC \perp AI$. **D.** Tam giác IAC đều.

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Do đó A đúng.

Lại có $AH \perp SB$. Từ đó suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. (1)

Lại có theo giả thiết $SC \perp AK$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $SC \perp (AHK) \Rightarrow (SBC) \perp (AHK)$. Do đó B đúng.

Ta có $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ AI \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp AI$. Do đó C đúng.

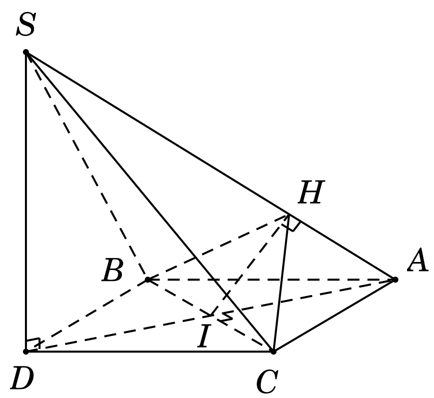
Dùng phương pháp loại trừ thì D là đáp án sai.

Câu 15: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại D lấy điểm S sao cho $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC; kẻ IH vuông góc SA $(H \in SA)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $SA \perp BH$. **B.** $(SDB) \perp (SDC)$. **C.** $(SAB) \perp (SAC)$. **D.** $BH \perp HC$.

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết suy ra $ABDC$ là hình thoi nên $BC \perp AD$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Lại có theo giả thiết $IH \perp SA$. Từ đó suy ra $SA \perp (HCB) \Rightarrow SA \perp BH$. Do đó A đúng.

Tính được $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA^2 = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\Delta AHI \backsim \Delta ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AS} \Rightarrow IH = \dfrac{AI.SD}{AS} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow$ tam giác HBC có trung tuyến IH bằng nửa cạnh đáy BC nên $\widehat{BHC} = 90^0$ hay $BH \perp HC$. Do đó D đúng.

Từ mệnh đề A và D suy ra mệnh đề C đúng.

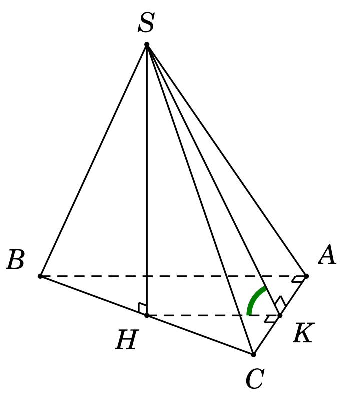
Dùng phương pháp loại trừ thì B là đáp án sai.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 60^0$. **B.** $\tan\varphi = 2\sqrt{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK.$

Do đó $\widehat{(SAC),(ABC)} = \widehat{(SK,HK)} = \widehat{SKH}.$

Tam giác vuông ABC, có $AB = BC.\cos\widehat{ABC} = a \Rightarrow HK = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a}{2}.$

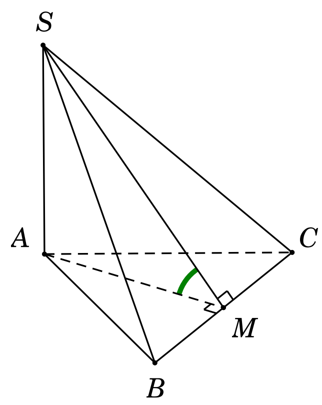
Tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{SKH} = \dfrac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\varphi = 30^0$. **B.** $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\varphi = 60^0$. **D.** $\sin\varphi = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC, suy ra $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $\widehat{(SBC),(ABC)} = \widehat{(SM,AM)} = \widehat{SMA}.$

Tam giác ABC đều cạnh a, suy ra trung tuyến $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Tam giác vuông SAM, có $\sin\widehat{SMA} = \dfrac{SA}{SM} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}.$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn C

Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

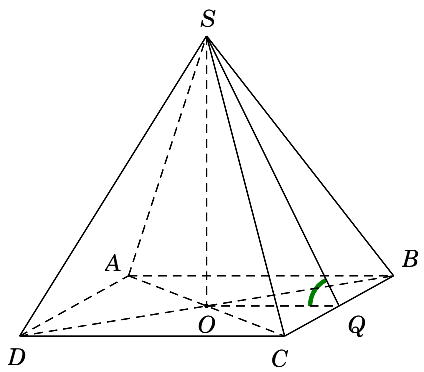
Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOQ) \Rightarrow BC \perp SQ.$

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SQ,OQ} = \widehat{SQO}.$

Tam giác vuông SOQ, có $\tan\widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \sqrt{3}.$

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60^0.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm I, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

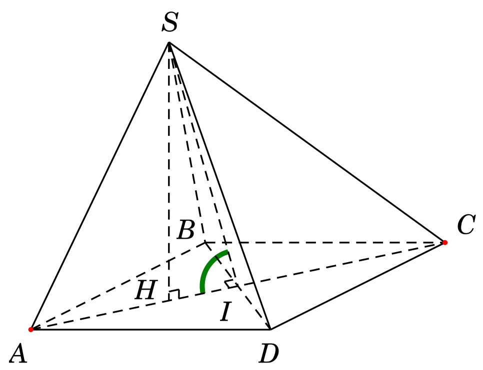


A. $\tan\varphi = \sqrt{5}.$ **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{5}.$ **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\varphi = 45^0.$

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Từ giả thiết suy ra tam giác ABD đều cạnh a.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Do $SA = SB = SD$ nên suy ra H cách đều các đỉnh của tam giác ABD hay H là tâm của tam gác đều ABD.

Suy ra $HI = \frac{1}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $HI \perp BD$. Tam giác SBD cân tại S nên $SI \perp BD$.

Do đó $\widehat{(SBD),(ABCD)} = \widehat{SI,AI} = \widehat{SIH}$.

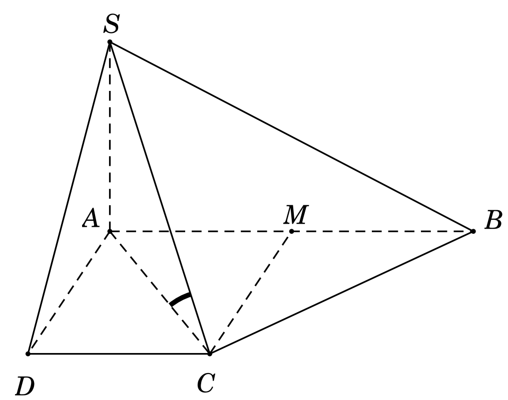
Trong tam vuông SHI, có $\tan\widehat{SIH} = \frac{SH}{HI} = \sqrt{5}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D, $AB = 2a$, $AD = CD = a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\varphi = 45^0$. **C.** $\varphi = 60^0$. **D.** $\varphi = 30^0$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm $AB \Rightarrow ADCM$ là hình vuông $CM = AD = a = \frac{AB}{2}$.

Suy ra tam giác ACB có trung tuyến bằng nửa cạnh đáy nên vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC.$

Do đó $\widehat{(SBC),(ABCD)} = \widehat{SC,AC} = \widehat{SCA}.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

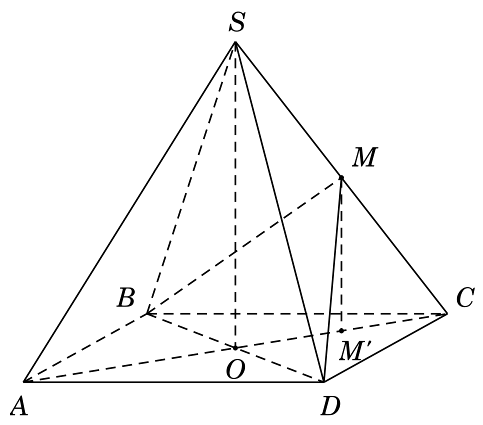
Tam giác SAC vuông tại A $\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SC. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

A. $\varphi = 90°$. **B.** $\varphi = 60°$. **C.** $\varphi = 45°$. **D.** $\varphi = 30°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M' là trung điểm $OC \Rightarrow MM' // SO \Rightarrow MM' \perp (ABCD)$.

Theo công thức diện tích hình chiếu, ta có $S_{\Delta M'BD} = \cos\varphi . S_{\Delta MBD}$

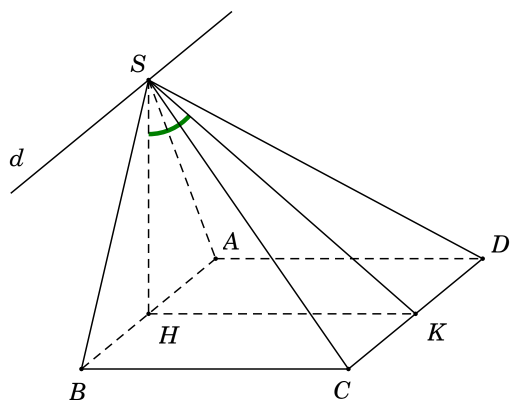
$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta M'BD}}{S_{\Delta MBD}} = \dfrac{BD.MO}{BD.M'O} = \dfrac{MO}{M'O} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^0$.

Câu 22: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trên hai mặt phẳng vuông góc. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Dễ dàng xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB.

Trong mặt phẳng (SAB) có $SH \perp AB \Rightarrow SH \perp d$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK \Rightarrow d \perp SK.$

Từ đó suy ra $\widehat{(SAB),(SCD)} = \widehat{SH,SK} = \widehat{HSK}.$

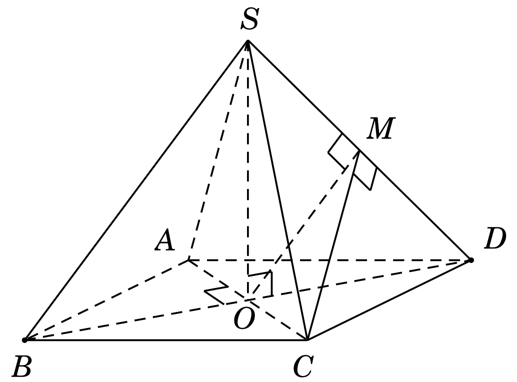
Trong tam giác vuông SHK, có $\tan\widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\varphi = \sqrt{6}.$ **B.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ **C.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $\tan\varphi = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a$, $BD = a\sqrt{2}$ nên vuông tại $S \Rightarrow SB \perp SD \Rightarrow OM \perp SD.$

Do đó $\widehat{(SBD),(SCD)} = \widehat{OM,CM}$.

Ta có $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

Tam giác vuông MOC, có $\tan\widehat{CMO} = \frac{OC}{OM} = \sqrt{2}$.

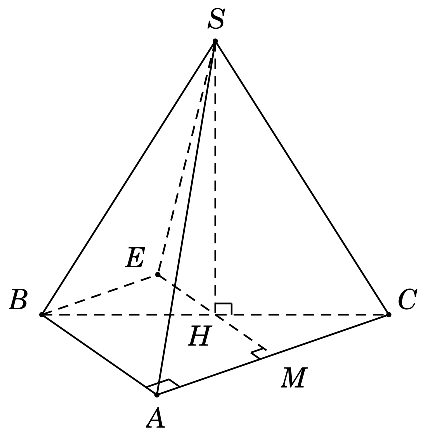
Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$. Hình chiếu vuông góc H của S trên mặt đáy (ABC) trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $SH = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng SB và AC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\cot\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}.$ **B.** $\cot\varphi = \sqrt{7}.$ **C.** $\cot\varphi = \frac{\sqrt{7}}{7}.$ **D.** $\cot\varphi = \frac{\sqrt{14}}{4}.$

Lời giải

Chọn C

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi H là trung điểm BC. Tam giác ABC vuông tại A nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo giả thiết, ta có $SH \perp (ABC)$.

Qua B kẻ $Bx \parallel AC$. Khi đó $\widehat{SB, AC} = \widehat{SB, Bx}$.

Kẻ $HE \perp Bx$ tại E, cắt AC tại M.

Suy ra $AMEB$ là hình chữ nhật nên $\begin{cases} BE = AM = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2} \\ HE = HM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} Bx \perp HE \\ Bx \perp SH \end{cases} \Rightarrow Bx \perp (SHE) \Rightarrow Bx \perp SE$.

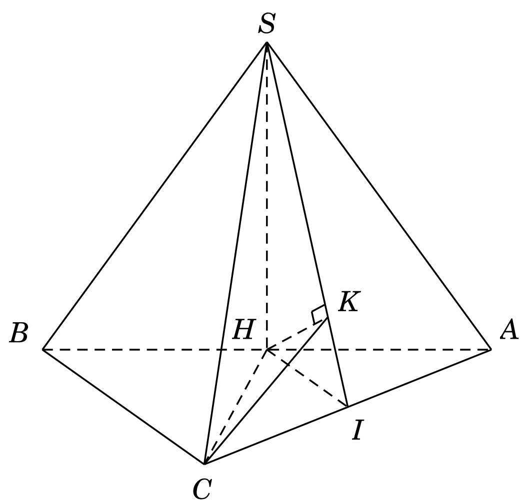
Tam giác vuông SEB, có $\cot \widehat{SBE} = \frac{BE}{SE} = \frac{AM}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Gọi H là trung điểm AB. Biết rằng SH vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB = SH = a.$ Tính cosin của góc α tọa bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp CH$. (1)

Tam giác ABC cân tại C nên $CH \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $CH \perp (SAB)$.

Gọi I là trung điểm $AC \longrightarrow HI \parallel BC \xrightarrow{BC\perp AC} HI \perp AC$. (3)

Mặt khác $AC \perp SH$ (do $SH \perp (ABC)$). (4)

Từ (3) và (4), suy ra $AC \perp (SHI)$.

Kẻ $HK \perp SI$ $(K \in SI)$. (5)

Từ $AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$. (6)

Từ (5) và (6), suy ra $HK \perp (SAC)$.

Vì $\begin{cases} HK \perp (SAC) \\ HC \perp (SAB) \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng HK và HC.

Xét tam giác CHK vuông tại K, có $CH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{3}$.

Do đó $\cos\widehat{CHK} = \frac{HK}{CH} = \frac{2}{3}$.

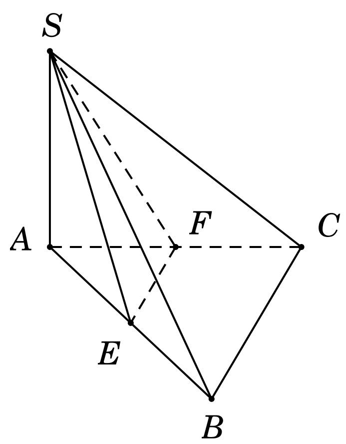
Nhận xét. Bài làm sử dụng lý thuyết "$\begin{cases} d_1 \perp (\alpha) \\ d_2 \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow \widehat{(\alpha),(\beta)} = \widehat{d_1, d_2}$". Nếu ta sử dụng lý thuyết quen thuộc "góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến" thì rất khó.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B,$ cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và $AC.$ Góc giữa hai mặt phẳng (SEF) và (SBC) là

A. $\widehat{CSF}$. **B.** $\widehat{BSF}$. **C.** $\widehat{BSE}$. **D.** $\widehat{CSE}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi (d) là đường thẳng đi qua S và song song với EF.

Vì EF là đường trung bình tam giác ABC suy ra $EF // BC$.

Khi đó $(d)//EF//BC \Rightarrow (SEF)\cap(SBC)=(d)$ (1).

Ta có $\begin{cases} SA\perp BC & (SA\perp(ABC)) \\ AB\perp BC \end{cases}$ suy ra $BC\perp(SAB)\Rightarrow\begin{cases} BC\perp SE \\ BC\perp SB \end{cases}$ (2).

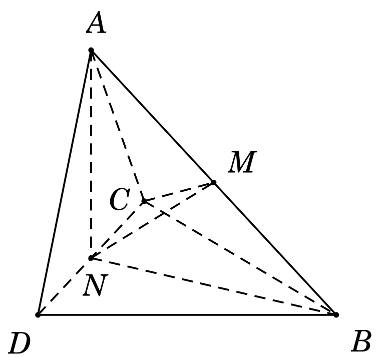
Từ (1),(2) suy ra $\begin{cases} (d)\perp SE \\ (d)\perp SB \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SEF);(SBC)}=\widehat{(SE;SB)}=\widehat{BSE}$.

Câu 27: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC=AD=BC=BD=a$, $CD=2x$. Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có $AN\perp CD$ mà $(ACD)\perp(BCD)$ suy ra $AN\perp(BCD)\Rightarrow AN\perp BN$.

Tam giác ABC cân tại C, có M là trung điểm của AB suy ra $CM\perp AB$.

Giả sử $(ABC)\perp(BCD)$ mà $CM\perp AB$ suy ra $CM\perp(ABD)\Rightarrow CM\perp DM$.

Khi đó, tam giác MCD vuông cân tại M $\Rightarrow MN=\frac{AB}{2}=\frac{CD}{2}\Rightarrow AB=CD=2x$.

Lại có $AN=BN=\sqrt{AC^2-AN^2}=\sqrt{a^2-x^2}$, mà $AB^2=AN^2+BN^2$.

Suy ra $2(a^2-x^2)=4x^2 \Leftrightarrow a^2=3x^2 \Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

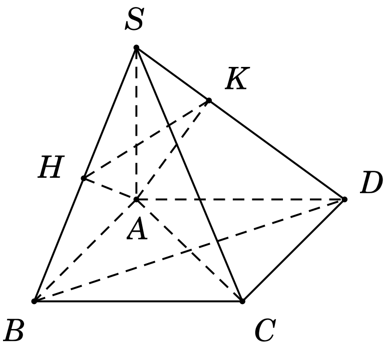
Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60^0.

A. $x=\frac{3a}{2}$. **B.** $x=\frac{a}{2}$. **C.** $x=a$. **D.** $x=2a$.

Lời giải

Chọn C

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Từ A kẻ AH vuông góc với SB $(H \in SB)$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ mà $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$.

Từ A kẻ AK vuông góc với SD $(K \in SD)$, tương tự, chứng minh được $SK \perp (SCD)$.

Khi đó $SC \perp (AHK)$ suy ra $\widehat{(SBC);(SCD)} = \widehat{(AH;AK)} = \widehat{HAK} = 60^0$.

Lại có $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AH = AK$ mà $\widehat{HAK} = 60^0$ suy ra tam giác AHK đều.

Tam giác SAB vuông tại S, có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Suy ra $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{x^2}{x^2 + a^2}$.

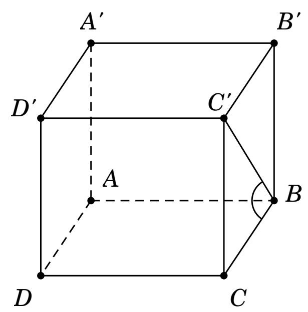
Vì $HK // BD$ suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{HK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{xa}{\sqrt{x^2 + a^2}.a\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60^0. Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

A. $2a$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BB' \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BB'C'B)$.

Khi đó $\begin{cases} (ABC') \cap (BB'C'B) = BC' \\ (ABCD) \cap (BB'C'B) = BC \\ (ABC') \cap (ABCD) = AB \end{cases}$ suy ra $\widehat{(ABC');(ABCD)} = \widehat{(BC';BC)} = \widehat{C'BC} = 60^0$.

Đặt $AA' = x$, tam giác BCC' vuông tại C, có $\tan \widehat{C'BC} = \frac{CC'}{BC} \Rightarrow x = \tan 60^0.a = a\sqrt{3}$.

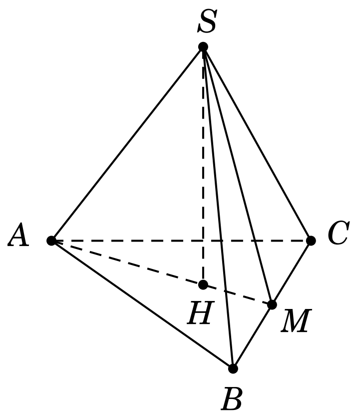
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 30: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

A. $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $SH=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $SH=\dfrac{a}{2}$. **D.** $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh S xuống mặt phẳng $(ABCD)$.

Vì $S.ABC$ là hình chóp đều có $SA=SB=SC$ nên suy ra H chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} BC\perp AM \\ BC\perp SH \end{cases}\Rightarrow BC\perp (SAM)$.

Khi đó $\widehat{(SBC);(ABC)}=\widehat{(SM;AM)}=\widehat{SMA}=60^0$.

Tam giác ABC đều có $AM=\sqrt{AB^2-MB^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HM=\dfrac{AM}{3}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác AHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMA}=\dfrac{SH}{HM}\Rightarrow SH=\tan 60^0.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{a}{2}$.

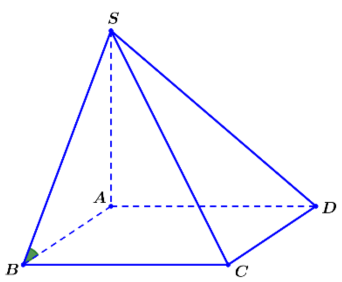
Vậy độ dài đường cao $SH=\dfrac{a}{2}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ là

A. $\widehat{SBA}$. **B.** $\widehat{SCA}$. **C.** $\widehat{ASC}$. **D.** $\widehat{ASB}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SB \end{cases}\Rightarrow BC\perp (SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.

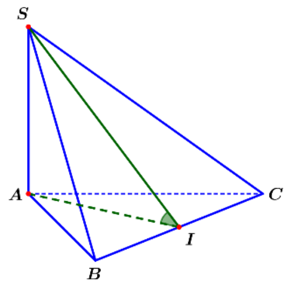
Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ SB\perp BC\\ AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow[S,BC,A]=\widehat{SBA}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA=\dfrac{3a}{2}$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm $BC\Rightarrow AI\perp BC$ (vì ABC là tam giác đều).

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AI\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp SI$.

Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ SI\perp BC\\ AI\perp BC\end{cases}\Rightarrow[S,BC,A]=\widehat{SIA}$.

Mà ΔABC đều cạnh $a\Rightarrow AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

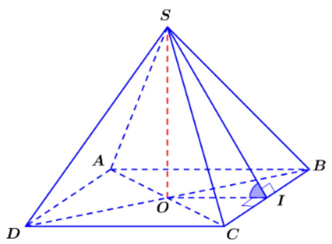
Xét ΔSAI vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SIA}=\dfrac{SA}{AI}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SIA}=60°$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao hình chóp bằng $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ bằng

A. $60°$. **B.** $75°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I là trung điểm của BC.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$ và $SO=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Và $SC=SB$ nên tam giác SBC cân tại $S\Rightarrow SI\perp BC$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ BC\perp SI\\ BC\perp OI\end{cases}\Rightarrow[S,BC,A]=\widehat{SIO}$

Ta có: OI là đường trung bình tam giác ABC nên $OI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$.

Xét ΔSIO vuông tại O, ta có: $\tan\widehat{SIO}=\frac{SO}{OI}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SIO}=30°$.

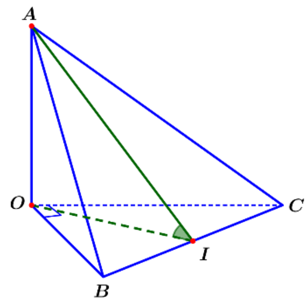
Vậy số đo góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ bằng $30°$.

Câu 34: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OB=OC=a\sqrt{6}$, $OA=a$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[O,BC,A]$.

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow AI\perp BC$.

Ta có: $\begin{cases}BC\perp OI\\ BC\perp OA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(AOI)\Rightarrow BC\perp AI$

Khi đó: $\begin{cases}(OBC)\cap(ABC)=BC\\ BC\perp AI\\ BC\perp OI\end{cases}\Rightarrow[O,BC,A]=\widehat{OIA}$.

Và $OI=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{OB^2+OC^2}=a\sqrt{3}$.

Xét ΔOAI vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{OIA}=\frac{OA}{OI}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{OIA}=30°$.

Vậy $[O,BC,A]=30°$.

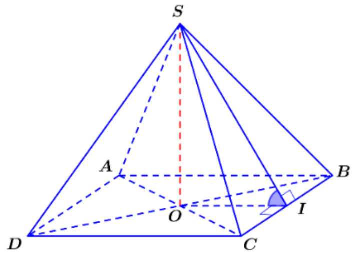
Câu 35: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính cosin của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và I trung điểm của BC.

Khi đó: $SO\perp(ABCD)$ và $SI\perp BC$.

Ta có: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\ OI\perp BC\\ SI\perp BC\end{cases}\Rightarrow[S,BC,A]=\widehat{SIO}$.

Và ΔSCD đều cạnh $a\Rightarrow SI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

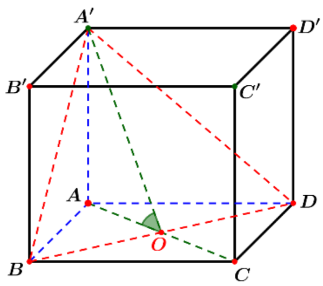
Xét ΔSOI vuông tại O, ta có: $\cos\widehat{SIO}=\dfrac{OI}{SI}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc phẳng nhị diện $[A',BD,A]$ bằng $30°$. Tính độ dài cạnh AA'

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases}BD\perp AO\\ BD\perp AA'\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AO)\Rightarrow BD\perp A'O$.

Khi đó: $\begin{cases}(A'BD)\cap(ABD)=BD\\ A'O\perp BD\\ AO\perp BD\end{cases}\Rightarrow[A',BD,A]=\widehat{A'OA}=30°$.

Xét $\Delta A'AO$ vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{A'OA}=\dfrac{AA'}{AO}\Rightarrow AA'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}.a=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

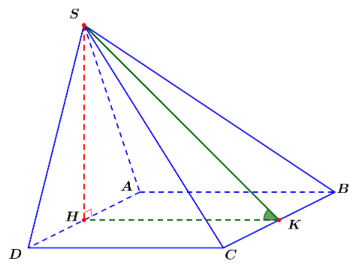
Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=2a, AD=a$, ΔSAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $\varphi=60°$. **B.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\varphi=30°$. **D.** $\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn A



Gọi H,K lần lượt là trung điểm của AD,BC.

Suy ra $SH\perp(ABCD)$ và $HK\perp BC$.

Khi đó: $\begin{cases}BC\perp HK\\BC\perp SH\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SHK)\Rightarrow BC\perp SK$.

Ta có: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\HK\perp BC\\SK\perp BC\end{cases}\Rightarrow[S,BC,A]=\widehat{SKH}=\varphi$.

Xét ΔSHK vuông tại H, ta có:

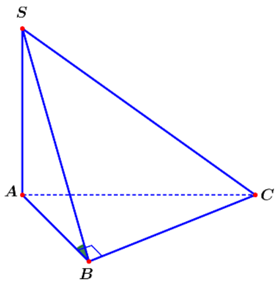
$\tan\varphi=\tan\widehat{SKH}=\dfrac{SH}{HK}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60^\circ$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC vuông cân tại B, $AB=BC=a$, $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABC)$. Số đo của góc phẳng nhị diện $[S,BC,A]$ là

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.

Khi đó: $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\BC\perp AB\\BC\perp SB\end{cases}\Rightarrow[S,BC,A]=\widehat{SBA}$.

Xét ΔSAB vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^\circ$.

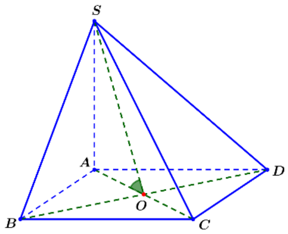
Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó số đo của góc phẳng nhị diện $[S,BD,A]$ là

A. 30°. **B.** 75°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn A



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp OA$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABD) = BD \\ OA \perp BD \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow [S, BD, A] = \widehat{SOA}$.

Xét ΔSOA vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{OA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 30°$

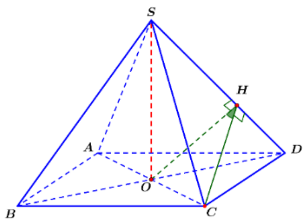
Vậy goc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ bằng $30°$.

Câu 40: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[B, SD, C]$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\tan \varphi = \sqrt{2}$. **B.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan \varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan \varphi = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp SD \quad (1)$

Trong mặt phẳng (SBD), từ O kẻ $OH \perp SD$ tại H (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow SD \perp (COH) \Rightarrow SD \perp CH$.

Khi đó: $\begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ OH \perp SD \\ CH \perp SD \end{cases} \Rightarrow [B, SD, C] = \widehat{OHC} = \varphi$

Xét ΔOHC vuông tại H, ta có:

$\tan \varphi = \tan \widehat{OHC} = \dfrac{OC}{OH} = \sqrt{2}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

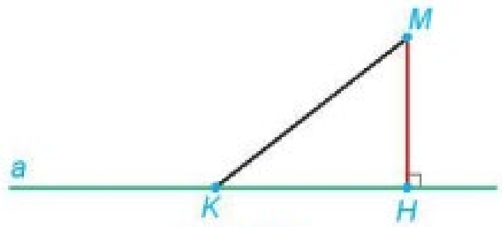
BÀI 26: KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

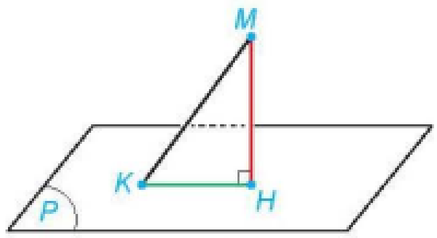
HĐ1.

a) Cho điểm M và đường thẳng a. Gọi H là hình chiếu của M trên a. Với mỗi điểm K thuộc a, giải thích vì sao $MK \geq MH\left(H.7.74\right)$.



Hình 7.74

b) Cho điểm M và mặt phẳng $\left(P\right)$. Gọi H là hình chiếu của M trên $\left(P\right)$. Với mỗi điểm K thuộc $\left(P\right)$, giải thích vì sao $MK \geq MH\left(\text{H.7.75}\right)$.



Hình 7.75

Lời giải

a) Vì H là hình chiếu của M trên đường thẳng a, nên MH là khoảng cách từ M đến a và MH là đoạn thẳng ngắn nhất từ M đến a, suy ra $MK > MH$.
b) Vì H là hình chiếu của M trên mặt phẳng $\left(P\right)$, nên MH là khoảng cách từ M đến $\left(P\right)$ và MH là đoạn thẳng ngắn nhất từ M đến $\left(P\right)$. hoặc bằng góc giữa $\overrightarrow{MH} va` \left(P\right)$. Điều này có nghĩa là độ dài của $\overrightarrow{MK}$ lớn hơn hoặc bằng độ dài của $\overrightarrow{MH}$ và do đó ta có $MK \geq MH$.

- Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a, kí hiệu $\mathrm{d}\left(M,a\right)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a.
- Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng $\left(P\right)$, kí hiệu $\mathrm{d}(M,\left(P\right)$), là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên $\left(P\right)$.

Chú ý. $\mathrm{d}\left(M,a\right)=0$ khi và chỉ khi $M \in a;\mathrm{d}\left(M,\left(P\right)\right)=0$ khi và chỉ khi $M \in \left(P\right)$. $\mathrm{d}\left(M,a\right)=0$ khi và chỉ khi $M \in a;\mathrm{d}\left(M,\left(P\right)\right)=0$ khi và chỉ khi $M \in \left(P\right)$.

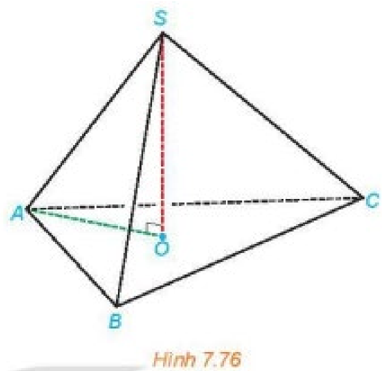
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Nhận xét. Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

Chú ý. Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

Ví dụ 1. Cho hình chóp đều $S \cdot ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng $a, b(a < b\sqrt{3})$. Tính chiều cao của hình chóp.

Lời giải. (H.7.76)



Hình 7.76

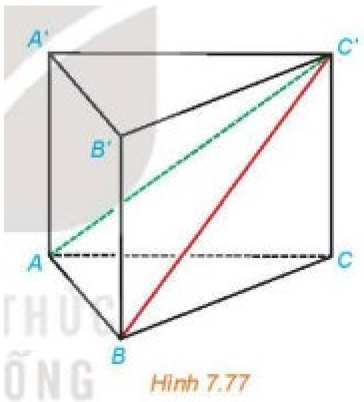
Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là tâm O của tam giác đều ABC. Trong tam giác đều ABC, ta có $OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Trong tam giác vuông SOA, ta có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

Vậy chiều cao của hình chóp là $SO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$.

Luyện tập 1 Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'ABC$ là tam giác vuông cân tại $A, AB = a, AA' = h\left(\text{H.7.77}\right)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tam giác ABC' là tam giác gì? Tính khoảng cách từ A đến BC'.



Hình 7.77

Lời giải

a) Gọi E là trung điểm của CC'. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ chính là khoảng cách từ A đến đoạn thẳng BE.

Ta có $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}\right)$

nên $AC'=AA'+A'C'=h+AC.\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C'}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\overrightarrow{AB}+\frac{AC}{a}\overrightarrow{AB'}\right)$

Ta biết rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}=\vec{0}$ do AB vuông góc với AB' và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB'}=0\, do\, AC\perp AB'$. Từ đó, ta suy ra : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\frac{h}{2a}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

Mặt khác, ta có thể $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)=a^2.\cos 45^\circ=\frac{1}{2}a^2$

do đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB'}=\frac{1}{4}a^2+\frac{h}{2}\frac{a}{\sqrt{2}}$

Khoảng cách từ A đến đoạn thẳng BE là: $d\left(A,BE\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB'}\right|}{\overrightarrow{AB'}}=\frac{a}{4}+\frac{h}{\sqrt{2}}$

b) Ta có $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}$ Vì $BB'\perp BC'$ nên $BB'.BC'=0$. Mặt khác ta có:

$\overrightarrow{B'C'}.\overrightarrow{BB'}=\left(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}\right).\overrightarrow{BB'}=\left|\overrightarrow{BB'}\right|^2+\overrightarrow{B'C'}.\overrightarrow{BB'}=\left|\overrightarrow{BB'}\right|^2+\overrightarrow{B'C'}.\overrightarrow{BB'}\cos\left(\widehat{B'C', BB'}\right)$

Do đó: $\left(\widehat{\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{BB'}}\right)=\sqrt{1-\cos\left(\widehat{\overrightarrow{B'C'},\overrightarrow{BB'}}\right)}=\frac{a\sqrt{2}}{2b}$

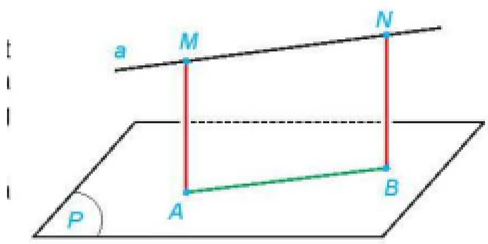
Vậy tam giác ABC' là tam giác vuông cân tại C'.

Khoảng cách từ A đến BC' là: $d\left(A,BC'\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG, GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

HĐ2. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Lấy hai điểm M,N bất kì thuộc a và gọi A,B tương ứng là các hình chiếu của chúng trên (P)(H.7.78).

Giải thích vì sao $ABNM$ là một hình chữ nhật và M,N có cùng khoảng cách đến (P).



Hình 7.78

Lời giải

Vì a song song với (P), nên ta có thể lấy một đường thẳng tùy ý qua M và N và giao với (P) tại I. Khi đó, theo định nghĩa của hình chiếu, ta có AM và BN là hai đường thẳng vuông góc với (P) và AB và MN là hai đường thẳng chứa chúng. Do đó, $AB//MN$.

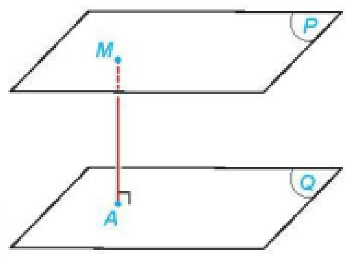
Vì AM và BN vuông góc với (P), ta có thể thấy rằng $AMIN$ và $BNIM$ là hai hình bình hành. Do đó, ta có:

$AM = IN$ và $BN = IM$. Từ 2 điều trên suy $AB = MN$.

Do đó, $ABNM$ là một hình chữ nhật với cạnh AB bằng MN. Vì AM và BN là hai đường thẳng vuông góc với (P) nên khoảng cách từ A và B đến (P) cũng là bằng nhau. Theo định nghĩa, khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng là khoảng cách nhỏ nhất từ điểm đó đến các điểm trên mặt phẳng đó. Vì vậy, M và N có cùng khoảng cách đến (P).

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a, kí hiệu $\mathrm{d}(a,(P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P).

HĐ3. a) Cho hai đường thẳng m và n song song với nhau. Khi một điểm M thay đổi trên m thì khoảng cách từ nó đến đường thẳng n có thay đổi hay không?
b) Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) và một điểm M thay đổi trên (P) (H.7.79). Hỏi khoảng cách từ M đến (Q) thay đổi thế nào khi M thay đổi.



Hình 7.79

Lời giải

a) Khi một điểm M thay đồi trên đường thẳng m, khoảng cách từ M đến đường thẳng n không thay đồi.
b) Khi một điểm M thay đổi trên mặt phẳng (P), khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) không thay đồi.

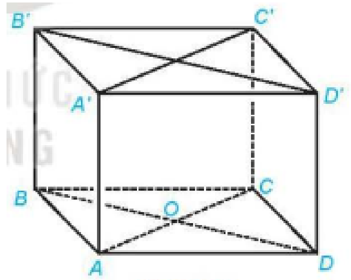
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q), kí hiệu $\mathrm{d}((P),(Q))$, là khoảng cách từ một điềm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n, kí hiệu $\mathrm{d}(m,n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.

Chú ý. Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

Ví dụ 2. Cho một hình hộp đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng $a, \widehat{BAD}=120^\circ, AA'=h$.

Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD), AA'$ và $(BDD'B')$.

Lời giải. (H.7.80)



Hình 7.80

Đường thẳng $A'C'$ thuộc mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên nó song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Do $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên $A'A \perp (ABCD)$.

Vậy $\mathrm{d}(A'C',(ABCD)) = \mathrm{d}(A',(ABCD)) = A'A = h$.

Do AA' song song với BB' nên AA' song song với $(BDD'B')$. Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$.

Do $AO \perp BD$ và $AO \perp BB'$ nên $AO \perp (BDD'B')$. Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng AO.

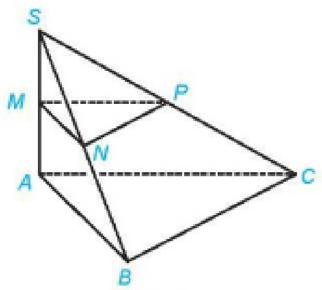
Tam giác BAD cân tại A và có $\widehat{BAD}=120^\circ$ nên $\widehat{ABO}=30^\circ$.

Do đó, trong tam giác vuông AOB, ta có $AO=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$. Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng $\frac{a}{2}$.

Luyện tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA=h$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Tính $\mathrm{d}((MNP),(ABC))$ và $\mathrm{d}(NP,(ABC))$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại B và $AB=a$ .Tính $d(A,(SBC))$.



Hình 7.81

Lời giải

a) Trong hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = h$.

Suy ra $d((MNP),(ABC)) = h$, $d\left(NP,\left(ABC\right)\right) = a\sqrt{2}$.

b) Tam giác $ABC \perp B$ và $AB = a$ suy ra $d\left(A,\left(SBC\right)\right) = AH = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$

Vận dụng. Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung khống chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng $2,28\text{ m}$. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc. Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21 m đi qua hay không?

Hình 7.82. Tại đầu một số cầu vượt ta có thể bắt gặp khung khống chế chiều cao.

Lời giải

Gọi $ABCD$ là hình thang cân với $AB = CD = 2,28$ và $BC = AD = x$ là độ dài đường nối hai chân cột. Đường thẳng DE vuông góc với AB, trong đó D nằm trên BC và E nằm trên AD. Khi đó, ta có $DE = x\sin 15^\circ$.

Gọi M là trung điểm của AB, N là trung điểm của CD. Khoảng cách từ thanh ngang EF đến mặt đất chính là độ dài đoạn thẳng MN.

Tính được $MN = AM - AN = AB\cos 15^\circ - CD\cos 15^\circ$ và $DE = x\sin 15^\circ$, từ đó tính được khoảng cách từ thanh ngang $EF = DE + MN = x\sin 15^\circ + 0,94(m)$

Để xe có chiều cao không quá 2,21m đi qua được ta có $x \le 2,21 - 0,94\sin 15^\circ \approx 6,37m$

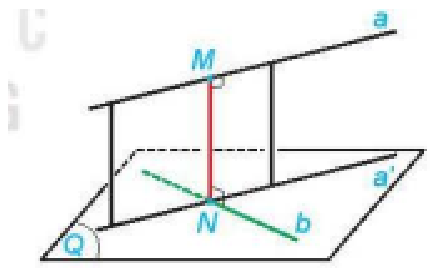
3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

HĐ4. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (Q) là mặt phẳng chứa đường thẳng b và song song với a. Hình chiếu a' của a trên (Q) cắt b tại N. Gọi M là hình chiếu của N trên a (H.7.83).

a) Mặt phẳng chứa a và a' có vuông góc với (Q) hay không?

b) Đường thẳng MN có vuông góc với cả hai đường thẳng a và b hay không?

c) Nêu mối quan hệ của khoảng cách giữa $a,(Q)$ và độ dài đoạn thẳng MN.



Hình 7.83

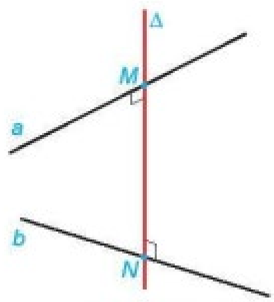
Lời giải

a) Vì a và a' đối xứng qua mặt phẳng (Q), nên mặt phẳng chứa a và a' cũng vuông góc với (Q).

b) Vì MN là hình chiếu của đoạn thẳng NB lên a. Vì a và b là hai đường chéo nhau, nên NB là đường cao của tam giác NAB. Do đó, $MN \perp AB$ (vì là hình chiếu của NB lên a) và cũng vuông góc với b (vì là đường cao của tam giác NAB). Vậy, MN có vuông góc với cả hai đường thẳng a và b.

c) Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (Q) bằng độ dài đoạn thẳng NN', trong đó N' là hình chiếu của A lên (Q). Độ dài đoạn thẳng MN bằng độ dài đường thẳng NM', trong đó M' là hình chiếu của M lên đường thẳng b. Sử dụng định lý Pytago và các đường hình chiếu, ta có thể tính được khoảng cách giữa a và (Q) và độ dài đoạn thẳng MN.

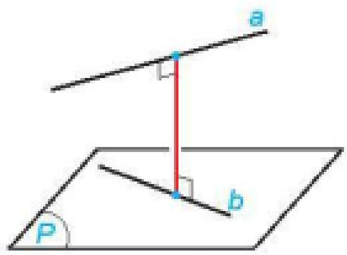
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b.
Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b.



Hình 7.84

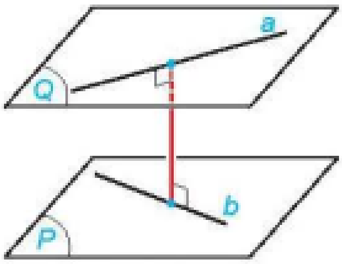
Nhận xét

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại $(\mathrm{H}.7.85)$.



Hình 7.85

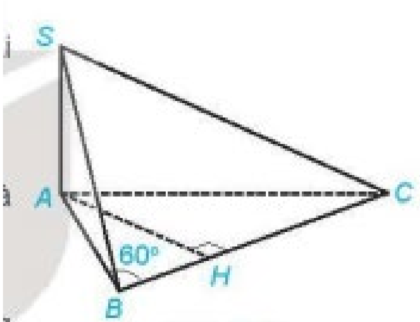
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song, tương ứng chứa hai đường thẳng đó (H.7.86).



Hình 7.86

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC), AB=a, \widehat{ABC}=60^\circ$. Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải. (H.7.87)



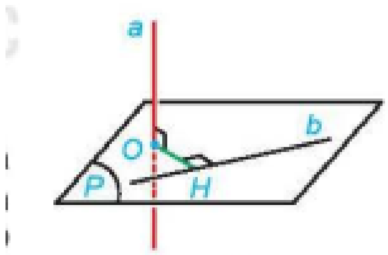
Hình 7.87

Gọi H là hình chiếu của A trên BC. Tam giác ABH vuông tại H và có $AB=a, \widehat{ABH}=60^\circ$ nên $BH=\frac{a}{2}$.

Do SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên AH là đường vuông góc chung của SA và BC (H thuộc tia BC và $BH=\frac{a}{2}\Big)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\mathrm{d}(SA,BC)=AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Khám phá. Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt (P) tại O. Cho đường thẳng b thuộc mặt phẳng (P). Hãy tìm mối quan hệ giữa khoảng cách giữa a,b và khoảng cách từ O đến b(H.7.88).



Hình 7.88

Lời giải

Để tìm mối quan hệ giữa khoảng cách giữa đường thẳng a và b và khoảng cách từ điểm O đến b, ta sử dụng hình chiếu vuông góc và áp dụng định lý Pytago. Ta có thể suy ra công thức: $\left(\frac{MH}{OH}\right)^2-1=\left(\frac{d}{OH}\right)^2$.

Trong đó, d là khoảng cách giữa a và mặt phẳng (P), OH là khoảng cách giữa b và mặt phẳng (P), MN là khoảng cách giữa a và b.

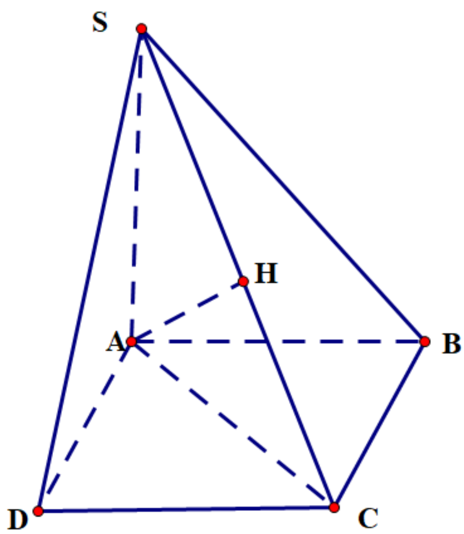
Luyện tập 3. Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến SC.

b) Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC.

Lời giải



a) ABCD là hình vuông canh a=> $AC = a\sqrt{2}$

Từ A kẻ $AH \perp SC$ => khoảng cách từ A đến SC là AH

$SA \perp (ABCD) => SA \perp AC$ => ΔSAH vuông tại A.

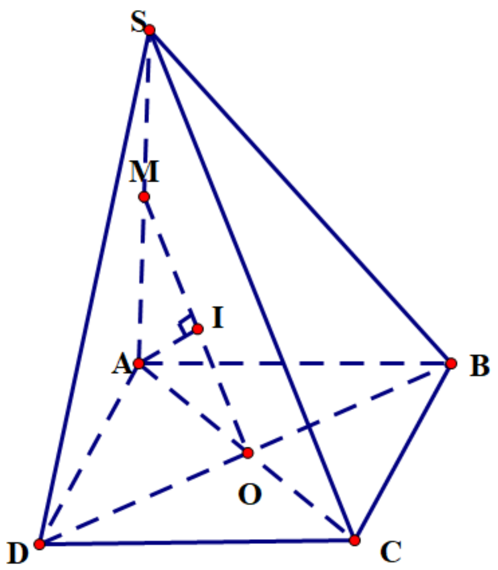
$$=> \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AH^2}$$
$$=> \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{AH^2} = a^2$$
$$=> AH = a$$

Vậy khoảng cách từ A đến SC bằng a

b)

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{array}\right\} => BD \perp SA, BD \perp AC$$
$$Mà\ \text{SA,AC} \subset (SAC); SA \cap AC = \{A\}$$
$$=> BD \perp (SAC)$$

c)



Gọi M là TĐ của SA

⇨ OM là đường trung bình của tam giác SAC=> $OM // \text{SC}$

$OM \subset (MBD) => SC // (MBD)$

Mà ta có: $\text{BD} \subset (MBD) => d(BD, SC) = d(SC, (MBD))$

$$d(C, (MBD)) = d(A, (MBD))$$

$AI \perp OM \quad (H \in OM)$

$\left.\begin{matrix} BD \perp (SAC) \\ AI \subset (SAC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AI \perp BD, AI \perp OM$

Kẻ $Mà$ BD,OM $\subset (MBD); BD \cap OM = \{O\}$

$\Rightarrow AI \perp (MBD)$

$\Rightarrow d(A,(MBD)) = AI \Rightarrow d(BD,SC) = AH$

M là TĐ của SA=> $AM = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác AOM vuông tại A có $AI \perp OM$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 4$$

$\Rightarrow AI = \frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách giữa BD và SC bằng $\frac{a}{2}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

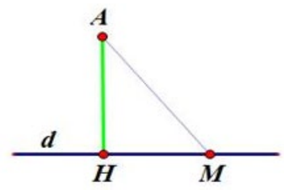
Dạng 1: Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

1. Phương pháp:

①. Xác định hình chiếu H của A trên d

②. Khi đó ta có: $d(A,d) = AH$

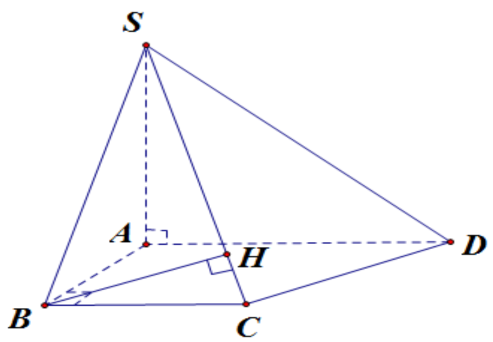
③. Tính độ dài AH bằng kiến thức hình học phẳng cơ bản, các định lý và hệ thức lượng trong tam giác.



2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông có đáy lớn AD gấp đôi đáy nhỏ BC, đồng thời đường cao $AB = BC = a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ đỉnh B đến đường thẳng SC

Lời giải



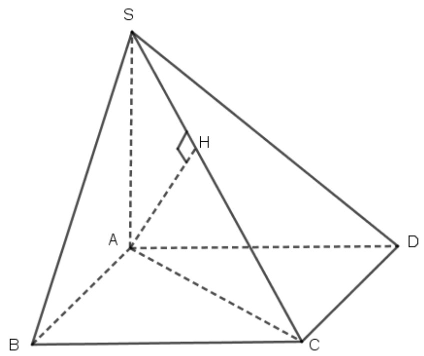
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Trong ΔSBC dựng đường cao $BH \Rightarrow d(B;SC) = BH$.

$SB = 2a$; $\dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \dfrac{BS.BC}{\sqrt{BS^2 + BC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính khoảng cách từ A đến đường thẳng SC.

Lời giải



+) Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$.

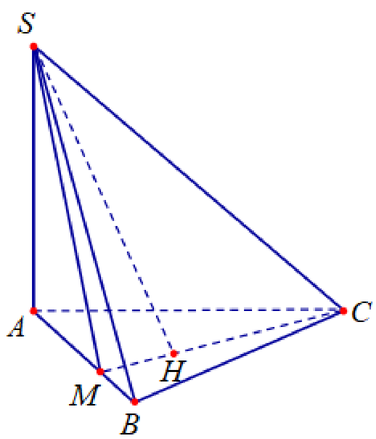
+) Kẻ $AH \perp SC$, suy ra $d(A;SC) = AH$.

+) Ta có tam giác ASC vuông tại A nên

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{3}{2a^2}$ $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$, $AB = AC = a$. Gọi M là điểm thuộc AB sao cho $AM = \dfrac{2a}{3}$. Tính khoảng cách d từ điểm S đến đường thẳng CM.

Lời giải



Ta có $CM = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{9}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{3}$, $SM = \sqrt{4a^2 + \dfrac{4a^2}{9}} = \dfrac{2a\sqrt{10}}{3}$, $SC = a\sqrt{6}$.

Đặt $p=\dfrac{SM+MC+SC}{2}$.

Diện tích tam giác SMC : $S_{\Delta SMC}=\sqrt{p(p-SM)(p-CM)(p-SC)}=\dfrac{a^2\sqrt{11}}{3}$

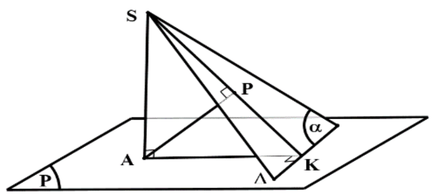
Suy ra khoảng cách từ S đến CM : $SH=\dfrac{2S_{\Delta SMC}}{CM}=\dfrac{a\sqrt{110}}{5}$.

Dạng 2: Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1. Phương pháp:

- Để tính được khoảng từ điểm M đến mặt phẳng (α) thì điều quan trọng nhất là ta phải xác định được hình chiếu của điểm M trên (α).

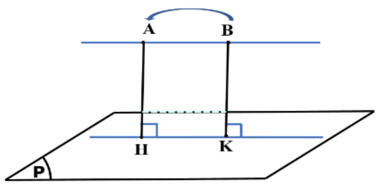
①. A là chân đường cao, tức là $A\equiv H$.



♦. Dựng $AK\perp\Delta\Rightarrow\Delta\perp(SAK)\Rightarrow(\alpha)\perp(SAK)$ và $(\alpha)\cap(SAK)=SK$.

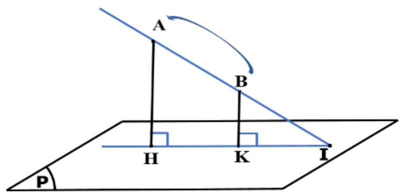
♦. Dựng $AP\perp SK\Rightarrow AP\perp(\alpha)\Rightarrow d(A,(\alpha))=AP.$

②. Dựng đường thẳng $AB\,||\,(P)$.



♦. Khi đó ta có: $d(B,(P))=d(A,(P))$.

③.Đường thẳng AB cắt (P) tại I:



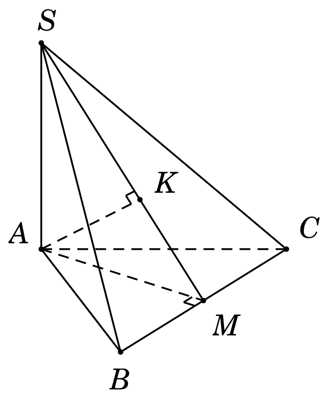
♦. Khi đó ta có: $\dfrac{d(B,(P))}{d(A,(P))}=\dfrac{BK}{AH}=\dfrac{BI}{AI}$

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK.$ (2)

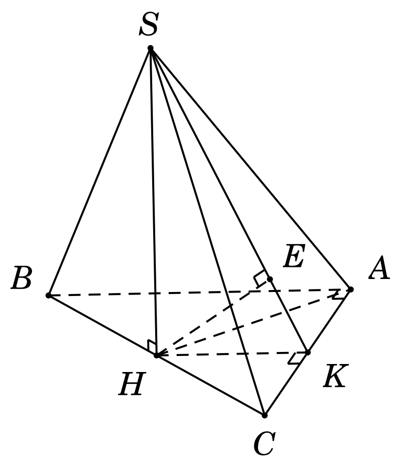
Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d[A,(SBC)] = AK.$

Trong ΔSAM, có $AK = \frac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{3a}{\sqrt{15}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$

Vậy $d[A,(SBC)] = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a,\ AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

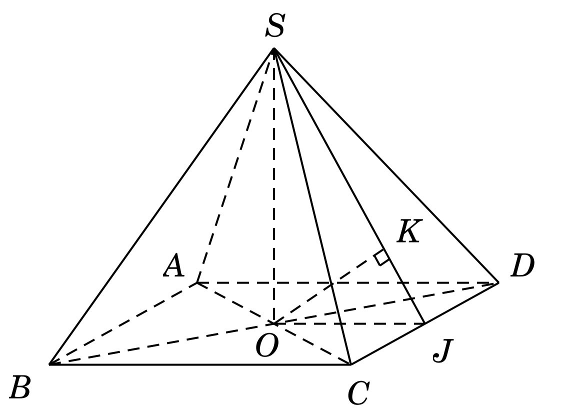
Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK \perp AC$.

Kẻ $HE \perp SK$ $(E \in SK)$.

Khi đó $d\left[B,(SAC)\right]=2d\left[H,(SAC)\right]=2HE=2.\dfrac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy, suy ra $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $d\left[A,(SCD)\right]=2d\left[O,(SCD)\right]$.

Gọi J là trung điểm CD, suy ra $OJ\perp CD$.

Gọi K là hình chiếu của O trên SJ, suy ra $OK\perp SJ$.

Khi đó $d\left[O,(SCD)\right]=OK=\dfrac{SO.OJ}{\sqrt{SO^2+OJ^2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

Vậy $d\left[A,(SCD)\right]=2OK=\dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}$.

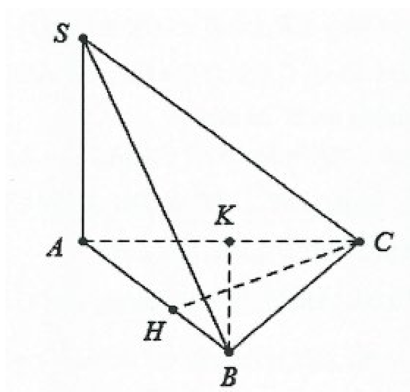
Ví dụ 4. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* có $AB=3a, BC=2a, \widehat{ABC}=60°$. Biết $SA\perp(ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng (SAB).

b) Tính khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Dựng $CH\perp AB$ ta có: $\begin{cases}CH\perp AB\\ CH\perp SA\end{cases}\Rightarrow CH\perp(SAB)$.



Do đó

$d\left(C;(SAB)\right)=CH=CB\sin\widehat{ABH}=2a\sin 60°=a\sqrt{3}$.

b) Dựng $CK\perp AC\Rightarrow CK\perp(SAC)$.

Ta có: $d\left(B;(SAC)\right)=CH=\dfrac{2S_{ABC}}{AC}=\dfrac{AB.BC\sin\widehat{ABC}}{AC}$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Trong đó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BA.BC\cos\widehat{B}$

$\Rightarrow AC = a\sqrt{7} \Rightarrow d\left(B;\left(SAC\right)\right) = \dfrac{3a.2a.\sin 60°}{a\sqrt{7}} = \dfrac{3a\sqrt{21}}{7}$

Ví dụ 5. Cho hình *chóp S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tam giác *SAB* cân tại *S* và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *H* là trung điểm của *AB*.

a) Tính khoảng cách từ *A* đến mặt phẳng $\left(SHD\right)$.

b) Tính khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng $\left(SHC\right)$.

Lời giải

a) Do tam giác *SAB* cân tại *S* nên $SH \perp AB$.

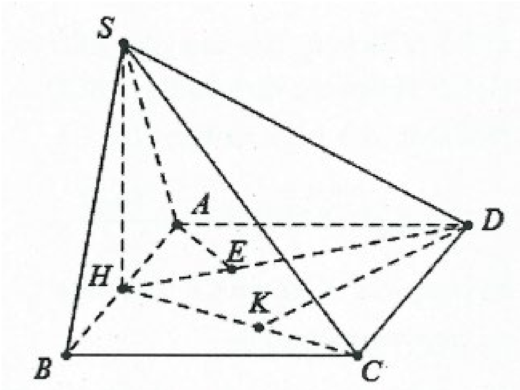
Ta có: $HA = HD = \dfrac{a}{2}$.

Mặt khác $\left(SAB\right) \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SH \perp \left(ABCD\right)$.

Dựng

$AE \perp DH \Rightarrow AE \perp \left(SHD\right) \Rightarrow d\left(A;\left(SHD\right)\right) = AE$.

Mặt khác $AE = \dfrac{AH.AD}{\sqrt{AH^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.



b) Dựng $DK \perp CH \Rightarrow d\left(D;\left(SHC\right)\right) = DK$.

Ta có: $CH = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}, S_{HCD} = \dfrac{1}{2}CD.d\left(H;CD\right) = \dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Do đó $d\left(D;\left(SHC\right)\right) = \dfrac{2S_{HCD}}{CH} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A* và *B* có $AD = 3a, AB = BC = 2a$. Biết $SA \perp \left(ABCD\right)$.

a) Tính khoảng cách từ *C* đến mặt phẳng $\left(SAD\right)$.

b) Tính khoảng cách từ *D* đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$.

Lời giải

a) Dựng $CE \perp AD \Rightarrow CE \perp \left(SAD\right)$.

Khi đó $d\left(C;\left(SAD\right)\right) = CE$, do *ABCE* là hình vuông cạnh 2*a* nên

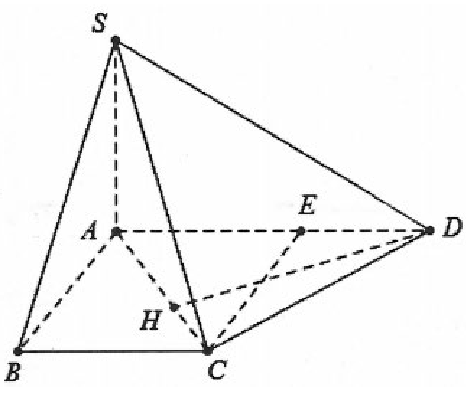
$CE = AE = 2a \Rightarrow d\left(C;\left(SAD\right)\right) = 2a$.

b) Dựng $DH \perp AC \Rightarrow DH \perp \left(SAC\right)$.

Khi đó $d\left(D;\left(SAC\right)\right) = DH$.

Ta có: *ABCE* là hình vuông nên $\widehat{CAD} = 45°$

Do đó $DH = AD\sin 45° = 3a.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$



Dạng 3: Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp:

Để tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

- *Cách 1:* Dựng mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và song song với b. Khoảng cách từ b đến (P) là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 2:* Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.
- *Cách 3:* Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

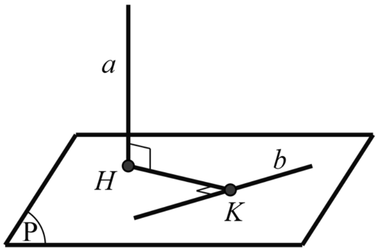
Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

- *Cách 1:* Khi $a \perp b$

  + Dựng một $(P) \supset b, (P) \perp a$ tại H.

  + Trong (P) dựng $HK \perp b$ tại K.

  + Đoạn HK là đoạn vuông góc chung của a và b.

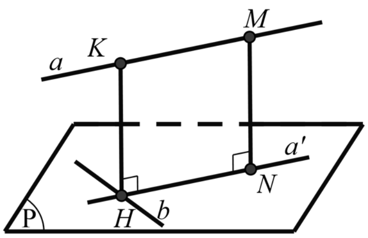


- *Cách 2:*

  + Dựng $(P) \supset b, (P) // a$.

  + Dựng $a' = hch_{(P)}a$, bằng cách lấy $M \in a$ dựng đoạn $MN \perp (\alpha)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song a.

  + Gọi $H = a' \cap b$, dựng $HK // MN \Rightarrow$ HK là đoạn vuông góc chung.



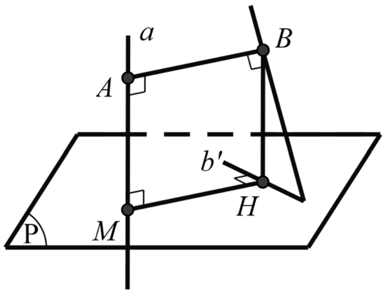
- *Cách 3:*

  + Dựng mặt phẳng (P) vuông góc với a tại điểm M.

  + Dựng hình chiếu b' của b trên (P).

  + Dựng hình chiếu vuông góc H của M trên b'.

  + Từ H dựng đường thẳng song song với a, cắt b tại điểm B.



+ Qua B dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại điểm A. Khi đó, AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

2. Các ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC.

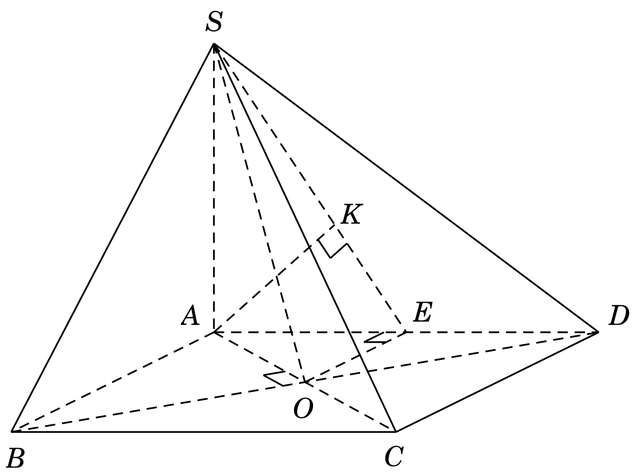
Lời giải

Ta có $d[AD,SC]=d[AD,(SBC)]=d[A,(SBC)]$.

Kẻ $AK\perp SB$. Khi đó $d[A,(SBC)]=AK=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^0$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO.

Lời giải



Ta có $\Delta SAB=\Delta SAD$ $(c-g-c)$, suy ra $SB=SD$.

Lại có $\widehat{SBD}=60^0$, suy ra ΔSBD đều cạnh $SB=SD=BD=a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=a$.

Gọi E là trung điểm AD, suy ra $OE\parallel AB$ và $AE\perp OE$.

Do đó $d[AB,SO]=d[AB,(SOE)]=d[A,(SOE)]$.

Kẻ $AK\perp SE$.

Khi đó $d[A,(SOE)]=AK=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

Lời giải

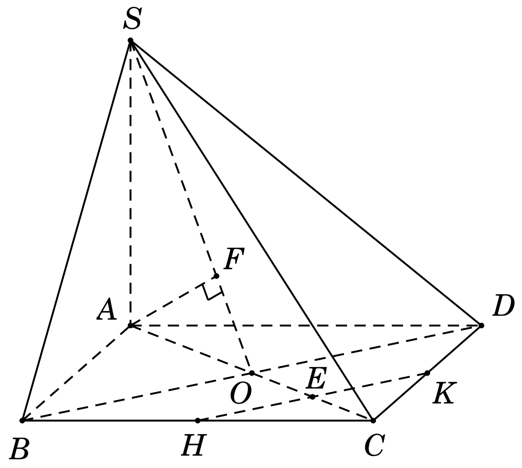
Ta có $BD\perp(SAC)$. Kẻ $OK\perp SA$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Khi đó $d[SA,BD]=\dfrac{SO.OA}{\sqrt{SO^2+OA^2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và SD.

Lời giải



Gọi $E=HK\cap AC$.

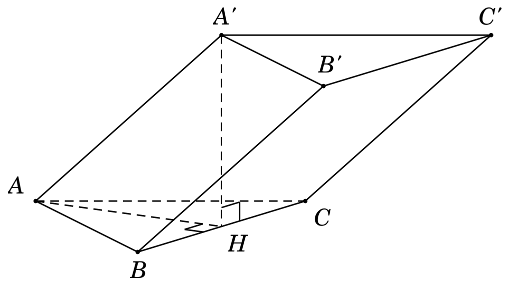
Do $HK\parallel BD$ nên $d[HK,SD]=d[HK,(SBD)]=d[E,(SBD)]=\dfrac{1}{2}d[A,(SBD)]$.

Kẻ $AF\perp SO$. Khi đó $d[A,(SBD)]=AF=\dfrac{SA.AO}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\dfrac{2a}{3}$.

Vậy $d[HK,SD]=\dfrac{1}{2}AF=\dfrac{a}{3}$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

Lời giải



Do $BB'\parallel AA'$ nên $d[BB',A'H]=d[BB',(AA'H)]=d[B,(AA'H)]$.

Ta có $\begin{cases}BH\perp AH\\BH\perp A'H\end{cases}\Rightarrow BH\perp(AA'H)$ nên $d[B,(AA'H)]=BH=\dfrac{BC}{2}=a.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vậy $d[BB',A'H]=a$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

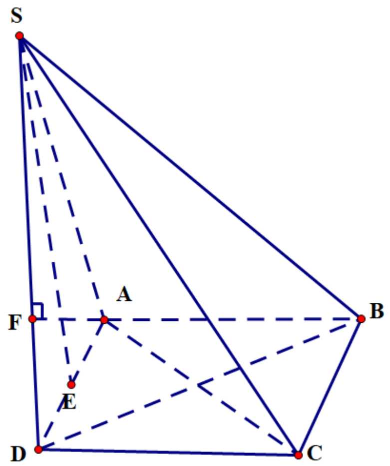
Bài 7.22. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là một tam giác đều và $(SAD)\perp(ABCD)$.

a) Tính chiều cao của hình chóp.

b) Tính khoảng cách giữa BC và (SAD).

c) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AB và SD.

Lời giải



a) Gọi E là trung điểm của AD

$(SAD)\perp(ABCD),(SAD)\cap(ABCD)=AD$

Mà tam giác SAD đều

$\Rightarrow SE\perp(ABCD)$

Xét tam giác SDE vuông tại E có

$$SE=\sqrt{SD^2-DE^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

b) Ta có $AB\perp AD, AB\perp SE\left(SE\perp(ABCD)\right)\Rightarrow AB\perp(SAD)$

Vì $BC//AD$ (ABCD là hình vuông), $AD\subset(SAD)$ nên $BC//(SAD)$

$$\Rightarrow d\left(BC,(SAD)\right)=d\left(B,(SAD)\right)=AB=a$$

c) Trong (SAD) kẻ $AF\perp SD$

Có $AB\perp(SAD), AF\subset(SAD)\Rightarrow AB\perp AF$

$\Rightarrow d(AB,SD)=AF$

Vì tam giác SAD đều nên $AF=SE=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

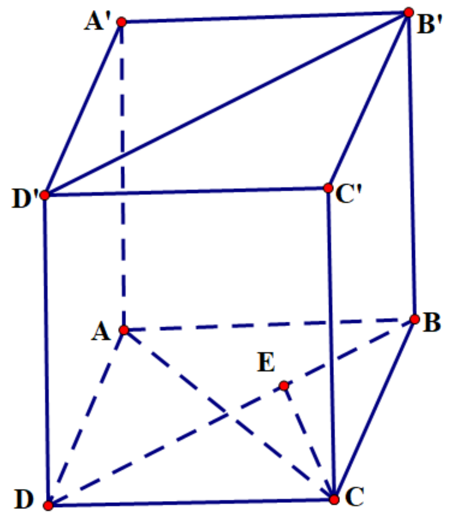
Vậy $d(AB,SD)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài 7.23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = b, BC = c$.

a) Tính khoảng cách giữa CC' và $(BB'DD'D)$.

b) Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AC và $B'D'$.

Lời giải



a) Trong (ABCD) kẻ $CE \perp BD$

Mà $CE \perp BB'\left(BB' \perp (ABCD)\right) \Rightarrow CE \perp (BB'D'D)$

Ta có $CC' // BB' \Rightarrow CC' // (BB'D'D) \Rightarrow d\left(CC',(BB'D'D)\right) = d\left(C,(BB'D'D)\right) = CE$

Xét tam giác BCD vuông tại C có

$$\frac{1}{CE^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2+c^2}{c^2b^2} \Rightarrow CE = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

b) $AC \subset (ABCD), B'D' \subset (A'B'C'D'), BCD) // (A'B'C'D')$

$\Rightarrow d(AC, B'D') = d\left((ABCD),(A'B'C'D')\right) = BB' = a$.

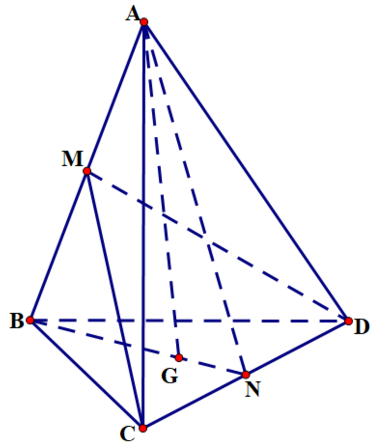
Bài 7.24. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh rằng:

a) MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



a) Ta có $BN \perp CD, AG \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABN), MN \subset (ABN) \Rightarrow CD \perp MN$

Vì BN, AN lần lượt là 2 đường trung tuyến của 2 tam giác đều cạnh a nên $\mathrm{BN} = \mathrm{AN}$

Do đó tam giác ABN cân tại N mà M là trung điểm $\mathrm{AB} \Rightarrow AB \perp MN$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Ta có $CD \perp (ABN); AB \subset (ABN) \Rightarrow CD \perp AB$

Chứng minh tương tự ta được $BC \perp AD, BD \perp AC$

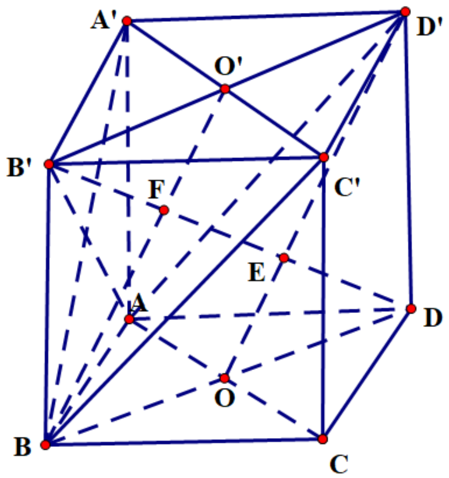
Vậy các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau

Bài 7.25. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh a.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(D'AC)$ và $(BC'A')$ song song với nhau và DB' vuông góc với hai mặt phẳng đó.

b) Xác định các giao điểm E, F của DB' với $(D'AC),(BC'A')$. Tính $\mathrm{d}((D'AC),(BC'A'))$.

Lời giải



a) $AC // A'C', D'C // A'B \Rightarrow (D'AC) // (BC'A')$

Ta có $AC \perp BD, AC \perp BB' \Rightarrow AC \perp (BDB'); B'D \subset (BDB') \Rightarrow AC \perp B'D$

Mà $\mathrm{AC} // \mathrm{A'C'} \Rightarrow B'D \perp A'C'$

Ta có $AB' \perp A'B, AD \perp A'B \Rightarrow A'B \perp (AB'D); B'D \subset (AB'D) \Rightarrow A'B \perp B'D$

Mà $\mathrm{A'B} // \mathrm{D'C} \Rightarrow B'D \perp D'C$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $B'D \perp AC, B'D \perp D'C \Rightarrow B'D \perp (D'AC)$

$B'D \perp A'C', B'D \perp A'B \Rightarrow B'D \perp (BA'C')$

b) Gọi $AC \cap BD = \{O\}, A'C' \cap B'D' = \{O'\}$

Trong (BB'D'D) nối $D'O \cap B'D = \{E\}, BO' \cap B'D = \{F\}$

Vì $(D'AC)//(BC'A')$ nên d((D'AC), $(BC'A')) = \mathrm{d}(E,(BC'A')) = EF$ do $B'D \perp (BA'C')$

$$\left.\begin{array}{l} B'D \perp BO'\left(B'D \perp (BA'C')\right) \\ B'D \perp OD'\left(B'D \perp (D'AC)\right) \end{array}\right\} \Rightarrow BO'//OD'$$

Áp dụng định lí Talet có $\frac{DE}{EF} = \frac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow DE = EF$ và $\frac{B'F}{EF} = \frac{B'O'}{O'D'} = 1 \Rightarrow B'F = EF$

$\Rightarrow EF = \frac{B'D}{3}$

Xét tam giác ABD vuông tại A có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

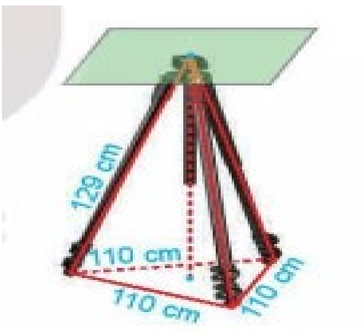
Xét tam giác BB'D vuông tại B có $B'D = \sqrt{BB'^2 + BD^2} = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow EF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $d\left((D'AC),(BC'A')\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài 7.26. Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110cm . Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129cm.

Lời giải



Hình 7.90

Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110 cm nên hình chiếu của đỉnh là tâm của đáy mà đáy là tam giác đều do đó tâm là trọng tâm.

Vì đáy là tam giác đều cạnh 110 cm nên chiều cao của đáy bằng 110. $\frac{\sqrt{3}}{2} = 55\sqrt{3}(\text{ cm})$

Khoảng cách từ gốc chân đến tâm là $\frac{2}{3} \cdot 55\sqrt{3} = \frac{110\sqrt{3}}{3}(\text{ cm})$

Chiều cao giá đỡ là $\sqrt{129^2 - \left(\frac{110\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{37823}{3}} \approx 112,28(\text{ cm})$

Bài 7.27. Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

Lời giải

Khi bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang, thì mặt nước cũng sẽ có cùng độ cao trên toàn bể nước. Vì vậy, để đo độ sâu của bể, ta có thể đo khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể.

Khi thả quả dọi vào bể nước, nó sẽ chìm dưới mặt nước và chạm đến đáy bể. Khi kéo quả dọi lên, ta sẽ thấy một đoạn dây dọi nằm trong bề nước và một đoạn dây dọi ở ngoài bề nước. Đoạn dây dọi nằm trong bề nước có độ dài bằng khoảng cách từ mặt nước đến chỗ quả dọi chạm đáy bể. Do đó, để đo độ sâu của bể, ta chỉ cần đo độ dài của đoạn dây dọi nằm trong bề nước.

Công thức để tính độ sâu của bể nước sẽ là: Độ sâu bể = chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\frac{a\sqrt{10}}{2}$. **B.** $d=a\sqrt{2}$. **C.** $d=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Do $AD\parallel BC$ nên $d\left[D,(SBC)\right]=d\left[A,(SBC)\right]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK\perp SB$.

Khi $d\left[A,(SBC)\right]=AK=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

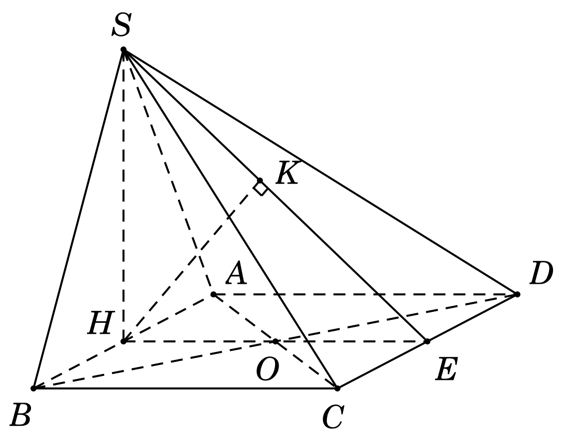
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

A. $d=1$. **B.** $d=\sqrt{2}$. **C.** $d=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi H là trung điểm AB, suy ra $SH \perp AB.$ Do đó $SH \perp (ABCD).$

Do $AH \parallel CD$ nên $d[A,(SCD)] = d[H,(SCD)].$

Gọi E là trung điểm CD; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE.

Khi đó $d[H,(SCD)] = HK = \dfrac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$

Vậy $d[A,(SCD)] = HK = \dfrac{\sqrt{21}}{7}.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $d = a$. **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$ **C.** $d = a\sqrt{3}.$ **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Do $AB \parallel CD$ nên $d[B,(SCD)] = d[A,(SCD)]$. Kẻ $AE \perp SD$ tại E.

Khi đó $d[A,(SCD)] = AE.$

Tam giác vuông SAD, có $AE = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

Vậy $d[B,(SCD)] = AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}.$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh $a.$ Cạnh bên $SA = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD).$ Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng $(SBC).$

A. $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{19}.$ **B.** $d = \dfrac{\sqrt{285}}{38}.$ **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{285}}{38}.$ **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn C

Ta có $d\left[O,(SBC)\right]=\frac{1}{2}d\left[A,(SBC)\right]$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB, suy ra $AK\perp SB$.

Khi đó $d\left[A,(SBC)\right]=AK$.

Tam giác vuông SAB, có $AK=\frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{a\sqrt{285}}{19}$.

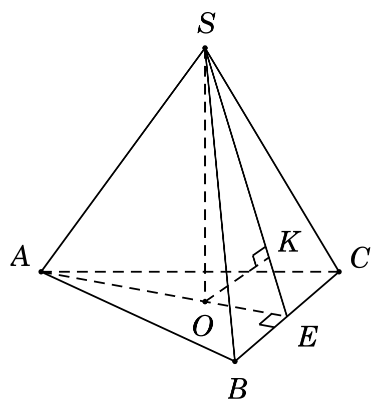
Vậy $d\left[O,(SBC)\right]=\frac{1}{2}AK=\frac{a\sqrt{285}}{38}$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\frac{a}{4}$. **B.** $d=\frac{3a}{4}$. **C.** $d=\frac{3}{4}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi O là tâm của tam giác đều ABC.

Do hình chóp $S.ABC$ đều nên suy ra $SO\perp(ABC)$.

Ta có $d\left[A,(SBC)\right]=3d\left[O,(SBC)\right]$.

Gọi E là trung điểm BC; Kẻ $OK\perp SE$.

Khi đó $d\left[O,(SBC)\right]=OK$.

Tính được $SO=\frac{a}{2}$ và $OE=\frac{1}{3}AE=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác vuông SOE, có $OK=\frac{SO.OE}{\sqrt{SO^2+OE^2}}=\frac{a}{4}$.

Vậy $d\left[A,(SBC)\right]=3OK=\dfrac{3a}{4}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $d=a$. **D.** $d=a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Xác định $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,AB}=\widehat{SBA}$, suy ra $SA=AB.\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}$.

Ta có $AD\parallel BC\Rightarrow AD\parallel(SBC)$ nên $d\left[D,(SBC)\right]=d\left[A,(SBC)\right]$.

Kẻ $AK\perp SB$. Khi đó $d\left[A,(SBC)\right]=AK=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left[D,(SBC)\right]=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC).

A. $d=\dfrac{1}{2}$. **B.** $d=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $d=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Lời giải

Chọn D

Xác định $60^0=\widehat{SB,(ABCD)}=\widehat{SB,OB}=\widehat{SBO}$ và $SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Gọi M là trung điểm BC, kẻ $OK\perp SM$. Khi đó $d\left[O,(SBC)\right]=OK$.

Tam giác vuông SOM, có $OK=\dfrac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

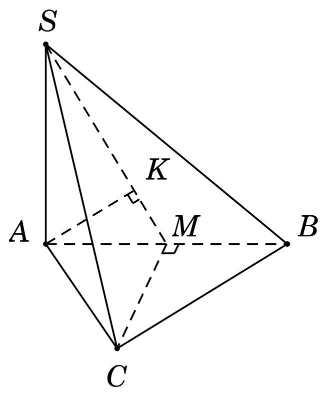
Vậy $d\left[O,(SBC)\right]=OK=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC).

A. $d=a\sqrt{3}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **C.** $d=a$. **D.** $d=\dfrac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định $60^0 = \widehat{SB,(ABC)} = \widehat{SB,AB} = \widehat{SBA}$ và $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a.\sqrt{3} = a\sqrt{3}$.

Do M là trung điểm của cạnh AB nên $d[B,(SMC)] = d[A,(SMC)]$.

Kẻ $AK \perp SM$. Khi đó $d[A,(SMC)] = AK.$

Tam giác vuông SAM, có $AK = \dfrac{SA.AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $d[B,(SMC)] = AK = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a,\ BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm $A,\ B,\ C$. Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$ **B.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}.$ **C.** $d = a\sqrt{5}.$ **D.** $d = a.$

Lời giải

Chọn A

Gọi O là trung điểm AC, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Do đỉnh S cách đều các điểm $A,\ B,\ C$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $d[M,(SBD)] = \dfrac{1}{2}d[C,(SBD)]$.

Kẻ $CE \perp BD$. Khi đó $d[C,(SBD)] = CE = \dfrac{CB.CD}{\sqrt{CB^2 + CD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $d[M,(SBD)] = \dfrac{1}{2}CE = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC,\ AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh SC. Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

A. $d = a\sqrt{3}.$ **B.** $d = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$ **D.** $d = \sqrt{3}.$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn C

Ta có $d\left[E,(SAD)\right]=\frac{1}{2}d\left[C,(SAD)\right]$.

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông $\Rightarrow CM\perp AD$.

Do $\begin{cases} CM\perp AD \\ CM\perp SA \end{cases}\Rightarrow CM\perp(SAD)$ nên $d\left[C,(SAD)\right]=CM=AB=a\sqrt{3}$.

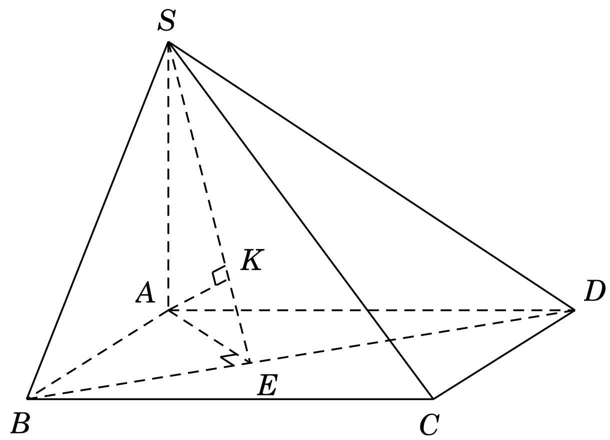
Vậy $d\left[E,(SAD)\right]=\frac{1}{2}CM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a,\ AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a.

A. $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $d=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^0=\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{SD,AD}=\widehat{SDA}$ và $SA=AD.\tan\widehat{SDA}=2a\sqrt{3}$.

Ta có $d\left[C,(SBD)\right]=d\left[A,(SBD)\right]$.

Kẻ $AE\perp BD$ và kẻ $AK\perp SE$. Khi đó $d\left[A,(SBD)\right]=AK$.

Tam giác vuông BAD, có $AE=\frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left[C,(SBD)\right]=AK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 12: Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

A. $d = \frac{2}{3}$. **B.** $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $d = \frac{2a}{3}$. **D.** $d = 1$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $AE \perp BD$, kẻ $AK \perp SE$. Khi đó $d\left[A,(SBD)\right] = AK$.

Tam giác vuông ABD, có $AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Tam giác vuông SAE, có $AK = \frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = \frac{2}{3}$.

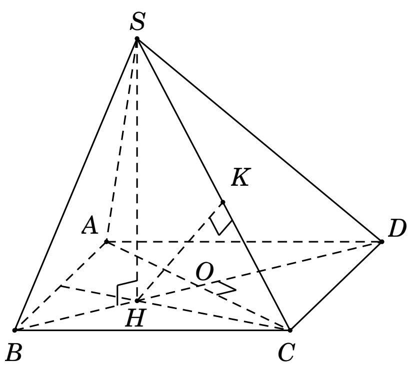
Vậy $d\left[A,(SBD)\right] = AK = \frac{2}{3}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30^0. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a.

A. $d = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $d = a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định $30^0 = \widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{SD,HD} = \widehat{SDH}$ và $SH = HD.\tan\widehat{SDH} = \frac{2a}{3}$.

Ta có $d\left[B,(SCD)\right] = \frac{BD}{HD}.d\left[H,(SCD)\right] = \frac{3}{2}.d\left[H,(SCD)\right]$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.

Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $d\left[H,(SCD)\right] = HK$.

Tam giác vuông SHC, có $HK=\dfrac{SH.HC}{\sqrt{SH^2+HC^2}}=\dfrac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $d\left[B,(SCD)\right]=\dfrac{3}{2}HK=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB=BC=a,\ AD=2a$. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

A. $d=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $d=a\sqrt{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $d=2a$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm AD, suy ra $ABCM$ là hình vuông.

Do đó $CM=MA=\dfrac{AD}{2}$ nên tam gác ACD vuông tại C.

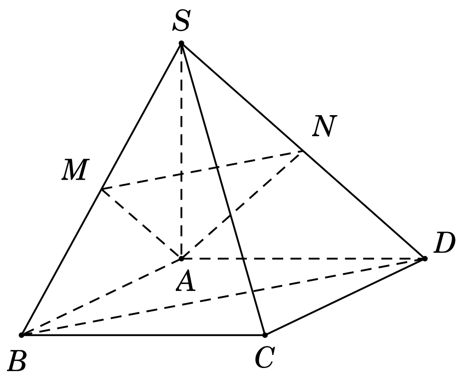
Kẻ $AK\perp SC$. Khi đó $d\left[A,(SCD)\right]=AK=\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD=2AB=2a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của SB và SD. Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

A. $d=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $d=2a$. **C.** $d=\dfrac{3a}{2}$. **D.** $d=a\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Thể tích khối chóp $V_{S.ABD}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABD}.SA=\dfrac{2a^3}{3}$.

Vì $S_{\Delta SMN}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta SBD}$ nên $V_{A.SMN}=\dfrac{1}{4}V_{A.SBD}=\dfrac{a^3}{6}$.

Ta có AM, AN là các đường trung tuyến trong tam giác vuông, MN là đường trung bình nên tính được $AM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $AN=a\sqrt{2}$, $MN=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó tính được $S_{\Delta AMN}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $d\left[S,(AMN)\right]=\frac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta AMN}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

A. $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $d=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $d=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $d=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, suy ra $AI\perp BD$.

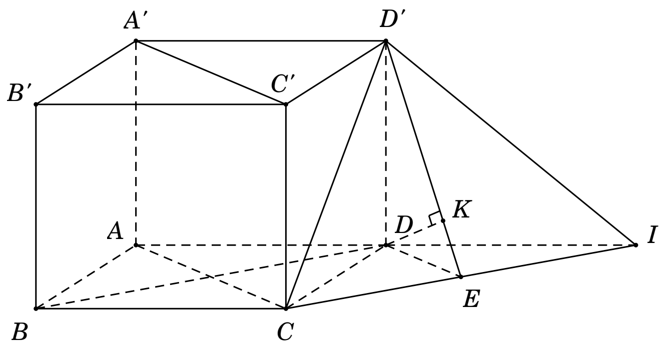
Kẻ $AK\perp A'I$. Khi đó $d\left[A,(BDA')\right]=AK=\frac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2+AI^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD'.

A. $d=a\sqrt{2}$. **B.** $d=2a$. **C.** $d=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là điểm đối xứng của A qua D, suy ra $BCID$ là hình bình hành nên $BD\parallel CI$.

Do đó $d\left[BD,CD'\right]=d\left[BD,(CD'I)\right]=d\left[D,(CD'I)\right]$.

Kẻ $DE\perp CI$ tại E, kẻ $DK\perp D'E$. Khi đó $d\left[D,(CD'I)\right]=DK$.

Xét tam giác IAC, ta có $DE\parallel AC$ (do cùng vuông góc với CI) và có D là trung điểm của AI nên suy ra DE là đường trung bình của tam giác. Suy ra $DE=\frac{1}{2}AC=a$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

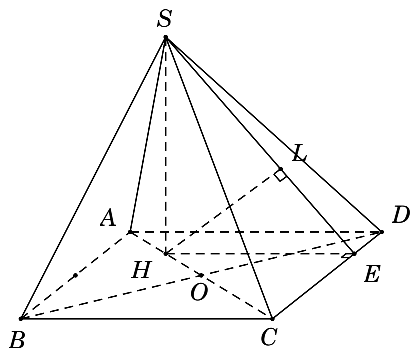
Tam giác vuông $D'DE$, có $DK = \frac{D'D.DE}{\sqrt{D'D^2 + DE^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của H của đoạn thẳng AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = \frac{4a\sqrt{22}}{11}$. **B.** $d = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = 4a$.

Lời giải

Chọn A



Do $AB \parallel CD$ nên $d[SD, AB] = d[AB,(SCD)] = d[A,(SCD)] = \frac{4}{3}d[H,(SCD)]$.

Kẻ $HE \perp CD$, kẻ $HL \perp SE$.

Tính được $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = a\sqrt{2}$, $HE = \frac{3}{4}AD = 3a$.

Khi đó $d[H,(SCD)] = HL = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

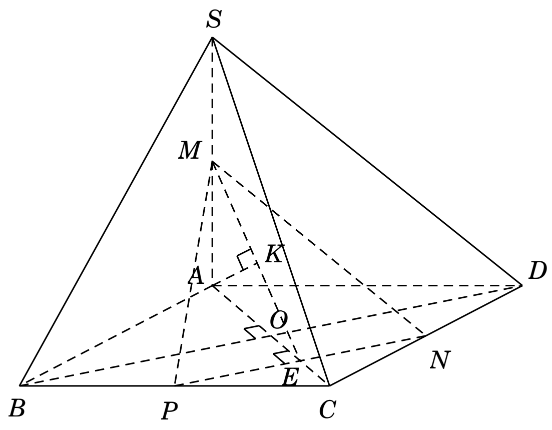
Vậy $d[SD, AB] = \frac{4}{3}HL = \frac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Tính khoảng cách d giữa BD và MN.

A. $d = 3\sqrt{5}$. **B.** $d = \sqrt{5}$. **C.** $d = 5$. **D.** $d = 10$.

Lời giải

Chọn B



Gọi P là trung điểm BC và $E = NP \cap AC$, suy ra $PN \parallel BD$ nên $BD \parallel (MNP)$.

Do đó $d[BD, MN] = d[BD,(MNP)] = d[O,(MNP)] = \frac{1}{3} d[A,(MNP)]$.

Kẻ $AK \perp ME$. Khi đó $d[A,(MNP)] = AK$.

Tính được $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = 10\sqrt{3} \Rightarrow MA = 5\sqrt{3}$; $AE = \frac{3}{4}AC = \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông MAE, có $AK = \frac{MA.AE}{\sqrt{MA^2 + AE^2}} = 3\sqrt{5}$.

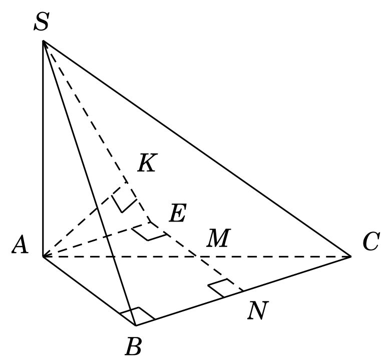
Vậy $d[BD, MN] = \frac{1}{3}AK = \sqrt{5}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của AC, tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM.

A. $d = a\sqrt{3}$. **B.** $d = 5a\sqrt{3}$. **C.** $d = \frac{5a}{2}$. **D.** $d = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Lời giải

Chọn D



Xác định $60^0 = \widehat{SC,(ABC)} = \widehat{SC, AC} = \widehat{SCA}$ và $SA = AC.\tan\widehat{SCA} = 5a\sqrt{3}$.

Gọi N là trung điểm BC, suy ra $MN \parallel AB$.

Lấy điểm E đối xứng với N qua M, suy ra $ABNE$ là hình chữ nhật.

Do đó $d[AB,SM]=d[AB,(SME)]=d[A,(SME)]$.

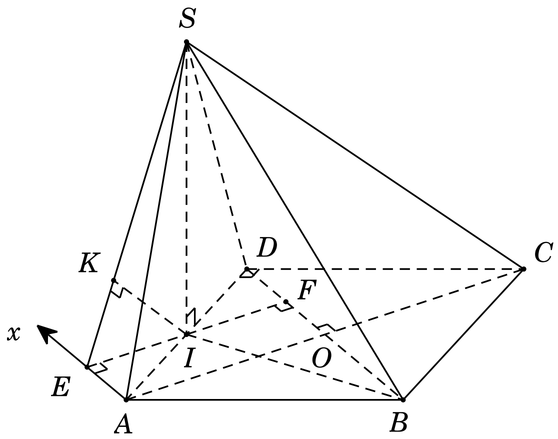
Kẻ $AK\perp SE$. Khi đó $d[A,(SME)]=AK=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD.

A. $d=\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d=a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AD nên suy ra $SI\perp AD\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.

Kẻ $Ax\parallel BD$. Do đó $d[BD,SA]=d[BD,(SAx)]=d[D,(SAx)]=2d[I,(SAx)]$.

Kẻ $IE\perp Ax$, kẻ $IK\perp SE$. Khi đó $d[I,(SAx)]=IK$.

Gọi F là hình chiếu của I trên BD, ta có $IE=IF=\frac{AO}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Tam giác vuông SIE, có $IK=\frac{SI.IE}{\sqrt{SI^2+IE^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

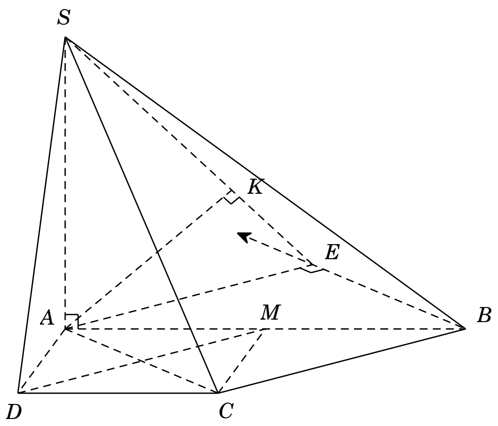
Vậy $d[BD,SA]=2IK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB=2a$, $AD=DC=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d=2a$. **C.** $d=a\sqrt{2}$. **D.** $d=\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^0=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,AC}=\widehat{SCA}$ và $SA=AC.\tan\widehat{SCA}=a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM=AD=a$.

Xét tam giác ACB, ta có trung tuyến $CM=a=\dfrac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C.

Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật, suy ra $AC\parallel BE$.

Do đó $d\left[AC,SB\right]=d\left[AC,(SBE)\right]=d\left[A,(SBE)\right]$. Kẻ $AK\perp SE$.

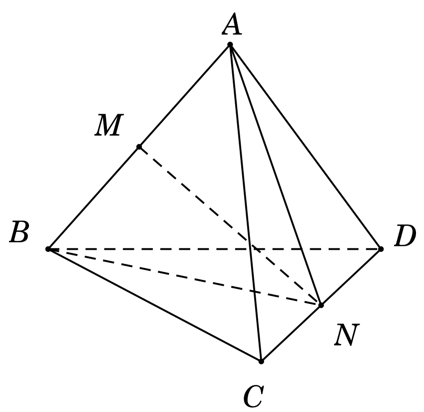
Khi đó $d\left[A,(SBE)\right]=AK=\dfrac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 23: Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a.

A. $d=\dfrac{3a}{2}$. **B.** $d=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ CD$.

Suy ra $\begin{cases}CD\perp BN\\CD\perp AN\end{cases}\Rightarrow CD\perp(ABN)\Rightarrow CD\perp MN.\ \ (1)$

Ta có $AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $d[AB, CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Câu 24: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng?

A. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{a}{3}$.

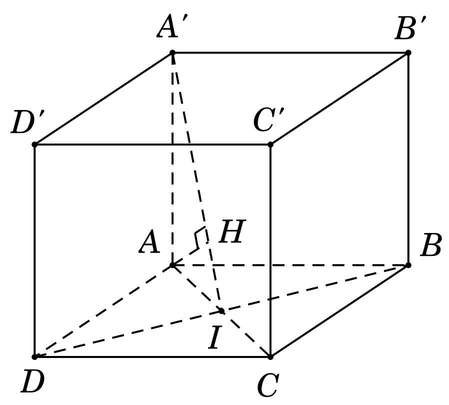
B. Độ dài đoạn AC' bằng $a\sqrt{3}$.

C. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(CDD'C')$ bằng $a\sqrt{2}$.

D. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

• **Xét A** Gọi $I = BD \cap AC$ và H là hình chiếu của điểm A trên đường thẳng $A'I$

Dễ dàng chứng minh được $d\left(A, (A'BD)\right) = AH$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2} \longrightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vậy A sai.

• **Xét B** Đường chéo hình lập phương $AC' = a\sqrt{3}$. Vậy B đúng.

• **Xét C** Ta có $AD \perp (CDD'C') \longrightarrow d\left(A, (CDD'C')\right) = AD = a$. Vậy C sai.

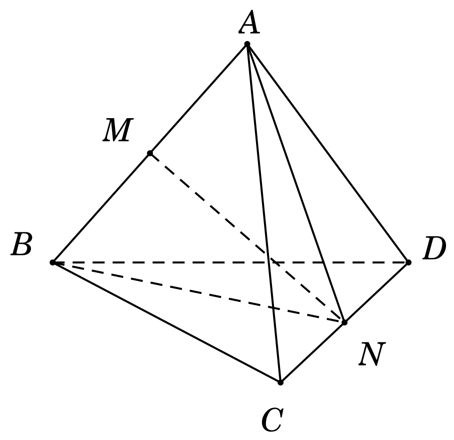
• **Xét D** Ta có $AB \perp (BCC'B') \longrightarrow d\left(A, (BCC'B')\right) = AB = a$. Vậy D sai.

Câu 25: Khoảng cách giữa hai cạnh đối trong một tứ diện đều cạnh a bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a}{3}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $M,\ N$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ CD.$

Suy ra $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN.\ (1)$

Ta có $AN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB.\ (2)$

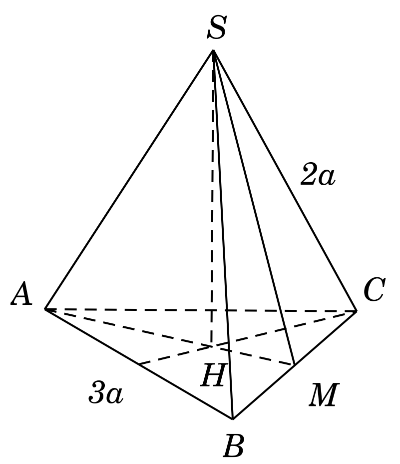
Từ (1) và (2), suy ra $d[AB,CD] = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. Khoảng cách từ đỉnh S đến mặt phẳng đáy là

A. $1,5a.$ **B.** $a.$ **C.** $a\sqrt{2}.$ **D.** $a\sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm BC và H là trọng tâm tam giác ABC.

Ta dễ dàng chứng minh được $SH \perp (ABC) \Rightarrow d(S,(ABC)) = SH$.

Ta có $AM=\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, $AH=\dfrac{2}{3}AM=a\sqrt{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=a$.

Câu 27: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB=a$, $AD=b$, $AA'=c$. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào là sai?

A. $BD'=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

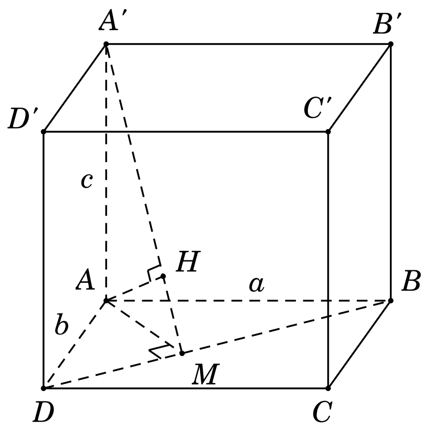
B. $d(AB,CC')=b$.

C. $d(BB',DD')=\sqrt{a^2+b^2}$.

D. $d(A,(A'BD))=\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Lời giải

Chọn D



Xét các đáp án:

• **Xét A** Ta có $BD'=AC'=\sqrt{AB^2+AD^2+A'A^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Vậy A đúng.

• **Xét B** Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp CC'\end{cases}\longrightarrow d(AB,CC')=BC=b$. Vậy B đúng.

• **Xét C** Ta có $BB'\parallel DD'\longrightarrow d(BB',DD')=BD=\sqrt{a^2+b^2}$. Vậy C đúng.

• **Xét D** Gọi M là hình chiếu của A trên AB, H là hình chiếu của A trên AM. Dễ dàng chứng minh được $AH\perp(A'BD)\longrightarrow d(A,(A'BD))=AH$.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AA'^2}=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{c^2}\longrightarrow AH=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{a^2+b^2+c^2}}$$. Vậy D sai.

BÀI 27: THỂ TÍCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Thể tích là một trong những khái niệm toán học xuất hiện thường xuyên trong cuộc sống, đo sự chiếm chỗ của vật thể trong không gian. Bài học này đưa ra công thức thể tích của các hình khối ứng với các hình mà ta đã học.

HĐ1. Khi mua máy điều hoà, bác An được hướng dẫn rằng mỗi mét khối của phòng cần công suất điều hoà khoảng 200 BTU. Căn phòng bác An cần lắp máy có dạng hình hộp chữ nhật, rộng $4\ \mathrm{m}$, dài $5\ \mathrm{m}$ và cao $3\ \mathrm{m}$. Hỏi bác An cần mua loại điều hoà có công suất bao nhiêu BTU?

Hình 7.92

Lời giải

Thể tích của căn phòng là: V = chiều rộng x chiều dài x chiều cao = $4\ m\ .5\ m\ .\ 3\ m\ =\ 60m^3$

Để tính công suất cần thiết cho máy điều hoà, ta có thể sử dụng công thức:

Công suất (BTU) = thể tích x 200

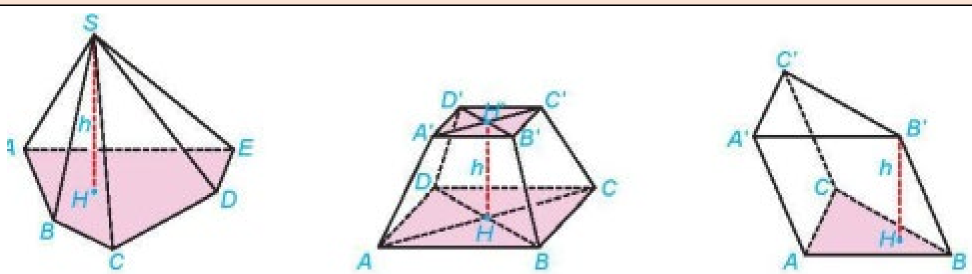
Vậy công suất cần thiết cho máy điều hoà của căn phòng bác An là:

Công suất $=\ V\ .\ 200\ =\ 60m^3\ .200BTUm^3 =\ 12000\ BTU$

Do đó, bác An cần mua một máy điều hoà có công suất khoảng 12,000 BTU để làm mát cho căn phòng của mình.

Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cụt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối hình đó lần lượt là đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cụt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng.

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}\cdot h\cdot \mathbf{S}$.
- Thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn $\mathbf{S}$, diện tích đáy bé $\mathbf{S}'$ và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(\mathbf{S}+\mathbf{S}'+\sqrt{\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}'}\right)$
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy $\mathbf{S}$ và chiều cao h là $V = h\cdot\mathbf{S}$.



$V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot S$ $\quad V=\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(S+S'+\sqrt{S\cdot S'}\right)$ $\quad V=h\cdot S$

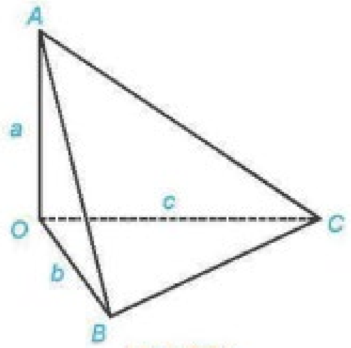
Hình 7.93

Nhận xét

- Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- Thể tích của khối hộp bằng tích của diện tích một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

Ví dụ 1. Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = b, OC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

Lời giải. (H.7.94)



Hình 7.94

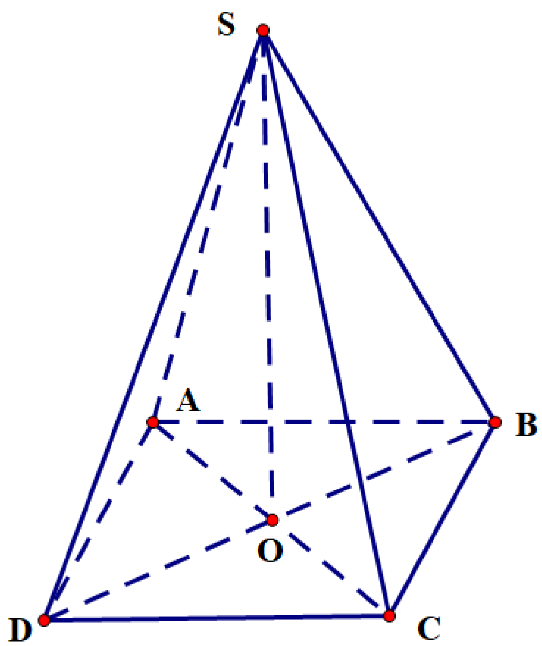
Tam giác vuông OBC có diện tích là $S_{OBC} = \frac{1}{2}bc$.

OA vuông góc với mặt phẳng (OBC) nên tứ diện $OABC$ có chiều cao ứng với đỉnh A bằng OA.

Vậy thể tích của khối tứ diện là $V_{OABC} = \frac{1}{3}AO \cdot S_{OBC} = \frac{1}{6}abc$.

Luyện tập 1. Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối chóp.

Lời giải



Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$

ABCD là hình vuông nên $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$SA^2=SO^2+AO^2$$

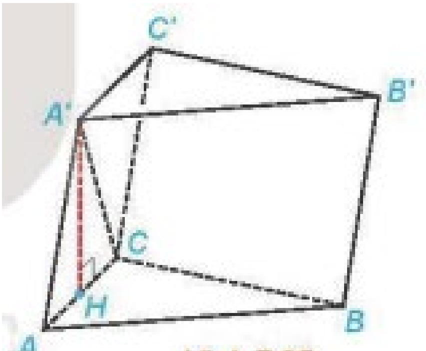
Tam giác SAO vuông tại O=> $SO^2=b^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=b^2-\frac{a^2}{2}$

$$=> SO=\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}$$

Vậy thể tích của khối chóp là: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.a^2.\sqrt{\frac{2b^2-a^2}{2}}$

Ví dụ 2. Cho khối lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a, mặt $(ACC'A')$ vuông góc với hai mặt đáy, tam giác $A'AC$ cân tại A và $AA'=b(a<2b)$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải. (H.7.95)



Hình 7.95

Gọi $A'H$ là đường cao của tam giác cân $A'AC$. Khi đó, H là trung điểm của AC.
Do $(ACC'A')\perp(ABC)$ và $A'H\perp AC$ nên $A'H\perp(ABC)$.

Vậy khối lăng trụ có chiều cao $A'H=\sqrt{AA^2-AH^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}$.

Tam giác đều ABC có diện tích là $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

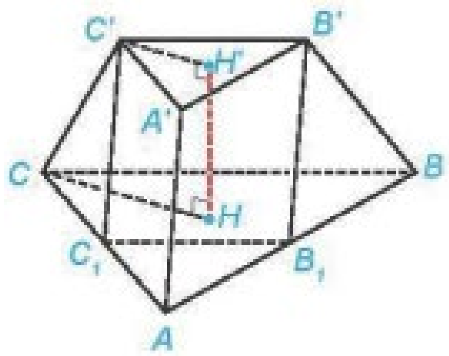
Vậy khối lăng trụ có thể tích là $V=A'H\cdot S_{ABC}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{4}}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3\left(4b^2-a^2\right)}}{8}$.

Luyện tập 2. Cho khối chóp cụt đều $ABC\cdot A'B'C'$ có đường cao $HH'=h$, hai mặt đáy $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng bằng $2a, a$.

a) Tính thể tích của khối chóp cụt.

b) Gọi B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của AB, AC. Chứng minh rằng $AB_1C_1\cdot A'B'C$ là một hình lăng trụ. Tính thể tích khối lăng trụ $AB_1C_1\cdot A'B'C'$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Hình 7.96

Lời giải

a) Thể tích của khối chóp cụt là: $V=\frac{1}{3}\cdot 2a^2\cdot h=\frac{2}{3}a^2h$

b) Ta có $\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Để tính thể tích của khối lăng trụ, ta sử dụng công thức: $V=S_d\cdot h$

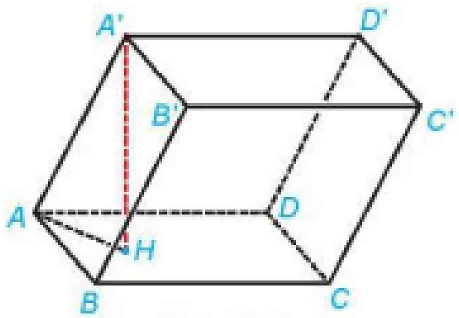
Trong đó, S_d là diện tích đáy của lăng trụ.

Ta có: $S_d=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a=2a^2$

Chiều cao của lăng trụ bằng chiều cao của khối chóp cụt, do đó thể tích của khối lăng trụ là: $V=2a^2\cdot h$

Ví dụ 3. Cho khối hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $AB=8\text{ cm}, AD=5\text{ cm}, AA'=6\text{ cm}, \widehat{BAD}=30^\circ$, góc giữa AA' và $(ABCD)$ bằng 45°. Tính thể tích của khối hộp.

Lời giải. (H.7.97)



Hình 7.97

Hình bình hành $ABCD$ có diện tích là $S_{ABCD}=2S_{ABD}=2\left(\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\widehat{BAD}\right)=20\left(\text{ cm}^2\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$. Khi đó, $\widehat{A'AH}$ bằng góc giữa AA' và $(ABCD)$ nên $\widehat{AAH}=45^\circ$.

Trong tam giác vuông $A'AH$, ta có $A'H=A'A\cdot\sin\widehat{A'AH}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}(\text{ cm})$.

Khối hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có chiều cao tương ứng với mặt $ABCD$ bằng $A'H=3\sqrt{2}(\text{ cm})$.

Do đó, thể tích của khối hộp là $V=A'A\cdot S_{ABCD}=60\sqrt{2}\left(\text{ cm}^3\right)$.

Vận dụng. Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng $60\text{ cm}, 30\text{ cm}$, cạnh bên của sọt dài 50 cm. Tính thể tích của sọt..

Hình 7.98

Lời giải

Gọi A, B, C, D lần lượt là các đỉnh của đáy sọt. Theo giả thiết, ta có:

$AB = BC = CD = DA = 60\ cm,\ EF = FG = GH = HE = 30\ cm,\ và\ HC = 50\ cm.$

Gọi O là trung điểm của miệng sọt, ta sẽ tính toán độ dài của đường cao OH. Ta có:

$OH = \sqrt{HC^2 - OC^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = 40(cm)$

Diện tích mặt đáy của sọt: Gọi S là diện tích mặt đáy của sọt. Ta có: $S = AB^2 = 60^2 = 3600(cm^2)$

Gọi V là thể tích của sọt. Theo công thức thể tích của hình chóp cụt đều, ta có:

$V = \frac{1}{3}S \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot 3600 \cdot 40 = 48000(cm^3)$

Vậy thể tích của sọt là $48000cm^3$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

- Một hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy thì cạnh bên đó chính là đường cao.
- Một hình chóp có hai mặt bên kề nhau cùng vuông góc với đáy thì cạnh bên là giao tuyến của hai mặt đó vuông góc với đáy.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, *OB = a*, $OC = a\sqrt{3}$, (*a* > 0) và đường cao $OA = a\sqrt{3}$. Tính hể tích khối tứ diện theo *a* .

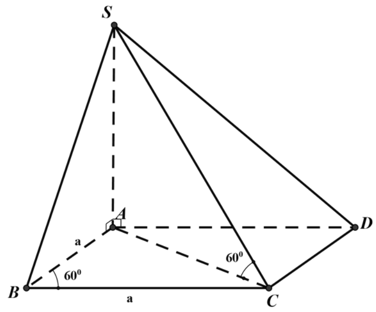
Lời giải

Ta có: $S_{OBC} = \frac{1}{2}OB.OC = \frac{1}{2}a(a\sqrt{3}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thế tích khối tứ diện $V = \frac{1}{3}S_{OBC}.OA = \frac{1}{3}(\frac{a^2\sqrt{3}}{2})(a\sqrt{3}) = \frac{a^3}{2}.$

Ví dụ 2: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi cạnh *a*, $\widehat{ABC} = 60°$, cạnh *SA* vuông góc với đáy và *SC* tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp *S.ABCD* theo a bằng

Lời giải



$S_{ABCD} = 2S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

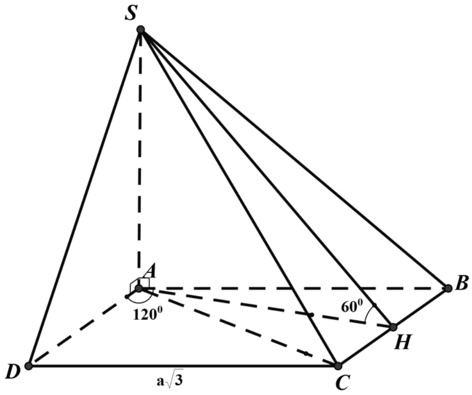
Ta có ΔABC đều nên $AC = a$.

$SA = AC.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 120°$ và cạnh bên *SA* vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) và đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp S.ABCD bằng

Lời giải



Tam giác SAH vuông tại A:

$SA = AH.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$

Ta có: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\dfrac{\left(a\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60°$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

Lời giải

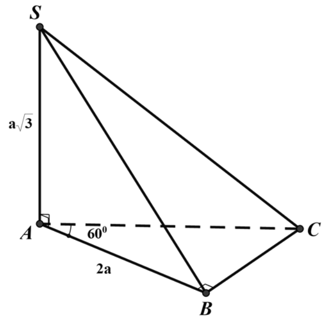
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Xét tam giác *ABC* có:

$$BC = AB.\tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$$

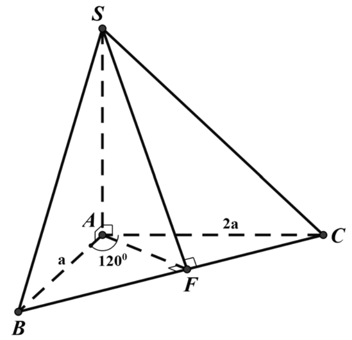
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 2a^2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{SABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = 2a^3.$$



Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có cạnh bên SA vuông góc với đáy và AB = a, AC = 2a, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp S.ABC bằng

Lời giải



Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$BC = a\sqrt{7};\ AF = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{a\sqrt{21}}{7};\ SA = \frac{3a\sqrt{7}}{7}$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a\sqrt{7}}{7} = \frac{a^3\sqrt{21}}{14}$$

Dạng 2 : Khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Để xác định đường cao hình chóp ta vận dụng định lí sau

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha)\perp(\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta)=d \\ a\subset(\alpha) \\ a\perp d \end{array}\right\} \Rightarrow a\perp(\beta).$$

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B $BA = 3a, BC = 4a;$ mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30°$. Thể tích khối chóp S.ABC

Lời giải

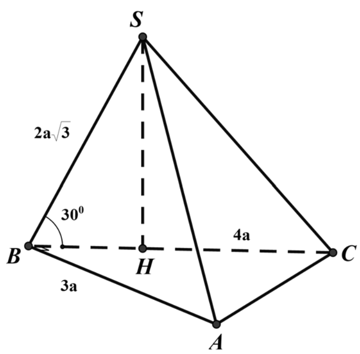
Ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = 6a^2$$

Trong tam giác vuông SBH:

$$SH = SB.\sin\widehat{SBC} = a\sqrt{3}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = 2a^3\sqrt{3}.$$



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông có cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD Thể tích khối chóp S. ABCD

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có:

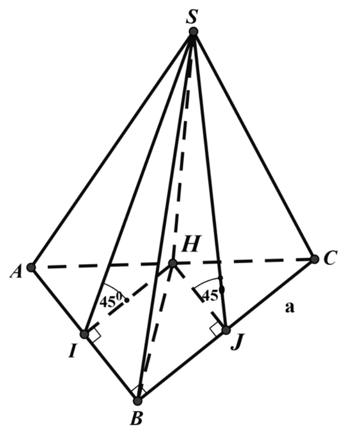
$$S_{ABCD} = a^2$$

Tam giác SAB đều nên $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra: $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, có BC = a. Mặt bên SAC vuông góc với đáy, các mặt bên còn lại đều tạo với mặt đáy một góc $45°$. Thể tích khối chóp S.ABC bằng

Lời giải



Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}BC^2 = \dfrac{1}{2}a^2$.

Tam giác SHI vuông cân tại H nên

$$SH = HI = \frac{a}{2}$$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{a^3}{12}$

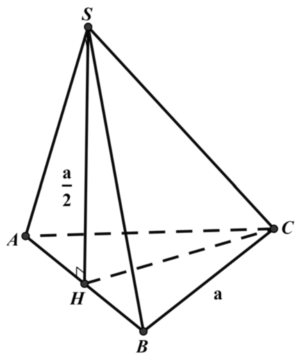
Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC đều cạnh a, tam giác SBC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Thể tích khối chóp S.ABC bằng

Lời giải

Ta có tam giác ABC đều cạnh bằng a nên $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác SAB vuông cân tại S và có $AB = a$ nên $SH = \dfrac{a}{2}$

$$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$



Dạng 3: Khối chóp đều

1. Phương pháp

1. Một số lưu ý

a) Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

b) Kết quả: Trong hình chóp đều:

- Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.
- Các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

- Các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau.

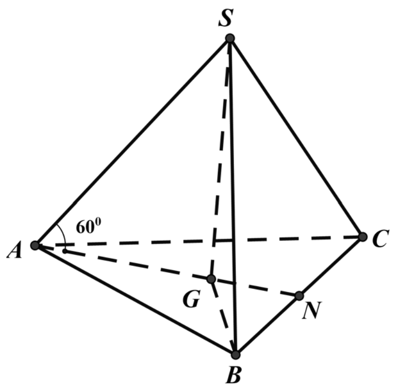
Chú ý:

- ❖ Đề bài cho hình chóp tam giác đều (tứ giác đều) ta hiểu là hình chóp đều.
- ❖ Hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều vì hình chóp tam giác đều thì bản thân nó có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau, nói một cách khác, hình chóp tam giác đều thì suy ra hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại là không đúng.
- ❖ Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính thể tích khối chóp *S.ABC*

Lời giải



Tam giác *ABC* đều cạnh *a* nên

$$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Vì *G* là trọng tâm tam giác *ABC* nên

$$AG=\frac{2}{3}AN=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

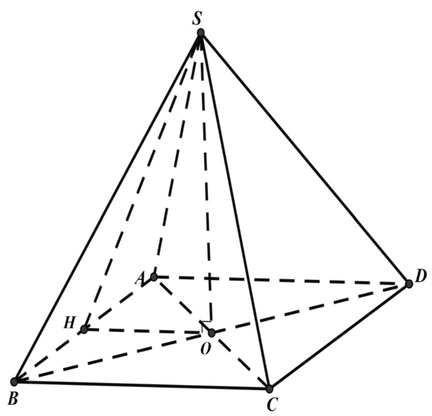
Trong tam giác *SAG* có

$$SG=AG.\tan 60^\circ=a$$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy ABCD có diện tích là 16cm^2, diện tích một mặt bên là $8\sqrt{3}cm^2$. Tính chiều cao của hình chóp S.ABCD

Lời giải



Ta có $S_{ABCD}=16cm^2\Rightarrow CD=4cm$

$$S_{SCD}=8\sqrt{3}cm^2=S_{SAB}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}SH.AB=8\sqrt{3}cm^2$$

$$\Rightarrow SH=4\sqrt{3}cm$$

Xét ΔSOH vuông tại O có:

$$SO=\sqrt{SH^2-OH^2}$$
$$=\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2-2^2}cm=2\sqrt{11}cm$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có các cạnh bên bằng $\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy góc 60^0. Thể tích khối chóp S.ABC bằng

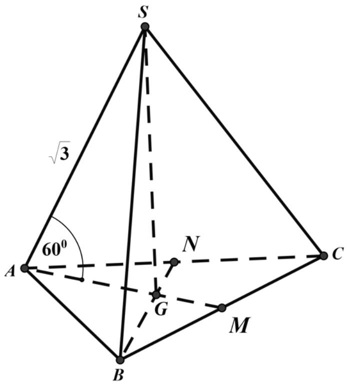
Lời giải

Xét ΔSGA vuông tại *G* có :

$$SG = SA.\sin 60^0 = \frac{3}{2};$$

$$AG = SA.\cos 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{3}{2}AG = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



ΔABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$

$$\Rightarrow AB = \frac{2}{\sqrt{3}}AM = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SM = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9\sqrt{3}}{16}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{9\sqrt{3}}{32}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng 2a. Tính thể tích chóp đều S.ABC bằng

Lời giải

Ta có tam giác ABC đều nên

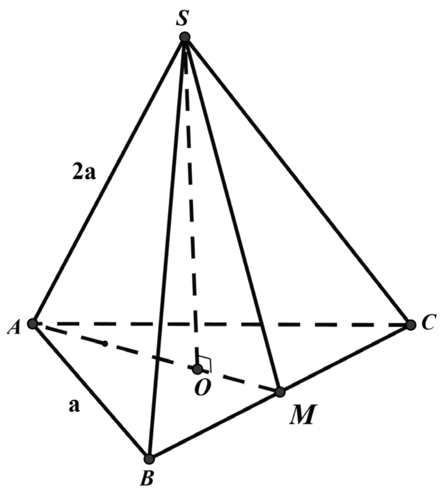
$$AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông SOA

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = \frac{11a^2}{3}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SO = \dfrac{a^3\sqrt{11}}{12}$.



Ví dụ 5: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng 2a, cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có: $AC = 2a.\sqrt{2}$

$\Rightarrow$

$AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

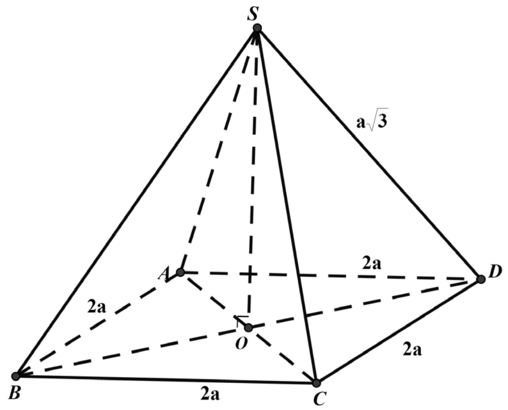
Δ SAO vuông tại O có

$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a$$

Thể tích khối chóp S.ABCD:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO$$

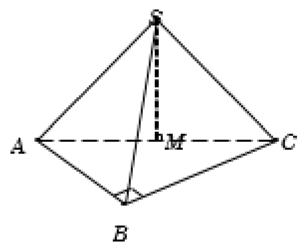
$$= \frac{1}{3}.4a^2.a = \frac{4a^3}{3}$$



Dạng 4: Khối chóp có hình chiếu lên mặt phẳng đáy

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, hình chiếu của điểm S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm của cạnh huyền AC. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AC. Theo giả thiết, ta có $SM \perp (ABC) \Rightarrow SM \perp AC$.

Tam giác vuông ABC, có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SMA, có

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích tam giác vuông cân ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{2}$.

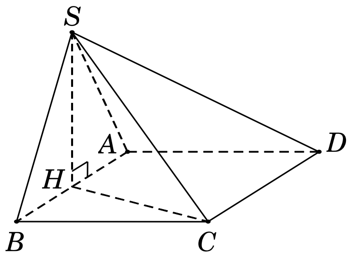
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SM = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của cạnh AB, góc giữa SC và mặt đáy bằng 30^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Vì $SH\perp(ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là HC. Do đó $30^0=\widehat{SC,(ABCD)}=\widehat{SC,HC}=\widehat{SCH}$.

Tam giác vuông BCH, có $HC=\sqrt{BC^2+BH^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

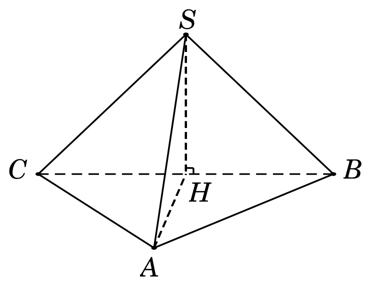
Tam giác vuông SHC, có $SH=HC.\tan\widehat{SCH}=\frac{\sqrt{15}}{6}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=1$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\frac{\sqrt{15}}{18}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Vì $SH\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SA trên mặt đáy (ABC) là HA. Do đó $60^0=\widehat{SA,(ABC)}=\widehat{SA,HA}=\widehat{SAH}$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

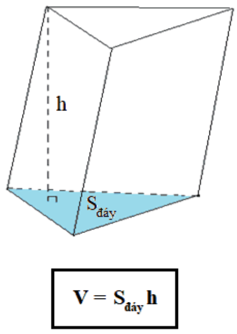
Tam giác vuông SHA, có $SH=AH.\tan\widehat{SAH}=\frac{3a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH=\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Dạng 5. Thể tích lăng trụ đứng, lăng trụ đều

Công thức tính thể tích lăng trụ



- Thể tích khối lăng trụ: $\boxed{V = S_{đáy}.h}$
- $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
- *h*: Chiều cao của khối chóp.

Chú ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.

❑Công thức tính thể tích khối Lập phương

- Thể tích khối lập phương: $V = a^3$

Chú ý: Thể tích khối lập phương bằng tích 3 kích thước của nó.

❑Công thức tính thể tích khối hộp chữ nhật

- Thể tích khối hộp chữ nhật: $V = a.b.c$

Chú ý: Thể tích khối hộp chữ nhật bằng tích 3 kích thước của nó.

Ví dụ 1: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

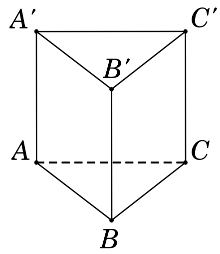
Lời giải

Xét khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a.

Diện tích tam giác đều cạnh a là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của lăng trụ $h = AA' = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S.h = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



Ví dụ 2: Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a và tổng diện tích các mặt bên bằng $3a^2$.

Lời giải

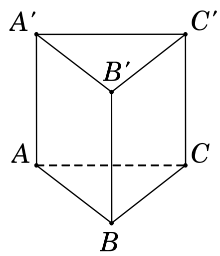
Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

Diện tích xung quanh lăng trụ là $S_{xq} = 3.S_{ABB'A'}$

$\Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.AB) \Leftrightarrow 3a^2 = 3.(AA'.a) \Rightarrow AA' = a.$

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



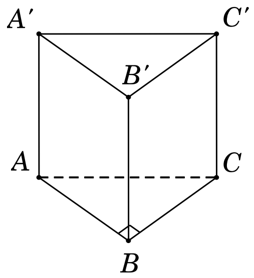
Ví dụ 3: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Tam giác ABC vuông cân tại B,

suy ra $BA = BC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC}.BB' = \frac{a^3}{2}$.



Ví dụ 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB = a$, $AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^0$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = a^3\sqrt{15}$.

Ví dụ 5: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

Lời giải

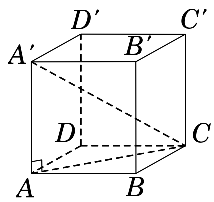
Đặt cạnh của khối lập phương là x $(x > 0)$.

Suy ra $CC' = x; AC = x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC', có

$AC' = \sqrt{AC^2 + CC'^2} \Leftrightarrow x\sqrt{3} = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a.$

Vậy thể tích khối lập phương $V = a^3$.



Dạng 6. Thể tích lăng trụ xiên

Ví dụ 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng $2a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của đáy. Tính theo a thể tích V của khối hộp đã cho.

Lời giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$,

suy ra $A'O \perp (ABCD)$.

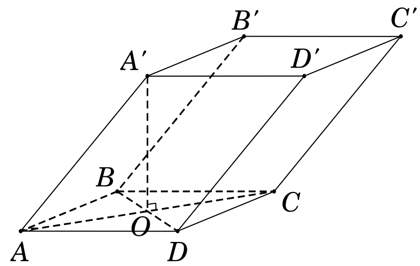
Tam giác vuông $A'OA$, có

$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$

.

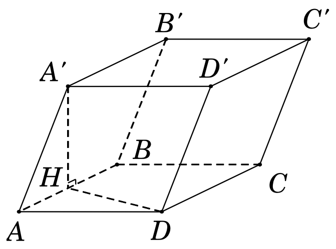
Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{\Delta ABCD}.A'O = 4a^3\sqrt{2}$.



Ví dụ 2: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $AA' = a$, hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm H của AB. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Theo giả thiết, ta có $A'H \perp AB$.

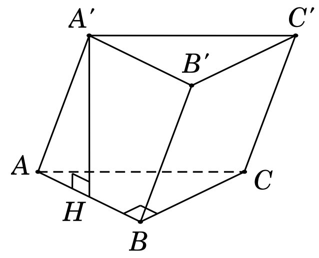
Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích hình vuông $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $A'A = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Từ giả thiết suy ra $BA = BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông $A'HA$, có $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = a^2$.

Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Ví dụ 4: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải

Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V = S_{\Delta ABC}.A'O = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45^0. Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

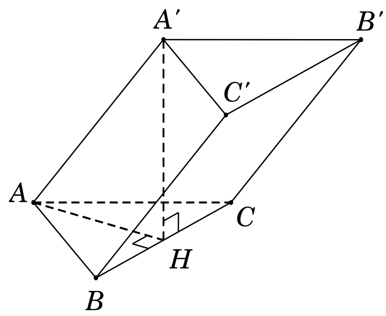
Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH=\sqrt{3}$. Vì $A'H\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là $AH.$ Do đó

$45^0=\widehat{AA',(ABC)}=\widehat{AA',AH}=\widehat{A'AH}$.

Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H=HA=\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$.

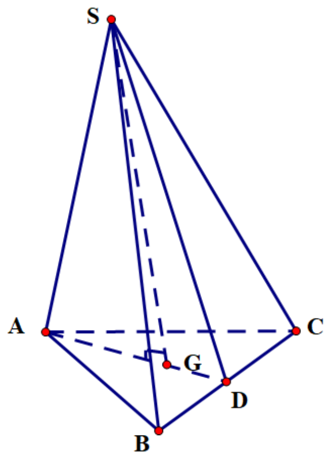
Vậy $V=S_{\Delta ABC}.A'H=3.$



C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 7.28. Cho khối chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a, cạnh bên bằng b. Tính thể tích của khối chóp đó. Từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a.

Lời giải



Vì hình chóp $S.ABC$ đều, gọi G là hình chiếu của S trên (ABC) nên G là tâm của đáy ABC là tam giác đều do đó G cũng là trọng tâm hay trực tâm của tam giác ABC.

Gọi AG cắt BC tại D

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Mà G là trọng tâm nên $AG=\dfrac{2}{3}AD=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G có

$$SG=\sqrt{SA^2-AG^2}=\sqrt{b^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$$

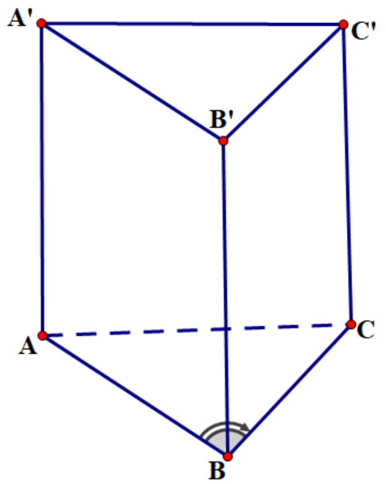
Diện tích tam giác đều ABC là : $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối chóp đều là: $V = \frac{1}{3}.\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do đó thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a là $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Bài 7.29. Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' = 5$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $\widehat{ABC} = 150^\circ$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải



Diện tích đáy ABC là : $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.6.2 = 3cm^2$

$V = 3.5 = 15cm^3$

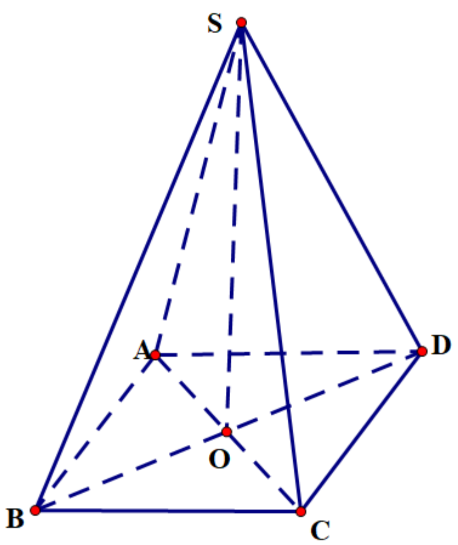
Vậy thể tích của khối lăng trụ là $15cm^3$

Bài 7.30. Cho khối chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh 6 cm. Tính thể tích của khối chóp đó trong các trường hợp sau:

a) Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60°.

b) Mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45°.

Lời giải



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

a)

Gọi $AC \cap BD = \{O\}$ mà $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow O$ là hình chiếu của S trên (ABCD)

C là hình chiếu của C trên (ABCD)

$\Rightarrow OC$ là hình chiếu của SC trên (ABCD)

$\Rightarrow (SC,(ABCD)) = (SC,OC) = \widehat{SCO}$

Mà cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60°.

$\Rightarrow \widehat{SCO} = 60^\circ$

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}(\mathrm{~cm})$

$\Rightarrow OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}(\mathrm{~cm})$

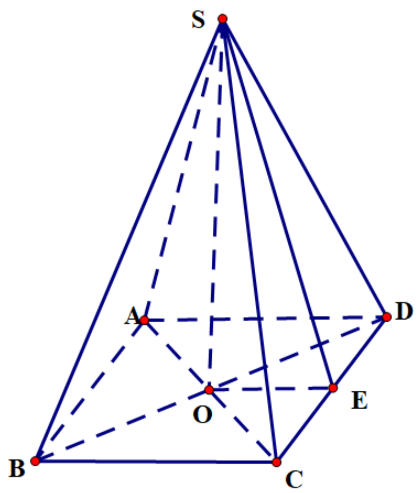
Xét tam giác SOC vuông tại O có

$\tan \widehat{SCO} = \dfrac{SO}{OC} \Rightarrow SO = 6\sqrt{2} \cdot \tan 60^\circ = 6\sqrt{6}(\mathrm{~cm})$

$S_{ABCD} = 6^2 = 36(\mathrm{~cm}^2)$

Vậy khối chóp có thể tích $V = \dfrac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 6\sqrt{6} \cdot 36 = 72\sqrt{6}(\mathrm{~cm}^3)$

b)



Trong (ABCD) kẻ $OE \perp CD$

$SO \perp CD(SO \perp (ABCD))$

$\Rightarrow CD \perp (SOE), SE \subset (SOE) \Rightarrow CD \perp SE, OE \perp CD, (SCD) \cap (ABCD) = CD$

$\Rightarrow ((SCD),(ABCD)) = (SE,OE) = \widehat{SEO}$

Mà mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45°.

$\Rightarrow \widehat{SEO} = 45^0$

Ta có $\left.\begin{array}{l} OE \perp CD \\ AD \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow OE // AD$ mà O là trung điểm AC nên OE là đường trung bình tam giác ACD.

$\Rightarrow OE = \frac{AD}{2} = \frac{6}{2} = 3(\text{ cm})$

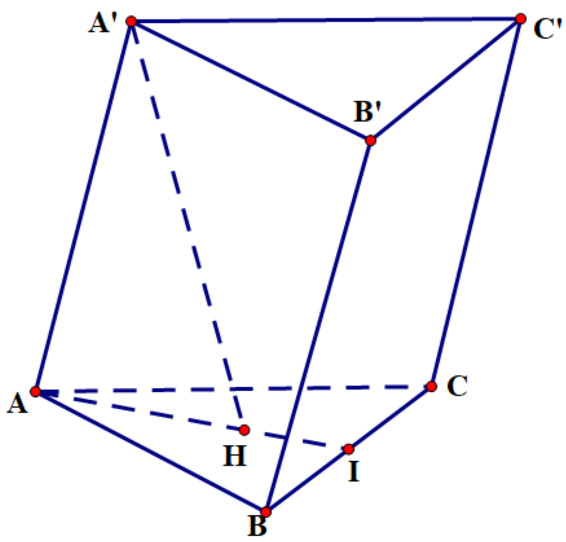
Xét tam giác SOE vuông tại O có

$\tan\widehat{SEO} = \frac{SO}{OE} \Rightarrow SO = 3 \cdot \tan 45^\circ = 3(\text{ cm})$

Vậy khối chóp có thể tích $V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 36 = 36(\text{ cm}^3)$

Bài 7.31. Cho khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh $a, A'A = A'B = A'C = b$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Lời giải



Tam giác ABC đều => $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC => $AH \perp (ABC), AH = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Diện tích tam giác ABC là: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Thể tích khối lăng trụ là : $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} . \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^3}{4}$

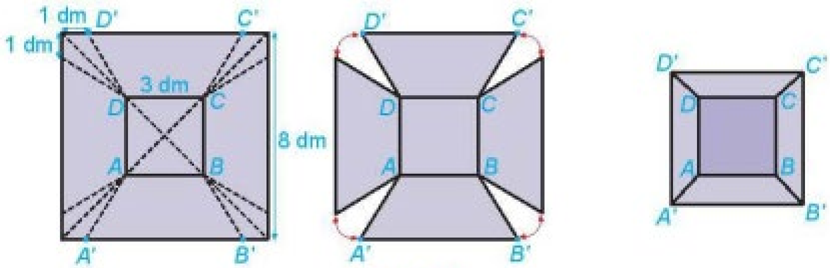
Bài 7.32. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8dm , bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

a) Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Tính cạnh bên của thùng.

c) Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?

Lời giải



Hình 7.99

a) $AB//A'B' \Rightarrow AB//\left(A'B'C'D'\right), AD//A'D' \Rightarrow AD//\left(A'B'C'D'\right)$

Do đó $\left(ABCD\right)//\left(A'B'C'D'\right)$.

Chiếc thùng có dạng hình chóp cụt vì khi bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc của tấm tôn vuông, sẽ tạo thành bốn tam giác vuông cân.

Vậy chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Cạnh bên của hình chóp cụt bằng $\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{34}}{2}\left(\text{dm}\right)$

c) Xét mặt chứa đường chéo của hình vuông, nó là hình thang cân có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp cụt và được $h=\sqrt{\frac{34}{4}-\frac{18}{4}}=2\left(\text{dm}\right)$

Thể tích cần tìm là $\text{V}=42$ lít.

D. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V=a^3\sqrt{2}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

Chiều cao khối chóp là $SA=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=4$, $AB=6$, $BC=10$ và $CA=8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=40$. **B.** $V=192$. **C.** $V=32$. **D.** $V=24$.

Lời giải

Chọn C

Tam giác ABC, có $AB^2+AC^2=6^2+8^2=10^2=BC^2$

$\longrightarrow$ tam giác ABC vuông tại A $\longrightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=24$.

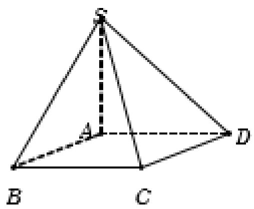
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=32$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB=a$, $BC=2a$. Hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, cạnh $SA=a\sqrt{15}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$. **C.** $V=2a^3\sqrt{15}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Vì hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với $(ABCD)$, suy ra $SA\perp(ABCD)$. Do đó chiều cao khối chóp là $SA=a\sqrt{15}$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD}=AB.BC=2a^2$.

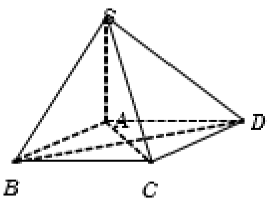
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{2a^3\sqrt{15}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và $SC=a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích V khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Đường chéo hình vuông $AC=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC, ta có $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=a\sqrt{3}$.

Chiều cao khối chóp là $SA=a\sqrt{3}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

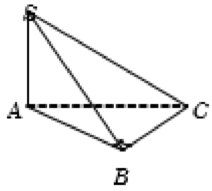
Vậy thể tích khối chop $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $BA=BC=a$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{a^2}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA=2a$.

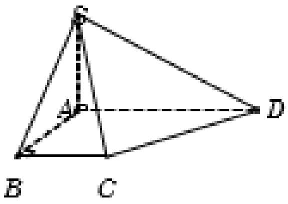
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA=\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=1$, $AD=2$. Cạnh bên $SA=2$ và vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=1$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{1}{3}$. **D.** $V=2$.

Lời giải

Chọn A



Diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD}=\left(\dfrac{AD+BC}{2}\right).AB=\dfrac{3}{2}$.

Chiều cao khối chóp là $SA=2$.

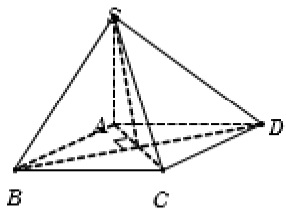
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=1$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD}=60^0$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\Delta SAB=\Delta SAD\longrightarrow SB=SD.$

Hơn nữa, theo giả thiết $\widehat{SBD}=60^0$.

Do đó ΔSBD đều cạnh $SB = SD = BD = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB, ta có $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

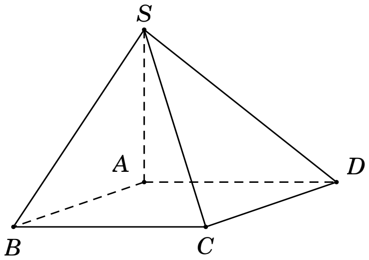
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AC = 5a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt đáy, cạnh bên SB tạo với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 6\sqrt{2}a^3$. **B.** $V = 4\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 2\sqrt{2}a^3$. **D.** $V = 2a^3$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông ABC, ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{6}a$.

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB.

Do đó $60^0 = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,AB} = \widehat{SBA}$.

Tam giác vuông SAB, có $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}$.

Diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = AB.BC = 2\sqrt{6}a^2$.

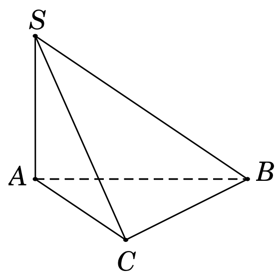
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC); góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **C.** $V = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta có

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$60^0 = \widehat{SB,(ABC)} = \widehat{SB,AB} = \widehat{SBA}.$

Tam giác vuông SAB, có $SA = AB.\tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

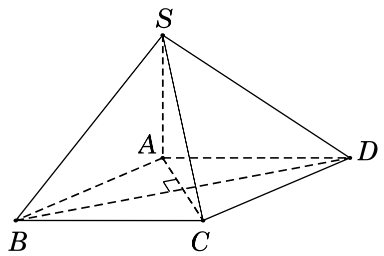
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{a^3}{4}.$

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SD tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3}{4}$. **B.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải

Chọn C



Do $SA \perp (ABCD)$ nên ta có $60^0 = \widehat{SD,(ABCD)} = \widehat{SD,AD} = \widehat{SDA}.$

Tam giác vuông SAD, có $SA = AD.\tan \widehat{SDA} = a\sqrt{3}.$

Diện tích hình thoi $S_{ABCD} = 2S_{\Delta BAD} = AB.AD.\sin \widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.$

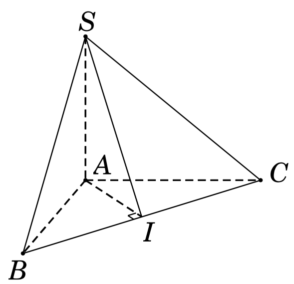
Vậy thể tích khối chop $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3}{2}.$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC, SI tạo với mặt phẳng (ABC) góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

Chọn D



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Vì $SA\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của SI trên mặt phẳng (ABC) là AI. Do đó $60^o=\widehat{SI,(ABC)}=\widehat{SI,AI}=\widehat{SIA}$.

Tam giác ABC vuông tại A, suy ra trung tuyến $AI=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác vuông SAI, có $SA=AI.\tan\widehat{SIA}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 12: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn D

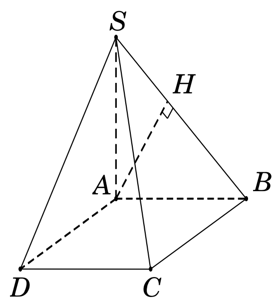
Gọi H là hình chiếu của A trên $SB\Rightarrow AH\perp SB.$

Ta có $\begin{cases}SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC\\AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow AH\perp BC.$

Suy ra $AH\perp(SBC)\Rightarrow d[A,(SBC)]=AH=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$

Tam giác SAB vuông tại A, có $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\Rightarrow SA=a.$

Vậy $V=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{a^3}{3}.$

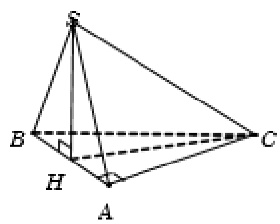


Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của AB, suy ra $SH\perp AB$.

Do $(SAB)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AB nên $SH\perp(ABC)$.

Tam giác SAB là đều cạnh $AB = a$ nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác vuông $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

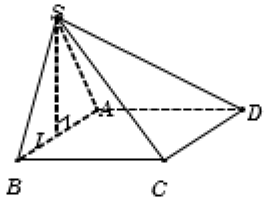
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **C.** $V = 2a^3$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của AB. Tam giác SAB cân tại S và có I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$. Do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SI \perp (ABCD)$.

Tam giác vuông SIA, có

$$SI = \sqrt{SA^2 - IA^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

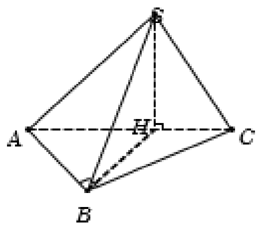
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = 2a$, $AB = SA = a$. Tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC). Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{4}$. **B.** $V = \frac{3a^3}{4}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{2a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Kẻ $SH \perp AC$. Do $(SAC) \perp (ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH \perp (ABC)$.

Trong tam giác vuông SAC, ta có

$SC = \sqrt{AC^2 - SA^2} = a\sqrt{3}$, $SH = \dfrac{SA.SC}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác vuông ABC, có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

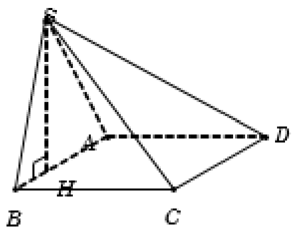
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SH = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Hình chiếu vuông góc của S trên AB là điểm H thỏa $AH = 2BH$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Trong tam giác vuông SAB, ta có $SA^2 = AH.AB = \dfrac{2}{3}AB.AB = \dfrac{2}{3}a^2$;

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{3}$, tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $V = \sqrt{6}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V = \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $SH \perp BC$. Vì $(SBC) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến BC nên $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC)$. Do đó $60^0 = \widehat{SD,(SBC)} = \widehat{SD,SC} = \widehat{DSC}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Từ $DC \perp (SBC) \longrightarrow DC \perp SC$.

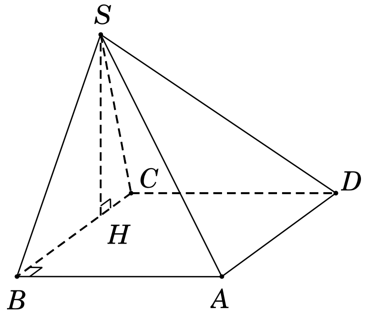
Tam giác vuông SCD, có $SC = \dfrac{DC}{\tan \widehat{DSC}} = 1$.

Tam giác vuông SBC, có

$$SH = \frac{SB.SC}{BC} = \frac{\sqrt{BC^2 - SC^2}.SC}{BC} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = 3$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

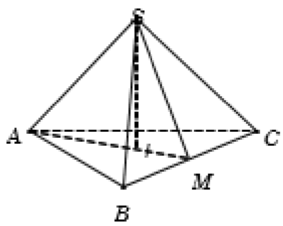


Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{33}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

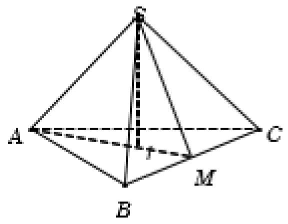
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{\Delta ABC}.SI = \dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Câu 19: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính theo a thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $S.ABC$ là khối chóp đều nên suy ra $SI \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow AI = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SAI vuông tại I, có $SI = \sqrt{SA^2 - AI^2}\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

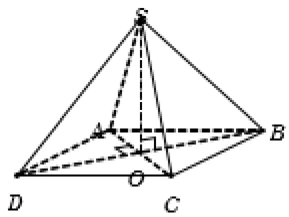
Vậy thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SI = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 20: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V = \frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Suy ra OB là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$.

Khi đó $60^0 = \widehat{SB,(ABCD)} = \widehat{SB,OB} = \widehat{SBO}$.

Tam giác vuông SOB, có $SO = OB.\tan\widehat{SBO} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Diện tích hình vuông ABC là $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 21: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V = \frac{a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi E, F lần lượt là trung điểm BC, BA và $O = AE \cap CF$.

Do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABC)$.

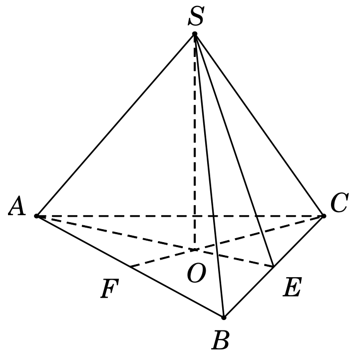
Khi đó $60^0 = \widehat{(SBC),(ABC)} = \widehat{SE,OE} = \widehat{SEO}$.

Tam giác vuông SOE, có

$SO = OE.\tan\widehat{SEO} = \frac{AE}{3}.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.



Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác SBC là tam giác vuông cân tại S, $SB = 2a$ và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $3a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 2a^3$. **B.** $V = 4a^3$. **C.** $V = 6a^3$ **D.** $V = 12a^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta chọn (SBC) làm mặt đáy $\longrightarrow$ chiều cao khối chóp là $d[A,(SBC)] = 3a$.

Tam giác SBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB^2 = 2a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}S_{\Delta SBC}.d[A,(SBC)] = 2a^3$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$ và thể tích bằng a^3. Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. **B.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.h \longrightarrow h = \frac{3.V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a, AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, BD. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

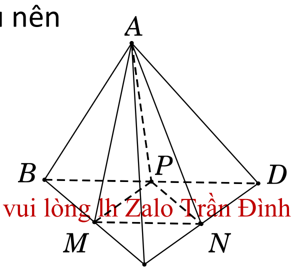
A. $V = \frac{7}{2}a^3$. **B.** $V = 14a^3$. **C.** $V = \frac{28}{3}a^3$. **D.** $V = 7a^3$.

Lời giải

Chọn D

Do AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau nên

$V_{ABCD} = \frac{1}{6}AB.AC.AD = \frac{1}{6}.6a.7a.4a = 28a^3$.



Dễ thấy $S_{\Delta MNP}=\dfrac{1}{4}S_{\Delta BCD}$.

Suy ra $V_{AMNP}=\dfrac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng 12 và G là trọng tâm của tam giác BCD. Tính thể tích V của khối chóp $A.GBC$.

A. $V=3$. **B.** $V=4$. **C.** $V=6$. **D.** $V=5$.

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $S_{\Delta GBC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta DBC}$.

Suy ra $V_{A.GBC}=\dfrac{1}{3}V_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.12=4$.

Câu 26: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác với $AB=a$, $AC=2a$, $\widehat{BAC}=120^0$, $AA'=2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=4a^3\sqrt{5}$. **B.** $V=a^3\sqrt{15}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

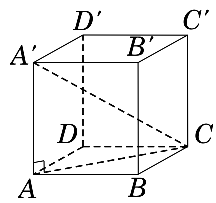
Vậy thể tích khối lăng trụ $V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.AA'=a^3\sqrt{15}$.

Câu 27: Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC'=a\sqrt{3}$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $V=3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V=\dfrac{1}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Đặt cạnh của khối lập phương là x $(x>0)$.

Suy ra $CC'=x$; $AC=x\sqrt{2}$.

Tam giác vuông ACC', có

$AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}\Leftrightarrow x\sqrt{3}=a\sqrt{3}\Rightarrow x=a.$

Vậy thể tích khối lập phương $V=a^3$.

Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh 2a. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho theo a, biết $A'B=3a$.

A. $V=\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **B.** $V=4\sqrt{5}a^3$. **C.** $V=2\sqrt{5}a^3$. **D.** $V=12a^3$.

Lời giải

Chọn B

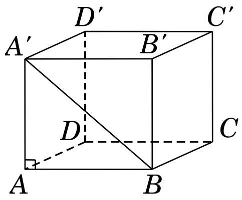
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Do ABCD.A'B'C'D' là lăng trụ đứng nên $AA' \perp AB$.

Xét tam giác vuông A'AB, ta có $A'A = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{5}$.

Diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'A = 4\sqrt{5}a^3$.



Câu 29: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$. Tính theo a thể tích khối hộp đã cho.

A. $V = a^3\sqrt{10}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Trong tam giác vuông ABB', có $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = 2a$.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.AD = a^2\sqrt{2}$.

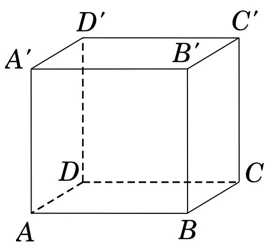
Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.BB' = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 30: Cho hình hộp chữ nhật có diện tích ba mặt cùng xuất phát từ cùng một đỉnh là $10\text{cm}^2, 20\text{cm}^2, 32\text{cm}^2$. Tính thể tích V của hình hộp chữ nhật đã cho.

A. $V = 80\text{cm}^3$. **B.** $V = 160\text{cm}^3$. **C.** $V = 40\text{cm}^3$. **D.** $V = 64\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn A



Xét hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật.

Theo bài ra, ta có $\begin{cases} S_{ABCD} = 10\,\text{cm}^2 \\ S_{ABB'A'} = 20\,\text{cm}^2 \\ S_{ADD'A'} = 30\,\text{cm}^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB.AD = 10 \\ AB.AA' = 20 \\ AA'.AD = 32 \end{cases}$.

Nhân vế theo vế, ta được $(AA'.AB.AD)^2 = 6400 \Rightarrow AA'.AB.AD = 80$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.AB.AD = 80\,\text{cm}^3$.

Câu 31: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, biết $A'O = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích tam giác đều $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Chiều cao khối lăng trụ $A'O=a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $V=S_{\Delta ABC}.A'O=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 32: Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết thể tích khối chóp $A.BCB'C'$ bằng $2a^3$.

A. $V=6a^3$. **B.** $V=\dfrac{5a^3}{2}$. **C.** $V=4a^3$. **D.** $V=3a^3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có thể tích khối chóp $V_{A.A'B'C'}=\dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Suy ra $V_{A.BCB'C'}=\dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'}\longrightarrow V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3}{2}V_{A.BCB'C'}=\dfrac{3}{2}.2a^3=3a^3$.

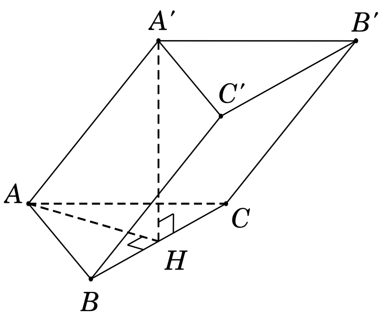
Câu 33: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Góc tạo bởi cạnh bên AA' với mặt đáy là 45^0. Tính thể tích khối trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=3$. **B.** $V=1$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{6}}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Tam giác ABC đều cạnh bằng 2 nên $AH=\sqrt{3}$.
Vì $A'H\perp(ABC)$ nên hình chiếu vuông góc của AA' trên mặt đáy (ABC) là AH. Do đó $45^0=\widehat{AA',(ABC)}=\widehat{AA',AH}=\widehat{A'AH}$. Suy ra tam giác $A'HA$ vuông cân tại H nên $A'H=HA=\sqrt{3}$.
Diện tích tam giác đều ABC là $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$.
Vậy $V=S_{\Delta ABC}.A'H=3$.



Câu 34: Tính thể tích V của một khối lăng trụ biết đáy có diện tích $S=10\,\text{cm}^2$, cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 và độ dài cạnh bên bằng 10cm.

A. $V=100\text{cm}^3$. **B.** $V=50\sqrt{3}\text{cm}^3$. **C.** $V=50\text{cm}^3$. **D.** $V=100\sqrt{3}\text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn B

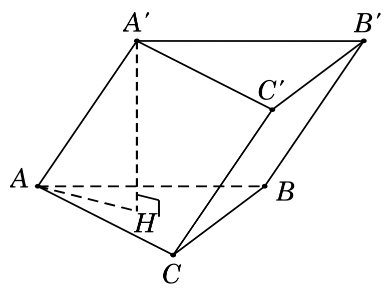
Xét khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC.

Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABC)\Rightarrow A'H\perp(ABC)$. Suy ra AH là hình chiếu của AA' trên mặt phẳng (ABC). Do đó

$$60^0=\widehat{AA',(ABC)}=\left(\widehat{AA',AH}\right)=\widehat{A'AH}.$$

Tam giác $A'AH$ vuông tại H, có

$A'H=AA'.\sin\widehat{A'AH}=5\sqrt{3}$.



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

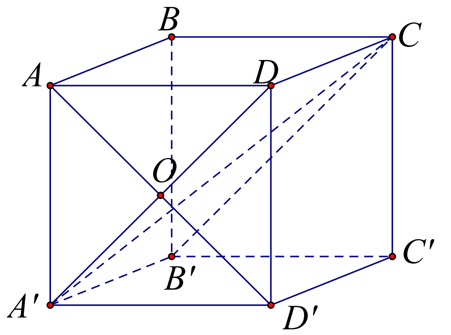
Vậy $V = S_{\Delta ABC}.A'H = 50\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

Câu 35: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và $C'D'$ bằng a. Tính thể tích V của khối lập phương đã cho.

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 2\sqrt{2}a^3$. **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$. **D.** $V = 27a^3$.

Lời giải

Chọn B



Đặt cạnh hình lập phương là x.

Gọi $O = AD' \cap A'D$, ta có $D'O \perp (DCB'A')$.

Ta có: $A'C \subset (DCB'A') // C'D'$ nên

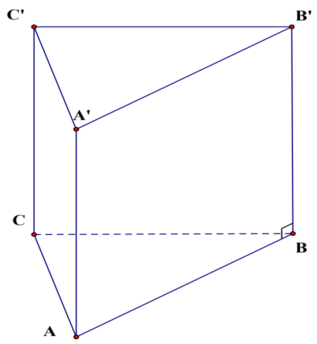
$d(C'D'; A'C) = d(C'D'; (DCB'A'))$

$= d(D'; (DCB'A')) = D'O = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = a$.

Do đó, $x = a\sqrt{2}$. Thể tích khối lập phương là:

$V = x^3 = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ *(tham khảo hình vẽ bên dưới)*.Thể tích khối lăng trụ bằng

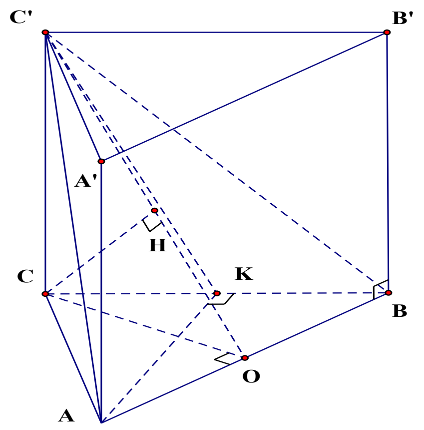


A. $\dfrac{9\sqrt{15}a^3}{20}$. **B** $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{20}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{15}a^3}{10}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{15}a^3}{10}$.

Lời giải

Chọn A

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi $2x$ là cạnh của tam giác đều, Gọi O,K lần lượt là trung điểm của AB,BC

Kẻ $CK\perp C'O$

Ta có $CH\perp C'O$ và $CH\perp AB$ nên $CH\perp(ABC')$ và $d(C,(ABC'))=CH=a$

Suy ra: $\frac{1}{CH^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{CO^2}$ hay $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{1}{3x^2}$ **(1)**

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác ABC' lên mặt phẳng $(BCC'B')$ là tam giác KBC'

Do đó $\frac{S_{\Delta KBC'}}{S_{\Delta ABC'}}=\cos\alpha=\frac{1}{3}$

Ta có: $S_{\Delta KBC'}=\frac{1}{2}.x.CC'$ và $S_{\Delta ABC'}=\frac{1}{2}.AB.C'O=\frac{1}{2}.AB.\sqrt{CC'^2+CO^2}=x\sqrt{CC'^2+3x^2}$

Do đó $\frac{1}{2}.x.CC'=\frac{1}{3}x\sqrt{CC'^2+3x^2}\Leftrightarrow 3CC'=2\sqrt{CC'^2+3x^2}\Leftrightarrow 5CC'^2=12x^2$ **(2)**

Từ $(1),(2)$ ta có $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{CC'^2}+\frac{4}{5CC'^2}\Leftrightarrow 5CC'^2=9a^2\Leftrightarrow CC'=\frac{3a}{\sqrt{5}}$

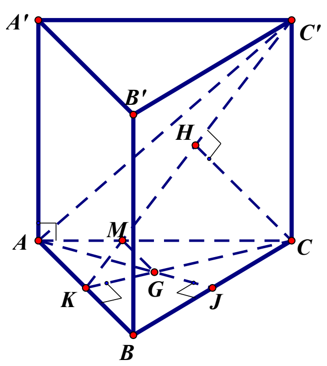
Suy ra $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=S_{ABC}.CC'=\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.\frac{3a}{\sqrt{5}}=\frac{9\sqrt{15}a^3}{20}$.

Câu 37: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

Chọn B



Gọi K,J lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Gọi x là độ dài cạnh AB.

$AJ=CK=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $CH\perp(ABC')\Rightarrow d(C,(ABC'))=CH=a$.

Mặt khác $AJ\perp(BCC'B')$.

Nên $\left(\widehat{(ABC'),(BCC'B')}\right)=\left(\widehat{CH,AJ}\right)=\alpha=\left(\widehat{CH,AG}\right)$ $(\cos\alpha=\sin\varphi)$.

Ta có $\sin\varphi = \dfrac{MG}{AG} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow MG = \dfrac{AG}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\dfrac{AJ}{\sqrt{3}.2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{2.3\sqrt{3}} = \dfrac{x}{6}$.

$\dfrac{HC}{3} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow \dfrac{a}{3} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow x = 2a$ mà $d\left(C,\left(ABC'\right)\right) = CH = a$.

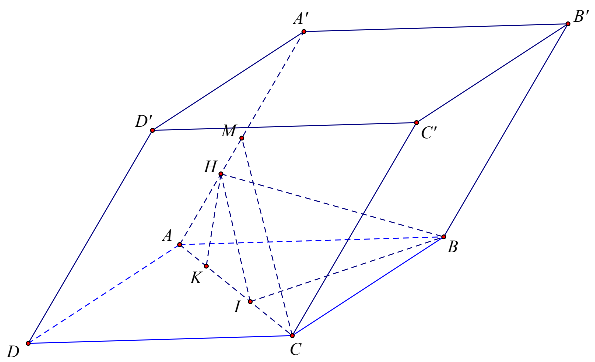
$\Rightarrow CC' = \dfrac{CH.CK}{\sqrt{CK^2 - CH^2}} = \dfrac{a\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $V = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}.CC' = \dfrac{\left(2a\right)^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 38: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{6}$, $AD = \sqrt{3}$, $A'C = 3$ và mặt phẳng $\left(AA'C'C\right)$ vuông góc với mặt đáy. Biết hai mặt phẳng $\left(AA'C'C\right)$, $\left(AA'B'B\right)$ tạo với nhau góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{3}{4}$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ bằng?

A. $V = 6$. **B.** $V = 8$. **C.** $V = 12$. **D.** $V = 10$.

Lời giải

Chọn B



Từ B kẻ $BI \perp AC \Rightarrow BI \perp \left(AA'C'C\right)$.

Từ I kẻ $IH \perp AA'$

$\Rightarrow \widehat{\left(\left(AA'C'C\right),\left(AA'B'B\right)\right)} = \widehat{BHI}$.

Theo giải thiết ta có $AC = 3$

$\Rightarrow BI = \dfrac{AB.BC}{AC} = \sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông BIH có $\tan\widehat{BHI} = \dfrac{BI}{IH}$

$\Leftrightarrow IH = \dfrac{BI}{\tan\widehat{BHI}} \Leftrightarrow IH = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Xét tam giác vuông ABC có $AI.AC = AB^2 \Rightarrow AI = \dfrac{AB^2}{AC} = 2$.

Gọi M là trung điểm cả AA', do tam giác $AA'C$ cân tại C nên $CM \perp AA' \Rightarrow CM\,//\,IH$.

Do $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AH}{AA'} = \dfrac{1}{3}$.

Trong tam giác vuông AHI kẻ đường cao HK ta có $HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{9} \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $h = 3HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AD.h = \sqrt{6}\sqrt{3}\dfrac{4\sqrt{2}}{3} = 8$.

Câu 39: Khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

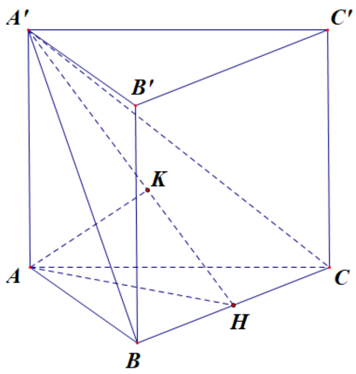
A. $V=24\sqrt{3}$. **B.** $V=8\sqrt{3}$. **C.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đều nên lăng trụ đã cho là lăng trụ đứng.

Gọi H là trung điểm của BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.



Ta có $\left.\begin{matrix} BC\perp AH \\ BC\perp AA' \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (AA'H)\Rightarrow (ABC)\perp (AA'H)$

Mà

$AK\perp A'H\Rightarrow AK\perp (A'BC)\Rightarrow d\big(A,(A'BC)\big)=AK=3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra $\widehat{A'HA}=60^0$.

Ta có $AH=\dfrac{AK}{\sin 60^0}=2\sqrt{3}\Rightarrow \begin{cases} A'A=AH.\tan 60^0=6 \\ AB=\dfrac{2.2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4 \end{cases}$

Thể tích khối lăng trụ là $V=S_{ABC}.AA'=4\sqrt{3}.6=24\sqrt{3}$.

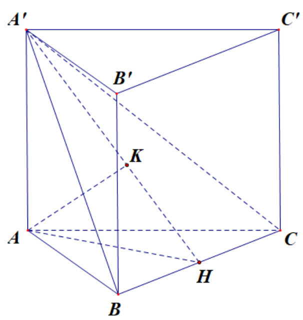
Câu 40: Khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 3 và góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V khối lăng trụ đã cho?

A. $V=24\sqrt{3}$. **B.** $V=8\sqrt{3}$. **C.** $V=72$. **D.** $V=24$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H hình chiếu của A lên BC, K là hình chiếu của H lên $A'H$.



Ta có $\left.\begin{matrix} BC\perp AH \\ BC\perp AA' \end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp (AA'H)\Rightarrow (ABC)\perp (AA'H)$

Mà $AK\perp A'H\Rightarrow AK\perp (A'BC)\Rightarrow d\big(A,(A'BC)\big)=AK=3$.

Ta có góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa AH và. Suy ra

$\widehat{A'HA}=60^0$. Ta có $AH=\dfrac{AK}{\sin 60^0}=2\sqrt{3}\Rightarrow \begin{cases} A'A=AH.\tan 60^0=6 \\ BC=2AH=4\sqrt{3};\ AB=2\sqrt{6} \end{cases}$

Thể tích khối lăng trụ là $V=S_{ABC}.AA'=\dfrac{1}{2}.\left(2\sqrt{6}\right)^2.6=72$.

Câu 41: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

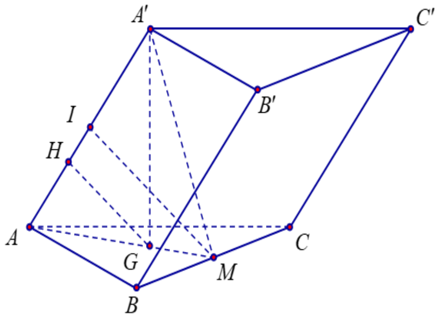
A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A'G \perp (ABC)$ nên $A'G \perp BC$; $BC \perp AM$

$\Rightarrow BC \perp (MAA')$



Kẻ $MI \perp AA'$;

$BC \perp IM$ nên $d(AA';\, BC) = IM = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Kẻ $GH \perp AA'$,

Ta có $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{GH}{IM} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow GH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$$\frac{1}{HG^2} = \frac{1}{A'G^2} + \frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow A'G = \frac{AG.HG}{\sqrt{AG^2 - HG^2}} = \frac{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{12}}} = \frac{a}{3}$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = A'G.S_{ABC} = \frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 42: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a; AD = a\sqrt{3}$, góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và mặt phẳng (ACD') bằng 60^0. Tính thể tích khối hộp chữ nhật đã cho.

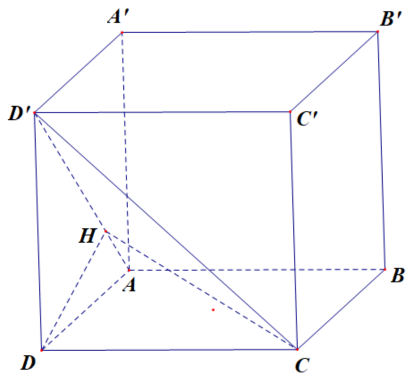
A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của D lên AD'.

Ta có



$AD' \perp (DHC) \Rightarrow \left(\widehat{(ADD'A'),(ACD')}\right) = \widehat{DHC} = 60^0$.

Có $DH = CD.\cot 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

Suy ra $\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{DD'^2} + \dfrac{1}{DA^2} \Rightarrow DD' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

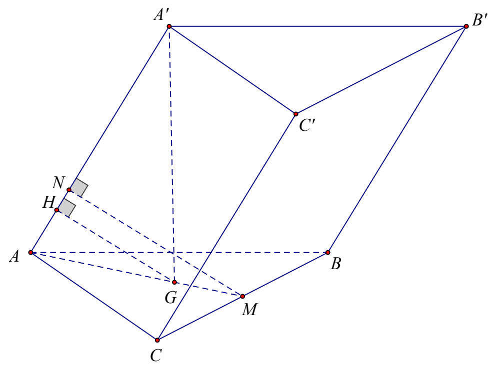
Thể tích khối hộp là $V = S_{ABCD}.DD' = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 43: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi G là trọng tâm của ΔABC, M là trung điểm của $BC \Rightarrow A'G \perp (ABC)$.

Trong $(AA'M)$ dựng $MN \perp AA'$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'G) \Rightarrow BC \perp MN$.

$\Rightarrow d(AA', BC) = MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi H là hình chiếu của G lên AA'.

Ta có: $GH // MN \Rightarrow \dfrac{GH}{MN} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GH = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác $AA'G$ vuông tại G, ta có:

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GA^2} + \frac{1}{GA'^2} \Rightarrow \frac{1}{GA'^2} = \frac{1}{GH^2} - \frac{1}{GA^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{27}{3a^2}. \Rightarrow GA' = \frac{a}{3}.$$

Vậy thể tích của khối lăng trụ là: $V = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 2a,\ AD = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy và góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (SBD) là $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{V}{a^3}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

A. $0,25$. **B.** $0,5$. **C.** $0,75$. **D.** $1,5$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

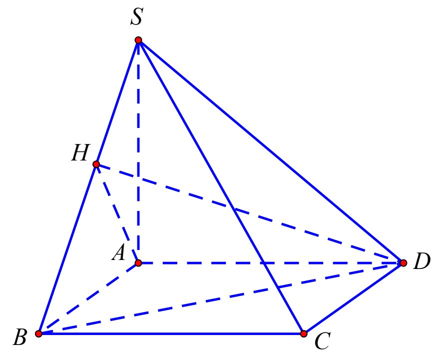
Gọi H là hình chiếu của A trên SB

$\Rightarrow AH\perp SB$.

Dễ thấy $AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SB$.

Do đó: $SB\perp(AHD)\Rightarrow SB\perp HD$.

Khi đó ta có:



$$\begin{cases}(SAB)\cap(SBD)=SB\\AH\perp SB;\ HD\perp SB\\AH\subset(SAB);\ HD\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow((SAB);(SBD))=\widehat{AHD}=45^\circ.$$

Hay ΔAHD vuông cân tại A $\Rightarrow AH=AD=a$.

ΔSAB vuông tại A: $\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AH^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{3}{4a^2}\Rightarrow SA=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $V=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.2a^2=\dfrac{4a^3}{3\sqrt{3}}$. Vậy $\dfrac{V}{a^3}=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}\approx 0{,}77$.

Câu 45: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$, SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{4a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{8a^3}{3}$. **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $V=8a^3$. **D.** $V=\dfrac{27a^3}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Vì ΔABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a,$ nên $BC=2\sqrt{2}a$

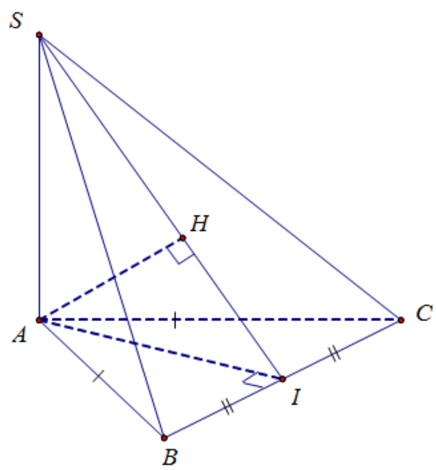
Gọi I là trung điểm BC suy ra $AI=\dfrac{1}{2}BC=a\sqrt{2}.$

Khi đó $\begin{cases}BC\perp AI\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI).$

Goi H là hình chiếu của A lên SI suy ra AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

$\Rightarrow AH=\dfrac{4a}{3}$. Ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AI^2}+\frac{1}{SA^2}\Rightarrow SA=\sqrt{\frac{AI^2.AH^2}{AI^2-AH^2}}=4a.$$



Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}2a.2a=2a^2$. $\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.2a^2.4a=\frac{8a^3}{3}$.

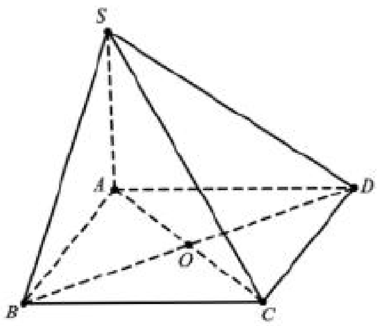
Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=2a$, $\mathrm{BC}=\mathrm{a}$ $\widehat{ABC}=120^0$ và SD vuông góc với đáy. Sin góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{1}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $3a^3$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $SD=h$, ta có



$BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AB.AD.\cos 60^0}=\sqrt{3}a$

Suy ra $SB=\sqrt{SD^2+BD^2}=\sqrt{h^2+3a^2}$

Ta có $d\left(B;(SAC)\right)=d\left(D;(SAC)\right)$

và

$$\frac{1}{d^2\left(D;(SAC)\right)}=\frac{1}{SD^2}+\frac{1}{d^2\left(D;AC\right)}=\frac{1}{h^2}+\frac{AC^2}{4S_{DAC}^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{7}{3a^2}$$

$\Rightarrow d\left(D;(SAC)\right)=\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}$ (Do $AC^2=7a^2$; $S_{DAC}=\frac{1}{2}a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$)

Do đó $\sin\left(\mathrm{SB};(SAC)\right)=\frac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB}=\frac{\frac{\sqrt{3}ah}{\sqrt{3a^2+7h^2}}}{\sqrt{h^2+3a^2}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow h=a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD}=a^3$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A - TRẮC NGHIỆM

Câu 7.33: Cho các phát biểu sau:

(1) Hai mặt phẳng (P) và (Q) có giao tuyến là đường thẳng a và cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì $a \perp (R)$

(2) Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và có giao tuyến là đường thẳng a, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng a thì $b \perp (Q)$.

(3) Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và a vuông góc với (Q) thì $(P) \perp (Q)$.

(4) Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) thì $a \perp (Q)$.

Số phát biểu đúng trong các phát biểu trên là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Phát biểu (2) (3) (1) đúng.

Câu 7.34: Cho mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) và a là giao tuyến của (P) và (Q). Trong các phát biểu dưới đây, phát biểu nào đúng?

A. Đường thẳng d nằm trên (Q) thì d vuông góc với (P).

B. Đường thẳng d nằm trên (Q) và d vuông góc với a thì d vuông góc với (P).

C. Đường thẳng d vuông góc với a thì d vuông góc với (P).

D. Đường thẳng d vuông góc với (Q) thì d vuông góc với (P).

Lời giải

Chọn B

Câu 7.35: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Số đo của góc nhị diện $[S,AB,C]$ bằng $\widehat{SBC}$.

B. Số đo của góc nhị diện $[D,SA,B]$ bằng 90°.

C. Số đo của góc nhị diện $[S,AC,B]$ bằng 90°.

D. Số đo của góc nhị diện $[D,SA,B]$ bằng $\widehat{BSD}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 7.36: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

A. Đường thẳng BC vuông góc với mặt phẳng (SAB).

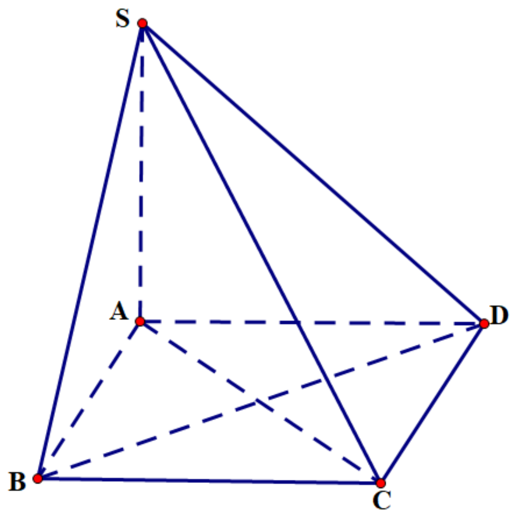
B. Đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

C. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD).

D. Đường thẳng AD vuông góc với mặt phẳng (SAB).

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SA \perp (ABCD) => SA \perp ABAD, SA \perp BC; SA \perp BD$

Mà ABCD là hình vuông => $\begin{matrix} AB \perp BC \\ BD \perp AC \\ AD \perp AB \end{matrix}$

=> $BC \perp (SAB), BD \perp (SAC), AD \perp (SAB)$

Câu 7.37: Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng $\mathbf{S}$, chiều cao bằng h là:

A. $V = \mathbf{S} \cdot h$.   **B.** $V = \frac{1}{2}.S.h$ **C.** $V = \frac{1}{3}.S.h$.   **D.** $V = \frac{2}{3}.S.h$.

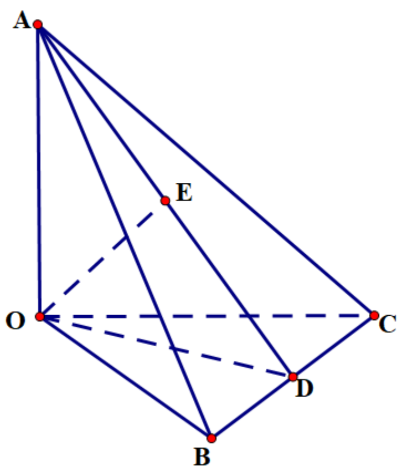
Lời giải

Chọn C

B – TỰ LUẬN

Bài 7.38. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = a\sqrt{2}$ và $OC = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC).

Lời giải



GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Ta có $OA \perp OB, OA \perp OC \Rightarrow OA \perp (OBC); BC \subset (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ Trong (OBC) kẻ $OD \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (OAD); BC \subset (ABC) \Rightarrow (OAD) \perp (ABC)$

$(OAD) \cap (ABC) = AD$

Trong (OAD) $OE \perp AD$

$\Rightarrow OE \perp (ABC) \Rightarrow d(O,(ABC)) = OE$

Xét tam giác OBC vuông tại O có

$$\frac{1}{OD^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow OD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác OAD vuông tại O có

$$\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{7}{4a^2} \Rightarrow OE = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$$

Vậy $d(O,(ABC)) = \frac{2a\sqrt{7}}{7}$

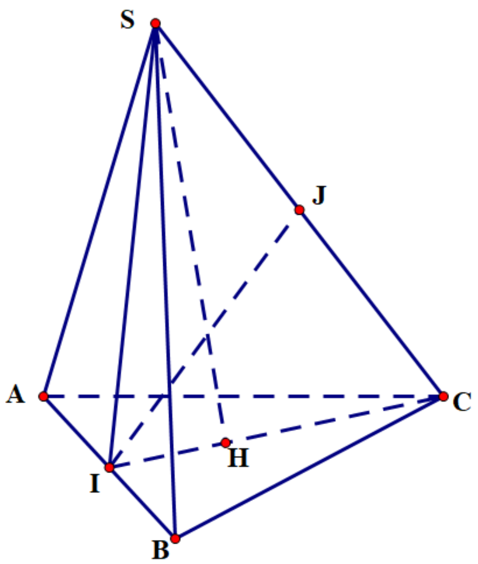
Bài 7.39. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC cân tại A, tam giác BCD cân tại D. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng $BC \perp (AID)$

b) Kẻ đường cao AH của tam giác AD. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

c) Kẻ đường cao IJ của tam giác AID. Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của AD và BC.

Lời giải



a) Xét tam giác ABC cân tại A có

I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$

Xét tam giác ACD cân tại D có

I là trung điểm của BC $\Rightarrow DI \perp BC$

Ta có $AI \perp BC, DI \perp BC \Rightarrow BC \perp (AID)$

b) $BC \perp (AID); BC \subset (BCD) \Rightarrow (BCD) \perp (AID)$

$(BCD) \cap (AID) = DI$

Trong (AID) có $AH \perp DI$

$\Rightarrow AH \perp (BCD)$

c) Ta có $BC \perp (AID); IJ \subset (AID) \Rightarrow BC \perp IJ$

Mà $IJ \perp AD$

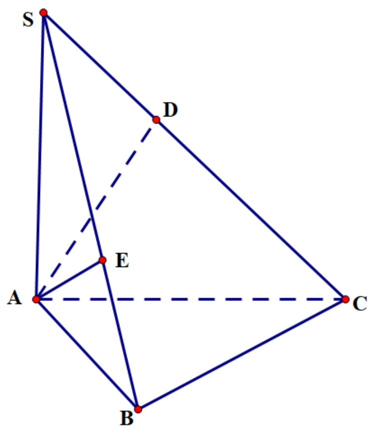
Do đó IJ là đường vuông góc chung của AD và BC

Bài 7.40. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BC = a$ và $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.

b) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải



a) $SA \perp BC (SA \perp (ABC)), AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB), BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$

b) +) Trong (SAC) kẻ $AD \perp SC \Rightarrow d(A, SC) = AD$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$\sin\widehat{CAB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC = \frac{a}{\sin 30^0} = 2a$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có

$$\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(2a)^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow AD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Do đó $d(A, SC) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

+) $(SAB) \perp (SBC), (SAB) \cap (SBC) = SB$

Trong (SAB) kẻ $AE \perp SB$

$\Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AE$

Xét tam giác ABC vuông tại B có

$$\tan\widehat{CAB} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{a}{\tan 30^\circ} = a\sqrt{3}$$

Xét tam giác SAB vuông tại A có

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{1}{(a\sqrt{2})^2}+\frac{1}{(a\sqrt{3})^2}=\frac{5}{6a^2}\Rightarrow AE=\frac{a\sqrt{30}}{5}$$

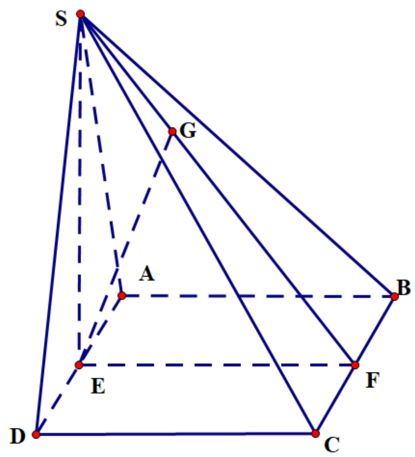
Vậy $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{a\sqrt{30}}{5}$

Bài 7.41. Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Biết tam giác SAD vuông cân tại S và $(SAD)\perp(ABCD)$.

a) Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC.

Lời giải



a) Trong (SAD) kẻ $SE\perp AD$

Mà $(SAD)\perp(ABCD),(SAD)\cap(ABCD)=AD\Rightarrow SE\perp(ABCD)$

Xét tam giác SAD vuông cân tại S có

$SE\perp AD$

$\Rightarrow$ E là trung điểm của AD

$\Rightarrow SE=\frac{AD}{2}=\frac{a}{2}$

Diện tích hình vuông ABCD là $S_{ABCD}=a^2$

Thể tích khối chóp là $V=\frac{1}{3}SE.S_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot a^2=\frac{a^3}{6}$

b) Trong (ABCD) kẻ EF//AB mà $AB\perp BC\Rightarrow EF\perp BC$

mà $SE\perp BC\Rightarrow BC\perp(SEF);BC\subset(SBC)\Rightarrow(SEF)\perp(SBC)$

$(SEF)\cap(SBC)=SF$

Trong (SEF) kẻ $EG\perp SF$

$\Rightarrow EG\perp(SBC)$

Ta có $AD//BC$ nên $AD//(SBC)$

$\Rightarrow d(AD,SC)=d\left(AD,(SBC)\right)=d\left(E,(SBC)\right)=EG$

Vì $ABCD$ là hình vuông và $EF//AB$ nên $EF=AB=a$

Xét tam giác SEF vuông tại E có

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\frac{1}{EG^2}=\frac{1}{SE^2}+\frac{1}{EF^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{a^2}\Rightarrow EG=\frac{a\sqrt{5}}{5}$$

Vậy $d\left(AD,SC\right)=\frac{a\sqrt{5}}{5}$

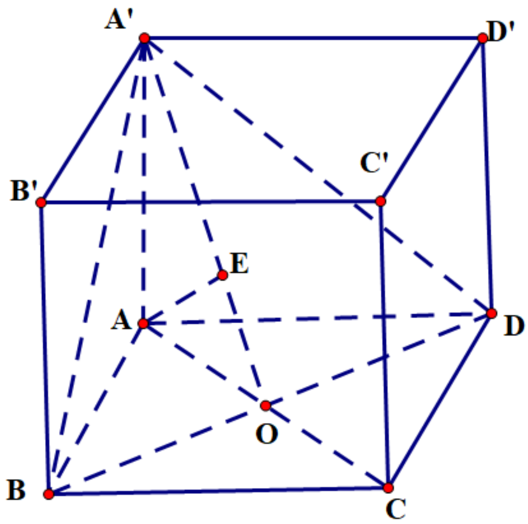
Bài 7.42. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng $a, AA'\perp\left(ABCD\right)$ và $\widehat{BAD}=60^\circ$

.

a) Tính thể tích của khối hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BD\right)$.

Lời giải



a) Diện tích tam giác ABD bằng diện tích tam giác BCD vì chung đáy BD và chiều cao $AO=OC(ABCD$ là hình thoi) Diện tích tam giác ABD:

$$S_{ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\widehat{BAD}=\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow S=2S_{ABD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích khối hộp là $V=AA'.S_{ABCD}=a\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$

b) Goi $AC\cap BD=\{O\}$

Ta có $AA'\perp BD, AO\perp BD\Rightarrow BD\perp\left(A'AO\right);BD\subset\left(A'BD\right)\Rightarrow\left(A'AO\right)\perp\left(A'BD\right)$

$\left(A'AO\right)\cap\left(A'BD\right)=A'O$

Trong (A'AO) kẻ $AE\perp A'O$

$\Rightarrow AE\perp\left(A'BD\right)\Rightarrow d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=AE$

Xét tam giác ABD có $AB=AD$ và $\widehat{BAD}=60^\circ$ nên tam giác ABD đều

$\Rightarrow OA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

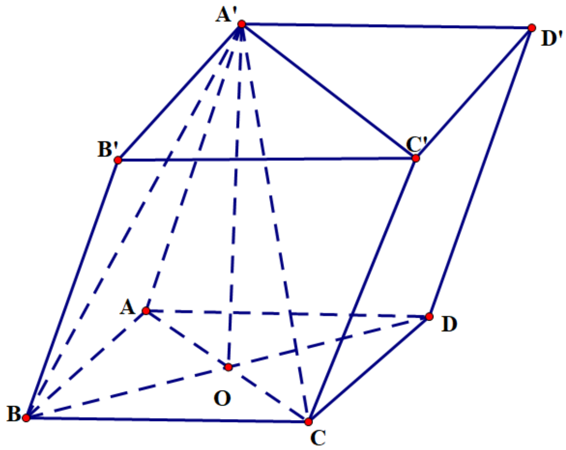
Xét tam giác AOA' vuông tại A có

$$\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AA^2}+\frac{1}{OA^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AE=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Bài 7.43. Cho hình lăng trụ $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Biết $A'\cdot ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng a. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD\cdot A'B'C'D'$ và thể tích của khối chóp $A'\cdot BB'C'C$.

Lời giải



Gọi $AC\cap BD=\{O\}$ mà $A'\cdot ABCD$ là hình chóp đều nên $A'O\perp\left(ABCD\right)$

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác A'AO vuông tại O có

$$A'O=\sqrt{AA'^2-AO^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$$

$S_{ABCD}=a^2$

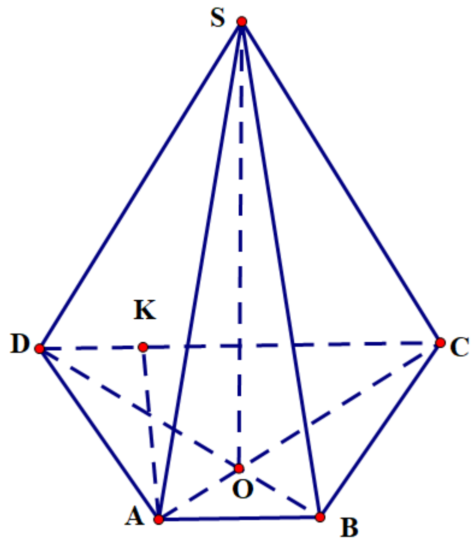
Vậy khối lăng trụ có thể tích $V=\dfrac{1}{3}A'O\cdot S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Nếu hình lăng trụ $ABCD\cdot A'B'C'D'$ xoay lại thành hình lăng trụ $AA'D'D\cdot BB'C'C$ thì thể tích không thay đổi do đó thể tích hình chóp $A'.BB'C'C$ bằng một phần 3 thể tích hình lăng trụ $AA'D'D\cdot B'B'C$ vì chung đáy và chung chiều cao kẻ từ A' xuống đáy $BB'C'C$.

Thể tích khối chóp là $V_{A'\cdot BB'C'C}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{18}$

Bài 7.44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB//CD$ và $AB=BC=DA=a, CD=2a$. Biết hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$ cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $\left(ABCD\right)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ S đến mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và thề tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD

Mà (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ nên $SO \perp (ABCD)$ Kẻ $AK \perp DC$ tại K $\Rightarrow DK = \frac{DC - AB}{2} = \frac{a}{2}$

Xét tam giác ADK vuông tại K có $AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác AKC vuông tại K có $AC = \sqrt{AK^2 + KC^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$

Ta có $AB//CD$ nên $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

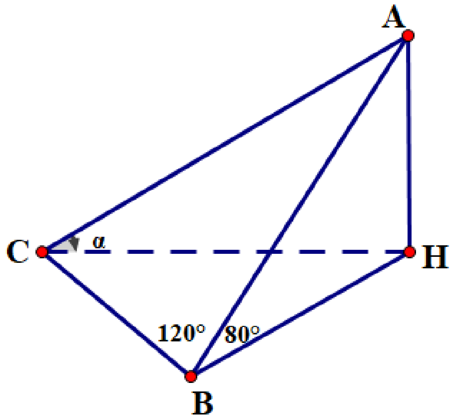
Xét tam giác SAO vuông tại O có

$$A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Thể tích của khối chóp S.ABCD là $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{4}$

Bài 7.45. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng 10 m và tạo với mặt đất góc 80°. Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài 12 m vào tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Lời giải



Góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên là $\widehat{BAC}$ Xét tam giác ABC có

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ = 364$

$\Rightarrow AC = 2\sqrt{91}\,(m)$

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt đất

Xét tam giác ABH vuông tại H có $AH = 10 \cdot \sin 80^\circ$

Xét tam giác ACH vuông tại H có $\sin\widehat{ACH} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{10\sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \widehat{ACH} \approx 31^0$

Vậy góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên khoảng 31^0.

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O. Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Trong không gian có vô số đường thẳng qua O và vuông góc với Δ.

Câu 2: Trong không gian cho các đường thẳng a,b,c và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a\perp(P)$ và $b//(P)$ thì $a\perp b$.

B. Nếu $a\perp b,\ c\perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c.

C. Nếu $a//b$ và $b\perp c$ thì $c\perp a$.

D. Nếu $a\perp b$ và $b\perp c$ thì $a//c$.

Lời giải

Chọn D

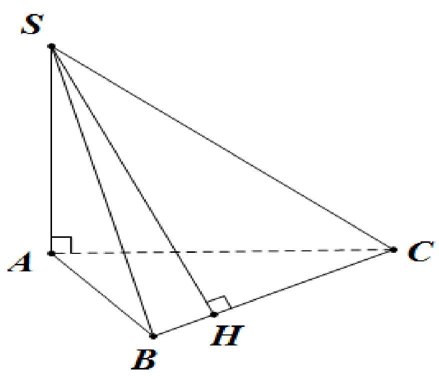
Sai vì a và c có có thể không đồng phẳng.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

A. $BC\perp SC$. **B.** $BC\perp AH$. **C.** $BC\perp AB$. **D.** $BC\perp AC$.

Lời giải

Chọn B



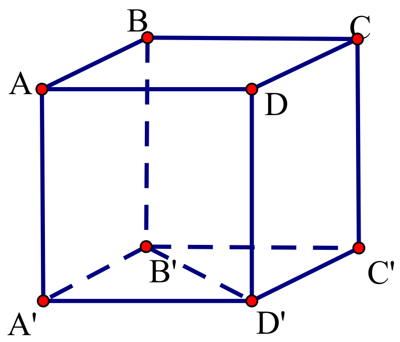
Ta có: $\begin{cases} BC\perp SH \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp AH$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $A'A$.

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn A



Ta có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên cạnh $A'A \perp (A'B'C'D')$ và $B'D' \in (A'B'C'D')$

Nên $A'A \perp B'D' \Rightarrow \measuredangle(A'A, B'D') = 90°$.

Câu 5: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Đáp án **A** sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$. Dễ thấy AA' và AD cắt nhau.

Đáp án **C** sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

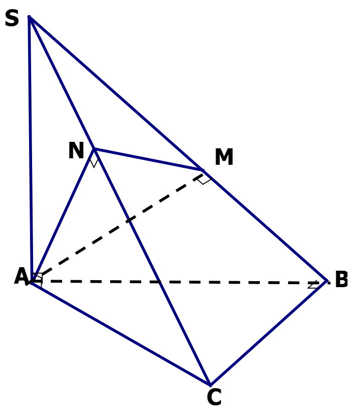
Đáp án D sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

Câu 6: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM \perp SC$. **B.** $AM \perp MN$. **C.** $AN \perp SB$. **D.** $SA \perp BC$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$ mà $BC\perp AB\Rightarrow BC\perp(SAB)$, $AM\subset(SAB)\Rightarrow BC\perp AM$.

Vậy $\begin{cases}AM\perp SB\\AM\perp BC\end{cases}\Rightarrow AM\perp(SBC)\Rightarrow AM\perp SC\Rightarrow$ Đáp án **A** đúng.

Vì $\begin{cases}AM\perp(SBC)\\MN\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow AM\perp MN\Rightarrow$ Đáp án **B** đúng.

$SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC\Rightarrow$ Đáp án **D** đúng.

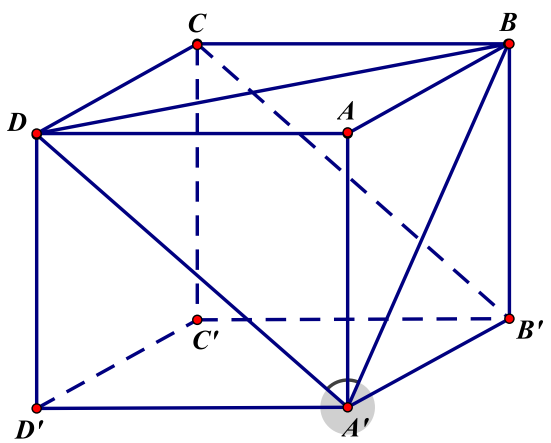
Vậy **C** sai.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $B'C\,//\,A'D\Rightarrow\widehat{(A'B;B'C)}=\widehat{(A'B;A'D)}=\widehat{DA'B}$.

Xét $\Delta DA'B$ có $A'D=A'B=BD$ nên $\Delta DA'B$ là tam giác đều.

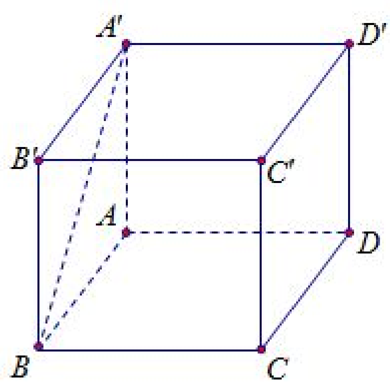
Vậy $\widehat{DA'B}=60°$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng:

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Có $CD//AB\Rightarrow(BA',CD)=(BA',BA)=\widehat{ABA'}=45°$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

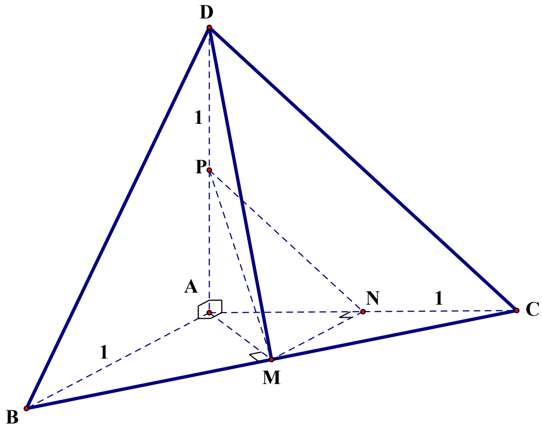
A. 45°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn D

CÁCH 1. Vì $\left.\begin{matrix} AB \perp AC \\ AB \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$.

CÁCH 2.



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD.

Trong ΔABC, có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ MN = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Trong ΔACD, có $\begin{cases} NP \,//\, CD \\ NP = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Trong ΔAMP, có $MP = \sqrt{AP^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

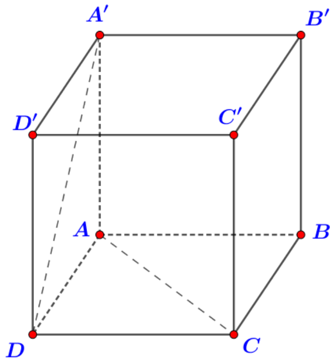
Ta có $\begin{cases} MN \,//\, AB \\ NP \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow (AB; CD) = (MN; NP) = \widehat{MNP}$

Áp dụng định lý Cosin cho ΔMNP, có

$$\cos\widehat{MNP} = \frac{NP^2 + NM^2 - MP^2}{2NP.NM} = \frac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \widehat{MNP} = 90^\circ$$

Hay $(AB; CD) = 90^\circ$.

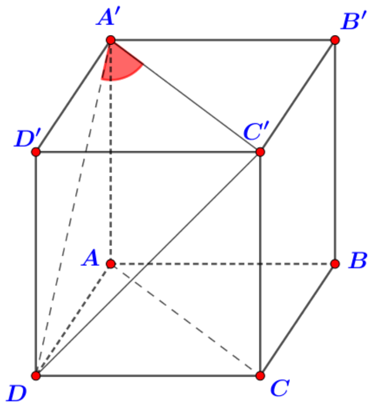
Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ bằng



A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\left(\widehat{AC, A'D}\right) = \left(\widehat{A'C', A'D}\right) = \widehat{DA'C'} = 60^\circ$.

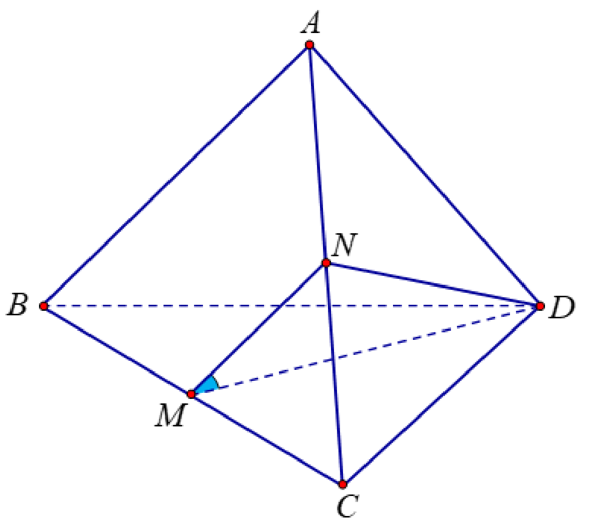
Vì $A'D = A'C' = C'D$.

Câu 11: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB, DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm của AC và a là độ dài cạnh tứ diện đều.

Ta có $MN // AB \Rightarrow \left(AB, DM\right) = \left(MN, DM\right) = \widehat{DMN}$.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Tam giác DMN có $DM = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$ và $\cos\widehat{DMN} = \frac{DM^2 + MN^2 - DN^2}{2.DM.MN}$.

$$\Leftrightarrow \cos\widehat{DMN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $4a$, lấy H, K lần lượt trên các cạnh AB, AD sao cho $BH = 3HA,\ AK = 3KD$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại H lấy điểm S sao cho $\widehat{SBH} = 30^\circ$. Gọi E là giao điểm của CH và BK. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SE và BC.

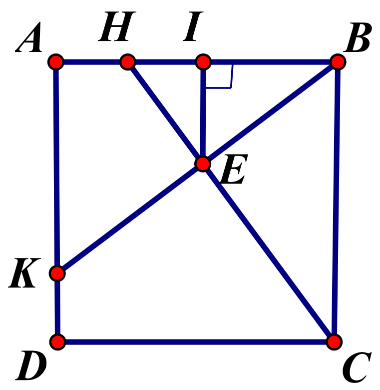
A. $\frac{28}{5\sqrt{39}}$. **B.** $\frac{18}{5\sqrt{39}}$. **C.** $\frac{36}{5\sqrt{39}}$. **D.** $\frac{9}{5\sqrt{39}}$.

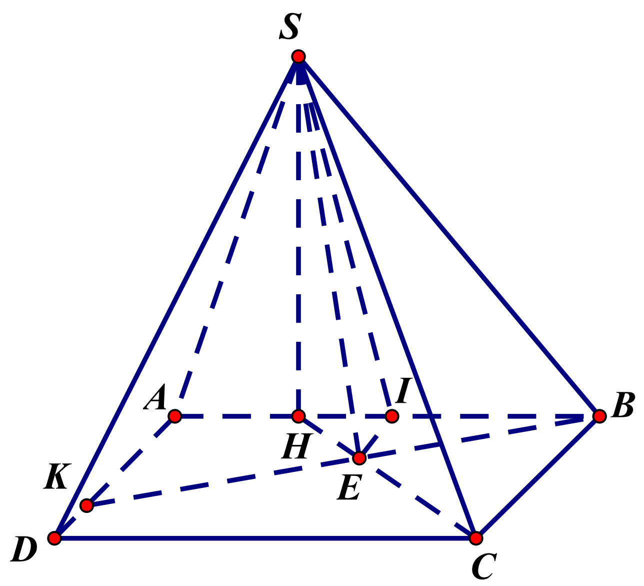
Lời giải

Chọn B

Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên AB ta có $\Delta ABD = \Delta BCH$.

$\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BCH} \Rightarrow \widehat{HEB} = 90^\circ$.





Ta có: $\cos\left(SE;BC\right)=\cos\left(SE;EI\right)=\left|\cos\widehat{SEI}\right|$, $SH=BH.\tan 30^\circ=a\sqrt{3}$.

$\frac{HB}{HC}=\frac{HE}{HB}\Rightarrow HE=\frac{HB^2}{HC}=\frac{9a}{5}$, $SE=\sqrt{SH^2+HE^2}=\sqrt{3a^2+\frac{81a^2}{25}}=\frac{2a\sqrt{39}}{5}$.

$\frac{HE}{HB}=\frac{HI}{HE}\Rightarrow HI=\frac{HE^2}{HB}=\frac{27a}{25}$, $SI=\sqrt{SH^2+HI^2}=\sqrt{3a^2+\left(\frac{27a}{25}\right)^2}=\frac{2a\sqrt{651}}{25}$.

$\frac{EI}{BC}=\frac{HI}{HB}=\frac{9}{25}\Rightarrow EI=\frac{36a}{25}$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác SEI ta được:

$$\cos\widehat{SEI}=\frac{SE^2+EI^2-SI^2}{2.SE.EI}=\frac{\left(\frac{2a\sqrt{39}}{5}\right)^2+\left(\frac{36a}{25}\right)^2-\left(\frac{2a\sqrt{651}}{25}\right)^2}{2.\frac{2a\sqrt{39}}{5}.\frac{36a}{25}}=\frac{18a}{5\sqrt{39}}.$$

Câu 13: Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **ĐÚNG?**

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau

Lời giải

Chọn B

Câu A sai vì có thể hai đường thẳng chéo nhau.

Câu C sai vì hai mặt phẳng có thể cắt nhau theo một giao tuyến vuông góc với mặt phẳng đã cho.

Câu D sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.

Câu 14: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng $\left(P\right)$, trong đó $a\perp\left(P\right)$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. Nếu $b\,//\,a$ thì $b\,//\left(P\right)$.

B. Nếu $b\,//\,a$ thì $b\perp\left(P\right)$.

C. Nếu $b\perp\left(P\right)$ thì $b\,//\,a$.

D. Nếu $b\,//\left(P\right)$ thì $b\perp a$.

Lời giải

Chọn A

Nếu $a\perp\left(P\right)$ và $b\,//\,a$ thì $b\perp\left(P\right)$.

Câu 15: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

B. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b đồng thời $a\perp b$. Luôn có mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ chứa a và $\left(\alpha\right)\perp b$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau. Nếu mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ chứa a và mặt phẳng $\left(\beta\right)$ chứa b thì $\left(\alpha\right)\perp\left(\beta\right)$.

D. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác.

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải

Chọn B

Hiển nhiên **B** đúng.

Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một mặt phẳng cho trước. Do đó, **A** sai.

Nếu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau và cắt nhau thì mặt phẳng chứa cả a và b không thể vuông góc với b. Do đó, **C** sai.

Qua một đường thẳng có vô số mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng khác. Do đó, **D** sai.

Câu 16: Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

B. Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song

Lời giải

Chọn A

Theo lý thuyết.

Câu 17: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. H là trung điểm của AC.

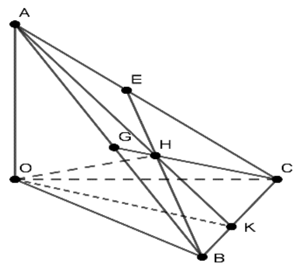
B. H là trọng tâm tam giác ABC.

C. H là trung điểm của BC.

D. H là trực tâm của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $OK \perp BC$; $OH \perp AK$.

Ta có: $\begin{cases} OK \perp BC \\ OA \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAK) \Rightarrow BC \perp OH$.

$\begin{cases} OH \perp BC \\ OH \perp AK \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC) \Rightarrow H$ là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

$AH \perp BC$ nên H là trực tâm của tam giác ABC.

Câu 18: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là hình chiếu của A trên SB, trong các khẳng định sau:

$(1): AH \perp SC$.

$(2): BC \perp (SAB)$.

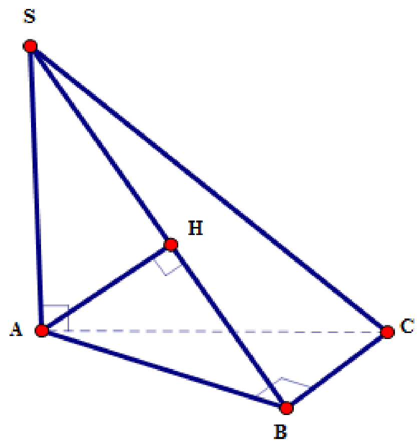
$(3): SC \perp AB$.

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC \perp SA$, $\mathrm{BC} \perp \mathrm{AB}$ nên $BC \perp (SAB)$.

Và $(SBC) \perp (SAB)$, $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp SC$

Vậy có hai khẳng định đúng.

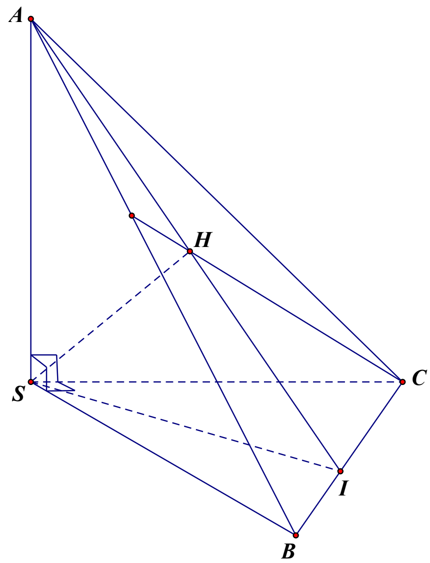
Câu 19: Cho tứ diện $SABC$ có các góc phẳng tại đỉnh S đều vuông. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng (ABC) là

A. trực tâm tam giác ABC. **B.** trọng tâm tam giác ABC.

C. tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. **D.** tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$\left.\begin{matrix} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp (SBC).$$

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

$$\left.\begin{matrix} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AH \ (1).$$

Tương tự, ta có:

$$\left.\begin{matrix} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (SAB).$$

$$\left.\begin{matrix} AB \perp SC \\ AB \perp SH \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (SCH) \Rightarrow AB \perp CH \ (2).$$

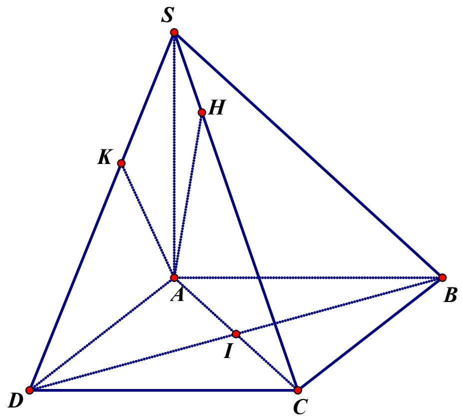
Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm tam giác ABC.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AH \perp (SCD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AK \perp (SCD)$. **D.** $BC \perp (SAC)$.

Lời giải

Chọn C



Có $\left.\begin{matrix} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Có $\left.\begin{matrix} AK \perp SD \\ AK \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SCD)$.

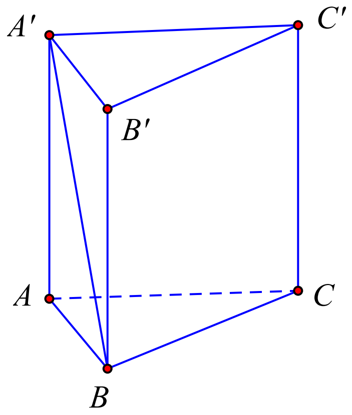
Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp A'B' \Rightarrow A'B' \perp BB'$ (1)

Bài ra có $AB \perp BC \Rightarrow A'B' \perp B'C'$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow A'B' \perp (BCC'B')$ $\Rightarrow \widehat{(A'B;(BCC'B'))} = \widehat{A'BB'}$

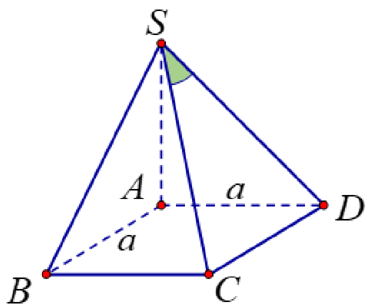
$\Rightarrow \tan\left(\widehat{A'B;(BCC'B')}\right) = \tan\widehat{A'BB'} = \dfrac{A'B'}{BB'} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{(A'B;(BCC'B'))} = 30°$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB).

A. 45°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Lời giải

Chọn B



Dễ thấy $CB \perp (SAB)$ $\Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\widehat{B} = 90°; CB = a; SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan\widehat{CSB} = \dfrac{CB}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{CSB} = 30°$.

Câu 23: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$.

A. $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $SA = x$.

Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (BCD) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $\widehat{SAO} = 60°$.

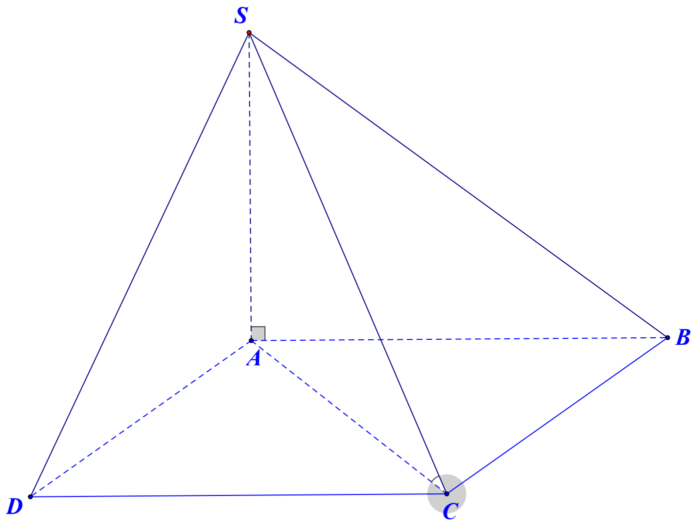
Xét tam giác vuông SAO: $\cos 60° = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{AO}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60^0 **B.** 120^0 **C.** 30^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}.$

$\Rightarrow \tan \widehat{SAC} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0.$

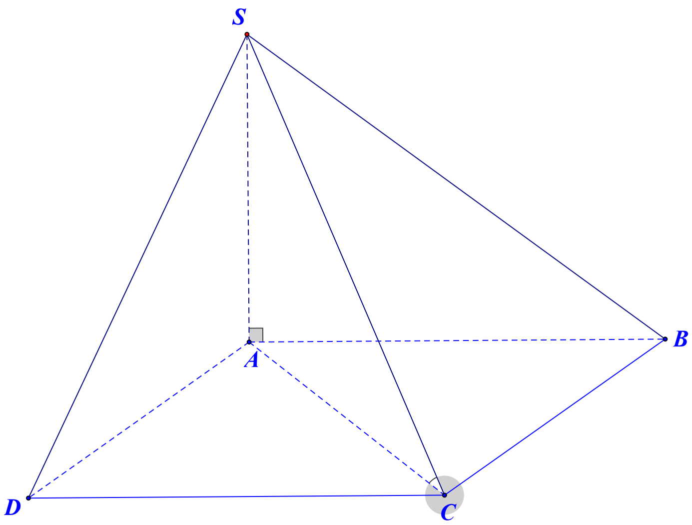
GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = \sqrt{2}a, SA = 3a$ và $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60^0 **B.** 120^0 **C.** 30^0 **D.** 90^0

Lời giải

Chọn A



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \overline{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA}$.

Ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}.$

$\Rightarrow \tan \widehat{SAC} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0.$

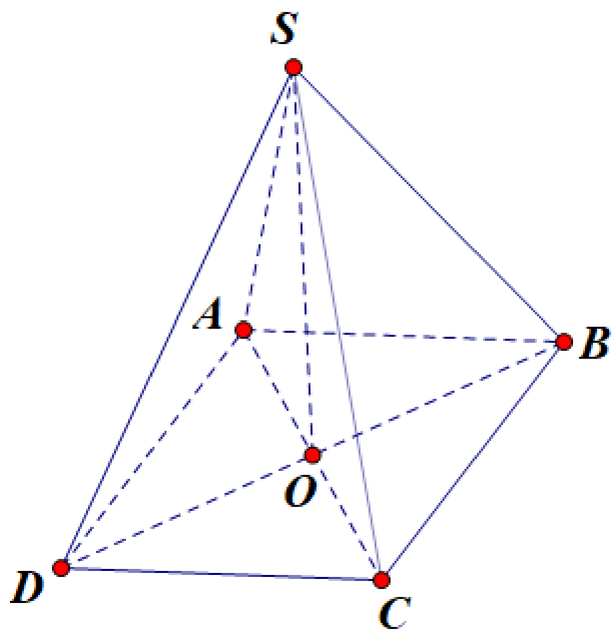
Câu 26: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ADC} = 60°$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $60°$ **B.** $75°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

Lời giải

Chọn C

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\widehat{ADC}=60^\circ$ nên ΔACD đều và $OD=\dfrac{2a.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

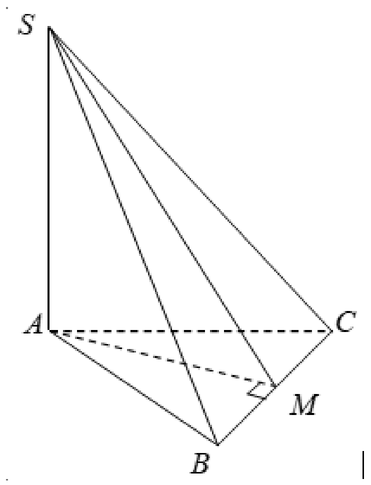
Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SDO}$ và $\tan\widehat{SDO}=\dfrac{SO}{DO}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\widehat{SDO}=30^\circ$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC, J là trung điểm BM. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A. $BC\perp(SAB)$ **B.** $BC\perp(SAM)$ **C.** $BC\perp(SAC)$ **D.** $BC\perp(SAJ)$

Lời giải

Chọn B



Vì $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA$.

Theo giải thiết tam giác ABC là tam giác cân tại A và M là trung điểm $BC\Rightarrow BC\perp AM$.

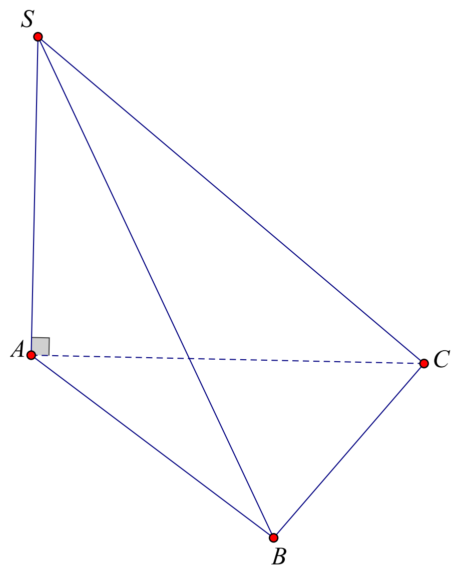
Ta có $\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AM\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAM)$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, kết luận nào sau đây sai?

A. $(SAC)\perp(SBC)$. **B.** $(SAB)\perp(ABC)$. **C.** $(SAC)\perp(ABC)$. **D.** $(SAB)\perp(SBC)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\begin{cases} SA\perp(ABC) \\ SA\subset(SAB),(SAC) \end{cases} \Rightarrow (SAB),(SAC)\perp(ABC) \Rightarrow$ B, C đúng.

$SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$ mà $BC\perp AB \Rightarrow BC\perp(SAB);BC\subset(SBC)$

$\Rightarrow (SAB)\perp(SBC) \Rightarrow$ D đúng.

Câu 29: Cho a,b,c là các đường thẳng. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?

A. Nếu $a\perp b$ và mặt phẳng (α) chứa a, mặt phẳng (β) chứa b thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

B. Cho $a\perp b,a\subset(\alpha)$. Mọi mặt phẳng (β) chứa b và vuông góc với a thì $(\beta)\perp(\alpha)$.

C. Cho $a\perp b$. Mọi mặt phẳng chứa b đều vuông góc với a.

D. Cho a,b. Mọi mặt phẳng (α) chứa c trong đó $c\perp a,c\perp b$ thì đều vuông góc với mặt phẳng (a,b).

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} (\beta)\perp a \\ a\subset(\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\beta)\perp(\alpha)$.

Câu 30: Trong các khẳng định sau. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

B. Hình chóp có đáy là tam giác đều là hình chóp đều.

C. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

D. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

Lời giải

Chọn A

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

A. Ba mặt phẳng (ABC), (ABD), (ACD) đôi một vuông góc.

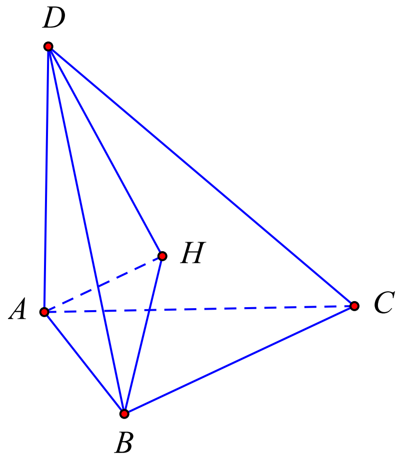
B. Tam giác BCD vuông.

C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD.

D. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.

Lời giải

Chọn B



□ Ta có $\begin{cases} DA \perp AB \\ DA \perp AC \end{cases} \Rightarrow DA \perp (ABC)$.

Mà $DA \subset (ABD) \Rightarrow (ABD) \perp (ABC)$.

Tương tự $(ACD) \perp (ABC)$, $(ACD) \perp (ABD)$ do đó A đúng.

□ Nếu ΔBCD vuông, chẳng hạn $BC \perp BD$ mà $BC \perp DA$

$\Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AB$, điều này không thể xảy ra vì $AB \perp AC$ nên B sai.

□ Kẻ $AH \perp (ABC)$ tại $H \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow BC \perp DH \ (1)$

Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD \Rightarrow CD \perp AB$.

Từ $AH \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp CD$, từ $\begin{cases} CD \perp AB \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp BH \ (2)$

Từ (1) và (2) ta được C đúng.

□ Từ $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AD \end{cases} \Rightarrow BA \perp (ACD) \Rightarrow BA \perp CD$.

Từ $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$, do đó D đúng.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A, cạnh $BC = a$, $AC = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

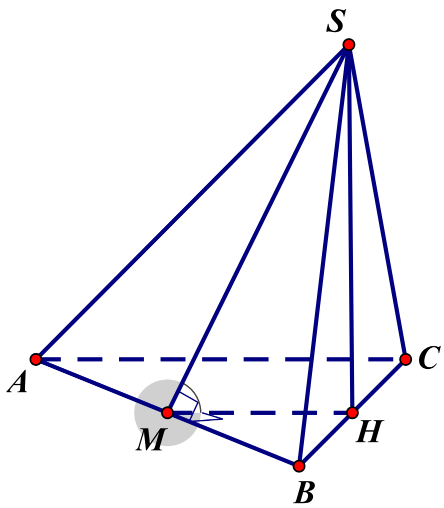
các cạnh bên $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC)

A. $\dfrac{\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{\pi}{4}$. **D.** $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B

Vì $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên hình chiếu của S trùng với H là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy ABC. Nhận xét H là trung điểm BC.



Gọi M là trung điểm AB, nhận xét $AB \perp (SMH)$ nên góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC) là góc $\widehat{SMH}$.

Xét tam giác SBH có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

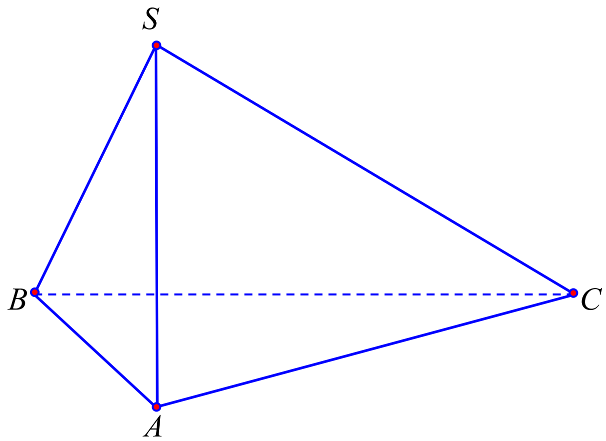
Xét tam giác SMH có $\tan\widehat{M} = \dfrac{SH}{MH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \widehat{M} = 60^\circ$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. 30°. **B.** 150°. **C.** 60°. **D.** 120°.

Lời giải

Chọn D



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right) = \left(\widehat{AB, AC}\right) = \widehat{BAC}$.

Xét ΔABC có $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \dfrac{a^2 + a^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2.a.a} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120°$.

Vậy $\left(\widehat{(SAB),(SAC)}\right) = 120°$.

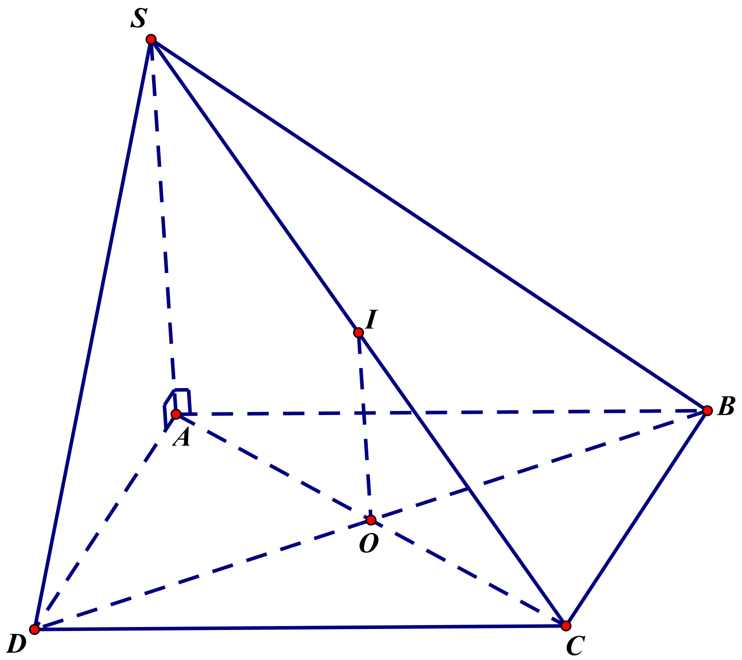
Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC. Khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

A. IO. **B.** IA. **C.** IC. **D.** IB.

Lời giải

Chọn A

Do I là trung điểm của SC và O là trung điểm AC nên $IO // SA$. Do $SA \perp (ABCD)$ nên $IO \perp (ABCD)$, hay khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng IO.



Câu 35: Cho mặt phẳng (P) và hai điểm *A, B* không nằm trong (P). Đặt $d_1 = (A,(P))$ và $d_2 = (B,(P))$. Trong các kết luận sau, kết luận nào đúng?

A. $\frac{d_1}{d_2} = 1$ khi và chỉ khi *AB* song song với (P).

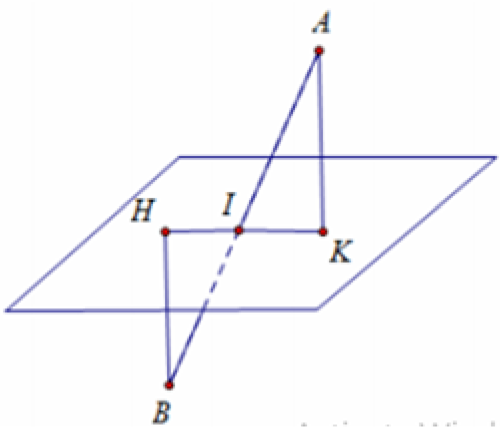
B. $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ khi và chỉ khi đoạn thẳng *AB* cắt (P).

C. Nếu $\frac{d_1}{d_2} \neq 1$ thì đoạn thẳng *AB* cắt (P).

D. Nếu đường thẳng *AB* cắt (P) tại điểm *I* thì $\frac{IA}{IB} = \frac{d_1}{d_2}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $AK \perp (P); BH \perp (P)$

Khi đó theo định lý Talet ta có: $\frac{IA}{IB} = \frac{AK}{BH} = \frac{d_1}{d_2}$

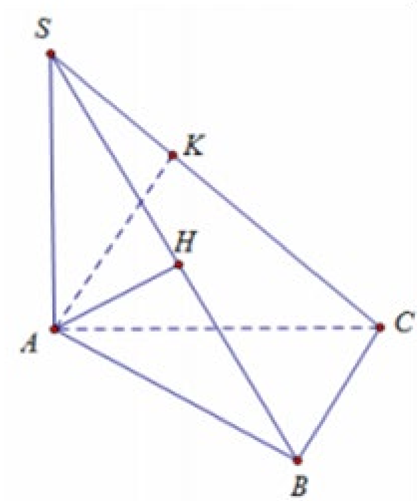
Câu 36: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B, SA* vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi *H* và *K* lần lượt là hình chiếu của *A* lên *SB* và *SC.* Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $d(A,(SBC)) = AH$ **B.** $d(A,(SBC)) = AK$

C. $d(C,(SAB)) = BC$ **D.** $d(S,(ABC)) = SA$

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = BC.$$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$

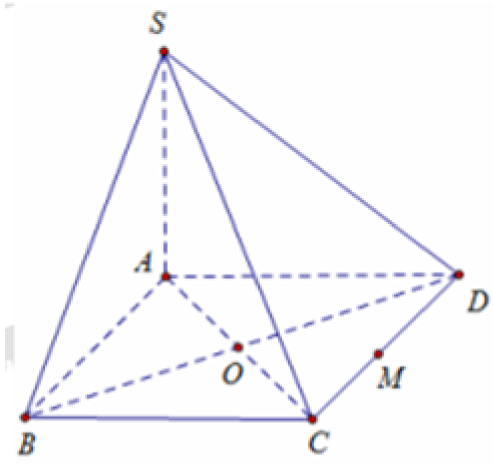
Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow d(S,(ABC)) = SA$.

Câu 37: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Đường thẳng *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi *M* là trung điểm của *CD.* Khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (SAB) nhận giá trị nào sau đây?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** a **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $2a$

Lời giải

Chọn A



Ta có: $AB//CD \Rightarrow d\left(M,\left(SAB\right)\right) = d\left(D,\left(SAB\right)\right)$

Mặt khác $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp \left(SAB\right)$

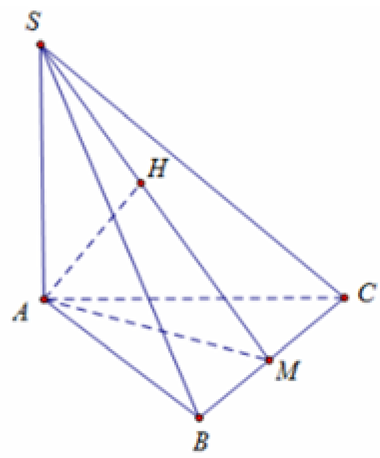
Do vậy $d\left(M,\left(SAB\right)\right) = AD = a$.

Câu 38: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác đều cạnh 2*a*, $SA \perp \left(ABC\right)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi *M* là trung điểm của *BC*, khi đó khoảng cách từ *A* đến đường thẳng *SM* bằng:

A. $a\sqrt{2}$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $a\sqrt{6}$ **D.** $a\sqrt{11}$

Lời giải

Chọn A



Dựng $AH \perp SM \Rightarrow d\left(A,SM\right) = AH; AM = \dfrac{(2a)\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Xét tam giác *SAM* vuông tại *A* ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}$

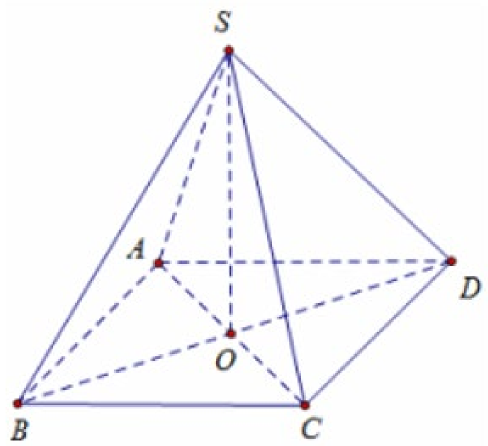
Do đó $d = a\sqrt{2}$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AA' = a$. Khoảng cách giữa AB' và CC':

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ **B.** $\dfrac{a}{2}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $d\left(AB',CC'\right)=d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C,\left(AB\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 40: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *B*, biết $2SA=AC=2a$ và *SA* vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng (SBC) bằng:

A. $\dfrac{4a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} SA\perp BC \\ AB\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(SAB\right)$, kẻ $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp\left(SBC\right)$.

$\Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right)=AH=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 41: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giac vuông tại *B* với $AB=a$, $BC=2a$ và $SA\perp\left(ABC\right)$. Khoảng cách từ *B* đến mặt phẳng (SAC) bằng:

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\dfrac{2a}{5}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ **D.** $\dfrac{a}{5}$

Lời giải

Chọn A

Kẻ $BH\perp AC\left(H\in AC\right)$ mà $SA\perp\left(ABC\right)\Rightarrow SA\perp BH$

$\Rightarrow BH\perp\left(SAC\right)\Rightarrow d\left(B,\left(SAC\right)\right)=BH=\dfrac{AB.BC}{\sqrt{AB^2+BC^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 42: Cho hình chóp *S.ABC* có *SA, SB, SC* đôi một vuông góc nhau và $SA=SB=SC=a$. Khi đó khoảng cách từ *S* đến mặt phẳng (ABC) bằng:

A. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ **B.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ **C.** $\dfrac{a}{2}$ **D.** $\dfrac{a}{3}$

Lời giải

Chọn B

Gọi $h = d\left(S,\left(ABC\right)\right) \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^\circ$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC.

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $AH \perp SC$, khi đó $d\left(A;SC\right) = AH$.

$ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$ đều nên $AC = a$.

Trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{2a.a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Kẻ $OH \perp SC$, khi đó $d\left(O;SC\right)=OH$. Ta có: $\Delta SAC \sim \Delta OHC$ nên:

$\frac{OH}{SA}=\frac{OC}{SC} \Rightarrow OH=\frac{OC}{SC}.SA$.

Mà: $OC=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{6}$.

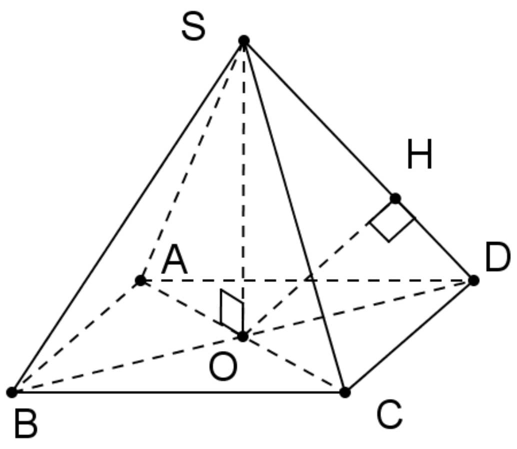
Vậy $OH=\frac{OC}{SC}.SA=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 45: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α. Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:

A. $a\sqrt{2}\cot\alpha$. **B.** $a\sqrt{2}\tan\alpha$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Lời giải

Chọn D



$SO \perp \left(ABCD\right)$, O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Kẻ $OH \perp SD$, khi đó $d\left(O;SD\right)=OH$, $\alpha=\widehat{SDO}$.

Ta có: $OH=OD\sin\alpha=\frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA=3a$, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $2a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một nên $CB \perp SB$.

Kẻ $BH \perp SC$, khi đó $d\left(B;SC\right) = BH$.

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2\sqrt{3}a$.

Trong tam giác vuông SBC ta có:

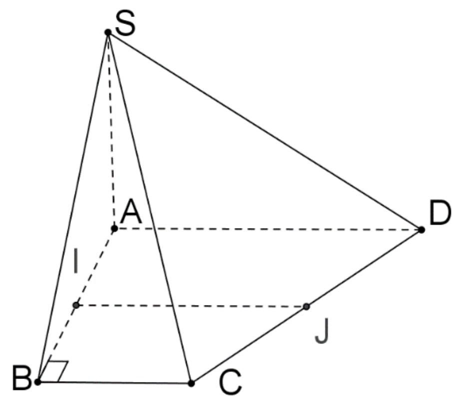
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{SB.BC}{\sqrt{SB^2 + BC^2}} = 2a.$$

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông cạnh $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và $\left(SAD\right)$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: Vì $IJ \,//\, AD$ nên $IJ \,//\, \left(SAD\right) \Rightarrow d\left(IJ;\left(SAD\right)\right) = d\left(\mathrm{I};\left(SAD\right)\right) = IA = \frac{a}{2}$.

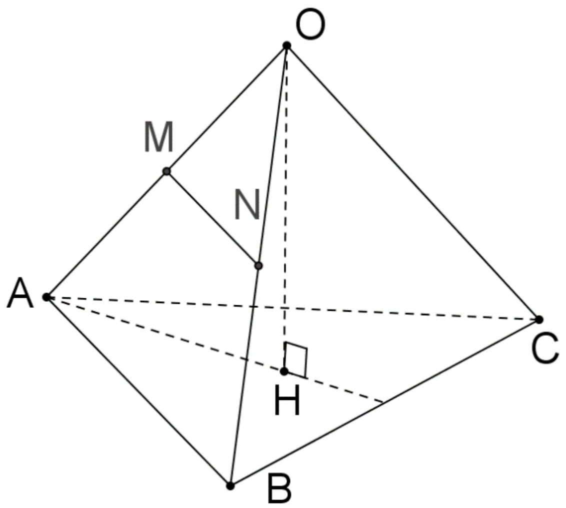
Câu 48: Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Khoảng cách giữa đường thẳng MN và $\left(ABC\right)$ bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Chọn D



Vì M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB nên $MN // AB$ $MN // (ABC)$.

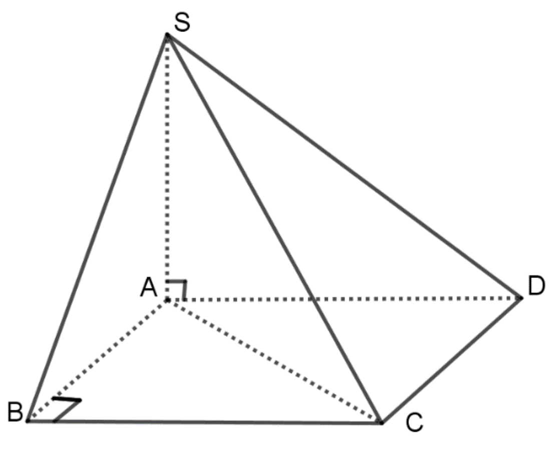
Ta có: $d(MN;(ABC)) = d(M;(ABC)) = \frac{1}{2}OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $BC // (SAD)$

$\Rightarrow d(BC;SD) = d(BC;(SAD)) = d(B;(SAD))$.

Mà $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow d(B;(SAD)) = AB$.

Ta có: $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5a^2 - 2a^2} = \sqrt{3}a$.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $d\left(BB';AC\right)=d\left(BB';\left(ACC'A'\right)\right)=\dfrac{1}{2}DB=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $d\left(AA';BD'\right)=d\left(AA';\left(DBB'D'\right)\right)=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 52: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, DC, $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $\left(MNP\right)$ và $\left(ACC'\right)$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a}{4}$. **C.** $\dfrac{a}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

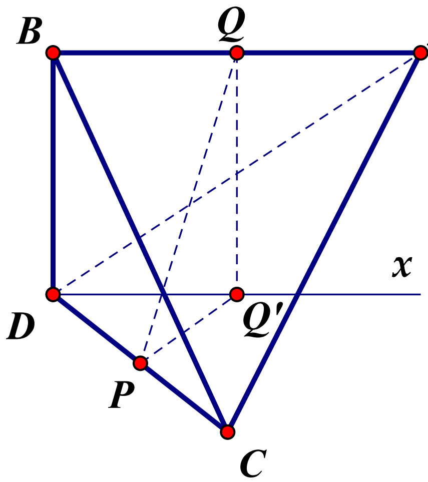
Chọn D

Ta có: $(MNP)//(ACA') \Rightarrow d((MNP);(ACA')) = d(\mathrm{P};(ACA')) = \frac{1}{2}OD' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

B. TỰ LUẬN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có BD vuông góc với AB và CD. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của CD và AB thỏa mãn $BD:CD:PQ:AB = 3:4:5:6$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Tính $\cos\varphi$

Lời giải



Do $BD:CD:PQ:AB = 3:4:5:6$ nên ta chọn $\begin{cases} BD = 3 \\ CD = 4 \\ PQ = 5 \\ AB = 6 \end{cases}$

Dựng $Dx//AB \Rightarrow Dx \perp BD \Leftrightarrow BD \perp (CDx)$

Gọi Q' là hình chiếu của Q lên Dx $\Rightarrow QQ' \perp PQ'$

$\Rightarrow \varphi = (AB;CD) = (Dx;DC)$

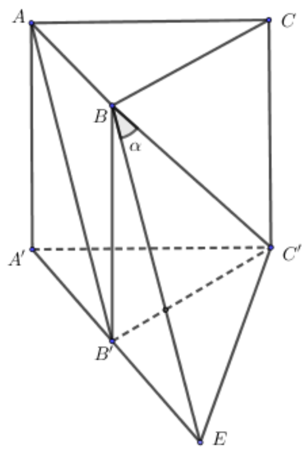
Ta có $PQ' = \sqrt{PQ^2 - QQ'^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

Xét $\Delta DPQ'$: $\cos\widehat{PDQ'} = \frac{DP^2 + DQ'^2 - PQ'^2}{2DP.DQ'} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2.2.3} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \cos\varphi = \cos\left(180^o - \widehat{PDQ'}\right) = -\cos\widehat{PDQ'} = \frac{1}{4}$

Câu 2: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng của A' qua B'.

Ta có $AB // B'E$ và $AB = B'E = a$ suy ra $ABEB'$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AB' // BE \Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = \widehat{(BE, BC')} = \widehat{EBC'}$.

Xét tam giác $BB'E$ có $BB' \perp B'E \Rightarrow \Delta BB'E$ vuông tại B'.

$\Rightarrow BE = \sqrt{BB'^2 + B'E^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $BB'C'$ có $BB' \perp B'C' \Rightarrow \Delta BB'C'$ vuông tại B'.

$\Rightarrow BC' = \sqrt{BB'^2 + B'C'^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác $A'C'E$ có $C'B' = A'B' = B'E = \frac{1}{2}A'E$.

$\Rightarrow \Delta A'C'E$ vuông tại $C' \Rightarrow C'E = \sqrt{A'E^2 - A'C'^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra tam giác BEC' có $BE = C'E = BC' = a\sqrt{3} \Rightarrow \Delta BEC'$ là tam giác đều.

$\Rightarrow \widehat{EBC'} = 60° \Rightarrow \widehat{(AB', BC')} = 60°$.

Vậy góc giữa đường thẳng AB' và BC' bằng $60°$.

Câu 3: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác vuông cân tại B với trọng tâm G, cạnh bên SA tạo với đáy (ABC) một góc 30^0. Biết hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SA và BC.

Lời giải

Vì hai mặt phẳng (SBG) và (SCG) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên

$SG \perp (ABC)$ do đó góc giữa SA tạo với đáy (ABC) là góc $\widehat{SAG}$ nên $\widehat{SAG} = 30^0$.

Gọi D sao cho $ABCD$ là hình bình hành do ΔABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông. Khi đó góc giữa SA và BC là góc giữa SA và AD.

Giả sử hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$AG = CG = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3}\sqrt{CB^2 + AM^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$; $DG = \frac{2}{3}DB = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$. Tam giác SAG vuông tại

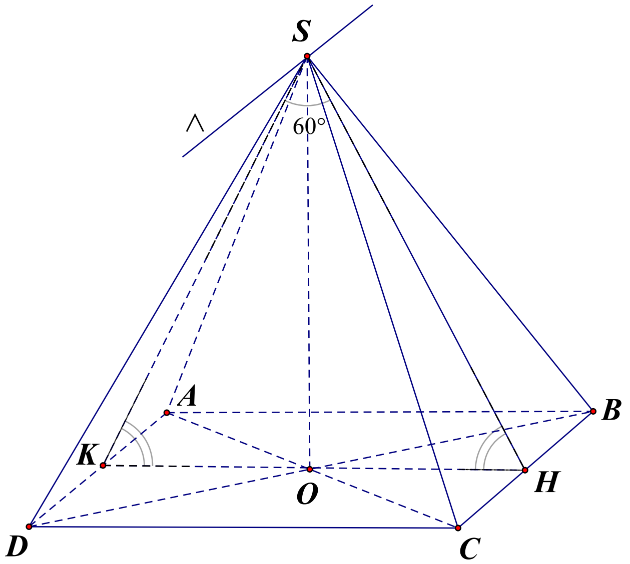
G có $SG = AG.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{9}$ và $SA = \dfrac{AG}{\cos 30^0} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{9}$. Tam giác SGD vuông tại G ta có

$SD^2 = SG^2 + GD^2 = \dfrac{29}{27}a^2$. Tam giác SAD có $\cos\widehat{SAD} = \dfrac{SA^2 + AD^2 - SD^2}{2SA.AD} = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{SA,BC}\right) = \left|\cos\widehat{SAD}\right| = \dfrac{\sqrt{15}}{10}$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều, biết hai mặt bên đối diện diện tạo với nhau góc $60°$, tính góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

Lời giải



Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm S và song song AD và BC $\Rightarrow (SAD)\cap(SBC) = \Delta$.

Gọi H và K lần lượt là trung điểm cạnh BC và AD, do ΔSBC và ΔSAD cân đỉnh S nên:

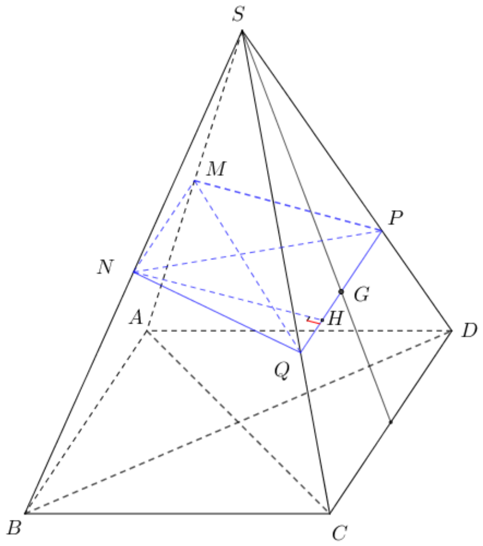
$$\left.\begin{array}{l} SH \perp BC \Rightarrow SH \perp \Delta \\ SK \perp AD \Rightarrow SK \perp \Delta \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{HSK} = \left(\widehat{(SBC),(SAD)}\right) = 60°$$

Mặt khác: $\Delta SBC = \Delta SAD \Rightarrow SK = SH$

Từ và $\Rightarrow \Delta SHK$ đều $\Rightarrow \widehat{SHK} = \widehat{SKH} = 60° \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABCD)}\right) = 60°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng $12a$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SA,SB và G là trọng tâm tam giác SCD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MNG).

Lời giải



Qua G kẻ đường thẳng song song với CD cắt SC, SD lần lượt tại Q, P.

Thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (MNG) là hình thang cân $NMPQ$.

Ta có $MN = \frac{1}{2}AB = 6a,\ PQ = \frac{2}{3}CD = 8a$.

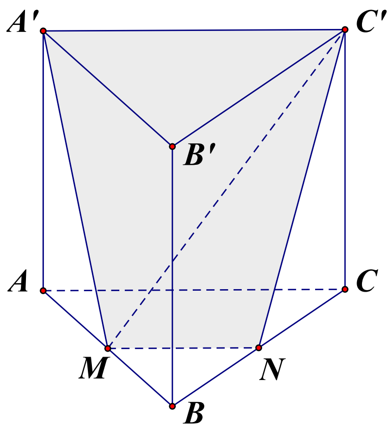
$NQ = 2\sqrt{13}a$.

$NH = \sqrt{NQ^2 - QH^2} = \sqrt{51}a.$

Vậy $S_{NMPQ} = \frac{NM + PQ}{2} \times NH = 7\sqrt{51}a^2.$

Câu 6: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên $a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm AB. Tính diện tích thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$.

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC)$ và ΔABC đều cạnh a.

Gọi N là trung điểm BC suy ra $MN // AC // A'C'$ và $MN = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$.

Vì $MN // A'C'$ nên A', C', M, N đồng phẳng do đó thiết diện cắt bởi lăng trụ đã cho bởi mặt phẳng $(A'C'M)$ là hình thang cân $NMA'C'$.

GV: TRẦN ĐÌNH CỪ – 0834332133

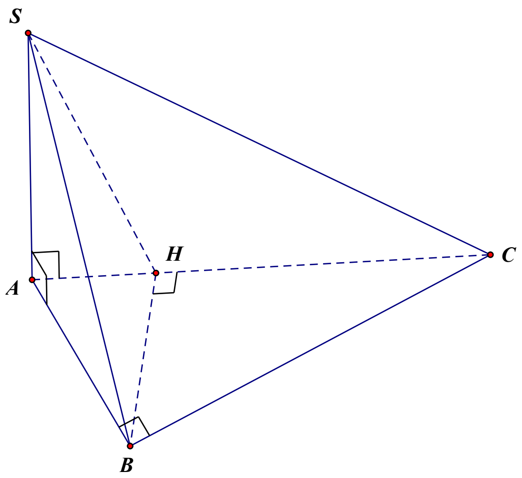
Lại có $C'N = A'M = \sqrt{A'A^2 + AM^2} = \dfrac{3}{2}a$ nên đường cao của hình thang cân $NMA'C'$ là

$$h = \sqrt{A'M^2 - \left(\dfrac{A'C' - MN}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{35}}{4}a$$

Do đó diện tích thiết diện là $S = \dfrac{1}{2}\left(A'C' + MN\right).h = \dfrac{3\sqrt{35}}{16}a^2$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a$, $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAC) và (SBC). Tính $\cos\varphi$

Lời giải



+) Có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

+) Kẻ $BH \perp AC$ tại H $\Rightarrow BH \perp (SAC)$

+) Trong tam giác ABC có $CH.CA = CB^2 \Rightarrow CH = \dfrac{CB^2}{CA} = \dfrac{3a}{2}$.

+) $\Rightarrow S_{\Delta SHC} = \dfrac{1}{2}SA.CH = \dfrac{1}{2}.2a.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$.

+) Theo giả thiết $\begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ BC \perp BA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$.

$\Rightarrow S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}SB.BC = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{5}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{2}$.

+) ΔSHC là hình chiếu của ΔSBC trên mặt phẳng (SAC).

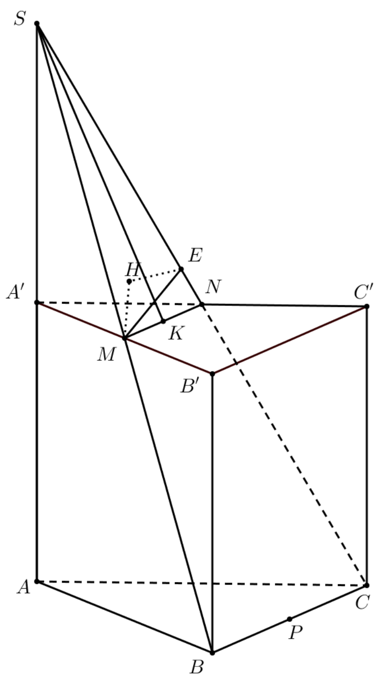
$\Rightarrow S_{\Delta SHC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi \quad \left(\varphi = \widehat{\left((SAC);(SBC)\right)}\right)$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{S_{\Delta SHC}}{S_{\Delta SBC}} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{\dfrac{a^2\sqrt{15}}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 8: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}, BB' = 2$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của $A'B', A'C'$ và BC. Nếu gọi α là độ lớn của góc của hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') thì $cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133

Lời giải



Dễ thấy (MNP) chính là $(MNCB)$ và (ACC') chính là $(ACC'A')$; giao tuyến của (MNP) và $(ACC'A')$ là (CP).

Dễ chứng minh được theo định lý Talet là AA', MB, NC đồng quy tại một điểm S.

Hạ $ME \perp SC$, $MH \perp (ACC'A')$ khi đó $\alpha = \widehat{MEH}$. $\sin\alpha = \dfrac{MH}{ME}$.

Gọi $AB = a; AA' = b$

Có $MH = d\left(M;(ACC'A')\right) = \dfrac{1}{2}d\left(B';(ACC'A')\right) = \dfrac{1}{2}BN = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{2}$

Có $SM = SN = MB = \sqrt{BB'^2 + B'M^2} = \sqrt{b^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{7}$; $MN = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2} = \sqrt{3}$

K là trung điểm MN thì $SK = \sqrt{SM^2 - MK^2} = \sqrt{7 - \dfrac{3}{4}} = \dfrac{5}{2}$

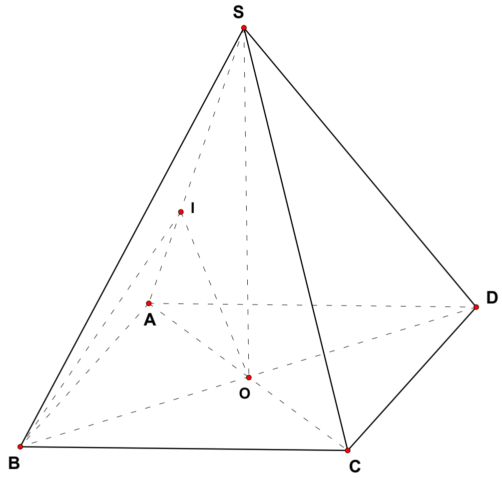
Xét tam giác SMN thì $ME.SN = SK.MN$ nên $ME = \dfrac{5}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{21}}{14}$

Vậy $\sin\alpha = \dfrac{3}{2} : \dfrac{5\sqrt{21}}{14} = \dfrac{7\sqrt{3}}{5\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ hay $\cos\alpha = \dfrac{2}{5}$.

Câu 9: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và cạnh bên bằng $2\sqrt{2}$. Gọi α là góc của mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SAB). Tính $\cos\alpha$.

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. $SA = (SAC) \cap (SAB)$, $BO \perp (SAC)$.

Kẻ $OI \perp SA \Rightarrow \alpha = \widehat{((SAC),(SAB))} = \widehat{BIO}$.

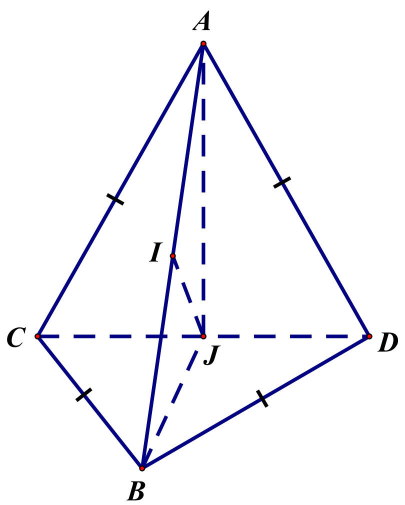
$OA = OB = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{8-2} = \sqrt{6}$.

$OI = \dfrac{SO.OA}{SA} = \dfrac{\sqrt{6}.\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$; $BI = \sqrt{OB^2 + OI^2} = \sqrt{2 + \dfrac{6}{4}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Vậy $\cos\alpha = \dfrac{OI}{BI} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 10: Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Tìm giá trị của x để hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc nhau.

Lời giải



Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CD. Vì J là trung điểm CD và $AC = AD$ nên $AJ \perp CD$. Do $(ACD) \perp (BCD) \Rightarrow AJ \perp (BCD)$.

Ta thấy ΔAJD vuông tại J nên $AJ = \sqrt{a^2 - x^2}$.

Mặt khác $AC = AD = BC = BD = a$ nên ΔAJB vuông cân tại J.

Suy ra: $AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

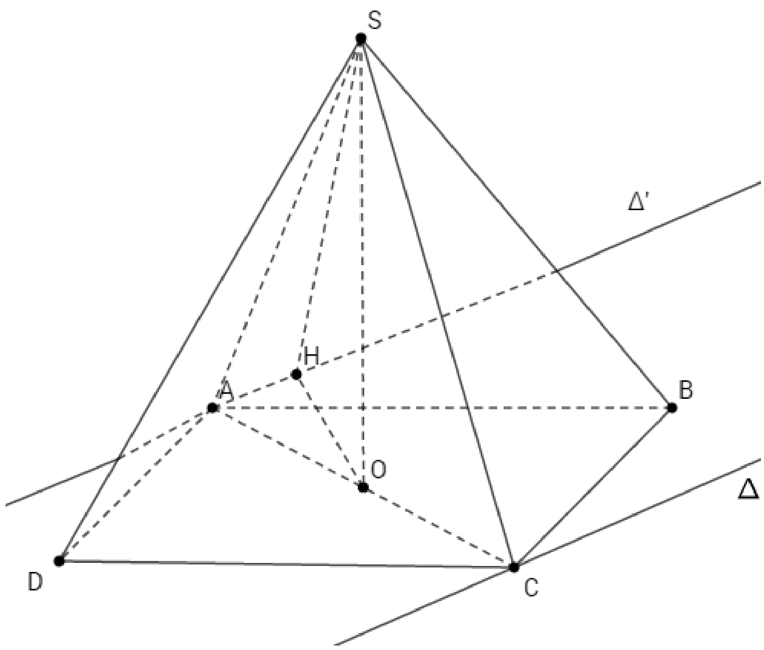
Do $IA = IB$, ΔAJB vuông tại J nên $IJ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)}$.

Vì CI và DI vuông góc với AB nên $(ABC) \perp (ABD)$ suy ra $\widehat{CID} = 90°$.

Ta có $IJ = \frac{1}{2}CD \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - x^2)} = \frac{1}{2}2x \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a$, O là trung điểm AC và $SO = b$. Gọi (Δ) là đường thẳng đi qua C, (Δ) chứa trong mặt phẳng $(ABCD)$ và khoảng cách từ O đến (Δ) là $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. Giá trị lượng giác $\cos((SA),(\Delta))$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi (Δ') là đường thẳng đi qua A và song song với (Δ). Hạ $OH \perp (\Delta')(H \in (\Delta'))$. Do O là trung điểm của AC và $(\Delta)//(\Delta')$ nên $d(O,(\Delta')) = d(O,(\Delta))$ hay $OH = \frac{a\sqrt{14}}{6}$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

Do $AH \perp OH$ và $AH \perp SO$ nên, suy ra $AH \perp SH$.

Do $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$, suy ra $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông AHO ta có $OA^2 = OH^2 + AH^2$, suy ra

$$AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{14}}{6}\right)^2} = \frac{a}{3}.$$

Áp dụng Định lí Pitago vào tam giác vuông SAO ta có $SA^2 = OA^2 + SO^2$, suy ra

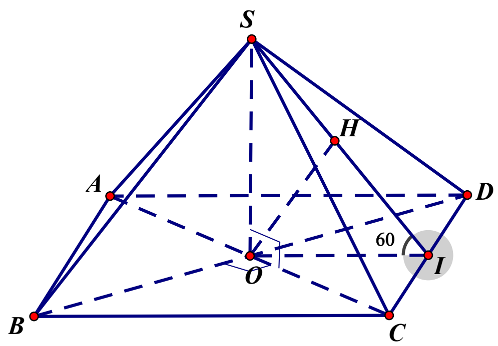
$$SA = \sqrt{OA^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + b^2} = \frac{\sqrt{2a^2+4b^2}}{2}.$$

Do $(\Delta)//(\Delta')$ nên $\cos\left((SA),(\Delta)\right) = \cos\left((SA),(\Delta')\right) = \cos\widehat{SAH} = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{2a}{3\sqrt{2a^2+4b^2}}$.

Câu 12: Cho hình chóp đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy là $60°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải

* Ta có: $\dfrac{d\left(B;(SCD)\right)}{d\left(O;(SCD)\right)} = \dfrac{BD}{OD} = 2 \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = 2.d\left(O;(SCD)\right) = 2OH$. Trong đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SCD).



* Gọi I là trung điểm của CD ta có:

$$\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD) = CD \\ SI \perp CD \\ OI \perp CD\end{cases} \Rightarrow \left((SCD);(ABCD)\right) = (OI;SI) = \widehat{SIO} = 60°.$$

Xét tam giác SOI vuông tại O ta có: $SO = OI.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

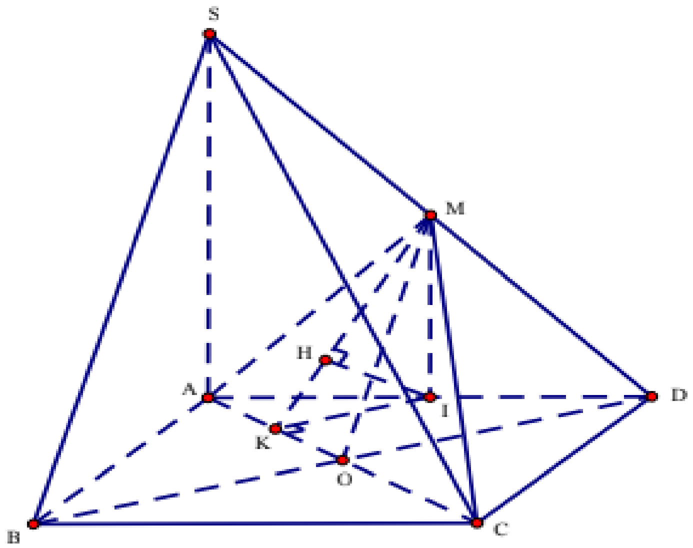
Xét ΔSOI, ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OI^2} + \dfrac{1}{OS^2} = \dfrac{4}{a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{16}{3a^2}$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính khoảng cách d giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ACM)

Lời giải

GV: TRẦN ĐÌNH CƯ – 0834332133



Gọi O là tâm hình vuông. Ta có: $MO//SB \Rightarrow SB//(ACM)$

$\Rightarrow d(SB,(ACM)) = d(B,(ACM)) = d(D,(ACM))$

Gọi I là trung điểm AD $\Rightarrow \begin{cases} MI//SA \Rightarrow MI \perp (ABCD) \\ d(D,(ACM)) = 2d(I,(ACM)) \end{cases}$

Trong $(ABCD)$ kẻ $IK \perp AC$ tại K

Trong (MIK) kẻ $IH \perp MK$ tại H

Ta có: $AC \perp MI, AC \perp IK \Rightarrow AC \perp (MIK) \Rightarrow AC \perp IH (2)$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow IH \perp (ACM) \Rightarrow d(I,(ACM)) = IH$

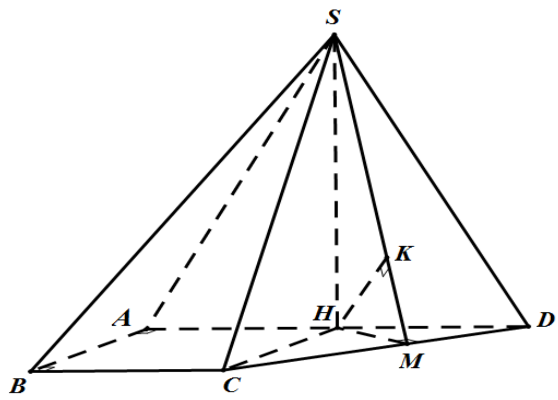
Trong tam giác MIK ta có: $\mathrm{IH} = \dfrac{\mathrm{IM.IK}}{\sqrt{\mathrm{IM}^2 + \mathrm{IK}^2}}$

Biết $MI = \dfrac{SA}{2} = a, IK = \dfrac{OD}{2} = \dfrac{BD}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow IH = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{8}}} = \dfrac{a}{3}$

Vậy: $d(SB,(ACM)) = \dfrac{2a}{3}$

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của AD và $SH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD, K là hình chiếu của H lên SM

Tam giác HCD vuông tại H có $CD = a\sqrt{2}$ và $HM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

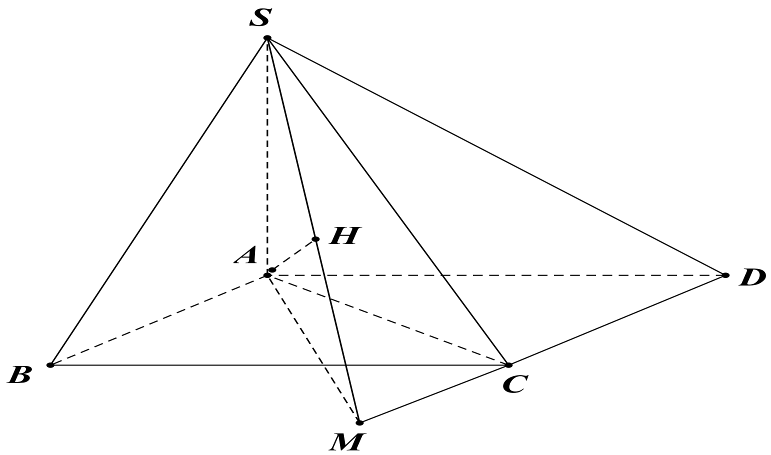
Ta có $BH//CD \Rightarrow d\left(B,(SCD)\right) = d\left(H,(SCD)\right) = HK$

Tam giác SHM vuông tại H có $HK = \frac{HM.HS}{\sqrt{HM^2 + HS^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Vậy $d\left(B,(SCD)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách tứ B đến (SCD) bằng?

Lời giải



Ta có $AB//CD \Rightarrow d\left(B;(SCD)\right) = d\left(\text{A};(SCD)\right)$.

Kẽ $MA \perp CD\left(M \in CD\right)$,kẽ $AH \perp SM \Rightarrow SH \perp (SCD) \Rightarrow d\left(A,(SCD)\right) = SH$.

$SA = a$; $AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{S_{ABCD}}{CD} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{21}}{7}a$