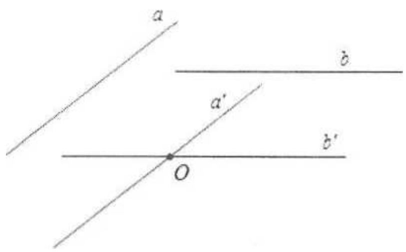
CHỦ ĐỀ 5: BÀI TOÁN VỀ GÓC

Vấn đề 1: GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

1. Định nghĩa góc giữa hai đường thẳng



Trong không gian cho 2 đường thẳng a, b bất kỳ.

Từ một điểm O nào đó ta vẽ 2 đường thẳng a', b' lần lượt song song với a và b. Ta nhận thấy rằng khi điểm O thay đổi thì góc giữa 2 đường thẳng a' và b' không thay đổi.

Do đó ta có định nghĩa:

Định nghĩa: Góc giữa 2 đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa 2 đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

2. Cách xác định góc giữa hai đường thẳng

Để xác định góc giữa 2 đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

Nếu $\vec{u}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng a và $\vec{v}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng b và $\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\alpha$

thì góc giữa 2 đường thẳng a và b bằng α nếu $0\le\alpha\le 90^\circ$ và bằng $180^\circ-\alpha$ nếu $90^\circ<\alpha\le 180^\circ$. Nếu 2 đường thẳng a và b song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0°. Góc giữa 2 đường thẳng là góc có số đo $0\le\alpha\le 90^\circ$.

3. Phương pháp tính góc giữa hai đường thẳng

Để tính góc giữa hai đường thẳng trong không gian chúng ta cần nhớ các công thức sau:

■ Định lý hàm số cosin trong tam giác ABC: $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB.AC}$

Tương tự ta có: $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2.BA.BC}$ và $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{CA^2+CB^2-AB^2}{2.CA.CB}$

Chú ý: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

■ Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD ta tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ dựa vào công thức

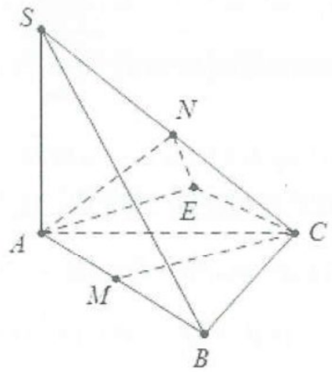
$\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}\Rightarrow\cos\left(AB;CD\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}$ từ đó suy ra góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA\perp\left(ABC\right)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AN và CM.

Lời giải

Cách 1: Dựng hình bình hành AMCE suy ra $AM=CE=\dfrac{a}{2}$.

Khi đó $AE//CM \Rightarrow \left(\widehat{AE;CM}\right) = \left(\widehat{AN;AE}\right) = \varphi.$



Mặt khác $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow$ độ dài đường trung tuyến AN là $AN = \frac{SC}{2} = a.AE = CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Do ΔABC đều nên $CM \perp AM \Rightarrow$ AMCE là hình chữ nhật.

Khi đó $CE \perp AE$ mà $CE \perp SA \Rightarrow CE \perp (SAE) \Rightarrow CE \perp SE.$

ΔSEC vuông tại E có đường trung tuyến $EN = \frac{1}{2}SC = a.$

Ta có: $\cos\widehat{NAE} = \frac{AN^2 + AE^2 - NE^2}{2.AN.AE} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}\right); \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$

Khi đó $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}AC^2 = \frac{1}{4}a^2\cos 60° - \frac{a^2}{2} = \frac{-3a^2}{8}.$

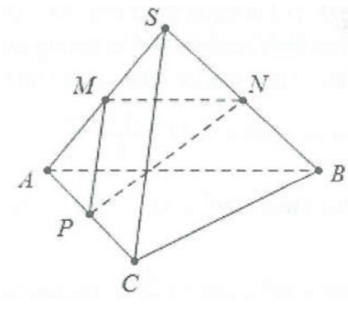
Lại có: $AN = \frac{SC}{2} = a; CM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\left|\frac{-3a^2}{8}\right|}{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Bình luận: Dựa vào hai cách làm trên ta thấy rằng, trong một số trường hợp, việc sử dụng công cụ vectơ để tính góc giữa hai đường thẳng giúp bài toán trở nên dễ ràng hơn rất nhiều!.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC = AB = a; AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AB.

Lời giải

Cách 1: Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB và AC. Khi đó $\begin{cases} MP//SC \\ N//AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{SC;AB}\right) = \left(\widehat{MP;MN}\right).$



Ta có: $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}; MP = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}.$

Mặt khác ΔSAC vuông tại S $\Rightarrow SP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

$BP^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$

Suy ra $PN^2 = \frac{PS^2 + PB^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Khi đó $\cos\widehat{NMP} = \dfrac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2.MN.MP} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120° \Rightarrow \varphi = \left(\widehat{SC;AB}\right) = 60°.$

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{SC} = \left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right).\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$$= \frac{1}{2}\left(SB^2 + SC^2 - AC^2\right) - \frac{1}{2}\left(SA^2 + SC^2 - AB^2\right) = -\frac{a^2}{2}.$$

Suy ra $\cos\left(SC;AB\right) = \dfrac{\left|\dfrac{-a^2}{2}\right|}{a.a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \left(SC;AB\right) = 60°.$

Ví dụ 3: Cho tứ diện ABCD có $AB = x_1, CD = x_2; AC = y_1, BD = y_2, BC = z_1, AD = z_2$. Tính góc giữa hai đường thẳng BC và AD.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}$

$$= \frac{1}{2}\left(CB^2 + CD^2 - BD^2\right) - \frac{1}{2}\left(CB^2 + CA^2 - AB^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2\right).$$

Khi đó $\cos\left(BC;DA\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}\right|}{BC.DA} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2z_1z_2}.$

Đặc biệt: Nếu $AB = CD = x; AC = BD = y$ và $BC = AD = z$ ta đặt $\begin{cases} \alpha = \left(\widehat{BC;AD}\right) \\ \beta = \left(\widehat{AB;CD}\right) \\ \gamma = \left(\widehat{AC;BD}\right) \end{cases}$ thì ta có:

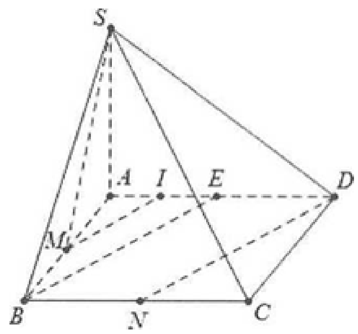
$$\cos\alpha = \frac{x^2 - y^2}{z^2}; \cos\beta = \frac{\left|y^2 - z^2\right|}{x^2}; \cos\gamma = \frac{z^2 - z^2}{y^2}.$$

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh 2a, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm của AB và N là trung điểm của BC. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng SM và DN .

Lời giải

■ **Cách 1:** Do $SA \perp \left(ABCD\right)$.

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$. Gọi E là trung điểm của AD và I là trung điểm của AE. Dễ thấy BNDE là hình bình hành và MI là đường trung bình trong tam giác ABE. Khi đó $DN // BE // MI$.



Tacó: $AM = a; AI = \frac{AE}{2} = \frac{a}{2}$.

Mặt khác: $SM^2 = SA^2 + AM^2 = 2a^2; SI^2 = \frac{5a^2}{4}$.

$MI = AI^2 + AM^2 = \frac{5a^2}{4}$. Do vậy $\cos\widehat{SMI} = \frac{SM^2 + MI^2 - SI^2}{2.SM.MI} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \cos(\widehat{SM;DN})$.

■ **Cách 2:** Ta có: $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{SM}.\left(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SD}\right) = \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{SD}$

$= \frac{1}{2}\left(SM^2 + SN^2 - MN^2\right) - \frac{1}{2}\left(SM^2 + SD^2 - MD^2\right)$

Mặt khác: $SN^2 = SA^2 + AN^2 = SA^2 + AB^2 + BN^2 = 6a^2, MN = \frac{AC}{2} = a\sqrt{2}, SD^2 = 5a^2, MD^2 = 5a^2$.

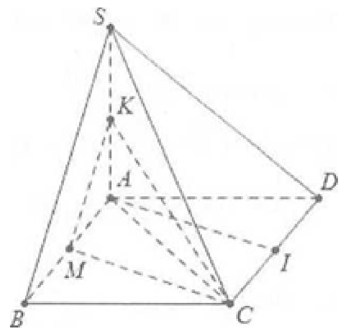
Do đó $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN} = 2a^2 \Rightarrow \cos\left(SM; DN\right) = \frac{\left|2a^2\right|}{SM.DN} = \frac{2a^2}{a\sqrt{2}.a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB = a; AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp \left(ABCD\right)$ và SA=2a.

a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng BC và SD.

b) Gọi I là trung điểm của CD. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI.

Lời giải



a) Do $BC // AD \Rightarrow (\widehat{SD;BC}) = (\widehat{SD;AD}) = \widehat{SDA}$

ΔSAD vuông tại A $\Rightarrow \cos\widehat{SDA} = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + SA^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và SA thì MK là đường trung bình trong tam giác SAB.

Khi đó $MK // SB$, mặt khác $MC // AI$.

Suy ra $(\widehat{SB;AI}) = (\widehat{MK;CM})$.

Ta có: $MK = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{3a}{2}$; $KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = 2a$.

Khi đó $\cos\widehat{KMC} = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2.KM.MC} = -\frac{1}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\left(\widehat{SB;AI}\right) = \frac{1}{3\sqrt{5}}$.

Cách khác: Ta có: $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{SB}.\left(\overrightarrow{SI} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SI} - \overrightarrow{SB}.\overrightarrow{SA}$

$= \frac{1}{2}\left(SB^2 + SI^2 - IB^2\right) - \frac{1}{2}\left(SB^2 + SA^2 - AB^2\right)$

Do $SB^2 = 5a^2; SI^2 = SA^2 + AD^2 + DI^2 = \dfrac{25a^2}{4}; AI = \sqrt{AD^2 + DI^2} = \dfrac{3a}{2} = IB.$

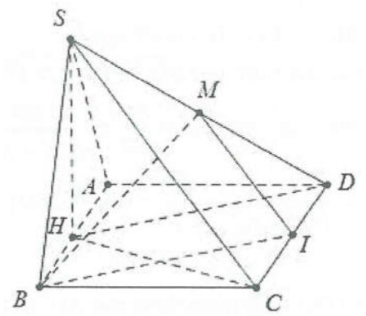
Suy ra $\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AI} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow \cos(SB; AI) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SB}.\overrightarrow{AI}\right|}{SB.AI} = \dfrac{\frac{a^2}{2}}{a\sqrt{5}.\frac{3a}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}.$

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng SC tạo với đáy một góc $30°$. Tính cosin góc giữa

a) SD và BC.

b) DH và SC, với H là chân đường cao hạ từ S xuống mặt đáy (ABCD).

Lời giải



a) Do $AB = BC = a$, $\widehat{ABC} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh a.

Gọi H là trung điểm của AB, do tam giác SAB cân tại S nên $SH \perp AB$.

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$

ΔABC đều nên $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, \left(\widehat{SC;(ABC)}\right) = \widehat{SCH} = 30°$

Ta có: $SH = HC \tan 30° = \dfrac{a}{2}.$

Do $\widehat{ABC} = 60° \Rightarrow \widehat{BAD} = 120° \Rightarrow HD = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH.AD\cos 120°} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}.$

Suy ra $SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = a\sqrt{2}$.

Mặt khác $AD // BC \Rightarrow \left(\widehat{BC;SD}\right) = \left(\widehat{AD;SD}\right)$, $\cos\widehat{SDA} = \dfrac{DS^2 + DA^2 - SA^2}{2.DS.DA} = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}.$

Do vậy $\cos\left(\widehat{BC;SD}\right) = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}.$

b) Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{SC}.\left(\overrightarrow{SH} - \overrightarrow{SD}\right) = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SH} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SD}$

$= \dfrac{1}{2}\left(SH^2 + SC^2 - HC^2\right) - \dfrac{1}{2}\left(SC^2 + SD^2 - CD^2\right) = -\dfrac{3a^2}{4}$

Mặt khác: $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = a \Rightarrow \cos(SC; DH) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SC}; \overrightarrow{DH}\right|}{SC.DH} = \dfrac{\frac{3a^2}{4}}{a.\frac{a\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}.$

Cách khác: Gọi I là trung điểm của CD $\Rightarrow \begin{cases} DH//BI \\ DH = BI = \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases}$, gọi M là trung điểm của SD

$\Rightarrow \begin{cases} MI//SC \\ MI = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a}{2} \end{cases}$. Lại có: $BD = a\sqrt{3}$; $SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $BM^2 = \dfrac{BD^2 + BS^2}{2} - \dfrac{SD^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4} \Rightarrow \cos\widehat{MIB} = \dfrac{MI^2 + IB^2 - MB^2}{2.IM.IB} = \dfrac{3\sqrt{17}}{14}$.

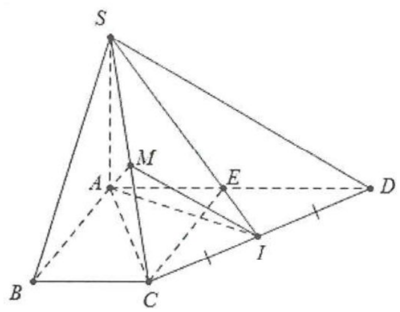
Suy ra $\cos\left(\widehat{DH;SC}\right) = \dfrac{3\sqrt{17}}{14}$.

Ví dụ 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc giữa:

a) BC và SD.

b) AI và SD với I là trung điểm của CD.

Lời giải



a) Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SC;(ABC)}\right) = \widehat{SCA} = 60°$.

Khi đó $SA = AC\tan 60° = a\sqrt{6}$.

Do $AD//BC \Rightarrow \left(\widehat{BC;SD}\right) = \left(\widehat{AD;SD}\right)$.

Mặt khác $\cos\widehat{ADS} = \dfrac{AD}{SD} = \dfrac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}}$

$= \dfrac{2a}{\sqrt{6a^2 + 4a^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5} = \cos\left(\widehat{BC;SD}\right)$.

b) Gọi E là trung điểm của $AD \Rightarrow AE = DE = BC = a \Rightarrow$ ABCE là hình vuông cạnh a.

Do $CE = \dfrac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Ta có: $CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow ID = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{SD} = \left(\overrightarrow{SI} - \overrightarrow{SA}\right).\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SI}.\overrightarrow{SD} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{2}\left(SI^2 + SD^2 - DI^2\right) - \dfrac{1}{2}\left(SA^2 + SD^2 - AD^2\right)$

Trong đó $AI^2 = AC^2 + CI^2 = \dfrac{5a^2}{2} \Rightarrow SI^2 = SA^2 + AI^2 = \dfrac{17a^2}{2}$.

Do đó $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{SD} = 3a^2 \Rightarrow \cos\left(AI;SD\right) = \dfrac{3a^2}{AI.SD} = \dfrac{3a^2}{a\sqrt{10}} = \dfrac{3}{5}.$

Cách khác: Gọi M là trung điểm của SC $\Rightarrow \begin{cases} MI//SD \\ MI = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2} \end{cases}, AI = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}, AM = \dfrac{SC}{2} = a\sqrt{2}.$

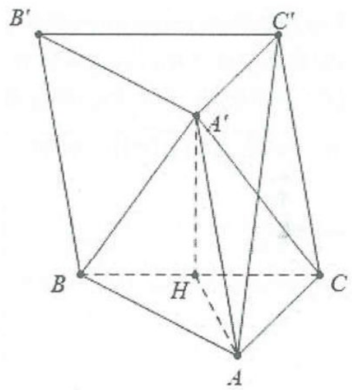
Khi đó $\widehat{MIA} = \dfrac{IM^2 + IA^2 - AM^2}{2.IM.IA} = \dfrac{3}{5}.$

Ví dụ 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của điểm A' xuống mặt đáy (ABC) trung với trung điểm của BC. Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc $60°$.

a) Tính tan góc tạo bởi $B'C'$ và $A'C$.

b) Cosin góc tạo bởi CC' và AB.

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có: $BC//B'C' \Rightarrow \left(\widehat{B'C';A'C}\right) = \left(\widehat{BC;A'C}\right) = \widehat{A'CH}.$

Mặt khác $A'H \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{AA';(ABC)}\right) = \widehat{AA'H} = 60°.$

$AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = AH\tan 60° = \dfrac{3a}{2}.$

Xét tam giác vuông $A'HC$ ta có: $\tan\widehat{A'CH} = \dfrac{A'H}{HC} = 3.$

Vậy $\left(\widehat{BC';A'C}\right) = 3.$

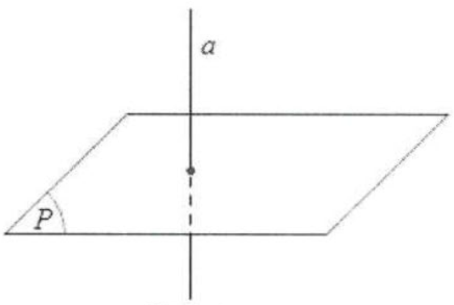
b) Do $CC'//AA' \Rightarrow \widehat{(CC';AB)} = \widehat{(AA';AB)}$

Ta có: $A'A = \sqrt{AH^2 + HA^2} = a\sqrt{3}.$

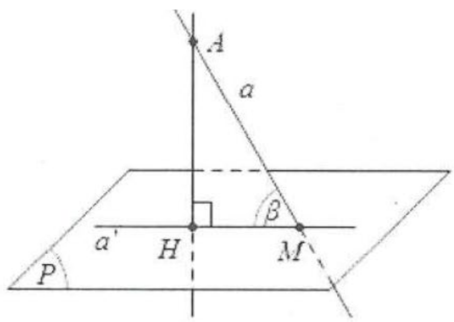
$A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos\widehat{A'AB} = \dfrac{AA'^2 + AB^2 - A'B^2}{2.AA'.AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

Vậy $\cos\left(CC';AB\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

Vấn đề 2: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



Hình 1.



Hình 2.

■ **Định nghĩa:** Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° (hình 1).

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) (hình 2).

Chú ý: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng không vượt quá 90°.

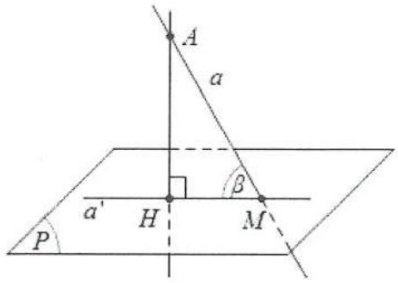
■ **Phương pháp giải:**

Sử dụng định nghĩa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Cách tìm hình chiếu a' của a trên mặt phẳng (P) ta có thể làm như sau:

Tìm giao điểm $M = a \cap (P)$.

Tìm một điểm A tùy ý trên đường thẳng a $(A \neq M)$ và xác định hình chiếu vuông góc H của A trên mặt phẳng (P). Khi đó, a' là đường thẳng đi qua hai điểm A và M. Ta có: $\beta = \widehat{(a;(P))} = \widehat{AMH}$.



Xét tam giác vuông AMH ta có: $\begin{cases} \cos\beta = \dfrac{HM}{AM} \\ \tan\beta = \dfrac{AH}{MH} \\ \sin\beta = \dfrac{AH}{AM} = \dfrac{d(A;(P))}{AM} \end{cases}$ (trong đó $d(A;(P))$ là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P)).

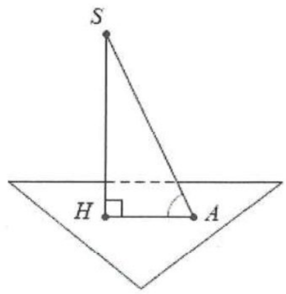
✍ **Dạng 1: Góc giữa cạnh bên và mặt đáy**

Tìm góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy (ABC).

Như vậy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC).

Vậy $\left(\widehat{SA;(ABC)}\right) = \widehat{(SA;HA)} = \widehat{SAH}$.

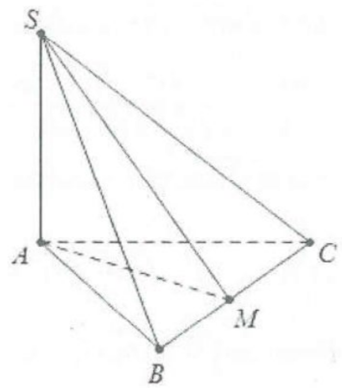


Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, có $AB = a; BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA \perp (ABC)$, SB tạo với đáy một góc 60° và M là trung điểm của BC.

a) Tính cosin góc giữa SC và mặt phẳng (ABC).

b) Tính cosin góc giữa SM và mặt phẳng (ABC).

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SB;(ABC)}\right) = \widehat{SBA} = 60°$.

Do đó $SA = AB \tan \widehat{SBA} = a \tan 60° = a\sqrt{3}$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a; \left(\widehat{SC;(ABC)}\right) = \widehat{SCA}$.

Khi đó: $\cos \widehat{SCA} = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3a^2 + 4a^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

b) Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \left(\widehat{SM;(ABC)}\right) = \widehat{SMA} = \varphi$.

Ta có: $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

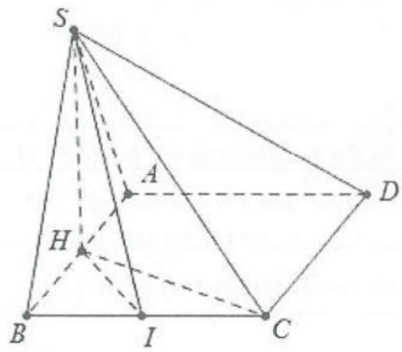
Khi đó $\cos \varphi = \dfrac{AM}{SM} = \dfrac{AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \dfrac{\sqrt{133}}{19}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a; AD = a$. Tam giác (SAB) đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy.

a) Tính góc giữa SB, SC và mặt phẳng (ABCD).

b) Gọi I là trung điểm của BC. Tính tan góc giữa SI và mặt phẳng (ABCD).

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm của AB ta có: $SH \perp AB$

Mặt khác $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Tam giác SAB đều cạnh 2a nên $SH = a\sqrt{3}$,

$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SB;(ABCD)}\right) = \widehat{SBH} = 60°$

$\left(\widehat{SC;(ABCD)}\right) = \widehat{SCH}$ và $\tan \widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

b) Ta có: $HI = \sqrt{HB^2 + BI^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

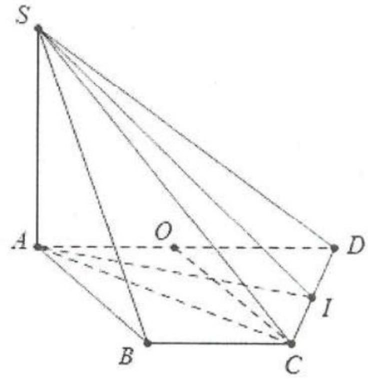
Mặt khác $\left(\widehat{SI;(ABCD)}\right) = \widehat{SIH}$ và $\widehat{SIH} = \dfrac{SH}{SI} = a\sqrt{3} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc $45°$.

a) Tính cosin góc tạo bởi các cạnh SC, SD và mặt đáy (ABCD).

b) Gọi I là trung điểm của CD, tính tan góc tạo bởi SI và mặt phẳng (ABCD).

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow$ OABC là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA} = 45°$.

Do đó $SA = AB \tan 45° = a$.

$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos\widehat{(SC;(ABC))} = \cos\widehat{SCA}$

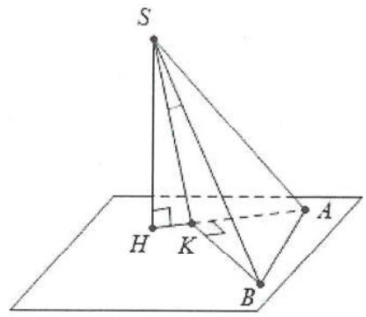
$= \frac{AC}{SC} = \frac{AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\cos\left(\widehat{SD;(ABCD)}\right) = \cos\widehat{SDA} = \frac{AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Ta có: $AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan\widehat{(SI;(ABCD))} = \tan\widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

Dạng 2: Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng chứa đường cao



Tìm góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (SHA) với $(SHA) \perp (ABH)$.

Dựng $BK \perp AH$, có $BK \perp SH \Rightarrow BK \perp (SHA)$.

Suy ra K là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (SAH).

Vậy $\widehat{(SB;(SAH))} = \widehat{(SB;SK)} = \widehat{BSK}$.

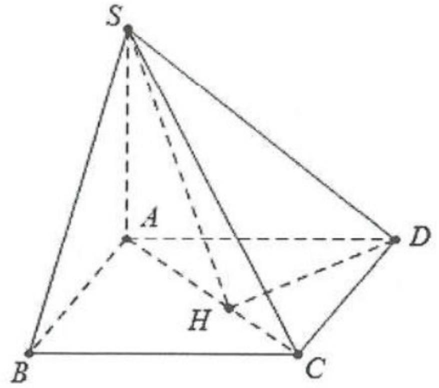
Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$.

Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB); SC và mặt phẳng (SAD).

b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$.

Lại có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SA = AC\tan 60° = 2a\sqrt{3}$.

Khi đó $\begin{cases} SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{13} \\ SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{15} \\ SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 4a. \end{cases}$

Do $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAB))} = \widehat{CSB}$.

Mặt khác $\cos\widehat{CSB} = \dfrac{SB}{SC} = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Tương tự $CD \perp (SAD) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAD))} = \widehat{CSD}$ và $\cos\widehat{SCD} = \dfrac{SD}{SC} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

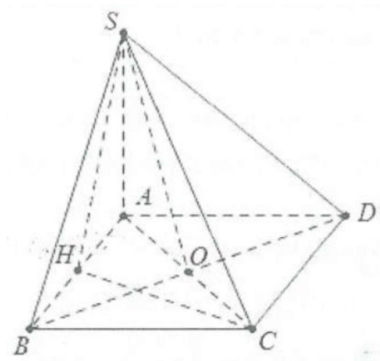
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $BD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$.

Biết SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SC và mặt phẳng (SAB).

b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



a) Ta có: $AC \perp BD$ tại O. Khi đó $OA = OC, OB = OD$.

Xét tam giác vuông OAB ta có: $\sin\widehat{OAB} = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \widehat{OAB} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh a.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 60°$.

Suy ra $SA = AC\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Dựng $CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC;(SAB))} = \widehat{CSH}$.

Do ΔABC đều cạnh a nên H là trung điểm của AB.

Ta có: $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{CSH} = \dfrac{CH}{SH}$ trong đó $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó $\tan\widehat{CSH} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

b) Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SD;(SAC))} = \widehat{DSO}$ và $\tan\widehat{DSO} = \dfrac{OD}{SO}$.

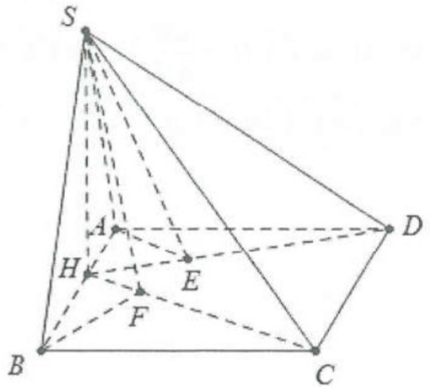
Trong đó $OD=\frac{a\sqrt{3}}{2};SO=\sqrt{SA^2+OA^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}\Rightarrow \tan\widehat{DSO}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{HB}=-2\overrightarrow{HA}$. Biết $AB=3,AD=6$ và $SH=2$. Tính tan góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SHD).

b) SB và mặt phẳng (SHC).

Lời giải



a) Ta có: $AH=1,HB=2\Rightarrow\begin{cases}SA=\sqrt{SH^2+AH^2}=\sqrt{5}\\SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=2\sqrt{2}\end{cases}$

Dựng $AE\perp DH\Rightarrow AE\perp(SHD)\Rightarrow\widehat{(SA;(SHD))}=\widehat{ASE}$

Mặt khác $AE=\frac{AH.AD}{\sqrt{AH^2+AD^2}}=\frac{6}{\sqrt{37}}$

Suy ra $\tan\widehat{ASE}=\frac{AE}{SA}=\frac{6}{\sqrt{185}}$.

b) Dựng $BF\perp HC\Rightarrow BF\perp(SHC)$.

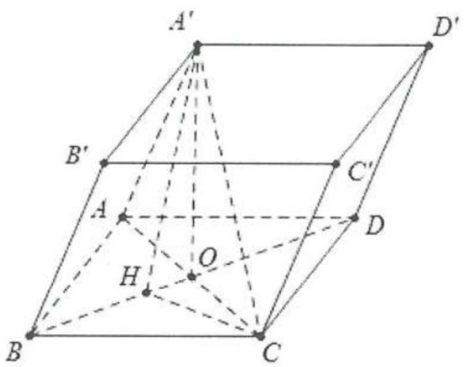
Khi đó $\widehat{(SB;(SHC))}=\widehat{BSF}$, $BF=\frac{BH.BC}{\sqrt{BH^2+BC^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$.

Ta có: $\tan\widehat{(SB;(SHC))}=\tan\widehat{BSF}=\frac{BF}{SB}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AB=2a,AD=2a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABCD) trùng với tâm O của hình chữ nhật ABCD, biết cạnh bên AA' tạo với đáy một góc $60°$. Tính cosin góc tạo với $A'C$ và mặt phẳng $(A'BD)$.

Lời giải

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4a\Rightarrow OA=2a=OC$.



Do $A'O\perp(ABCD)\Rightarrow\widehat{(A'O;(ABCD))}=\widehat{A'AO}=60°$.

$\Rightarrow A'O=OA\tan60°=2a\sqrt{3}$

Dựng $CH\perp BD\Rightarrow CH\perp(A'BD)$

$\Rightarrow\widehat{(A'C;(A'BD))}=\widehat{CA'H}$.

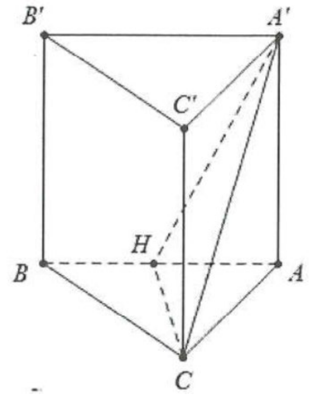
Ta có: $CH=\frac{BC.CD}{\sqrt{BC^2+CD^2}}=a\sqrt{3}$.

$A'C=\sqrt{OA'^2+OC^2}=\sqrt{12a^2+4a^2}=4a.$

Suy ra $\cos\widehat{CA'H}=\dfrac{A'H}{A'C}=\dfrac{\sqrt{A'C^2-HC^2}}{A'C}=\dfrac{\sqrt{16a^2-3a^2}}{4a}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}.$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Tính góc tạo bởi $A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ biết $AA'=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Dựng $CH\perp AB\Rightarrow CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

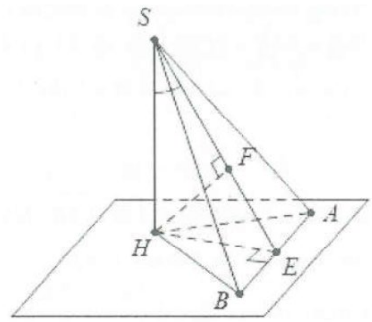
Do $\begin{cases}CH\perp AB\\ CH\perp AA'\end{cases}\Rightarrow CH\perp(ABB'A')\Rightarrow\widehat{(A'C;(ABB'A'))}=\widehat{CA'H}.$

Lại có: $A'H=\sqrt{AA'^2+AH^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.$

Do đó $\tan\widehat{CA'H}=\dfrac{CH}{A'H}=1\Rightarrow\widehat{CA'H}=45^\circ.$

Vậy $\widehat{(A'C;(ABB'A'))}=\widehat{CA'H}=45^\circ.$

Dạng 3: Góc giữa đường cao và mặt bên



Tìm góc giữa đường cao SH và mặt phẳng (SAB).

Dựng $HE\perp AB, HF\perp SE.$

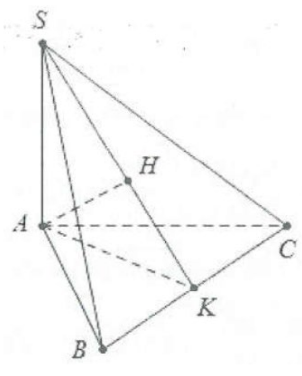
Ta có: $AB\perp SH\Rightarrow AB\perp(SHE)\Rightarrow AB\perp HF.$

Mặt khác $HF\perp SE\Rightarrow HF\perp(SAB)\Rightarrow F$ là hình chiếu vuông góc của H trên mặt phẳng (SAB).

Vậy $\widehat{(SH;SAB)}=\widehat{(HF;SF)}=\widehat{HSF}.$

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác đều cạnh 2a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Từ A kẻ AK vuông góc với BC tại K.

Ta có : $SA\perp BC$ và $AK\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAK).$

Kẻ $AH\perp SK, H\in SK$. Mà $BC\perp AH.$

Suy ra $AH\perp(SBC)\Rightarrow\widehat{(SA;(SBC))}=\widehat{ASH}=\widehat{ASK}.$

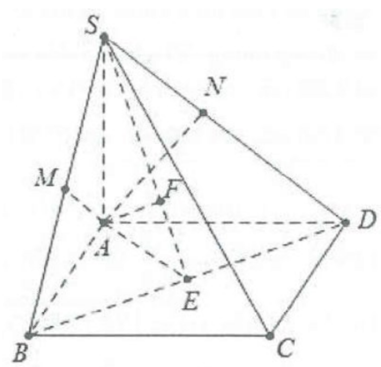
Tam giác SAK vuông tại A, có $SA = AK = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ tam giác SAK vuông cân tại A nên $ASK = 45°$.

Vậy $\widehat{\left(SA;\left(SBC\right)\right)} = 45°$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA = 2a$ và $SA \perp \left(ABCD\right)$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng (SBC), (SBD) và (SCD).

Lời giải



Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAB\right)$.

Dựng $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp \left(SBC\right) \Rightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của A trên (SBC).

Khi đó: $\widehat{\left(SA;\left(SBC\right)\right)} = \widehat{ASM} = \widehat{ASB} = \alpha$.

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{1}{2}$.

Tương tự ta có: $\widehat{\left(SA;\left(SCD\right)\right)} = \widehat{ASD} = \beta$ và $\tan\beta = \dfrac{AD}{SA} = 1$.

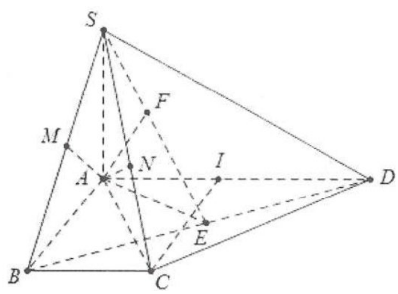
Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AE \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(SAE\right) \Rightarrow BD \perp AF$.

Mặt khác $AF \perp SE \Rightarrow AF \perp \left(SBD\right) \Rightarrow \widehat{\left(SA;\left(SBD\right)\right)} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Khi đó $\tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA}$, trong đó $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{ASE} = \dfrac{AE}{SA} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2AB = 2CD = 2a$ và $SA \perp \left(ABCD\right)$. Biết rằng SC tạo với đáy một góc $60°$. Tính tan góc giữa SA và các mặt phẳng (SBC), (SCD) và (SBD).

Lời giải



Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

Do $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow \widehat{\left(SC;\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{SCA} = 60°$.

Suy ra $SA = AC\tan 60° = a\sqrt{6}$.

Dựng $AM \perp SB$ có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBC) \Rightarrow$ M là hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC).

Suy ra $\widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASM} = \widehat{ASB}$.

Ta có: $\tan\widehat{ASB} = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow$ ABCI là hình vuông cạnh a $\Rightarrow CI = \frac{AD}{2} = a \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C. Khi đó $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$.

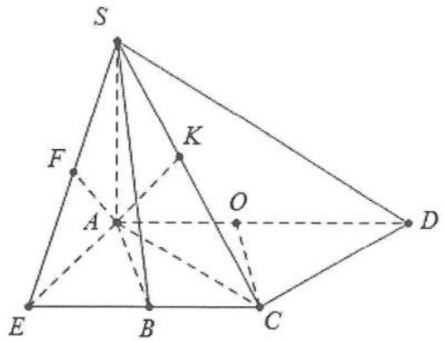
Dựng $AN \perp SC \Rightarrow \widehat{(SA;(SCD))} = \widehat{ASN} = \widehat{ASC}$. Ta có: $\tan\widehat{ASC} = \frac{AC}{SA} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Dựng $\begin{cases} AE \perp BD \\ AF \perp SE \end{cases} \Rightarrow \widehat{(SA;(SBD))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Mặt khác $AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{\sqrt{30}}{15}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là nửa lục giác đều cạnh a, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và đường thẳng SB tạo với đáy một góc 60°. a) Tính tan góc tạo bởi SA và (SBC). b) Tính góc tạo bởi SA và (SCD).

Lời giải



a) Gọi O là trung điểm của AD $\Rightarrow$ OABC là hình thoi cạnh a $\Rightarrow CO = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60°$.

$\Rightarrow SA = AB\tan 60° = a\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = a\sqrt{3}$.

Dựng $AE \perp BC$, $AF \perp SE \Rightarrow \widehat{(SA;(SBC))} = \widehat{ASF} = \widehat{ASE}$.

Do $\widehat{ABE} = 120° \Rightarrow \widehat{ABE} = 60°$.

Mặt khác $AE = AB\sin\widehat{ABE} = AB\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{(SA;(SBC))} = \tan\widehat{ASE} = \frac{AE}{SA} = \frac{1}{2}$.

b) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AC \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$. Dựng $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SCD)$

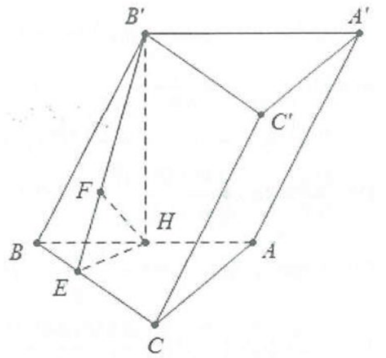
Khi đó $\widehat{\left(SA;(SCD)\right)} = \widehat{ASK} = \widehat{ASC} = \varphi$.

Ta có: $\tan\varphi = \dfrac{AC}{SA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$. Vậy $\widehat{\left(SA;(SCD)\right)} = 45°$.

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của cạnh AB, đường cao $B'H = \dfrac{3a}{4}$. Tính cosin góc giữa đường thẳng $B'H$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

Lời giải

Dựng $HE \perp BC, HF \perp B'E$ ta có: $\begin{cases} BC \perp B'H \\ BC \perp HE \end{cases}$ suy ra



$BC \perp HF \Rightarrow HF \perp (B'BCC') \Rightarrow \widehat{\left(B'H;(BCC'B')\right)}$

$= \widehat{HB'F} = \widehat{HB'E}$.

Ta có: $HE = HB\sin\widehat{HBE} = \dfrac{a}{2}\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Do đó $\cos\widehat{HB'E} = \dfrac{B'H}{B'E} = \dfrac{B'H}{\sqrt{B'H^2 + HE^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dạng 4: Góc giữa cạnh bên và mặt bên

Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt phẳng (SAB). Đặt $\widehat{\left(SC;(SAB)\right)} = \varphi\left(0° \le \varphi \le 90°\right)$.

Ta có công thức: $\sin\varphi = \dfrac{d\left(C;(SAB)\right)}{SC}$.

Từ đó suy ra các giá trị $\cos\varphi$ hoặc $\tan\varphi$ nếu đề bài yêu cầu.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật có $AD = 2a, AB = a\sqrt{2}$. Tam giác SAD cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SB tạo với đáy một góc $30°$. Tính sin góc tạo bởi:

a) SA và mặt phẳng (SBC).

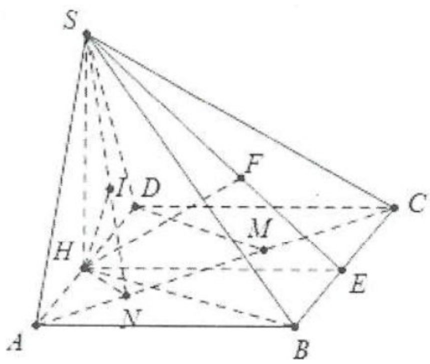
b) SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải

Gọi H là trung điểm của AD ta có: $SH \perp AD$

Lại có: $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Ta có: $HA = a; HB = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$



Do $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBH} = 30^\circ$

Suy ra $SH = HB\tan 30^\circ = a$.

a) Do $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC)$.

Do vậy $d(A;(SBC)) = d(H;(SBC))$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp BC \\ HF \perp SE \end{cases}$ tacó: $BC \perp HF$ từ đó suy ra $HF \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(H;(SBC)) = HF = d(A;(SBC))$. Ta có: $SA = \sqrt{SH^2 + SA^2} = a\sqrt{2} = SD$.

Mặt khác: $\dfrac{1}{HF^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HE^2} \Rightarrow HF = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sin\widehat{(SA;(SBC))} = \dfrac{d(A;(SBC))}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Dựng $HN \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHN)$, dựng $HI \perp SN \Rightarrow HI \perp (SAC)$

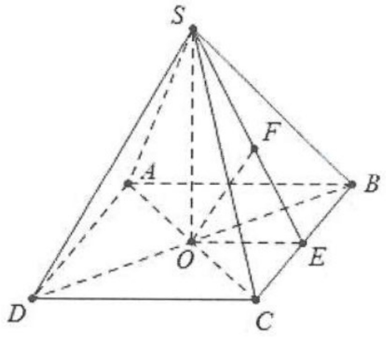
Do $\dfrac{DA}{HA} = 2 = \dfrac{d(D;(SAC))}{d(H;(SAC))} \Rightarrow d(D;(SAC)) = 2d(H;(SAC)) = 2HI$

Dựng $DM \perp AC \Rightarrow DM = \dfrac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Rightarrow HN = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow HI = \dfrac{HN.SH}{\sqrt{HN^2 + SH^2}} = \dfrac{a}{2} \Rightarrow d(D;(SAC)) = a$.

Ta có: $\sin\widehat{(SD;(SAC))} = \dfrac{d(D;(SAC))}{SD} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = a\sqrt{3}; AD = a$, tam giác SBD là tam giác vuông cân đỉnh S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin góc tạo bởi SA và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Gọi O là trung điểm của BD ta có: $SO \perp BC$ mặt khác $(SBD) \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp (ABC)$

Ta có: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a \Rightarrow SO = \dfrac{1}{2}BD = a$.

Dựng $OE \perp BC, OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SBC)$.

$d(D;(SBC)) = 2d(O;(SBC)) = 2HF$

Ta có: $HE = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

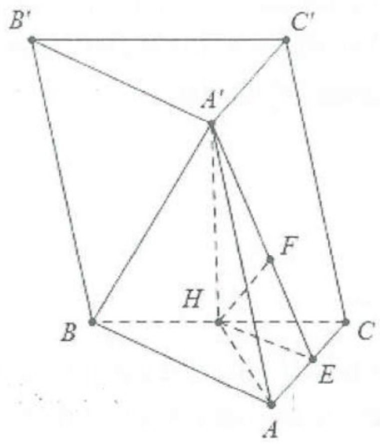
$\Rightarrow OF = \dfrac{SH.OE}{\sqrt{SH^2 + OE^2}} = a\sqrt{\dfrac{3}{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Suy ra $d(A;(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. Mặt khác $SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = a\sqrt{2}$.

Do đó $\sin\widehat{\left(SA;(SBC)\right)}=\dfrac{d\left(A;(SBC)\right)}{SA}=\dfrac{\sqrt{42}}{7}$.

Ví dụ 3: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB=a; AC=a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với trung điểm H của BC. Biết $A'H=a\sqrt{2}$. Tính cosin góc tạo bởi $A'B$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải



Dựng $HE\perp AC$ và $HF\perp A'E$

Ta có: $\begin{cases} AC\perp A'H \\ AC\perp HE \end{cases}\Rightarrow AC\perp HF\Rightarrow HF\perp\left(AA'C\right)$.

Khi đó $d\left(H;\left(A'AC\right)\right)=HF$.

Lại có $BC=2HC$ nên $d\left(B;\left(AA'C\right)\right)=2d\left(H;\left(AA'C\right)\right)$.

Mặt khác ME là đường trung bình trong tam giác ABC

nên $ME=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$. Khi đó: $HF=\dfrac{HE.A'M}{\sqrt{HE^2+A'M^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

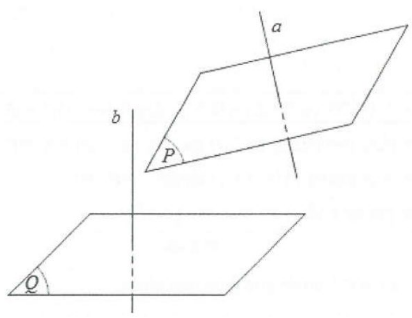
Suy ra $d\left(B;\left(AA'C\right)\right)=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}; BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2a$.

Lại có $A'B=\sqrt{A'H^2+HB^2}=a\sqrt{3}$.

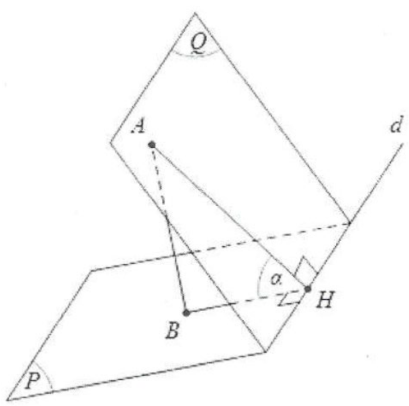
Suy ra $\sin\widehat{\left(A'B;\left(A'AC\right)\right)}=\sin\varphi=\dfrac{d\left(B;\left(A'AC\right)\right)}{BA'}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}\Rightarrow\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\dfrac{\sqrt{57}}{9}$.

Vấn đề 3: GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

■ **Định nghĩa:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



■ **Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng**



Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (P); (Q).

Lấy $A\in mp(Q)$, dựng $AB\perp mp(P)$ $\left(B\in(P)\right)$.

Vẽ BH vuông góc với d thì AH vuông góc d.

Vậy $\widehat{AHB} = \alpha \ \left(0 < \alpha < 90°\right)$ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).

■ **Định lý:** Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng $\left(P'\right)$ thì $S' = S\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $\left(P'\right)$.

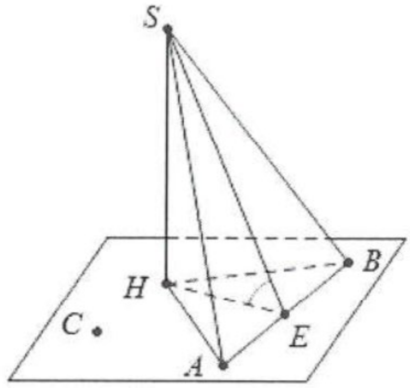
Dạng 1: Góc giữa mặt bên và mặt đáy

Phương pháp giải:

Tính góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC).

Dựng đường cao $SH \perp \left(ABC\right)$, dựng $HE \perp AB$.

Khi đó $AB \perp \left(SEH\right) \Rightarrow \widehat{\left(\left(SAB\right);\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SEH}$.



Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có $SA \perp \left(ABCD\right)$, đáy là hình chữ nhật ABCD với $AB = a; AD = a\sqrt{3}$. Biết rằng mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc $60°$.

a) Tính cosin góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt đáy (ABCD).

b) Tính tan góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy (ABCD).

Lời giải

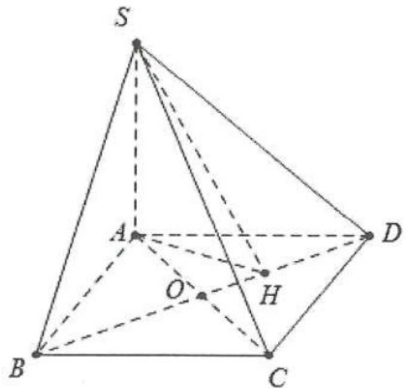
a) Do $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp D \end{cases} \Rightarrow CD \perp \left(SDA\right)$ do đó góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy là $\widehat{SDA} = 60°$

Suy ra $SA = AD\tan 60° = 3a$.

Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SBA\right) \Rightarrow \widehat{\left(\left(SBC\right);\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SBA}$

Mặt khác $\cos\widehat{SBA} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{9a^2 + a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Vậy $\cos\widehat{\left(\left(SBC\right);\left(ABC\right)\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.



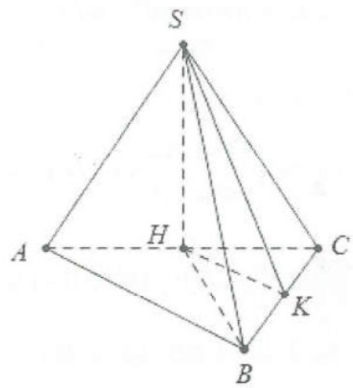
b) Dựng $AH \perp BD \Rightarrow BD \perp \left(SHA\right) \Rightarrow \widehat{\left(\left(ABD\right);\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SHA}$

Lại có: $AH = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}.$

Ví dụ 2: Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$, tam giác SAC là tam giác cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết đường thẳng SB tạo với đáy một góc $60°$. Tính góc $\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AC, do tam giác SAC cân nên ta có:

$SH \perp AC$. Mặt khác $(SAC) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Khi đó: $\left(\widehat{SB;(ABC)}\right) = \widehat{SBH} = 60°$.

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a \Rightarrow BH = \dfrac{1}{2}AC = a.$

Khi đó: $SH = a\tan 60° = a\sqrt{3}.$

Dựng $HK \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHK)$.

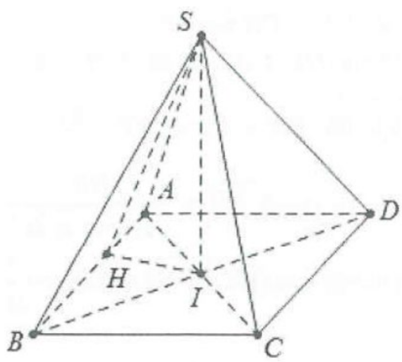
$\Rightarrow \widehat{SKH} = \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)$, trong đó ta có: $HK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$SH = a\sqrt{3} \Rightarrow \cos\widehat{SKH} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Vậy $\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \varphi$ với $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}.$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, có $AB = 2a$ và góc $\widehat{BAD} = 120°$. Hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng đáy (ABCD) trùng với giao điểm I của hai đường chéo và $SI = \dfrac{a}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABCD).

Lời giải



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (ABCD). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI).$

Do đó $\varphi = \left(\widehat{SH;IH}\right) = \widehat{SHI}.$

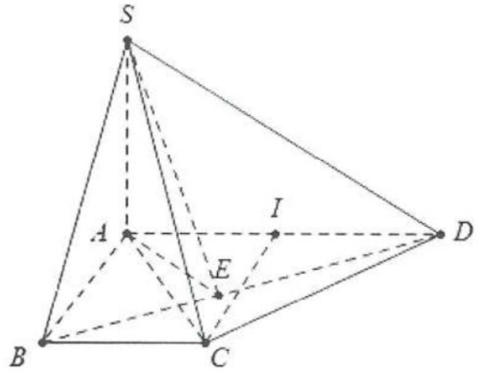
Do $\widehat{BAD} = 120° \Rightarrow \widehat{BAI} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh 2a nên

$IA = a \Rightarrow IH = IA\sin\widehat{IAB} = IA\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Do đó $\tan\varphi = \frac{SI}{IH} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = 30°.$

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$ và $AB = BC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy (ABCD) một góc 60°. Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng (SCD) và (SBD) với mặt phẳng (ABCD).

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SBA).$

Khi đó: $\widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60°$

$\Rightarrow SA = AB\tan 60° = a\sqrt{3}.$

Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow$ ABCI là hình vuông cạnh a $\Rightarrow CI = a = \frac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại C.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SCA).$

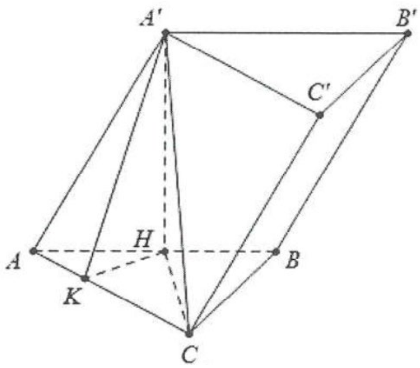
Do đó $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{(SC;AC)} = \widehat{SCA}$ và $\tan\widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Dựng $AE \perp BD$, lại có $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SEA) \Rightarrow \widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SEA}.$

Ta có: $AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{SEA} = \frac{SA}{AE} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 2a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Tính cosin góc giữa mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt đáy (ABC).

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AB ta có: $A'H \perp (ABC)$

Do đó $\widehat{A'CH} = 60°.$ Lại có: $CH = AC\sin 60° = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow A'H = CH\tan 60° = 3a.$

Dựng $HK \perp AC$ ta có $A'H \perp AC \Rightarrow (A'HK) \perp AC.$

Khi đó: $HK = HA\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Ta có: $\cos\widehat{A'KH} = \frac{HK}{\sqrt{HK^2 + A'H^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} > 0.$

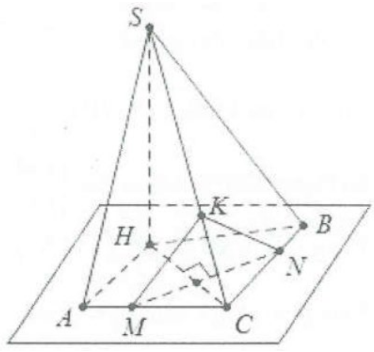
Do vậy $\cos\left(\widehat{(A'AC);(ABC)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

✍ Dạng 2: Góc giữa hai mặt bên

Phương pháp giải:

Tính góc giữa hai mặt bên (SAC) và (SBC).

☑ **Cách 1:** Tính góc giữa 2 đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với mặt phẳng (SAC) và (SBC).



☑ **Cách 2:** Dựng đường cao $SH \perp (ABC)$.

Lấy điểm M bất kỳ thuộc AC, dựng $MN \perp HC$.

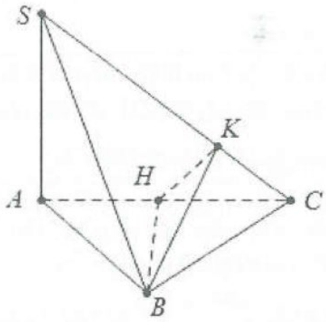
Lại có: $MN \perp SH \Rightarrow MN \perp (SHC) \Rightarrow MN \perp SC$.

Dựng $MK \perp SC \Rightarrow SC \perp (MKN)$

$\Rightarrow \widehat{((SAC);(SBC))} = \widehat{(MK, KN)}$.

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), đáy ABC tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Lời giải



Dựng $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

Dựng $BH \perp SC \Rightarrow (HKB) \perp SC$

$\Rightarrow \widehat{((SBC);(SAC))} = \widehat{HKB}$.

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}; AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 2a$.

Khi đó $\sin\widehat{KCH} = \dfrac{HK}{HC} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{a}{3}$.

Mặt khác: $BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\widehat{HKB} = \dfrac{BH}{HK} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{HKB} = 60°$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng $60°$.

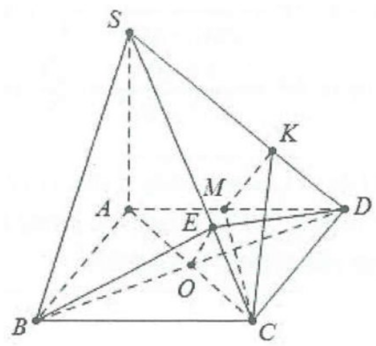
Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a có $\widehat{ABC} = 60°$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Tính cosin góc giữa:

a) (SBC) và (SCD).

b) (SBC) và (SCD).

Lời giải

a) Nhận xét ΔABC là tam giác đều cạnh a vì $AB = BC = a$ và $\widehat{ABC} = 60°$. Gọi O là tâm của hình thoi ABCD.



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$

Dựng $BE \perp SC \Rightarrow SC \perp (BED)$.

Mặt khác: $SA = AC = a \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại A suy ra

$\widehat{ECO} = 45°$. Khi đó $OE = OC \sin 45° = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lại có: $OB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \widehat{BEO} = \dfrac{OB}{OE} = \sqrt{6}$.

Do $\widehat{BED} = 2\widehat{BEO}$ sử dụng công thức lượng giác hoặc máy tính **CASIO** ta tính được $\cos \widehat{BED} = \dfrac{-5}{7}$.

Cách khác: Ta có: $BE = DE = \sqrt{OE^2 + OB^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow \cos \widehat{BED} = \dfrac{EB^2 + ED^2 - BD^2}{2.EB.ED} = \dfrac{-5}{7}$.

Suy ra $\widehat{((SBC);(SCD))} = \dfrac{5}{7}$.

b) Dựng $CM \perp AD$ ta có: $\begin{cases} CM \perp AD \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAD) \Rightarrow CM \perp SD.$

Dựng $CK \perp SD \Rightarrow SD \perp (MKC)$.

Tam giác ACD đều cạnh a nên $CM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do $SA = AD = a \Rightarrow \Delta SAD$ vuông cân tại A suy ra $\widehat{SDM} = 45°$. Do đó $MK = MD \sin 45° = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

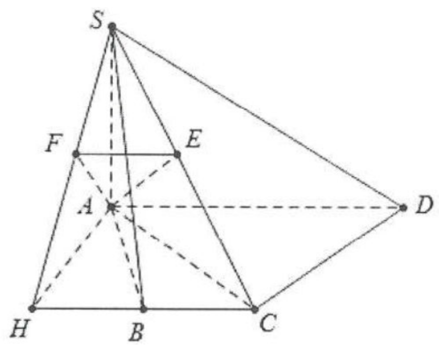
Suy ra $\tan \widehat{MKC} = \dfrac{CM}{MK} = \sqrt{6} \Rightarrow \cos \widehat{MKC} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy $\cos \widehat{((SCD);(SAD))} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều cạnh a với $AD = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và mặt phẳng (SCD) tạo với đáy một góc $45°$. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC).

Lời giải

Do $AD = 2a$ nên tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$



Ta có: $\begin{cases} AC \perp CD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

Suy ra $\widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^\circ$

$\Rightarrow SA = AC = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Dựng $AE \perp SC \Rightarrow AE \perp (SCD)$

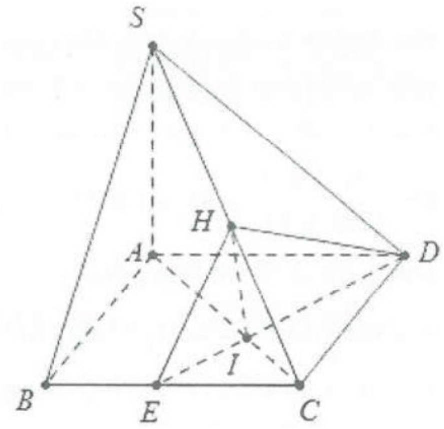
Dựng $\begin{cases} AH \perp BC \\ AF \perp SH \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBC)$, góc giữa 2 mặt phẳng (SCD) và (SBC) là góc giữa AE và AF.

Tacó: $AE = \dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $AH = AC\sin 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $AF = \dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, do $AF \perp (SBC) \Rightarrow AF \perp FE$. Do đó $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Ví dụ 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a; AD = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60°. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SBA)$

Do đó $\widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SBA} = 60^\circ; AC = 2a$

$\Rightarrow SA = AB\sin 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Dựng $DE \perp AC$ $(E \in BC)$ tại I, mặt khác $DE \perp SA \Rightarrow DE \perp (SAC) \Rightarrow DE \perp SC$. Dựng $IH \perp SC$ $\Rightarrow SC \perp (EHD)$. Ta có: $DI = DC\sin\widehat{ICD}$ trong đó $\tan\widehat{ICD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ICD} = 60^\circ$.

Suy ra $DI = a\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; DE = \dfrac{DC^2}{DI} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

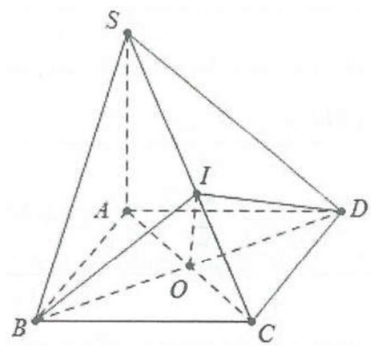
$\Rightarrow IE = DE - DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow CI = \sqrt{EI.DI} = \dfrac{a}{2}; \sin\widehat{ICH} = \dfrac{SA}{SC} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \Rightarrow IH = IC\sin\widehat{IHC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Suy ra $EH = \sqrt{EI^2 + IH^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{21}}; ED = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Do đó $\cos\widehat{EHD} = \dfrac{EH^2 + HD^2 - ED^2}{2.EH.HD} = \dfrac{-\sqrt{2}}{4} < 0 \Rightarrow \cos((SBC);(SCD)) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a. Biết $SA \perp (ABCD)$, tính độ dài đoạn thẳng SA để góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng $60°$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$

Kẻ $BI \perp SC \Rightarrow SC \perp (BID)$.

Vậy $\widehat{((SBC);(SCD))} = \widehat{(BI;ID)} = 60°.$

Dễ thấy $\begin{cases} OI \perp SC \\ \widehat{BIO} = \dfrac{1}{2}\widehat{BID} \end{cases}.$

■ **Trường hợp 1:** $\widehat{BID} = 60° \Rightarrow \widehat{BIO} = 30°.$

Ta có: $\tan\widehat{BIO} = \dfrac{BO}{IO} = \tan 30° \Rightarrow OI = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} > OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (vô lý).

(OI là cạnh góc vuông, OC là cạnh huyền của tam giác vuông OIC).

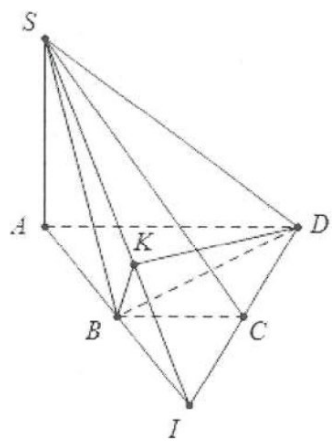
■ **Trường hợp 2:** $\widehat{BID} = 120° \Rightarrow \widehat{BIO} = 60°.$

Ta có: $\tan\widehat{BIO} = \dfrac{BO}{IO} = \tan 60° \Rightarrow OI = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}.$

Mặt khác: $\sin\widehat{ICO} = \dfrac{OI}{OC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan\widehat{ICO} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow SA = AC\tan\widehat{ICO} = a.$

Ví dụ 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a$, biết rằng $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính tan góc giữa 2 mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải



Do ABCD là nửa lục giác đều cạnh a với $AB = 2a \Rightarrow$ ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AB. Do đó $\widehat{ABD} = 90°.$

Gọi $I = AB \cap CD \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD).$

Do $\begin{cases} AI \perp BD \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp SI.$

Dựng $BK \perp SI \Rightarrow SI \perp (BKD).$

Khi đó $\widehat{((SAB);(SCD))} = \widehat{(BK;KD)} = \widehat{BKD}.$

Do $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp BK \Rightarrow \Delta KBD$ vuông tại B có $BD = \sqrt{AD^2 - AB^2} = a\sqrt{3}.$

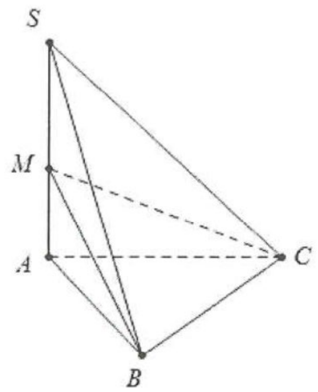
Do $\begin{cases} BC//AD \\ BC=\frac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow$ BC là đường trung bình trong tam giác $AID \Rightarrow AB = BI$ và $AI = 2a$

$$\Rightarrow BK = \frac{1}{2}d\left(A;SI\right) = \frac{1}{2}.\frac{SA.AI}{\sqrt{SA^2+AI^2}} = \frac{a\sqrt{21}}{7} \Rightarrow \tan\widehat{BKD} = \frac{BD}{BK} = \sqrt{7}.$$

✍ Dạng 3: Sử dụng định lý hình chiếu để tính góc giữa hai mặt phẳng

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp \left(ABC\right)$. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho diện tích tam giác MBC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBC) và (ABC).

Lời giải



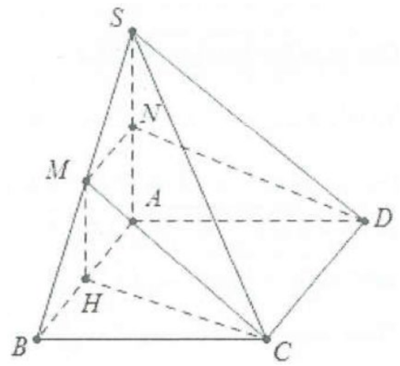
Ta có: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Gọi $\varphi = \widehat{\left(\left(MBC\right);\left(ABC\right)\right)}$

Do ΔABC là hình chiếu của tam giác MBC trên mặt phẳng (ABC) do đó

$$\cos\varphi = \frac{S_{ABC}}{S_{MBC}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°.$$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh 2a, $SA \perp \left(ABCD\right)$. Gọi N là trung điểm của SA, mặt phẳng (NCD) cắt khối chóp theo một thiết diện có diện tích $S = 2a^2\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng (NDC) và mặt phẳng (ABCD).

Lời giải



Đặt $\varphi = \widehat{\left(\left(NCD\right);\left(ABCD\right)\right)}$.

Do $CD//AB \Rightarrow \left(NCD\right)$ cắt (SAB) theo thiết diện $NM//AB \Rightarrow$ MN là đường trung bình của tam giác SAB.

Khi đó thiết diện là tứ giác MNDC.

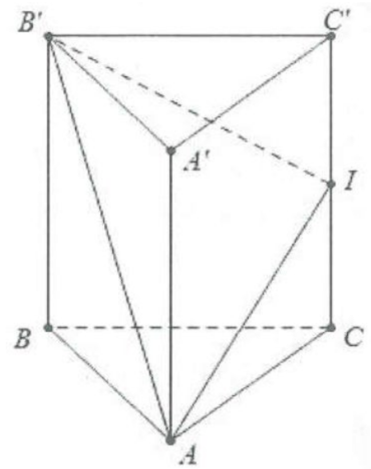
Gọi H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (ABCD) thì H là trung điểm của AB và $S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2}.2a = 3a^2.$

Do tứ giác HADC là hình chiếu của tứ giác MNDC trên mặt phẳng (ABCD) $\Rightarrow \cos\varphi = \frac{S_{AHCD}}{S_{NMCD}} = \frac{3a^2}{2a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Do đó $\varphi = 30°.$

Ví dụ 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, cạnh bên $BB' = a$, gọi I là trung điểm của CC'. Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông tại A và tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(AB'I)$ và (ABC).

Lời giải



Ta có: $BC = B'C' = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\widehat{BAC}} = a\sqrt{3}.$

Mặt khác $\begin{cases} AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{2} \\ AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2} \end{cases}$.

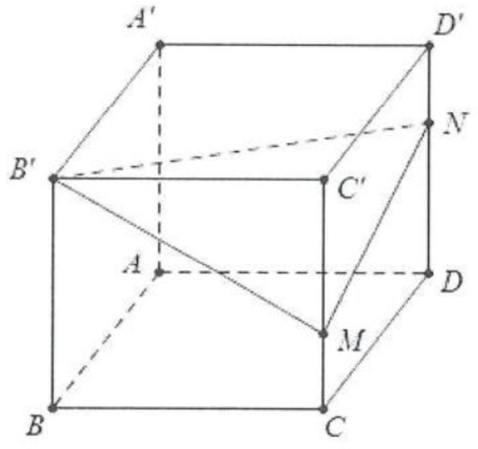
Do $AB'^2 + AI^2 = B'I = \dfrac{13a^2}{4} \Rightarrow \Delta B'AI$ vuông tại A.

Ta có: $S_{AB'I} = \dfrac{1}{2}AB'.AI = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}.$

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\left(\widehat{(AB'I);(ABC)}\right) = \dfrac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}.$

Ví dụ 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao $AA' = 6a$. Trên CC' lấy điểm M, trên DD' lấy điểm N sao cho $CM = 2MC$ và $DN = 2ND'$. Tính cosin góc giữa 2 mặt phẳng $(B'MN)$ và (ABCD).

Lời giải



Gọi $\varphi = \widehat{\left((B'MN);(ABCD)\right)}.$

Ta có: $S_{BCD} = \dfrac{a^2}{2}; D'N = 2a; C'M = 4a$

Lại có: $B'D' = a\sqrt{2} \Rightarrow B'N = \sqrt{B'D'^2 + D'N^2} = a\sqrt{6}$

$B'M = \sqrt{B'C'^2 + C'M^2} = a\sqrt{17},$

$MN = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}.$

Theo công thức Herong $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

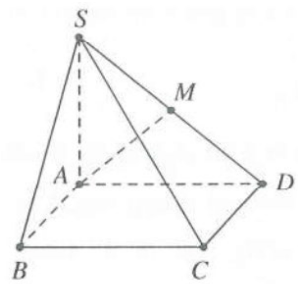
Ta tính được: $S_{BMN} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}.$

Do ΔBCD là hình chiếu của $\Delta B'MN$ trên mặt phẳng (ABCD) nên $\cos\varphi = \dfrac{S_{BCD}}{S_{B'MN}} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}.$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

☑ GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

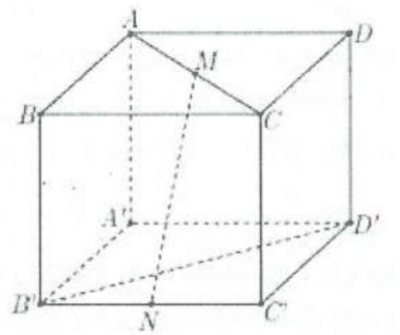
Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = \sqrt{3}a$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SD (tham khảo hình vẽ bên). Côsin góc giữa hai đường thẳng AM và SC bằng



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{4}{5}$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$ (tham khảo hình vẽ bên). Côsin góc giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng



A. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

C. $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{20}$.

Câu 3: Cho tứ diện ABCD có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\cos\varphi = \frac{3}{4}$. **B.** $\varphi = 60^\circ$. **C.** $\varphi = 30^\circ$. **D.** $\cos\varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 3. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy và thể tích khối chóp S.ABCD bằng $9\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của cạnh SB. Côsin của góc giữa hai đường thẳng AM và CD bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 3. Cạnh $SA = 3\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của cạnh SB. Côsin của góc giữa hai đường thẳng AM và SD bằng

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 6: Cho hình $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = 3, AC = 3\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Đường thẳng AA' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc bằng 45°. Côsin của góc giữa hai đường thẳng BB' và $A'C$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 7: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Trên cạnh SB lấy điểm M sao cho $SM = 2BM$. Côsin của góc giữa hai đường AM và CD bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{6}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Câu 8: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh $SA = a$, $SB = a\sqrt{2}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Côsin của góc giữa hai đường thẳng SO và CD bằng

A. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 9: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Cạnh $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Lấy hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{SN} = 2\overrightarrow{DN}$. Côsin của góc giữa hai đường MN và SC bằng

A. $\frac{3\sqrt{7}}{28}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{14}$. **C.** $\frac{\sqrt{721}}{28}$. **D.** $\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

Câu 10: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 3a, M là trung điểm cạnh AB, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là giao điểm của AC và DM. Biết tam giác SAD vuông tại S. Cosin góc giữa DM và SC là:

A. $\frac{1}{3\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{3\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 11: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy trùng với trọng tâm G của tam giác ABD , mặt bên (SCD) hợp với đáy một góc $60°$. Cosin góc giữa hai đường thẳng SA và BG là:

A. $\frac{1}{\sqrt{70}}$. **B.** $\sqrt{\frac{97}{162}}$. **C.** $\frac{1}{2\sqrt{7}}$. **D.** $\frac{1}{4\sqrt{7}}$.

Câu 12: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a, SA = a, SB = \sqrt{3}$ và (SAB) vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Cosin của góc giữa 2 đường thẳng SM và DN là:

A. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

☑ GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Câu 13: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và (SAD) là góc nào trong các phương án dưới đây?

A. $\widehat{BSA}$. **B.** $\widehat{SBA}$. **C.** $\widehat{BSD}$. **D.** $\widehat{SBD}$.

Câu 14: Cho tứ diện ABCD có cạnh AB, BC, BD vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDB}$.

B. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACB}$.

C. Góc giữa CD và (ABC) là góc $\widehat{DBC}$.

D. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}$.

Câu 15: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và (SBD) là

A. $\widehat{SAB}$.
B. $\widehat{ASB}$.
C. $\widehat{ASO}$.
D. $\widehat{ASD}$.

Câu 16: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC) là

A. $60°$.
B. $75°$.
C. $45°$.
D. $30°$.

Câu 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và (SAB) là góc nào dưới đây?

A. $\widehat{CSA}$.
B. $\widehat{CSB}$.
C. $\widehat{SCA}$.
D. $\widehat{SCB}$.

Câu 18: Cho hình chóp S.ABC có các cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng nhau. Gọi H là hình chiếu của S trên (ABC). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

B. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C. H là trọng tâm tam giác ABC.

D. H là trực tâm tam giác ABC.

Câu 19: Cho hình chóp tam giác đều, các cạnh bên có độ dài bằng a và tạo với đáy một góc $60°$. Tính chu vi đáy P của hình chóp đó.

A. $P = 3a$.
B. $P = \frac{3a}{2}$.
C. $P = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$.
D. $P = 3a\sqrt{3}$.

Câu 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SC và (ABCD). Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
B. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
C. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
D. $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 21: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông với cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC. Biết $SB = a$. Số đo của góc giữa SA và (ABC) là

A. $30°$.
B. $45°$.
C. $60°$.
D. $75°$.

Câu 22: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều có đường cao SH vuông góc với (ABCD). Gọi α là góc giữa BD và (SAD). Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $\sin\alpha=\frac{1}{2}.$ **C.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{4}.$ **D.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}.$

Câu 23: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông và $SA\perp(ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Góc giữa BD và (SAC) là $90°$.
B. Góc giữa BD và (SAB) là $\widehat{DBA}.$
C. Góc giữa BD và (IJK) là $60°$.
D. Góc giữa BD và (SAD) là $\widehat{BDA}.$

Câu 24: Cho hình chóp S.ABC có $SA\perp(ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC. Số đo góc giữa HK và (SBC) là

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi α là góc giữa AC' và (ABCD). Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha=1.$ **B.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ **C.** $\tan\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}.$ **D.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Câu 26: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB). Khi đó, $\tan\alpha$ nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\tan\alpha=\sqrt{2}.$ **B.** $\tan\alpha=\sqrt{3}.$ **C.** $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}.$ **D.** $\tan\alpha=1.$

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC. Biết $AB=a$, góc giữa MN và mặt phẳng đáy bằng $45°$. Tính SO.

A. $SO=\frac{a\sqrt{10}}{2}.$ **B.** $SO=\frac{a\sqrt{5}}{4}.$ **C.** $SO=\frac{a\sqrt{10}}{4}.$ **D.** $SO=\frac{a\sqrt{5}}{2}.$

Câu 28: Cho hình chóp S.ABC có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi H, K lần lượt là trực tâm tam giác ABC và SBC. Tính số đo góc α giữa SC và (BHK).

A. $\alpha=30°.$ **B.** $\alpha=45°.$ **C.** $\alpha=60°.$ **D.** $\alpha=90°.$

Câu 29: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm của AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Tính giá trị $\sin\varphi$ của góc giữa SN và mặt phẳng (SCM).

A. $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{5}.$ **C.** $\sin\varphi=\frac{3}{2}.$ **D.** $\sin\varphi=\frac{3}{5}.$

Câu 30: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm của AB. Tính giá trị $\sin\varphi$ của góc giữa SD và (SBC).

A. $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{2}.$ **C.** $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{4}.$ **D.** $\sin\varphi=\frac{\sqrt{6}}{4}.$

Câu 31: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Kẻ $AP \perp SB$, $AQ \perp SD$ lần lượt tại P và Q. Gọi M là trung điểm của SD. Tính giá trị $\cos\varphi$ của góc giữa CM và (APQ).

A. $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{5}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

☑ GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Câu 32: Cho hai mặt phẳng cắt nhau (α) và (β), biết rằng có các đường thẳng thỏa mãn $d_1 \perp (\alpha)$, $d_2 \perp (\beta)$, $d_3 // (\alpha)$, $d_4 // (\beta)$. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_3 và d_4 **B.** Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_1 và d_2

C. Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_1 và d_4 **D.** Góc giữa (α) và (β) là góc giữa d_2 và d_4

Câu 33: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng góc nào dưới đây?

A. $\widehat{CSA}$ **B.** $\widehat{SBA}$ **C.** $\widehat{SCA}$ **D.** $\widehat{ASB}$

Câu 34: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2a, cạnh bên $SA = 2a$ vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. $45°$ **B.** $49°6'$ **C.** $40°53'$ **D.** $62°14'$

Câu 35: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, $AC = 2a$. Biết rằng cạnh bên $SA = a$ vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

A. $60°$ **B.** $30°$ **C.** $45°$ **D.** $90°$

Câu 36: Cho tam giác ABC không nằm trong mặt phẳng (P), giả sử góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC) là φ, $\varphi \neq 90°$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của ba điểm A, B, C lên mặt phẳng (P). Khi đó, hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $S_{ABC} = S_{A'B'C'}.\cos\varphi$ **B.** $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\cos\varphi$ **C.** $S_{A'B'C'} = S_{ABC}.\sin\varphi$ **D.** $S_{ABC} = S_{A'B'C'}.\sin\varphi$

Câu 37: Cho hình chóp S.ABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_{ABC} = S_{SBC}.\cos\varphi$ **B.** $S_{ABC} = S_{SBC}.\sin\varphi$ **C.** $S_{ABC} = S_{SAB}.\cos\varphi$ **D.** $S_{ABC} = S_{SAC}.\cos\varphi$

Câu 38: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD) là

A. $\widehat{AOS}$ **B.** $\widehat{ADS}$ **C.** $\widehat{ABS}$ **D.** $\widehat{BSO}$

Câu 39: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh AB, CD. Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng nào?

A. SA và SD **B.** SB và SC **C.** SB và SD **D.** SI và SJ

Câu 40: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$

Câu 41: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (ABCD).

A. $30°$ **B.** $60°$ **C.** $90°$ **D.** $45°$

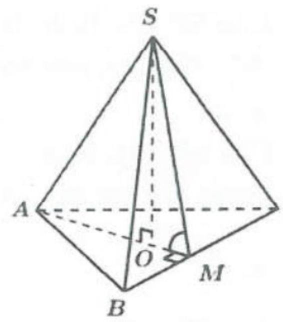
Câu 42: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD).

A. $90°$ **B.** $45°$ **C.** $60°$ **D.** $30°$

Câu 43: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên cạnh SC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng góc giữa hai đường thẳng nào sau đây?

A. SB và SD **B.** BH và CH **C.** CH và DH **D.** BH và DH

Câu 44: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có tất cả các cạnh bằng a. Tính tan của góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy của hình chóp.



A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{3}$

Câu 45: Cho hình chóp S.ABCD có tất cả các cạnh bằng a. Tính tang của góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy của chóp.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{3}$

Câu 46: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết rằng $AC = 2a$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD).

A. $60°$ **B.** $50°46'$ **C.** $39°13'$ **D.** $30°$

Câu 47: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh là 2a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABCD). Biết rằng $BD = 2a$ và $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $60°$ **B.** $30°$ **C.** $47°25'$ **D.** $90°$

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, tính góc φ tạo bởi mặt phẳng $(A'BD)$ với mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

A. $\varphi \approx 54°44'$ **B.** $\varphi = 60°$ **C.** $\varphi = 45°$ **D.** $\varphi \approx 35°15'$

Câu 49: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Tính góc φ tạo bởi mặt phẳng (SAB) và (SAC).

A. $\varphi = 30°$ **B.** $\varphi \approx 53°24'$ **C.** $\varphi = 60°$ **D.** $\varphi \approx 64°27'$

Câu 50: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, có cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = 60°$. Cạnh bên $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Xác định độ lớn của góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

Câu 51: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng hai lần cạnh đáy. Tính góc φ giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\varphi \approx 75°2'$ **B.** $\varphi \approx 73°53'$ **C.** $\varphi \approx 75°31'$ **D.** $\varphi \approx 72°14'$

Câu 52: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông, hình chiếu của đỉnh S xuống mặt phẳng (ABCD) trùng với trung điểm M của cạnh AB. Giả sử rằng tam giác SAB là tam giác đều, hãy tính góc φ tạo bởi mặt phẳng (SCD) với mặt phẳng (ABCD).

A. $\varphi = 45°$ **B.** $\varphi \approx 49°6'$ **C.** $\varphi \approx 40°53'$ **D.** $\varphi = 60°$

Câu 53: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có mặt bên tạo với đáy một góc bằng $30°$, biết rằng diện tích xung quanh của hình chóp là $90cm^2$ thì diện tích đáy của hình chóp gần bằng với giá trị nào dưới đây nhất?

A. $77cm^2$ **B.** $72cm^2$ **C.** $75cm^2$ **D.** $78cm^2$

Câu 54: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của SC. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (SAC).

A. $60°$ **B.** $45°$ **C.** $90°$ **D.** $30°$

Câu 55: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABCD), $SA = 2a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD).

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Câu 56: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = BC = 2a$, $AB' = 4a$. Tính góc φ tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(A'B'C')$.

A. $\varphi = 30°$ **B.** $\varphi = 45°$ **C.** $\varphi \approx 53°35'$ **D.** $\varphi = 60°$

Câu 57: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính độ lớn góc φ tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC).

A. $\varphi = 60°$ **B.** $\varphi \approx 54°23'$ **C.** $\varphi = 45°$ **D.** $\varphi \approx 63°26'$

Câu 58: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của AA'. Góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (MBD) gần bằng góc nào dưới đây nhất?

A. $35°$ **B.** $42°$ **C.** $50°$ **D.** $60°$

Câu 59: Cho hình chóp S.ABCD có đường cao $SA = a$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tang góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng.

A. 1 **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\sqrt{3}$

Câu 60: Cho hình chóp S.ABCD có đường cao SA, đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Câu 61: Cho hình chóp S.ABCD có đường cao $SA = 3a$, đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (DBC) bằng

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Câu 62: Cho tứ diện A.BCD có $BC = a\sqrt{2}$, $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và các cạnh còn lại bằng a. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Câu 63: Cho hình chóp S.ABCD có đường cao $SA = 3a$, đáy là hình chữ nhật ABCD có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$. Tang của góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABD) bằng

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $2\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Câu 64: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ $(0° < \varphi < 90°)$. Tính tang của góc α giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ.

A. $\tan\alpha = \tan\varphi$ **B.** $\tan\alpha = \sqrt{2}\tan\varphi$ **C.** $\tan\alpha = \sqrt{3}\tan\varphi$ **D.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}\tan\varphi$

Câu 65: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = 4AB = 2AD$. Tính sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BD)$ với mặt phẳng (ABCD).

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $\frac{2\sqrt{105}}{21}$ **C.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$ **D.** $\sqrt{5}$

Câu 66: Một miếng bìa hình chữ nhật có chiều rộng là 30cm, chiều dài là 40cm, người ta gấp cạnh dài của hình chữ nhật thành bốn phần bằng nhau và dán lại để tạo thành một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc φ tạo bởi mặt chéo $(ABC'D')$ và (ABCD).

A. $\varphi \approx 56°18'$ **B.** $\varphi \approx 36°52'$ **C.** $\varphi \approx 76°44'$ **D.** $\varphi \approx 71°33'$

Câu 67: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 120°$, $\widehat{BSC} = 90°$, $\widehat{CSA} = 60°$. Độ lớn góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng

A. $90°$ **B.** $120°$ **C.** $45°$ **D.** $30°$

Câu 68: Cho hình chóp S.ABC có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$. Tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SAC) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 1

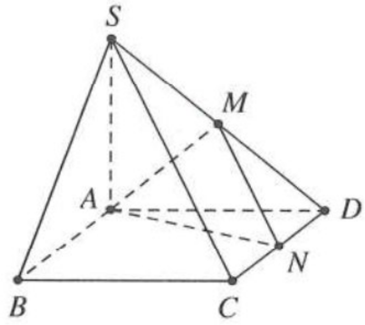
Câu 69: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SCD) và (SBC) tạo với nhau một góc 60°.

A. a **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $a\sqrt{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 70: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = x$. Hai điểm M và N thay đổi trên hai cạnh CB và CD, đặt $CM = x$, $CN = y$. Xác định hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc 45°.

A. $2a^2 + xy = 2a(x + y)$ **B.** $2a^2 + xy = a(x + y)$ **C.** $a^2 + xy = 2a(x + y)$ **D.** $a^2 + xy = a(x + y)$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN



Câu 1: Gọi N là trung điểm của CD $\Rightarrow MN//SC$.

Do đó $\widehat{(AM;SC)} = \widehat{(AM;MN)} = \widehat{AMN}$

Tam giác SAD vuông tại A, có $AM = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$.

Tam giác ADN vuông tại D, có $AN = \sqrt{AD^2 + ND^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A, có $SC = a\sqrt{5} \Rightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\Rightarrow \cos\widehat{AMN} = \dfrac{AM^2 + MN^2 - AN^2}{2.AM.MN} = \dfrac{a^2}{2a.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **Chọn A.**

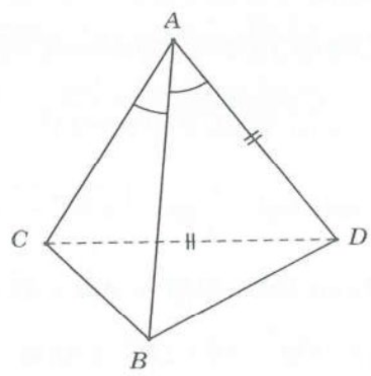
Câu 2: Gọi E là trung điểm của $C'D' \longrightarrow NE//B'D' \Rightarrow \widehat{(MN;B'D')} = \widehat{(MN;NE)} = \widehat{MNE}$.

Dễ thấy $NE = \dfrac{1}{2}B'D' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; Gọi O là tâm hình vuông $A'B'C'D' \Rightarrow MO \perp (A'B'C'D')$

Suy ra tam giác MNO vuông tại O, có $MN = \sqrt{MO^2 + NO^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Tam giác MNE có $MN = ME = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $NE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \cos\widehat{MNE} = \dfrac{MN^2 + NE^2 - ME^2}{2.MN.NE} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$. **Chọn B.**



Câu 3: Ta có $\cos\widehat{(AB;CD)} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}\right|}{AB.CD}$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\right) - \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$= AB.AD.\cos 60° - AB.AC.\cos 60°$

$= AB.AD.\dfrac{1}{2} - AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}AB.AD = -\dfrac{1}{4}AB.CD.$

Do đó $\cos\widehat{(AB;CD)} = \dfrac{\left|-\dfrac{1}{4}AB.CD\right|}{AB.CD} = \dfrac{1}{4}$. **Chọn D.**

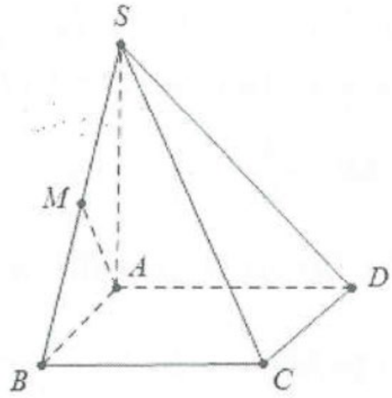
Câu 4: $CD//AB \Rightarrow \widehat{(AM;CD)} = \widehat{(AM;AB)} = \widehat{MAB} = \widehat{MBA}$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AM;CD}\right) = \cos\widehat{MBA} = \dfrac{AB}{SB}.$

Theo bài $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.3^2 = 9\sqrt{3} \Rightarrow SA = 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 6 \Rightarrow \cos\left(\widehat{AM;CD}\right) = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{1}{2}.$

Chọn A.

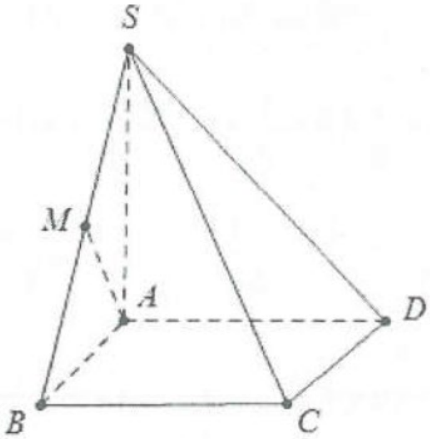


Câu 5: Ta có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right)$ và $\overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SD} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}\right) = -\dfrac{1}{2}SA^2 = -\dfrac{27}{2}.$

$AM = \dfrac{1}{2}SB = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2} = 3$; $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = 6$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AM;SD}\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SD}\right|}{AM.SD} = \dfrac{3}{4}.$ **Chọn C.**



Câu 6: Gọi H là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow A'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(AA';(ABC))}\right) = \widehat{A'AH} = 45°$

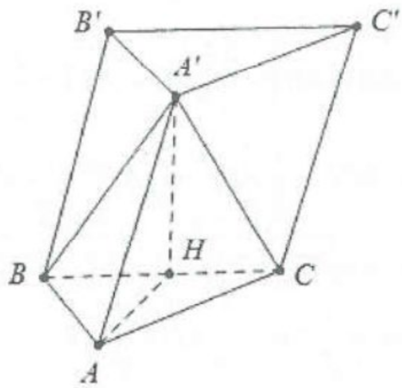
$\Rightarrow \Delta HAA'$ vuông cân tại H $\Rightarrow HA' = AH.$

Cạnh $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 6 \Rightarrow HA' = AH = \dfrac{BC}{2} = 3.$

Ta có: $\begin{cases} AA' = AH\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \\ A'C = \sqrt{A'H^2 + HC^2} = 3\sqrt{2} \end{cases}$

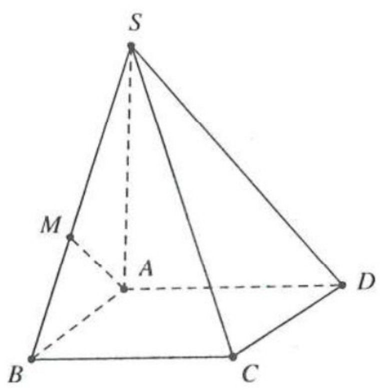
$\Rightarrow \cos\left(\widehat{BB';A'C}\right) = \cos\left(\widehat{AA';A'C}\right) = \left|\cos\widehat{AA'C}\right|$

$= \left|\dfrac{A'A^2 + A'C^2 - AC^2}{2A'A.A'C}\right| = \dfrac{1}{4}.$ **Chọn D.**



Câu 7: Ta có $CD // AB \Rightarrow \left(\widehat{AM;CD}\right) = \left(\widehat{AM;AB}\right) = \widehat{MAB}$

$\Rightarrow \cos\left(\widehat{AM;CD}\right) = \cos\widehat{MAB} = \dfrac{AM^2 + AB^2 - BM^2}{2AM.AB}.$



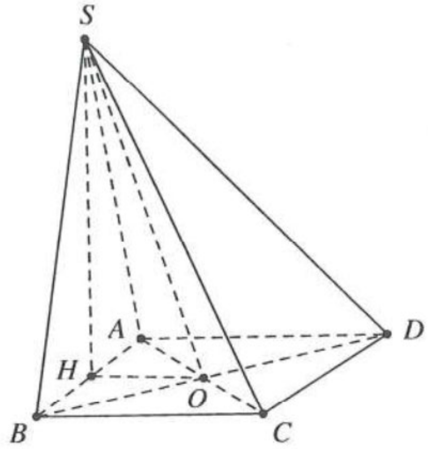
Cạnh $BM=\frac{1}{3}SB=\frac{1}{3}\sqrt{SA^2+AB^2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Ta có $\overrightarrow{SM}=2\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AS}=2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AS}+2\overrightarrow{AB}\Rightarrow 9AM^2=AS^2+4AB^2=6a^2$

$\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\cos\left(\widehat{AM;CD}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **Chọn B.**

Câu 8: Cạnh $AB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{3}$.



Kẻ $SH\perp AB\ \left(H\in AB\right)\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$.

Cạnh $AH=\frac{SA^2}{AB}=\frac{a}{\sqrt{3}}\Rightarrow AH=\frac{1}{3}AB$.

+) $\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{HO}-\overrightarrow{HS}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{HS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{HS}$

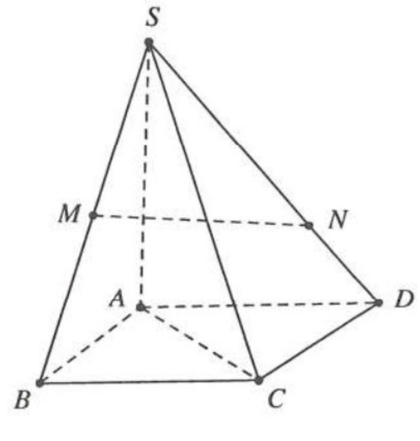
$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{HS}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{HS}.$

+) $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{6}AB^2=-\frac{1}{2}a^2$.

+) $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{HS}\Rightarrow SO^2=\frac{AB^2}{36}+\frac{AD^2}{4}+\overrightarrow{HS}.$

+) $\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{SB^2}\Rightarrow SH=a\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow SO=a\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow\cos\left(\widehat{SO;CD}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{CD}\right|}{SO.CD}=\frac{\sqrt{2}}{6}$. **Chọn D.**

Câu 9: Ta có $\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AS}.$



+) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{SD}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AS}\right)-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AS}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AS}$

$\Rightarrow\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}AB^2-\frac{3}{2}AD^2-\frac{1}{6}SA^2=-\frac{1}{2}a^2.$

+) $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{2a^2+2a^2}=2a.$

+) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AS}$

$\Rightarrow MN^2=\frac{1}{4}AB^2+\frac{4}{9}AD^2+\frac{1}{36}SA^2\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{7}}{3}\Rightarrow\cos\left(\widehat{MN;SC}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{SC}\right|}{MN.SC}=\frac{3\sqrt{7}}{28}$. **Chọn A.**

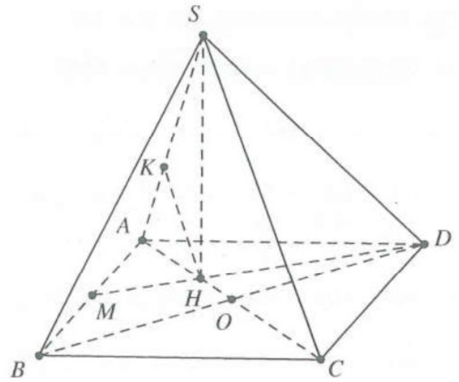
Câu 10: Gọi O là giao điểm của AC và BD ta có H là trọng tâm của tam giác ABD.

+) Đặt $SH=x$ ta có:

$AC = 3a\sqrt{2} \Rightarrow AH = \dfrac{AC}{3} = a\sqrt{2}$

+) $DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{9a^2 + \left(\dfrac{3a}{2}\right)^2} = \dfrac{3a\sqrt{5}}{2}$

+) $DH = \dfrac{2}{3}DM = a\sqrt{5}$ suy ra $SA^2 = h^2 + 2a^2$,



$SD^2 = h^2 + 5a^2$, $AD^2 = 9a^2$

+) Do đó ta có: $SA^2 + SD^2 = AD^2 \Rightarrow h = a$

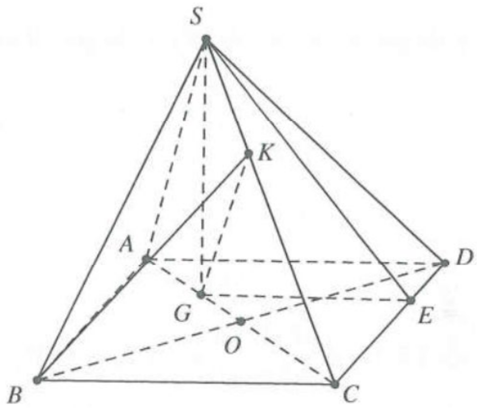
Ta dựng $HK // SC$ khi đó: $\widehat{(DM;SC)} = \widehat{(DH;HK)}$

+) Ta có: $SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \sqrt{a^2 + 8a^2} = 3a \Rightarrow HK = a, DH = a\sqrt{5}$,

Mặt khác: $DK = \sqrt{SD^2 + SK^2} = \sqrt{6a^2 + \left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{22}{3}}$

Do đó $\cos\widehat{DHK} = \dfrac{DH^2 + HK^2 - DK^2}{2.DH.DK} = \dfrac{-2}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\widehat{(DM;SC)} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}}$. **Chọn B.**

Câu 11: Dựng $GE // AD \Rightarrow CE = 2ED$.



Khi đó $GE \perp CD$

Mặt khác $SG \perp CD \Rightarrow \widehat{SEG} = 60°$; $GE = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{2a}{3}$

Suy ra $SG = GE\tan 60° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = h$

+) Trong mp(SAC) dựng $GK // SA$

+) $SA = \sqrt{SG^2 + GA^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{3} + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{3}$

$\Rightarrow GK = \dfrac{2}{3}SA = \dfrac{2a\sqrt{14}}{9}$; $BG = \dfrac{2}{3}\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

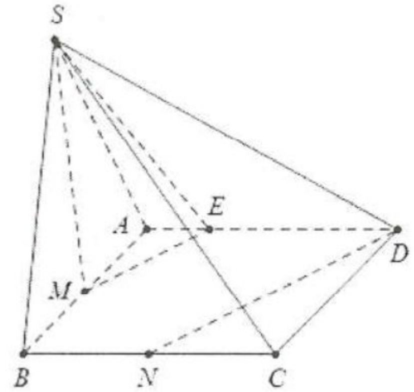
Nhận xét $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp SG \end{cases} \Rightarrow BO \perp OK \Rightarrow BK = \sqrt{BO^2 + OK^2}$

+) $SC = \sqrt{SG^2 + GC^2} = \sqrt{\dfrac{4a^2}{3} + \dfrac{8a^2}{9}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow CK = \dfrac{2}{3}SC = \dfrac{4a\sqrt{5}}{9}, OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

+) $\cos\widehat{SCG} = \dfrac{GC}{SC} = \sqrt{\dfrac{2}{5}} \Rightarrow OK^2 = OC^2 + CK^2 - 2OC.CK\cos\widehat{GCK} = \dfrac{97}{162}a^2 \Rightarrow BK^2 = \dfrac{89}{81}a^2$

+) Do đó $\cos\widehat{KGB}=\dfrac{GB^2+GK^2-BK^2}{2GBGK}=\dfrac{1}{\sqrt{70}}=\cos(SA;BG)$. **Chọn A.**

Câu 12: Kẻ $ME\parallel ND$, với $E\in AD$



$\Rightarrow ND\parallel(SMN)\Rightarrow \widehat{(SM;ND)}=\widehat{SME}$

$ME^2=AE^2+AM^2\Rightarrow ME=\sqrt{AE^2+AM^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do $SA^2+SB^2=AB^2\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S

$\Rightarrow SM=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{2a}{2}=a$.

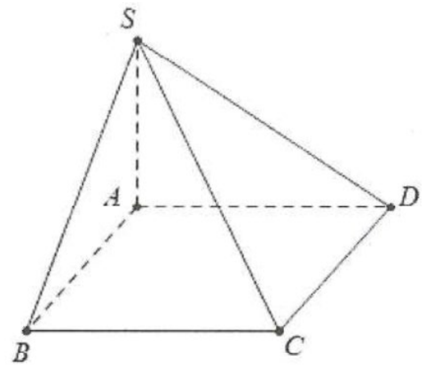
Kẻ $SH\perp AB\Rightarrow SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp AD$ mà $AB\perp AD$.

$\Rightarrow AD\perp(SAB)\Rightarrow SA\perp AD\Rightarrow SE=\sqrt{SA^2+AE^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

+) Xét ΔSME với $ME=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $SE=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $SM=a$, ta có

$\cos\widehat{SME}=\dfrac{SM^2+ME^2-SE^2}{2.SM.ME}=\dfrac{a^2}{2.a.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **Chọn D.**

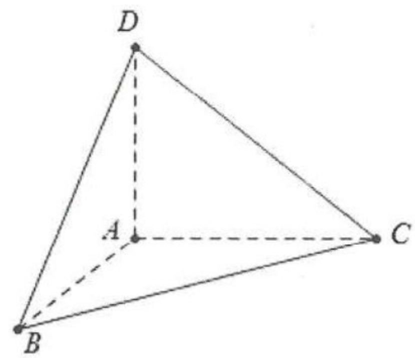
Câu 13: Ta có: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AB$



Mặt khác $AB\perp AD\Rightarrow AB\perp(SAD)$.

Do đó góc giữa SB và (SAD) là góc $\widehat{BSA}$. **Chọn B.**

Câu 14: Do $\begin{cases}AC\perp AB\\AC\perp AD\end{cases}\Rightarrow AC\perp(ABD)$.



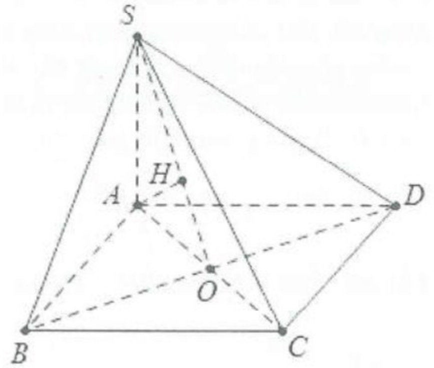
Khi đó góc giữa CD và (ABD) là góc $\widehat{CDA}$.

Tương tự $AD\perp(ABC)\Rightarrow$ góc giữa CD và (ABC) là $\widehat{DCA}$.

$AC\perp(ABC)\Rightarrow$ góc giữa AC và (ABD) là góc $\widehat{CAB}=90^\circ$.

Khẳng định **B** sai (kẻ $AH\perp(BCD)\Rightarrow$ góc giữa AC và (BCD) là góc $\widehat{ACH}$. **Chọn D.**

Câu 15: Ta có ABCD là hình thoi nên: $AO\perp BD$



Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

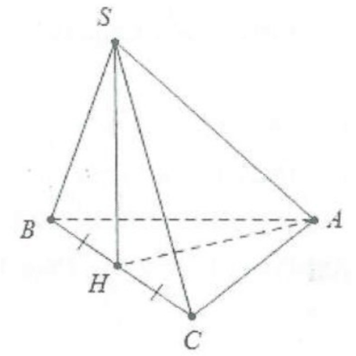
Do đó $BD \perp (SOA)$.

Dựng $AH \perp SO \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SO \\ AH \perp BD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBD)$

Khi đó góc giữa SA và (SBD) là $\widehat{ASH} = \widehat{ASO}$. **Chọn C.**

Câu 16: Do các tam giác ABC đều và SBC đều nên $SH \perp BC$; $AH \perp BC$ và

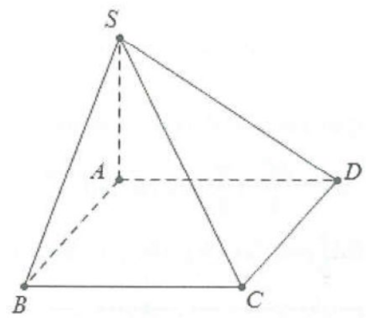
$SH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Do $SH \perp (ABC) \Rightarrow$ góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$.

Mà $\tan\widehat{SAH} = \frac{SH}{AH} = 1 \Rightarrow \widehat{SAH} = 45°$. **Chọn C.**

Câu 17: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

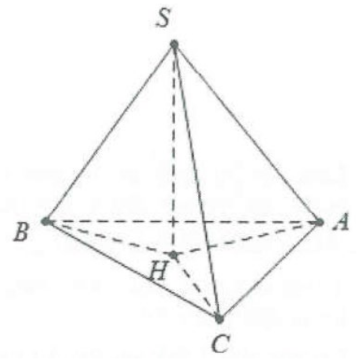


Mặt khác ABCD là hình chữ nhật nên $BC \perp AB$

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Chọn B.

Câu 18: Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt phẳng (ABC).



Theo giả thiết ta có: $\widehat{SAH} = \widehat{ABH} = \widehat{SCH}$

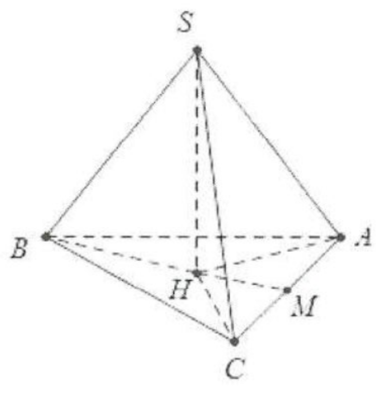
Khi đó $\Delta SAH = \Delta SBH = \Delta SCH \Rightarrow HA = HB = HC$.

Vậy H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. **Chọn B.**

Câu 19: Gọi S.ABC là hình chóp tam giác đều thì hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC và cũng là trọng tâm tam giác ABC

Gọi H là trọng tâm tam giác ABC và M là trung điểm của AC.

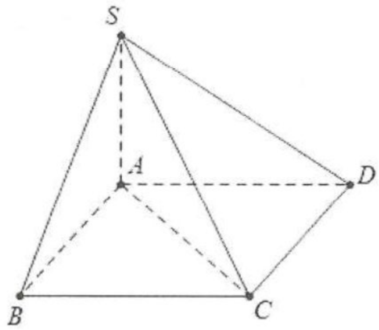
Khi đó $BH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB\sqrt{3}}{3}$.



Lại có: $\widehat{SBH}=60°\Rightarrow BH=SB\cos 60°=\frac{a}{2}\Rightarrow \frac{AB\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{2}$

$\Rightarrow AB=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$ chu vi đáy P của hình chóp đó là

$P=3AB=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn C.**

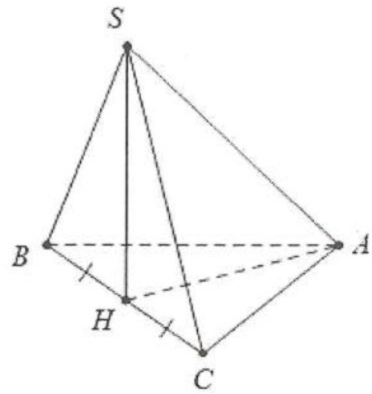


Câu 20: $SA\perp(ABCD)\Rightarrow \widehat{(SC;(ABCD))}=\widehat{SCA}.$

Do ABCD là hình vuông cạnh a $\Rightarrow AC=a\sqrt{2}.$

Tam giác SAC vuông tại S nên $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=2a\sqrt{2}.$

Khi đó $\cos\alpha=\frac{AC}{SC}=\frac{1}{2}$. **Chọn D.**

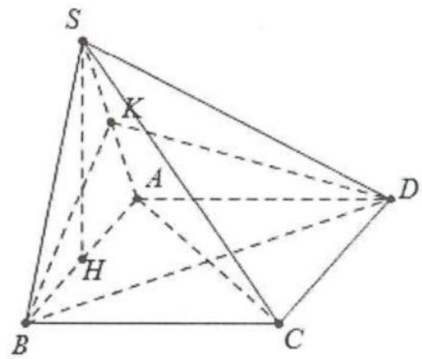


Câu 21: Gọi H là trung điểm của BC thì $SH\perp(ABC)$ và $AH=\frac{BC}{2}=\frac{a}{2}.$

Lại có: $HB=\frac{a}{2}\Rightarrow SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$

Góc giữa SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$, $\tan\widehat{SAH}=\frac{SH}{HA}=\sqrt{3}.$

Do đó $\widehat{SAH}=60°$. **Chọn C.**



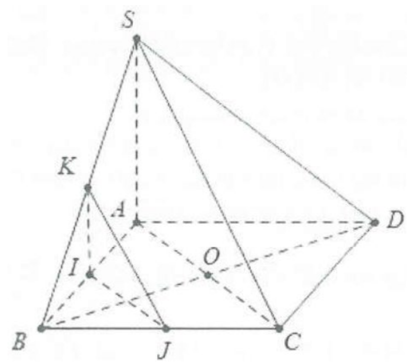
Câu 22: Do SAB là tam giác đều nên H là trung điểm cạnh AB. Ta có: $SH\perp AD$ mà ABCD là hình vuông nên $AD\perp AB\Rightarrow AD\perp(SBA).$

Trong tam giác đều SAB dựng đường cao BK $\Rightarrow$ K là trung điểm của SA.

Lại có: $AD\perp BK\Rightarrow BK\perp(SAD)\Rightarrow \alpha=\widehat{BDK}.$

Đặt $AB=a\Rightarrow BD=a\sqrt{2};BK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Do đó $\sin\alpha=\frac{BK}{BD}=\frac{a\sqrt{3}}{2}:a\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **Chọn D.**



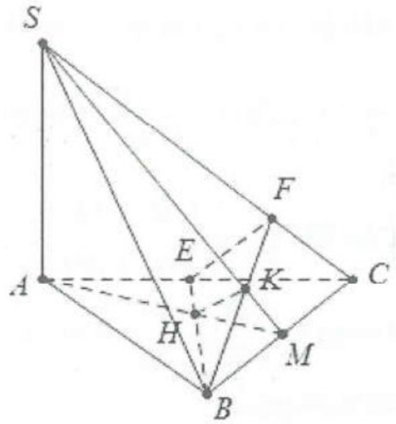
Câu 23: Do $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC).$

Do đó góc giữa BD và (SAC) là $90°$.

Mặt khác $\begin{cases}IK//SA\\KJ//SC\end{cases}$ (tính chất đường trung bình)

Suy ra $(IJK)//(SAC) \Rightarrow BD \perp (IJK)$.

Vậy góc giữa BD và (IJK) là $60° \Rightarrow$ **C** sai. **Chọn C.**



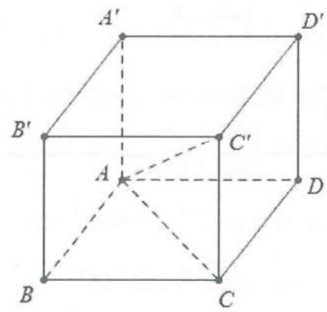
Câu 24: Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Tương tự $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SK \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow$ 4 điểm S, A, H, K đồng phẳng.

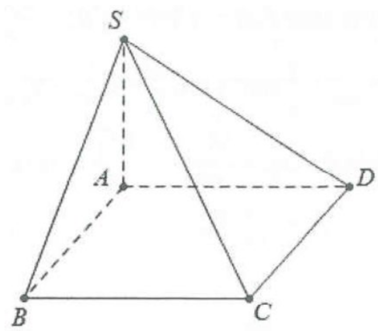
Lại có: $\begin{cases} BH \perp SA \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC.$

Khi đó $\begin{cases} BH \perp SC \\ BK \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK.$

Mặt khác $HK \perp BC \Rightarrow HK \perp (SBC) \Rightarrow$ Số đo góc giữa HK và (SBC) là $90°$. **Chọn B.**



Câu 25: Do $CC' \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa $A'C$ và (ABCD) là góc $\widehat{C'AC} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{CC'}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn B.**

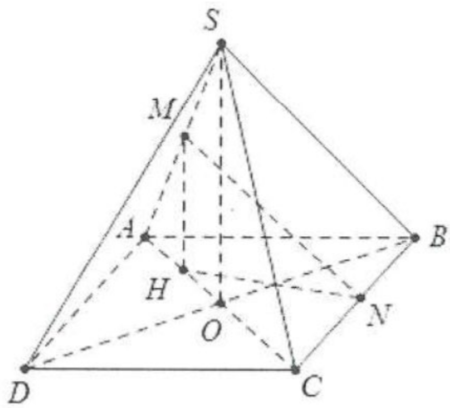


Câu 26: Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC.$

Mặt khác ABCD là hình chữ nhật nên $BC \perp AB$

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\alpha = \widehat{CSB}.$.

Khi đó $\tan\alpha = \frac{BC}{SB} = \frac{BC}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn C.**



Câu 27: Gọi O là tâm hình vuông ABCD thì $SO \perp (ABCD)$.

Gọi H là trung điểm của OC.

Do M, H lần lượt là trung điểm của SA, OC $\Rightarrow$ MH là đường trung bình trong $\Delta SAO \Rightarrow MH//SO$

$\Rightarrow MH \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{MNH} = 45°$

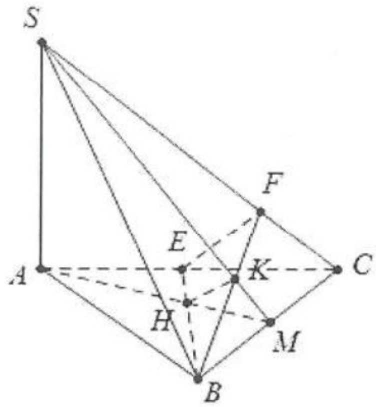
Lại có: $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow HC = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{8}; CN = \frac{a}{2}.$

Do đó: $HN = \sqrt{HC^2 + CN^2 - 2CH.CN.\cos 45°} = \frac{a\sqrt{10}}{8}.$

ΔMHN vuông cân tại H $\Rightarrow HM = HN = \dfrac{a\sqrt{10}}{8}$.

$\Rightarrow SO = 2MH = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$. **Chọn C.**

Câu 28: Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH)$

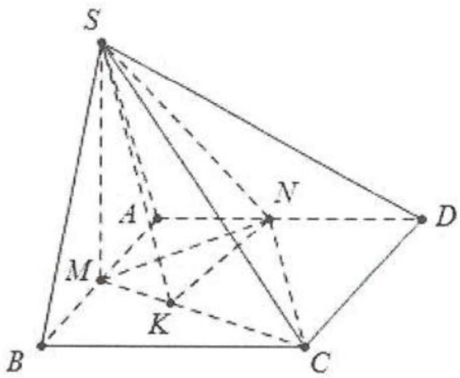


Tương tự $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SK \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow$ 4 điểm S, A, H, K đồng phẳng.

Lại có: $\begin{cases} BH \perp SA \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC.$

Khi đó $\begin{cases} BH \perp SC \\ BK \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK) \Rightarrow \alpha = 90°.$ **Chọn D.**

Câu 29: Ta có $SM \perp (ABCD)$. Dựng $NK \perp MC$



Khi đó $\begin{cases} NK \perp SM \\ NK \perp CM \end{cases} \Rightarrow NK \perp (SMC)$

Lại có: $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; MN = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

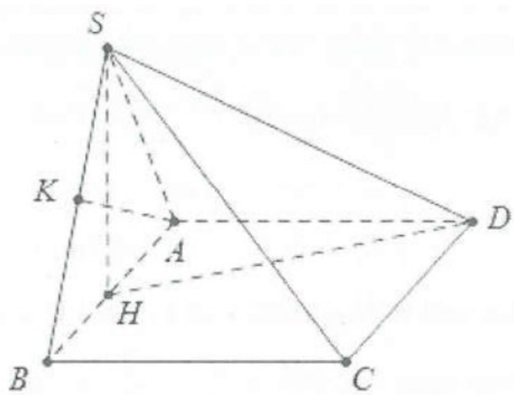
$\Rightarrow SN = \sqrt{SM^2 + MN^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Mặt khác $CM = \sqrt{BM^2 + CB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}; S_{ABCD} = a^2$.

$S_{AMN} = \dfrac{1}{2}AM.AN = \dfrac{a^2}{8}; S_{BMC} = S_{DNC} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow S_{NMC} = S_{ABCD} - S_{AMN} - S_{MBC} - S_{NCD} = \dfrac{3a^2}{8}$.

Khi đó $NK = \dfrac{2S_{NMC}}{CM} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{NK}{SN} = \dfrac{3}{5}$. **Chọn D.**

Câu 30: Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.



Khi đó $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Dựng $AK \perp SB \Rightarrow AK \perp (SBC)$

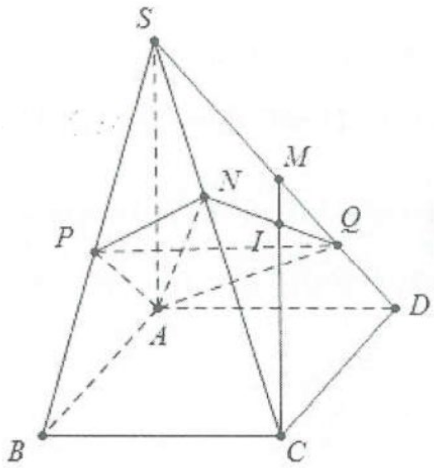
Do $AD // BC \Rightarrow AD // (SBC)$

$\Rightarrow d(D;(SBC)) = d(A;(SBC)) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = \sqrt{SH^2 + AH^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$.

Khi đó $\sin\left(\widehat{SD;(SAB)}\right)=\dfrac{d\left(D;(SBC)\right)}{SD}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **Chọn D.**

Câu 31: Ta có $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases}\Rightarrow BC\perp AP.$



Lại có: $AP\perp SB\Rightarrow AP\perp (SBC)\Rightarrow AP\perp SC.$

Tương tự $AQ\perp SC\Rightarrow SC\perp (APQ)$. Dựng $AN\perp SC$

Gọi $I=CM\cap NQ\Rightarrow CN\perp (APQ);\left(\widehat{CM;(APQ)}\right)=\widehat{CIN}.$

Ta có $\cos\widehat{NCI}=\dfrac{SC^2+CM^2-SM^2}{2.SC.CM}$

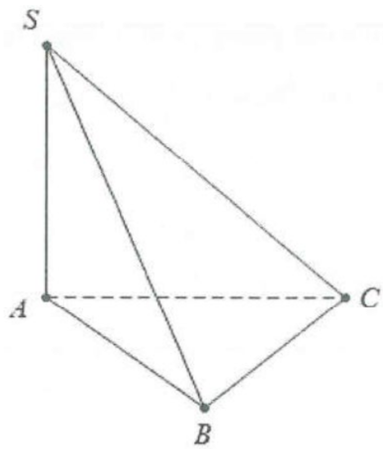
Trong đó $SC=a\sqrt{5};SM=a.$

$CM=\sqrt{\dfrac{SC^2+CD^2}{2}-\dfrac{SD^2}{4}}=a\sqrt{2}\Rightarrow \cos\widehat{NCI}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\Rightarrow \sin\widehat{NCI}=\sqrt{1-\cos^2\widehat{NCI}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\cos\widehat{CIN}=\cos\varphi$. **Chọn A.**

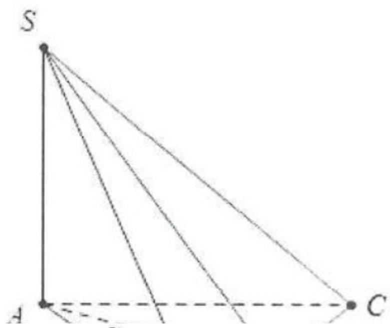
Câu 32: Do $d_1\perp(\alpha)$, $d_2\perp(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha);(\beta)}\right)=\left(\widehat{d_1;d_2}\right)$. **Chọn B.**

Câu 33: Ta có $SA\perp (ABC)\Rightarrow SA\perp BC$



Mặt khác $BC\perp AB\Rightarrow\begin{cases} BC\perp (SBA) \\ BC\perp (SBC)\cap(ABC) \end{cases}\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng góc $\widehat{SBA}$. **Chọn B.**

Câu 34: Dựng $AK\perp BC$, do tam giác ABC đều nên

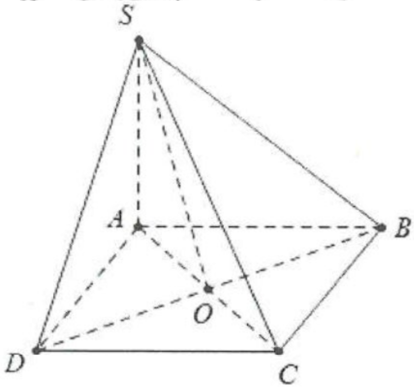


$AK=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}.$

Lại có: $\begin{cases} SA\perp BC \\ AK\perp BC \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} BC\perp (SKA) \\ BC\perp (SBC)\cap(ABC) \end{cases}\Rightarrow$ góc tạo bởi hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SKA}$

Mặt khác $\tan\widehat{SKA}=\dfrac{SA}{AK}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{SKA}\approx 49,6^\circ$. **Chọn B.**

Câu 35: ABCD là hình thoi nên $AC\perp BD$ tại O



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA \Rightarrow \begin{cases} BD \perp (SOA) \\ BD = (SBD) \cap (ABC) \end{cases}$

Suy ra $\widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SOA} \Rightarrow \tan\widehat{SOA} = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{a}{a} = 1$

Vậy $\widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SOA} = 45^\circ$. **Chọn C.**

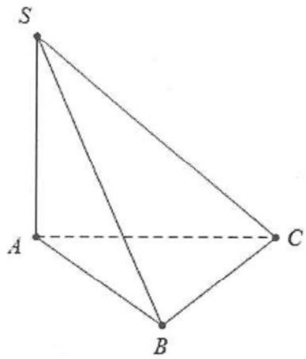
Câu 36: Ta có công thức: $S' = S\cos\varphi$

Trong đó φ là góc giữa mặt phẳng (P) và (ABC)

Do đó: $S_{A'B'C'} = S_{ABC}\cos\varphi$. **Chọn B.**

Câu 37: Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow \Delta ABC$ là hình chiếu của ΔSBC trên mặt phẳng (ABC). Mặt khác $\varphi = \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)$.

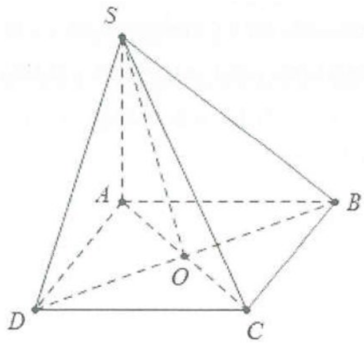
Ta có công thức: $S_{ABC} = S_{SBC}.\cos\varphi$. **Chọn A.**



Câu 38: ABCD là hình vuông nên $AC \perp BD$ tại O

Lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SOA)$

Do đó $\widehat{((SBD);(ABCD))} = \widehat{SOA}$. **Chọn A.**



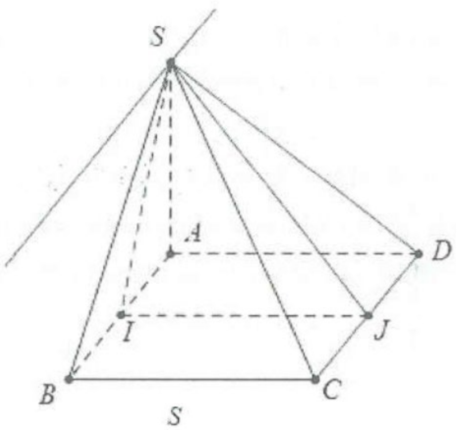
Câu 39: Gọi $d = (SAB) \cap (SCD)$

Do $AB//CD \Rightarrow d//AB//CD$

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$

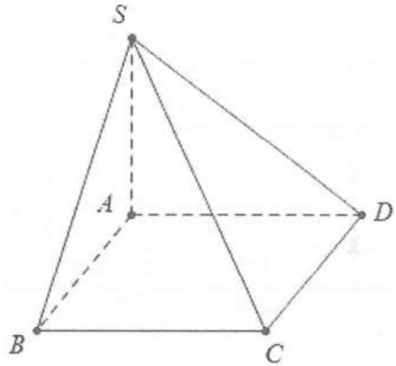
Lại có: $AD \perp AB \Rightarrow AB \perp (SAD)$

Vì $d//AB \Rightarrow d \perp (SAD) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng góc giữa SA và SD. **Chọn A.**



Câu 40: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$

Lại có: $AB \perp AD \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$



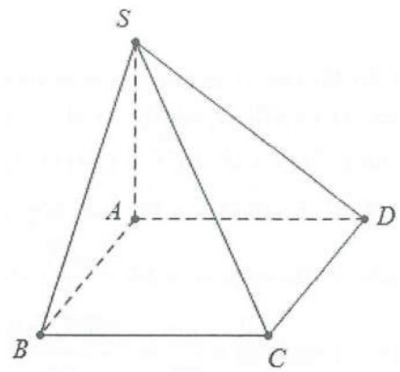
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) bằng $90°$. **Chọn C.**

Câu 41: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

Mặt khác $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SDA)$

Mà $CD = (SCD) \cap (ABCD) \Rightarrow \widehat{((SCD);(ABCD))} = \widehat{SDA}$

Lại có: $\tan \widehat{SDA} = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAD} = 60°$. **Chọn B.**

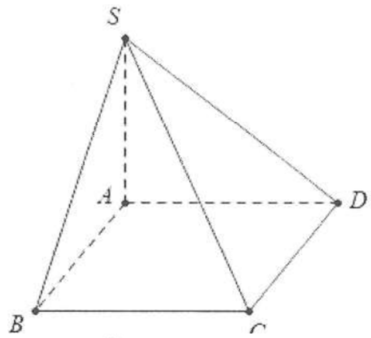


Câu 42: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$

Mặt khác $CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SDA) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và (SAD) bằng $90°$.

Chọn A.



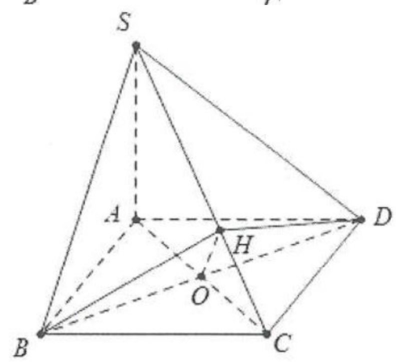
Câu 43: ABCD là hình vuông nên $BD \perp AC$

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Lại có: $OH \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHD)$

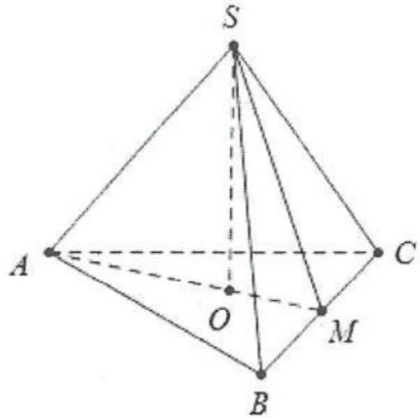
Mà $SC = (SBC) \cap (SCD) \Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng góc giữa BH và DH. **Chọn D.**



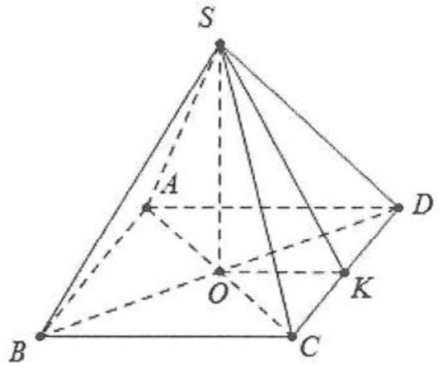
Câu 44: Ta có $\widehat{((SBC);(ABCD))} = \widehat{SMO} = \varphi$, trong đó ΔSBC đều nên $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Lại có: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OM = \dfrac{AM}{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{\sqrt{SM^2 - OM^2}}{OM} = 2\sqrt{2}$. **Chọn A.**



Câu 45: Gọi O là tâm của hình vuông ABCD



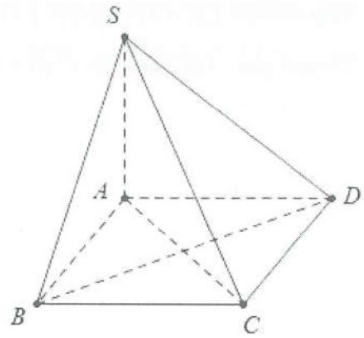
$\Rightarrow SO\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SO\perp CD$

Dựng $OK\perp CD\Rightarrow CD\perp\left(SKO\right)\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (SCD) và mặt phẳng đáy của chóp bằng $\widehat{SKO}$

ΔSCD đều cạnh a $\Rightarrow SK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2};OK=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2}$

Do đó $\tan\widehat{SKO}=\dfrac{SO}{OK}=\dfrac{\sqrt{SK^2-OK^2}}{OK}=\sqrt{2}$. **Chọn C.**

Câu 46: Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC=AB\sqrt{2}$

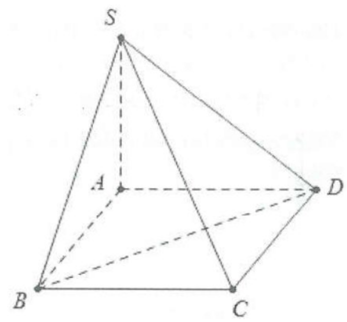


Suy ra $AB=a\sqrt{2}$

Mặt khác $SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp BC$ mà $AB\perp BC$

Do đó $BC\perp\left(SBA\right)\Rightarrow\left(\widehat{\left(SBC\right);\left(ABC\right)}\right)=\widehat{SBA}$

Lại có: $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^\circ$. **Chọn A.**

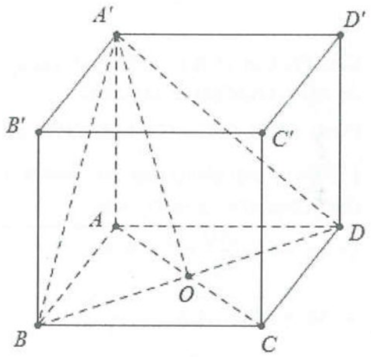


Câu 47: $\begin{cases}SA\perp\left(BAD\right)\\SA=\left(SAB\right)\cap\left(SAD\right)\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{\left(SAB\right);\left(SAD\right)}\right)=\widehat{BAD}$

Do $AB=AD=BD=2a\Rightarrow\Delta ABD$ đều nên $\widehat{BAD}=60^\circ$

Vậy $\overline{\left(\left(SAB\right);\left(SAD\right)\right)}=60^\circ$. **Chọn A.**

Câu 48: Do $\left(ABCD\right)//\left(A'B'C'D'\right)$



Do đó $\left(\widehat{\left(A'BD\right);\left(A'B'C'\right)}\right)=\left(\widehat{\left(A'BD\right);\left(ABC\right)}\right)=\varphi$

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD\Rightarrow AO\perp BD$

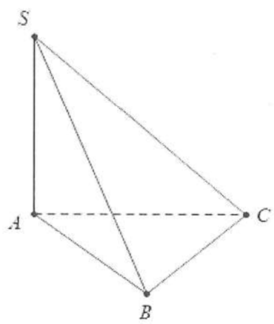
Mặt khác $BD\perp AA'\Rightarrow BD\perp\left(A'AO\right)$

Do đó $\varphi=\widehat{A'OA}$

Đặt $AB=a\Rightarrow\begin{cases}AA'=a\\OA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ suy ra $\tan\varphi=\dfrac{AA'}{OA}=\dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}$

$\Rightarrow\tan\varphi=\sqrt{2}\Rightarrow\varphi\approx54^\circ44'$. **Chọn A.**

Câu 49: $SA\perp\left(CAB\right)\Rightarrow\left(\widehat{\left(SAC\right);\left(SAB\right)}\right)=\widehat{CAB}$



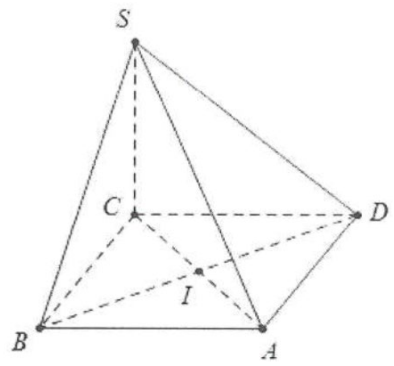
Do tam giác ABC đều nên $\widehat{CAB}=60^\circ$. **Chọn C.**

Câu 50: Do ABCD là hình thoi nên $AC\perp BD$

Mặt khác $SC\perp(ABCD)\Rightarrow SC\perp BD$

Do đó $BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) bằng 90°. **Chọn C.**



Câu 51: Gọi O là tâm của hình vuông ABCD

$\Rightarrow SO\perp(ABCD)\Rightarrow SO\perp CD$

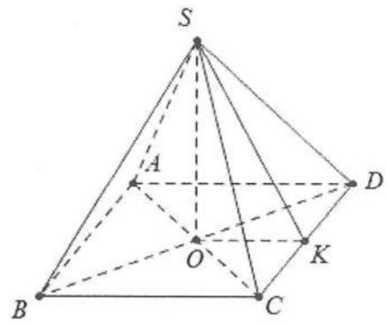
Dựng $OK\perp CD\Rightarrow CD\perp(SKO)\Rightarrow$ góc giữa mặt bên (SCD) và mặt phẳng đáy của chóp bằng $\widehat{SKO}=\varphi$

Đặt $AB=AD=a\Rightarrow SC=2a$

Ta có: $OK=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{a}{2};CK=\dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow SK=\sqrt{SC^2-CK^2}=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Khi đó $\cos\varphi=\dfrac{OK}{SK}=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\Rightarrow\varphi\approx 75^\circ 2'$. **Chọn A.**



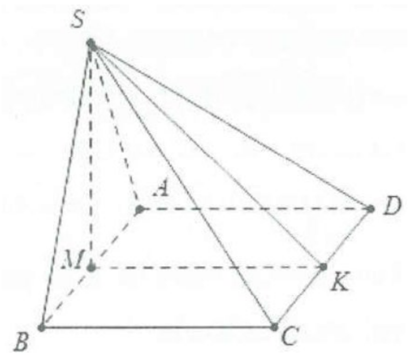
Câu 52: Dựng $MK\perp CD$, do $SM\perp(ABCD)\Rightarrow SM\perp CD$

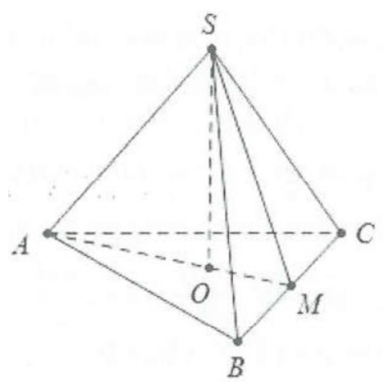
Khi đó ta có: $\begin{cases}CD=(SCD)\cap(ABCD)\\CD\perp(SKM)\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\widehat{(SCD);(ABCD)}\right)=\widehat{SKM}=\varphi$

Do ΔSAB đều nên $SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2},MK=AD=a$

$\Rightarrow\tan\varphi=\dfrac{AM}{MK}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\varphi\approx 40^\circ 53'$. **Chọn C.**





Câu 53: Ta có $\begin{cases} S_{OBC} = S_{SBC}\cos\varphi \\ S_{OAB} = S_{SAB}\cos\varphi \\ S_{OAC} = S_{SAC}\cos\varphi \end{cases}$ với $\varphi = 30°$ là góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy.

Do đó diện tích đáy bằng $S_đ = S_{xq}.\cos\varphi = 90.\cos 30° \approx 78cm^2$.

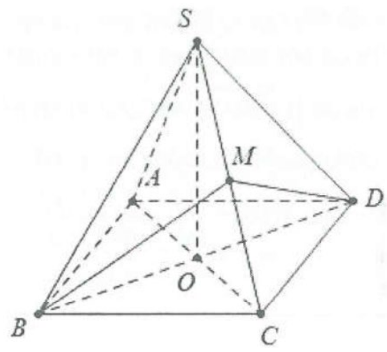
Chọn D.

Câu 54: Gọi O là tâm của hình vuông ABCD

$\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD.$

Mặt khác $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (MBD) \perp (SAC)$

nên góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) bằng $90°$. **Chọn C.**

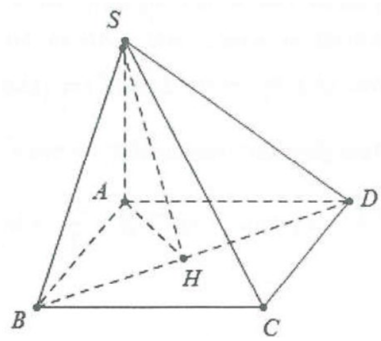


Câu 55: Ta có $BD = (SBD) \cap (ABCD)$

Dựng $AH \perp BD$, mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Do đó $BD \perp (SHA) \Rightarrow \left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \widehat{SHA}$

Lại có: $AH = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = \sqrt{5}.$



Chọn A.

Câu 56: Ta có $(ABC)//(A'B'C')$

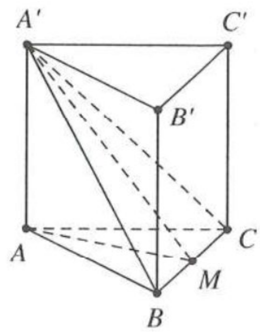
$\Rightarrow \left(\widehat{(A'BC);(A'B'C')}\right) = \left(\widehat{(A'BC);(ABC)}\right)$

Lại có $AB \perp BC$ mà $AA' \perp BC \longrightarrow BC \perp (A'AB)$

Khi đó $\left(\widehat{(A'BC);(ABC)}\right) = \widehat{(A'B;AB)} = \widehat{A'BA}$

Tam giác $A'AB$ vuông tại A, có $\cos\widehat{A'BA} = \dfrac{AB}{A'B} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A'BA} = 60°$

Vậy $\varphi = 60°$. **Chọn D.**



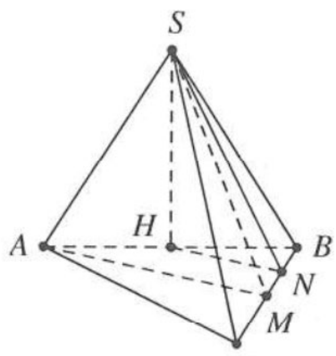
Câu 57: Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABC)$

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BM

Ta có $AM \perp BC$ mà $HN//AM \Rightarrow HN \perp BC$

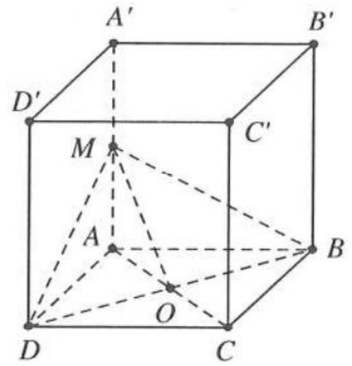
Lại có $SH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHN) \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \widehat{SNH}$

Tam giác SHN vuông tại H, có



$\tan\widehat{SNH} = \dfrac{SH}{HN} = SH : \dfrac{AM}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = 2 \Rightarrow \widehat{SNH} \approx 63°26'$

Vậy $\varphi \approx 63°26'$. **Chọn D.**



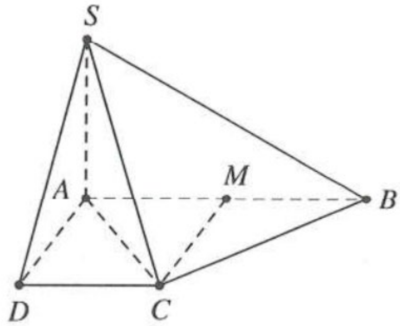
Câu 58: Gọi O là tâm hình vuông ABCD

Ta có $MA \perp BD$; $AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (MAO)$

Khi đó $\left(\widehat{(MBD);(ABCD)}\right) = \left(\widehat{MO;OA}\right) = \widehat{MOA}$

Tam giác MAO vuông tại A, có

$\tan\widehat{MOA} = \dfrac{MA}{OA} = \dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{MOA} \approx 35°15'$. **Chọn A.**



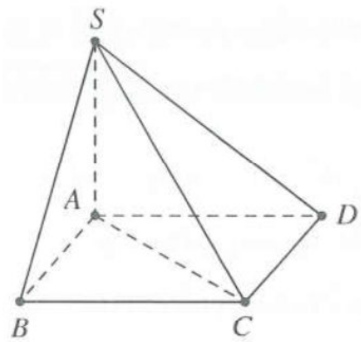
Câu 59: Gọi M là trung điểm AB $\Rightarrow$ ADCM là hình vuông

Khi đó $AC = a\sqrt{2}$; $AM \perp AB$ và $AB = 2a \Rightarrow AC \perp BC$

Mà $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \widehat{SCA}$

Tam giác SAC vuông tại S, có $\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\tan\left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **Chọn B.**



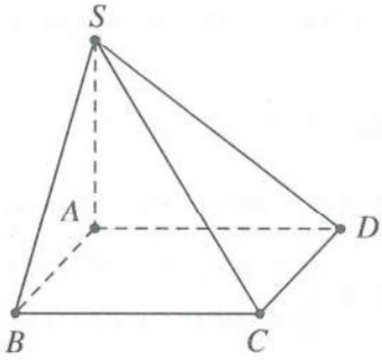
Câu 60: Ta có SA là đường cao $\Rightarrow SA \perp (ABC)$

Lại có $(SAB) \cap (SAC) = SA$; $\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ (SAC) \cap (ABC) = AC \end{cases}$

Suy ra $\left(\widehat{(SAB);(SAC)}\right) = \left(\widehat{AB;AC}\right) = \widehat{BAC}$

Tam giác ABC vuông tại B, có $\tan\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 30° \longrightarrow \left(\widehat{(SAB);(SAC)}\right) = 30°$. **Chọn D.**



Câu 61: Ta có $SA \perp BC$ mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB)$

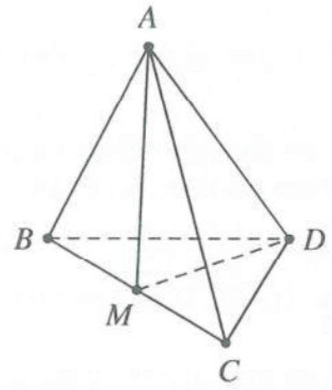
Lại có $(SBC) \cap (ABCD) = BC$; $\begin{cases} (SBC) \cap (SAB) = SB \\ (ABCD) \cap (SAB) = AB \end{cases}$

Suy ra $\left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SB;AB}\right) = \widehat{SBA}$

Tam giác SAB vuông tại A, có $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{SBA} = 60° \longrightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABCD)}\right) = 60°$. **Chọn B.**

Câu 62: Gọi M là trung điểm của BC



- ΔABC cân tại $A \longrightarrow AM \perp BC$ (1)
- ΔBCD cân tại $D \longrightarrow DM \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $BC \perp (ADM) \Rightarrow \left(\widehat{(ABC);(BCD)}\right) = \widehat{AMD}$

Tam giác ABM vuông tại M $\Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

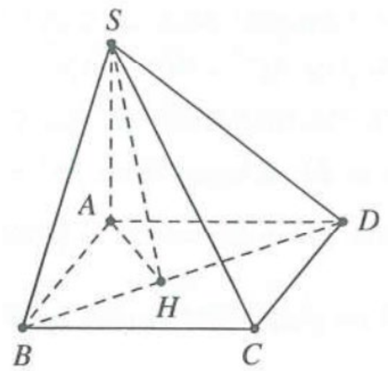
Tam giác BDM vuông tại M $\Rightarrow DM = \sqrt{BD^2 - BM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét tam giác ADM có $AM = DM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Suy ra $\cos\widehat{AMD} = \dfrac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2.AM.DM} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AMD} = 120°$.

Vậy $\left(\widehat{(ABC);(BCD)}\right) = 180° - 120° = 60°$. **Chọn B.**

Câu 63: Kẻ $AH \perp BD\ (H \in BD)$ mà $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAH)$

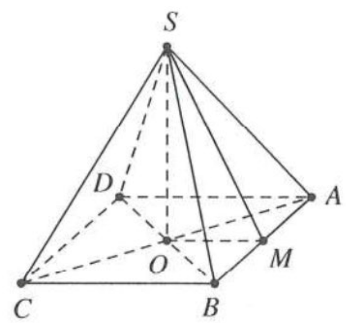


Ta có $\begin{cases} (SAH) \cap (SBD) = SH \\ (SAH) \cap (ABCD) = AH \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBD);(ABCD)}\right) = \widehat{SHA}$

Tam giác ABD vuông tại A, có $AH = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAH vuông tại A, có $\tan\widehat{SHA} = \dfrac{SA}{AH} = 2\sqrt{3}$. **Chọn C.**

Câu 64: Chọn $\varphi = 60°$. Gọi O là tâm hình vuông ABCD



$\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SA;(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SA;AO}\right) = \widehat{SAO} = 60°$

Tam giác SAO vuông tại O, có $\tan\widehat{SAO} = \dfrac{SO}{OA} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

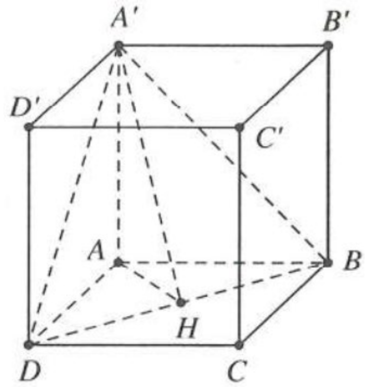
Gọi M là trung điểm $AB \longrightarrow AB \perp (SMO)$

Suy ra $\left(\widehat{(SAB);(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SM;OM}\right) = \widehat{SMO} = \alpha$

Tam giác SMO vuông tại O, có $\tan\widehat{SMO} = \dfrac{SO}{OM} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}\tan\varphi$. **Chọn B.**

Câu 65: Chọn $AA' = 4AB = 2AD = 4 \Rightarrow AA' = 4; \begin{cases} AB = 1 \\ AD = 2 \end{cases}$



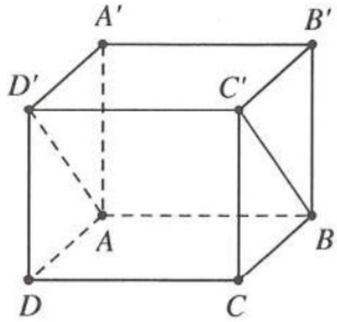
Kẻ $AH \perp BD\ (H \in BD)$ mà $AA' \perp BD \Rightarrow BD \perp (A'AH)$

Ta có $\begin{cases} (A'AH) \cap (A'BD) = A'H \\ (A'AH) \cap (ABCD) = AH \end{cases} \Rightarrow \widehat{((A'BD);(ABCD))} = \widehat{A'AH}$

Tam giác ABD vuông tại A, có $AH = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Tam giác $A'AH$ vuông tại A, có $\tan\widehat{SHA} = \dfrac{A'A}{AH} = 2\sqrt{5}$. **Chọn A.**

Câu 66: Gấp miếng bìa ta được hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$



Theo giả thiết, ta có $AA' = 30$, ABCD là hình vuông cạnh 10

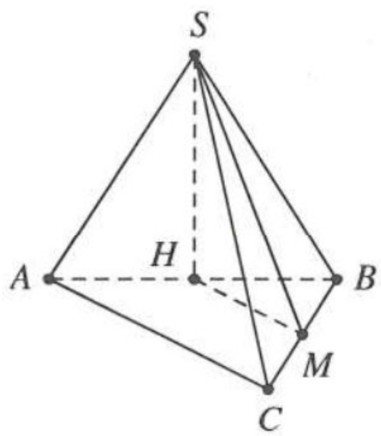
Ta có $AD \perp AB$; $AA' \perp AB \Rightarrow AB \perp (ADD'A')$

$\Rightarrow \left(\widehat{(ABC'D');(ABCD)}\right) = \widehat{(D'A;AD)} = \widehat{D'AD}$

Tam giác $D'AD$ vuông tại D, có $\tan\widehat{D'AD} = \dfrac{DD'}{AD} = 3$

Suy ra $\widehat{D'AD} = \arctan 3 = 71°33'$. Vậy $\varphi \approx 71°33'$. **Chọn D.**

Câu 67: Đặt $SA = SB = SC = a$



- Tam giác SAB có $\widehat{ASB} = 120° \longrightarrow AB = \sqrt{3}$
- Tam giác SBC có $\widehat{BSC} = 90° \longrightarrow BC = \sqrt{2}$
- Tam giác SCA có $\widehat{CSA} = 60° \longrightarrow AC = 1$

Suy ra $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

Do đó, hình chiếu H của S trên (ABC) là trung điểm AB

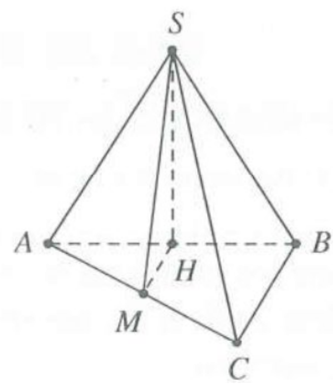
Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow HM // AC \Rightarrow HM \perp BC$

Mà $SH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHM) \Rightarrow \left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \widehat{SMH}$

Tam giác SHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{HM} = 1$

Vậy $\widehat{SMH} = 45° \longrightarrow \widehat{((SBC);(ABC))} = 45°$. **Chọn C.**

Câu 68: Đặt $SA = SB = SC = a$



- Tam giác SAB có $\widehat{ASB} = 120° \longrightarrow AB = \sqrt{3}$
- Tam giác SBC có $\widehat{BSC} = 90° \longrightarrow BC = \sqrt{2}$
- Tam giác SCA có $\widehat{CSA} = 60° \longrightarrow AC = 1$

Suy ra $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

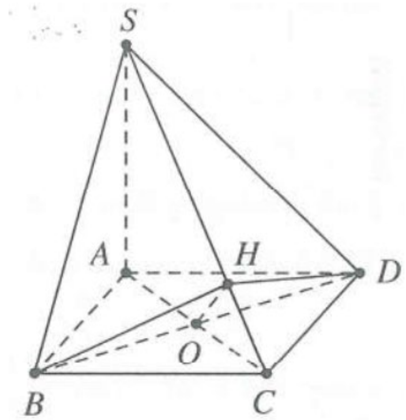
Do đó, hình chiếu H của S trên (ABC) là trung điểm AB

Gọi M là trung điểm AC $\Rightarrow HM // BC \Rightarrow HM \perp AC$

Mà $SH \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHM) \Rightarrow \left(\widehat{(SAC);(ABC)}\right) = \widehat{SMH}$

Tam giác SHM vuông tại H, có $\tan\widehat{SMH} = \dfrac{SH}{HM} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy $\tan\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn A.**



Câu 69: Kẻ $OH \perp SC$ $(H \in SC)$ mà $BD \perp SC \Rightarrow SC \perp (HBD)$

Ta có $(HBD) \cap (SCD) = HD$; $(HBD) \cap (SBC) = HB$

Suy ra $\left(\widehat{(SBC);(SCD)}\right) = \left(\widehat{BH;DH}\right) = \widehat{BHD} = \left[\begin{array}{l} 60^\circ \\ 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \end{array}\right.$

▪ **TH1.** $\widehat{BHD} = 60^\circ$ mà $BH = DH \Rightarrow \Delta HBD$ đều $\Rightarrow BH = a\sqrt{2}$

Tam giác SAB vuông tại $A \longrightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = x^2 + a^2$

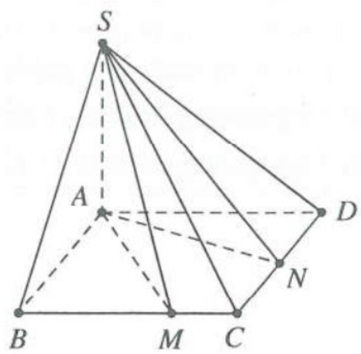
Tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{1}{x^2 + a^2} + \dfrac{1}{a^2} \longrightarrow$ vô nghiệm (loại).

▪ **TH2.** $\widehat{BHD} = 120^\circ$ mà $BH = DH \Rightarrow BH = a\sqrt{2} : \sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Tam giác SAB vuông tại $A \longrightarrow SB^2 = SA^2 + AB^2 = x^2 + a^2$

Tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{BC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(a\sqrt{6}\right)^2} = \dfrac{1}{x^2 + a^2} + \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow x = a$. **Chọn A.**



Câu 70: $SA \perp (AMN) \Rightarrow \left(\widehat{(SAM);(SAN)}\right) = \widehat{MAN} = 45^\circ$

Lại có $\widehat{BAM} + \widehat{MAN} + \widehat{NAD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAM} + \widehat{NAD} = 45^\circ$

Khi đó $\tan 45^\circ = \tan\left(\widehat{BAM} + \widehat{NAD}\right) = \dfrac{\tan\widehat{BAM} + \tan\widehat{NAD}}{1 - \tan\widehat{BAM}.\tan\widehat{NAD}}$

$\Leftrightarrow 1 = \dfrac{\dfrac{BM}{AB} + \dfrac{ND}{AD}}{1 - \dfrac{BM}{AB}.\dfrac{ND}{AD}} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{a-x}{a}.\dfrac{a-y}{a} = \dfrac{a-x}{a} + \dfrac{a-y}{a}$

$\Leftrightarrow a^2 - (a-x)(a-y) = a(2a - x - y) \Leftrightarrow 2a^2 + xy = 2a(x+y)$

Chọn A.