Bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p,q,r

Võ Thành Văn
Lớp 11 Toán-Khối chuyên THPT-ĐHKH Huế

Như các bạn đã biết, bất đẳng thức Schur là một bất đẳng thức mạnh và có nhiều ứng dụng, tuy nhiên nó vẫn còn khá xa lạ với nhiều bạn học sinh THCS cũng như THPT. Qua bài viết này, tôi muốn cũng cấp thêm cho các bạn một kĩ thuật để sử dụng tốt BDT Schur, đó là kết hợp với phương pháp đổi biến p, q, r.
Trước hết, tôi xin nhắc lại về bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p, q, r.

1 Bất đẳng thức Schur

Định lý 1 (Bất đẳng thức Schur) *Với mọi số thực không âm a, b, c, k, ta luôn có*

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Hai trường hợp quen thuộc được sử dụng nhiều là $k=1$ và $k=2$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0 \tag{i}$$

$$a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b) \geq 0 \tag{ii}$$

2 Phương pháp đổi biến p, q, r

Đối với một số bài bất đẳng thức thuần nhất đối xứng có các biến không âm thì ta có thể đổi biến lại như sau
Đặt $p=a+b+c, q=ab+bc+ca, r=abc$. Và ta thu được một số đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) &= pq-3r \\
(a+b)(b+c)(c+a) &= pq-r \\
ab(a^2+b^2)+bc^(b^2+c^2)+ca(c^2+a^2) &= p^2q-2q^2-pr \\
(a+b)(a+c)+(b+c)(b+a)+(c+a)(c+b) &= p^2+q \\
a^2+b^2+c^2 &= p^2-2q \\
a^3+b^3+c^3 &= p^3-3pq+3r \\
a^4+b^4+c^4 &= p^4-4p^2q+2q^2+4pr \\
a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= q^2-2pr \\
a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 &= q^3-3pqr+3r^2 \\
a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 &= q^4-4pq^2r+2p^2r^2+4qr^2
\end{aligned}$$

Đặt $L=p^2q^2+18pqr-27r^2-4q^3-4p^3r$, khi đó

$$\begin{aligned}
a^2b+b^2c+c^2a &= \frac{pq-3r \pm \sqrt{L}}{2} \\
(a-b)(b-c)(c-a) &= \pm\sqrt{L}
\end{aligned}$$

Có thể thấy ngay lợi ích của phương pháp này là mối ràng buộc giữa các biến p, q, r mà các biến a, b, c ban đầu không có như

$$\begin{aligned}
p^2 &\geq 3q\\
p^3 &\geq 27r\\
q^2 &\geq 3pr\\
pq &\geq 9r\\
2p^3+9r &\geq 7pq\\
p^2q+3pr &\geq 4q^2\\
p^4+4q^2+6pr &\geq 5p^2q
\end{aligned}$$

Những kết quả trên đây chắc chắn là chưa đủ, các bạn có thể phát triển thêm nhiều đẳng thức, bất đẳng thức liên hệ giữa 3 biến p, q, r. Và điều quan trọng mà tôi muốn nói đến là từ bất đẳng thức (i) và (ii), ta có

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} \text{ (từ (i))}$$

$$r \geq \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p} \text{ (từ (ii))}$$

Tuy nhiên trong một số trường hợp thì có thể các đại lượng $4q-p^2$có thể nhận giá trị âm lẫn giá trị dương nên ta thường sử dụng

$$r \geq \max\left\{0, \frac{p(4q-p^2)}{4}\right\}$$

$$r \geq \max\left\{0, \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}\right\}$$

Có lẽ đến đây các bạn đã hiểu được phần nào về bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p, q, r. Sau đây là một số ví dụ minh họa, nhưng trước hết, các bạn hãy tập làm thử rồi xem đáp án sau

3 Các ví dụ minh họa

3.1 Bất đẳng thức Schur

Ví dụ 1 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}} \geq 1.$$

(Võ Thành Văn)

Lời giải. Đặt

$$P=\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}}$$

$$\begin{aligned}
Q &= 8ab(4a+4b+c)+8bc(4b+4c+a)+8ca(4c+4a+b)\\
&= 32(a+b+c)(ab+bc+ca)-72abc
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$P^2 \cdot Q \geq 8(a+b+c)^3$$

Ta cần chứng minh

$$8(a+b+c)^3 \geq Q$$
$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^3 \geq 32(a+b+c)(ab+bc+ca) - 72abc$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc \text{ (đúng theo bất đẳng thức Schur).}$$

Vậy ta có đpcm. □

Ví dụ 2 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

(APMO 2004)

LỜI GIẢI. Khai triển bất đẳng thức trên, ta cần chứng minh

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) + 4(a^2+b^2+c^2) + 8 \geq 9(ab+bc+ca)$$

Ta có

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$
$$(a^2b^2+1)+(b^2c^2+1)+(c^2a^2+1) \geq 2(ab+bc+ca)$$

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2+1+1 &\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{9abc}{a+b+c} \\ &\geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2 \text{ (theo bất đẳng thức Schur)} \end{aligned}$$

Áp dụng các bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned} &(a^2b^2c^2+2)+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3)+4(a^2+b^2+c^2) \\ &\geq 2(ab+bc+ca)+4(ab+bc+ca)+3(a^2+b^2+c^2) \\ &\geq 9(ab+bc+ca). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 3 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$2(a^2+b^2+c^2)+abc+8 \geq 5(a+b+c).$$

(Trần Nam Dũng)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 6VT &= 12(a^2+b^2+c^2)+3(2abc+1)+45-5\cdot 2\cdot 3(a+b+c) \\ &\geq 12(a^2+b^2+c^2)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+45-5\left[(a+b+c)^2+9\right] \\ &= 7(a^2+b^2+c^2)+\frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}}-10(ab+bc+ca) \\ &\geq 7(a^2+b^2+c^2)+\frac{27abc}{a+b+c}-10(ab+bc+ca) \end{aligned}$$

Mặt khác, sử dụng bất đẳng thức Schur,

$$\frac{9}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&7(a^2+b^2+c^2)+\frac{27}{a+b+c}-10(ab+bc+ca)\\
&\geq \; 7(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)-3(a^2+b^2+c^2)-10(ab+bc+ca)\\
&= \; 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 4 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^3+c^3}+\frac{b}{a^3+c^3}+\frac{c}{a^3+b^3}\geq \frac{18}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}.$$

(Michael Rozenberg)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)}{b^3+c^3}\geq \frac{18(a+b+c)}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2}{b^3+c^3}+\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+c^2-bc}\geq \frac{18(a+b+c)}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^3+c^3}\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\limits_{cyc}a^2(b^3+c^3)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+c^2-bc}\geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}a(b^2+c^2-bc)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\limits_{cyc}a^2(b^3+c^3)}+\frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}a(b^2+c^2-bc)}\geq \frac{18(a+b+c)}{5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}$$

Giả sử $a+b+c=1$ và đặt $ab+bc+ca=q, abc=r \Rightarrow r\geq \max\left\{0,\frac{(4q-1)(1-q)}{6}\right\}$. Ta cần chứng minh

$$\frac{(1-2q)^2}{q^2-(q+2)r}+\frac{1}{q-6r}\geq \frac{18}{5-11q}$$

Bất đẳng thức cuối dễ dàng chứng minh bằng cách xét 2 trường hợp $1\geq 4q$ và $4q\geq 1$.
Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 5 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a^4+b^4+c^4=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1.$$

(Moldova TST 2005)

LỜI GIẢI. Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta cần chứng minh

$$49-8(ab+bc+ca)+(a+b+c)abc \le 64-16(ab+bc+ca)+4(a+b+c)abc-a^2b^2c^2$$

$$\Leftrightarrow 16+3(a+b+c)abc \ge a^2b^2c^2+8(ab+bc+ca)$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur và giả thiết $a^4+b^4+c^4=3$, ta có

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)(a+b+c) \ge [ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]\,(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 3+3abc(a+b+c) \ge (ab+bc)^2+(bc+ca)^2+(ca+ab)^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$(ab+bc)^2+(bc+ca)^2+(ca+ab)^2+12 \ge 8(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow 15+3abc(a+b+c) \ge 8(ab+bc+ca)$$

Mặt khác ta lại có

$$1 \ge a^2b^2c^2.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. □

Ví dụ 6 *Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng*

$$a^3+b^3+c^3+7abc \ge 10.$$

(Vasile Cirtoaje)

Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$r \ge \max\left\{0, \frac{p(4q-p^2)}{9}\right\} = \max\left\{0, \frac{p(12-p^2)}{9}\right\}$$

Ta cần chứng minh

$$p^3-9p+10r \ge 10$$

Nếu $p \ge 2\sqrt{3}$ thì ta có

$$p^3-9p+10r-10 \ge p^3-9p-10 \ge 12p-9p-10 = 3p-10 > 0$$

Nếu $p \le 2\sqrt{3} < 4$ thì

$$p^3-9p+10r-10 \ge p^3-9p+\frac{10}{9}p(12-p^2)-10 = \frac{1}{9}(p-3)[(16-p^2)+3(4-p)+2] \ge 0.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 7 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$3+\frac{12}{abc} \ge 5\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

(Võ Thành Văn)

LỜI GIẢI. Đổi biến theo p, q, r, bât đẳng thức cần chứng minh được viết lại như sau

$$3r + 12 \geq 5q$$

Mặt khác,theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$3r \geq \frac{3p(4q - p^2)}{9} = 4q - 9$$

Ta cần chứng minh

$$4q - 9 + 12 \geq 5q$$

$$\Leftrightarrow q \leq 3 \text{ (đúng)}.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

Ví dụ 8 *Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

(Phạm Kim Hùng)

Quy đồng, rút gọn và đổi biến theo p, q, r, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$8p + 3r \geq 12 + 5q$$

Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$3r \geq \frac{p(4q - p^2)}{3} = \frac{p(2q - 3)}{3}$$

Từ giả thiết

$$p^2 - 2q = 3$$

$$\Rightarrow q = \frac{p^2 - 3}{2}$$

Thay 2 điều trên vào bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$8p + \frac{p(p^2 - 6)}{3} \geq 12 + \frac{5(p^2 - 3)}{2}$$

$$\Leftrightarrow (2p - 3)(p - 3)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 9 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{9 - ab} + \frac{1}{9 - bc} + \frac{1}{9 - ca} \leq \frac{3}{8}.$$

(Crux mathematicorum)

LỜI GIẢI. Bài này đã được anh Hùng sử dụng cho phần bất đẳng thức Chebyshev trong cuốn "Sáng tạo bất đẳng thức". Bây giờ các bạn sẽ được thấy một lời giải khác với bất đẳng thức Schur và phương pháp đổi biến p, q, r rất tự nhiên.
Biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh và chuyển về dạng p, q, r, ta có

$$8(243 - 18p + 3r) \leq 3(729 - 81q + 27r - r^2)$$

$$\Leftrightarrow 243 - 99q + 57r - 3r^2 \geq 0$$

Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$3 = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^6 \geq 3(abc)^2 = r^2$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{3} = \frac{4q-9}{3}$$
$$\Rightarrow 57r \geq 19(4q-9)$$

Nên ta cần chứng minh

$$72 - 23q - 3r^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 3(1-r^2) + 23(3-q) \geq 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. □

3.2 Phương pháp đổi biến p, q, r

Ví dụ 10 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2b}{4-bc} + \frac{b^2c}{4-ca} + \frac{c^2a}{4-ab} \leq 1.$$

(Phạm Kim Hùng)

LỜI GIẢI. Quy đồng mẫu số rồi khai triển, ta cần chứng minh

$$4 - \sum_{cyc} a^2b \geq \sum_{cyc} \frac{a^2b^2c}{4-bc}$$

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $4 - \sum\limits_{cyc} a^2b \geq abc$, ta cần chứng minh

$$abc \geq \sum_{cyc} \frac{a^2b^2c}{4-bc}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \sum_{cyc} \frac{ab}{4-bc}$$

$$\Leftrightarrow 64 - 32\sum_{cyc} ab + 8\sum_{cyc} a^2bc + 4\sum_{cyc} a^2b^2 \geq abc\left(\sum_{cyc} a^2b + abc\right)$$

Tiếp tục sử dụng bất đẳng thức trên,ta cần chứng minh

$$64 - 32\sum_{cyc} ab + 8\sum_{cyc} a^2bc + 4\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 4abc$$

$$\Leftrightarrow 16 - 8q + q^2 - r \geq 0$$

với $q = ab + bc + ca, r = abc$.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $q^2 \geq 9r$ nên cần chứng minh

$$16 - 8q + q^2 - \frac{q^2}{9} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (q-3)(q-6) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 2, b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 11 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3a}{a^2+2bc}+\frac{3b}{b^2+2ca}+\frac{3c}{c^2+2ab}.$$

(Dương Đức Lâm)

Đặt $a := \frac{1}{a}, b := \frac{1}{b}, c := \frac{1}{c}$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} a \geq 3abc \sum_{cyc} \frac{1}{2a^2+bc}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(a^2-bc)}{2a^2+bc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2+bc} \geq \sum_{cyc} a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2+bc} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2}{2\sum_{cyc} a^3+3abc}$$

Đến đây, ta cần chứng minh

$$3\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\right)\left(2\sum_{cyc} a^3+3abc\right)$$

Giả sử $a+b+c=1$, chuyển về dạng p, q, r, bất đẳng thức trở thành

$$3(1-2q)^2 \geq 2-6q+9r$$

Sử dụng bất đẳng thức $q^2 \geq 3r$, ta cần chứng minh

$$3(1-2q)^2 \geq 2-6q+3q^2$$

$$\Leftrightarrow 3-12q+12q^2 \geq 2-6q+3q^2$$

$$\Leftrightarrow (1-3q)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Ví dụ 12 *Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b) \leq \frac{1}{12}(a+b+c)^5.$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Chuẩn hóa cho $p=1$, bất đẳng thức trở thành

$$(1-3q)q+(5q-1)r \leq \frac{1}{12}$$

Đến đây ta sử dụng một thủ thuật khi dùng bất đẳng thức Schur, đó là chia trường hợp để giải quyết

Nếu $q \le \frac{1}{5}$ thì ta có

$$(1-3q)q+(5q-1)r \le (1-3q)q = \frac{1}{3}(1-3q)\cdot 3q \le \frac{1}{3}\left(\frac{1-3q+3q}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

Nếu $q > \frac{1}{5}$, ta có

$$(1-3q)q+(5q-1)r \le (1-3q)q+(5q-1)\cdot\frac{q}{9} = \frac{1}{36}(-88q^2+32q-3)+\frac{1}{12} < \frac{1}{12}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a=0, b=\frac{3+\sqrt{3}}{6}, c=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ và các hoán vị □
Với kĩ thuật xét trường hợp để giải, chúng ta có thể dễ dàng giải quyết các bài toán sau

Bài toán 1 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) \le \frac{1}{32}.$$

HƯỚNG DẪN. Nhân vào rồi rút gọn, chuyển bất đẳng thức về dạng p, q, r, ta cần chứng minh

$$q^2-2q^3-r(2+r-4q) \le \frac{1}{32}$$

Đến đây chúng ta xét 2 trường hợp $q \le \frac{1}{4}$ và $q > \frac{1}{4}$. □

Bài toán 2 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^2+3}+\frac{b}{b^2+3}+\frac{c}{c^2+3} \le \frac{3}{4}.$$

(Dương Đức Lâm)

HƯỚNG DẪN. Đưa bất đẳng thức về một hàm theo p

$$f(p) = 27p^2-(54+12q)p+9q^2-58q+120 \ge 0$$

Đến đây chúng ta chia thành 2 trường hợp $18q \ge 58+12p$ và $18q \le 58+12p$ □

Ví dụ 13 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=8$. Chứng minh rằng*

$$4(a+b+c-4) \le abc.$$

(Nguyễn Phi Hùng)

LỜI GIẢI. Theo giả thiết, ta có $p^2-2q=8$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có

$$r \ge \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p} = \frac{(p^2-16)(p^2+8)}{12p}$$

Vì vậy, ta cần chứng minh

$$\frac{(p^2-16)(p^2+8)}{12p} \ge 4(p-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(p-4)^2(p^2+p-8)}{12p} \ge 0 \text{ (đúng)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=2, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 14 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{a^2+abc}}{b+ca}+\frac{\sqrt{b^2+abc}}{c+ab}+\frac{\sqrt{c^2+abc}}{a+bc}\le\frac{1}{2\sqrt{abc}}.$$

LỜI GIẢI. Đổi biến thành p, q, r, ta có bổ đề

$$r\le\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}$$

Áp dụng BDT Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left[\sum_{cyc}\frac{\sqrt{a^2+abc}}{(b+c)(b+a)}\right]^2 &\le \left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(b+c)}\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c}\right)\\ &= \frac{\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c}\right)\end{aligned}$$

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c}=\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-\sum_{cyc}\frac{b}{b+c}\le\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab}$$

Nên ta cần chứng minh

$$\frac{\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left[\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}-\frac{1}{\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab}\right]\le\frac{1}{4abc}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1-q}{q-r}\left(\frac{1+q}{q-r}-\frac{1}{1-q}\right)\le\frac{1}{4r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(1-q^2)}{q-r}-4\le\frac{q-r}{r}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4(1-q^2)}{q-r}-\frac{q}{r}\le 3$$

Sử dụng bổ đề, ta có

$$VT\le\frac{4(1-q^2)}{q-\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}}-\frac{q}{\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}}=3-\frac{q(1-3q)(5-7q)}{(1-q)(4-7q+q^2)}\le 3.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Nhận xét 1 *Với bài toán này, chúng tôi có 2 câu hỏi thú vị xin dành cho các bạn*

1. *Chứng minh bổ đề mà chúng tôi đã nêu ở trên.*
2. *Hãy chỉ ra con đường để tìm bổ đề này.*

□

Ví dụ 15 *Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{4}{81(ab+bc+ca)} + abc \geq \frac{5}{27}.$$

(Võ Thành Văn)

LỜI GIẢI. Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} = \frac{4q-1}{9}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{4}{81q} + r \geq \frac{5}{27}$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur, ta cần chứng minh

$$\frac{4}{81q} + \frac{4q-1}{9} \geq \frac{5}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{81q} + \frac{4q}{9} \geq \frac{8}{27}$$

Bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. □

Ví dụ 16 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a} \geq 3.$$

(Nguyễn Mạnh Dũng)

LỜI GIẢI. Ta có

$$\frac{ab+1}{a+b} + \frac{bc+1}{b+c} + \frac{ca+1}{c+a} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(ab+1)(c+a)(c+b) \geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(ab+1)(c^2+1) \geq 3[(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc]$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2) + ab + bc + ca + abc(a+b+c) + 3 + 3abc \geq 3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 + abc(a+b+c+3) + 2 \geq 3(a+b+c)$$

Đặt $p = a+b+c, q = ab+bc+ca = 1, r = abc$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$p^2 + r(p+3) - 3p + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p-1)(p-2) + r(p+3) \geq 0$$

Nếu $p \geq 2$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Nếu $2 \geq p \geq \sqrt{3}$, áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$p^3 + 9r \geq 4pq$$

$$\Leftrightarrow r \geq \frac{4p - p^3}{9}$$

Ta cần chứng minh

$$p^2 - 3p + 2 + (p+3) \cdot \frac{4p - p^3}{9} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow p^4 + 3p^3 - 13p^2 + 15p - 18 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow (p-2)(p^3 + 5p^2 - 3p + 9) \leq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì $p \leq 2$ và

$$p^3 + 5p^2 - 3p + 9 = p^3 + 4p^2 + \left(p - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$$

Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị □

Ví dụ 17 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq 2(a+b+c).$$

(Vietnam MO 2006, B)

Lời giải. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$, ta có $xyz = 1$, đồng thời đổi biến thành p, q, r, ta có bất đẳng thức trở thành □

$$p^2 - 2q + 3 \geq 2q$$
$$\Leftrightarrow 4q - p^2 \leq 3$$

Mà bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Schur nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Ví dụ 18 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$, ta luôn có*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{a^3+b^3+c^3} \geq 2\sqrt{k} + 1.$$

(Phạm Sinh Tân)

Lời giải. Đổi biến bất đẳng thức theo p, q, r và chuẩn hóa cho $p = 1$. Ta cần chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1 - 2q + 3r}{q - r} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} \geq 2\sqrt{k} + 1$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1 - 2q + 3r}{q - r} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} &= \frac{1 - 3q + 3r}{q - r} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} + 1 \\ &\geq \frac{1 - 3q + 3r}{q} + k\frac{q}{1 - 3q + 3r} + 1 \geq 2\sqrt{k} + 1. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = \left(\frac{\sqrt{k + 2\sqrt{k} - 3} + \sqrt{k} + 1}{2}x, x, 0\right)$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Một số bài tập tương tự

Bài toán 3 *Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$, ta luôn có*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + k\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a^3+b^3+c^3} \geq 2\sqrt{k} + 1.$$

(Phạm Sinh Tân)

Bài toán 4 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{9(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 6.$$

(Phạm Sinh Tân)

Ví dụ 19 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^2 + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

(Dương Đức Lâm)

LỜI GIẢI. Đặt $x = \frac{2a}{b+c}, y = \frac{2b}{c+a}, z = \frac{2c}{a+b}$, ta có

$$xy + yz + zx + xyz = 4$$

Bất đẳng thức trở thành

$$x^2 + y^2 + z^2 + 5xyz \geq 8$$

Đưa bất đẳng thức về dạng p, q, r, từ giả thiết, ta có $q + r = 4$ và bất đẳng thức trở thành

$$p^2 - 2q + 5r \geq 8$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 7q + 12 \geq 0$$

Nếu $4 \geq p$, sử dụngbất đẳng thức Schur, ta có

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9}$$

$$\Rightarrow 4 \geq q + \frac{p(4q-p^2)}{9}$$

$$\Leftrightarrow q \leq \frac{p^3+36}{4p+9}$$

$$\Rightarrow p^2 - 7q + 12 \geq p^2 - \frac{7(p^3+36)}{4p+9} + 12$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$p^2 - \frac{7(p^3+36)}{4p+9} + 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p-3)(p^2-16) \leq 0$$

Điều này đúng vì $4 \geq p \geq \sqrt{3q} \geq 3$.
Nếu $p \geq 4$, ta có $p^2 \geq 16 \geq 4q$ nên

$$p^2 - 2q + 5r \geq p^2 - 2q \geq \frac{p^2}{2} \geq 8$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$ hoặc $x = y = 2, z = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 20 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leq \frac{3}{5}.$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Chuyển đổi bất đẳng thức về như sau

$$108 - 48q + 13pr - 3r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(9 - 4q + 3r) + r(1 - r) \geq 0$$

Ta thấy bất đẳng thức trên đúng do

$$r = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 1$$

và theo bất đẳng thức Schur thì

$$3r \geq \frac{3p(4q - p^2)}{9} = 4q - 9$$
$$\Rightarrow 3r + 9 - 4q \geq 0.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = 0, b = c = \frac{3}{2}$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Ví dụ 21 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geq a + b + c.$$

(Darij Grinberg)

LỜI GIẢI. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta cần chứng minh

$$\left[\sum_{cyc} a^2(b+c)^2\right]^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\right)\left[\sum_{cyc} a^2(b+c)(b^2+c^2)\right]$$

Đổi biến theo p, q, r, khi đó bất đẳng thức viết thành

$$r(2p^3 + 9r - 7pq) \geq 0$$

Áp dụng BDT Schur, ta có $p^3 + 9r \geq 4pq$ và bất đẳng thức quen thuộc $p^2 - 3q \geq 0$, ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$. □

Ví dụ 22 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1.$$

LỜI GIẢI. Đổi biến về p, q, r, ta cần chứng minh

$$5 - 10q \leq 6(1 - 3q + 3r) + 1$$

$$\Leftrightarrow 18r - 8q + 2 \geq 0$$

Măc khác, bất đẳng thức trên đúng theo bất đẳng thức Schur nên ta có đpcm. □
Và một ví dụ điển hình cho phương pháp này là bất đẳng thức Iran 1996

Ví dụ 23 *Cho các số không âm x, y, z, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

(Iran MO 1996, Ji Chen)

LỜI GIẢI. Sử dụng phương pháp đổi biến p, q, r, ta chuyển bất đẳng thức về dạng như sau

$$q\left[\frac{(p^2+q)^2-4p(pq-r)}{(pq-r)^2}\right] \geq \frac{9}{4}$$

Biến đổi tương đương, rút gọn, ta cần chứng minh

$$4p^4q-17p^2q^2+4q^3+34pqr-9r^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow pq(p^3-4pqr+9r)+q(p^4-5p^2q+4q^2+6pr)+r(pq-9r) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $x=y, z=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. □

Qua các ví dụ trên, có lẽ các bạn cũng đã được hình dung ít nhiều về bất đẳng thức Schur và những ứng dụng của nó trong phương pháp đổi biến p, q, r. Để kết thúc bài viết này, mời các bạn cùng giải một số bài tập sau

Bài toán 5 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Chứng minh rằng*

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \leq 3.$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài toán 6 *Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geq 2(ab+bc+ca).$$

(Darij Grinberg)

Bài toán 7 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$12+9abc \geq 7(ab+bc+ca).$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài toán 8 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1} \leq 3.$$

(Vũ Đình Quý)

Bài toán 9 *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=9$. Chứng minh rằng*

$$2(a+b+c)-abc \leq 10.$$

(Vietnam MO 2002, Trần Nam Dũng)

Bài toán 10 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$1+\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ca}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Bài toán 11 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 12 \geq 3(a + b + c) + 3(ab + bc + ca)$$

(Balkan MO)

Bài toán 12 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 3$, ta*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{k}{a+b+c} \geq \frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Bài toán 13 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca + 6abc = 9$. Chứng minh rằng*

$$a + b + c + 3abc \geq 6.$$

(Lê Trung Kiên, Võ Quốc Bá Cẩn)

Bài toán 14 *Cho các số không âm x, y, z, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Tìm hằng số a nhỏ nhất để bất đẳng thức sau đúng*

$$\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^a \left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^{\frac{3-a}{2}} \geq \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8}.$$

(Ivan Borsenco, Irurie Boreico)

Bài toán 15 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}.$$

Bài toán 16 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + 2abc \geq \frac{247}{54}.$$

Bài toán 17 *Cho $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng*

$$a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \leq 7abc.$$

Bài toán 18 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{5-ab}{1+c} + \frac{5-bc}{1+a} + \frac{5-ca}{1+b} \geq ab + bc + ca.$$

(Vasile Cirtoaje)

CHÚC CÁC BẠN THÀNH CÔNG!!!

Author: Võ Thành Văn
Edited and corrected by Võ Quốc Bá Cẩn