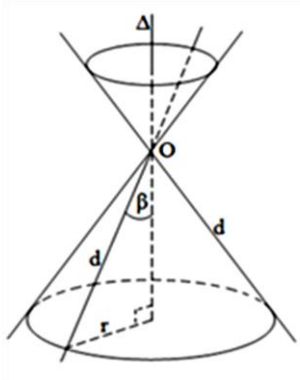
CHỦ ĐỀ 2 : KHỐI NÓN - TRỤ - CẦU

LÍ THUYẾT

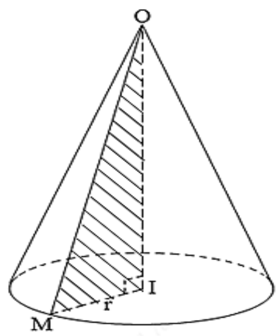
❖ MẶT NÓN TRÒN XOAY VÀ KHỐI NÓN

1. Mặt nón tròn xoay



- Đường thẳng d,Δ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$. Mặt phẳng (P) chứa d,Δ và (P) quay quanh trục Δ với góc β không đổi thì tạo thành mặt nón tròn xoay đỉnh O. Trong đó:
  - Δ gọi là trục
  - d được gọi là đường sinh
  - Góc 2β được gọi là góc ở đỉnh

2. Khối nón

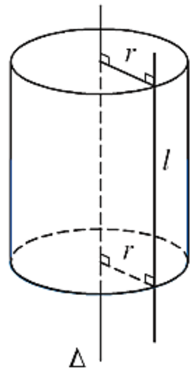


Hình 2

- Khối nón là phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay, kể cả hình nón đó.
- Đỉnh, mặt đáy, đường sinh của một hình nón cũng là đỉnh, mặt đáy, đường sinh của khối nón tương ứng.
- Cho hình nón có chiều cao h, đường sinh l và bán kính đáy r. Khi đó, ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq} = \pi.r.l$
  - Diện tích đáy của hình nón: $S_{day} = \pi.r^2$
  - Diện tích toàn phần của hình nón: $S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi.r.l + \pi.r^2$
  - Thể tích của khối nón: $V_{non} = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h$

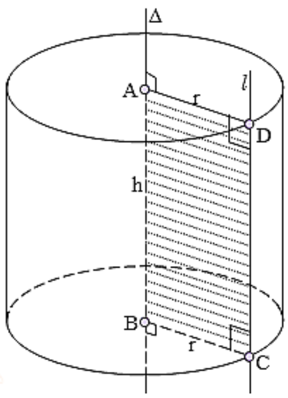
❖ **MẶT TRỤ TRÒN XOAY**

1. Mặt trụ



- Trong mặt phẳng (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng r Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh đường thẳng Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ. Trong đó:
  - Đường thẳng Δ gọi là trục
  - Đường thẳng l gọi là đường sinh
  - r là bán kính của mặt trụ đó

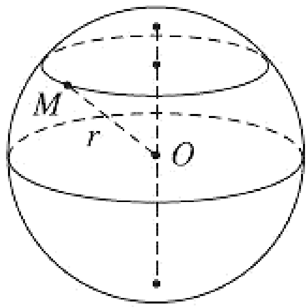
2. Hình trụ tròn xoay và khối trụ tròn xoay



- Khối trụ tròn xoay hay khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ tròn xoay đó.
- Mặt đáy, đường sinh, chiều cao, bán kính của một hình trụ cũng là mặt đáy, đuowngf sinh, chiều cao, bán kính của khối trụ tương ứng.
- Cho hình trụ có chiều cao h, đường sinh l, bán kính đáy r. Khi đó ta có các công thức sau:
  - Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi.r.l$
  - Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi.r.l + 2\pi.r^2$
  - Thể tích của khối trụ: $V = \pi.r^2.h$

❖ **MẶT CẦU VÀ KHỐI CẦU**

1. **Mặt cầu**



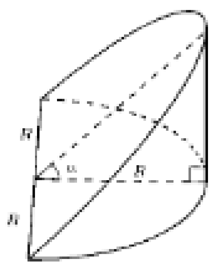
- Cho một điểm I cố định và một số thực dương R. Tập hợp tất cả các điểm M trong không gian cách I một khoảng R được gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. Được kí hiệu là: $S\left(I;R\right)$.
- Khi đó $S\left(I;R\right)=\left\{M \,/\, IM=R\right\}$.

2. **Công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu**

- Cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm I, bán kính R. Khi đó, ta có các công thức như sau:
  - Diện tích mặt cầu: $S=4\pi.R^2$
  - Thể tích của khối cầu: $V=\dfrac{4}{3}\pi.R^3$.

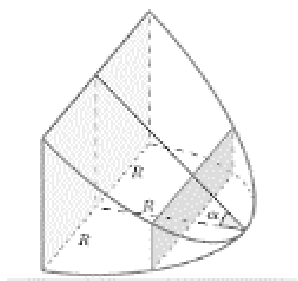
3. **Một số công thức tính đặc biệt về khối tròn xoay**

- **Hình nêm loại 1**



Thể tích : $V=\dfrac{2}{3}.R^3.\tan\alpha$

- **Hình nêm loại 2**



Thể tích: $V=\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right).R^3.\tan\alpha$

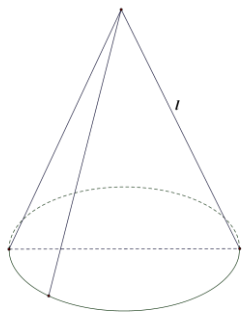
VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1: Một hình nón tròn xoay có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh bằng a. Tính diện tích S_{tp} toàn phần của hình nón đó:

A. $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{2}+8\right)}{2}$.
B. $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.
C. $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$.
D. $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{2}+4\right)}{2}$.

Lời giải

Chọn C



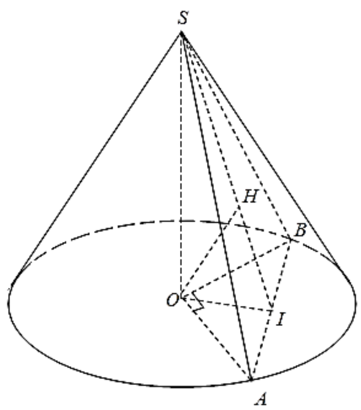
Theo đề suy ra đường sinh $l=a$, và đường tròn đáy có bán kính $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$, diện tích đáy $S=\dfrac{\pi a^2}{2}$. Vậy $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$.

VÍ DỤ 2: Một hình nón đỉnh S, đáy hình tròn tâm O và $SO=h$. Một mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt đường tròn (O) theo dây cung AB sao cho góc $AOB=90^\circ$, biết khoảng cách từ O đến (P) bằng $\dfrac{h}{2}$. Khi đó diện tích xung quanh hình nón bằng.

A. $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.
B. $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}$.
C. $\dfrac{2\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.
D. $\dfrac{\pi h^2\sqrt{10}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AB.

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}\Rightarrow\frac{1}{OI^2}=\frac{4}{h^2}-\frac{1}{h^2}=\frac{3}{h^2}\Rightarrow OI=\frac{h\sqrt{3}}{3}.$$

Tam giác OAB vuông cân tại O nên: $AB=2OI=\frac{2h\sqrt{3}}{3}$, $R=OA=OB=\frac{h\sqrt{6}}{3}$.

Suy ra: $SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=\sqrt{h^2+\left(\frac{h\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{h\sqrt{15}}{3}$.

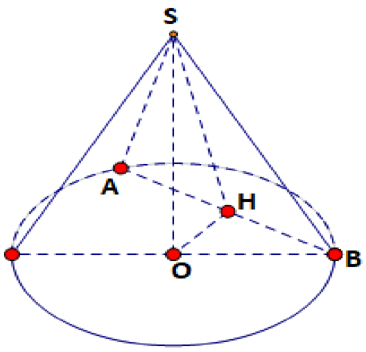
Diện tích xung quanh của hình nón: $S_{xq}=\pi R.SB=\pi.\frac{h\sqrt{6}}{3}.\frac{h\sqrt{15}}{3}=\frac{\pi h^2\sqrt{10}}{3}$.

VÍ DỤ 2: Hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng $120°$. Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N)

A. $S_{xq}=27\sqrt{3}\pi$. **B.** $S_{xq}=18\sqrt{3}\pi$. **C.** $S_{xq}=9\sqrt{3}\pi$. **D.** $S_{xq}=36\sqrt{3}\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Theo bài ra ta có tam giác SAB vuông tại S và $OH=3$; và $BSO=60°$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón thì đường sinh $l=SB=\frac{r}{\sin 60°}\Rightarrow l=\frac{2r}{\sqrt{3}}$.

Suy ra $BH=\frac{1}{2}AB=\frac{r\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác OBH vuông tại H, ta có $9+\frac{6r^2}{9}=r^2\Leftrightarrow r=3\sqrt{3}$.

Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón (N) là $S_{xq}=\pi.r.l=\pi.3\sqrt{3}.\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=18\pi\sqrt{3}$.

DẠNG 1 Các yếu tố liên quan đến khối nón, khối trụ

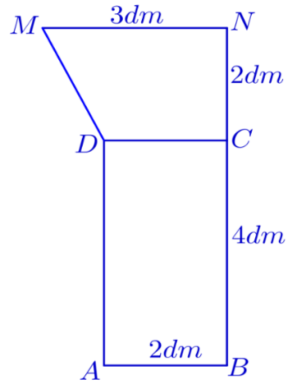
Câu 1: Một hình nón tròn xoay có đường sinh $2a$. Thể tích lớn nhất của khối nón đó là

A. $\dfrac{16\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{16\pi a^3}{9\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{8\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

Câu 2: Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính $R=a$. Gọi M là điểm nằm ngoài (C) và $IM=a\sqrt{3}$; A là điểm thuộc (C) và MA tiếp xúc với (C); H là hình chiếu của A trên đường thẳng IM. Tính theo a thể tích V của khối tròn xoay tạo bởi hình tam giác MAH quay xung quanh trục IM.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{8}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **D.** $V=\dfrac{9}{8}\pi a^3$.

Câu 3: Hình bên bao gồm hình chữ nhật $ABCD$ và hình thang vuông $CDMN$. Các điểm B, C, N thẳng hàng, $AB=CN=2\,\text{dm}$; $BC=4\,\text{dm}$; $MN=3\,\text{dm}$. Quay hình bên xung quanh cạnh BN ta được khối tròn xoay có thể tích bằng



A. $54\pi\,\text{dm}^3$. **B.** $\dfrac{86\pi}{3}\text{dm}^3$. **C.** $\dfrac{86}{3}\text{dm}^3$. **D.** $54\,\text{dm}^3$.

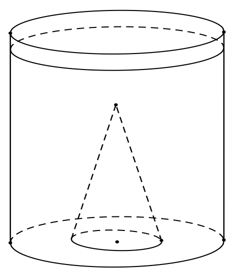
Câu 4: Biết thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác đều có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối nón đã cho.

A. $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho hình trụ (T) có chiều cao $h=2m$, bán kính đáy $r=3m$. Giả sử (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T). Khi n tăng lên vô hạn thì tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) có giới hạn là:

A. $S=12$. **B.** $S=20\pi$. **C.** 30π. **D.** 12π.

Câu 6: Một khối nón làm bằng chất liệu không thấm nước, có khối lượng riêng lớn hơ khối lượng riêng của nước, có đường kính đáy bằng a và chiều cao 12, được đặt trong và trên đáy của một cái cốc hình trụ bán kính đáy a như hình vẽ, sao cho đáy của khối nón tiếp xúc với đáy của cốc hình trụ. Đổ nước vào cốc hình trụ đến khi mực nước đạt đến độ cao 12 thì lấy khối nón ra. Hãy tính độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra.


.

A. $11,37$. **B.** 11. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\pi\sqrt{37}}{2}$.

Câu 7: Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông. Biết diện tích xung quanh của khối trụ bằng 16π. Thể tích V của khối trụ bằng

A. $V=32\pi$. **B.** $V=64\pi$. **C.** $V=8\pi$. **D.** $V=16\pi$.

Câu 8: Cho hình nón tròn xoay có độ dài đường sinh là $2a$, góc ở đỉnh của hình nón bằng $60°$. Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V=\dfrac{\pi a^3}{3}$. **B.** $V=\pi\sqrt{3}a^3$. **C.** $V=\pi a^3$. **D.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi N là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AN=2ND$. Đường thẳng qua N vuông góc với BN cắt BC tại K. Tính thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay tứ giác $ANKB$ quanh trục BK là

A. $V=\dfrac{7}{6}\pi a^3$. **B.** $V=\dfrac{9}{14}\pi a^3$. **C.** $V=\dfrac{6}{7}\pi a^3$. **D.** $V=\dfrac{14}{9}\pi a^3$.

Câu 10: Cho khối trụ có đáy là các đường tròn tâm (O), (O') có bán kính là R và chiều cao $h=R\sqrt{2}$. Gọi A, B lần lượt là các điểm thuộc (O) và (O') sao cho OA vuông góc với $O'B$. Tỉ số thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ với thể tích khối trụ là:

A. $\dfrac{2}{3\pi}$. **B.** $\dfrac{1}{3\pi}$. **C.** $\dfrac{1}{6\pi}$. **D.** $\dfrac{1}{4\pi}$.

Câu 11: Người ta cần đổ một ống cống thoát nước hình trụ với chiều cao $2m$, độ dày thành ống là $10cm$. Đường kính ống là $50cm$. Tính lượng bê tông cần dùng để làm ra ống thoát nước đó?

A. $0,08\pi\ (m^3)$. **B.** $0,18\pi\ (m^3)$. **C.** $0,5\pi\ (m^3)$. **D.** $0,045\pi\ (m^3)$.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=2\sqrt{3}$ và nằm trong mặt phẳng (P). Quay (P) một vòng quanh đường thẳng BD. Khối tròn xoay được tạo thành có thể tích bằng

A. $\dfrac{28\pi}{9}$. **B.** $\dfrac{28\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{56\pi}{9}$. **D.** $\dfrac{56\pi}{3}$.

Câu 13: Cho mặt cầu (S) có bán kính $\sqrt{3}$. Trong tất cả các khối trụ nội tiếp mặt cầu (S), khối trụ có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{3\pi\sqrt{3}}{2}$. **B.** 4π. **C.** 3π. **D.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Cho hình thang $ABCD$ có $A=B=90°$, $AB=BC=a$, $AD=2a$. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD.

A. $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{7\sqrt{2}\pi a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{7\pi a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{7\pi a^3}{12}$.

Câu 15: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D có $CD=2AB=2AD=4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng

A. $\dfrac{28\sqrt{2}}{3}\pi$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{2}}{3}\pi$. **C.** $\dfrac{32\sqrt{2}}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 16: Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V=\frac{1}{3}a^3\pi$. **B.** $V=\frac{1}{4}a^3\pi$. **C.** $V=a^3\pi$. **D.** $V=\frac{1}{2}a^3\pi$.

Câu 17: Một khối trụ có hai đáy là hai hình tròn nội tiếp hai mặt đối diện của một hình lập phương cạnh a. Tính thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V=\frac{1}{3}a^3\pi$. **B.** $V=\frac{1}{4}a^3\pi$. **C.** $V=a^3\pi$. **D.** $V=\frac{1}{2}a^3\pi$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với $mp(ABC)$, $DB\perp BC$, $AD=AB=BC=a$. Kí hiệu V_1, V_2, V_3 lần lượt là thể tích của hình tròn xoay sinh bởi tam giác ABD khi quay quanh AD, tam giác ABC khi quay quanh AB, tam giác DBC khi quay quanh BC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $V_1+V_2=V_3$. **B.** $V_1+V_3=V_2$. **C.** $V_2+V_3=V_1$. **D.** $V_1=V_2=V_3$.

Câu 19: Một đội xây dựng cần hoàn thiện một hệ thống cột trụ tròn của một cửa hàng kinh doanh gồm 10 chiếc. Trước khi hoàn thiện mỗi chiếc cột là một khối bê tông cốt thép hình lăng trụ lục giác đều có cạnh $20\,cm$, sau khi hoàn thiện mỗi cột là một khối trụ có đường kính đáy bằng $42\,cm$. Chiều cao của mỗi cột trước và sau khi hoàn thiện là $4\,m$. Biết lượng xi măng cần dùng chiếm 80% lượng vữa và cứ một bao xi măng $50\,kg$ thì tương đương với $64000cm^3$ xi măng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu bao xi măng loại $50\,kg$ để hoàn thiện toàn bộ hệ thống cột đã cho?

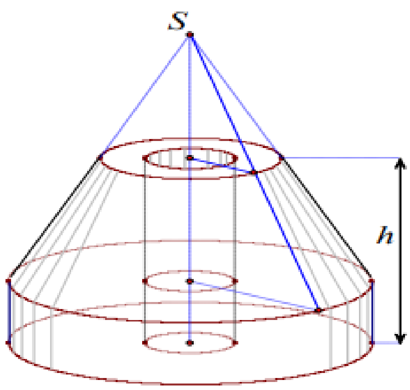
A. 25. **B.** 18. **C.** 28. **D.** 22.

Câu 20: Để định vị một trụ điện, người ta cần đúc một khối bê tông có chiều cao $h=1,5\text{m}$ gồm:

Phần dưới có dạng hình trụ bán kính đáy $R=1\text{m}$ và có chiều cao bằng $\frac{1}{3}h$;

Phần trên có dạng hình nón bán kính đáy bằng R đã bị cắt bỏ bớt một phần hình nón có bán kính đáy bằng $\frac{1}{2}R$ ở phía trên ;

Phần ở giữa rỗng có dạng hình trụ, bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}R$.



Thể tích của khối bê tông bằng

A. $2,815\text{m}^3$. **B.** $2,814\text{m}^3$. **C.** $3,403\text{m}^3$. **D.** $3,109\text{m}^3$.

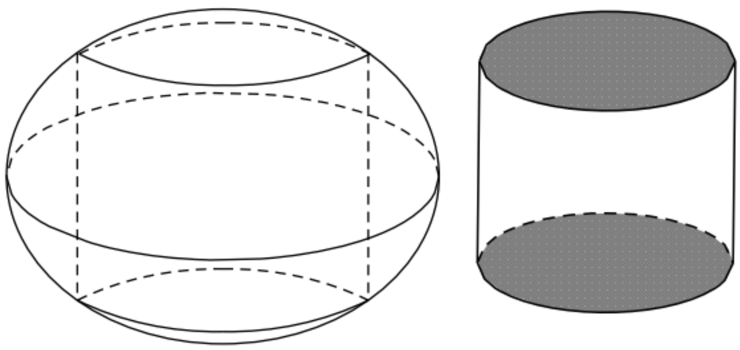
Câu 21: Cho khối trụ (T), AB và CD lần lượt là hai đường kính trên các mặt đáy của khối (T). Biết góc giữa AB và CD là $30°$, $AB = 6cm$ và thể tích khối $ABCD$ là $30cm^3$. Khi đó thể tích khối trụ (T) là

A. $90\pi cm^3$. **B.** $30\pi cm^3$. **C.** $45\pi cm^3$. **D.** $\dfrac{90\pi\sqrt{3}}{270}cm^3$.

Câu 22: Cho hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Trên đường tròn (O) lấy hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông. Biết diện tích tam giác SAB bằng $R^2\sqrt{2}$. Thể tích hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{12}$. **B.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{3}$.

Câu 23: Một khối đá có hình là một khối cầu có bán kính R, người thợ thủ công mỹ nghệ cần cắt và gọt viên đá đó thành một viên đá cảnh có hình dạng là một khối trụ. Tính thể tích lớn nhất có thể của viên đá cảnh sau khi đã hoàn thiện?



A. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{9}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{3}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi R^3}{6}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}\pi R^3}{12}$.

Câu 24: Một hình thang cân có chiều cao h và độ dài hai đáy là a, b. Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình thang này quanh đường trung trực của hai đáy.

A. $\dfrac{1}{3}\pi h\left(a^2+ab+b^2\right)$. **B.** $\dfrac{1}{6}\pi h\left(a^2+ab+b^2\right)$.

C. $\dfrac{1}{12}\pi h\left(a^2+ab+b^2\right)$. **D.** Cả A, B, C đều sai.

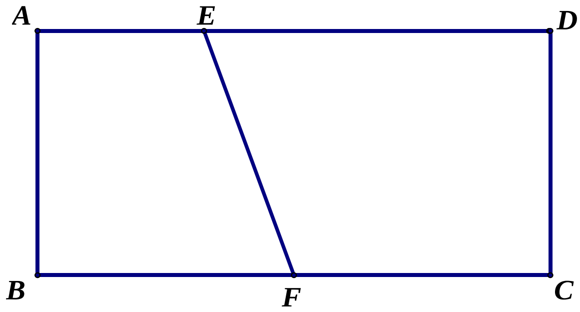
Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông với cạnh đáy AD, BC. $AD = 3CB = 3a$, $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$. Điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AI}$, M là trung điểm SD, H là giao điểm của AM và SI. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích V của khối nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH và đỉnh thuộc mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $V = \dfrac{\pi a^3}{5\sqrt{5}}$. **B.** $V = \dfrac{\pi a^3}{2\sqrt{5}}$. **C.** $V = \dfrac{\pi a^3}{\sqrt{5}}$. **D.** $V = \dfrac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Câu 26: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. AB là một dây cung của đường tròn $(O;R)$ sao cho tam giác $O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ một góc $60°$. Tính theo R thể tích V của khối trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{\pi\sqrt{7}R^3}{7}$. **B.** $V=\dfrac{3\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **C.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{5}R^3}{5}$. **D.** $V=\dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.

Câu 27: Có một miếng bìa hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=3$ và $AD=6$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE=2$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm BC.



Cuốn miếng bìa lại sao cho cạnh AB và DC trùng nhau để tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ. Khi đó tính thể tích V của tứ diện $ABEF$.

A. $V=\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$. **C.** $V=\dfrac{3\pi^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{2}{3\pi^2}$.

Câu 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 3. Tính diện tích xung quanh của hình nón có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ và chiều cao bằng chiều cao của hình chóp.

A. $S_{xq}=\dfrac{9\pi}{2}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{4}$. **C.** $S_{xq}=9\pi$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

Câu 29: Một hình nón có chiều cao $2a$, bán kính đáy $a\sqrt{2}$. Một phẳng phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt đáy góc 60°. Tính diện tích thiết diện.

A. $\dfrac{5\sqrt{2}a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{3}a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.

Câu 30: Cho hình trụ có tâm hai đáy lần lượt là O và O'; bán kính đáy hình trụ bằng a. Trên hai đường tròn (O) và (O') lần lượt lấy hai điểm A và B sao cho AB tạo với trục của hình trụ một góc 30° và có khoảng cách tới trục của hình trụ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính diện tích toàn phần của hình trụ đã cho

A. $2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$. **B.** $\dfrac{\pi a^2}{3}\left(\sqrt{3}+2\right)$. **C.** $\pi a^2\left(\sqrt{3}+2\right)$. **D.** $\dfrac{2\pi a^2}{3}\left(\sqrt{3}+3\right)$.

Câu 31: Cho hình nón đỉnh I, đường cao SO và có độ dài đường sinh bằng $3cm$, góc ở đỉnh bằng 60^0. Gọi K là điểm thuộc đoạn SO thỏa mãn $IO=\dfrac{3}{2}IK$, cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) qua K và vuông góc với IO, khi đó thiết diện tạo thành có diện tích là S. Tính S.

A. $S=\dfrac{\pi}{3}(cm^2)$. **B.** $S=\pi\left(cm^2\right)$. **C.** $S=3\pi(cm^2)$ **D.** $S=\dfrac{2\pi}{3}(cm^2)$

Câu 32: Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 6 và chiều cao bằng 12. Mặt cầu (S) ngoại tiếp hình nón (N) có tâm là I. Một điểm M di động trên mặt đáy của nón (N) và cách I một đoạn bằng 6. Quỹ tích tất cả các điểm M tạo thành đường cong có tổng độ dài bằng

A. 6π. **B.** $6\pi\sqrt{2}$. **C.** $3\pi\sqrt{7}$. **D.** $4\pi\sqrt{6}$.

Câu 33: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A,B là hai điểm thuộc đường trò đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng $2a$, $SAO=30^0, SAB=60^0$. Diện tích xung quanh hình nón đã cho bằng

A. $2\pi a^2\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $4\pi a^2\sqrt{3}$. **D.** $3\pi a^2\sqrt{2}$.

Câu 34: Cho hình trụ có trục OO', bán kính đáy r và chiều cao $h=\dfrac{3r}{2}$. Hai điểm M,N di động trên đường tròn đáy (O) sao cho OMN là tam giác đều. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$. Khi M,N di động trên đường tròn (O) thì đoạn thẳng OH tạo thành mặt xung quanh của một hình nón, diện tích S của mặt này.

A. $S=\dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{32}$. **B.** $S=\dfrac{9\sqrt{3}\pi r^2}{16}$. **C.** $S=\dfrac{9\pi r^2}{32}$. **D.** $S=\dfrac{9\pi r^2}{16}$.

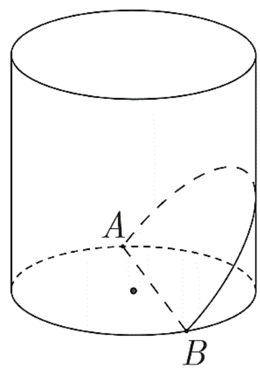
Câu 35: Cho tam giác ABC cân tại A, biết $AB=2a$ và góc $ABC=30^o$, cho tam giác ABC quay xung quanh đường thẳng AC được khối tròn xoay. Khi đó thể tích khối tròn xoay bằng

A. $2\pi a^3$. **B.** $6\pi a^3$. **C.** $\dfrac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $2a^3$.

Câu 36: Một hộp đựng mỹ phẩm được thiết kế có thân hộp là hình trụ có bán kính hình tròn đáy $r=5cm$, chiều cao $h=6cm$ và nắp hộp là một nửa hình cầu. Người ta cần sơn mặt ngoài của cái hộp đó thì diện tích S cần sơn là

A. $S=80\pi\, cm^2$. **B.** $S=110\pi\, cm^2$. **C.** $S=160\pi\, cm^2$. **D.** $S=130\pi\, cm^2$.

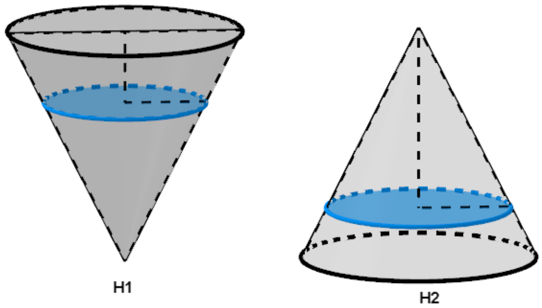
Câu 37: Cho khối trụ có bán kính đáy bằng $4(cm)$ và chiều cao $5(cm)$. Gọi AB là một dây cung đáy dưới sao cho $AB=4\sqrt{3}(cm)$. Người ta dựng mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B và tạo với mặt phẳng đáy hình trụ một góc 60° như hình vẽ. Tính diện tích thiết diện của hình trụ cắt bởi mặt phẳng (P).



A. $\dfrac{8\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **B.** $\dfrac{4\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$

C. $\dfrac{4\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$. **D.** $\dfrac{8\left(4\pi-\sqrt{3}\right)}{3}\left(cm^2\right)$.

Câu 38: Một khối đồ chơi có dạng khối nón, chiều cao bằng $20cm$, trong đó có chứa một lượng nước. Nếu đặt khối đồ chơi theo hình H_1 thì chiều cao lượng nước bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khối nón. Hỏi nếu đặt khối đồ chơi theo hình H_2 thì chiều cao h' của lượng nước trong khối đó gần với giá trị nào sau đây?



A. $2,21(cm)$. **B.** $5,09(cm)$. **C.** $6,67(cm)$. **D.** $5,93(cm)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	**2.C**	**3.B**	**4.D**	**5.C**	**6.B**	**7.D**	**8.D**	**9.A**	**10.C**
11.A	**12.C**	**13.B**	**14.A**	**15.A**	**16.B**	**17.B**	**18.A**	**19.B**	**20.D**
21.A	**22.C**	**23.A**	**24.C**	**25.D**	**26.D**	**27.B**	**28.D**	**29.D**	**30.A**
31.B	**32.C**	**33.C**	**34.A**	**35.A**	**36.B**	**37.A**	**38.A**		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn B

Gọi hình nón tròn xoay có đường sinh $l = 2a$ có bán kính đáy là R và đường cao là h.

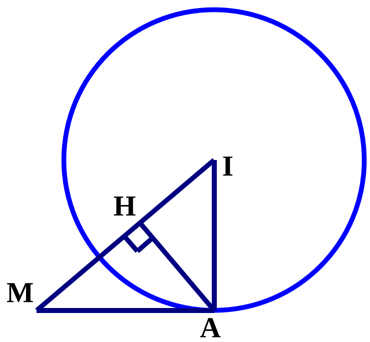
Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Ta có: $R^2 + h^2 = 4a^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $4a^2 = R^2 + h^2 = \frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + h^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{R^4h^2}{4}}$.

$\Rightarrow \frac{R^4h^2}{4} \leq \frac{64}{27}a^6 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi R^2 h \leq \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{R^2}{2} = h^2 \\ h^2 + R^2 = 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \\ R = \frac{2\sqrt{6}}{3}a \end{cases}$. Khi đó $V_{\max} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{27}a^3$.

Câu 2: Chọn C



Tam giác MAH vuông tại H nên hình nón được tạo thành có chiều cao $h = MH$ và bán kính đáy là $r = AH$

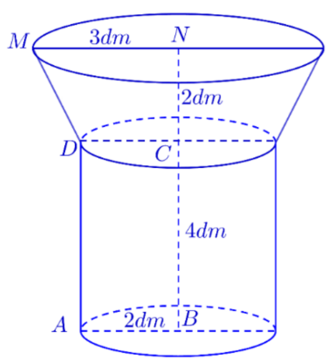
Có $IH.IM = IA^2 \Leftrightarrow IH = \frac{IA^2}{IM} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow MH = IM - IH = a\sqrt{3} - \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$AH^2 = IH.MH = \frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2a^2}{3}$

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi.\frac{2a^2}{3}.\frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Câu 3: Chọn B



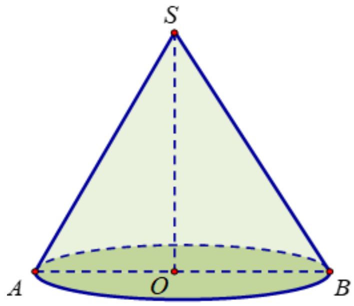
Khi quay hình trên quanh cạnh BN ta được một khối tròn xoay gồm một khối trụ có bán kính đáy bằng 2 dm, chiều cao bằng 4 dm và một khối nón cụt có bán kính hai đáy lần lượt là 2dm và 3 dm, chiều cao bằng 2 dm.

Do đó thể tích của khối tròn xoay là

$V = V_{truï} + V_{non\ cut} = 4\pi.4 + \frac{2}{3}\left(4\pi + 9\pi + \sqrt{4\pi.9\pi}\right) = \frac{86\pi}{3}\left(\text{dm}^3\right)$.

Câu 4: Chọn D

Gọi đỉnh của hình nón là S, tâm đường tròn đáy của hình nón là O, AB là một đường kính của đường tròn đáy. Khi đó ΔSAB là một thiết diện qua trục của hình nón đã cho.



Diện tích của tam giác ΔSAB là: $\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow AB = 2a$.

Bán kính đường tròn đáy $R = \dfrac{AB}{2} = a$; Đường cao của hình nón là $h = SO = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối nón đã cho là: $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{\pi a^2.a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Chọn C

Cách 1: Vì (L) là hình lăng trụ đều n cạnh có hai đáy là đa giác đều nội tiếp đường tròn đáy của hình trụ (T) nên độ dài mỗi cạnh của lăng trụ là $a = 2r.\sin\dfrac{\pi}{n}$.

Do đó diện tích của n mặt bên là $S_1 = nah = 2nrh.\sin\dfrac{\pi}{n} = 12n.\sin\dfrac{\pi}{n}$

Công thức diện tích của đa giác đều n cạnh, có độ dài mỗi cạnh là a là: $s = \dfrac{nr^2.\sin\dfrac{2\pi}{n}}{2}$.

Nên diện tích của hai đáy là: $S_2 = 2.s = 9n.\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Tổng diện tích tất cả các mặt của khối lăng trụ (L) là: $S = S_1 + S_2 = 12n.\sin\dfrac{\pi}{n} + 9n.\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Khi n tăng lên vô hạn:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(12.n.\sin\frac{\pi}{n} + 9n.\sin\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(12.n.\sin\frac{\pi}{n}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left(9n.\sin\frac{2\pi}{n}\right) = 30\pi.$$

Cách 2: Khi n tăng lên vô hạn, hình lăng trụ tiến dần tới hình trụ, do đó tổng diện tích tất cả các mặt của của khối lăng trụ (L) bằng với diện tích toàn phần của hình trụ (T) và bằng $2\pi rh + 2\pi r^2 = 30\pi$

Câu 6: Chọn B

Gọi V, R, h lần lượt là thể tích khối trụ (khối chứa phần nước trong cốc), bán kính đáy cốc và chiều cao của lượng nước trong cốc khi chưa lấy khối nón ra. Suy ra: $V = \pi R^2 h$ (1)

Gọi V_1, R_1, h_1 lần lượt là thể tích, bán kính đáy và chiều cao của khối nón.

Suy ra: $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R_1^2 h_1$ (2)

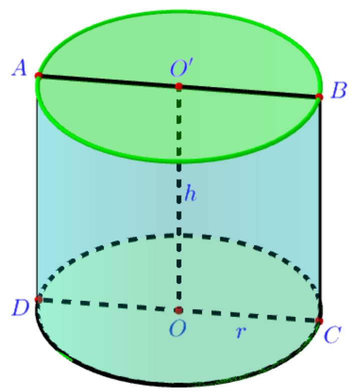
Gọi V_2, h_2 là thể tích lượng nước đổ vào và độ cao của nước trong cốc sau khi đã lấy khối nón ra. Suy ra: $V_2 = \pi R^2 h_2$ (3)

Từ (1),(2) và (3) ta có:

$$V - V_1 = V_2 \Leftrightarrow \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi {R_1}^2 h_1 = \pi R^2 h_2 \Leftrightarrow R^2 h - \frac{1}{3}{R_1}^2 h_1 = R^2 h_2 \Leftrightarrow h_2 = \frac{R^2 h - \frac{1}{3}{R_1}^2 h_1}{R^2} \quad (4)$$

Thay $R = a, R_1 = \frac{a}{2}, h = h_1 = 12$ vào (4) ta có: $h_2 = 12 - \frac{1}{3}.\frac{1}{4}.12 = 11$.

Câu 7: **Chọn D**



Gọi $ABCD$ là thiết diện qua trục của khối trụ.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên ta có: $OC = \frac{1}{2}OO' \Rightarrow h = 2r\ (1)$.

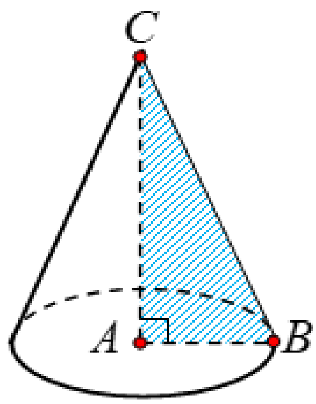
Diện tích xung quanh của khối trụ là: $S_{xq} = 2\pi rh\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{xq} = 2\pi rh = 4\pi r^2$.

Ta có: $S_{xq} = 16\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 16\pi \Rightarrow 4\pi r^2 = 16\pi$.

Thể tích của khối trụ là: $V = \pi r^2 h = 2\pi r^3 = 2\pi.2^3 = 16\pi$ (đơn vị thể tích).

Câu 8: **Chọn D**



Ta có $l = CB = 2a$, $BCA = 30°$.

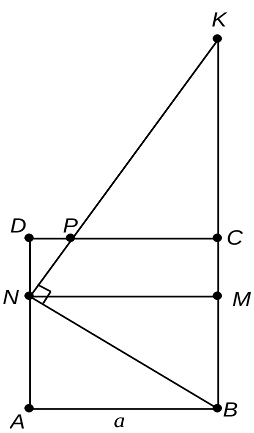
Xét tam giác ABC vuông tại A có:

$$\sin 30° = \frac{AB}{CB} = \frac{r}{l} \Rightarrow r = l.\sin 30° = 2a.\frac{1}{2} = a.$$

$$\cos 30° = \frac{CA}{CB} = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l.\cos 30° = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Suy ra $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi a^2.a\sqrt{3} = \frac{\pi\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 9: **Chọn A**



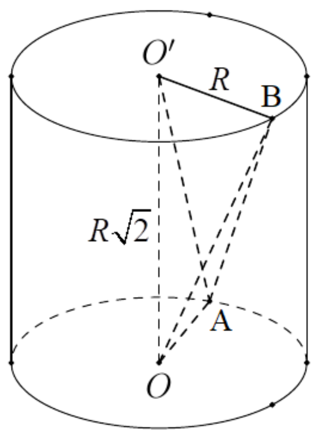
Ta có $NB = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

ΔABN đồng dạng ΔNKB suy ra $\frac{AN}{NB} = \frac{NB}{KB} \Rightarrow KB = \frac{NB^2}{AN} = \frac{13a^2}{9}.\frac{3}{2a} = \frac{13a}{6}$

Gọi M là điểm trên BC sao cho $BM = 2MC$

Suy ra $BM=\frac{2a}{3};MK=\frac{3a}{2}$. Vậy $V=\pi a^2.\frac{2a}{3}+\frac{1}{3}\pi a^2.\frac{3a}{2}=\frac{7}{6}\pi a^3$.

Câu 10: Chọn C

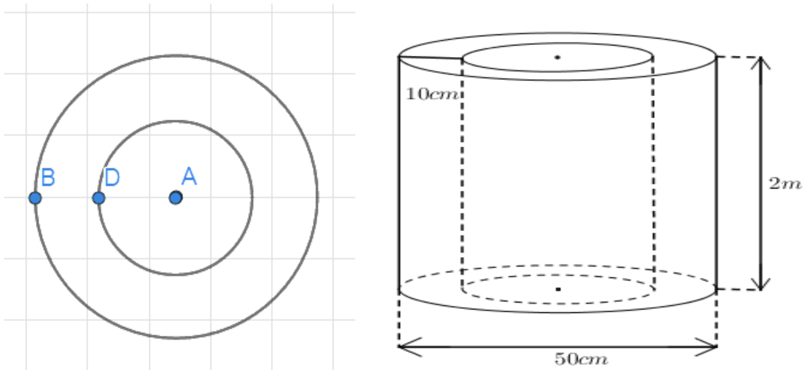


Thể tích khối trụ $V_1=\pi R^2.h=\pi R^2.R\sqrt{2}=\pi R^3\sqrt{2}$

Khối tứ diện $BO'OA$ có BO' là đường cao và đáy là tam giác vuông $O'OA$, do đó thể tích khối tứ diện là $V_2=\frac{1}{3}S_{O'OA}.O'B=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}OA\cdot OO'\cdot O'B=\frac{1}{6}R.R\sqrt{2}.R=\frac{\sqrt{2}}{6}R^3$

Vậy $\frac{V_2}{V_1}=\frac{R^3\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{\pi R^3\sqrt{2}}=\frac{1}{6\pi}$.

Câu 11: Chọn A



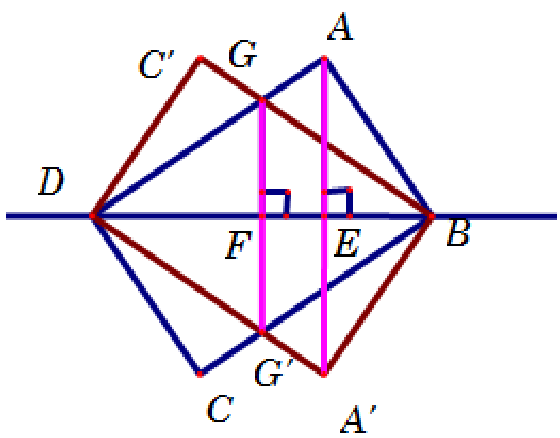
Bán kính ống cống là: $R=AB=\frac{50}{2}=25cm=0.25m$.

Do lớp bê tông dày $10cm$ nên bán kính phần được giới hạn bên trong là: $r=AD=15cm=0.15m$

Thể tích phần bê tông là: $V=\pi.h\left(R^2-r^2\right)=\pi.2\left(0.25^2-0.15^2\right)=0.08\pi\left(m^3\right)$.

Câu 12: Chọn C

Cách 1:



Gọi A', C' lần lượt đối xứng với A, C qua BD, $G=BC'\cap AD$, G' đối xứng với G qua BD. $E=AA'\cap BD$, $F=GG'\cap BD\Rightarrow F$ là trung điểm BD.

Gọi V là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường thẳng BD.

V_1 là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác BAD quanh cạnh BD (cũng là thể tích của khối tròn xoay khi quay tam giác BCD quanh cạnh BD).

V_1', V_1'' lần lượt là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay ΔBAE, ΔEAD quanh cạnh BD.

V_2 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay ΔBGD quanh cạnh BD.

V_2' là thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay ΔBGF quanh cạnh BD.

Ta có V_1' là thể tích của khối nón đỉnh B, bán kính đáy AE.

Tính được $AE = \dfrac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \dfrac{2.2\sqrt{3}}{\sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2}} = \sqrt{3}$, $BD = 4$, $BE = 1$, $DE = 3$.

$\Rightarrow V_1' = \dfrac{1}{3}\pi.AE^2.BE = \dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = \pi$.

Ta có V_1'' là thể tích của khối nón đỉnh D, bán kính đáy AE.

$\Rightarrow V_1'' = \dfrac{1}{3}\pi.AE^2.DE = \dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2.3 = 3\pi$. Suy ra $V_1 = V_1' + V_1'' = \pi + 3\pi = 4\pi$.

Ta có V_2' là thể tích của khối nón đỉnh B, bán kính đáy GF.

Ta chứng minh được $\Delta BGF \sim BDC'$ (g – g).

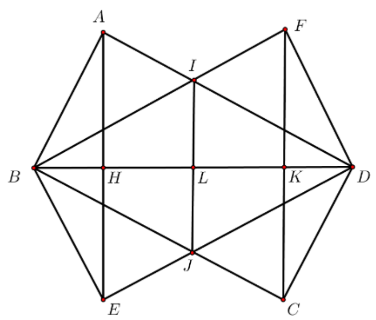
$\Rightarrow \dfrac{GF}{DC'} = \dfrac{BF}{BC'} \Rightarrow GF = \dfrac{BF.DC'}{BC'} = \dfrac{BD.DC'}{2BC'} = \dfrac{4.2}{2.2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

$V_2' = \dfrac{1}{3}\pi.GF^2.BF = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2.2 = \dfrac{8\pi}{9}$.

Ta có $V_2 = 2V_2' = \dfrac{16\pi}{9}$. Vậy $V = 2V_1 - V_2 = 2.4\pi - \dfrac{16\pi}{9} = \dfrac{56\pi}{9}$.

Cách 2:

Gọi điểm như hình vẽ



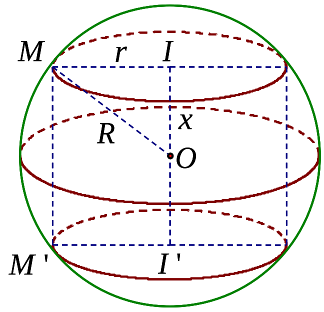
V_1, V_2 lần lượt là thể tích khói nón, nón cụt nhận được khi quay tam giác ABH và tứ giác $AHLT$ quay BD.

Ta có: $AH = \sqrt{3}, IL = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, BH = HL = 1$.

Ta có: $V = 2\left(V_1 + V_2\right) = 2\left[\dfrac{1}{3}BH.\pi.AH^2 + \dfrac{1}{3}HL.\pi.\left(IL^2 + IL.AH + AH^2\right)\right]$

$= 2\left[\dfrac{1}{3`}.1.\pi.3 + \dfrac{1}{3}.1.\pi.\left(\dfrac{4}{3} + 2 + 3\right)\right] = \dfrac{56\pi}{9}$.

Câu 13: Chọn B



Gọi bán kính mặt cầu là R và chiều cao của khối trụ là $h = 2x > 0$.

Suy ra bán kính đáy trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$.

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = 2\pi\left(R^2 - x^2\right)x$

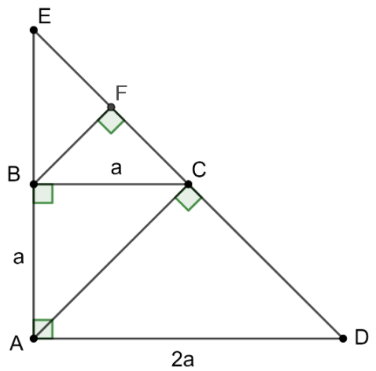
Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

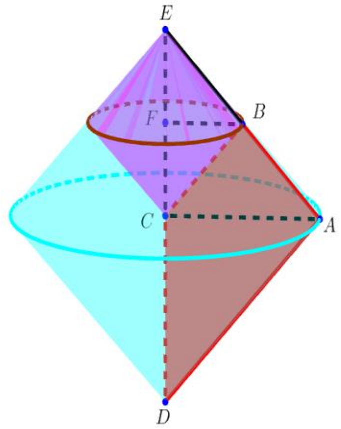
$$V^2 = 2\pi^2\left(R^2 - x^2\right)^2.2x^2 \le 2\pi^2\left(\frac{2\left(R^2 - x^2\right) + 2x^2}{3}\right)^3 = \frac{16\pi^2R^6}{27}$$

Suy ra $V \le \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $R^2 - x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{R}{\sqrt{3}}$

Vậy $\max V = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. Với $R = \sqrt{3}$ thì $\max V = 4\pi$.

Câu 14: Chọn A





Gọi E là giao điểm của AB và CD. Gọi F là hình chiếu vuông góc của B trên CE.

Ta có: $\Delta\, BCF = \Delta\, BEF$ nên tam giác $\Delta\, BCF$ và $\Delta\, BEF$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V_1.

$\Delta\, ADC = \Delta\, AEC$ nên tam giác $\Delta\, ADC$ và $\Delta\, AEC$ quay quanh trục CD tạo thành hai khối nón bằng nhau có thể tích V.

Nên thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình thang $ABCD$ xung quanh trục CD bằng:

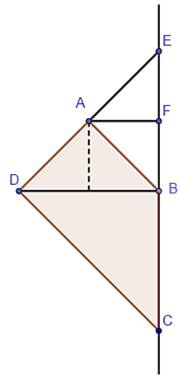
$$2V - 2V_1 = 2.\frac{1}{3}\pi\left(CD.AC^2 - CF.BF^2\right) = \frac{2}{3}\pi\left[\left(a\sqrt{2}\right)^3 - \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{7\sqrt{2}\pi a^3}{6} \text{(đvtt)}.$$

Câu 15: Chọn A

Ta có: $AB = AD = 2$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{AD^2 + \left(\dfrac{1}{2}CD\right)^2} = 2\sqrt{2}$.

Tam giác BCD vuông cân tại B do $CD^2 = BD^2 + BC^2$ và $BD = BC = 2\sqrt{2}$.

Kéo dài $AD \cap BC = E$. Kẻ $AF \perp BE$ tại F. Khi đó $AF \,//\, BD$.



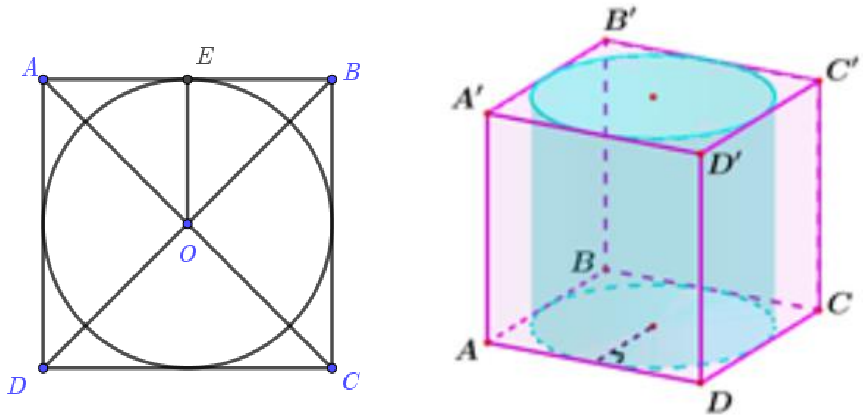
Dễ chứng minh: $\Delta BCD = \Delta BED$, $\Delta ABF = \Delta AEF$, $AF = BF = \frac{1}{2}BD = \sqrt{2}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ECD khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác BCD khi quay xung quanh đường thẳng BC (bán kính đáy BD, đường cao BC): $V_1 = 2.\frac{1}{3}\pi BD^2.BC = \frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi tam giác ABE khi quay xung quanh đường thẳng BC bằng 2 lần thể tích khối nón sinh ra bởi tam giác ABF khi quay xung quanh đường thẳng BC (bán kính đáy AF, đường cao BF): $V_2 = 2.\frac{1}{3}\pi.AF^2.BF = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi hình thang $ABCD$ khi quay xung quanh đường thẳng BC là: $V = V_1 - V_2 = \frac{28\sqrt{2}}{3}\pi$.

Câu 16: Chọn B



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Kẻ $OE \perp AB$ tại E, khi đó bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là OE.

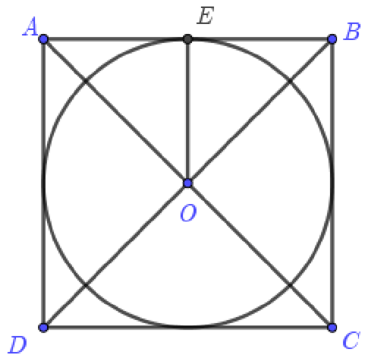
Ta có $OE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

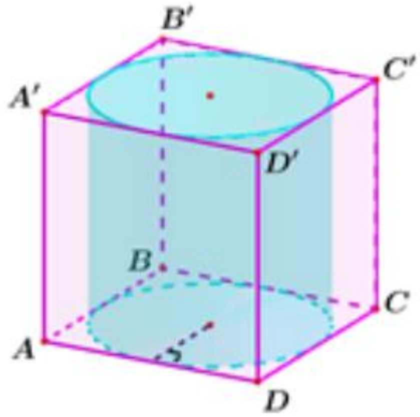
Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là $S = \pi.OE^2 = \frac{1}{4}a^2\pi$.

Gọi h là chiều cao của khối trụ, khi đó $h = AA'$.

Thể tích V của khối trụ đã cho là $V = h.S = AA'.S = a.\frac{1}{4}a^2\pi = \frac{1}{4}a^3\pi$.

Câu 17: Chọn B





Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Kẻ $OE \perp AB$ tại E, khi đó bán kính của đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là OE. Ta có $OE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ là $S = \pi.OE^2 = \dfrac{1}{4}a^2\pi$.

Gọi h là chiều cao của khối trụ, khi đó $h = AA'$.

Thể tích V của khối trụ đã cho là $V = h.S = AA'.S = a.\dfrac{1}{4}a^2\pi = \dfrac{1}{4}a^3\pi$.

Câu 18: Chọn A

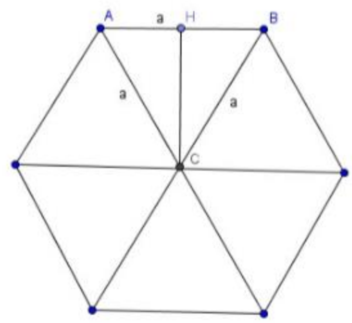
Quay tam giác ABD khi quay quanh AD ta có $V_1 = \dfrac{1}{3}AD.\pi AB^2 = \dfrac{\pi}{3}.a^3$ (đvtt).

Quay tam giác ABC khi quay quanh AB ta có $V_2 = \dfrac{1}{3}AB.\pi BC^2 = \dfrac{\pi}{3}.a^3$ (đvtt).

Quay tam giác DBC khi quay quanh BC ta có $V_3 = \dfrac{1}{3}\text{BC}.\pi BD^2 = \dfrac{\pi}{3}.AB.2AB^2 = \dfrac{2\pi}{3}a^3$ (đvtt).

Vậy $V_1 + V_2 = V_3$.

Câu 19: Chọn B



Diện tích của một lục giác đều cạnh a là:

$$S = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3(20)^2\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}\ (\text{cm}^2).$$

Tổng thể tích 10 chiếc cột ban đầu là $V_1 = 10.S.h = 10.600\sqrt{3}.400 = 2,4.10^6.\sqrt{3}\ \ (\text{cm}^3)$.

Tổng thể tích 10 khối trụ sau khi hoàn thiện là:

$V_2 = 10.\pi r^2 h = 10\pi.\left(\dfrac{42}{2}\right)^2.400 = 1764000\pi$ (cm^3).

Thể tích vữa cần dùng là $V = V_2 - V_1 = 1764000\pi - 2,4.10^6.\sqrt{3}$ (cm^3)

Số bao xi măng cần dùng là $n = \dfrac{0,8V}{64000} = \dfrac{0,8\left[1764000\pi - 2,4.10^6.\sqrt{3}\right]}{64000} \approx 17,3106.$

Câu 20: Chọn D

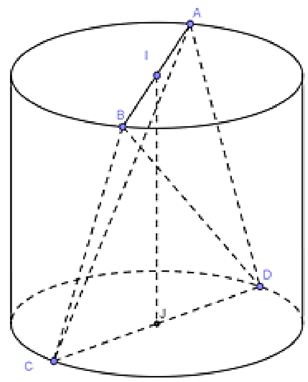
Thể tích phần khối trụ phía dưới: $V_1 = \pi R^2 \dfrac{1}{3}h = 0,5\pi\,\text{m}^3$.

Thể tích phần khối nón cụt: $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi\left[R^2 + \left(\dfrac{R}{2}\right)^2 + R.\dfrac{R}{2}\right].\dfrac{2h}{3} = \dfrac{7\pi}{12}\text{m}^3$.

Thể tích phần trụ rỗng: $V_3 = \pi\left(\dfrac{R}{4}\right)^2 h = \dfrac{3\pi}{32}\text{m}^3$.

Thể tích khối bê tông: $V_1 + V_2 - V_3 \approx 3,109\,\text{m}^3$.

Câu 21: Chọn A

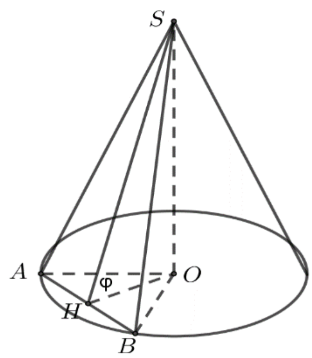


Gọi h , V lần lượt là chiều cao và thể tích khối trụ $(T) \Rightarrow d(AB,CD) = h(cm)$.

Ta có: $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}h.\sin(AB;CD).AB.CD = \dfrac{1}{6}h.\sin 30°.6^2 \Rightarrow h = \dfrac{6V_{ABCD}}{\sin 30°.6^2} = 10(cm)$.

$\Rightarrow V_{(T)} = \pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2.h = 90\pi\left(cm^3\right)$.

Câu 22: Chọn C



Gọi H là trung điểm của đoạn AB.
Nhận thấy:
Tam giác OAB vuông cân tại O.
Mặt khác: $OH \perp AB$, $SH \perp AB$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SAB), (OAB) bằng $\varphi = SHO$.

Ta có: $S_{\Delta OAB} = S_{\Delta SAB}.\cos\varphi \Rightarrow \dfrac{1}{2}R^2 = R^2\sqrt{2}.\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Mà $\cos\varphi = \dfrac{OH}{SH} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\dfrac{R\sqrt{2}}{2}}{SH} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow SH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}.2\sqrt{2} = 2R.$

$\Rightarrow SO = \sqrt{SH^2 - OH^2} = \sqrt{4R^2 - \left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{14}}{2}$

Vậy thể tích của khối nón bằng $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2.SO = \dfrac{1}{3}\pi R^2.\dfrac{R\sqrt{14}}{2} = \dfrac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}.$

Câu 23: Chọn A

Gọi chiều cao của viên đá cảnh hình trụ là $h = 2x$, $0 < x < R$

$\Rightarrow$ bán kính đáy của khối trụ là: $\sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow V = \pi\left(R^2 - x^2\right)2x = 2\pi\left(R^2x - x^3\right).$

$\Rightarrow V' = 2\pi\left(R^2 - 3x^2\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{R^2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}.$

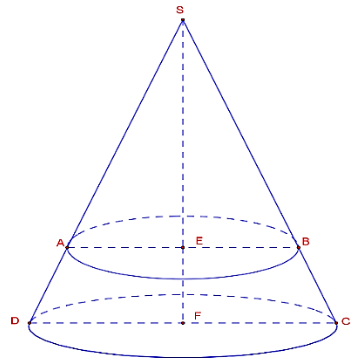
Lập bảng biến thiên của hàm số V trên khoảng $(0;R)$ ta được $V_{\max} = V\left(\dfrac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}R^3}{9}.$

Câu 24: Chọn C

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Theo giả thiết, ta có $EB = \dfrac{a}{2}$, $FC = \dfrac{b}{2}$ và $EF = h$. Đặt $SE = x$.

$\Delta SEB \sim \Delta SFC \Rightarrow \dfrac{SE}{SF} = \dfrac{EB}{FC} \Rightarrow \dfrac{x}{x+h} = \dfrac{a}{b} \Rightarrow x = \dfrac{ah}{b-a}$. Suy ra $SF = \dfrac{ah}{b-a} + h = \dfrac{bh}{b-a}$.

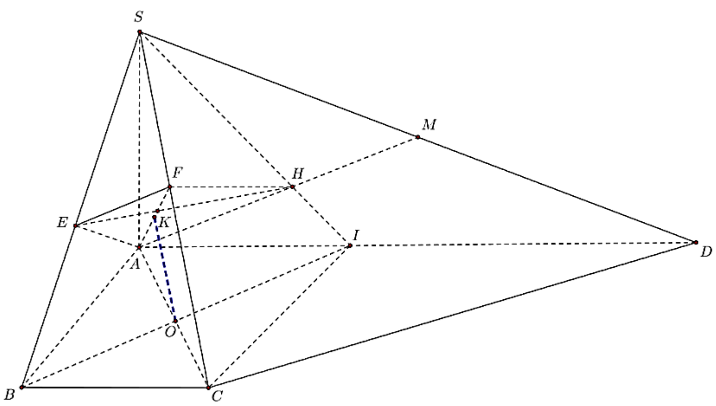


Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là

$V = \dfrac{1}{3}\pi.SF.FC^2 - \dfrac{1}{3}\pi.SE.EB^2 = \dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{bh}{b-a}\cdot\dfrac{b^2}{4} - \dfrac{ah}{b-a}\cdot\dfrac{a^2}{4}\right)$

$= \dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{h}{4(b-a)}.\left(b^3 - a^3\right) = \dfrac{1}{12}\pi h.\left(a^2 + ab + b^2\right).$

Câu 25: Chọn D



Nhận xét: Tứ giác $ABCI$ là hình vuông. Dễ chứng minh $BC \perp (SAB)$ và $BI \perp SC$.

$\begin{cases} EA \perp SB \\ EA \perp BC \end{cases} \Rightarrow EA \perp (SBC) \Rightarrow EA \perp SC$.

$\begin{cases} EA \perp SC \\ FA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AEF)$.

Trong tam giác vuông SAB có $\frac{SE}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SAD có $\frac{HS}{HI}.\frac{AI}{AD}.\frac{MD}{MS} = 1 \Rightarrow \frac{HS}{HI} = 3 \Rightarrow \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4}$.

Trong tam giác SBI có $\frac{SE}{SB} = \frac{SH}{SI} = \frac{3}{4} \Rightarrow EH // BI$. Do $BI \perp SC$ nên $EH \perp SC$.

Suy ra các điểm A, E, F, H cùng thuộc mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC.

Gọi K là trung điểm AF.

Vì $\begin{cases} EA \perp EF \\ AH \perp FH \end{cases} \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔEFH.

Ta có: $AF = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{a\sqrt{3}.a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Suy ra bán kính đáy của khối nón là $R = \frac{1}{2}AF = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}$.

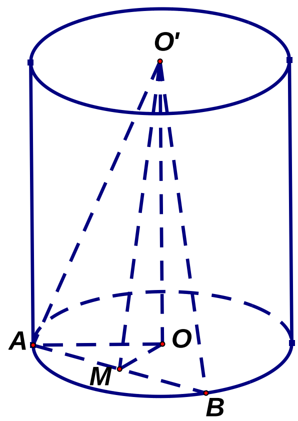
Gọi O là tâm hình vuông $ABCI$.

Do $\begin{cases} SC \perp (EFH) \\ OK // SC \end{cases} \Rightarrow OK \perp (EFH) \Rightarrow O$ là đỉnh của khối nón.

Chiều cao của khối nón là $h = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 - AF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 - \frac{6}{5}a^2} = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}.\pi R^2.h = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}\right)^2.\frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{\pi a^3}{10\sqrt{5}}$.

Câu 26: Chọn D



Đặt độ dài cạnh $AB = x$ $(x > 0)$ và M là trung điểm AB.

Vì tam giác $O'AB$ đều nên $O'A = O'B = AB = x \Rightarrow O'M = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Vì mặt phẳng $(O'AB)$ tạo với mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ góc $60°$ nên $\widehat{O'MO} = 60°$.

Xét tam giác $O'OM$ vuông tại O ta có: $\cos \widehat{O'MO} = \frac{OM}{O'M}$. Suy ra

$$\cos 60° = \frac{OM}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow OM = \frac{x\sqrt{3}}{4}$$

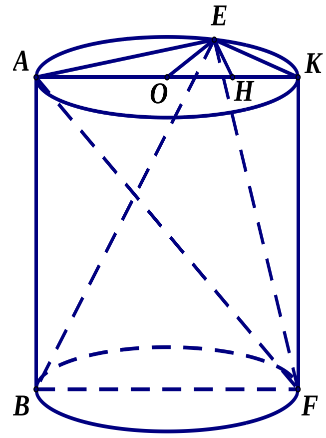
Xét tam giác OAM vuông ở M có: $OA^2 = OM^2 + AM^2$ nên

$R^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{7}{16}x^2 \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{7}}{7}R$

Do đó: $O'M = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}R$ và $OM = \dfrac{x\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}R$.

Vì vậy, ta có $OO' = \sqrt{O'M^2 - OM^2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}R$.

Vậy thể tích khối trụ là $V = \pi R^2.h = \pi R^2.\dfrac{3\sqrt{7}}{7}R \Rightarrow V = \dfrac{3\pi\sqrt{7}R^3}{7}$.



Câu 27: Chọn B

Từ giả thiết suy ra BF là đường kính đường tròn đáy của hình trụ.

Kẻ đường sinh FK, gọi O là trung điểm AK.

Gọi r là bán kính đáy, suy ra $2\pi r = 6 \Leftrightarrow r = \dfrac{3}{\pi}$.

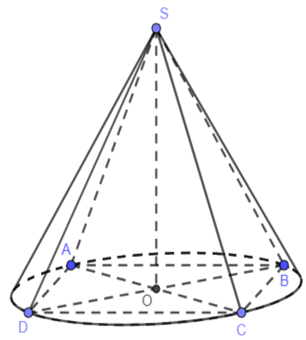
Đặt $AOE = \alpha$ (rad). Trong hình chữ nhật $ABCD$ có $AE = 2$ $\Rightarrow l_{AE} = r.\alpha = 2 \Rightarrow AOE = \alpha = \dfrac{2}{r} = \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow EOK = \dfrac{\pi}{3}$, suy ra tam giác EOK là tam giác đều cạnh $r = \dfrac{3}{\pi}$. Gọi H là trung điểm $OK \Rightarrow EH \perp AK$, $EH \perp AB$

$\Rightarrow EH \perp (ABFK) \Rightarrow d(E,(ABF)) = EH = \dfrac{r\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$.

Diện tích tam giác ABF là $S = \dfrac{1}{2}.AB.BF = \dfrac{1}{2}.3.\dfrac{6}{\pi} = \dfrac{9}{\pi}$.

Thể tích khối tứ diện $ABEF$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABF}.d(E,(ABF)) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{9}{\pi}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2\pi^2}$.

Câu 28: Chọn D

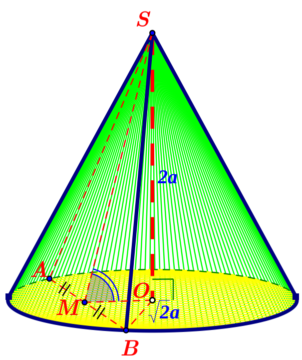


Hình nón có bán kính của đáy là $r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ và độ dài đường sinh $l = SA = 3$.

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.3 = \dfrac{9\sqrt{2}\pi}{2}$.

Câu 29: Chọn D

Kí hiệu như hình vẽ

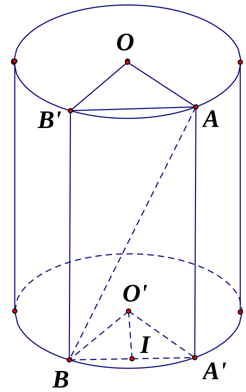


Dễ thấy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy là góc $SMO = 60^0$.

Xét tam giác vuông SOM có $OM = 2a.\cot 60^\circ = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$; $SM = \dfrac{2a}{\sin 60^\circ} = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$;

Lại có $AB = 2.MB = 2\sqrt{OB^2 - OM^2} = 2\sqrt{2a^2 - \frac{4a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}SM.AB = \frac{1}{2}.\frac{4a}{\sqrt{3}}.\frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}a^2}{3}$.



Câu 30: Chọn A

Gọi A' là hình chiếu của A trên (O'); B' là hình chiếu của B trên (O).

Khi đó $OO'//AA'$ nên $(AB,OO') = (AB,AA') = BAA' = 30^\circ$ (do $\Delta ABA'$ vuông tại B).

Gọi I là trung điểm $A'B$. Do $OO'//(AA'BB')$ nên

$$d(OO',AB) = d(OO',(AA'BB')) = d(O',(AA'BB')) = O'I = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ta có $A'B = 2BI = 2\sqrt{O'B^2 - O'I^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a$.

$OO' = AA' = A'B.\cot 30^\circ = a\sqrt{3}$.

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi a.a\sqrt{3} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2\left(\sqrt{3}+1\right)$.

Câu 31: Chọn B

Xét tam giác IOF vuông tại O ta có:

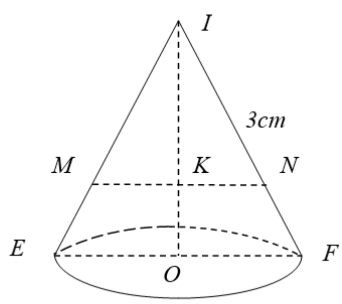
$EF = 2OF = 2.\sin 30^0.3 = 3(cm)$.

Mặt khác thiết diện đi qua điểm K và vuông góc với IO nên $MN \,//\, EF$.

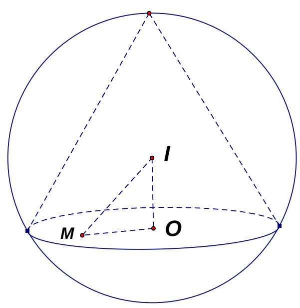
Ta xét tỉ lệ: $\frac{MN}{EF} = \frac{IK}{IO} \Leftrightarrow MN = \frac{IK.EF}{IO} = \frac{2}{3}.3 = 2(cm)$.

Vậy bán kính của thiết diện là: $KN = \frac{MN}{2} = 1(cm)$.

Suy ra: $S = \pi$.



Câu 32: Chọn C



Gọi O là tâm của đáy. Đặt $OI = a \Rightarrow AI = 12 - a$

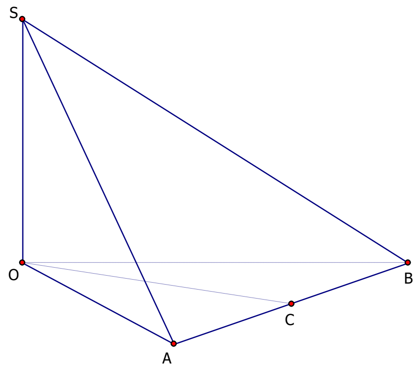
Để I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón thì $IA = IB \Rightarrow \sqrt{6^2 + a^2} = 12 - a \Rightarrow a = 4,5$

M thuộc mặt đáy cách I một khoảng bằng 6 $\Rightarrow IM = 6$

Xét ΔIOM vuông tại O: $OM = \sqrt{IM^2 - IO^2} = \sqrt{15,75}$

Suy ra tập hợp M là đường tròn tâm O bán kính OM. Chu vi là $2\pi\sqrt{15,75} = 3\pi\sqrt{7}$.

Câu 33: Chọn C



Đặt $OA = R$. Gọi C là trung điểm của AB. Tam giác OAB cân tại $O \Rightarrow OC \perp AB \Rightarrow OC = 2a$.

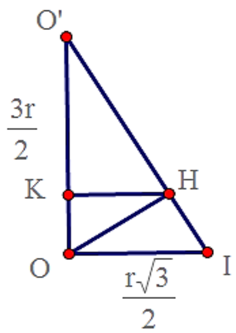
Ta tính được: $SA = SB = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$. và $AB = 2AC = 2\sqrt{R^2 - 4a^2}$.

Xét tam giác SAB có $\begin{cases} SA = SB \\ SAB = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \Delta SAB$ đều $\Rightarrow SA = AB \Leftrightarrow \dfrac{4R^2}{3} = 4\left(R^2 - 4a^2\right)$

$\Rightarrow R = \sqrt{6}a \Rightarrow SA = 2\sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là: $S = \pi R.SA = 4\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 34: Chọn A



Trong (O) kẻ $OI \perp MN$ tại I. Khi đó ta có $MN \perp (OO'I) \Rightarrow (OO'I) \perp (O'MN)$. Trong $(OO'I)$ kẻ $OH \perp O'I$ tại H $\Rightarrow OH \perp (O'MN)$ tại H nên H là hình chiếu vuông góc của O lên $(O'MN)$.

Tam giác OMN đều cạnh r, có OI là đường trung tuyến nên $OI = \dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $O'OI$ vuông tại O, đường cao OH nên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{O'O^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{9r^2} + \frac{4}{3r^2} = \frac{16}{9r^2} \Rightarrow OH = \frac{3r}{4}.$$

$O'I = \sqrt{O'O^2 + OI^2} = r\sqrt{3}$.

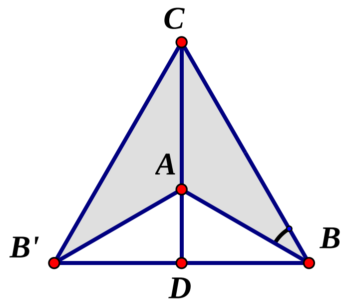
$O'O^2 = O'H.O'I \Rightarrow \dfrac{O'H}{O'I} = \dfrac{O'O^2}{O'I^2} = \dfrac{3}{4}$.

Kẻ $HK \perp O'O$ tại K ta có KH là bán kính đáy của mặt nón.

Ta có $\dfrac{HK}{OI}=\dfrac{O'H}{O'I}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow HK=\dfrac{3}{4}OI=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r$.

Diện tích S cần tính là $S=\pi.HK.OH=\pi.\dfrac{3\sqrt{3}}{8}r.\dfrac{3r}{4}=\dfrac{9\sqrt{3}r^2}{32}$.

Câu 35: Chọn A



Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng AC.

V_1 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông CDB khi quay quanh trục CD.

V_2 là thể tích khối nón tròn xoay sinh bởi tam giác vuông ADB khi quay quanh trục AD.

Khi đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=V_1-V_2$.

Tam giác ABC cân tại A và $AB=2a=AC$, $ABC=30^{\circ}\Rightarrow CAB=120^{\circ}$ và $DAB=60^{\circ}$.

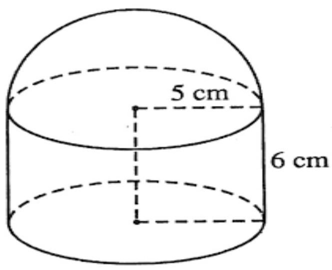
Do đó $DB=AB.\sin 60^{\circ}=a\sqrt{3}$.

Vậy ta có

$V=\dfrac{1}{3}\pi.DB^2.DC-\dfrac{1}{3}\pi.DB^2.DA \quad =\dfrac{1}{3}\pi.DB^2\left(DC-DA\right) \quad =\dfrac{1}{3}\pi.DB^2.AC \quad =\dfrac{1}{3}\pi.\left(a\sqrt{3}\right)^2.2a$

$=2\pi a^3$

Câu 36:



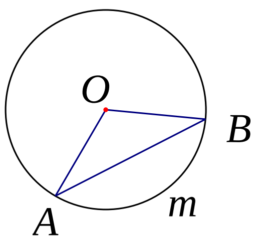
Chọn B

Diện tích xung quanh phần thân hộp là: $S_1=2\pi.5.6=60\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích xung quanh nửa hình cầu là: $S_2=\dfrac{1}{2}.4\pi.5^2=50\pi\left(cm^2\right)$

Diện tích cần sơn là: $S=S_1+S_2=110\pi\left(cm^2\right)$.

Câu 37: Chọn A



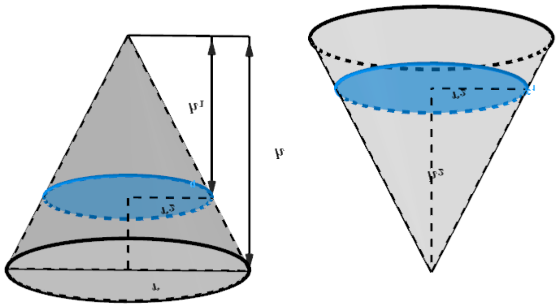
Gọi S là diện tích thiết diện, S' là diện tích hình chiếu của thiết diện lên mặt phẳng đáy. Khi đó $S' = S.\cos 60°$.

Ta có $AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow \cos AOB = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow AOB = 120°$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB.\sin 120° = 4\sqrt{3} \\ S_{OAmB} = \dfrac{1}{3}\pi.OA^2 = \dfrac{16\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow S' = S_{OAmB} - S_{OAB} = \dfrac{4\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{S'}{\cos 60°} = \frac{8\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right)}{3}.$$

Câu 38: Chọn A



Gọi V_{nuoc}, V lần lượt là thể tích của lượng nước trong đồ chơi và thể tích khối đồ chơi.

Gọi h, r lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối đồ. $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Xét khối đồ chơi đặt theo hình H_1.

Gọi h_1, r_1 lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón chứa lượng nước.

Khi đó ta có: $\dfrac{h_1}{h} = \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow h_1 = \dfrac{2}{3}h$, $r_1 = \dfrac{2}{3}r$.

$$V_{nuoc} = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi.\left(\frac{2}{3}r\right)^2.\frac{2}{3}h = \frac{8}{81}\pi r^2 h. \ (*)$$

Xét khối đồ chơi đặt theo hình H_2.

Gọi h_2, r_2 lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón không chứa nước trong khối đồ chơi. Suy ra thể tích của khối nón không chứa nước: $V_{non} = \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$.

Đặt: $\dfrac{h_2}{h} = \dfrac{r_2}{r} = k \Rightarrow h_2 = k.h$, $r_2 = k.r$.

$$V_{nuoc} = V - V_{non} = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi (k.r)^2.k.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h\left(1 - k^3\right). \ (**)$$

Từ $(*)$, $(**)$ suy ra: $\frac{8}{81}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h\left(1-k^3\right) \Leftrightarrow 1-k^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{\frac{19}{27}}$.

Vậy chiều cao lượng nước ở hình H_2 : $h' = h - h_2 = h - k.h = h\left(1-k\right) = 20.\left(1-\sqrt[3]{\frac{19}{27}}\right) \approx 2,21\left(cm\right)$

.

DẠNG 2 Khối tròn xoay nội, ngoại tiếp khối đa diện

Câu 1: Một hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông, diện tích xung quanh bằng $36\pi a^2$. Tính thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ.

A. $27\sqrt{3}a^3$. **B.** $24\sqrt{3}a^3$. **C.** $36\sqrt{3}a^3$. **D.** $81\sqrt{3}a^3$.

Câu 2: Cho hình nón N_1 đỉnh S đáy là đường tròn $C(O;R)$, đường cao $SO = 40\,\text{cm}$. Người ta cắt nón bằng mặt phẳng vuông góc với trục để được nón nhỏ N_2 có đỉnh S và đáy là đường tròn $C'(O';R')$. Biết rằng tỷ số thể tích $\frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} = \frac{1}{8}$. Tính độ dài đường cao nón N_2.

A. $20\,\text{cm}$. **B.** $5\,\text{cm}$. **C.** $10\,\text{cm}$. **D.** $49\,\text{cm}$.

Câu 3: Một hình tứ diện đều cạnh a có một đỉnh trùng với đỉnh hình nón, ba đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy của hình nón. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. $\pi\sqrt{3}a^2$ **B.** $\frac{1}{3}\pi\sqrt{2}a^2$. **C.** $\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}a^2$. **D.** $\frac{1}{3}\pi\sqrt{3}a^2$.

Câu 4: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng $60°$. Tính thể tích V của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3\pi\sqrt{3}$. **B.** $V = \frac{4a^3\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{9}$. **D.** $V = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và bán kính đáy bằng a. Thể tích của khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$. **C.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^3}{3}$.

Câu 6: Cho khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối nón đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{2\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Một hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Kết quả diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón đó bằng $\frac{\pi a^2}{4}\left(\sqrt{b}+c\right)$ với b và c là hai số nguyên dương và $b > 1$. Tính bc.

A. $bc = 7$. **B.** $bc = 15$. **C.** $bc = 8$. **D.** $bc = 5$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Gọi M là trung điểm AB. Cho tứ giác $AMCD$ và các điểm trong của nó quay quanh trục AD ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích khối tròn xoay đó.

A. $\frac{7\pi}{3}$. **B.** $\frac{7\pi}{6}$. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{14\pi}{9}$.

Câu 9: Cho hình nón có bán kính đáy bằng 2 cm, góc ở đỉnh bằng $60°$. Tính thể tích của khối nón đó.

A. $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{9}cm^3$. **B.** $8\sqrt{3}\pi\, cm^3$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}cm^3$. **D.** $\dfrac{8\pi}{3}cm^3$.

Câu 10: Gọi (H) là hình tròn xoay thu được khi cho tam giác đều ABC có cạnh a quay quanh AB, tính thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi (H).

A. $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 11: Gọi (H) là hình tròn xoay thu được khi cho tam giác đều ABC có cạnh a quay quanh AB, tính thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi (H).

A. $\dfrac{\pi a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{\pi a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 12: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$. Thể tích khối nón có đỉnh trùng với tâm của hình chữ nhật $ABCD$, đường tròn đáy ngoại tiếp $A'B'C'D'$ là

A. $\dfrac{15\pi a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{5\pi a^3}{4}$. **C.** $15\pi a^3$. **D.** $5\pi a^3$.

Câu 13: Thể tích của khối nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{48}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}\pi a^3}{12}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 6cm, AC = 8cm$. Gọi V_1 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB và V_2 là thể tích khối nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC. Khi đó, tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng:

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{16}{9}$. **D.** $\dfrac{9}{16}$.

Câu 15: Cho hình lăng trụ đều và một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn ngoại tiếp hai mặt đáy của hình lăng trụ. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối lăng trụ và khối trụ. Tính $\dfrac{V_1}{V_2}$

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\pi}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{4\pi}$. **C.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{4\pi}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Câu 16: Cắt hình nón (N) bởi một mặt phẳng đi qua trục của nó, ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh $2a$. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình nón (N) theo a là

A. $\dfrac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$. **B.** $4\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $\dfrac{16\sqrt{2}\pi a^3}{27}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

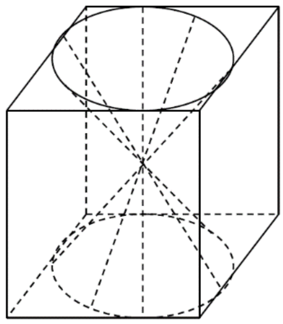
Câu 17: Cho hình thang cân $ABCD$, $AB//CD$, $AB = 6cm$, $CD = 2cm$, $AD = BC = \sqrt{13}cm$. Quay hình thang $ABCD$ xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là

A. $18\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $30\pi\left(cm^3\right)$. **C.** $24\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $12\pi\left(cm^3\right)$.

Câu 18: Cho hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O sao cho $SO = a\sqrt{5}$, một mặt phẳng (α) cắt mặt nón theo hai đường sinh SA, SB. Biết khoảng cách từ O đến mặt phẳng (α) bằng $2\sqrt{5}$ và diện tích tam giác SAB bằng 360. Thể tích khối nón bằng:

A. $1325\pi\sqrt{5}$. **B.** $265\pi\sqrt{5}$. **C.** $1325\sqrt{5}$. **D.** $265\sqrt{5}$.

Câu 19: Một hình hộp đứng có đáy là hình vuông chứa đồng hồ cát như hình vẽ. Tỉ số thể tích của đồng hồ cát và phần còn lại giữa đồng hồ cát và hình hộp đứng là



A. $\frac{\pi}{24-2\pi}$. **B.** $\frac{\pi}{6-\pi}$. **C.** $\frac{\pi}{24-\pi}$. **D.** $\frac{\pi}{12-\pi}$.

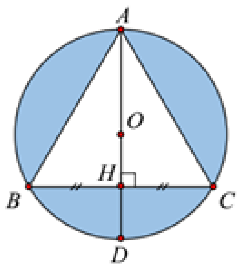
Câu 20: Cho khối nón (N) có chiều cao $h = 20$ cm, bán kính đáy $r = 25$ cm. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua đỉnh của (N) và cách tâm của mặt đáy 12 cm. Khi đó (α) cắt (N) theo một thiết diện có diện tích là

A. $S = 300$ cm^2. **B.** $S = 500$ cm^2. **C.** $S = 406$ cm^2. **D.** $S = 400$ cm^2.

Câu 21: Cho hình trụ có hai đáy là hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';R)$, chiều cao bằng đường kính đáy. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B. Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$ có giá trị lớn nhất bằng:

A. $\frac{R^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}R^3}{3}$. **C.** $\frac{R^3}{6}$. **D.** $\frac{R^3}{3}$.

Câu 22: Cho ΔABC đều cạnh a và nội tiếp trong đường tròn tâm O, AD là đường kính của đường tròn tâm O. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi cho phần tô đậm quay quanh đường thẳng AD bằng:



A. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$. **B.** $\frac{20\pi a^3\sqrt{3}}{217}$. **C.** $\frac{23\pi a^3\sqrt{3}}{216}$. **D.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	**2.A**	**3.D**	**4.D**	**5.A**	**6.A**	**7.D**	**8.C**	**9.C**	**10..A**
11..A	**12.B**	**13.B**	**14.B**	**15.D**	**16.A**	**17.B**	**18.A**	**19.D**	**20.B**
21.D	**22.C**								

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn D**

Ta có $S_{xq}=36\pi a^2=2\pi Rh$.

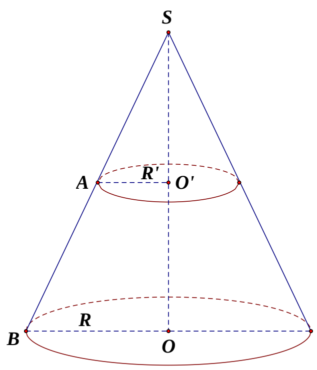
Do thiết diện qua trục là hình vuông nên ta có $2R=h$.

Khi đó $h^2=36a^2$ hay $h=6a$; $R=3a$.

Diện tích của mặt đáy hình lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $B=6.\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{27a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích V của lăng trụ lục giác đều nội tiếp hình trụ là $V=B.h=81a^3\sqrt{3}$.

Câu 2: **Chọn A**



Ta có: $V_{N_1}=\dfrac{1}{3}\pi R^2.SO$, $V_{N_2}=\dfrac{1}{3}\pi R'^2.SO'$.

Mặt khác, $\Delta SO'A$ và ΔSOB đồng dạng nên $\dfrac{R'}{R}=\dfrac{SO'}{SO}$.

Suy ra: $\dfrac{V_{N_2}}{V_{N_1}}==\dfrac{R'^2.SO'}{R^2.SO}=\left(\dfrac{SO'}{SO}\right)^3=\dfrac{1}{8}$

Suy ra $\dfrac{SO'}{SO}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow SO'=\dfrac{1}{2}.40=20\,\text{cm}$.

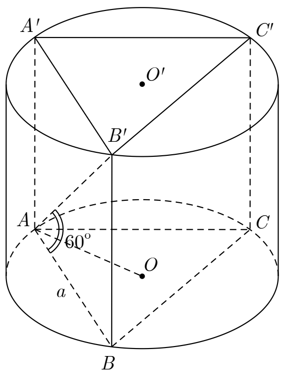
Câu 3: **Chọn D**

Do đáy hình chóp là tam giác đều nên bán kính đáy của hình nón $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

Đường sinh của hình nón có độ dài bằng cạnh của hình tứ diện đều

Vậy diện tích xung quanh hình nón là $\pi.r.l=\pi.\dfrac{\sqrt{3}}{3}a.a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi a^2$

Câu 4: **Chọn D**



Gọi O và O' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và $\Delta A'B'C'$.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên ΔABC là tam giác đều và $B'B\perp(ABC)$.

$\Rightarrow$ Góc giữa AB' và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa AB' và AB hay $B'AB = 60°$.

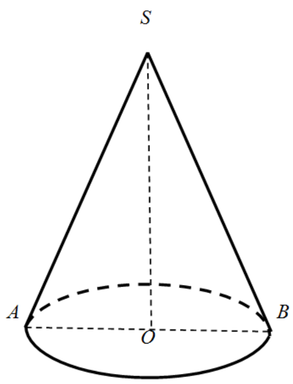
$\Rightarrow BB' = AB.\tan 60° = a\sqrt{3}$.

Lại có ΔABC là tam giác đều cạnh a nên $OA = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác, hình trụ ngoại tiếp lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao là BB', bán kính đáy là OA.

Vậy thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = \pi.OA^2.BB' = \pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.a\sqrt{3} = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: **Chọn A**

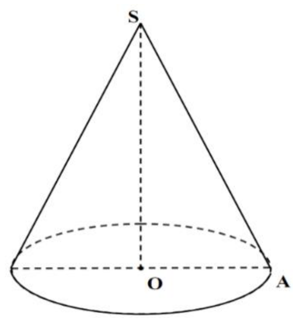


Gọi khối nón đã cho có S là đỉnh, O là tâm đáy, đường sinh SA. Ta có $SA = 2a$, $OA = a$.

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Thể tích của khối nón là: $V = \frac{1}{3}SO.\pi.OA^2 = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\pi.a^2 = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 6: **Chọn A**

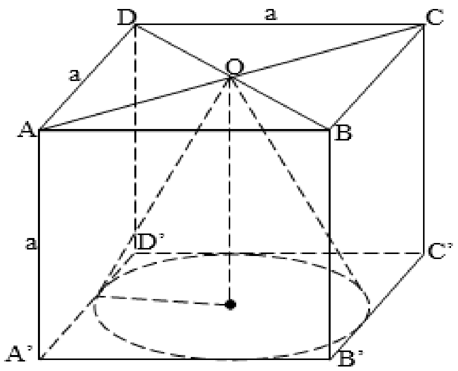


Giả sử khối nón có đỉnh S, đường tròn đáy tâm O và bán kính $R = OA$.

Ta có tam giác SOA vuông tại O nên $R = OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2} = a$.

Thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.a^2.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 7: **Chọn D**



Hình nón có đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$ có cạnh là a nên đáy của hình nón là hình tròn có bán kính $r = \dfrac{a}{2}$.

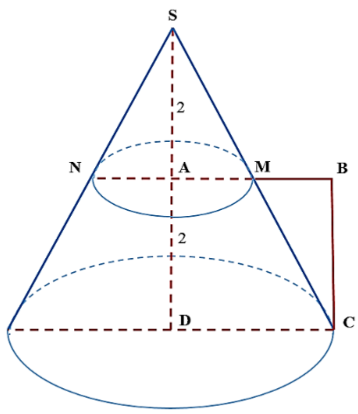
Hình nón có đỉnh là tâm của hình vuông $ABCD$ nên chiều cao của hình nón bằng độ dài cạnh của hình vuông. Suy ra: $h = a$.

Khi đó: độ dài đường sinh của hình nón là: $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón là: $S_{tp} = \pi r(r + l) = \pi \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{\pi a^2}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)$.

Suy ra: $b = 5; c = 1 \Rightarrow bc = 5$.

Câu 8: Chọn C



Cách 1

Gọi $S = CM \cap DA$. Vì M là trung điểm của AB, mà $\begin{cases} AM // CD \\ AM = \dfrac{1}{2}CD \end{cases}$ nên AM là đường trung bình của $\Delta SCD \Rightarrow A$ là trung điểm của $SD \Rightarrow SD = 2AD = 4$.

Khi cho tứ giác $AMCD$ và các điểm trong của nó quay quanh trục AD thì ta được một khối nón cụt có chiều cao $AD = 2$, hai đáy là hai đường tròn có bán kính lần lượt là $R_1 = CD = 2$, $R_2 = AM = 1$ và có thể tích là V.

Tam giác SCD và các điểm trong của nó quay quanh trục SD sẽ tạo thành một khối nón tròn xoay có chiều cao $SD = 4$, bán kính đáy $R_1 = CD = 2$ nên có thể tích là $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi R_1^2.SD = \dfrac{16\pi}{3}$.

Tam giác SAM và các điểm trong của nó quay quanh trục SD tạo thành một khối nón tròn xoay có chiều cao $SA = 2$, bán kính đáy $R_2 = AM = 1$ nên có thể tích là $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi R_2^2.SA = \dfrac{2\pi}{3}$.

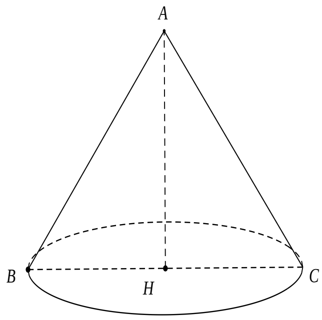
Ta có $V = V_1 - V_2 = \frac{14\pi}{3}$.

Cách 2 :

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối nón cụt có chiều cao h, hai bán kính đáy là R_1, R_2

$V = \frac{1}{3}\pi\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2\right).h = \frac{1}{3}\pi\left(4+1+2\right).2 = \frac{14\pi}{3}$.

Câu 9: Chọn C



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục, ta được thiết diện là tam giác ABC cân tại đỉnh A của hình nón.

Do góc ở đỉnh của hình nón là $BAC = 60°$, suy ra $HAC = 30°$. Bán kính đáy $R = HC = 2$ cm.

Xét ΔAHC vuông tại H, ta có $AH = \frac{HC}{\tan 30°} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}$ cm.

Thể tích của khối nón: $V = \frac{1}{3}\pi R^2.AH = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}\ cm^3$.

Câu 10: Chọn A

Khi cho tam giác đều ABC có cạnh a quay quanh AB ta thu được hai khối nón có cùng chiều cao $h = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ và cùng bán kính đáy $r = h_B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

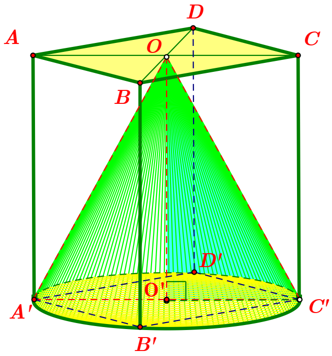
Do đó $V = 2.\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi = \frac{\pi a^3}{4}$.

Câu 11: Chọn A

Khi cho tam giác đều ABC có cạnh a quay quanh AB ta thu được hai khối nón có cùng chiều cao $h = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$ và cùng bán kính đáy $r = h_B = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $V = 2.\frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\pi = \frac{\pi a^3}{4}$..

Câu 12: Chọn B

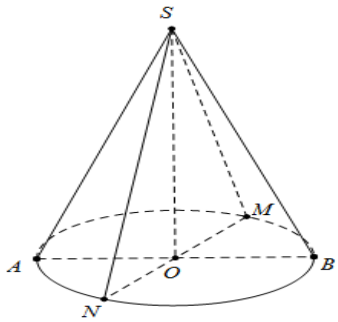


Gọi O, O' lần lượt là tâm hình chữ nhật $ABCD$ và hình chữ nhật $A'B'C'D'$.

Ta có đường cao khối nón $h = OO' = AA' = 3a$; bán kính $r = A'O' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy thể tích khối nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 3a = \frac{5\pi a^3}{4}$.

Câu 13: Chọn B



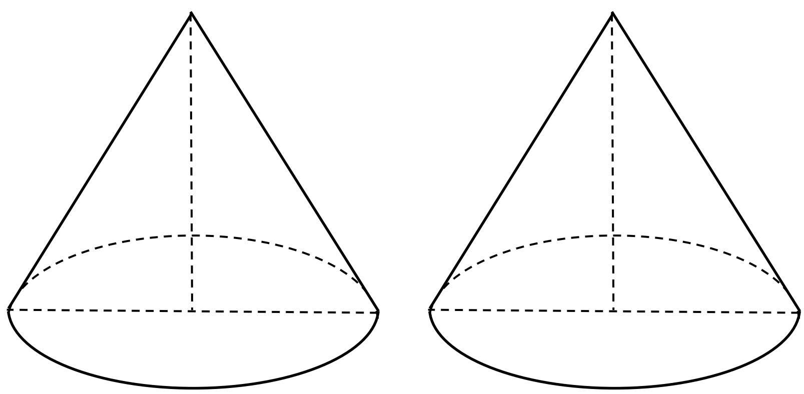
Kí hiệu h, l, r lần lượt là độ dài đường cao, độ dài đường sinh và bán kính đáy của hình nón.

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2}MN = \frac{a}{2} \\ l = SM = a \end{cases} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi . \frac{a^2}{4} . \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{24}$.

Câu 14: Chọn B



Ta có công thức tính thể tích khối nón có chiều cao h và bán kính r là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

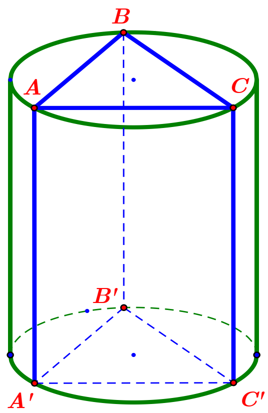
Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AB thì:

$h=AB=6cm$ và $r=AC=8cm$ thì $V_1=\frac{1}{3}\pi.8^2.6=128\pi$

Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC thì:

$h=AC=8cm$ và $r=AB=6cm$ thì $V_2=\frac{1}{3}\pi.6^2.8=96\pi$. Vậy: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{4}{3}$

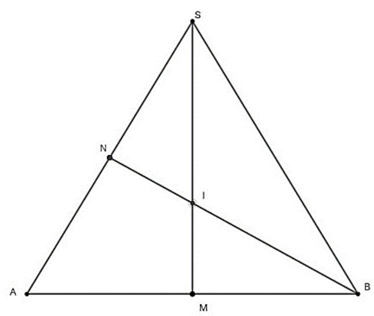
Câu 15: Chọn D



Giả sử lăng trụ đều có cạnh đáy là *a*, chiều cao *h*. Khi đó, bán kính đáy của hình trụ là $R=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{h.\pi.\frac{a^2}{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Cách khác : đặc biệt hóa lăng trụ đã cho thành lăng trụ có tất cả các cạnh cùng bằng 1. Khi đó, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

Câu 16: Chọn A



Giả sử thiết diện là tam giác SAB , với S là đỉnh của hình nón.

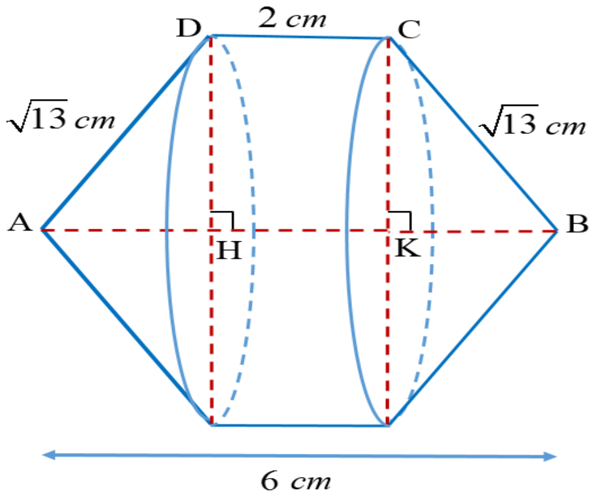
Gọi M,N lần lượt là trung điểm $AB,\ SA$.

Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón nằm trên đường thẳng SM .

Gọi I là trọng tâm tam giác SBC thì $IA = IS$ nên I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình nón (N).

Bán kính mặt cầu là $R = IS = \frac{2}{3}SM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.2a = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, từ đó thể tích khối cầu là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{2a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{32\sqrt{3}\pi a^3}{27}$.

Câu 17: Chọn B



Kẻ $DH \perp AB,\ CK \perp AB$ với $H, K \in AB$. Suy ra $HK = 2\ cm$.

Do $ABCD$ là hình thang cân, $AB = 6\ cm$, $CD = 2\ cm$ nên $AH = BK = 2cm$.

Do $\Delta ADH,\ \Delta BCK$ vuông nên $DH = CK = \sqrt{13-4} = 3cm$.

Đoạn DH quay xung quanh AB tạo thành hình tròn (C_1) tâm H, bán kính $R_1 = HD = 3cm$.

Đoạn CK quay xung quanh AB tạo thành hình tròn (C_2) tâm K, bán kính $R_2 = CK = 3cm$.

Gọi (V_1) là thể tích khối nón đỉnh A, đáy là hình tròn (C_1).

Gọi (V_2) là thể tích khối nón đỉnh B, đáy là hình tròn (C_2).

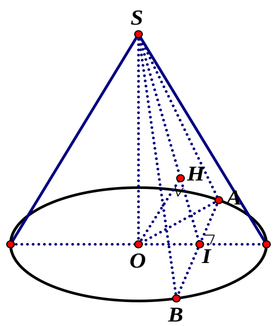
Gọi (V_3) là thể tích khối trụ chiều cao HK và hai đáy là hai hình tròn (C_1), (C_2).

Ta có: $V_1 = V_2 = \frac{1}{3}\pi.DH^2.AH = \frac{1}{3}\pi.3^2.2 = 6\pi\left(cm^3\right)$.

$V_3 = \pi.DH^2.HK = \pi.3^2.2 = 18\pi\left(cm^3\right)$.

Khi hình thang $ABCD$ quay xung quanh đường thẳng AB ta được một khối tròn xoay có thể tích là: $V = V_1 + V_2 + V_3 = 6\pi + 6\pi + 12\pi = 30\pi\left(cm^3\right)$.

Câu 18: Chọn A



Kẻ $OI \perp AB, OH \perp SI \Rightarrow OH = d(O,(\alpha)) = 2\sqrt{5}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OH^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{(2\sqrt{5})^2} - \frac{1}{(6\sqrt{5})^2} = \frac{2}{45} \Rightarrow OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

$$SI = \sqrt{SO^2 + OI^2} = \sqrt{(6\sqrt{5})^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{10}}{2}$$

$$S_{SAB} = \frac{1}{2}.SI.AB = SI.IA \Rightarrow IA = \frac{S_{SAB}}{SI} = \frac{360}{\left(\frac{9\sqrt{10}}{2}\right)} = 8\sqrt{10}$$

$$r = \sqrt{OI^2 + IA^2} = \sqrt{(8\sqrt{10})^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{106}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{5\sqrt{106}}{2}\right)^2.6\sqrt{5} = 1325\pi\sqrt{5}$$

Câu 19: Chọn D

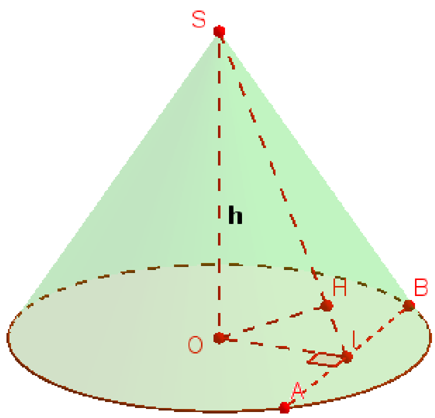
Gọi $V_{(H)}, V_{(DH)}, V_{(CL)}$ lần lượt là thể tích của hộp đứng, đồng hồ cát và phần còn lại.

Cho cạnh đáy hộp bằng 6, chiều cao hộp bằng 8. Đồng hồ cát tạo bởi 2 nón bằng nhau và chiều cao nón bằng 4 ; bán kính đáy nón bằng 3 .

Ta có: $V_{(H)} = 8.6^2 = 288$; $V_{(DH)} = 2.\frac{1}{3}.4.\pi.3^2 = 24\pi$; $V_{(CL)} = V_{(H)} - V_{(DH)} = 288 - 24\pi$.

Theo đề thì đáp án bằng $\frac{V_{(DH)}}{V_{(CL)}} = \frac{24\pi}{288 - 24\pi} = \frac{\pi}{12 - \pi}$.

Câu 20: Chọn B



Gọi S, O lần lượt là đỉnh và tâm đường tròn đáy của khối nón (N).

Ta có mặt phẳng (α) cắt đường tròn đáy tâm O tại 2 điểm A, B.

Vậy mặt phẳng (α) cắt khối nón theo một thiết diện là ΔSAB.

Kẻ $OI \perp AB$, $OH \perp SI$

Ta có $\begin{cases} OI \perp AB \\ SO \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI) \Rightarrow AB \perp OH$

Ta có $\begin{cases} AB \perp OH \\ SI \perp OH \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d[O,(SAB)] = OH = 12$ cm.

Áp dụng hệ thức lượng cho ΔSOI vuông tại O có đường cao OH

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow OI = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OH^2} - \frac{1}{SO^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2}}} = 15 \text{ cm.}$$

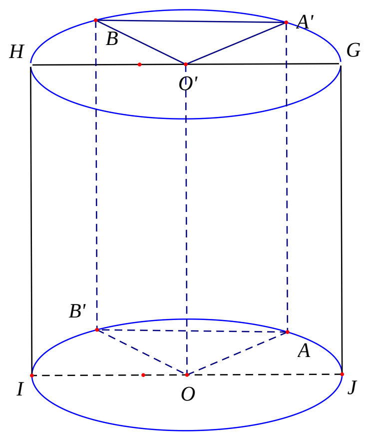
Xét ΔAOI vuông tại I có: $IA^2 + OI^2 = AO^2 \Rightarrow IA = \sqrt{AO^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ cm.

Xét ΔSOI vuông tại O có: $SO^2 + IO^2 = SI^2 \Rightarrow SI = \sqrt{SO^2 + IO^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$ cm.

Vậy $S_{SAB} = \frac{1}{2} SI.AB = SI.IA = 25.20 = 500$ cm^2.

Câu 21: Chọn D

Có



$$V_{BOO'A} = \frac{1}{2} V_{BOO'AA'} = \frac{1}{3} V_{OAB'O'A'B} = \frac{1}{6} 2R.R^2.\sin AOA' = \frac{R^3}{3} \Rightarrow \max V_{BOO'A} = \frac{R^3}{3}.$$

Câu 22: Chọn C

Gọi thể tích của khối tròn xoay sinh ra do phần tô đậm quay quanh đường thẳng AD là V_1.

Gọi Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình tam giác ABC quay quanh đường thẳng AD là V_2.

Gọi Thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình tròn đường kính AD quay quanh đường thẳng AD là V_3.

Khi đó: $V_1 = V_3 - V_2 = \frac{4}{3} \pi .OA^3 - \frac{1}{3} \pi .HC^2.AH = \frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 - \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{23\pi a^3\sqrt{3}}{216}$.

DẠNG 3 Bài toán cực trị và toán thực tế

Câu 1: Thể tích khối nón có bán kính đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $3a$ là

A. $4\pi a^3$. **B.** $12\pi a^3$. **C.** $2\pi a^3$. **D.** πa^3.

Câu 2: Mặt tiền của một ngôi biệt thự có 8 cây cột trụ tròn, tất cả đều có chiều cao $4,2$ m. Trong số các cây đó có hai cây cột trước đại sảnh đường kính bằng 40 cm, sáu cây cột còn lại phân bổ đều hai bên đại sảnh và chúng đều có đường kính bằng 26 cm. Chủ nhà thuê nhân công để sơn các cây cột bằng một loại sơn giả đá, biết giá thuê là $380.000/1m^2$. Hỏi người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn hết các cây cột nhà đó ?

A. $\approx 15.642.000$. **B.** $\approx 12.521.000$. **C.** $\approx 10.400.000$. **D.** $\approx 11.833.000$.

Câu 3: Lượng nguyên liệu cần dùng để làm ra một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13m^2$. Hỏi nếu muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường kính vành nón $50cm$, chiều cao $30cm$ thì cần khối lượng lá gần nhất với con số nào dưới đây?

A. $50kg$. **B.** $76kg$. **C.** $48kg$. **D.** $38kg$.

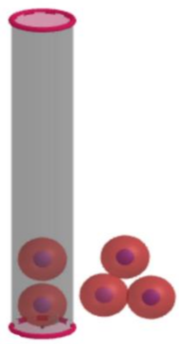
Câu 4: Người ta ngâm một loại rượu trái cây bằng cách xếp 6 trái cây hình cầu có cùng bán kính bằng 5cm vào một cái bình hình trụ sao cho hai quả nằm cạnh nhau tiếp xúc với nhau, các quả đều tiếp xúc với tất cả các đường sinh của mặt xung quanh của hình trụ, đồng thời quả nằm bên dưới cùng tiếp xúc với mặt đáy trụ, quả nằm bên trên cùng tiếp xúc với nắp của hình trụ, cuối cùng là đổ rượu vào đầy bình. Số lít rượu tối thiểu cần đổ vào bình gần nhất với số nào sau đây:

A. $1,57$. **B.** $1,7$. **C.** 1570. **D.** $1,2$.

Câu 5: Một khối đồ chơi gồm một khối trụ và một khối nón có cùng bán kính được chồng lên nhau, độ dài đường sinh khối trụ bằng độ dài đường sinh khối nón và bằng đường kính của khối trụ, khối nón . Biết thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là $50\ cm^3$, thể tích khối trụ gần với số nào nhất trong các số sau

A. $36,5\ \text{cm}^3$. **B.** $40,5\ \text{cm}^3$. **C.** $38,2\ \text{cm}^3$. **D.** $38,8\ \text{cm}^3$.

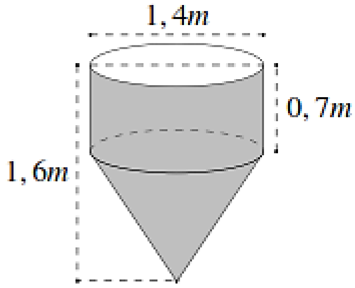
Câu 6: Một con quạ bị khát nước, nó tìm thấy một bình đựng nước hình trụ, do mức nước trong bình chỉ còn lại hai phần ba so với thể tích của bình nên nó không thể thò đầu vào uống nước được. Nó liền gắp 3 viên bi ve hình cầu để sẵn bên cạnh bỏ vào bình thì mực nước dâng lên vừa đủ đầy bình và nó có thể uống nước. Biết 3 viên bi ve hình cầu đều có bán kính là 1cm và chiều cao của bình hình trụ gấp 8 lần bán kính của nó. Diện tích xung quanh của bình hình trụ nói trên gần với số nào nhất trong các số sau?



A. $65,8cm^2$. **B.** $61,6cm^2$.

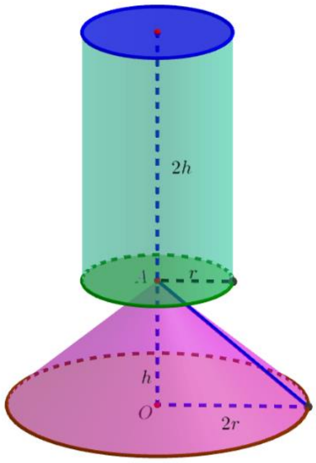
C. $66,6cm^2$. **D.** $62,3cm^2$.

Câu 7: Người ta làm một dụng cụ sinh hoạt gồm hình nón và hình trụ như hình vẽ . Cần bao nhiêu m^2 vật liệu để làm ?



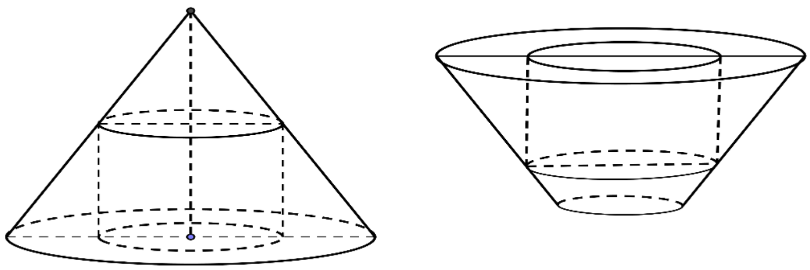
A. $5,6m^2$. **B.** $6,6m^2$. **C.** $5,2m^2$. **D.** $4,5m^2$.

Câu 8: Một khối đồ chơi gồm một khối hình trụ (T) gắn chồng lên một khối hình nón (N), lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = 2r_1$, $h_1 = 2h_2$. Biết rằng thể tích của khối nón (N) bằng $20\,\text{cm}^3$. Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng



A. $140\,\text{cm}^3$. **B.** $120\,\text{cm}^3$. **C.** $30\,\text{cm}^3$. **D.** $50\,\text{cm}^3$.

Câu 9: Khi sản xuất hộp mì tôm các nhà sản xuất luôn để một khoảng trống dưới đáy hộp. Hình vẽ dưới mô tả cấu trúc của hộp mì tôm. Thớ mì tôm có dạng hình trụ, hộp mì có dạng hình nón cụt được cắt ra bởi hình nón có chiều cao $9\,\text{cm}$ và bán kính đáy $6\,\text{cm}$. Nhà sản xuất tìm cách sao cho thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất vì mục đích thu hút khách hàng. Tìm thể tích lớn nhất đó.

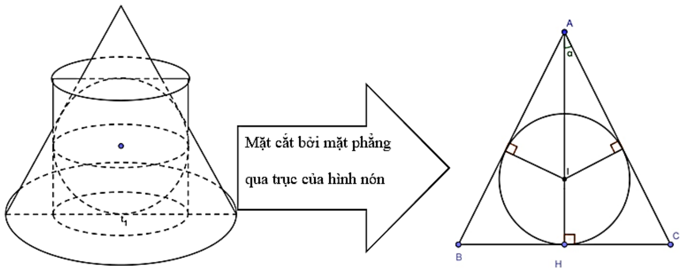


A. 48π. **B.** $\dfrac{81}{2}\pi$. **C.** 36π. **D.** 54π.

Câu 10: Tại trung tâm một thành phố người ta tạo điểm nhấn bằng cột trang trí hình nón có kích thước như sau: chiều dài đường sinh $l = 10\,\text{m}$, bán kính đáy $R = 5\,\text{m}$. Biết rằng tam giác SAB là thiết diện qua trục của hình nón và C là trung điểm SB. Trang trí một hệ thống đèn điện tử chạy từ A đến C trên mặt nón. Xác định giá trị ngắn nhất của chiều dài dây đèn điện tử.

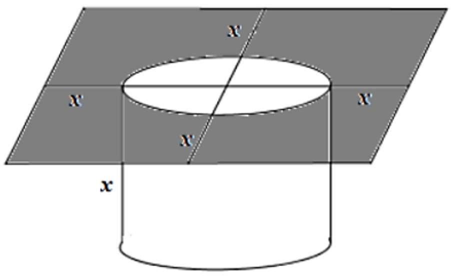
A. $10\,\text{m}$. **B.** $15\,\text{m}$. **C.** $5\sqrt{5}\,\text{m}$. **D.** $5\sqrt{3}\,\text{m}$.

Câu 11: Cho một hình cầu nội tiếp hình nón tròn xoay có góc ở đỉnh là 2α, bán kính đáy là R và chiều cao là h. Một hình trụ ngoại tiếp hình cầu đó có đáy dưới nằm trong mặt phẳng đáy của hình nón . Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hình nón và hình trụ, biết rằng $V_1 \neq V_2$. Gọi M là giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_2}{V_1}$. Giá trị của biểu thức $P = 48M + 25$ thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $(40;60)$. **B.** $(60;80)$. **C.** $(20;40)$. **D.** $(0;20)$.

Câu 12: Trên một mảnh đất hình vuông có diện tích $81m^2$ người ta đào một cái ao nuôi cá hình trụ sao cho tâm của hình tròn đáy trùng với tâm của mảnh đất. Ở giữa mép ao và mép mảnh đất người ta để lại một khoảng đất trống để đi lại, biết khoảng cách nhỏ nhất giữa mép ao và mép mảnh đất là $x(m)$. Giả sử chiều sâu của ao cũng là $x(m)$. Tính thể tích lớn nhất V của ao.

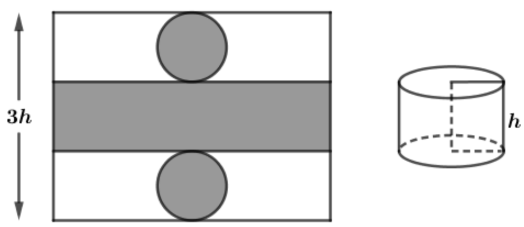


A. $V = 13,5\pi\left(cm^3\right)$. **B.** $V = 27\pi\left(cm^3\right)$. **C.** $V = 36\pi\left(cm^3\right)$. **D.** $V = 72\pi\left(cm^3\right)$.

Câu 13: Một khối gỗ hình trụ tròn xoay có bán kính đáy bằng 1, chiều cao bằng 2. Người ta khoét từ hai đầu khối gỗ hai nửa khối cầu mà đường tròn đáy của khối gỗ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu. Tỉ số thể tích phần còn lại của khối gỗ và cả khối gỗ ban đầu là

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 14: Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật sau đó hàn kín lại, như trong hình vẽ dưới đây. Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu . Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít . Diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu gần với giá trị nào sau đây nhất?



A. $1,2\left(m^2\right)$. **B.** $1,8\left(m^2\right)$. **C.** $2,2\left(m^2\right)$. **D.** $1,5\left(m^2\right)$.

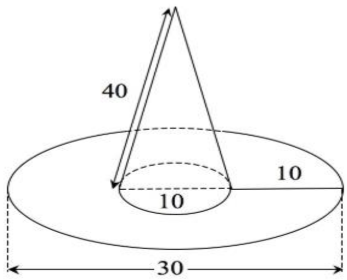
Câu 15: Một thùng đựng nước hình trụ có bán kính đáy là 65cm và chiều cao 160cm. Hỏi thùng đó đựng được tối đa bao nhiêu lít nước?

A. $10400(l)$. **B.** $676(l)$. **C.** $3265,6(l)$. **D.** $2123,7(l)$.

Câu 16: Cần sản xuất một vỏ hộp sữa hình trụ có thể tích V cho trước. Để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy phải bằng

A. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. **B.** $\sqrt[3]{\frac{V}{2}}$. **C.** $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$. **D.** $\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$.

Câu 17: Tính diện tích vải tối thiểu để may được chiếc mũ có hình dạng và kích thước được cho bởi hình vẽ bên biết phía trên có dạng hình nón và phía dưới có dạng hình vành khăn.



A. 450π. **B.** 500π. **C.** 350π. **D.** 400π.

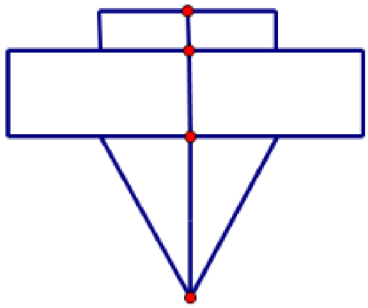
Câu 18: Cho hình trụ có bán kính bằng r và chiều cao cũng bằng r. Một hình vuông $ABCD$ có hai cạnh AB,CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC,AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tan của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt đáy bằng

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 19: Một ngôi biệt thự có 10 cây cột nhà hình trụ tròn, tất cả đều có chiều cao 4,2m. Trong đó, 4 cây cột trước đại sảnh có đường kính 40cm và 6 cây cột còn lại bên thân nhà có đường kính 26cm. Chủ nhà dùng loại sơn giả đá để sơn 10 cây cột đó. Nếu giá của một loại sơn giả đá là 380.000 đồng/m2 thì người chủ phải chi ít nhất bao nhiêu tiền để sơn 10 cây cột đó? .

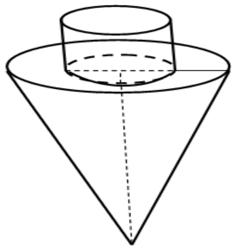
A. 14.647.000. **B.** 13.627.000 . **C.** 16.459.000 . **D.** 15.844.000.

Câu 20: Một con xoay được thiết kế gồm hai khối trụ (T_1), (T_2) chồng lên khối nón (N). Khối trụ (T_1) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_1(cm)$. Khối trụ (T_2) có bán kính đáy $2r(cm)$, chiều cao $h_2=2h_1(cm)$. Khối nón (N) có bán kính đáy $r(cm)$, chiều cao $h_n=4h_1(cm)$. Biết rằng thể tích toàn bộ con xoay bằng $31(cm^3)$. Thể tích khối nón (N) bằng



A. $5(cm^3)$. **B.** $3(cm^3)$. **C.** $4(cm^3)$. **D.** $6(cm^3)$.

Câu 21: Một cái "cù" gồm hai khối: khối trụ H_1 và khối nón H_2 như hình bên. Chiều cao và bán kính khối trụ lần lượt bằng h_1, r_1 chiều cao và bán kính đáy của khối nón lần lượt bằng h_2, r_2 thỏa mãn $h_1 = \frac{1}{3}h_2$, $r_1 = \frac{1}{2}r_2$. Biết thể tích toàn khối là $30cm^3$, thể tích khối H_1 bằng

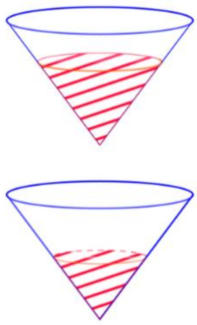


A. $15cm^3$. **B.** $6cm^3$. **C.** $5cm^3$. **D.** $\frac{30}{13}cm^3$.

Câu 22: Một nhà máy sản xuất bột trẻ em cần thiết kê bao bì cho một loại sản phẩm mới dạng khối trụ có thể tích $1\ \text{dm}^3$. Hỏi phải thiết kế hộp đựng này với diện tích toàn phần bằng bao nhiêu để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất.

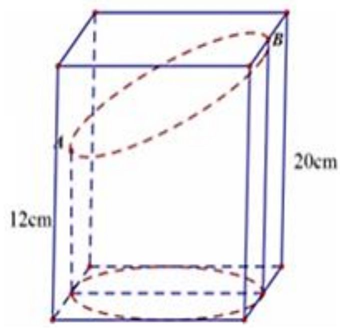
A. $3\sqrt[3]{2\pi}\ \text{dm}^2$. **B.** $3\sqrt{2\pi}\ \text{dm}^2$. **C.** $3\sqrt[3]{\pi}\ \text{dm}^2$. **D.** $\sqrt[3]{4\pi}\ \text{dm}^2$

Câu 23: Hai hình nón bằng nhau có chiều cao bằng $2\ \text{dm}$, được đặt như hình vẽ bên . Lúc đầu, hình nón trên chứa đầy nước và hình nón dưới không chứa nước. Sau đó, nước được chảy xuống hình nón dưới thông qua lỗ trống ở đỉnh của hình nón trên. Hãy tính chiều cao của nước trong hình nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng $1\ \text{dm}$.



A. $\sqrt[3]{7}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\sqrt[3]{5}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 24: Một khúc gỗ hình trụ có bán kính R bị cắt bởi một mặt phẳng không song song với đáy ta được thiết diện là một hình elip. Khoảng cách từ điểm A đến mặt đáy là $12\ cm$ khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy là $20\ cm$. Đặt khúc gỗ đó vào trong hình hộp chữ nhật có chiều cao bằng $20\ cm$ chứa đầy nước sao cho đường tròn đáy của khúc gỗ tiếp xúc với các cạnh đáy của hình hộp chữ nhật. Sau đó, người ta đo lượng nước còn lại trong hình hộp chữ nhật là 2 lít. Tính bán kính của khúc gỗ

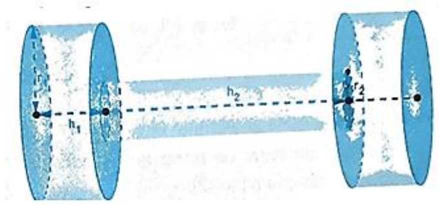


A. R = 5,2 cm. **B.** R = 4,8 cm. **C.** R = 6,4 cm. **D.** R = 8,2 cm.

Câu 25: Một khối nón có bán kính đáy bằng $2\ \text{cm}$, chiều cao bằng $\sqrt{3}\,\text{cm}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc 60^0 chia khối nón làm 2 phần. Tính thể tích V phần nhỏ hơn .

A. $V \approx 1,42\,\text{cm}^3$. **B.** $V \approx 2,36\,\text{cm}^3$. **C.** $V \approx 1,53\,\text{cm}^3$. **D.** $V \approx 2,47\,\text{cm}^3$.

Câu 26: Một quả tạ tập tay gồm ba khối trụ (H_1), (H_2), (H_3) gắn liền nhau lần lượt có bán kính và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2, r_3, h_3 thỏa mãn $r_1 = r_3$, $h_1 = h_3$; $r_2 = \frac{1}{3}r_1$. Biết thể tích của toàn bộ quả tạ bằng 60π và chiều dài quả tạ bằng 9. Thể tích khối trụ (H_2) bằng?



(H_1)

A. $\pi\dfrac{16(9-2h_1)}{4h_1+9}$. **B.** $\pi\dfrac{36(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **C.** $\pi\dfrac{60(9-2h_1)}{4h_1+9}$ **D.** $\pi\dfrac{46(9-2h_1)}{4h_1+9}$

Câu 27: Một bình đựng nước dạng hình nón đựng đầy nước. Người ta thả vào đó một khối cầu có đường kính bằng chiều cao của bình nước và đo được thể tích nước tràn ra ngoài là $18\pi\ dm^3$.Biết khối cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón và đúng một nửa khối cầu chìm trong nước. Tính thể tích nước còn lại trong bình.

A. $27\pi\ dm^3$. **B.** $6\pi\ dm^3$. **C.** $9\pi\ dm^3$. **D.** $24\pi\ dm^3$.

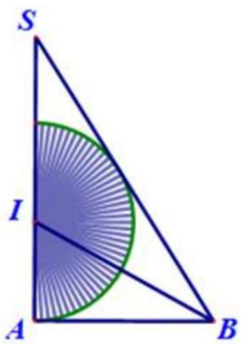
Câu 28: Một ly nước hình trụ có chiều cao $20\,cm$ và bán kính đáy bằng $4\,cm$. Bạn Nam đổ nước vào ly cho đến khi mực nước cách đáy ly $17\,cm$ thì dừng lại. Sau đó, Nam lấy các viên đá lạnh hình cầu có cùng bán kính $2\,cm$ thả vào ly nước. Bạn Nam cần dùng ít nhất bao nhiêu viên đá để nước trào ra khỏi ly?

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 29: Khi cắt hình nón có chiều cao $16\ cm$ và đường kính đáy $24\,cm$ bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện có diện tích lớn nhất gần với giá trị nào sau đây?

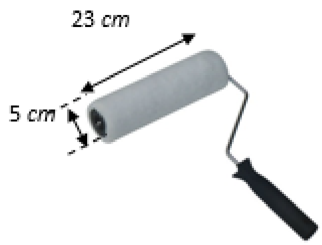
A. 170. **B.** 260. **C.** 294. **D.** 208.

Câu 30: Cho tam giác SAB vuông tại A, $ABS = 60°$. Phân giác của góc ABS cắt SA tại I. Vẽ nửa đường tròn tâm I, bán kính IA. Cho miền tam giác SAB và nửa hình tròn quay xung quanh trục SA tạo nên các khối tròn xoay thể tích tương ứng là $V_1; V_2$. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $V_1 = \frac{4}{9}V_2$. **B.** $V_1 = \frac{3}{2}V_2$. **C.** $V_1 = 3V_2$. **D.** $V_1 = \frac{9}{4}V_2$.

Câu 31: Một cái trục lăn sơn nước có dạng một hình trụ. Đường kính của đường tròn đáy là 5cm, chiều dài lăn là 23cm . Sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là

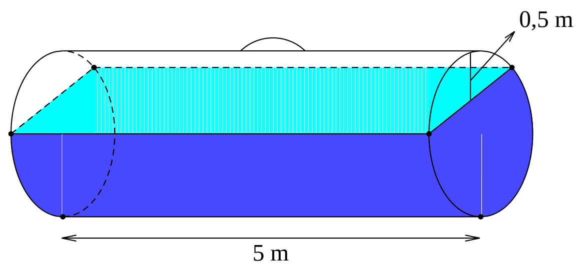


A. $2300\pi\,\text{cm}^2$. **B.** $1150\pi\,\text{cm}^2$. **C.** $862,5\pi\,\text{cm}^2$. **D.** $5230\pi\,\text{cm}^2$.

Câu 32: Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ có thể tích V nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và gấp $1,5$ lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng . Gọi chiều cao của thùng là h và bán kính đáy là r. Tính tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất?

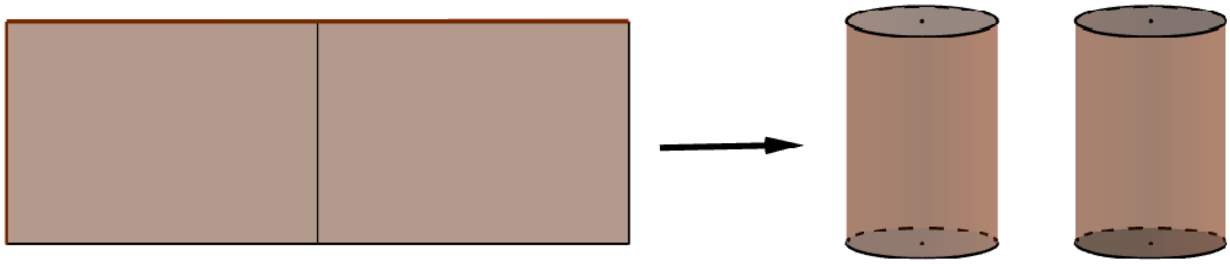
A. $\frac{h}{r}=2.$ **B.** $\frac{h}{r}=\sqrt{3}.$ **C.** $\frac{h}{r}=3.$ **D.** $\frac{h}{r}=2\sqrt{3}.$

Câu 33: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m, với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với $0,5\text{m}$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn .



A. $23,562\text{ m}^3$. **B.** $12,637\text{ m}^3$. **C.** $6,319\text{ m}^3$. **D.** $11,781\text{ m}^3$.

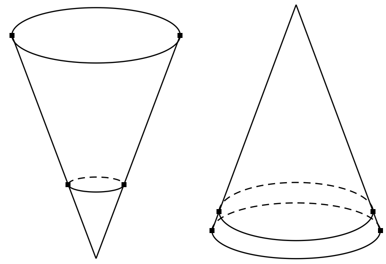
Câu 34: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $5m \times 40m$, người ta làm hai thùng nước hình trụ có cùng chiều cao $5m$, bằng cách cắt tấm tôn đó thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng .



Tổng thể tích của hai cái thùng hình trụ bằng

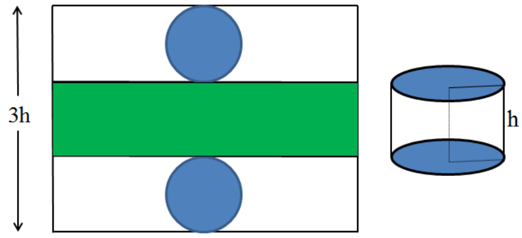
A. $1000\pi\,(m^3)$. **B.** $2000\pi\,(m^3)$. **C.** $\frac{2000}{\pi}\,(m^3)$. **D.** $\frac{1000}{\pi}\,(m^3)$.

Câu 35: Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng một phần ba chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao của nước bằng bao nhiêu? Biết chiều cao của phễu là 15 cm.



A. $0,5$ cm. **B.** $0,216$ cm. **C.** $0,3$ cm. **D.** $0,188$ cm.

Câu 36: Từ một tấm thép phẳng hình chữ nhật, người ta muốn làm một chiếc thùng đựng dầu hình trụ bằng cách cắt ra hai hình tròn bằng nhau và một hình chữ nhật sau đó hàn kín lại, như hình vẽ dưới đây.



Hai hình tròn làm hai mặt đáy, hình chữ nhật làm thành mặt xung quanh của thùng đựng dầu . Biết thùng đựng dầu có thể tích bằng $50,24$ lít . Tính diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu?

A. $1,8062\,\mathrm{m}^2$. **B.** $2,2012\,\mathrm{m}^2$. **C.** $1,5072\,\mathrm{m}^2$. **D.** $1,2064\,\mathrm{m}^2$.

Câu 37: Người ta xếp ba viên bi có bán kính bằng nhau và bằng $\sqrt{3}$ vào một cái lọ hình trụ sao cho các viên bi đều tiếp xúc với hai đáy của lọ hình trụ và các viên bi này đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ. Tính bán kính đáy của lọ hình trụ.

A. $1+2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $2+\sqrt{3}$.

Câu 38: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ có thể tích là V, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon sữa bò là ít nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ là nhỏ nhất. Muốn thể tích khối trụ bằng V và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng bao nhiêu?

A. $r=\sqrt[3]{\dfrac{V\pi}{2}}$. **B.** $r=\sqrt[3]{V}$. **C.** $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$. **D.** $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2}}$.

Câu 39: Nam muốn xây một bình chứa hình trụ có thể tích $72\,\mathrm{m}^3$. Đáy làm bằng bêtông giá 100 nghìn đồng/m^2, thành làm bằng tôn giá 90 nghìn đồng/m^2, nắp bằng nhôm giá 140 nghìn đồng/m^2. Vậy đáy của hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu để chi phí xây dựng là thấp nhất?

A. $\dfrac{3}{2\sqrt[3]{\pi}}(\mathrm{m})$. **B.** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}(\mathrm{m})$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}(\mathrm{m})$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}(\mathrm{m})$.

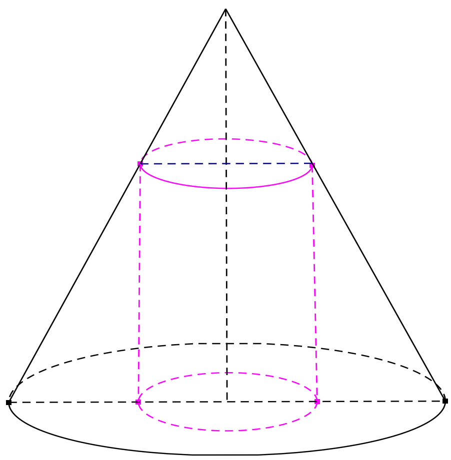
Câu 40: Một công ty sản xuất một loại cốc giấy hình nón không nắp có thể tích $27\mathrm{cm}^3$. Với chiều cao h và bán kính đáy là r. Tìm r để lượng giấy tiêu thụ ít nhất

A. $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}(cm)$. **B.** $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^6}{2\pi^2}}(cm)$. **C.** $r=\sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}(cm)$. **D.** $r=\sqrt[4]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}(cm)$.

Câu 41: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau cắt khối cầu tâm O bán kính R tạo thành hai hình tròn (C_1) và (C_2) cùng bán kính. Xét hình nón có đỉnh trùng với tâm của một trong hai hình tròn, đáy trùng với hình tròn còn lại. Biết diện tích xung quanh của hình nón là lớn nhất, khi đó thể tích khối trụ có hai đáy là hai hình tròn (C_1) và (C_2) bằng

A. $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 42: Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 chiều cao bằng 6, một khối trụ có bán kính đáy thay đổi nội tiếp khối nón đã cho . Thể tích lớn nhất của khối trụ bằng



A. 6π. **B.** 10π. **C.** 4π. **D.** 8π.

Câu 43: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, trên đường tròn tâm O' lấy điểm B. Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $OO'AB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha = \sqrt{2}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. **D.** $\tan\alpha = 1$.

Câu 44: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D sao cho $AD = 2\sqrt{3}a$; gọi C là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng chứa đường tròn (O'); trên đường tròn tâm O' lấy điểm B (AB chéo với CD). Đặt α là góc giữa AB và đáy. Tính $\tan\alpha$ khi thể tích khối tứ diện $CDAB$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\tan\alpha = \sqrt{3}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\tan\alpha = 1$. **D.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 45: Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng $2a$. Trên đường tròn đáy có tâm O lấy điểm A, D trên đường tròn tâm O' lấy điểm B, C sao cho $AB // CD$ và AB không cắt OO'. Tính AD để thể tích khối chóp $O'.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $AD = 2\sqrt{2}a$. **B.** $AD = 4a$. **C.** $AD = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$. **D.** $AD = \sqrt{2}a$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.A	4.A	5.D	6.B	7.B	8.D	9.A	10.C
11.B	12.A	13.C	14.D	15.D	16.D	17.D	18.C	19.D	20.C
21.B	22.A	23.A	24.D	25.C	26.C	27.B	28.C	29.D	30.D
31.B	32.C	33.B	34.D	35.D	36.C	37.D	38.C	39.B	40.C
41.A	42.D	43.B	44.D	45.A					

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: **Chọn A**

Ta có $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(2a\right)^2 3a = 4\pi a^3$.

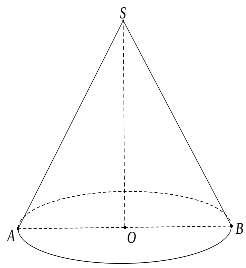
Câu 2: **Chọn D**

Diện tích xung quanh của hai cây cột trước đại sảnh là: $S_1 = 2.\left(2\pi.0,2.4,2\right)$

Diện tích xung quanh của sáu cây cột trước đại sảnh là: $S_2 = 6.\left(2\pi.0,13.4,2\right)$

Số tiền người chủ phải trả để sơn hết các cây cột là: $\left(S_1 + S_2\right) \times 380.000 \approx 11.833.000$.

Câu 3: **Chọn A**



$50cm = 0,5m;\ 30cm = 0,3m$

Theo đề ta có đường kính $AB = 0,5m$, suy ra bán kính đáy $r = \frac{AB}{2} = 0,25m$, đường cao $h = 0,3m$

Độ dài đường sinh $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{\sqrt{61}}{20} \Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi.0,25.\frac{\sqrt{61}}{20} = \pi\frac{\sqrt{61}}{80}\ \left(m^2\right)$

Làm 1000 chiếc nón lá thì có diện tích xung quanh là: $1000.S_{xq} = 1000.\pi\frac{\sqrt{61}}{80} = \pi.\frac{25\sqrt{61}}{2}\ \left(m^2\right)$.

Cứ $1kg$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13m^2$, suy ra khối lượng lá để làm 1000 chiếc nón là: $\pi.\frac{25\sqrt{61}}{2} : 6,13 \approx 50\ kg$.

Câu 4: **Chọn A**

Thể tích của 6 khối cầu là: $V_1 = 6.\frac{4}{3}\pi R^3 = 6.\frac{4}{3}\pi.5^3 = 1000\pi\left(cm^3\right)$.

Thể tích của cái bình hình trụ là: $V_2 = \pi R^2.h = \pi.5^2.\left(6.10\right) = 1500\pi\left(cm^3\right)$

Thể tích rượu tối thiểu cần đổ vào bình là: $V = V_2 - V_1 = 1500\pi - 1000\pi = 500\pi\left(cm^3\right) = 1,57\left(l\right)$

.

Câu 5: Chọn D

Gọi $a\left(\text{cm}\right)$ là độ dài đường kính khối trụ, khi đó thể tích khối trụ là: $V_T=\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2a=\frac{\pi a^3}{4}\left(\text{cm}^3\right)$

.

Dễ thấy chiều cao khối nón là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên thể tích khối nón là: $V_N=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}\left(\text{cm}^3\right)$

.

Thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là: $V=V_N+V_T$ $\Leftrightarrow\frac{\pi a^3}{4}+\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}=50\Leftrightarrow\frac{\pi a^3}{4}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=50$

$\Leftrightarrow V_T\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=50\Leftrightarrow V_T=50:\left(1+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)\approx 38{,}8\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 6: Chọn B

Gọi chiều cao của bình nước hình trụ là $h\left(cm\right)$

Gọi bán kính của bình nước hình trụ là $R\left(cm\right)$

Ta có chiều cao của bình nước thì gấp 8 lần bán kính của viên bi ve nên: $h=8.1=8\left(cm\right)$

Khi cho ba viên bi vào bình nước thì nước dâng lên đến miệng bình, nên ta có thể tích của ba viên bi bằng một phần ba thể tích của bình nước

$$3\left(\frac{4}{3}.\pi.\left(1\right)^3\right)=\frac{1}{3}.\left(8.\pi R^2\right)\Leftrightarrow R=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(cm\right)$$

Diện tích xung quanh của bình nước là: $S_{xq}=2\pi Rh=2.\pi.\sqrt{\frac{3}{2}}.8\approx 61{,}6\left(cm^2\right)$

Câu 7: Chọn A

Dựa vào hình vẽ ta có các kích thước như sau.

Bán kính đáy của hình nón và hình trụ $r=\frac{1{,}4}{2}=0{,}7m$.

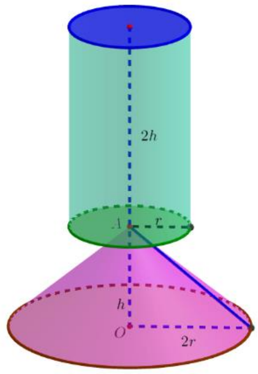
Chiều cao của hình nón $h=1{,}6-0{,}7=0{,}9m$

Suy ra độ dài đường sinh của hình nón $l=\sqrt{h^2+r^2}=\sqrt{0{,}9^2+0{,}7^2}=\sqrt{1{,}3}$.

Tổng vật liệu cần làm bằng diện tích xung quanh của khối hình.

$$S_{xq}=S_{xq.non}+S_{xq.tru}=\pi rl+2r\pi.h_{tru}=\pi.0{,}7.\sqrt{1{,}3}+2.0{,}7\pi.0{,}7\simeq 5{,}586\approx 5{,}6$$

Câu 8: Chọn D

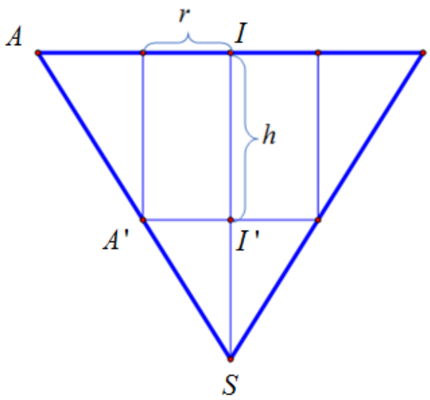


Thể tích khối nón là $V_N = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 = 20cm^3$.

Thể tích khối trụ là $V_T = \pi r_1^2 h_1 = \pi\left(\frac{r_2}{2}\right)^2 2h_2 = \frac{3}{2}V_N = 30cm^3$.

Vậy thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng $V = V_N + V_T = 50cm^3$.

Câu 9: **Chọn A**



Ta có mặt cắt qua trục hình nón như hình vẽ.
Đặt r là bán kính đáy hình trụ, h là chiều cao của hình trụ.
Thớ mì tôm có được thể tích lớn nhất khi khối trụ có thể tích lớn nhất.
Thể tích khối trụ là: $V = \pi r^2 h$.

Ta có hai tam giác SAI và $SA'I'$ đồng dạng $\Rightarrow \frac{SI}{SI'} = \frac{AI}{A'I'} \Leftrightarrow \frac{9}{9-h} = \frac{6}{r} \Rightarrow h = 9 - \frac{3r}{2}$.

Khi đó $V = \pi.r^2.h = \pi.r^2.\left(9 - \frac{3r}{2}\right) = \pi\left(-\frac{3r^3}{2} + 9r^2\right)$.

Khảo sát hàm số V, biến số r $(0 < r < 6)$; $V' = \pi\left(-\frac{9r^2}{2} + 18r\right)$.

$V' = 0 \Leftrightarrow \pi\left(-\frac{9r^2}{2} + 18r\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 0\ (l) \\ r = 4\ (n) \end{array}\right.$.

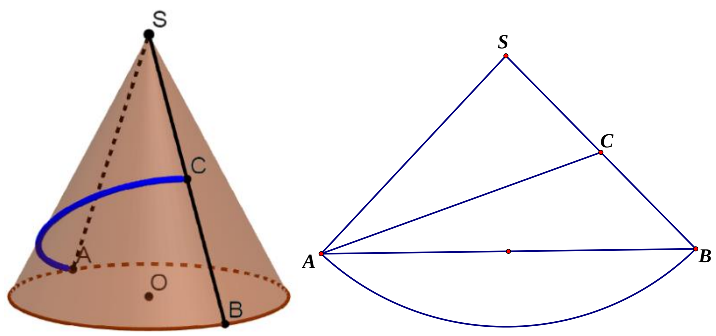
Bảng biến thiên:

r	$-\infty$	0		4		6	$+\infty$
V'		0	$+$	0	$-$		
V		0	$\nearrow$	48π	$\searrow$	0	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $V_{\max} = 48\pi$ khi $r = 4$.

Vậy thớ mì tôm có thể tích lớn nhất là 48π.

Câu 10: Chọn C



Khi cắt mặt xung quanh hình nón bởi mặt phẳng (SAB), rồi trải phẳng phần mặt xung quanh có chứa hệ thống đèn trang trí ta được một hình quạt như trên.

Ta có độ dài cung quạt chính là nửa chu vi của đường tròn đáy hình nón: $l_1 = \pi R = 5\pi$ m.

Khi đó $ASB = \frac{l_1}{l} = \frac{\pi}{2}$. Nên khi trải phẳng ta được tam giác SAB vuông tại S.

Chiều dài ngắn nhất của dây đèn trang trí chính là độ dài đoạn thẳng AC.

Do đó giá trị ngắn nhất của dây đèn là $AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ m.

Câu 11: Chọn B

Gọi r là bán kính hình cầu, khi đó r cũng là bán kính đường tròn đáy của hình trụ đã cho, chiều cao của hình trụ bằng $2r$. Ta có $\begin{cases} V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 h \\ V_2 = \pi r^2.2r \end{cases} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{6r^3}{R^2 h}$.

Xét mặt cắt qua trục của hình nón là 1 tam giác cân ABC có diện tích là $S = \frac{1}{2}h.2R = Rh$.

Tam giác cân có chiều dài cạnh bên $AB = AC = \frac{R}{\sin\alpha}$.

Mặt khác áp dụng công thức $S = pr$ với p là nửa chu vi tam giác, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác .

Ta có $p = \frac{1}{2}\left(2R + 2\frac{R}{\sin\alpha}\right) \Rightarrow S = Rh = \left(R + \frac{R}{\sin\alpha}\right)r \Leftrightarrow r = \frac{h.\sin\alpha}{\sin\alpha + 1}$.

Khi đó $\frac{V_2}{V_1} = \frac{6h^3\sin^3\alpha}{R^2h(\sin\alpha+1)^3} = \frac{6\sin^3\alpha}{(\sin\alpha+1)^3}.\left(\frac{h}{R}\right)^2$

$= \frac{6\sin^3\alpha}{(\sin\alpha+1)^3}.\cot^2\alpha = \frac{6\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{(\sin\alpha+1)^3} = \frac{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(\sin\alpha+1)^2}$. Xét hàm số $y = \frac{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(\sin\alpha+1)^2}$.

Đặt $t = \sin\alpha$, $t \in (0;1)$ ta có $y = \dfrac{6t(1-t)}{(t+1)^2}$, $t \in (0;1)$.

Ta có $y' = \dfrac{-6(3t-1)}{(t+1)^3}$; $y' = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{3}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	0

Suy ra $M = \dfrac{3}{4}$. Vậy $P = 48M + 25 = 48.\dfrac{3}{4} + 25 = 61$.

Câu 12: Chọn A

Ta có bán kính đáy hình trụ là $r = \dfrac{9-2x}{2}$.

Thể tích ao là $V = \pi R^2 h = \pi\left(\dfrac{9-2x}{2}\right)^2 x = \dfrac{\pi}{4}(9-2x)^2 x$.

Xét hàm số $f(x) = (9-2x)^2 x = 4x^3 - 36x^2 + 81x$ với $0 < x < \dfrac{9}{2}$.

Ta có $f'(x) = 12x^2 - 72x + 81$.

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 72x + 81 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2}\ (n) \\ x = \dfrac{9}{2}\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

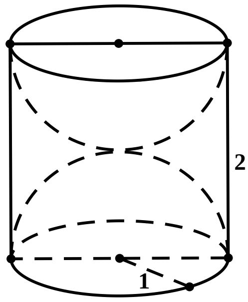
x		0		$\frac{3}{2}$		$\frac{9}{2}$	
f'			$+$	0	$-$		
f		0	$\nearrow$	54	$\searrow$	0	

Từ bảng biến thiên suy ra: $\max\limits_{\left(0;\frac{9}{2}\right)} f(x) = 54 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Vậy thể tích lớn nhất V của ao là $V = \dfrac{54\pi}{4} = \dfrac{27\pi}{2} = 13{,}5\pi\left(m^3\right)$.

Câu 13: Chọn C

Theo bài toán ta có hình vẽ



Thể tích của khối trụ là $V = \pi.1^2.2 = 2\pi$.

Vì đường tròn đáy của khối trụ là đường tròn lớn của mỗi nửa khối cầu nên bán kính của mỗi nửa khối cầu là $R = 1$.

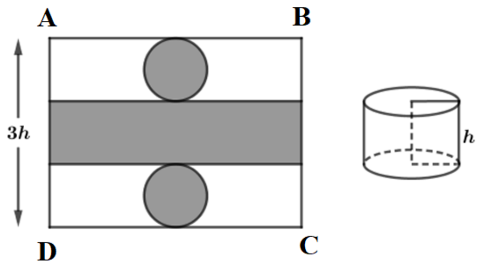
Thể tích của hai nửa khối cầu bị khoét đi là $V_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi.1^3}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Thể tích của phần còn lại của khối gỗ là $V_2 = V - V_1 = 2\pi - \frac{4\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Vậy tỉ số thể tích cần tìm là $\frac{V_2}{V} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3}$.

Câu 14: Chọn D

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$, r là bán kính của hình tròn đáy.



Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

Thể tích của thùng đựng dầu là $V = \pi.r^2.h = 3,14.r^2.2r = 6,28r^3$

$\Leftrightarrow 50,24 = 6,28r^3 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2(dm) = 0,2(m)$.

Do đó $AD = 3h = 6r = 1,2(m)$ và $AB = 2\pi.r = 1,256\ (m)$.

Vậy diện tích của tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $S = AB.AD = 1,2.1,256 = 1,5072\ (m^2)$.

Câu 15: Chọn D

Thể tích khối trụ $V = \pi r^2 h = \pi(6,5)^2.16 = 676\pi \approx 2123,7\ (l)$.

Câu 16: Chọn A

Giả sử vỏ hộp sữa có bán kính đáy là R, chiều cao là h ($R,h > 0$).

Vì thể tích vỏ hộp là V nên ta có $V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$.

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì hình trụ vỏ hộp sữa phải có diện tích toàn phần $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ nhỏ nhất.

Cách 1:

Ta có $S_{tp} = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2 \geq 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$.

S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{V}{R}=2\pi R^2 \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Cách 2:

Xét hàm số $f(R)=\dfrac{2V}{R}+2\pi R^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(R)=-\dfrac{2V}{R^2}+4\pi R=\dfrac{4\pi R^3-2V}{R^2}$. $f'(R)=0 \Leftrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Bảng biến thiên:

R	0 $\qquad\qquad\qquad$ $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(R)$	$-$ $\qquad\qquad$ 0 $\qquad\qquad$ $+$
$f(R)$	$\searrow$ $\qquad\qquad$ $\nearrow$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(R)$ đạt nhỏ nhất khi $R=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất thì bán kính đáy vỏ hộp phải bằng $\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

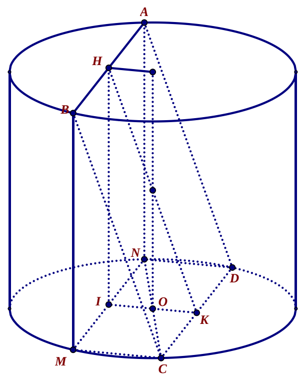
Câu 17: Chọn D

Gọi S_1,S_2 lần lượt là diện tích xung quanh của hình nón phía trên và diện tích của hình vành khăn phía dưới.

Ta có: $S_1=\pi.5.40=200\pi$ và $S_2=\pi.15^2-\pi.5^2=200\pi$.

Khi đó: diện tích vải tối thiểu để may được chiếc mũ là $S_1+S_2=200\pi+200\pi=400\pi$.

Câu 18: Chọn C



Gọi MN là hình chiếu vuông góc của AB lên đường tròn đáy. Ta có $MNDC$ là hình chữ nhật và $NC\cap MD=O$ là tâm đường tròn đáy. Gọi H,I,K lần lượt là trung điểm AB,MN,CD.

Lại có $HK\perp CD,\ IK\perp CD$, suy ra góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông $ABCD$ và mặt đáy là $HKI \Rightarrow \tan HKI=\dfrac{IH}{IK}$.

Đặt $AB=BC=CD=AD=x\ (x>0)$. Ta có $MC=IK=2OK=2\sqrt{OC^2-CK^2}=2\sqrt{r^2-\dfrac{x^2}{4}}$.

Trong tam giác vuông BMC ta có

$BM^2+MC^2=BC^2 \Leftrightarrow r^2+4\left(r^2-\frac{x^2}{4}\right)=x^2 \Leftrightarrow x=\frac{r\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow IK=\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\tan HKI=\frac{IH}{IK}=\frac{r}{\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 19: Chọn D

Diện tích cần sơn chính là tổng diện tích xung quanh của các cây cột có dạng hình trụ.

Gọi S_1,S_2 lần lượt là tổng diện tích xung quanh của 4 cây cột nhà hình trụ có đường kính $40cm$ và 6 cây cột nhà hình trụ có đường kính $26cm$.

Gọi r_1,l_1 lần lượt là bán kính, độ dài đường sinh của 4 cây cột nhà hình trụ có đường kính $40cm$ và r_2,l_2 lần lượt là bán kính, độ dài đường sinh của 6 cây cột nhà hình trụ có đường kính $26cm$.

Khi đó: $r_1=20cm=0,2m$, $l_1=4,2m$ nên $S_1=4.2\pi r_1 l_1=8\pi.0,2.4,2=\frac{168\pi}{25}\left(m^2\right)$.

Lại có: $r_2=13cm=0,13m$, $l_2=4,2m$ nên $S_2=6.2\pi r_2 l_2=12\pi.0,13.4,2=\frac{819\pi}{125}\left(m^2\right)$.

Vậy số tiền người chủ biệt thự phải trả để sơn 10 cây cột nhà là $\left(\frac{168\pi}{25}+\frac{819\pi}{125}\right)\times 380.000 \approx 15.844.000$.

Câu 20: Chọn C

Theo bài ta có $h_n=4h_1 \Rightarrow h_1=\frac{1}{4}h_n;\ h_2=2h_1=\frac{1}{2}h_n$.

Thể tích toàn bộ con xoay là $V=V_{(T_1)}+V_{(T_2)}+V_{(N)}=\pi.r^2.h_1+\pi.(2r)^2.h_2+\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$

$\Leftrightarrow 31=\pi.r^2.\frac{1}{4}h_n+\pi.4r^2.\frac{1}{2}h_n+\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n$

$\Leftrightarrow 31=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right)+6\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right)+\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n \Leftrightarrow 31=\frac{31}{4}\left(\frac{1}{3}\pi.r^2.h_n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi.r^2.h_n=4$

Vậy thể tích khối nón (N) là: $V_{(N)}=4(cm^3)$.

Câu 21: Chọn B

Ta có: $h_1=\frac{1}{3}h_2 \Leftrightarrow h_2=3h_1$, $r_1=\frac{1}{2}r_2 \Leftrightarrow r_2=2r_1$.

Thể tích khối trụ H_1 là: $V_1=\pi r_1^2 h_1$.

Thể tích khối nón H_2 là: $V_2=\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2=\frac{1}{3}\pi\left(2r_1\right)^2.3h_1=4\pi r_1^2 h_1=4V_1$.

Thể tích toàn khối là: $V=V_1+V_2 \Leftrightarrow 30=V_1+4V_1 \Leftrightarrow 30=5V_1 \Leftrightarrow V_1=6$.

Vậy thể tích khối H_1 bằng $6cm^3$.

Câu 22: Chọn A

Giả sử hộp trụ có bán kính đáy r, chiều cao là h. Theo giả thiết có

$V=\pi r^2 h=1 \Rightarrow h=\frac{1}{\pi r^2}$.

Để tiết kiệm nguyên vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất:

$S_{tp}=S_{xq}+S_{2day}=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+\frac{2}{r}=2\pi r^2+\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\geq 3\sqrt[3]{2\pi}.$

Dấu bằng đạt tại $2\pi r^2=\frac{1}{r}\Leftrightarrow r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\approx 0,54\text{ dm}\Rightarrow h\approx 1,084\text{ dm}$.

Vậy phải thiết kế một khối trụ có bán kính đáy $0,54$ dm và chiều cao $1,084$ dm.

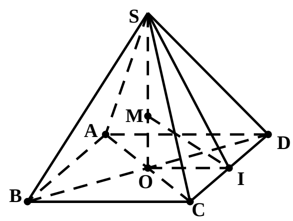
Vậy $S_{tp}=3\sqrt[3]{2\pi}\text{ dm}^3$.

Câu 23: Chọn A

Gọi bán kính đáy của hình nón là r.

Khi đó thể tích nước trong khối nón phía trên lúc ban đầu là: $\frac{\pi r^2.2}{3}$

Thể tích nước trong khối nón phía trên sau khi chảy xuống nón dưới tại thời điểm khi mà chiều cao của nước trong hình nón trên bằng 1 dm là: $\frac{\pi.\left(\frac{r}{2}\right)^2.1}{3}=\frac{\pi r^2}{12}$



Thể tích nước trong nón phía dưới sau khi nón trên chảy xuống là: $\frac{2\pi r^2}{3}-\frac{\pi r^2}{12}=\frac{7\pi r^2}{12}$.

Gọi chiều cao nước trong nón dưới là h, bán kính đáy nước trong nón dưới là r', khi đó: $\frac{h}{2}=\frac{r'}{r}\Leftrightarrow r'=\frac{rh}{2}$.

Thể tích nước trong nón phía dưới là: $\frac{\pi(r')^2h}{3}=\frac{7\pi r^2}{12}\Leftrightarrow\frac{\pi\left(\frac{rh}{2}\right)^2.h}{3}=\frac{7\pi r^2}{12}\Leftrightarrow h=\sqrt[3]{7}$.

Câu 24: Chọn D

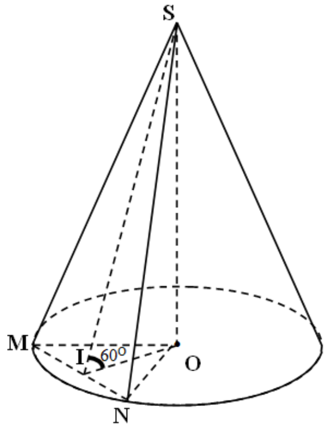
Giả sử R có đơn vị là m. Có $2l=0.002\left(m^3\right)$.

Thể tích khối hộp bằng $4R^2.0,2=0,8R^2\ \left(m^3\right)$.

Thể tích khúc gỗ bằng $\pi R^2\left(\frac{0,12+0,2}{2}\right)=0,16\pi R^2\ \left(m^3\right)$.

Ta có $0,8R^2-0,16\pi R^2=0,002\Rightarrow R\approx 0,08201\left(m\right)\Rightarrow R\approx 8,2\,cm$

Câu 25: Chọn A



Cách 1:

Gọi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60°$ cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SMN như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm MN. Khi đó $OI \perp MN$ và $SI \perp MN$, suy ra góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy là góc $SIO = 60°$.

Xét tam giác SIO ta có: $OI = \dfrac{SO}{\tan SIO} = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan 60^0} = 1$.

$IN = \sqrt{ON^2 - OI^2} = \sqrt{3}$, $MN = 2IN = 2\sqrt{3}$. $S_{\Delta OMN} = \dfrac{1}{2}.OI.MN = \sqrt{3}$.

$V_{S.OMN} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{\Delta OMN} = 1$; $V_{k/non} = \dfrac{1}{3}.\pi.2^2.\sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\pi$.

$\sin ION = \dfrac{IN}{ON} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $ION = 60°$, $MON = 2.ION = 120°$.

Gọi V là thể tích cần tính. Ta có $V = \dfrac{1}{3}V_{k/non} - V_{S.OMN} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi - 1 \approx 1,42\,\text{cm}^3$.

Cách 2:

Gọi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với đáy một góc $60°$ cắt khối nón theo thiết diện là tam giác SMN như hình vẽ.

Gọi I là trung điểm MN. Khi đó $OI \perp MN$ và $SI \perp MN$, suy ra góc giữa mặt phẳng (SMN) và mặt đáy là góc $SIO = 60^0$.

Xét tam giác SIO ta có: $OI = \dfrac{SO}{\tan SIO} = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan 60^0} = 1$.

$IN = \sqrt{ON^2 - OI^2} = \sqrt{3} \Rightarrow MN = 2IN = 2\sqrt{3}$; $S_{\Delta OMN} = \dfrac{1}{2}.OI.MN = \sqrt{3}$.

Ta có $\sin ION = \dfrac{IN}{ON} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ suy ra $ION = 60°$, $MON = 2.ION = 120°$.

Gọi S_V là diện tích hình viên phân tạo bởi dây MN và cung nhỏ MN.

Ta có $S_V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 - S_{\Delta OMN} = \dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$

Thể tích phần nhỏ cần tính là: $V = \dfrac{1}{3}SO.S_V = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi - 1 \approx 1,42\,\text{cm}^3$.

Câu 26: Chọn C

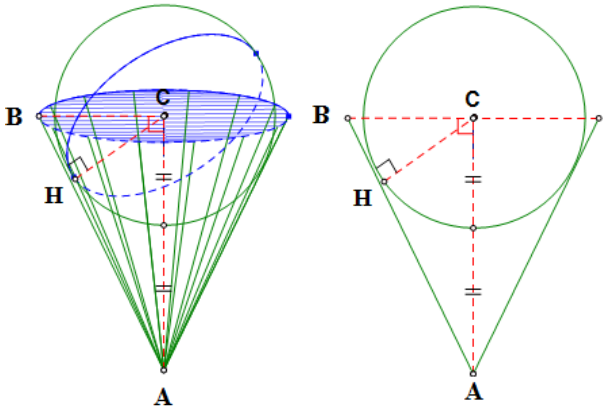
Chiều dài quả tạ là $l = h_1 + h_2 + h_3 = 2h_1 + h_2 = 9 \Rightarrow h_2 = 9 - 2h_1$

Thể tích quả tạ là $V = V_{(H_1)} + V_{(H_2)} + V_{(H_3)} = \pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 + \pi r_3 h_3 = 2\pi r_1 h_1 + \pi r_2 h_2 = 60\pi$

$$\Leftrightarrow 2r_1h_1 + r_2h_2 = 60 \Leftrightarrow 6r_2h_1 + r_2(9 - 2h_1) = 60 \Leftrightarrow r_2(9 + 4h_1) = 60 \Leftrightarrow r_2 = \frac{60}{9 + 4h_1}$$

Thể tích $V_{(H_2)} = \pi r_2 h_2 = \pi \dfrac{60}{9+4h_1}(9 - 2h_1) = \pi \dfrac{60(9-2h_1)}{9+4h_1}$.

Câu 27: Chọn B



Vì đúng một nửa khối cầu chìm trong nước nên thể tích khối cầu gấp 2 lần thể tích nước tràn ra ngoài.

Gọi bán kính khối cầu là R, lúc đó: $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi \Leftrightarrow R^3 = 27$.

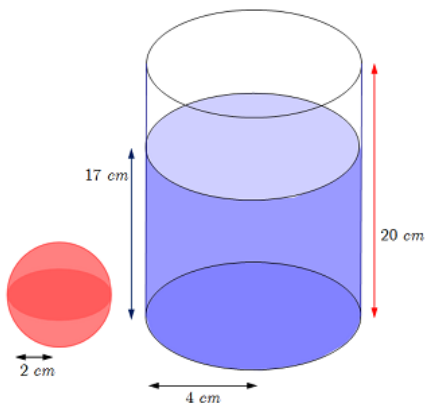
Xét tam giác ABC có AC là chiều cao bình nước nên $AC = 2R$

Trong tam giác ABC có: $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CA^2} + \dfrac{1}{CB^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{R^2} = \dfrac{1}{4R^2} + \dfrac{1}{CB^2} \Leftrightarrow CB^2 = \dfrac{4R^2}{3}$.

Thể tích khối nón: $V_n = \dfrac{1}{3}\pi.CB^2.AC = \dfrac{1}{3}\pi.\dfrac{4R^2}{3}.2R = \dfrac{8\pi}{9}.R^3 = 24\pi\ dm^3$.

Vậy thể tích nước còn lại trong bình: $24\pi - 18\pi = 6\pi\ dm^3$

Câu 28:

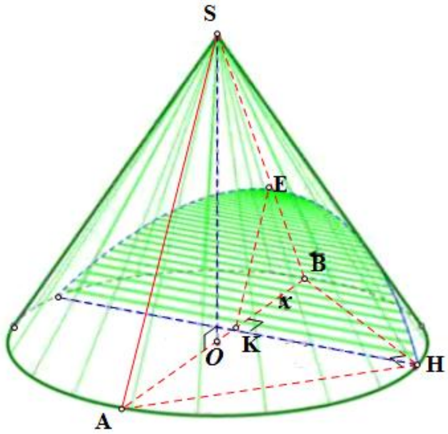


Chọn C

Ta có thể tích phần không chứa nước $V_1 = 3.\pi.4^2 = 48\pi$. Như vậy để nước trào ra ngoài thì số bi thả vào cốc có tổng thể tích lớn hơn 48π.

Gọi n là số viên bi tối thiểu thả vào cốc khi đó tổng thể tích của n viên bi là $V_2 = n.\frac{4}{3}\pi.2^3 = \frac{32\pi n}{3}$. Theo bài ra $\frac{32\pi n}{3} > 48\pi \Leftrightarrow n > \frac{9}{2}$. Vậy $n = 5$.

Câu 29: Chọn D



Cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đường sinh của hình nón ta thu được thiết diện là một parabol.

Xét dây cung bất kỳ chứa đoạn KH như hình vẽ, suy ra tồn tại đường kính $AB \perp KH$, trong tam giác SAB, $KE // SA, E \in SB$, Suy ra Parabol nhận KE làm trục như hình vẽ chính là một thiết diện thỏa yêu cầu bài toán.

Đặt $BK = x$.

Trong tam giác ABH có: $HK^2 = BK.AK = x(24-x)$.

Trong tam giác SAB có: $\frac{KE}{SA} = \frac{BK}{BA} \Leftrightarrow KE = \frac{BK}{BA}.SA \Leftrightarrow KE = \frac{5x}{6}$.

Thiết diện thu được là một parabol có diện tích: $S = \frac{4}{3}KH.KE$.

Ta có: $S^2 = \frac{16}{9}KH^2.KE^2 = \frac{16}{9}.x(24-x).\frac{25x^2}{36} = \frac{100}{81}.(24x^3 - x^4) \Rightarrow S = \frac{10}{9}.\sqrt{24x^3 - x^4}$

Đặt $f(x) = 24x^3 - x^4$, với $0 < x < 24$.

Ta có: $f'(x) = 72x^2 - 4x^3$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 72x^2 - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 18 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		18		24
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	34992	↘	

Vậy thiết diện có diện tích lớn nhất là: $\frac{10}{9}\sqrt{34992} \approx 207,8\ cm^2$

Câu 30: Chọn D

Đặt $AB = x\ (x > 0)$. Tam giác SAB vuông tại A $\Rightarrow SA = AB.\tan ABS = x\sqrt{3}$.

IB là phân giác trong góc B $\Rightarrow \widehat{IBA}=30^\circ \Rightarrow IA=AB\tan 30^\circ=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Quay miền tam giác SAB quanh SA ta được khối nón có chiều cao là SA, bán kính đáy là AB

$\Rightarrow V_1=\dfrac{1}{3}\pi.AB^2.SA=\dfrac{1}{3}\pi.x^2.x\sqrt{3}=\dfrac{\pi x^3\sqrt{3}}{3}$.

Quay nửa hình tròn tâm I quanh SA ta được khối cầu tâm I bán kính IA

$\Rightarrow V_2=\dfrac{4}{3}\pi IA^3=\dfrac{4}{3}\pi.\dfrac{x^3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4\pi x^3\sqrt{3}}{27}\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{9}{4}$.

Câu 31: Chọn B

Khi lăn trọn một vòng thì trục lăn tạo trên tường phẳng lớp sơn có diện tích bằng diện tích xung quanh của trục lăn là $S=2\pi R.h=2\pi.\dfrac{5}{2}.23=115\pi(\text{cm}^2)$.

Vậy sau khi lăn trọn 10 vòng thì trục lăn tạo nên tường phẳng lớp sơn có diện tích là $10S=1150\pi(\text{cm}^2)$.

Câu 32: Chọn C

Gọi giá của vật liệu làm mặt xung quanh là $x,(x>0)$, suy ra giá của vật liệu làm đáy và nắp là $1,5x$.

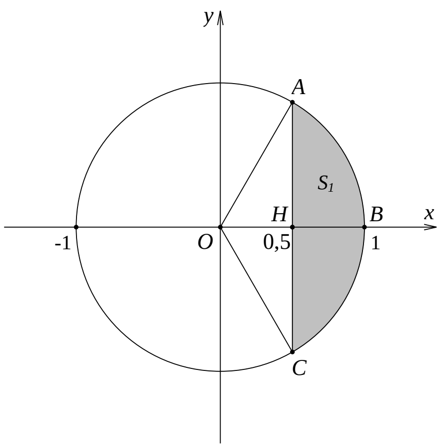
Tổng chi phí vật liệu sản xuất thùng:

$$T=3x\pi r^2+2x\pi rh=\pi x\left(3r^2+\frac{2V}{\pi r}\right)=\pi x\left(3r^2+\frac{V}{\pi r}+\frac{V}{\pi r}\right)\ge \pi x.\left(3\sqrt[3]{3r^2.\frac{V}{\pi r}.\frac{V}{\pi r}}\right)=3\pi x.\sqrt[3]{\frac{3V^2}{\pi^2}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\dfrac{V}{\pi r}=3r^2\Leftrightarrow \dfrac{\pi r^2h}{\pi r}=3r^2\Leftrightarrow h=3r\Leftrightarrow \dfrac{h}{r}=3.$

Câu 33: Chọn B

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào đáy hình trụ như hình vẽ sau



Ta có H là trung điểm OB nên ΔOAB là tam giác đều. Suy ra $\widehat{AOB}=60^\circ$ và $\widehat{AOC}=120^\circ$ nên hình quạt chứa cung nhỏ AC có diện tích là $S=\dfrac{1}{3}\pi r^2=\dfrac{\pi}{3}$.

Khi đó diện tích phần tô đậm trên hình vẽ là $S_1 = S - S_{OAC} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{1}{2}.0,5.\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Và thể tích dầu được rút ra là $V_1 = h.S_1 = 5.\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Thể tích bồn chứa dầu hình trụ là $V = \pi r^2 h = 5\pi$.

Thể tích dầu còn lại trong bồn là $V_2 = V - V_1 = 5\pi - 5.\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{10\pi}{3} + \dfrac{5\sqrt{3}}{4} \approx 12,637\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Cách khác: Có thể tính diện tích phần tô đậm bằng tích phân $S_1 = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Câu 34: Chọn D

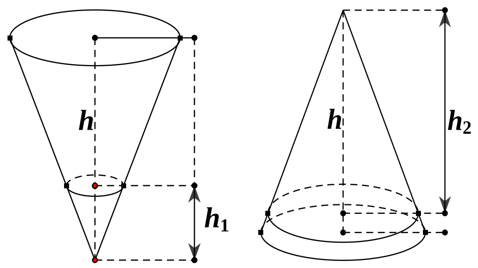
Hai khối trụ có thể tích bằng nhau nên tổng thể tích bằng hai lần thể tích của một khối trụ.

Do $AE = \dfrac{1}{2}AB = 20m$ bằng chu vi của mặt đáy. Suy ra bán kính đáy $R = \dfrac{20}{2\pi} = \dfrac{10}{\pi}m$.

Diện tích mặt đáy là $S = \pi R^2 = \dfrac{100}{\pi}(m^2)$, chiều cao khối trụ là $AD = 5m$.

Suy ra thể tích một khối trụ là $V = S.h = \dfrac{500}{\pi}(m^3)$ .Vậy tổng thể tích là $\dfrac{1000}{\pi}(m^3)$.

Câu 35: Chọn D



Gọi $h = 15$ cm là chiều cao của phễu và V là thể tích của phễu hình nón.

Ký hiệu $h_1 = \dfrac{1}{3}h = 5$ cm là chiều cao và V_1 là thể tích của lượng nước trong phễu.

Gọi h_2, V_2 là chiều cao và thể tích của phần không gian trống trong phễu khi lật ngược phễu lại.

Ta có $V_1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 V = \dfrac{V}{27}$, $V_2 = \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^3 V$ và $V_1 = V - V_2$.

Khi đó,

$$V_1 = V - V_2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 V = V - \left(\dfrac{h_2}{h}\right)^3 V \Leftrightarrow \dfrac{1}{27} = 1 - \left(\dfrac{h_2}{15}\right)^3 \Leftrightarrow \dfrac{h_2}{15} = \sqrt[3]{1 - \dfrac{1}{27}} \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt[3]{26}.$$

Vậy chiều cao của nước khi lật ngược phễu lại là $h - h_2 = 15 - 5\sqrt[3]{26} \approx 0,188$ cm.

Câu 36: Chọn C

Gọi tấm thép hình chữ nhật ban đầu là $ABCD$, r là bán kính của hình tròn đáy.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là: $S = AB.AD$. Ta có $3h = 4r + h \Leftrightarrow h = 2r$.

Thể tích của khối trụ $V = \pi.r^2.h = 3,14.r^2.2\mathrm{r} = 6,28\mathrm{r}^3$.

Theo bài ra $V = 50,24 \Leftrightarrow 6,28r^3 = 50,24 \Leftrightarrow r^3 = 8 \Leftrightarrow r = 2$.

Do $r = 2\,\mathrm{dm} = 0,2\,\mathrm{m} \Rightarrow AD = 3h = 6r = 1,2\,\mathrm{m}; AB = 2\pi.r = 1,256\,\mathrm{m}$.

Vậy $S = 1,2.1,256 = 1,5072(\mathrm{m}^2)$.

Câu 37: Chọn D

Gọi O_1,O_2,O_3 lần lượt là tâm của ba viên bi và $r_1 = r_2 = r_3 = \sqrt{3}$ là bán kính của ba viên bi đó. Theo giả thiết thì ba đường tròn lớn của ba viên bi đôi một tiếp xúc với nhau, khi đó ba điểm O_1,O_2,O_3 tạo thành một tam giác đều cạnh $2\sqrt{3}$. Gọi O là trọng tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ thì $OO_1 = OO_2 = OO_3 = \dfrac{2}{3}.2\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

Cũng theo giả thiết thì ba viên bi tiếp xúc với các đường sinh của lọ hình trụ tại 3 điểm nằm trên một đường tròn bằng đường tròn đáy của lọ hình trụ .

Vậy bán kính đáy của lọ hình trụ là $OM = OO_3 + O_3M = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 38: Chọn C

Ta có $S_{đáy} = \pi r^2$; $S_{xq} = 2\pi rh$.

Thể tích khối trụ $V = S_{đáy}.h \Rightarrow h = \dfrac{V}{S_{đáy}} = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

$S_{tp} = 2S_{đáy} + S_{xq} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r.\dfrac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$.

Xét hàm số $f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$, có $f'(r) = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2}$; $f'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r = \dfrac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Từ đó suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt tại $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

Vậy khi $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ thì diện tích toàn phần hình trụ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 39: Chọn B

Gọi bán kính đáy của hình trụ là R và chiều cao là h.

Do thể tích khối trụ là 72 nên $\pi R^2 h = 72 \Leftrightarrow h = \dfrac{72}{\pi R^2}$.

Diện tích đáy là πR^2. Diện tích xung quanh là $2\pi Rh = 2\pi R.\dfrac{72}{\pi R^2} = \dfrac{144}{R}$.

Chi phí làm bình là:

$T = 100.\pi R^2 + 90.\dfrac{144}{R} + 140.\pi R^2 = 240\pi R^2 + \dfrac{12960}{R}$

$= 240\pi R^2 + \dfrac{6480}{R} + \dfrac{6480}{R} \geq 3\sqrt[3]{240\pi R^2.\dfrac{6480}{R}.\dfrac{6480}{R}} = 6480\sqrt[3]{\pi}.$

Dấu bằng xảy ra khi $240\pi R^2 = \dfrac{6480}{R} = \dfrac{6480}{R} \Leftrightarrow R = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Câu 40: Chọn C

Ta có: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 27 \Rightarrow h = \dfrac{3^4}{\pi r^2}$. Độ dài đường sinh là $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\dfrac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2}$

Lượng giấy tiêu thụ ít nhất khi diện tích xung quanh nhỏ nhất.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi r\sqrt{\dfrac{3^8}{\pi^2 r^4} + r^2} = \pi\sqrt{\dfrac{3^8}{\pi^2 r^2} + r^4}$

$= \pi\sqrt{\dfrac{3^8}{2\pi^2 r^2} + \dfrac{3^8}{2\pi^2 r^2} + r^4} \geq \pi\sqrt{3\sqrt[3]{\dfrac{3^{16}}{4\pi^4}}}$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{3^8}{2\pi^2 r^2} = r^4 \Leftrightarrow r = \sqrt[6]{\dfrac{3^8}{2\pi^2}}\left(cm\right)$. Chọn đáp án C

Câu 41: Chọn A

Gọi r, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và đường sinh của hình nón và I_1, I_2, O lần lượt là tâm của hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ và mặt cầu.

Vì hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có bán kính bằng nhau nên dễ dàng suy ra: $OI_1 = OI_2 = \dfrac{h}{2}$

Ta có $r = \sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}} \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{R^2 + \dfrac{3h^2}{4}}$.

Diện tích xung quanh hình nón là $S_{xq} = \pi r l = \pi.\sqrt{R^2 - \dfrac{h^2}{4}}.\sqrt{R^2 + \dfrac{3h^2}{4}} = \dfrac{\pi}{4\sqrt{3}}\sqrt{\left(12R^2 - 3h^2\right).\left(4R^2 + 3h^2\right)} \leq \dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$.

S_{xq} lớn nhất bằng $\dfrac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $12R^2 - 3h^2 = 4R^2 + 3h^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$.

Mà bán kính đáy và chiều cao của hình nón cũng chính là bán kính đáy và chiều cao hình trụ.

Vậy thể tích hình trụ $V = \pi.r^2.h = \pi.\dfrac{6R^2}{9}.\dfrac{2R}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 42: Chọn D

Gọi bán kính của khối trụ là $x\ \left(0 < x < 3\right)$, chiều cao của khối trụ là $h = OO'\left(0 < h < 6\right)$.

Khi đó thể tích khối trụ là: $V = \pi x^2 h$.

Ta có: $\Delta SO'N$ đồng dạng với ΔSOB nên có $\dfrac{O'N}{OB} = \dfrac{SO'}{SO} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{6-h}{6} \Leftrightarrow h = 6 - 2x$.

Suy ra $V=\pi x^2 h=\pi x^2\left(6-2x\right)=\pi\left(6x^2-2x^3\right)$.

Xét hàm $f\left(x\right)=6x^2-2x^3$, $\left(0<x<3\right)$.

$f'\left(x\right)=12x-6x^2$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (l)\\ x=2\ (n)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

Do đó V lớn nhất khi hàm $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy thể tích của khối trụ lớn nhất là $V=8\pi$ khi bán kính khối trụ bằng 2.

Câu 43: Chọn B

Cách 1:

Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng $\left(O\right)$.

Kẻ $AH\perp OD$, $H\in OD$.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$: $V_{OO'AB}=\dfrac{1}{3}AH.S_{\Delta OO'B}=\dfrac{2a^2}{3}.AH\le\dfrac{2a^2}{3}.AO=\dfrac{4a^3}{3}$.

$\left(V_{OO'AB}\right)_{\max}\Leftrightarrow H\equiv O$. Suy ra $AD=2\sqrt{2}a$.

Suy ra: $\tan\alpha=\tan BAD=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Cách 2:

Nhận xét: *Nên thêm giả thiết AB chéo với OO' để tứ diện $OO'AB$ tồn tại.*

Gọi D là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn $\left(O\right)$.

Gọi C là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn $\left(O'\right)$.

Ta có $O'CB.OAD$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của khối chóp $OO'AB$:

$V_{OO'AB}=V_{O'BC.OAD}=\dfrac{1}{3}2a.S_{\Delta OAD}=\dfrac{1}{3}.2a.\dfrac{1}{2}.2a.2a.\sin AOD\le\dfrac{4a^3}{3}$.

$\left(V_{O'ABCD}\right)_{\max}\Leftrightarrow AOD=90^0\Leftrightarrow AD=2\sqrt{2}a$. Suy ra: $\tan\alpha=\tan BAD=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 44: Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng chứa đường tròn (O).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng chứa đường tròn (O').

Ta có $HAD.BKC$ là một hình lăng trụ đứng.

Ta có thể tích của tứ diện $CDAB$ là

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{HAD.BKC}=\frac{1}{3}.2a.S_{\Delta HAD}=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.AD.d(H;AD)=\frac{1}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a\sqrt{3}.d(H;AD).$$

$(V_{ABCD})_{\max}\Leftrightarrow\left(d(H;AD)\right)_{\max}\Leftrightarrow H$ là điểm chính giữa cung lớn AD của đường tròn (O) .

Theo định lý sin ta có $\dfrac{AD}{\sin AHD}=2.2a\Leftrightarrow\sin AHD=\dfrac{AD}{4a}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{4a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $AHD=60^0$.

Do đó xảy ra khi ΔAHD đều $\Leftrightarrow AH=AD=2\sqrt{3}a$.

Suy ra: $\tan\alpha=\tan BAH=\dfrac{BH}{AH}=\dfrac{2a}{2a\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 45: Chọn A

Kẻ đường thẳng qua O' song song với AB cắt mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại O_1.

Lúc đó $AO_1D.BO'C$ là một hình lăng trụ chiều cao bằng $2a$.

Vì $AD=BC$ nên $S_{\Delta BO'C}=S_{\Delta OAD}$

Ta có thể tích của khối chóp $O'.ABCD$:

$$V_{O'ABCD}=\frac{1}{3}V_{AO_1D.BO'C}=\frac{2}{3}.2a.S_{\Delta BO'C}=\frac{2}{3}.2a.S_{\Delta OAD}=\frac{2}{3}.2a.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin AOD\le\frac{8a^3}{3}.$$

$(V_{O'ABCD})_{\max}\Leftrightarrow AOD=90^0\Leftrightarrow AD=2\sqrt{2}a$.

DẠNG 4 Khối cầu ngoại tiếp khối đa diện

- **Định nghĩa:** Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của khối đa diện đó.
- Điều kiện **cần** và **đủ** để khối chóp có mặt cầu ngoại tiếp: có đáy là một đa giác nội tiếp.
- Cách xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện:

Bước 1: Xác định trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Gọi tắt là **trục của đáy** (là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).

Bước 2: Xác định mặt phẳng trung trực của một cạnh bên hoặc trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên.

Bước 3: Giao điểm của trục của đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên (hoặc trục của đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một đa giác của mặt bên) là **tâm mặt cầu ngoại tiếp** khối đa diện đó.

- Một số công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp
  - **Công thức 1:** Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy:

$R=\sqrt{R_d^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}$, trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy, h là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.

  - **Công thức 2:** Khối tứ diện vuông (có các cạnh đôi một vuông góc):

$$R=\frac{\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}{2}$$

  - **Công thức 3:** Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy:

$R=\sqrt{R_d^2+R_b^2-\frac{a^2}{4}}$, trong đó R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy; R_b là bán kính đường tròn ngoại tiếp của mặt bên và a tương ứng là độ dài đoạn giao tuyến của mặt bên và đáy.

  - **Công thức 4:** Khối chóp có các cạnh bên bằng nhau:

$R=\frac{a^2}{2h}$, trong đó a là độ dài cạnh bên và h là chiều cao khối chóp và h được tính bằng công thức $h=\sqrt{a^2-R_d^2}$.

  - **Công thức 5:** Khối tứ diện gần đều $ABCD$ có $AB=CD=a;\ AC=BD=b;\ AD=BC=c$

$$R=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{8}}.$$

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $AB=AC=a$, cạnh $SA=SB=a$ và có $(SBC)\perp(ABC)$. Tính SC để độ dài bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng a.

A. $SC=a\sqrt{2}$. **B.** $SC=a\sqrt{3}$. **C.** $SC=a$. **D.** $SC=2a$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $8\pi a^2$. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $2\pi a^2$. **D.** $2a^2$.

Câu 3: Một hình nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy. Diện tích hình tròn đáy của hình nón bằng 9π. Tính đường cao h của hình nón.

A. $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $h=3\sqrt{3}$. **C.** $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $h=\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB=2, AC=4, SA=\sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là

A. $R=\dfrac{5}{2}$. **B.** $R=10$. **C.** $R=\dfrac{10}{2}$. **D.** $R=\dfrac{25}{2}$.

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=AA'=2a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đã cho bằng

A. $9\pi a^2$. **B.** $\dfrac{3\pi a^2}{4}$. **C.** $\dfrac{9\pi a^2}{4}$. **D.** $3\pi a^2$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=2\text{a}, AD=a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SD và mặt phẳng đáy là $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

A. $8\pi a^2$. **B.** $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB=2\text{a}, AD=a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SD và mặt phẳng đáy là $30°$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là:

A. $8\pi a^2$. **B.** $\dfrac{8\pi a^2}{3}$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\dfrac{4\pi a^2}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $SA=BC=3$, $AB=\sqrt{7}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $R=\sqrt{5}$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{5}{2}$. **D.** $R=5$.

Câu 9: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABC$ có SA, AB, BC đôi một vuông góc với nhau và $SA=a$, $AB=b$, $BC=c$. Mặt cầu đi qua S, A, B, C có bán kính bằng

A. $\dfrac{2(a+b+c)}{3}$. **B.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;2;-4)$, $B(1;-3;1)$, $C(2;2;3)$, $D(1;0;4)$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D. Tọa độ tâm I và bán kính R mặt cầu (S) là

A. $I(1;0;-2), R=\sqrt{21}$. **B.** $I(-2;1;0), R=\sqrt{26}$.

C. $I(-1;0;2), R=\sqrt{21}$. **D.** $I(2;-1;0), R=\sqrt{26}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân ở B, $AC=a\sqrt{2}$, $SA\perp(ABC)$, $SA=a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC, mặt phẳng (α) đi qua AG và song song với BC cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Tính thể tích V của khối chóp $S.AMN$.

A. $V=\frac{a^3}{9}$. **B.** $V=\frac{2a^3}{27}$. **C.** $V=\frac{2a^3}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3}{6}$.

Câu 12: Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện vuông $O.ABC$ có $OA=OB=OC=a$ có bán kính bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 13: Cho khối trụ có đường sinh bằng 5 và thể tích bằng 45π. Diện tích toàn phần của khối trụ là

A. 18π. **B.** 33π. **C.** 48π. **D.** 39π.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$ và đáy $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính bằng a. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15: Một mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện đều cạnh a. Diện tích mặt cầu (S) là:

A. $\frac{3\pi a^2}{2}$. **B.** $6\pi a^2$. **C.** $\frac{3\pi a^2}{4}$. **D.** $3\pi a^2$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $AB=2,\ AC=4,\ SA=\sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp $S.ABC$ có bán kính là:

A. $R=\frac{25}{2}$. **B.** $R=\frac{5}{2}$. **C.** $R=5$. **D.** $R=\frac{10}{3}$.

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương là

A. $\frac{8\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{12\pi a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp một hình lập phương có cạnh bằng a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $2\sqrt{3}a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 19: Cho hình chóp S.ABC có $SA=SB=SC=a, ASB=ASC=90^0, BSC=60^0$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $\frac{7\pi a^2}{6}$. **B.** $\frac{7\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{7\pi a^2}{18}$. **D.** $\frac{7\pi a^2}{12}$.

Câu 20: Cho hình trụ (T) có bán kính đáy a, trục OO' bằng $2a$ và mặt cầu (S) có tâm là trung điểm của đoạn thẳng OO' và đi qua điểm O. Tìm tỉ số giữa diện tích mặt cầu (S) và diện tích toàn phần của hình trụ (T).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 1. **D.** $\frac{4}{3}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, ABC là tam giác vuông tại A, $AB=3a$; $AC=4a$; $SA=5a$. Tìm bán kính mặt cầu mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$?

A. $\frac{5a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{5a}{4}$. **C.** $\frac{5a}{2}$. **D.** $\frac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có bán kính bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông, biết $BA = BC = 2a$, cạnh bên $SA = 2a\sqrt{2}$ vuông góc với đáy. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp theo a.

A. $8\pi a^2$. **B.** $16\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $64\pi a^2$.

Câu 24: Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình nón đó là.

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$. Tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$. **B.** $4\pi a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $4\pi a^3$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 3a$, $BC = 4a$, $SA = 12a$ và SA vuông góc với đáy. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \frac{5a}{2}$. **B.** $R = \frac{17a}{2}$. **C.** $R = \frac{13a}{2}$. **D.** $R = 6a$.

Câu 27: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a,$ cạnh bên bằng $5a.$ Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD.$

A. $R = \sqrt{3}a$. **B.** $R = \sqrt{2}a$. **C.** $R = \frac{25a}{8}$. **D.** $R = 2a$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{3\pi a^2}{7}$. **B.** $\frac{7\pi a^2}{12}$. **C.** $\frac{7\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^2}{7}$.

Câu 30: Cho mặt cầu tâm O và tam giác ABC có ba đỉnh nằm trên mặt cầu với góc $BAC = 30^0$ và $BC = a$ Gọi S là điểm nằm trên mặt cầu, không thuộc mặt phẳng (ABC) và thỏa mãn $SA = SB = SC$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích V của khối cầu tâm O theo a.

A. $V = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi a^3$. **B.** $V = \frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi a^3$. **D.** $V = \frac{15\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Câu 31: Cho hình hop $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I cạnh $AB = 3a$, $BC = 4a$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm của ID. Biết rằng SB tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{25\pi}{2}a^2$. **B.** $\frac{125\pi}{4}a^2$. **C.** $\frac{125\pi}{2}a^2$. **D.** $4\pi a^2$.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 3$, $AD = BC = 5$, $AC = BD = 6$. Tính thê tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. 35π. **B.** 35. **C.** $\frac{35\sqrt{35}}{6}\pi$. **D.** $35\sqrt{35}\pi$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác đều cạnh a; $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB; SC. Diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, K, H là

A. $\frac{4\pi a^2}{9}$. **B.** $3\pi a^2$. **C.** $\frac{4\pi a^2}{3}$. **D.** $\frac{\pi a^2}{3}$.

Câu 34: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi K là trung điểm của AB, M, N lần lượt là hình chiều của K lên AD và AC. Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy $ABCD$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HB = 2HA$. Cạnh SA hợp với mặt phẳng đáy góc 60^o. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$

A. $\frac{475\pi a^2}{3}$. **B.** $21\pi a^2$. **C.** $\frac{55\pi a^2}{3}$. **D.** $22\pi a^2$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính theo a diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$.

A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $2a^2$. **D.** $a^2\sqrt{2}$.

Câu 37: Cho khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy bằng $\sqrt{2}$, chiều cao bằng $2\sqrt{2}$. Gọi O là tâm mặt cầu đường tròn ngoại tiếp khối chóp $S.ABCD$. Cosin góc giữa hai mặt phẳng (OAB) và (OCD) bằng:

A. $\frac{15}{17}$. **B.** $\frac{33}{65}$. **C.** $\frac{8}{17}$. **D.** $\frac{56}{65}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a\sqrt{3}$, $BC = 2a$ đường thẳng AC' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng:

A. $3\pi a^2$. **B.** $6\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $24\pi a^2$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 1\text{cm}$, $AC = \sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB SAC lần lượt vuông tại B và C. Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB).

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}\text{cm}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$.

Câu 40: Cho tam giác ABC vuông tại B và nằm trong mặt phẳng (P) có $AB=2a$, $BC=2\sqrt{3}a$. Một điểm S thay đổi trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A $(S\neq A)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB,SC. Biết rằng khi S thay đổi thì 4 điểm A,B,H,K thuộc một mặt cầu cố định. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

A. $R=2a$. **B.** $R=\sqrt{2}a$. **C.** $R=a$. **D.** $R=\sqrt{3}a$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), $AB=a,AC=a\sqrt{2},BAC=45^0$. Gọi B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB,SC. Thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$.

A. $\frac{\pi a^3}{\sqrt{2}}$. **B.** $\pi a^3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **D.** $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, các cạnh còn lại cùng bằng a. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

A. $R=\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **B.** $R=\frac{a}{3}$. **C.** $R=\frac{a\sqrt{13}}{3}$. **D.** $R=\frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC, khi đó thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$ là

A. $\sqrt{2}\pi a^3$. **B.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$. **D.** $\frac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3$, $AD=4$ và các cạnh bên của hình chóp tạo với mặt đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V=\frac{250\sqrt{3}}{3}\pi$. **B.** $V=\frac{125\sqrt{3}}{6}\pi$. **C.** $V=\frac{50\sqrt{3}}{3}\pi$. **D.** $V=\frac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 45: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6a$, $CD=8a$ và các cạnh còn lại bằng $a\sqrt{74}$. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $S=25\pi a^2$. **B.** $S=100\pi a^2$. **C.** $S=\frac{100}{3}\pi a^2$. **D.** $S=96\pi a^2$.

Câu 46: Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA=OB=OC=a$, $AOB=60°$, $BOC=90°$, $AOC=120°$. Gọi S là trung điểm cạnh OB. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\frac{a}{2}$

Câu 47: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ. Trên đường thẳng Δ lấy hai điểm A, B với $AB=a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C và trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC=BD=AB$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC cắt cạnh SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P. Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ bằng

A. $V=\frac{125\pi}{6}$. **B.** $V=\frac{32\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{108\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC=a,\ AB=a\sqrt{3},\ BAC=150^0$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi $M,\ N$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Thế tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. **B.** $\frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$.

Câu 50: Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC đều cạnh bằng 8 cm và một điểm S di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3}$ cm^2, với M là trung điểm của SC. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn đỉnh M,A,B,C. Khi thể tích hình chóp $S.ABC$ lớn nhất, tính bán kính nhỏ nhất của (S):

A. $\frac{16\sqrt{6}}{9}$ cm. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. **C.** $\frac{4\sqrt{15}}{3}$ cm. **D.** $\frac{4\sqrt{39}}{3}$ cm.

Câu 51: Cho mặt cầu $(S):(x-2017)^2+(y-2018)^2+(z-2019)^2=2020$. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, đáy là đường tròn (C) và có chiều cao h. Gọi V là thể tích của khối nón được tạo nên bởi (N). Tính giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của V.

A. $V_{\max}=\frac{\pi.32.\left(\sqrt{2020}\right)^3}{81}$. **B.** $V_{\max}=\frac{\pi.8.\left(\sqrt{2020}\right)^3}{81}$.

C. $V_{\max}=\frac{\pi.16.\left(\sqrt{2020}\right)^3}{81}$. **D.** $V_{\max}=\frac{\pi.64.\left(\sqrt{2020}\right)^3}{81}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết rằng $AB=a,\ AD=a\sqrt{3}$ và $ASB=60°$. Tính diện tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $S=\frac{13\pi a^2}{2}$. **B.** $S=\frac{13\pi a^2}{3}$. **C.** $S=\frac{11\pi a^2}{2}$. **D.** $S=\frac{11\pi a^2}{3}$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=BC=3a\sqrt{2}$, $SAB=SCB=90^\circ$. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCB) bằng $2a\sqrt{3}$. Tính thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $72\sqrt{18}\pi a^3$. **B.** $18\sqrt{18}\pi a^3$. **C.** $6\sqrt{18}\pi a^3$. **D.** $24\sqrt{18}\pi a^3$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=a, BC=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính diện tích xung quanh của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{12\pi a^2}{7}$. **B.** $\dfrac{4\pi a^2}{7}$. **C.** $\dfrac{3\pi a^2}{7}$. **D.** $\dfrac{15\pi a^2}{7}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.A	3.B	4.A	5.A	6.A	7.A	8.C	9.D	10.B
11.B	12.B	13.C	14.C	15.A	16.B	17.B	18.A	19.B	20.B
21.D	22.D	23.B	24.B	25.C	26.C	27.C	28.C	29.C	30.B
31.B	32.C	33.C	34.D	35.C	36.B	37.B	38.B	39.D	40.A
41.D	42.C	43.D	44.D	45.B	46.C	47.B	48.B	49.B	50.C
51.A	52.B	53.D	54.A						

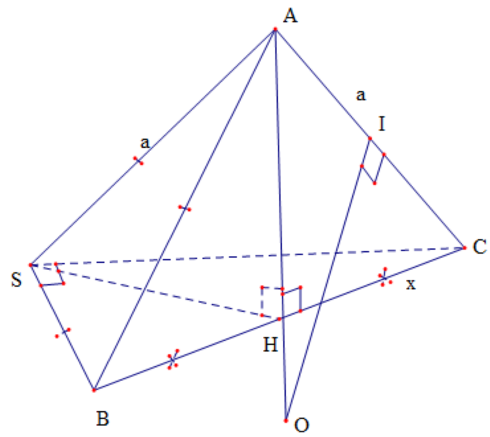
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Chọn A

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$ $\Rightarrow AH \perp (SBC)$.

Mà $SA = AB = AC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC $\Rightarrow HS = HB = HC \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại S.

Gọi I là trung điểm AC, $O \in AH$, $OI \perp AC \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Đặt $HC = x$. Ta có ΔAOI đồng dạng ΔACH.



$$\Rightarrow AO.AH = AI.AC \Rightarrow AO = \frac{AI.AC}{AH} = \frac{\frac{a}{2}.a}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = R.$$

Lại có $R = a \Rightarrow \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = a \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 - x^2} = a \Leftrightarrow 4a^2 - 4x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow SC = \sqrt{BC^2 - SB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Câu 2: Chọn A

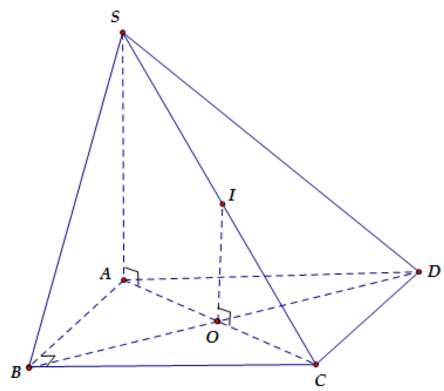
Gọi $O = AC \cap BD$, đường chéo $AC = a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của SC.

Suy ra OI là đường trung bình của tam giác SAC. Suy ra $OI // SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

Hay OI là trục đường tròn ngoại tiếp đáy $ABCD$.

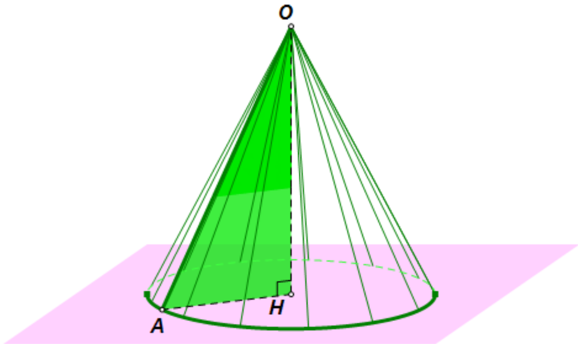
Mà $IS = IC \Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS$. Suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$.



Bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$: $R = SI = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Câu 3: Chọn B



Gọi chiều cao, bán kính đáy, độ dài đường sinh của hình nón lần lượt là h, r, l.

Hình nón có độ dài đường sinh bằng đường kính đáy nên $l = 2r$.

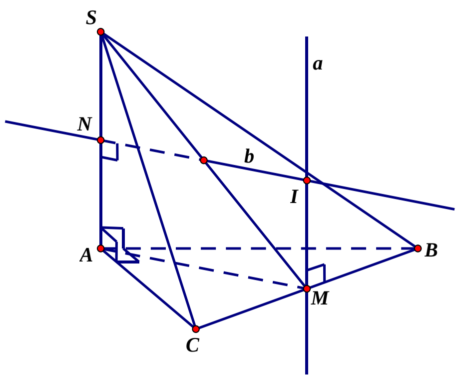
Diện tích hình tròn đáy của hình nón bằng 9π nên: $\pi r^2 = 9\pi \Leftrightarrow r = 3$.

Suy ra $l = 2r = 6$. Áp dụng định lý Pitago cho tam giác OAH ta được:

$OH^2 = OA^2 - AH^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - r^2 \Leftrightarrow h^2 = 27 \Leftrightarrow h = 3\sqrt{3}$.

Vậy chiều cao h của hình nón là $3\sqrt{3}$.

Câu 4: Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và SA. Do tam giác ABC vuông tại A nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi a là đường thẳng qua M và song song với SA mà $SA \perp (ABC)$ nên $a \perp (ABC)$. Do đó a là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Trong mặt phẳng (SAM), gọi b là đường trung trực của đoạn thẳng SA, gọi I là giao điểm của a và b.

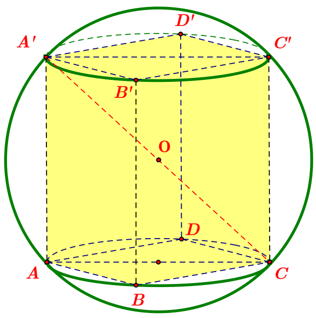
Ta có $I \in a$ suy ra $IA = IB = IC$. Mặt khác, $I \in b$ suy ra $IA = IS$.

Do đó $IA = IB = IC = IS$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là

$R = IA = \sqrt{AN^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{AS^2}{4} + \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{AS^2 + AB^2 + AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{5+4+16}{4}} = \frac{5}{2}$.

Câu 5: Chọn A

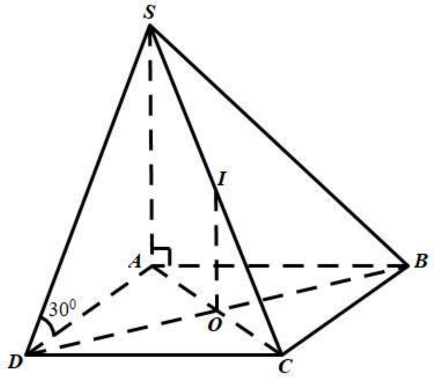


Mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm là O của hình hộp có bán kính

$R = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (2a)^2 + (2a)^2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là $S = 4\pi\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = 9\pi a^2$.

Câu 6: Chọn A



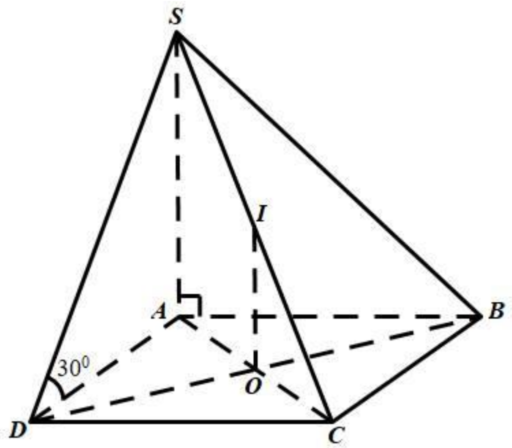
Gọi O,I lần lượt là trung điểm của AC,SC. Ta có: $IO//SA \Rightarrow IO \perp \left(ABCD\right)$.

Mà: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow IO$ là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $\Rightarrow IA = IB = IC = ID$.

Mặt khác $IS = IC$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I và bán kính $R = IS = \frac{SC}{2}$. Tam giác SAD vuông tại A và $SDA = 30° \Rightarrow \tan SDA = \frac{SA}{AD} \Rightarrow SA = a$.

$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$; $R = IS = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$. Vậy $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Câu 7: Chọn A



Gọi O,I lần lượt là trung điểm của AC,SC. Ta có: $IO//SA \Rightarrow IO \perp \left(ABCD\right)$.

Mà: $OA = OB = OC = OD \Rightarrow IO$ là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy $\Rightarrow IA = IB = IC = ID$.

Mặt khác $IS = IC$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ có tâm I và bán kính $R = IS = \frac{SC}{2}$. Tam giác SAD vuông tại A và $SDA = 30° \Rightarrow \tan SDA = \frac{SA}{AD} \Rightarrow SA = a$.

$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{7}$; $R = IS = \frac{SC}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AC^2}}{2} = a\sqrt{2}$. Vậy $S = 4\pi R^2 = 8\pi a^2$.

Câu 8: Chọn C

Gọi E là trung điểm của AC,do tam giác ABC vuông tại B nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Gọi I và M lần lượt là trung điểm SC và SA ,khi đó AMIE là hình chữ nhật

$IE//SA \Rightarrow IE \perp (ABC)$ mà E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC,nên $IA = IB = IC$

Lại có $IM//AC \Rightarrow IM \perp SA$ mà M là trung điểm SA nên IM là trục đối xứng của đoạn thẳng SA, nên $IA = IS$

Từ 1,2 $\Rightarrow IA = IS = IB = IC = R$ hay I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Xét tam giác vuông ABC có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7+9} = 4$.

Xét tam giác vuông IAM có: $R = IA = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \frac{5}{2}$

Cách giải khác:

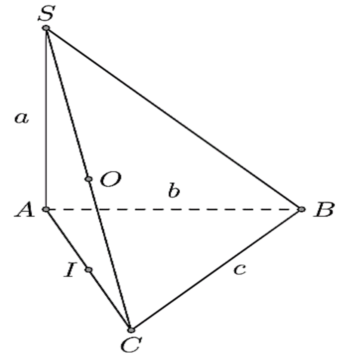
Ta có: $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow SBC = 90^0$

Mà $SAC = 90^0$ nên các điểm S, A, B, C thuộc mặt cầu đường kính SC.

Xét tam giác vuông ABC có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{7+9} = 4$.

Xét tam giác vuông SAC có: $R = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}.\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{5}{2}$.

Câu 9: Chọn D



Ta có: SA, AB, BC đôi một vuông góc $\Rightarrow SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại B.

Gọi I là trung điểm của $AC \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Khi đó bán kính đường tròn tâm I ngoại tiếp ΔABC: $r = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$.

Gọi O là trung điểm $SC \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC \Rightarrow OI = \frac{SA}{2}$.

Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là:

$$R = OC = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + r^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2+c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Câu 10: Chọn B

Giả sử (S) có phương trình dạng:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ $\left(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0\right)$ (1).

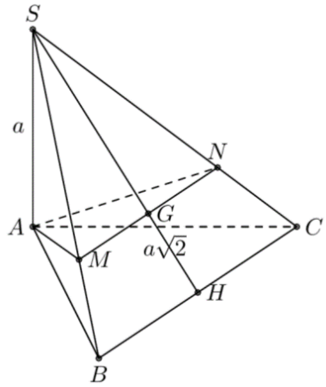
Với tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Vì (S) đi qua bốn điểm A, B, C, D nên tọa độ của các điểm A, B, C, D thỏa mãn. Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+4+16-2a-4b+8c+d=0 \\ 1+9+1-2a+6b-2c+d=0 \\ 4+4+9-4a-4b-6c+d=0 \\ 1+0+16-2a+0b-8c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+4b-8c-d=21 \\ 2a-6b+2c-d=11 \\ 4a+4b+6c-d=17 \\ 2a-0b+8c-d=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b-10c=10 \\ 6b+6c=6 \\ 2a+4b-2c=0 \\ 2a-0b+8c-d=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=0 \\ a=-2 \\ d=-21 \end{cases}$$

$\Rightarrow I(-2; 1; 0), R = \sqrt{26}$.

Câu 11: Chọn B



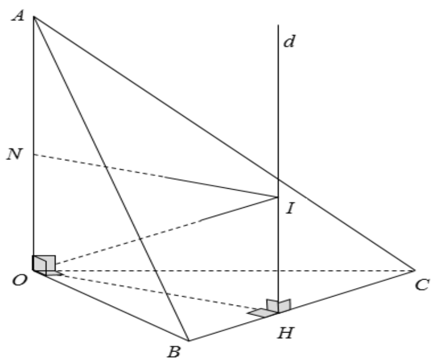
Qua G, kẻ đường thẳng song song với BC, cắt SB tại M và cắt SC tại N. Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow \dfrac{SG}{SH}=\dfrac{2}{3}$. Ta có: $MN//BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SG}{SH}=\dfrac{2}{3}$.

Ta có: $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=a$ (ΔABC vuông cân tại B).

Có: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}AB^2=\dfrac{1}{3}a.\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{6}a^3$.

Theo công thức tỉ lệ thể tích ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\dfrac{SA}{SA}.\dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}\Rightarrow V_{S.AMN}=\dfrac{4}{9}V_{S.ABC}=\dfrac{4}{9}.\dfrac{1}{6}a^3=\dfrac{2}{27}a^3$.

Câu 12: Chọn B



Trong (OBC) kẻ đường cao OH. Vì ΔOBC là tam giác vuông cân nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOBC và $OH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Qua H dựng đường thẳng d song song với $OA \Rightarrow d\perp(OBC)$. Do đó, d là trục đường tròn của ΔOBC.

Trong $mp(OA,d)$, dựng đường trung trực OA cắt OA, d lần lượt tai N,I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$.

Theo cách dựng ta có tứ giác $OHIN$ là hình chữ nhật nên $NI=OH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ Bán kính $R=OI=\sqrt{ON^2+IN^2}=\sqrt{\left(\dfrac{OA}{2}\right)^2+OH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chú ý: Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện vuông $O.ABC$ là

$$R=\frac{\sqrt{OA^2+OB^2+OC^2}}{2}$$

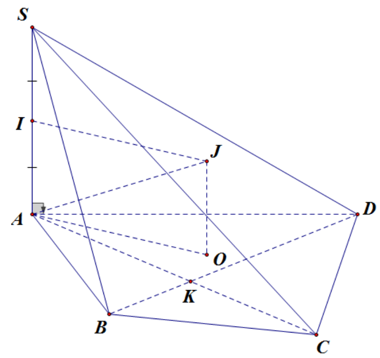
Câu 13: Chọn C

Ta có: $V=\pi R^2.h=45\pi$. Suy ra: $R=\sqrt{\frac{45}{5}}=3$.

Diện tích toàn phần khối trụ: $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi.3.5+2\pi.3^2=48\pi$.

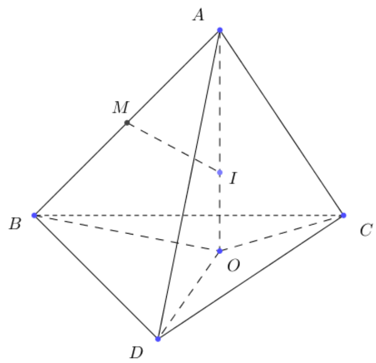
Câu 14: Chọn C

Gọi điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy. I là trung điểm SA . J là tâm mặt cầu ngoại tiếp.



Dễ thấy $AIJO$ là hình chữ nhật. Do đó $JA=\sqrt{AO^2+AI^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 15:



Chọn A

Vì $A.BCD$ là tứ diện đều nên tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nằm trên đường cao AO trong đó O là trọng tâm của tam giác đều BCD .

Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Từ M kẻ đường trung trực MI của đoạn AB cắt AO tại I .

Do đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp $A.BCD$

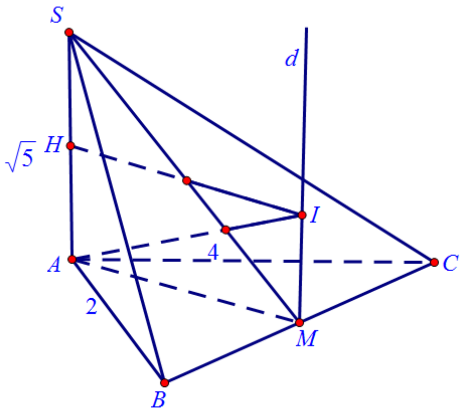
Ta có $MI\perp AB$ nên hai tam giác vuông IMA và BOA đồng dạng.Từ đó suy ra:

$$\frac{IA}{BA}=\frac{MA}{OA}=\frac{1}{2}.\frac{AB}{OA}\Leftrightarrow IA=R=\frac{AB^2}{2.AO}$$

Ta có $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow R=IA=\frac{AB^2}{2AO}=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Diện tích mặt cầu (S) là: $S=4\pi R^2=4\pi a^2.\frac{3}{8}=\frac{3\pi a^2}{2}$

Câu 16: Chọn B



Cách 1.

Gọi M, H lần lượt là trung điểm BC,SA .

Ta có tam giác ABC vuông tại A suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Qua M kẻ đường thẳng d sao cho $d \perp (ABC)$ $\Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Trong mặt phẳng (SAM) kẻ đường trung trực Δ của đoạn SA, cắt d tại I

$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

- $\begin{cases} HA \perp (ABC) \\ IM \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} HA \perp AM \\ HA // IM \end{cases}$; $\begin{cases} HI \perp SA \\ AM \perp SA \\ HI, SA, AM \subset (SAM) \end{cases} \Rightarrow HI // AM$.

Suy ra tứ giác $HAMI$ là hình chữ nhật.

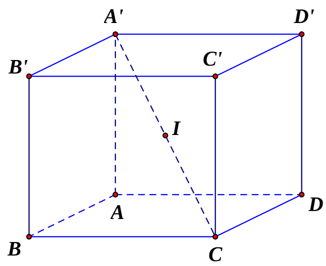
Ta có $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5}$, $IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}$.

Cách 2. Sử dụng kết quả: Nếu $SABC$ là một tứ diện vuông đỉnh A thì bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ được tính bởi công thức: $R = \frac{1}{2}\sqrt{AS^2 + AB^2 + AC^2}$

Áp dụng công thức trên, ta có $R = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + 2^2 + 4^2} = \frac{5}{2}$.

Câu 17: Chọn B

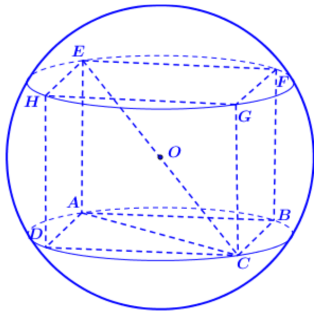


Gọi I là trung điểm $A'C \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương.

Bán kính mặt cầu là $R = CI = \frac{1}{2}CA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra thể tích khối cầu ngoại tiếp hình lập phương là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{3\sqrt{3}a^3}{8} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$.

Câu 18: Chọn A

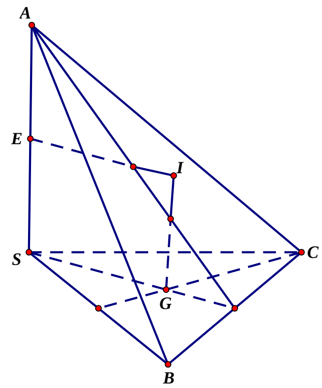


Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.EFGH$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương $ABCD.EFGH$ là:

$$R = OC = \frac{EC}{2} = \frac{\sqrt{EA^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{EA^2 + AB^2 + BC^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 19: Chọn B



Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC).$

Gọi G là trọng tâm tam giác đều SBC, suy ra $SG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi d là đường thẳng qua G và vuông góc với. Suy ra d là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác SB**C.**

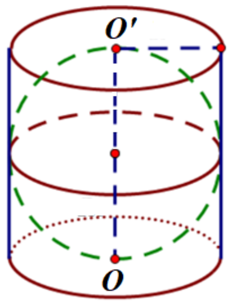
Tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC là giao điểm của mặt phẳng trung trực đoạn SA và d.

$$R = SI = \sqrt{SE^2 + SG^2} = \sqrt{\left(\frac{SA}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\frac{21a^2}{36} = \frac{7\pi a^2}{3}$.

Câu 20: Chọn B

Diện tích toàn phần của hình trụ là $S_{(T)} = 2\pi a^2 + 2\pi a.2a = 6\pi a^2$.



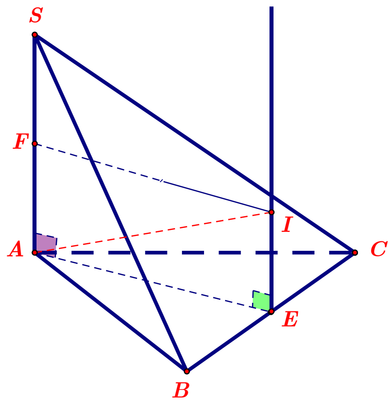
Diện tích mặt cầu là $S_{(S)} = 4\pi\left(\frac{OO'}{2}\right)^2 = 4\pi a^2$.

Tỉ số giữa diện tích mặt cầu (S) và diện tích toàn phần của hình trụ (T) là

$$\frac{S_{(S)}}{S_{(T)}} = \frac{4\pi a^2}{6\pi a^2} = \frac{2}{3}.$$

Câu 21: Chọn D

Cách 1:



Gọi E là trung điểm của BC. Vì ΔABC vuông tại A nên E là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Qua E dựng đường thẳng d song song với SA, vì $SA \perp (ABC)$ nên d là trục của ΔABC. Trong mặt phẳng $(SA;d)$, dựng đường trung trực của SA cắt d tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ vì $I \in d \Rightarrow IA = IB = IC$, mặt khác I thuộc trung trực của SA nên $IS = IA$.

Gọi F là trung điểm của SA. Trong mặt phẳng $(SA;d)$ có $AE \perp SA$, $FI \perp SA$ nên $FI \,//\, AE$ lại có $EI \,//\, AF$ nên tứ giác $AFIE$ là hình chữ nhật. Vậy $AI = \sqrt{AE^2 + AF^2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Chọn D

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC, SA \perp BC, SA \perp CD$.

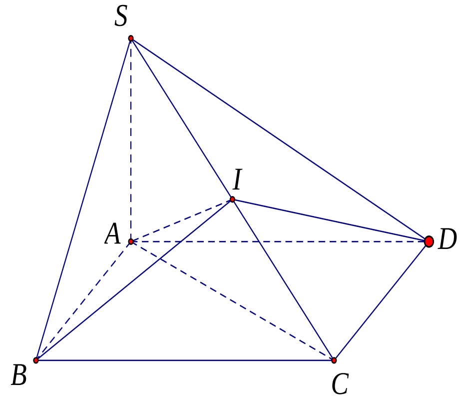
Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $AC = a\sqrt{2}$. Tam giác SAC vuông tại A nên

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có

$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$;

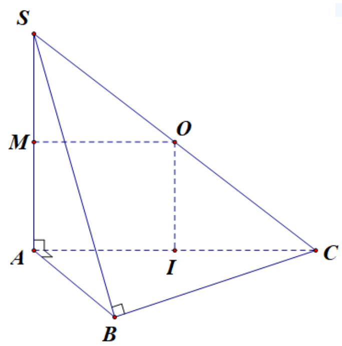
$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.



Gọi I là trung điểm của SC. Vì $\Delta SBC, \Delta SAC, \Delta SDC$ là các tam giác vuông có cạnh huyền là SC nên $IS = IC = IA = IB = ID = \dfrac{SC}{2}$.

Do đó bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Chọn B



Cách 1.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, do tam giác ABC vuông tại B nên I là trung điểm của AC. Qua I dựng đường thẳng d vuông góc với (ABC). Suy ra $d//SA$.

Trong tam giác SAC, dựng đường trung trực của SA cắt d tại O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Ta tính được $AC = 2a\sqrt{2}, SC = 4a$

Bán kính mặt cầu $R = OA = \sqrt{OI^2 + OM^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABC$ là $S = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$.

Cách 2.

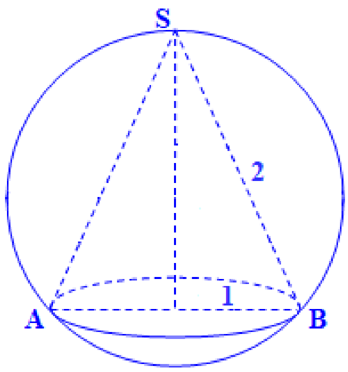
Ta có $BC \perp SA, BC \perp AB \Rightarrow BC \perp SB$. Ta có $SAC = SBC = 90°$.

Khi đó 4 điểm S, A, B, C nằm trên mặt cầu đường kính SC.

Bán kính mặt cầu $R = \dfrac{SC}{2} = 2a$.

Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S = 4\pi(2a)^2 = 16\pi a^2$.

Câu 24: Chọn B

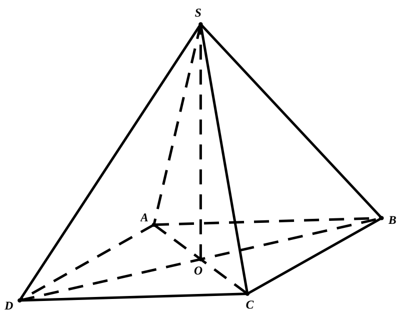


Hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy và bằng 2 $\Rightarrow$ Thiết diện qua trục hình nón là tam giác đều có cạnh bằng 2 và bán kính mặt cầu ngoại tiếp bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Gọi R là bán kính mặt cầu, theo định lý sin trong tam giác SAB, ta có: $\dfrac{AB}{\sin S} = 2R$.

$\Rightarrow R = \dfrac{AB}{2\sin S} = \dfrac{2}{2.\sin 60°} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 25: Chọn C



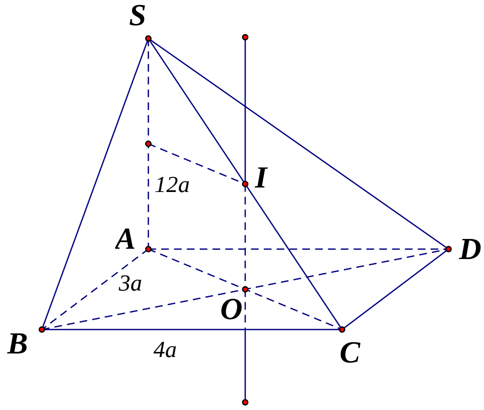
Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Ta có $\widehat{ABC}=90^\circ$, $\widehat{ADC}=90^\circ$ và $\widehat{ASC}=90^\circ$ suy ra các đỉnh B, D, S cùng nhìn đoạn thẳng AC dưới một góc vuông nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp $S.ABCD$ và $R=OA=\dfrac{AC}{2}=a$

.

Vậy $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

Câu 26: Chọn C



Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5a$. Vì $SA\perp AC$ nên

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=13a$

Nhận thấy: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp SB$ .Tương tự:

$CD\perp SD$

Do các điểm $A,\ B,$ D đều nhìn đoạn thẳng SC dưới một góc vuông nên gọi I là trung điểm của đoạn thẳng SC thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Vậy $R=\dfrac{SC}{2}=\dfrac{13a}{2}$.

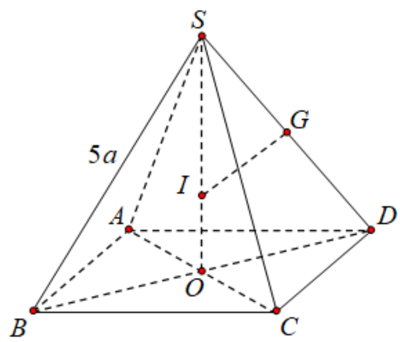
Câu 27: Chọn C

Tam giác BCD vuông tại C nên áp dụng định lí Pitago, ta được $BD=5a$.

Tam giác ABD vuông tại B nên áp dụng định lí Pitago, ta được $AD=5a\sqrt{2}$.

Vì B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm I của AD. Bán kính mặt cầu này là: $R=\dfrac{AD}{2}=\dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 28: Chọn C



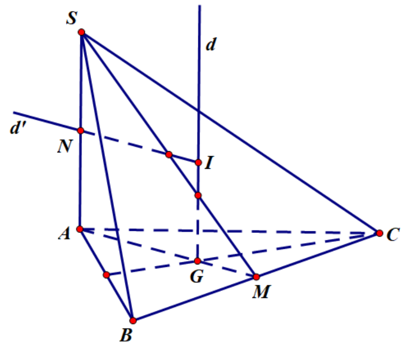
Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD, $GI\perp SD, I\in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD=3\sqrt{2}a.\sqrt{2}=6a$, $OD=3a$.

Xét ΔSOD vuông tại O ta có: $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=4a$

Ta có $\Delta SOD\backsim\Delta SGI$, suy ra $\dfrac{SO}{SG}=\dfrac{SD}{SI}\Rightarrow 4a.R=\dfrac{1}{2}(5a)^2\Rightarrow R=\dfrac{25a}{8}$.

Câu 29: Chọn C



Đáy ABC là tam giác đều $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm G.

Từ G kẻ đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng đáy $\Rightarrow d // SA$ và đường thẳng d là trục của tam giác đáy.

Trong mặt phẳng (SAG) kẻ d' là đường trung trực của đoạn SA.

Trong mặt phẳng (SAG) hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại I $\Rightarrow$ I cách đều 4 đỉnh $S, A, B,$C của hình chóp $\Rightarrow$ I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với $R = AI$.

Tính bán kính R:

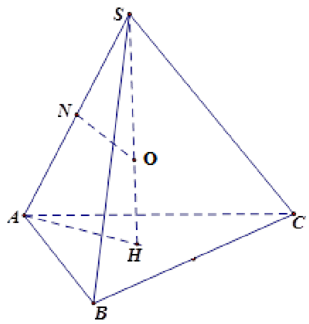
Tam giác ABC đều cạnh a $\Rightarrow$ $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

N là trung điểm SA $\Rightarrow$ $AN = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2} = GI$.

Xét tam giác vuông AIG: $AI = \sqrt{AG^2 + GI^2} = \dfrac{a\sqrt{21}}{6} = R$.

Vậy diện tích của mặt cầu cần tìm là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(\dfrac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 = \dfrac{7}{3}\pi a^2$

Câu 30: Chọn B



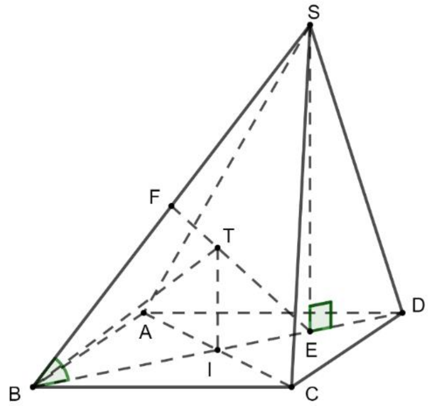
Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, khi đó $SH \perp (ABC)$ và SH là trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là $SAH = 60^0$.

Gọi N là trung điểm SA, mặt phẳng trung trực của cạnh SA cắt SH tại O. Khi đó $OS = OA = OB = OC$ nên O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $AH = \dfrac{BC}{2\sin 30^0} = a.$

$SH = AH.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$, $SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = 2a$.



Bán kính mặt cầu là $R = SO = \frac{SN.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Thể tích của khối cầu tâm O là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\sqrt{3}}{27}\pi a^3$.

Câu 31: Chọn B

Gọi E là trung điểm của ID, F là trung điểm của SB. Trong mặt phẳng (SBD), vẽ IT song song với SE và cắt EF tại T.

Ta có $SE \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{SBE} = \left[SB;(ABCD)\right] = 45°$. Suy ra $\triangle SBE$ vuông cân tại E. Suy ra EF là trung trực của SB. Suy ra $TS = TB$.

Ta có $IT \parallel SE$, suy ra $IT \perp (ABCD)$. Suy ra IT là trục đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$. Suy ra $TA = TB = TC = TD$.

Từ và suy ra T là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a$, suy ra $IB = ID = \frac{5}{2}a$.

Do E là trung điểm của ID nên $IE = \frac{1}{2}ID = \frac{5}{4}a$.

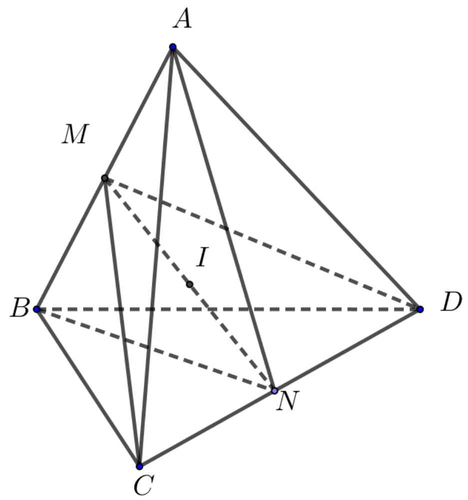
$\triangle BEF$ vuông tại F có $\widehat{EBF} = 45°$ nên $\triangle BEF$ vuông cân tại F.

$\triangle EIT$ vuông tại I có $\widehat{IET} = 45°$ nên $\triangle EIT$ vuông cân tại I. Suy ra $IT = IE = \frac{5}{4}a$.

Do $\triangle BIT$ vuông tại I nên $TB = \sqrt{IB^2 + IT^2} = \frac{5\sqrt{5}}{4}a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $S = 4\pi TB^2 = \frac{125\pi}{4}a^2$.

Câu 32: Chọn C



Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của AB, CD và MN.

Ta có $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow AN = BN \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại N, mà AM là đường trung tuyến

$\Rightarrow$ AM là đường trung trực của AB

$\Rightarrow IA = IB = \frac{MN}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có $\Rightarrow IC = ID = \frac{MN}{2}$.

Từ và suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Áp dụng công thức trung tuyến cho tam giác ACD ta có $AN^2 = \frac{36+25}{2} - \frac{9}{4}$ **Error! Not a valid embedded object.**.

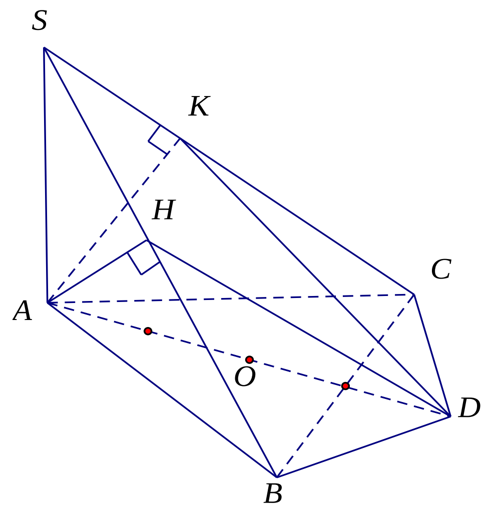
Xét tam giác vuông **Error! Not a valid embedded object.** có: **Error! Not a valid embedded object. Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.**.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện **Error! Not a valid embedded object.** là **Error! Not a valid embedded object.**.

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện **Error! Not a valid embedded object.**là: **Error! Not a valid embedded object. Error! Not a valid embedded object.**.

Câu 33: Chọn C

Gọi **Error! Not a valid embedded object.** là đường kính đường tròn ngoại tiếp **Error! Not a valid embedded object.**.



Ta có **Error! Not a valid embedded object.**.

Từ đó suy ra **Error! Not a valid embedded object.**.

Chứng minh tương tự ta được **Error! Not a valid embedded object.**.

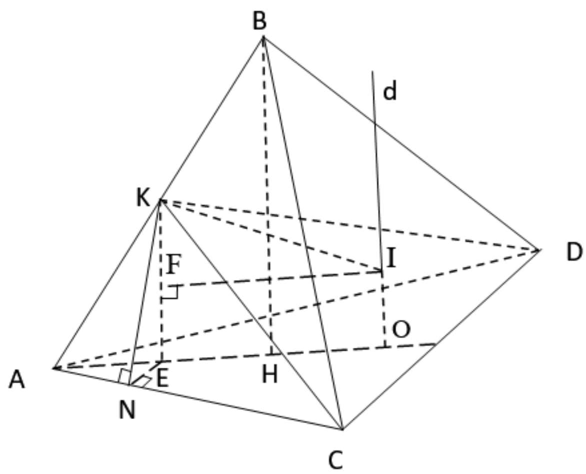
Từ,, ta suy ra 5 điểm **Error! Not a valid embedded object.** cùng nằm trên mặt cầu đường kính **Error! Not a valid embedded object.**.

Gọi **Error! Not a valid embedded object.** là trung điểm của **Error! Not a valid embedded object.**, ta có **Error! Not a valid embedded object.**.

Vậy diện tích mặt cầu đi qua 5 điểm **Error! Not a valid embedded object.** là: **Error! Not a valid embedded object.**.

Câu 34: Chọn D

Tứ diện **Error! Not a valid embedded object.** đều, có độ dài cạnh là 1.



Gọi H là trọng tâm tam giác **Error! Not a valid embedded object.** khi đó **Error! Not a valid embedded object.**. Gọi E là trung điểm của **Error! Not a valid embedded object.**, suy ra **Error! Not a valid embedded object.**. Từ E hạ EN vuông góc xuống AC, **Error! Not a valid embedded object.**, suy ra **Error! Not a valid embedded object.**

Gọi **Error! Not a valid embedded object.** là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác **Error! Not a valid embedded object.**. **Error! Not a valid embedded object.**.

Ta tính được **Error! Not a valid embedded object.**. Dựng đường thẳng **Error! Not a valid embedded object.** đi qua **Error! Not a valid embedded object.**, vuông góc với **Error! Not a valid embedded object.**

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp chóp **Error! Not a valid embedded object.**, **Error! Not a valid embedded object.** suy ra **Error! Not a valid embedded object.** là hình chữ nhật

Ta tính được: **Error! Not a valid embedded object.**; **Error! Not a valid embedded object.**; **Error! Not a valid embedded object.**

Đặt **Error! Not a valid embedded object.** ta có

Error! Not a valid embedded object..

Mà **Error! Not a valid embedded object.** nên **Error! Not a valid embedded object.** suy ra **Error! Not a valid embedded object.**. Vậy **Error! Not a valid embedded object.**.

Câu 35: Chọn C

Hình chóp này có mặt bên vuông góc với mặt đáy. Nên ta có công thức tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp **Error! Not a valid embedded object.** là: **Error! Not a valid embedded object.**, với **Error! Not a valid embedded object.** là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp **Error! Not a valid embedded object.**,**Error! Not a valid embedded object.** là bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp **Error! Not a valid embedded object.**, **Error! Not a valid embedded object.** là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác **Error! Not a valid embedded object.**.

Ta có: Do **Error! Not a valid embedded object.** và **Error! Not a valid embedded object.**. nên **Error! Not a valid embedded object.**.

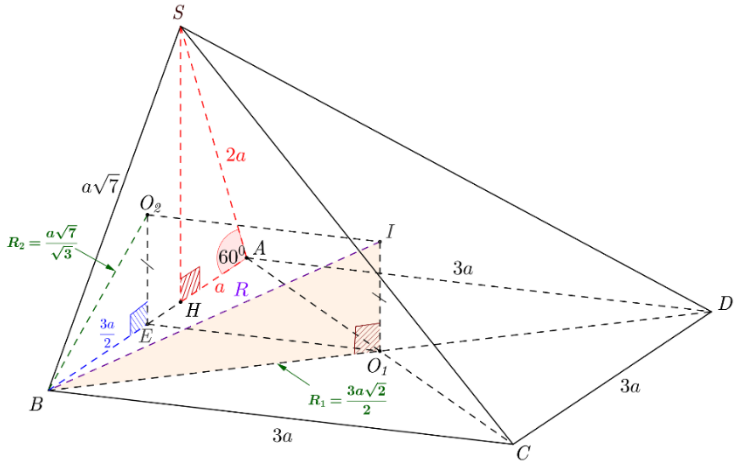
Trong **Error! Not a valid embedded object.** vuông tại **Error! Not a valid embedded object.** ta có **Error! Not a valid embedded object.**.

Error! Not a valid embedded object.

Error! Not a valid embedded object.,

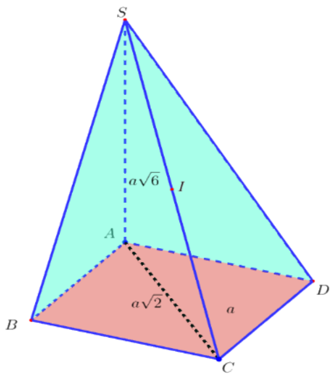
Error! Not a valid embedded object.

Vậy **Error! Not a valid embedded object.**



Diện tích mặt cầu ngoại tiếp là: **Error! Not a valid embedded object.**.

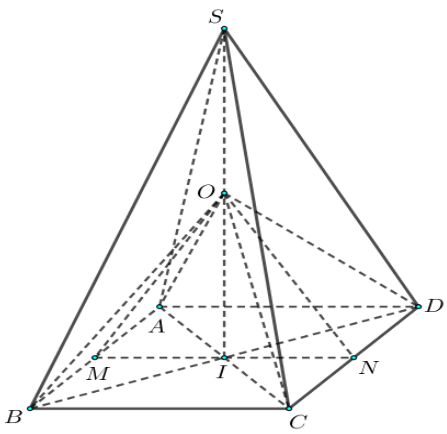
Câu 36: Chọn B



Dễ thấy các góc **Error! Not a valid embedded object.**, **Error! Not a valid embedded object.**, **Error! Not a valid embedded object.** đều bằng **Error! Not a valid embedded object.**nên mặt cầu ngoại tiếp khối chóp **Error! Not a valid embedded object.**có tâm là trung điểm **Error! Not a valid embedded object.** của **Error! Not a valid embedded object.** và có bán kính **Error! Not a valid embedded object.** nên diện tích của mặt cầu là:

Error! Not a valid embedded object..

Câu 37: Chọn B



Gọi **Error! Not a valid embedded object.** là tâm hình vuông **Error! Not a valid embedded object.**. Vì **Error! Not a valid embedded object.** là hình chóp tứ giác đều nên **Error! Not a valid embedded object.** là giao điểm của **Error! Not a valid embedded object.** và mặt phẳng trung trực cạnh bên **Error! Not a valid embedded object.**.

Khi đó **Error! Not a valid embedded object.** đi qua **Error! Not a valid embedded object.** và song song với **Error! Not a valid embedded object.**, **Error! Not a valid embedded object.**.

Gọi **Error! Not a valid embedded object.**, **Error! Not a valid embedded object.** lần lượt là trung điểm của **Error! Not a valid embedded object.**, **Error! Not a valid embedded object.**.

Ta có **Error! Not a valid embedded object.**. Suy ra **Error! Not a valid embedded object.**.

Mà: **Error! Not a valid embedded object.**

Xét hình vuông **Error! Not a valid embedded object.** có cạnh bằng **Error! Not a valid embedded object.Error! Not a valid embedded object.**bán kính đáy hình vuông **Error! Not a valid embedded object.** là **Error! Not a valid embedded object.**.

Xét tam giác vuông SAI, ta có $SA=\sqrt{AI^2+SI^2}=\sqrt{1+8}=3$.

Do đó cạnh bên hình chóp bằng 3.

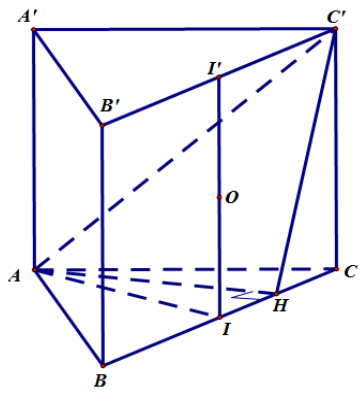
Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là: $R=\dfrac{SA^2}{2.SI}=\dfrac{9}{4\sqrt{2}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{8}$.

Khi đó $OM=ON=\sqrt{R^2-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{162}{64}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{130}}{8}$, $MN=BC=\sqrt{2}$.

Từ đó suy ra $\cos MON=\dfrac{OM^2+ON^2-MN^2}{2.OM.ON}=\dfrac{2.\dfrac{130}{64}-2}{2.\dfrac{130}{64}}=\dfrac{33}{65}$.

Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng (OAB) và **Error! Not a valid embedded object.** bằng **Error! Not a valid embedded object.**.

Câu 38: Chọn B



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC $\Rightarrow AH\perp(BCC'B')$.

$\Rightarrow (AC',(BCC'B'))=HC'A=30°$.

ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a\sqrt{3}$, $BC=2a$ suy ra $AC=a$.

Ta có: $AH=\dfrac{AB.AC}{BC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AC'=2AH=a\sqrt{3}\Rightarrow AA'==\sqrt{AC'^2-AC^2}=a\sqrt{2}$.

Gọi I, I' lần lượt là trung điểm BC, $B'C'$. Dễ thấy I, .**Error! Not a valid embedded object.**. lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, $\Delta A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho.

Bán kính mặt cầu là : $R = OB = \sqrt{\left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

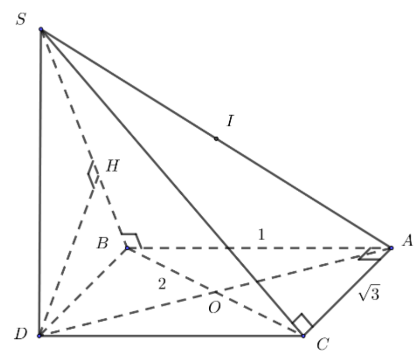
Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đã cho bằng: $S = 4\pi R^2 = 6\pi a^2$.

Câu 39: Chọn D

Cách 1: Vì $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$ suy ra trung điểm I của cạnh SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với bán kính $R = \frac{SA}{2}$.

Thể tích khối cầu là $V = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{5}$.

Gọi O là trung điểm BC, điểm D đối xứng với A qua O nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật.



Dễ thấy $CD \perp SB$, $CD \perp DB \Rightarrow CD \perp SD\ (1)$.

$SC \perp DB$, $CD \perp DB \Rightarrow DB \perp SD\ (2)$.

Từ

$\Rightarrow SD \perp (ABDC) \Rightarrow SD = \sqrt{SA^2 - AD^2} = \sqrt{5-4} = 1$.

Gọi H là chân đường vuông góc của D lên cạnh SB.

$d(C,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DH$.

Thật vậy $AB \perp BD$; $AB \perp SD \Rightarrow AB \perp (SDB)$

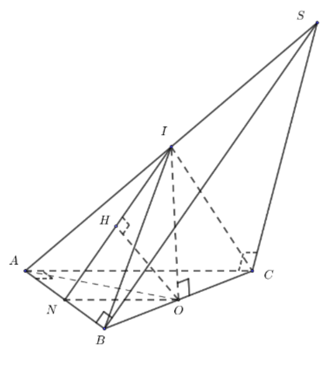
$\Rightarrow AB \perp DH$; $DH \perp SB \Rightarrow DH \perp (SAB)$.

$\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{SD^2} + \frac{1}{DB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{DH^2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow DH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm.

Cách 2: Vì $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90°$ suy ra trung điểm I của cạnh SA là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ với bán kính $R = \frac{SA}{2}$.

Thể tích khối cầu là $V = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} \Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{5}$.



Gọi O là trung điểm BC, vì ΔBIC cân nên $OI \perp BC$; $OI = \sqrt{IC^2 - OC^2} = \frac{1}{2}$.

Mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta ABC \Rightarrow OI \perp (ABC) \Rightarrow d(C,(SAB)) = 2d(O,(ABI))$.

Gọi N là trung điểm AB nên $ON \perp AB$, $OI \perp AB \Rightarrow AB \perp (ONI)$.

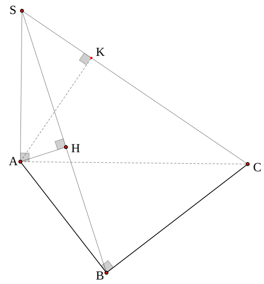
$\Rightarrow (ABI) \perp (ONI)$ theo giao tuyến IN.

Kẻ $OH \perp IN \Rightarrow OH \perp (ABI) \Rightarrow d(C,(SAB)) = 2d(O,(ABI)) = 2OH$.

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{3}}{2}$cm.

Câu 40: Chọn A



Ta có: $SA \perp BC$ (Vì $SA \perp (ABC)$) và $AB \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp (SAB)$

Ta lại có: $AH \subset (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$.

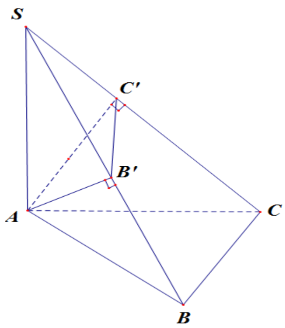
Và $AH \perp SB$.

Từ và suy ra $AH \perp (SBC)$. Khi đó ΔAHC vuông tại H.

Lại có ΔAKC vuông tại K và ΔABC vuông tại B.

Suy ra B, H, K đều nhìn AC dưới góc vuông. Vậy bốn điểm A, B, H, K đều thuộc mặt cầu đường kính AC. Trong tam giác vuông ABC có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 4a \Rightarrow R = \frac{AC}{2} = 2a$.

Câu 41: Chọn D



Tam giác ABC có $AB = a, AC = a\sqrt{2}, BAC = 45^0 \Rightarrow BC = a$ suy ra tam giác ABC là tam giác vuông cân tại B. Vậy điểm B nhìn AC dưới một góc vuông.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB' \\ AB' \perp SB \\ SB \cap BC = B \\ SB \subset (BCC'B'), BC \subset (BCC'B') \end{array}\right\} \Rightarrow AB' \perp (BCC'B') \Rightarrow AB' \perp B'C.$$

Suy ra B' nhìn AC dưới một góc vuông.

Do $AC' \perp SC$ nên C' nhìn AC dưới một góc vuông.

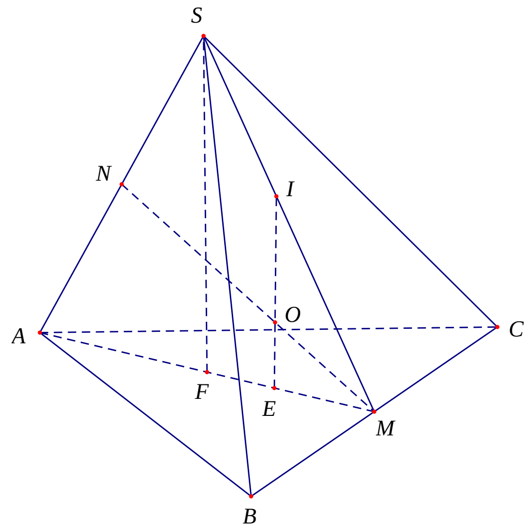
Từ,, và suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ là mặt cầu đường kính AC.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ là: $R = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra thể tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCC'B'$ là: $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 42: Chọn D

Cách 1:



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

Ta có: ΔABC và ΔSBC là các tam giác đều cạnh $a \Rightarrow AM=SM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow \Delta SAM$ là tam giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi F là trung điểm của $AM \Rightarrow SF\perp AM$ (1). Mặt khác ΔABC đều $\Rightarrow AM\perp BC$.

ΔSBC đều $\Rightarrow SM\perp BC \Rightarrow BC\perp(SAM)\Rightarrow BC\perp SF$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SF\perp(ABC)$.

Gọi E là trọng tâm ΔABC, ΔABC đều $\Rightarrow E$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Qua E kẻ đường thẳng (d) vuông góc với $mp(ABC)$

$\Rightarrow (d)$ là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Vì $SF\perp(ABC)\Rightarrow (d)//SF$.

Mặt khác ΔSAM đều nên đường thẳng MN là đường trung trực đoạn SA.

Trong $mp(SAM)$, gọi $O=(d)\cap MN$; $O\in(d)\Rightarrow OA=OB=OC$.

$O\in MN\Rightarrow OS=OA$.

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$, bán kính $R=OA=\sqrt{OE^2+EA^2}$.

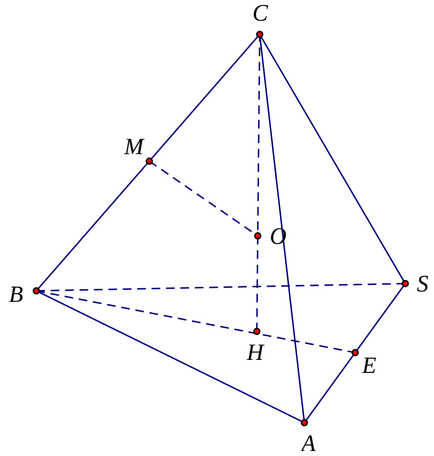
Trong ΔABC: $AE=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $EM=\frac{1}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

ΔSAM đều $\Rightarrow MN$ là đường phân giác trong góc $SMA \Rightarrow OME=30^\circ$.

Xét ΔOME vuông tại E: $\tan 30^\circ=\frac{OE}{EM}\Rightarrow OE=\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{a}{6}$.

Vậy $R=\sqrt{OE^2+EA^2}=\sqrt{\frac{a^2}{36}+\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Cách 2:



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB, E là trung điểm của SA.
ΔSAB cân tại B nên $H \in BE$. Vì $CA = CB = CS = a$ nên $CH \perp (SAB)$.
$\Rightarrow$ Đường thẳng CH là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔSAB.
Gọi M là trung điểm của CB, qua M dựng đường thẳng (d) vuông góc với BC.
$(d) \cap CH = O$; $O \in (d) \Rightarrow OB = OC$.
+ $O \in CH \Rightarrow OS = OA = OB$.
Suy ra O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SABC$, bán kính $R = OC$.

Ta có $\Delta CMO \sim \Delta CHB \Rightarrow \dfrac{CM}{CH} = \dfrac{CO}{CB} \Rightarrow CO = \dfrac{CM.CB}{CH} = \dfrac{CB^2}{2.CH}$.

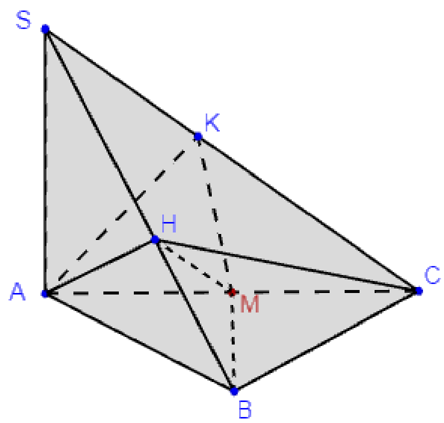
Xét ΔSBE ta có: $BE = \sqrt{SB^2 - SE^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{3a^2}{16}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{4}$.

Ta có: $S_{\Delta SAB} = \dfrac{1}{2}BE.SA = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{13}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{39}}{16}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB là: $BH = \dfrac{SA.SB.AB}{4.S_{\Delta SAB}} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}}{4.\dfrac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \dfrac{2a}{\sqrt{13}}$.

Xét ΔCHB ta có: $CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{4a^2}{13}} = \dfrac{3a}{\sqrt{13}}$.

Vậy $R = CO = \dfrac{CB^2}{2.CH} = \dfrac{a^2}{2.\dfrac{3a}{\sqrt{13}}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.



Câu 43: Chọn D

Gọi M là trung điểm BC.

ΔABC vuông cân tại B $\Rightarrow MB = MA = MC = \dfrac{1}{2}AC$.

ΔKAC vuông tại K $\Rightarrow MK = \dfrac{1}{2}AC$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \\ AH \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC.$$

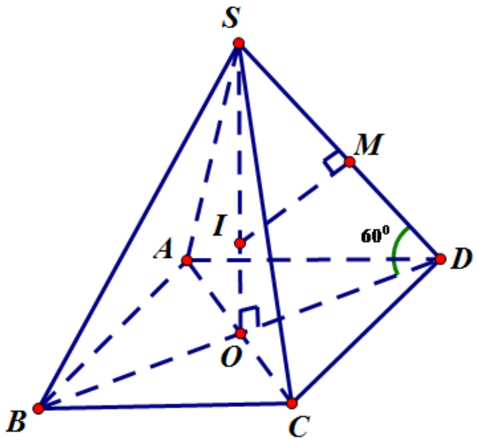
$\Rightarrow \Delta AHC$ vuông tại H $\Rightarrow MH = \dfrac{1}{2}AC$.

Từ $(1) \to (3)$ $\Rightarrow$ M là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $AHKCB$.

Bán kính khối cầu cần tìm: $R = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối cầu: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{8\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 44: Chọn D



Gọi O là tâm đáy, do các cạnh bên cùng tạo với đáy góc $60°$ nên $SO \perp (ABCD)$.

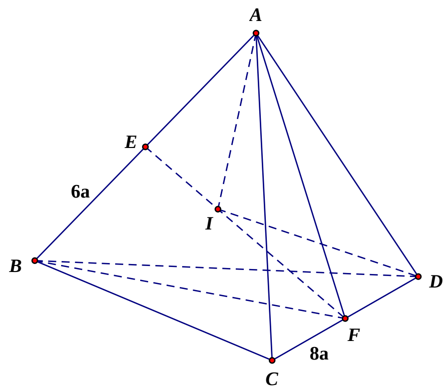
Mặt phẳng trung trực của cạnh SD đi qua trung điểm M của SD và cắt SO tại I.

Ta có I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính mặt cầu $R = IS$.

$BD = 5 \Rightarrow OD = \dfrac{5}{2} \Rightarrow SD = \dfrac{OD}{\cos 60°} = 5 \Rightarrow SM = \dfrac{5}{2}$; $IS = \dfrac{SM}{\sin 60°} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} = R$.

Thể tích khối cầu tương ứng ngoại tiếp hình chóp bằng $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{500\sqrt{3}}{27}\pi$.

Câu 45: Chọn B



Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB, CD. Coi $a = 1$, từ giả thiết ta có $AC = AD = BC = BD = \sqrt{74}$ nên $AF \perp CD, BF \perp CD \Rightarrow (ABF) \perp CD \Rightarrow EF \perp CD.$ Chứng minh tương tự $EF \perp AB.$

Khi đó EF là đường trung trực của CD và $AB.$ Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ ta có $IA = IB = IC = ID = R$ nên I thuộc đoạn thẳng EF.

$EF = \sqrt{AF^2 - AE^2} = \sqrt{AD^2 - DF^2 - AE^2} = \sqrt{74 - 16 - 9} = 7.$

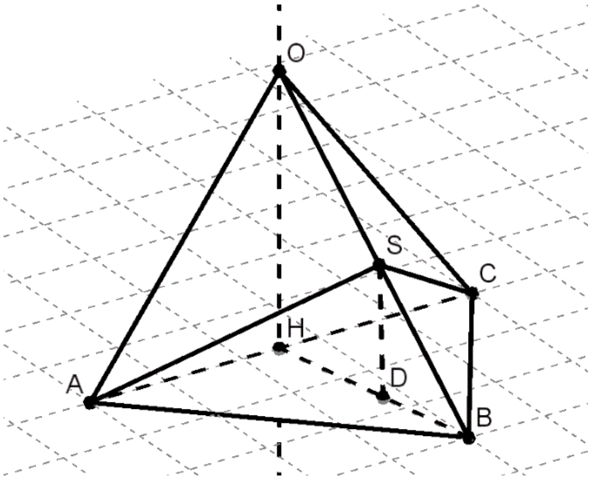
Đặt $EI = x \Rightarrow FI = 7 - x$; $\begin{cases} IA = \sqrt{EA^2 + EI^2} = \sqrt{x^2 + 9} \\ ID = \sqrt{FI^2 + FD^2} = \sqrt{16 + (7-x)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \end{cases}$.

Ta có $IA = ID \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} = \sqrt{x^2 - 14x + 65} \Leftrightarrow 9 = -14x + 65 \Leftrightarrow x = 4$

Khi đó $IA = \sqrt{x^2+9} = 5$. Do đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R = 5a$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $S = 4\pi R^2 = 4\pi.25a^2 = 100\pi a^2$.

Câu 46: Chọn C



Xét ΔAOB đều nên cạnh $AB = a$.

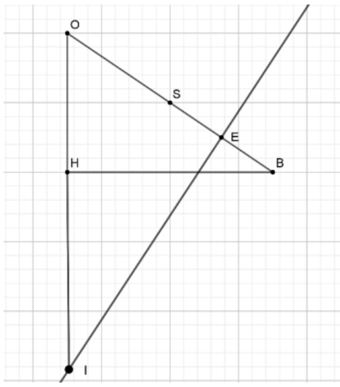
Xét $\triangle BOC$ vuông tại O nên $BC = a\sqrt{2}$.

Xét $\triangle AOC$ có. $AC = \sqrt{AO^2 + CO^2 - 2.AO.CO.\cos 120^0} = a\sqrt{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $AB^2 + BC^2 = AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm H của cạnh AC.

Lại có hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$ nên $OH \perp (ABC)$.

Xét hình chóp $S.ABC$ có OH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy, trong tam giác OHB kẻ trung trực của cạnh SB cắt OH tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp, bán kính $R = IS$.



Xét $\triangle OHB$ có $HOB = 60°$,cạnh $OB = a \Rightarrow OE = \dfrac{3a}{4} \Rightarrow IE = OE.\tan 60° = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Xét $\triangle IES$ vuông tại E: $IS = \sqrt{IE^2 + ES^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{4}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Câu 47: Chọn B

Có $\begin{cases}(P)\cap(Q)=\Delta\\(P)\perp(Q)\\CA\perp\Delta, CA\subset(P)\end{cases}\Rightarrow CA\perp(Q)\Rightarrow CA\perp AD$ nên A nhìn DC dưới một góc vuông.

Có $\begin{cases}(P)\cap(Q)=\Delta\\(P)\perp(Q)\\DB\perp\Delta, DB\subset(Q)\end{cases}\Rightarrow DB\perp(P)\Rightarrow DB\perp BC$ nên B nhìn DC dưới một góc vuông.

Do đó, đường kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là DC.

Có $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$; $DC=\sqrt{BC^2+DB^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

Vậy, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là: $R=\dfrac{1}{2}DC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48: Chọn B

Mặt phẳng (α) là mặt phẳng $(AMNP)$.

Do $\begin{cases}SC\perp(\alpha)\\AM, AN, AP\subset(\alpha)\end{cases}\Rightarrow AM\perp SC, AN\perp SC, AP\perp SC.$

Có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\\AB, SA\subset(SAB)\\AB\cap SA=A\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AM$.

Từ đó ta có $\begin{cases}AM\perp BC\\AM\perp SC\\BC, SC\subset(SBC)\\BC\cap SC=C\end{cases}\Rightarrow AM\perp(SBC)\Rightarrow AM\perp MC$.

Tương tự ta có $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\\AD, SA\subset(SAD)\\AD\cap SA=A\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AP$.

Khi đó $\begin{cases}AP\perp CD\\AP\perp SC\\CD, SC\subset(SCD)\\CD\cap SC=C\end{cases}\Rightarrow AP\perp(SCD)\Rightarrow AP\perp PC$.

Nhận xét: $\Delta AMC, \Delta ANC, \Delta APC$ là những tam giác vuông có cạnh huyền AC.

Nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $CMNP$ là trung điểm O của AC.

$\Rightarrow R=OA=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{AB\sqrt{2}}{2}=2$. Vậy $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32\pi}{3}$.

Câu 49: Chọn B.

Trong mp (ABC), gọi Δ và Δ' lần lượt là trung trực của các đoạn thẳng AB và AC.

Gọi I là giao điểm của Δ và Δ'.

Vì $\begin{cases}\Delta \perp AB \\ \Delta \perp SA\end{cases}$ nên $\Delta \perp (AMB)$, mà tam giác AMB vuông tại M suy ra Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB.

Có $I \in \Delta \Rightarrow IA = IB = IM$

Chứng minh tương tự ta được Δ' là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ANC.

Do đó $IA = IN = IC$

Từ và suy ra $IA = IB = IM = IN = IC \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ với bán kính $R = IA$.

Mặt khác trong tam giác ABC, I là giao điểm của hai đường trung trực nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = IA = \frac{BC}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC}}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 150^0} = \sqrt{7}a.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

Cách 2.

Dựng AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Khi đó $ABD = ACD = 90^0 \Rightarrow AB \perp BD; AC \perp CD$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAB)$, $AM \subset (SAB)$ nên $BD \perp AM$.

Mặt khác $AM \perp MB \Rightarrow AM \perp (MBD) \Rightarrow AM \perp MD$ hay $AMD = 90^0$.

Chứng minh tương tự: $AND = 90^0$.

Hình chóp $A.BCNM$ có các đỉnh cùng nhìn đoạn AD dưới một góc vuông nên khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ có đường kính là AD.

Vì vậy, bán kính của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ là bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

$$R = \frac{BC}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC}}{2\sin BAC} = \frac{\sqrt{7}}{2\sin 150^0} = \sqrt{7}a.$$

Vậy thể tích khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

Câu 50: Chọn C

Gọi H là trung điểm cạnh AB, ta có: $CH \perp AB$.

Ta có: $d\left(S,\ (ABC)\right) = 2d\left(M,\ (ABC)\right) \Rightarrow V_{SABC} = 2V_{MABC}$.

Mà $V_{MABC} = V_{CMAB} = \frac{1}{3}S_{\Delta MAB}.d\left(C,\ (MAB)\right) = \frac{1}{3}.16\sqrt{3}.d\left(C,\ (MAB)\right) \le \frac{1}{3}.16\sqrt{3}.CH$.

Do đó, $V_{S.ABC}$ lớn nhất khi và chỉ khi $d\left(C;(MAB)\right) = CH$ hay $CH \perp (MAB)$.

Gọi J, O lần lượt là tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC.

Dựng hai trục của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC cắt nhau tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại đi qua 4 điểm A,B,C,M và bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm A,B,C,M là $R=\sqrt{OC^2+OI^2}=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2+JH^2}$.

Do $S_{\Delta MAB}=16\sqrt{3}, AB=8\Rightarrow d\left(M,AB\right)=4\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ta có $H\left(0;0;0\right), A\left(-4;0\right), B\left(4;0\right), M\left(a;4\sqrt{3}\right)$.

Đường trung trực của đoạn thẳng AM đi qua điểm $N\left(\frac{a-4}{2};2\sqrt{3}\right)$ và có một véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AM}=\left(a+4;4\sqrt{3}\right)$ nên có phương trình là $\left(a+4\right)\left(x-\frac{a-4}{2}\right)+4\sqrt{3}\left(y-2\sqrt{3}\right)=0$

$\Rightarrow J\left(0;\frac{a^2+32}{8\sqrt{3}}\right)\Rightarrow JH=\frac{a^2+32}{8\sqrt{3}}\ge\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Do đó $R_{\min}=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$.

Câu 51: Chọn A

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(2017;2018;2019\right)$ và bán kính $R=\sqrt{2020}$.

Gọi S là đỉnh hình nón.

Gọi H là tâm đường tròn đáy của hình nón và AB là một đường kính của đáy.

Trường hợp 1: Xét trường hợp $SH\le R$.

Khi đó thể tích của hình nón đạt GTLN khi $SH=R$. Lúc đó $V=\frac{\pi\left(\sqrt{2020}\right)^3}{3}$.

Trường hợp 2: $\left(SH>R\right)I$ nằm trong tam giác SAB như hình vẽ trên.

Đặt $IH=x\left(0<x<R\right)$. Ta có $V=\frac{1}{3}\pi HA^2.SH=\frac{1}{3}\pi\left(R^2-x^2\right)\left(R+x\right)$

$=\frac{\pi}{6}\left(2R-2x\right)\left(R+x\right)\left(R+x\right)\le\frac{\pi}{6}\left(\frac{4R}{3}\right)^3=\frac{32\pi\left(\sqrt{2020}\right)^3}{81}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=\frac{R}{3}=\frac{\sqrt{2020}}{3}$.

Câu 52: Chọn B

Gọi I, J là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác ABCD và tam giác SAB**.** M là trung điểm của AB và O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

Ta có: $JM\perp AB$ và $IM\perp AB$ và $mp\left(SAB\right)\perp mp\left(ABCD\right)$ nên $IM\perp JM$, ngoài ra O là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp nên $OI\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow OI\perp IM$; $OJ\perp\left(SAB\right)\Rightarrow OJ\perp JM$.

Do đó O, J, M, I đồng phẳng và tứ giác $OJMI$ là hình chữ nhật.

Gọi R, R_b lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối chóp và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB.

Ta có: $R=SO=\sqrt{SJ^2+OJ^2}=\sqrt{R_b^2+IM^2}=\sqrt{R_b^2+IA^2-AM^2}=\sqrt{R_b^2+IA^2-\frac{AB^2}{4}}$

Áp dụng định lý Pytago: $IA^2 = \frac{BD^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{4} = \frac{a^2 + 3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow IA = a$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác SAB: $R_b = \frac{AB}{2\sin ASB} = \frac{a}{2.\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Do đó: $R = \sqrt{\frac{a^2}{3} + a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{13}{12}a^2} \Rightarrow S = 4\pi R^2 = \frac{13}{3}\pi a^2$.

Nhận xét:

Xét hình chóp đỉnh S, có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy, mặt phẳng đáy nội tiếp trong đường tròn bán kính R_d, bán kính mặt cầu ngoại tiếp tam giác SAB là R_b. Khi đó hình chóp này nội tiếp trong 1 mặt cầu có bán kính $R = \sqrt{R_d^2 + R_b^2 - \frac{AB^2}{4}}$

Câu 53: Chọn D

Ta ghép hình chóp $S.ABC$ vào hình hộp đứng $SRQP.DABC$. Khi đó tâm I của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp đứng chính là tâm của hình chóp $S.ABC$.

Từ giả thiết ABC là tam giác vuông cân tại B nên đáy của hình hộp đứng là hình vuông. $d\left(A,(SBC)\right) = 2d\left(O,(SBC)\right) = 2a\sqrt{3} \Rightarrow OH = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông OIK có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OK^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow OI = 3a$.

Suy ra bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $R = IB = \sqrt{OI^2 + OB^2}$.

$\Leftrightarrow OI = \sqrt{9a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}3a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{18}$.

Thể tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{18}\right)^3 = 24\sqrt{18}\pi a^3$.

Câu 54: Chọn A

Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$; I là trung điểm của $AB \Rightarrow HI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

Tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $SH = \sqrt{SI^2 - HI^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

$AC = 2AH = 2\sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$

Gọi r_b, r_d lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác SAC, ABC

Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

$S_{\Delta SAC} = \frac{1}{2}SH.AC = \frac{a^2\sqrt{35}}{12} \Rightarrow r_b = \frac{SA.SC.AC}{4S_{\Delta SAC}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

Theo công thức Hê-rông: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{6}}{6} \Rightarrow r_d = \frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

$R = \sqrt{r_b^2 + r_d^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ Vậy: $S_{mc} = 4\pi\left(\frac{a\sqrt{21}}{7}\right)^2 = \frac{12\pi a^2}{7}$

DẠNG 5 Khối tròn xoay trong đề thi của BGD&ĐT

Câu 1: Cắt hình nón $\left(N\right)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $30°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của $\left(N\right)$ bằng

A. $\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 2: Cắt hình nón $\left(N\right)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30^0, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a.$ Diện tích xung quanh của nón bằng

A. $4\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $8\sqrt{7}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 3: Cắt hình nón $\left(\aleph\right)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $60°$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a.$ Diện tích xung quanh của $\left(\aleph\right)$ bằng

A. $\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{7}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 4: Cắt hình nón $\left(N\right)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60^0 ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của $\left(N\right)$ bằng :

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 5: Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Câu 6: Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = a$ và $ACB = 30^0$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $V = \sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $V = \pi a^3$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

A. $V = \frac{\pi a^3}{2}$ **B.** $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$ **C.** $V = \frac{\pi a^3}{6}$ **D.** $V = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$

Câu 8: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$, Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Câu 9: Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\pi\sqrt{3}$. **B.** $6\pi\sqrt{39}$. **C.** $3\pi\sqrt{39}$. **D.** $12\pi\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{10}\pi$. **B.** $6\sqrt{34}\pi$. **C.** $3\sqrt{10}\pi$. **D.** $3\sqrt{34}\pi$.

Câu 11: Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $24\sqrt{2}\pi$. **B.** $8\sqrt{2}\pi$. **C.** $12\sqrt{2}\pi$. **D.** $16\sqrt{2}\pi$.

Câu 12: Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

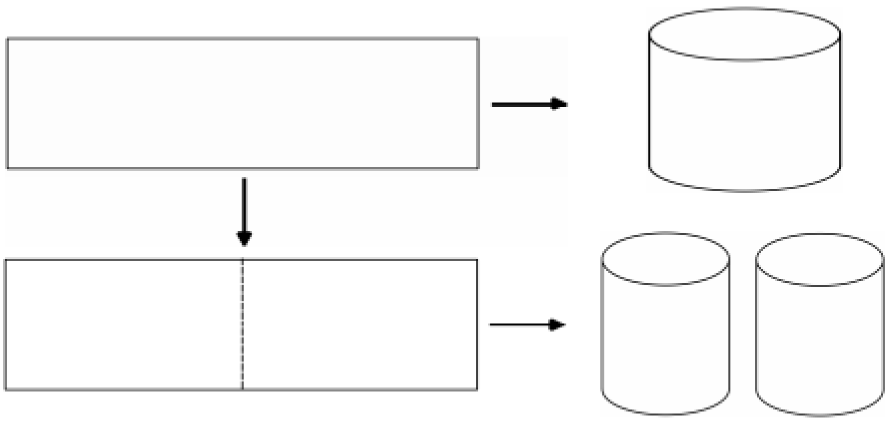
A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Câu 13: Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm \times 240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

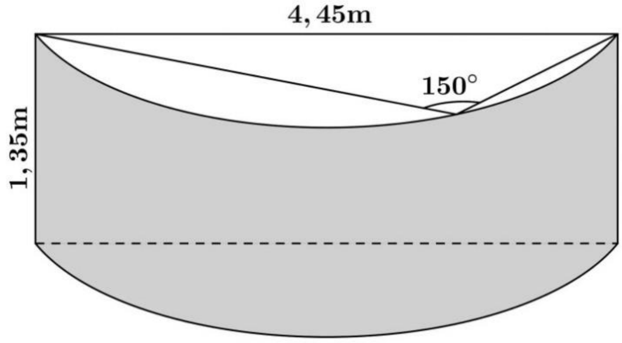


A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2} = 1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2} = 2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2} = 4$

Câu 14: Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h = a$ và bán kính đáy $r = 2a$. Mặt phẳng P đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB = 2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến P.

A. $d = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ **B.** $d = a$ **C.** $d = \frac{\sqrt{5}a}{5}$ **D.** $d = \frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 15: Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng tấm cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên.



Biết giá tiền của $1\,m^2$ kính như trên là 1.500.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?

A. 23.591.000 đồng. **B.** 36.173.000 đồng. **C.** 9.437.000 đồng. **D.** 4.718.000 đồng.

Câu 16: Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\ mm$ và chiều cao $200\ mm$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\ mm$. Giã định $1\ m^3$ gỗ có giá a, $1\ m^3$ than chì có giá $7a$. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $84,5.a$ **B.** $9,07.a$ **C.** $8,45.a$ **D.** $90,07.a$

Câu 17: Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a. $1m^3$ than chì có giá $9a$. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $97,03a$ đồng. **B.** $10,33a$ đồng. **C.** $9,7a$ đồng. **D.** $103,3a$ đồng

Câu 18: Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\ (mm)$ và chiều cao bằng $200\ (mm)$. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính $1\ (mm)$. Giả định $1\ m^3$ gỗ có giá a triệu đồng, $1\ m^3$ than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?.

A. $84,5.a$ đồng. **B.** $78,2.a$ đồng. **C.** $8,45.a$ đồng. **D.** $7,82.a$ đồng

Câu 19: Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\,$mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy 1 mm. Giả định $1\ m^3$ gỗ có giá a, $1\ m^3$ than chì có giá $8a$. Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9,7.a$ **B.** $97,03.a$ **C.** $90,7.a$ **D.** $9,07.a$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60^o. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{43\pi a^2}{9}$. **D.** $21\pi a^2$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. $52\pi a^2$. **B.** $\frac{172\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{76\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{76\pi a^2}{3}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60°. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\frac{172\pi a^2}{9}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \frac{5a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a,$ cạnh bên bằng $5a.$ Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD.$

A. $R = \sqrt{3}a$. **B.** $R = \sqrt{2}a$. **C.** $R = \frac{25a}{8}$. **D.** $R = 2a$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V = \frac{5\pi}{3}$

Câu 27: nên $\frac{TS}{AS} = \frac{SH}{SK}$.

Suy ra $TS = \frac{AS.SH}{SK} = \frac{2a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{4a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 28: Cho hình nón N có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi T là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của N. Bán kính của T bằng

A. $\frac{2\sqrt{6}a}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{15}a}{15}$. **C.** $\frac{8\sqrt{15}a}{15}$. **D.** $\sqrt{15}a$.

Câu 29: Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$.Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N).Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{2\sqrt{10}}{3}a$. **B.** $\frac{16\sqrt{13}}{13}a$ **C.** $\frac{8\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\sqrt{13}a$.

Câu 30: Cho hình nón (N) có đỉnh S. Bán kính đáy bằng $\sqrt{2}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}a}{3}$. **B.** $\sqrt{14}a$. **C.** $\frac{4\sqrt{14}a}{7}$. **D.** $\frac{8\sqrt{14}a}{7}$.

Câu 31: Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

A. $V=\frac{32\pi}{3}$. **B.** $V=16\pi$. **C.** $V=\frac{16\pi}{3}$. **D.** $V=32\pi$.

Câu 32: Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{9}{16}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{16}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$

Câu 33: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V=144$. **B.** $V=576$. **C.** $V=576\sqrt{2}$. **D.** $V=144\sqrt{6}$.

Câu 34: Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h(h>R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h=\sqrt{3}R$ **B.** $h=\sqrt{2}R$ **C.** $h=\frac{4R}{3}$ **D.** $h=\frac{3R}{2}$

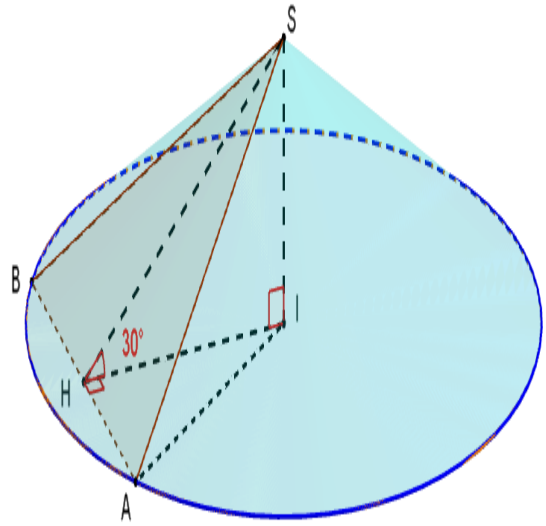
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $30°$, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng

A. $\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



• Ta có: ΔSAB đều cạnh $2a \Rightarrow SH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

• Góc giữa thiết diện và mặt phẳng đáy là $SHI = 30°$.

• Xét ΔSHI vuông tại I ; $HI = SH.\cos 30° = a\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{2}$.

• Xét ΔAHI vuông tại H : $AI = \sqrt{AH^2 + HI^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

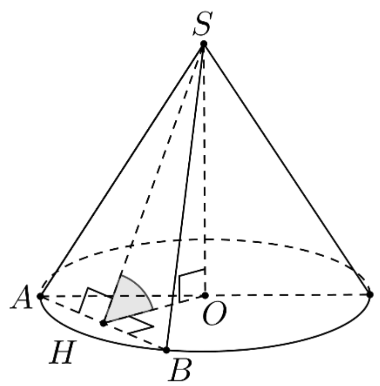
• Vậy: $S_{xq} = \pi r.l = \pi.AI.SA = \pi.\dfrac{a\sqrt{13}}{2}.2a = \sqrt{13}\pi a^2$.

Câu 2: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 30^0, ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của nón bằng

A. $4\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $8\sqrt{7}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm đáy nón, đỉnh nón là S, thiết diện là tam giác đều SAB.

Kẻ $OH \perp AB$, H là trung điểm $AB \Rightarrow SHO = 30^0$.

$\Rightarrow SH = 2a\sqrt{3}, HA = 2a$.

Ta có: $OH = SH.\cos 30^0 = 3a$.

$\Rightarrow R = \sqrt{HO^2 + HA^2} = \sqrt{9a^2 + 4a^2} = a\sqrt{13}$.

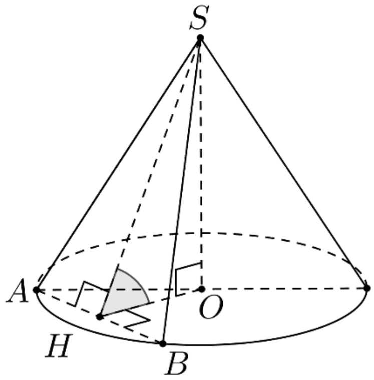
$\Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = \pi a\sqrt{13}.4a = 4\sqrt{13}\pi a^2$..

Câu 3: Cắt hình nón $(\aleph)$ bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng $60°$ ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Diện tích xung quanh của $(\aleph)$ bằng

A. $\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $2\sqrt{7}\pi a^2$. **D.** $2\sqrt{13}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Mặt phẳng (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác đều SAB cạnh $2a \Rightarrow AB = 2a$.

Kẻ $OH \perp AB$ tại $H \Rightarrow AH = a, SH = a\sqrt{3}$.

Góc giữa mặt phẳng (SAB) với mặt đáy bằng $60° \Rightarrow SHO = 60° \Rightarrow SO = SH.\sin 60° = \dfrac{3a}{2}$.

Mà $OH = \dfrac{SO}{\tan 60°} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \sqrt{AH^2 + OH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow SA = \sqrt{h^2 + r^2} = 4a$.

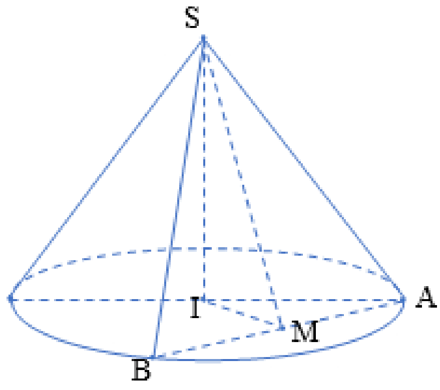
Vậy $S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{a\sqrt{7}}{2}.2a = \sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 4: Cắt hình nón (N) bởi mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng chứa đáy một góc bằng 60^0 ta thu được thiết diện là một tam giác đều cạnh $4a$. Diện tích xung quanh của (N) bằng :

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$. **C.** $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là tâm đáy nón. Ta có thiết diện qua đỉnh là tam giác SBA.

Gọi M là trung điểm của A**B.** Suy ra $SMI = 60^0$.

Do tam giác SAB đều cạnh $4a$ $\Rightarrow SM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SIM vuông tại I ta có $SI = 3a; IM = a\sqrt{3}$.

Xét ΔIMA vuông tại M ta có $IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{3a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{7}$.

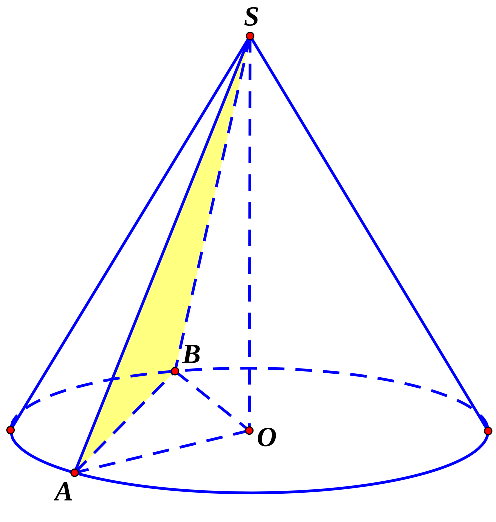
Khi đó $S_{xq} = \pi rl = \pi a\sqrt{7}.4a = 4\sqrt{7}\pi a^2$.

Câu 5: Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết tam giác SAB đều, $S_{\Delta SAB} = 9\sqrt{3}$ và $SO = 2\sqrt{5}$.

$S_{\Delta SAB} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = 6$.

ΔSAB đều $SA = AB = 6$.

Xét ΔSOA vuông tại O, theo định lý Pytago ta có: $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4$.

Thể tích hình nón bằng $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi.OA^2.SO=\frac{1}{3}\pi 4^2.2\sqrt{5}=\frac{32\sqrt{5}}{3}\pi$.

Câu 6: Trong không gian cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=a$ và $ACB=30^0$. Tính thể tích V của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A. $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **B.** $V=\sqrt{3}\pi a^3$. **C.** $V=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$. **D.** $V=\pi a^3$.

Lời giải

Chọn A

Đường cao hình nón là: $AC=\frac{AB}{\tan 30}=a\sqrt{3}$.

Thể tích hình nón: $V=\frac{1}{3}\pi hR^2=\frac{1}{3}\pi.a\sqrt{3}.a^2=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh đều bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối nón đỉnh S và đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác *ABCD*.

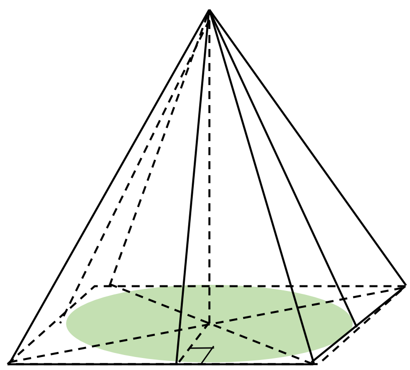
A. $V=\frac{\pi a^3}{2}$ **B.** $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{6}$ **C.** $V=\frac{\pi a^3}{6}$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}\pi a^3}{2}$

Lời giải

Chọn C

$OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}a=a;$

$SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{2a^2-a^2}=a$



Dựng $OH\perp BC \Rightarrow (O)$ là đường tròn tâm O, bán kính $OH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ là đường tròn nội tiếp tứ giác $ABCD$.

$S_{(O)}=\pi OH^2=\frac{\pi a^2}{2}$

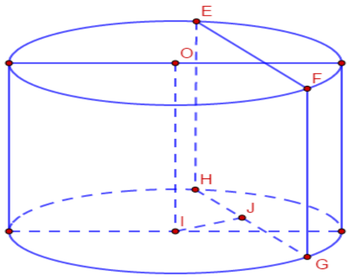
$V_{(N)}=\frac{1}{3}.SO.S_{(O)}=\frac{1}{3}.a.\frac{\pi}{2}a^2=\frac{\pi}{6}a^3$

Câu 8: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6a$, Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $3a$, thiết diện thu được là một hình vuông. Thể tích của khối trụ được giới hạn bởi hình trụ đã cho bằng

A. $216\pi a^3$. **B.** $150\pi a^3$. **C.** $54\pi a^3$. **D.** $108\pi a^3$.

Lời giải

Chọn D



Gọi J là trung điểm GH. Khi đó $IJ \perp GH$ và $IJ = 3a$.

Theo giả thiết, ta có $EFGH$ là hình vuông, có độ dài cạnh bằng $6a \Rightarrow GH = 6a$.

Trong tam giác vuông IJH, ta có $IH = \sqrt{(3a)^2 + (3a)^2} = 3\sqrt{2}a$.

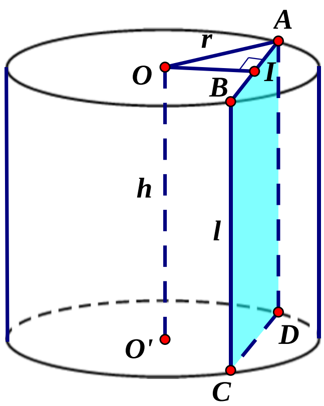
Vậy $V = \pi.IH^2.IO = \pi.18a^2.6a = 108\pi a^3$.

Câu 9: Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\pi\sqrt{3}$. **B.** $6\pi\sqrt{39}$. **C.** $3\pi\sqrt{39}$. **D.** $12\pi\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



* Thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$, gọi I là trung điểm của AB ta có:

$OI \perp (ABCD) \Rightarrow d(OO';(ABCD)) = d(O;(ABCD)) = OI = 1$,

$S_{ABCD} = AB.BC = AB.h = 18 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3} \Rightarrow AI = \sqrt{3} \Rightarrow r = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = 2$

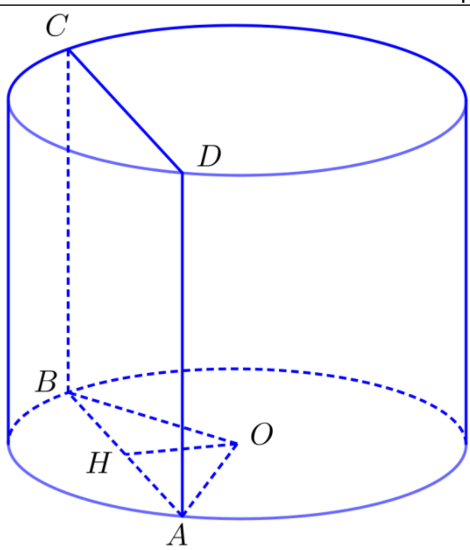
* Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi rl = 12\pi\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{2}$. Cắt hình trụ bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng $12\sqrt{2}$. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{10}\pi$. **B.** $6\sqrt{34}\pi$. **C.** $3\sqrt{10}\pi$. **D.** $3\sqrt{34}\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi thiết diện là $ABCD$ với A, B trên đường tròn đáy tâm O

$\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật có $h = BC = 3\sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow OH \perp AB$ và $OH \perp BC$ nên $OH \perp (ABCD) \Rightarrow OH = d\left(O,(ABCD)\right) = 1$.

Ta có $S_{ABCD} = 12\sqrt{2} \Rightarrow AB.h = 12\sqrt{2} \Rightarrow AB = 4$.

Mà $AH = \dfrac{1}{2}AB = 2$.

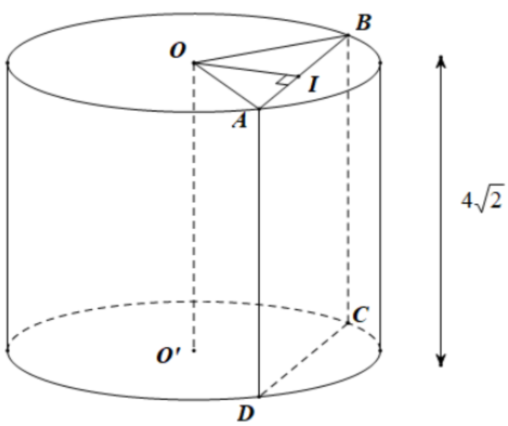
$R = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{5}$ và $l = h = 3\sqrt{2}$.

Vậy $S_{xq} = 2\pi Rl = 6\pi\sqrt{10}$.

Câu 11: Cho hình trụ có chiều cao bằng $4\sqrt{2}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng $\sqrt{2}$, thiết diện thu được có diện tích bằng 16. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $24\sqrt{2}\pi$. **B.** $8\sqrt{2}\pi$. **C.** $12\sqrt{2}\pi$. **D.** $16\sqrt{2}\pi$.

Lời giải



Chọn D

Gọi O, O' lần lượt là tâm hai đáy của hình trụ.

Hình trụ có chiều cao là $h = 4\sqrt{2}$.

Mặt phẳng song song với trục của hình trụ cắt hình trụ theo thiết diện là hình chữ nhật $ABCD$

Ta có: $S_{ABCD} = AD.AB = 16 \Rightarrow AB = \dfrac{16}{AD} = \dfrac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Trong tam giác OAB, từ O kẻ $OI \perp AB$, lại có: $OI \perp AD$ suy ra: $OI \perp (ABCD) \Rightarrow d(OO';(ABCD)) = d(O;(ABCD)) = OI = \sqrt{2}$

Vì tam giác OAB cân tại O nên đường cao OI đồng thời là đường trung tuyến hay I là trung điểm của đoạn thẳng AB

$\Rightarrow AI = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{2}$.

$r = OA = \sqrt{AI^2 + OI^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$.

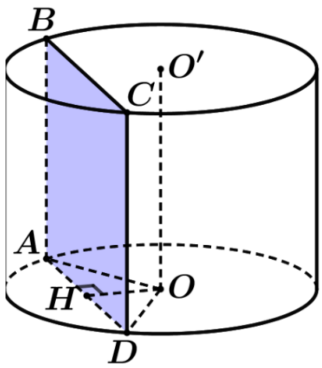
Diện tích xung quanh hình trụ là: $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi 2.4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\pi$.

Câu 12: Cho hình trụ có chiều cao bằng $5\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 30. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $10\sqrt{3}\pi$. **B.** $5\sqrt{39}\pi$. **C.** $20\sqrt{3}\pi$. **D.** $10\sqrt{39}\pi$.

Lời giải

Chọn C



Goi hình trụ có hai đáy là O, O' và bán kính R.

Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục nên thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$ với AB là chiều cao khi đó $AB = CD = 5\sqrt{3}$ suy ra $AD = BC = \dfrac{30}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của AD ta có $OH = 1$ suy ra $R = \sqrt{OH^2 + \dfrac{AD^2}{4}} = \sqrt{1 + \dfrac{(2\sqrt{3})^2}{4}} = 2$.

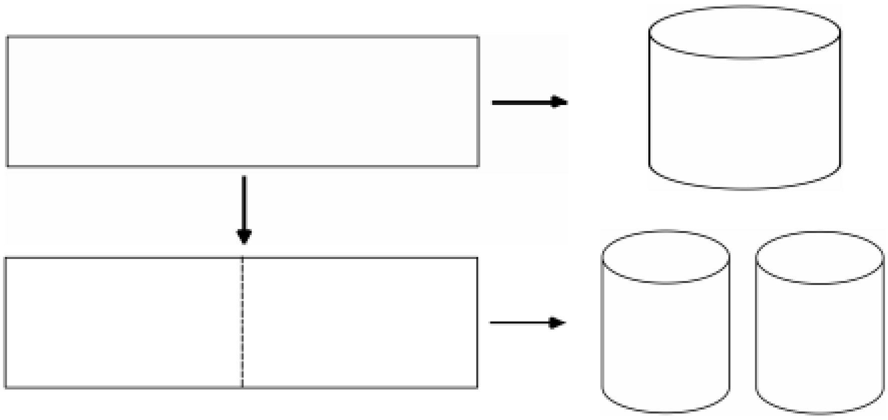
Vậy diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi.2.5\sqrt{3} = 20\sqrt{3}\pi$.

Câu 13: Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước $50cm \times 240cm$, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng $50cm$, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):.

• Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.

• Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.



A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=1$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=2$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=4$

Lời giải

Chọn C

Ban đầu bán kính đáy là R, sau khi cắt tấm tôn bán kính đáy là $\frac{R}{2}$

Đường cao của các khối trụ là không đổi

Ta có $V_1=h\pi R^2$, $V_2=2.h\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2=h\pi\frac{R^2}{2}$. Vậy tỉ số $\frac{V_1}{V_2}=2$.

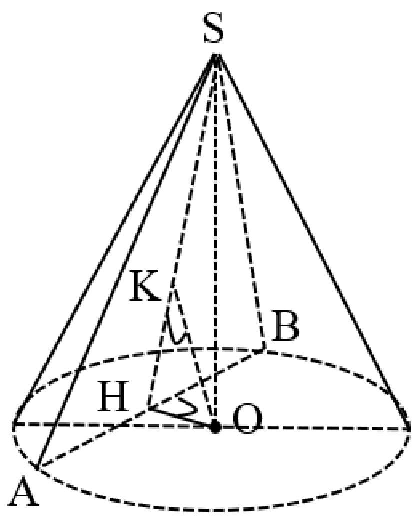
Câu 14: Cho hình nón đỉnh S có chiều cao $h=a$ và bán kính đáy $r=2a$. Mặt phẳng P đi qua S cắt đường tròn đáy tại A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}a$. Tính khoảng cách d từ tâm của đường tròn đáy đến P.

A. $d=\frac{\sqrt{3}a}{2}$ **B.** $d=a$ **C.** $d=\frac{\sqrt{5}a}{5}$ **D.** $d=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$SO=h=a;\ OA=OB=r=2a;\ AB=2\sqrt{3}a$



Dựng $OH\perp AB\Rightarrow HA=HB.$

Mà $AB\perp SO\Rightarrow AB\perp(SOH)\Rightarrow(SAB)\perp(SOH)$

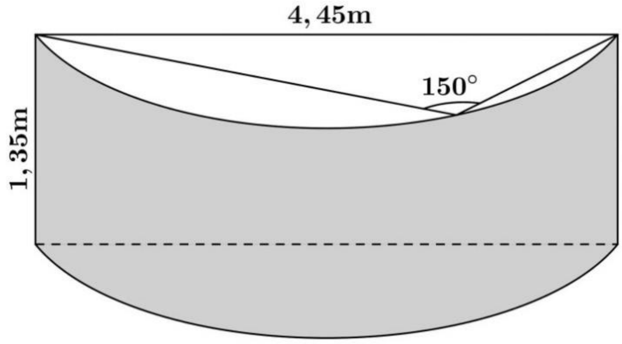
Mà $(SAB)\cap(SOH)=SH$. Dựng $OK\perp SH\Rightarrow OK\perp(SAB)$

$\Rightarrow d\left(O;\left(SAB\right)\right)=OK$

$\Delta BHO\perp$ tại H: $HO=\sqrt{OB^2-HB^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$

$\Delta SHO\perp$ tại O: $\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{2}{a^2}\Rightarrow OK=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15: Ông Bình làm lan can ban công ngôi nhà của mình bằng tấm cường lực. Tấm kính đó là một phần của mặt xung quanh của một hình trụ như hình bên.

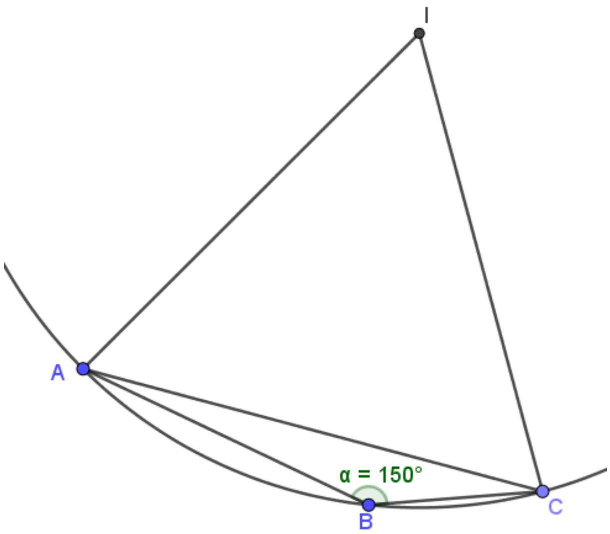


Biết giá tiền của 1 m^2 kính như trên là 1.500.000 đồng. Hỏi số tiền (làm tròn đến hàng nghìn) mà ông Bình mua tấm kính trên là bao nhiêu?

A. 23.591.000 đồng. **B.** 36.173.000 đồng. **C.** 9.437.000 đồng. **D.** 4.718.000 đồng.

Lời giải

Chọn C



Giả sử mặt đáy trên của hình trụ là đường tròn tâm I, bán kính R đi qua ba điểm A, B, C như hình vẽ.

Khi đó $2R=\dfrac{AC}{\sin ABC}=\dfrac{4,45}{\sin 150^\circ}\Rightarrow R=4,45$ m.

Thế nên ΔIAC là tam giác đều.

Do đó độ dài dây cung AC là $l=\alpha R=\dfrac{\pi}{3}.R=\dfrac{89}{60}\pi$.

Tấm kính khi trải phẳng ra là một hình chữ nhật có chiều rộng là $1,35$ m và chiều dài $\dfrac{89}{60}\pi$ m.

Thế nên số tiền ông Bình mua tấm kính trên là $1500000.1,35.\dfrac{89}{60}\pi\simeq 9.437.000$ đồng.

Câu 16: Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\ mm$ và chiều cao $200\ mm$.

Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 mm . Giã định 1 m^3 gỗ có giá a, 1 m^3 than chì có giá $7a$. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $84,5.a$ **B.** $9,07.a$ **C.** $8,45.a$ **D.** $90,07.a$

Lời giải

Chọn C

Thể tích phần lõi than chì: $V_1 = \pi.0,001^2.0,2 = 2\pi.10^{-7}\ m^3$.

Số tiền làm lõi than chì $T_1 = (2\pi.10^{-7})7a.10^6 = 1,4\pi a$.

Thể tích phần thân bằng gỗ của bút

$V_2 = 6.\dfrac{(0,003)^2\sqrt{3}}{4}.0,2 - 2\pi.10^{-7} = \left[\sqrt{3}.27.10^{-7} - 2\pi.10^{-7}\right]m^3$.

Số tiền làm phần thân bằng gỗ của bút

$T_2 = \left[27\sqrt{3}.10^{-7} - \pi.2.10^{-7}\right]a.10^6 = \left[2,7\sqrt{3} - \pi.0,2\right]a$.

Vậy giá vật liệu làm bút chì là: $T = T_1 + T_2 \approx 8,45.a$.

Câu 17: Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy bằng 3 mm và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 mm. Giả định $1m^3$ gỗ có giá a. $1m^3$ than chì có giá $9a$. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $97,03a$ đồng. **B.** $10,33a$ đồng. **C.** $9,7a$ đồng. **D.** $103,3a$ đồng

Lời giải

Chọn C

$3mm = 0,003m; 200mm = 0,2m; 1mm = 0,001m$

Diện tích đáy của phần than chì: $S_1 = \pi r^2 = \pi.10^{-6}(m^2)$

Diện tích đáy phần bút bằng gỗ: $S_2 = 6S_{OAB} - S_1 = \left(6.\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} - \pi\right).10^{-6} = \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).10^{-6}(m^2)$

Thể tích than chì cần dùng: $V_1 = S_1.h = \pi r^2 0,2 = 0,2\pi.10^{-6}(m^3)$

Thể tích gỗ làm bút chì: $V_2 = S_2.h = \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).0,2.10^{-6}(m^3)$

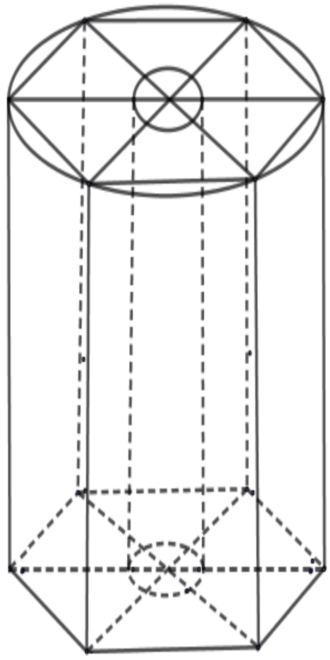
Tiền làm một cây bút: $V_1.9a + V_2.a = \left(9V_1 + V_2\right)a = \left(9.0,2\pi.10^{-6} + \left(\dfrac{27\sqrt{3}}{2} - \pi\right).0,2.10^{-6}\right)a = 9,7a$.

Câu 18: Một chiếc bút chì có dạng khối trụ lục giác đều có cạnh đáy 3 (mm) và chiều cao bằng 200 (mm). Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính 1 (mm). Giả định 1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng, 1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng. Khi đó giá nguyên vật liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?.

A. $84,5.a$ đồng. **B.** $78,2.a$ đồng. **C.** $8,45.a$ đồng. **D.** $7,82.a$ đồng

Lời giải

Chọn D



1 m^3 gỗ có giá a triệu đồng suy ra $1\,mm^3$ gỗ có giá $\dfrac{a}{1000}$ đồng.

1 m^3 than chì có giá $6a$ triệu đồng suy ra $1\,mm^3$ than chì có giá $\dfrac{6a}{1000}$ đồng.

Phần chì của cái bút có thể tích bằng $V_1 = 200.\pi.1^2 = 200\pi\left(mm^3\right)$.

Phần gỗ của của bút chì có thể tích bằng $V_2 = 200.6.\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} - 200\pi = 2700\sqrt{3} - 200\pi\left(mm^3\right)$.

Số tiền làm một chiếc bút chì là $\dfrac{6a.V_1 + a.V_2}{1000} \approx 7,82a$ đồng.

Câu 19: Một chiếc bút chì có dạng khối lăng trụ lục giác đều có cạnh đáy $3\,\text{mm}$ và chiều cao bằng 200 mm. Thân bút chì được làm bằng gỗ và phần lõi được làm bằng than chì. Phần lõi có dạng khối trụ có chiều cao bằng chiều dài của bút và đáy là hình tròn có bán kính đáy 1 mm. Giả định 1 m^3 gỗ có giá a, 1 m^3 than chì có giá $8a$. Khi đó giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $9,7.a$ **B.** $97,03.a$ **C.** $90,7.a$ **D.** $9,07.a$

Lời giải

Chọn. D.

Diện tích của khối lăng trụ lục giác đều là $S = 6.\left(\left(3.10^{-3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (m^2)

Thể tích của chiếc bút chì là: $V = S.h = 6.\left(\left(3.10^{-3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right).200.10^{-3} = 27\sqrt{3}.10^{-7}$ (m^3).

Thể tích của phần lõi bút chì là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.\left(10^{-3}\right)^2.200.10^{-3} = 2\pi.10^{-7}$ (m^3).

Suy ra thể tích phần thân bút chì là $V_2 = V - V_1 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right).10^{-7}$ (m^3).

Giá nguyên liệu làm một chiếc bút chì như trên là:

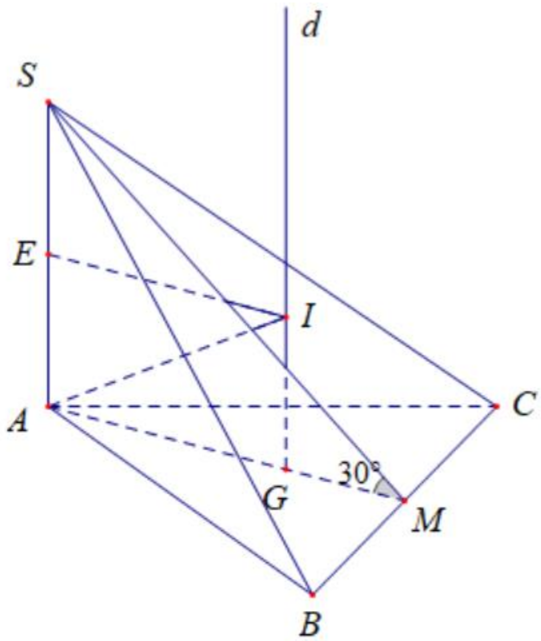
$V_2.a.10^6 + V_1.8a.10^6 = \left(27\sqrt{3} - 2\pi\right).10^{-7}.a.10^6 + 2\pi.10^{-7}.8a.10^6 = \left(2,7\sqrt{3} + 1,4\pi\right)a \simeq 9,07a$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30°. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\dfrac{19\pi a^2}{9}$. **D.** $13\pi a^2$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của BC, ta có góc SMA là góc giữa (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow SMA = 30^\circ$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó ta có:

$AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $AG = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SA = AM.\tan 30^\circ = a\sqrt{3}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = a$.

Qua G kẻ đường thẳng d vuông góc với $(ABC) \Rightarrow d // SA$.

Gọi E là trung điểm của SA, qua E kẻ mặt phẳng (P) sao cho: $\begin{cases} (P) \perp SA \\ (P) \cap d = \{I\} \end{cases}$

Khi đó I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$ và khối cầu đó có bán kính là:

$R = IA = \sqrt{IG^2 + AG^2} = \sqrt{\left(\dfrac{SA}{2}\right)^2 + AG^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{3}} = \dfrac{a\sqrt{57}}{6}$.

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là: $S = 4\pi R^2 = \dfrac{19\pi a^2}{3}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60^o. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{43\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{19\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{43\pi a^2}{9}$. **D.** $21\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A

+ $\alpha = 60^o$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) và (ABC). Lấy I là trung điểm $BC \Rightarrow \begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha = (SI, AI) = SIA = 60^o$.

+ $AI = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow SA = \sqrt{3}.AI = 3a$.

+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Qua G kẻ đường thẳng $\Delta \perp (ABC) \Rightarrow \Delta // \text{SA}$

Trong mp(SA, Δ): Đường trung trực SA cắt Δ ở O

$\Rightarrow$ Mặt cầu $S(O;OA)$ ngoại tiếp $S.ABC$. Gọi K là trung điểm AS

Ta có $AK = \frac{1}{2}AS = \frac{3a}{2}; AG = \frac{2}{3}AI = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

$R = \sqrt{AK^2 + AG^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} + \frac{4a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{43}{12}}$

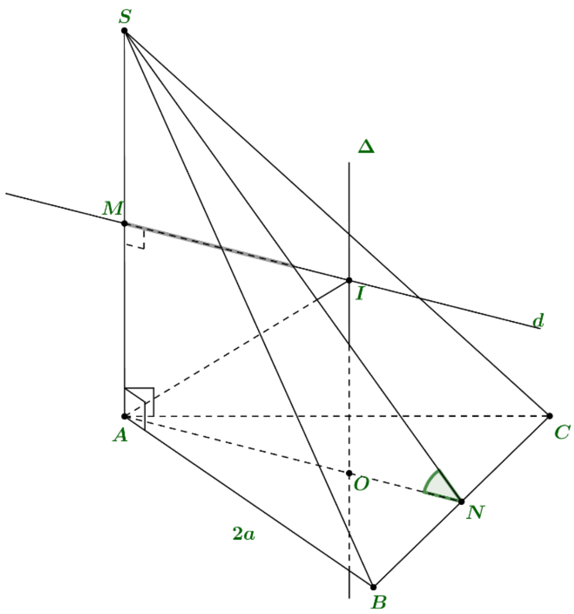
+ Diện tích mặt cầu $S(O;OA)$ là: $S = 4\pi R^2 = 4\pi a^2 \frac{43}{12} = \frac{43\pi a^2}{3}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp bằng:

A. $52\pi a^2$. **B.** $\frac{172\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{76\pi a^2}{9}$. **D.** $\frac{76\pi a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm của BC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC.

Dựng Δ qua O, $\Delta \perp (ABC) \Rightarrow \Delta$ là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC và Δ, SA đồng phẳng.

Trong mặt phẳng (SAN) dựng đường trung trực d của cạnh bên SA.

Gọi $I=\Delta\cap d$, suy ra $IA=IB=IC=IS$, suy ra I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R=IA$.

Ta có: $\begin{cases} BC\perp AN \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAN)\Rightarrow BC\perp SN$.

Suy ra $\angle((SBC),(ABC))=\angle(AN,SN)=\angle SNA=30°$.

Mặt khác: $AN=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4a\sqrt{3}}{2}=2a\sqrt{3}$, $AO=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{4\sqrt{3}a}{3}$.

Vì $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp AN\Rightarrow \Delta SAN$ vuông tại A.

Ta có $\tan\angle SNA=\dfrac{SA}{AN}\Rightarrow SA=AN\cdot\tan 30° =2a\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2a$, suy ra $MA=IO=\dfrac{SA}{2}=a$.

Xét tam giác IOA vuông tại O: $R=IA=\sqrt{IO^2+AO^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{4\sqrt{3}a}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{57}a}{3}$.

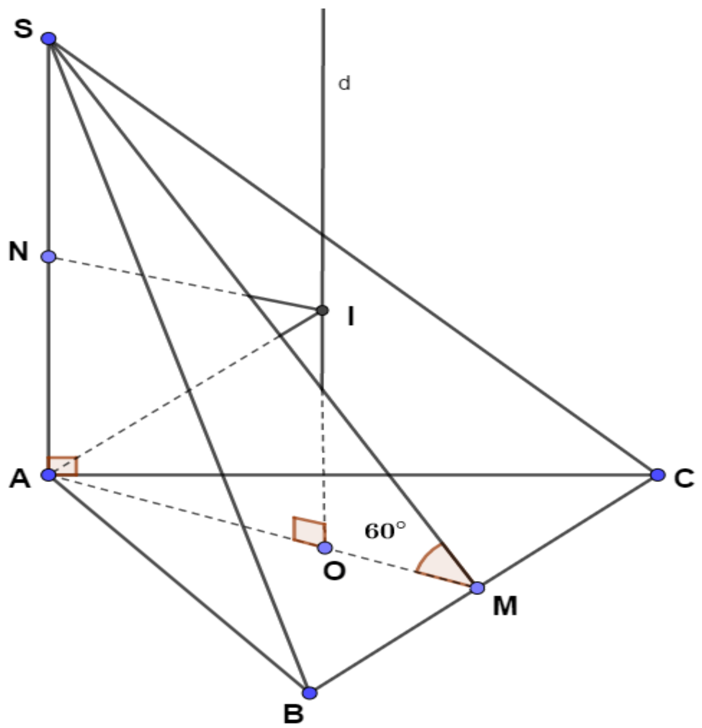
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là $S_{(S.ABC)}=4\pi R^2=4\pi\left(\dfrac{\sqrt{57}a}{3}\right)^2=\dfrac{76\pi a^2}{3}$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng đáy bằng 60°. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{172\pi a^2}{3}$. **B.** $\dfrac{76\pi a^2}{3}$. **C.** $84\pi a^2$. **D.** $\dfrac{172\pi a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của tam giác ABC, M và N lần lượt là trung điểm của BC và SA, R,S là bán kính và diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Dựng trục d của tam giác ABC, $\Rightarrow d$ qua O và $d // SA$.

Trong mặt phẳng (SA, d) dựng đường thẳng qua N song song với AO cắt d tại I. Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ và $R = AI$.

Do ΔABC đều và $SA \perp (ABC)$ nên $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = \angle SMA = 60^\circ$.

$$AM = 4a\frac{\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} AO = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{4a\sqrt{3}}{3} \\ AN = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{1}{2}AM\tan 60^\circ = 3a \end{cases}.$$

$ANIO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AI = \sqrt{AN^2 + AO^2} = \sqrt{9a^2 + \dfrac{16a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{43}{3}}$.

Vậy $S = 4\pi R^2 = \dfrac{172\pi a^2}{3}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD vuông tại C, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 5a$, $BC = 3a$ và $CD = 4a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $R = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $R = \dfrac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tam giác BCD vuông tại C nên $BD = 5a$. Tam giác ABD vuông tại B nên $AD = 5a\sqrt{2}$.

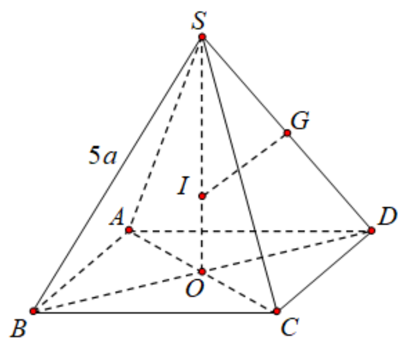
Ta có: B và C cùng nhìn AD dưới một góc vuông nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là trung điểm I của AD. Bán kính mặt cấu này là: $R = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{5a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$, cạnh bên bằng $5a$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

A. $R = \sqrt{3}a$. **B.** $R = \sqrt{2}a$. **C.** $R = \dfrac{25a}{8}$. **D.** $R = 2a$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, G là trung điểm SD, $GI \perp SD, I \in SO$.

Ta có cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}a$ nên $BD = 3\sqrt{2}a.\sqrt{2} = 6a$, $OD = 3a$.

Xét ΔSOD vuông tại O ta có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = 4a$

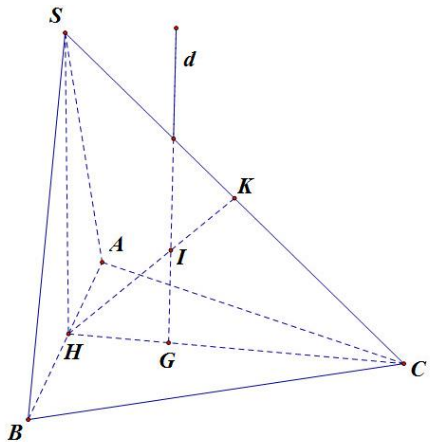
Ta có $\Delta SOD \sim \Delta SGI$, suy ra $\dfrac{SO}{SG} = \dfrac{SD}{SI} \Rightarrow 4a.R = \dfrac{1}{2}(5a)^2 \Rightarrow R = \dfrac{25a}{8}$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$ **B.** $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$ **C.** $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$ **D.** $V = \dfrac{5\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của AB

Vì ΔSAB đều nên $SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp (ABC) \Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp $S.ABC$

Gọi G là trọng tâm của ΔABC $\Rightarrow G$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Qua G kẻ đường thẳng d song song với SH $\Rightarrow d \perp (ABC)$

Gọi K là trung điểm của SC, vì ΔSHC vuông cân tại H $(SH = HC) \Rightarrow HK$ là đường trung trực ứng với SC.

Gọi $I = d \cap HK$ ta có $\begin{cases} IA = IB = IC \\ IS = IC \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$

$\Rightarrow I$ là tâm khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$

Xét hai tam giác đều $\Delta ABC = \Delta SAB$ có độ dài các cạnh bằng 1.

G là trọng tâm ΔABC $\Rightarrow CG = \dfrac{2}{3}CH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔHIG vuông tại G ta có $IG = HG = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ $\Rightarrow IC = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$

Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $V = \dfrac{4}{3}\pi IC^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \dfrac{5\pi\sqrt{15}}{54}$.

Cách 2:

R_b, R_d là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB và ABC $\Rightarrow R_b = R_d = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $S.ABC$ là $R = \sqrt{R_b^2 + R_d^2 - \dfrac{GT^2}{4}}$ $\Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$

Vậy thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{5\pi\sqrt{15}}{54}$.

Câu 27: nên $\dfrac{TS}{AS}=\dfrac{SH}{SK}$.

Suy ra $TS=\dfrac{AS.SH}{SK}=\dfrac{2a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{a\sqrt{7}}=\dfrac{4a\sqrt{7}}{7}$.

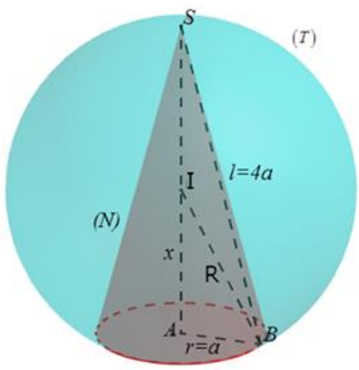
Câu 28: Cho hình nón N có đỉnh S, bán kính đáy bằng a và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi T là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của N. Bán kính của T bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{6}a}{3}$. **B.** $\dfrac{16\sqrt{15}a}{15}$. **C.** $\dfrac{8\sqrt{15}a}{15}$. **D.** $\sqrt{15}a$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1



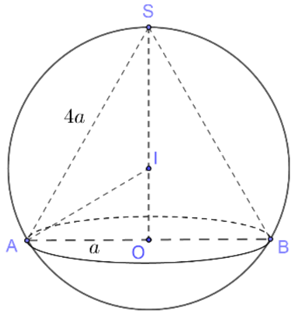
Đặt $IA=x$ khi đó $R=IB=\sqrt{a^2+x^2}$.

Mặt khác $R=IS=SA-IA=\sqrt{16a^2-a^2}-x=a\sqrt{15}-x$

Từ đó ta có phương trình: $\sqrt{a^2+x^2}=a\sqrt{15}-x\Leftrightarrow a^2+x^2=15a^2-2a\sqrt{15}x+x^2\Leftrightarrow x=\dfrac{7a}{\sqrt{15}}$

Bán kính của T bằng $R=a\sqrt{15}-x=\dfrac{8a\sqrt{15}}{15}$.

Cách 2: (Thầy Quang Nam)



Xét ΔSAO vuông tại O: $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{16a^2-a^2}=a\sqrt{15}$.

$\sin SAO = \frac{SO}{SA} = \frac{a\sqrt{15}}{4a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Gọi R là bán kính mặt cầu T $\Rightarrow R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔSAB. Áp dụng định lí hàm số sin trong tam giác ΔSAB:

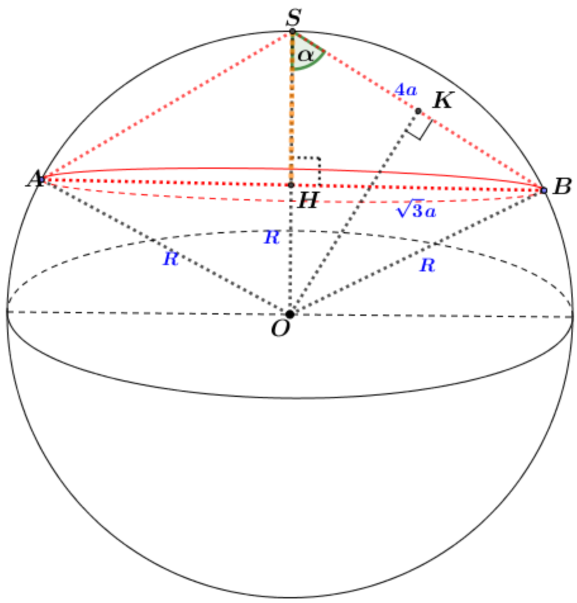
$$R = \frac{SB}{2\sin SAO} = \frac{4a}{2.\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}a.$$

Câu 29: Cho hình nón (N) có đỉnh S, bán kính đáy bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$.Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N).Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{2\sqrt{10}}{3}a$. **B.** $\frac{16\sqrt{13}}{13}a$ **C.** $\frac{8\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\sqrt{13}a$.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ΔSHB ta có: $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = a\sqrt{13}$

Kẻ $OK \perp SB$ .Do ΔSOB cân tại O suy ra K là trung điểm SB

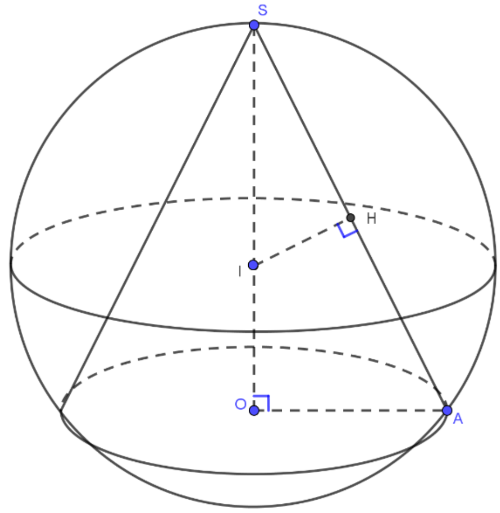
$$\Delta SHB \sim \Delta SKO \Rightarrow \frac{SO}{SB} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SO = \frac{SK.SB}{SH} = \frac{2a.4a}{\sqrt{13}a} = \frac{8\sqrt{13}}{13}a$$

Câu 30: Cho hình nón (N) có đỉnh S. Bán kính đáy bằng $\sqrt{2}a$ và độ dài đường sinh bằng $4a$. Gọi (T) là mặt cầu đi qua S và đường tròn đáy của (N). Bán kính của (T) bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}a}{3}$. **B.** $\sqrt{14}a$. **C.** $\frac{4\sqrt{14}a}{7}$. **D.** $\frac{8\sqrt{14}a}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Hình nón (N) đỉnh S có bán kính đáy $OA=\sqrt{2}a$, độ dài đường sinh $SA=4a$.

Gọi H là trung điểm của SA, từ H dựng mặt phẳng trung trực của SA cắt đường SO tại I. Điểm I chính là tâm mặt cầu (T) đi qua S và đường tròn đáy của (N).

Xét hai tam giác SHI và SOA có đỉnh S chung và $SHI = SOA = 90°$ $\Rightarrow \Delta SHI \backsim \Delta SOA$

Suy ra $\dfrac{SI}{SA}=\dfrac{SH}{SO} \Leftrightarrow SI=\dfrac{SA.\dfrac{SA}{2}}{\sqrt{SA^2-OA^2}}=\dfrac{SA^2}{2\sqrt{SA^2-OA^2}}=\dfrac{(4a)^2}{2\sqrt{(4a)^2-\left(\sqrt{2}a\right)^2}}=\dfrac{4\sqrt{14}a}{7}$.

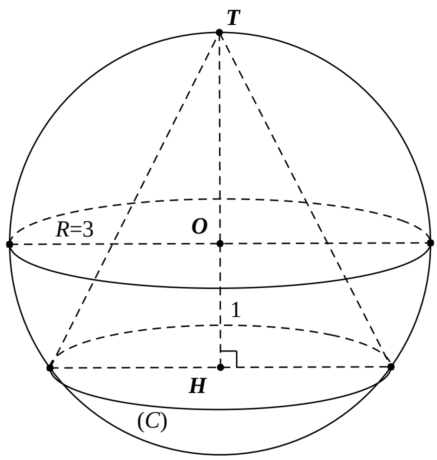
Vậy bán kính của mặt cầu (T) là $SI=\dfrac{4\sqrt{14}a}{7}$.

Câu 31: Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=3$. Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng 1 và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S), tính thể tích V của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C).

A. $V=\dfrac{32\pi}{3}$. **B.** $V=16\pi$. **C.** $V=\dfrac{16\pi}{3}$. **D.** $V=32\pi$.

Lời giải

Chọn A



Gọi r là bán kính đường tròn (C) thì r là bán kính đáy của hình nón.

Ta có: $r^2 = R^2 - OH^2 = 8$

$HT = HO + OT = 1 + 3 = 4 = h$ là chiều cao của hình nón

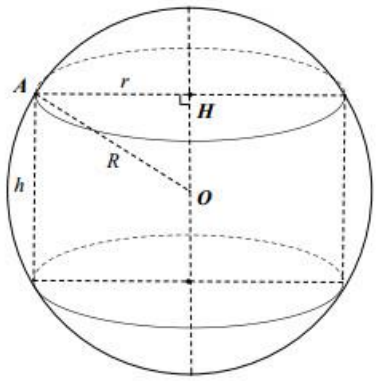
Suy ra: $V_{nón} = \frac{1}{3}.HT.S_{(C)} = \frac{1}{3}.4.\pi.8 = \frac{32\pi}{3}$.

Câu 32: Cho mặt cầu (S) có bán kính bằng 4, hình trụ (H) có chiều cao bằng 4 và hai đường tròn đáy nằm trên (S). Gọi V_1 là thể tích của khối trụ (H) và V_2 là thể tích của khối cầu (S). Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$

A. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$ **B.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$ **C.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{16}$ **D.** $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $r = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. Thể tích của khối trụ (H) là $V_1 = \pi r^2 h = \pi.12.4 = 48\pi$.

Thể tích của khối cầu (S) là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.4^3 = \frac{256\pi}{3}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{16}$.

Câu 33: Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, tính thể tích V của khối chóp có thể tích lớn nhất.

A. $V = 144$. **B.** $V = 576$. **C.** $V = 576\sqrt{2}$. **D.** $V = 144\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình chóp tứ giác đều lần lượt là $x; h$ $(x, h > 0)$. Ta có đáy là hình vuông với độ dài nửa đường chéo bằng $\frac{x}{\sqrt{2}}$ suy ra độ dài cạnh bên $l = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{2}}$.

Ta có bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $R = \frac{l^2}{2h} = \frac{h^2 + \frac{x^2}{2}}{2h} = 9 \Leftrightarrow x^2 = 36h - 2h^2$.

Diện tích đáy của hình chóp $S = x^2$ nên $V = \frac{1}{3}h.x^2 = \frac{1}{3}h\left(36h - 2h^2\right)$

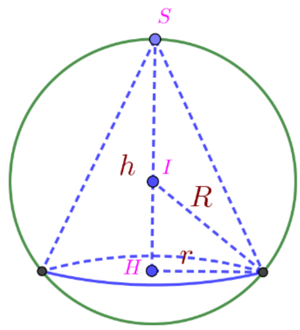
Ta có $\frac{1}{3}h.\left(36h - 2h^2\right) = \frac{1}{3}.h.h\left(36 - 2h\right) \le \frac{1}{3}.\left(\frac{h + h + 36 - 2h}{3}\right)^3 = 576 \Rightarrow V \le 576$, dấu bằng xảy ra khi $h = h = 36 - 2h \Leftrightarrow h = 12, x = 12$ vậy $V_{max} = 576$.

Câu 34: Cho mặt cầu tâm O bán kính R. Xét mặt phẳng (P) thay đổi cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C). Hình nón (N) có đỉnh S nằm trên mặt cầu, có đáy là đường tròn (C) và có chiều cao $h(h>R)$. Tính h để thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất.

A. $h=\sqrt{3}R$ **B.** $h=\sqrt{2}R$ **C.** $h=\dfrac{4R}{3}$ **D.** $h=\dfrac{3R}{2}$

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH=h-R$ và $r^2=R^2-IH^2=R^2-(h-R)^2=2Rh-h^2$.

Thể tích khối nón $V=\dfrac{1}{3}h\pi r^2=\dfrac{\pi}{3}h\left(2Rh-h^2\right)$.

Ta có $h\cdot h\cdot(4R-2h)\le\left(\dfrac{h+h+4R-2h}{3}\right)^3=\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3\Rightarrow h^2(2R-h)\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4R}{3}\right)^3$.

Do đó V lớn nhất khi $h=4R-2h\Leftrightarrow h=\dfrac{4R}{3}$.

Cách 2:

Gọi I là tâm mặt cầu và H, r là tâm và bán kính của (C).

Ta có $IH=h-R$ và $r^2=R^2-IH^2=R^2-(h-R)^2=2Rh-h^2$.

Thể tích khối nón $V=\dfrac{1}{3}h\pi r^2=\dfrac{\pi}{3}h\left(2Rh-h^2\right)=\dfrac{\pi}{3}.\left(2h^2R-h^3\right)$

Xét hàm $f(h)=-h^3+2h^2R,\ h\in(R,2R)$, có $f'(h)=-3h^2+4hR$.

$f'(h)=0\Leftrightarrow -3h^2+4hR=0\Leftrightarrow h=0$ hoặc $h=\dfrac{4R}{3}$.

Bảng biến thiên

h	R		$\dfrac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		$\nearrow$	$\dfrac{32R^3}{27}$	$\searrow$	

$\max f\left(h\right) = \dfrac{32}{27}R^3$, tại $h = \dfrac{4R}{3}$. Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi $\left(N\right)$ có giá trị lớn nhất là $V = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{32}{27}R^3 = \dfrac{32}{81}\pi R^3$ khi $h = \dfrac{4R}{3}$.