TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGÔ HOÀNG LONG

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
TOÁN
12

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

BẢN MẪU

TRẦN NAM DŨNG (Tổng Chủ biên)
TRẦN ĐỨC HUYÊN – NGUYỄN THÀNH ANH (đồng Chủ biên)
NGÔ HOÀNG LONG

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP

TOÁN 12

Chân trời sáng tạo

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

Mỗi bài học trong sách Chuyên đề học tập Toán 12 thường có các phần như sau:

Hoạt động khởi động	Gợi mở, kết nối người học vào chủ đề bài học.
Hoạt động khám phá	Gợi ý để người học tìm ra kiến thức mới.
Kiến thức trọng tâm	Nội dung kiến thức cần lĩnh hội.
Thực hành	Các bài tập cơ bản theo yêu cầu cần đạt.
Vận dụng	Ứng dụng kiến thức để giải quyết vấn đề.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

Lời nói đầu

Các bạn học sinh, quý thầy, cô giáo thân mến!

Tiếp nối sách Chuyên đề học tập Toán 11, sách **Chuyên đề học tập Toán 12** thuộc bộ sách **Chân trời sáng tạo** được biên soạn theo Chương trình giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Sách bao gồm ba chuyên đề:

Chuyên đề 1. **Ứng dụng toán học giải các bài toán tối ưu.**

Chuyên đề 2. **Ứng dụng toán học trong một số vấn đề liên quan đến tài chính.**

Chuyên đề 3. **Biến ngẫu nhiên rời rạc. Các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc.**

Các chuyên đề này nhằm mục đích:

– Cung cấp thêm một số kiến thức và kĩ năng toán học nhằm đáp ứng yêu cầu phân hoá, tạo cơ hội cho học sinh vận dụng Toán học để giải quyết các vấn đề liên môn và thực tiễn, góp phần hình thành cơ sở khoa học cho giáo dục STEM.

– Giúp học sinh hiểu rõ vai trò và những ứng dụng của Toán học trong thực tiễn; làm cơ sở cho định hướng nghề nghiệp sau Trung học phổ thông; tạo cơ hội cho học sinh nhận biết năng khiếu, sở thích của mình, từ đó tạo đam mê khi học Toán.

Mỗi chuyên đề đều có nêu các kiến thức cơ bản sẽ học và các yêu cầu cần đạt của chuyên đề. Các bài học đều xây dựng theo tinh thần định hướng phát triển năng lực và thường được thống nhất theo các bước: khởi động, khám phá, thực hành, vận dụng.

Chúng tôi hi vọng rằng sách **Chuyên đề học tập Toán 12** sẽ hỗ trợ quý thầy cô trong quá trình dạy học, đồng thời giúp các bạn học sinh hứng thú hơn khi học tập bộ môn Toán.

Rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy, cô giáo và các bạn học sinh để sách được ngày càng hoàn thiện hơn.

CÁC TÁC GIẢ

Mục lục

Trang

Chuyên đề 1

ỨNG DỤNG TOÁN HỌC GIẢI CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU

Trong đời sống, đặc biệt trong lĩnh vực kinh tế, thường xuyên xuất hiện bài toán tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của một đại lượng nào đó. Trong chuyên đề này, chúng ta làm quen với việc giải những bài toán như vậy (gọi là bài toán tối ưu) bằng cách vận dụng những kiến thức đã học về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và về đạo hàm.

Nhằm đạt hiệu quả kinh tế cao nhất, người ta tìm những phương án sản xuất sao cho tối thiểu hoá chi phí và tối đa hoá lợi nhuận.

Sau chuyên đề này, bạn có thể:

– Vận dụng kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất để giải quyết một số bài toán quy hoạch tuyến tính.
– Vận dụng kiến thức về đạo hàm để giải quyết một số bài toán tối ưu xuất hiện trong thực tiễn, bao gồm những bài toán tối ưu trong kinh tế.

Bài 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

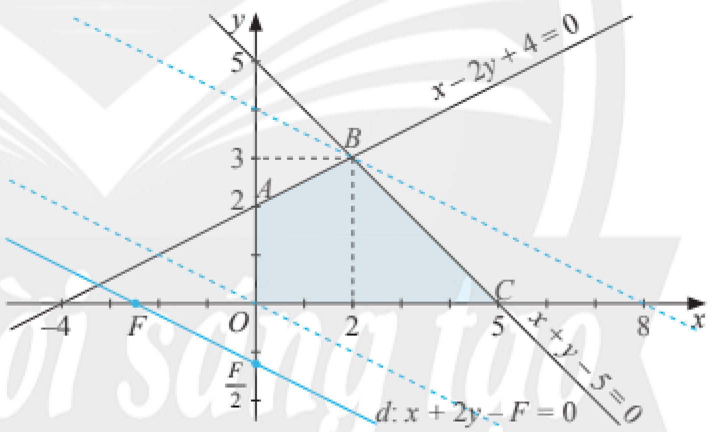
Từ khoá: Bài toán quy hoạch tuyến tính; Hàm mục tiêu; Ràng buộc; Tập phương án.

Một thương nhân sử dụng 120 triệu đồng tiền vốn để mua tối đa 8 tấn trái cây. Thương nhân đó thu mua hai loại trái cây là A với giá 12 triệu đồng/tấn và B với giá 20 triệu đồng/tấn. Lợi nhuận thương nhân đó thu được sau khi bán mỗi tấn hàng đối với loại A là 1,1 triệu đồng, đối với loại B là 1,5 triệu đồng. Thương nhân đó nên mua khối lượng bao nhiêu mỗi loại để thu được lợi nhuận cao nhất khi bán hết hàng đã thu mua?

1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

1 Xét bài toán: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + 2y$ với $(x; y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ x + y - 5 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases} \quad \text{(I)}$$



Hình 1

Miền nghiệm Ω của hệ (I) là miền tứ giác $OABC$ (được tô màu) trên Hình 1. Với giá trị F cho trước, xét đường thẳng d: $x + 2y - F = 0$ hay $y = -\frac{x}{2} + \frac{F}{2}$.

Trả lời các câu hỏi sau để giải bài toán trên.

a) Với giá trị nào của F thì đường thẳng d đi qua điểm O, điểm B?

b) Khi giá trị của F tăng (hoặc giảm) thì tung độ giao điểm của d với trục Oy thay đổi như thế nào? Khi đó, phương của đường thẳng d có thay đổi không?

c) Với điều kiện nào của F thì đường thẳng d và miền nghiệm Ω có điểm chung?

d) Từ đó, chỉ ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + 2y$ trên miền nghiệm Ω. Biểu thức F đạt được các giá trị đó tại điểm nào?

Bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x + 2y$ trên miền nghiệm Ω của hệ bất phương trình bậc nhất (I) gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính. Biểu thức F gọi là hàm mục tiêu, hệ (I) gọi là ràng buộc, miền nghiệm Ω của hệ (I) gọi là tập phương án của bài toán.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau:

Bài toán quy hoạch tuyến tính (hai biến) là bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng $F = F(x, y) = ax + by$ (a và b là các số thực không đồng thời bằng 0) trên miền nghiệm Ω của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (x và y).

Biểu thức $F(x, y)$ gọi là *hàm mục tiêu*, hệ bất phương trình bậc nhất gọi là *ràng buộc*, miền nghiệm Ω gọi là *tập phương án* của bài toán quy hoạch tuyến tính đó.

Trong , ta thấy tập phương án Ω là miền đa giác (tứ giác $OABC$) và hàm mục tiêu $F = x + 2y$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại đỉnh của Ω.

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng khi tập phương án Ω của bài toán quy hoạch tuyến tính là miền đa giác thì hàm mục tiêu luôn đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất tại đỉnh của Ω.

Từ đó, để giải bài toán quy hoạch tuyến tính trong trường hợp tập phương án là miền đa giác, ta thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Biểu diễn tập phương án của bài toán trên mặt phẳng toạ độ Oxy.

Bước 2: Tính giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của Ω.

Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) trong các giá trị này là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của F trên Ω.

Chú ý:

a) Trong bài toán quy hoạch tuyến tính, ta viết

$$F = ax + by \to \max \text{ (hoặc min)}$$

để thể hiện tìm giá trị lớn nhất (hoặc giá trị nhỏ nhất) của F. Nếu tìm cả giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của F thì ta viết

$$F = ax + by \to \max, \min.$$

b) Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của F trên Ω được kí hiệu lần lượt là $\max\limits_{\Omega} F$ và $\min\limits_{\Omega} F$.
Với hai số thực x_0, y_0 cho trước, ta viết $F(x_0; y_0)$ để chỉ giá trị của hàm mục tiêu $F = ax + by$ khi $x = x_0$, $y = y_0$.

Ví dụ 1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 2x - 5y \to \max, \min$$

với ràng buộc

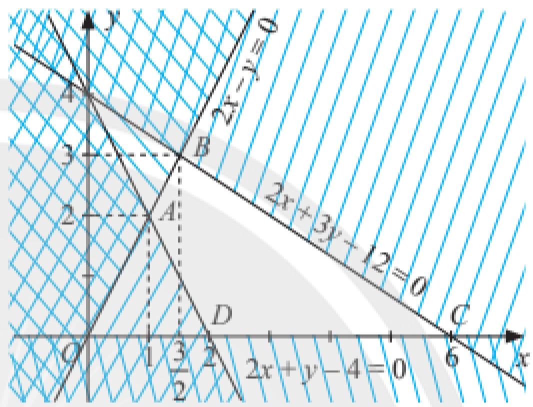
$$\begin{cases} 2x + y - 4 \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ 2x + 3y - 12 \leq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Giải

Tập phương án Ω là miền tứ giác $ABCD$ trên Hình 2.

Toạ độ giao điểm A của hai đường thẳng $2x - y = 0$ và $2x + y - 4 = 0$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1; 2).$$



Hình 2

Tương tự, ta tìm được $B\left(\frac{3}{2}; 3\right)$, $C(6; 0)$, $D(2; 0)$.

Giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của Ω:

$F(1; 2) = 2\,.\,1 - 5\,.\,2 = -8$; $\quad F\left(\frac{3}{2}; 3\right) = 2\,.\,\frac{3}{2} - 5\,.\,3 = -12$;

$F(6; 0) = 2\,.\,6 - 5\,.\,0 = 12$; $\quad F(2; 0) = 2\,.\,2 - 5\,.\,0 = 4$.

Từ đó, $\max\limits_{\Omega} F = F(6; 0) = 12$; $\min\limits_{\Omega} F = F\left(\frac{3}{2}; 3\right) = -12$.

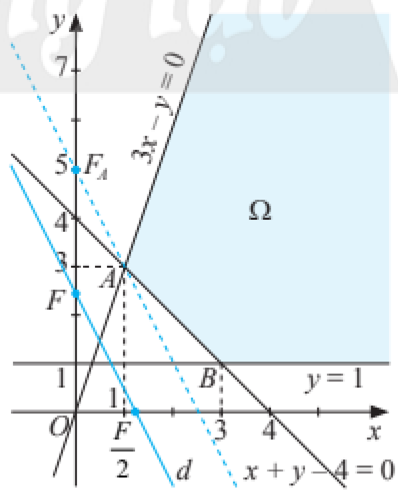
2 Xét bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 2x + y \to \max, \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} x + y - 4 \geq 0 \\ 3x - y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 1. \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Tập phương án Ω của bài toán là phần được tô màu trên Hình 3. Hai điểm $A(1; 3)$ và $B(3; 1)$ gọi là các đỉnh của Ω.



Hình 3

Với giá trị F cho trước, xét đường thẳng d: $2x + y = F$ hay d: $y = -2x + F$.

Trả lời các câu hỏi sau để giải bài toán trên.

a) Tìm giá trị của F để đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 3)$. Gọi giá trị tìm được là F_A.

b) Khi giá trị của F tăng (hoặc giảm) thì tung độ giao điểm của d với trục Oy thay đổi như thế nào? Khi đó, phương của đường thẳng d có thay đổi không?

c) Nếu $F < F_A$ thì d và Ω có điểm chung không? Từ đó, chỉ ra giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu $F = 2x + y$ trên Ω.

d) Với giá trị nào của F thì d và Ω có điểm chung? Hàm mục tiêu $F = 2x + y$ đạt giá trị lớn nhất trên Ω hay không?

Trong 2, tập phương án Ω không phải là miền đa giác; hàm mục tiêu F chỉ đạt giá trị nhỏ nhất (tại điểm A) mà không đạt giá trị lớn nhất trên Ω.

Trong trường hợp tổng quát, nếu tập phương án Ω không phải là miền đa giác thì hàm mục tiêu $F = ax + by$ của bài toán quy hoạch tuyến tính có thể không đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên Ω. Tuy nhiên, người ta chứng minh được rằng nếu F đạt giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất trên Ω thì F đạt giá trị đó tại đỉnh của Ω.

Chú ý: Nhiều bài toán quy hoạch tuyến tính xuất phát từ tình huống thực tế có tập phương án Ω (không là miền đa giác) nằm trong góc phần tư thứ nhất (của mặt phẳng toạ độ Oxy) và hàm mục tiêu $F = ax + by$ có các hệ số a, b không âm. Khi đó, người ta chứng minh được rằng F luôn đạt giá trị nhỏ nhất trên Ω tại đỉnh nào đó của Ω.

Từ đó, đối với bài toán quy hoạch tuyến tính

$$F = ax + by \to \min$$

với tập phương án không là miền đa giác nằm trong góc phần tư thứ nhất và các hệ số a và b không âm, ta có thể giải bằng cách thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Biểu diễn tập phương án Ω của bài toán trên mặt phẳng toạ độ Oxy.
Bước 2: Tính giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của Ω.
Giá trị nhỏ nhất trong các giá trị này là giá trị nhỏ nhất của F trên Ω.

Ví dụ 2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 3x + 5y \to \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} x + 2y \geq 5 \\ x - y \leq 2 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Giải

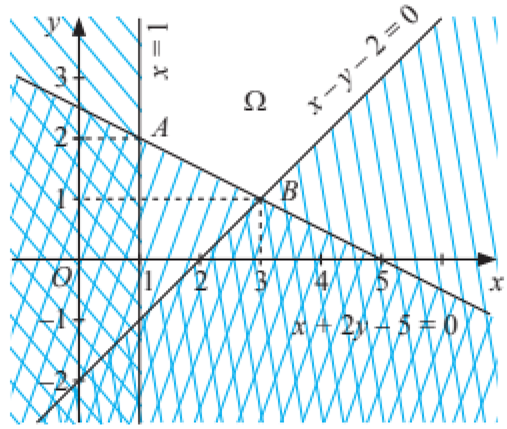
Viết lại ràng buộc của bài toán thành

$$\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ x \geq 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Tập phương án Ω của bài toán là miền không gạch chéo trên Hình 4 (không là miền đa giác).

Toạ độ điểm A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(1;\,2).$$



Hình 4

Tương tự, tìm được điểm $B(3;\,1)$.

Miền Ω có hai đỉnh là $A(1;\,2)$ và $B(3;\,1)$.

Do Ω nằm trong góc phần tư thứ nhất và các hệ số của biểu thức $F = 3x + 5y$ đều dương nên F đạt giá trị nhỏ nhất tại một đỉnh của Ω.

Ta có $F(1;\,2) = 3\,.\,1 + 5\,.\,2 = 13$; $F(3;\,1) = 3\,.\,3 + 5\,.\,1 = 14$.

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh $A(1;\,2)$ và $\min\limits_{\Omega} F = F(1;\,2) = 13$.

1 Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 4x + 3y \to \max,\ \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} x + 2y - 8 \le 0 \\ 2x - y - 6 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 1. \end{cases}$$

2 Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 25x + 10y \to \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} 2x - 3y \le 6 \\ x + y \ge 4 \\ x \ge 2. \end{cases}$$

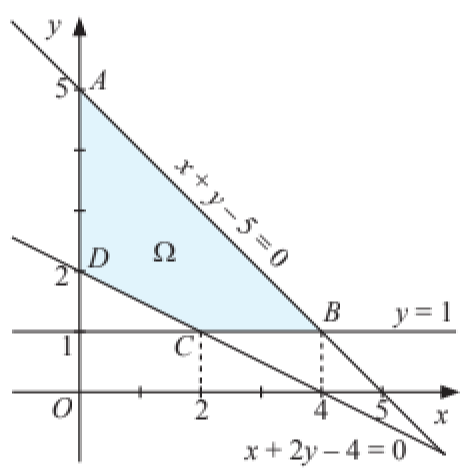
Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$F = 3x + 3y \to \max,\ \min$$

có tập phương án Ω là miền tứ giác $ABCD$ (được tô màu như Hình 5) với các đỉnh là $A(0;\,5)$, $B(4;\,1)$, $C(2;\,1)$ và $D(0;\,2)$.

a) Giải bài toán quy hoạch tuyến tính đã cho.

b) Hàm mục tiêu F đạt giá trị lớn nhất trên Ω tại bao nhiêu điểm? Giải thích.



Hình 5

2. Ứng dụng vào các bài toán thực tế

3 Xét tình huống thương nhân thu mua trái cây ở (trang 6).

a) Nếu gọi x, y (tính theo tấn) lần lượt là khối lượng trái cây loại A và B được thương nhân thu mua thì x và y phải thoả mãn hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn nào?

b) Từ đó, phát biểu bài toán quy hoạch tuyến tính tìm khối lượng thu mua mỗi loại trái cây để thu được lợi nhuận cao nhất. Giải bài toán đó.

Nhiều bài toán tối ưu trong thực tế dẫn đến giải bài toán quy hoạch tuyến tính (hai ẩn). Để giải các bài toán như vậy, ta thường thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Đặt hai ẩn biểu thị hai đại lượng chưa biết (cần tìm). Viết điều kiện có nghĩa cho các ẩn đó.
Bước 2: Từ dữ kiện của bài toán, viết biểu thức biểu thị đại lượng cần tìm giá trị tối ưu và các bất phương trình bậc nhất đối với hai ẩn trên. Từ đó, phát biểu bài toán quy hoạch tuyến tính nhận được.
Bước 3: Giải bài toán quy hoạch tuyến tính và trả lời.

Ví dụ 3. Tại một xưởng cơ khí, để sản xuất mỗi loại sản phẩm A và B cần dùng hai máy I và II. Để sản xuất một sản phẩm loại A phải dùng máy I trong 1 giờ và máy II trong 3 giờ, đối với một sản phẩm loại B phải dùng máy I trong 2 giờ và máy II trong 2 giờ. Mỗi tuần máy I làm việc tối đa 40 giờ, máy II làm việc tối đa 60 giờ. Mỗi sản phẩm A cho lợi nhuận 2 triệu đồng, mỗi sản phẩm B cho lợi nhuận 3 triệu đồng. Mỗi tuần xưởng sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại A và B thì thu được lợi nhuận cao nhất? Biết rằng sản phẩm sản xuất ra đều bán hết.

Giải

Gọi x, y ($x \geq 0$, $y \geq 0$) lần lượt là số sản phẩm loại A và B được sản xuất trong một tuần. Khi đó, lợi nhuận thu được là $P = 2x + 3y$ (triệu đồng).

Do thời gian làm việc tối đa mỗi tuần của máy I và máy II lần lượt là 40 giờ và 60 giờ nên ta có $x + 2y \leq 40$ và $3x + 2y \leq 60$.

Từ đó, ta nhận được bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$P = 2x + 3y \to \max$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} x + 2y \leq 40 \\ 3x + 2y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

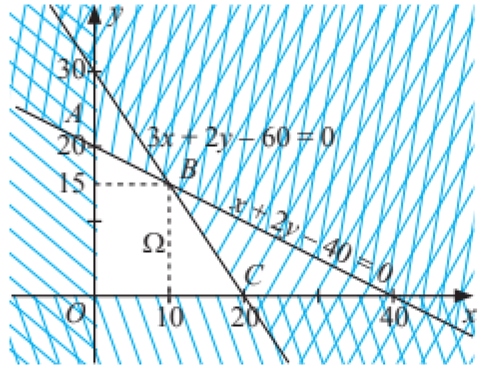
Tập phương án Ω của bài toán là miền tứ giác $OABC$ trên Hình 6 với các đỉnh $O(0;\,0)$, $A(0;\,20)$, $B(10;\,15)$, $C(20;\,0)$. Giá trị của P tại các đỉnh:

$P(0;\,0) = 0;$

$P(0;\,20) = 1\,.\,0 + 3\,.\,20 = 60;$

$P(10;\,15) = 2\,.\,10 + 3\,.\,15 = 65;$

$P(20;\,0) = 2\,.\,20 + 3\,.\,0 = 40.$



Hình 6

Do đó $\max\limits_{\Omega} P = 65$, đạt được khi $x = 10$, $y = 15$.

Vậy mỗi tuần xưởng sản xuất 10 sản phẩm loại A và 15 sản phẩm loại B thì thu được lợi nhuận cao nhất là 65 triệu đồng.

Ví dụ 4. Thức ăn vật nuôi tại một phòng thí nghiệm được trộn từ hai loại thức ăn A và B, với yêu cầu cung cấp ít nhất 540 g protein và ít nhất 160 g lipid (chất béo) mỗi ngày. Biết rằng hàm lượng protein và lipid trong thức ăn loại A lần lượt là 36% và 16%; trong thức ăn loại B lần lượt là 54% và 8%. Giá của thức ăn loại A là 40 nghìn đồng/kg, thức ăn loại B là 30 nghìn đồng/kg. Cần dùng bao nhiêu kilôgam thức ăn loại A và loại B mỗi ngày để chi phí thức ăn cho những vật nuôi là thấp nhất?

Giải

Gọi x, y ($x \geq 0, y \geq 0$, tính theo kg) lần lượt là khối lượng thức ăn loại A và loại B mỗi ngày cho vật nuôi tại phòng thí nghiệm. Từ yêu cầu tối thiểu 540 g (0,54 kg) protein và 160 g (0,16 kg) lipid trong thức ăn mỗi ngày, ta có các bất phương trình

$$\begin{cases} 0{,}36x + 0{,}54y \geq 0{,}54 \\ 0{,}16x + 0{,}08y \geq 0{,}16 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x + 3y \geq 3 \\ 2x + y \geq 2. \end{cases}$$

Chi phí mua thức ăn loại A và loại B mỗi ngày là $C = 40x + 30y$ (nghìn đồng).

Từ đó, ta nhận được bài toán quy hoạch tuyến tính:

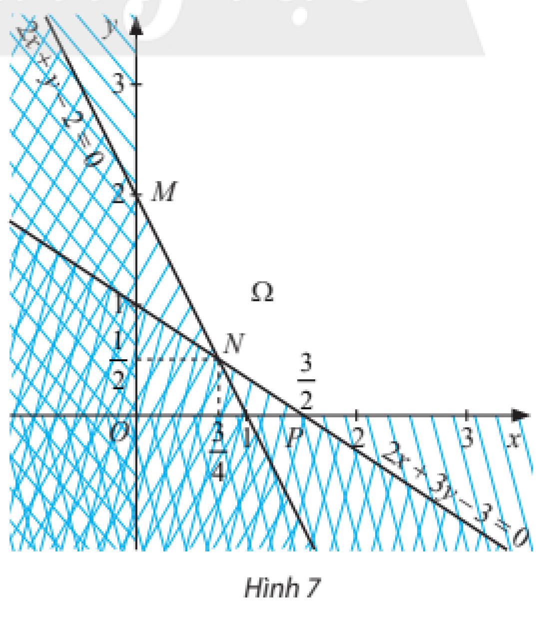
$$C = 40x + 30y \to \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 3 \\ 2x + y \geq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Tập phương án Ω của bài toán là miền không gạch chéo như Hình 7, có các đỉnh là $M(0;\,2)$, $N\left(\dfrac{3}{4};\,\dfrac{1}{2}\right)$ và $P\left(\dfrac{3}{2};\,0\right)$.

Miền Ω nằm trong góc phần tư thứ nhất, các hệ số của hàm mục tiêu C dương nên C đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh của Ω.



Hình 7

Giá trị của C tại các đỉnh:

$C(0; 2) = 40 . 0 + 30 . 2 = 60;$

$C\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right) = 40 . \frac{3}{4} + 30 . \frac{1}{2} = 45;$

$C\left(\frac{3}{2}; 0\right) = 40 . \frac{3}{2} + 30 . 0 = 60.$

Suy ra $\min\limits_{\Omega} C = 45$, đạt được khi $x = \frac{3}{4} = 0{,}75$; $y = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Vậy khi dùng 0,75 kg thức ăn loại A và 0,5 kg thức ăn loại B mỗi ngày thì chi phí thức ăn cho vật nuôi là thấp nhất (45 nghìn đồng/ngày).

3 Một dây chuyền của nhà máy sản xuất đá xây dựng dự định sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Thời gian để dây chuyền sản xuất 100 tấn sản phẩm loại A và 100 tấn sản phẩm loại B lần lượt là 2 giờ và 3 giờ. Do nhu cầu thị trường, xí nghiệp sản xuất sản lượng sản phẩm loại A không ít hơn 3 lần sản lượng sản phẩm loại B. Sản phẩm loại A cho lợi nhuận là 5 triệu đồng/100 tấn; sản phẩm loại B cho lợi nhuận 9 triệu đồng/100 tấn. Trong thời gian không quá 6 giờ làm việc của dây chuyền, cần sản xuất bao nhiêu tấn sản phẩm loại A, bao nhiêu tấn sản phẩm loại B để thu được lợi nhuận cao nhất?

Hình 8

4 Trong 100 g thịt bò loại I có chứa 21 g protein và 3,5 g lipid; 100 g thịt bò loại II có chứa 18 g protein và 10,5 g lipid. Biết rằng thịt bò loại I có giá 220 nghìn đồng/kg thì thịt bò loại II có giá 210 nghìn đồng/kg. Để có lượng thực phẩm từ hai loại thịt bò trên cung cấp ít nhất 630 g protein và 210 g lipid, cần mua khối lượng bao nhiêu cho mỗi loại thịt bò loại I và II sao cho chi phí thấp nhất?

BÀI TẬP

1. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 8x + 5y \to \max, \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} 2x + y \le 8 \\ x \ge 0 \\ x \le 3 \\ y \ge 1 \\ y \le 5. \end{cases}$$

2. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 10x + 20y \to \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} 20x + 5y \geq 40 \\ 15x + 60y \geq 120 \\ x - y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

3. Một cơ sở đóng thuyền thủ công cần 10 giờ lao động để đóng một thuyền loại A và 15 giờ lao động để đóng một thuyền loại B. Mỗi tuần cơ sở bố trí được tối đa 120 giờ lao động cho việc đóng hai loại thuyền này. Qua thực tế, người ta thấy mỗi tuần cơ sở bán được tối đa 6 thuyền loại A và tối thiểu 2 thuyền loại B. Mỗi thuyền loại A, loại B cho lợi nhuận lần lượt là 0,5 triệu đồng và 0,7 triệu đồng. Mỗi tuần cơ sở nên đóng bao nhiêu thuyền mỗi loại để có thể thu được lợi nhuận cao nhất?

4. Để làm một chiếc bánh bao loại X cần 100 g bột mì và 60 g thịt nạc vai. Để làm một chiếc bánh bao loại Y cần 150 g bột mì và 30 g thịt nạc vai. Có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu chiếc bánh bao từ 3 kg bột mì và 1,2 kg thịt nạc vai có sẵn? Biết rằng không thiếu các nguyên liệu khác để làm bánh.

5. Hàm lượng các vi chất (chất vi lượng) calcium, phosphorus và iron chứa trong 100 g hai loại thực phẩm X và Y được cho ở bảng sau:

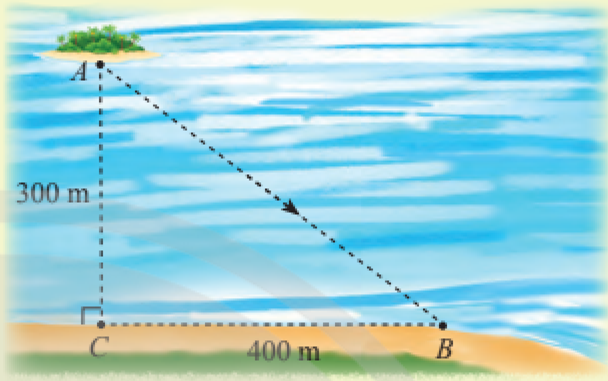
	Calcium (mg)	Phosphorus (mg)	Iron (mg)
X	200	600	8
Y	500	300	6

Từ hai loại thực phẩm X và Y, người ta muốn tạo ra một lượng thực phẩm hỗn hợp chứa ít nhất 2 000 mg calcium, 3 000 mg phosphorus, 48 mg iron. Cần chọn bao nhiêu gam mỗi loại thực phẩm X và Y sao cho lượng thực phẩm hỗn hợp có khối lượng nhỏ nhất?

Bài 2. VẬN DỤNG ĐẠO HÀM GIẢI BÀI TOÁN TỐI ƯU

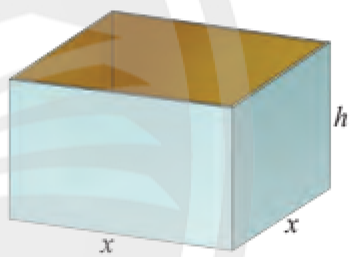
Từ khoá: Bài toán tối ưu.

Một người đang ở vị trí A muốn đi đến vị trí B trên bờ hồ như hình bên. Biết rằng người đó chèo thuyền với tốc độ 50 m/phút và chạy bộ với tốc độ 100 m/phút. Nếu người đó chèo thuyền thẳng từ A đến B thì tốn bao nhiêu thời gian? Có phương án nào tốn ít thời gian hơn không?



1. Vận dụng đạo hàm giải bài toán tối ưu

Người ta muốn sản xuất những chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông và thể tích chứa là 500 dm^3 (Hình 1). Biết rằng chiều cao của thùng trong khoảng từ 3 dm đến 10 dm.



Hình 1

a) Nếu gọi độ dài cạnh đáy của thùng là x (dm), chiều cao của thùng là h (dm) thì tổng diện tích các mặt của thùng, kí hiệu S, có thể được biểu thị bằng biểu thức nào?

b) Có thể biểu thị tổng diện tích S theo x không? Biến x nhận giá trị trong miền nào?

c) Với giá trị nào của x thì S có giá trị nhỏ nhất?

Bằng cách sử dụng đạo hàm, ta có thể giải nhiều bài toán tối ưu (bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của đại lượng nào đó) xuất hiện trong khoa học và cuộc sống.

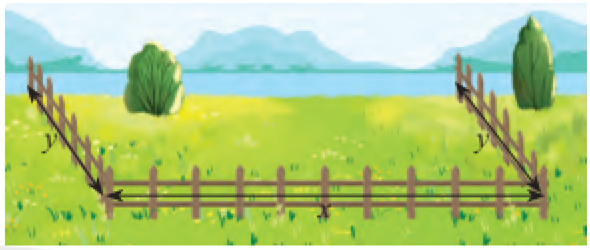
Để giải bài toán tối ưu bằng cách sử dụng đạo hàm, ta thường thực hiện các bước như sau:

Bước 1: Chọn một hoặc một số chữ cái x, a, b, … gọi là biến để biểu thị những đại lượng chưa biết và viết biểu thức biểu thị đại lượng, kí hiệu P, cần tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P theo các biến đó.

Bước 2: Viết lại biểu thức P thành biểu thức chứa một biến (chẳng hạn là x) bằng cách biểu thị các biến khác theo biến x nhờ các dữ kiện đề bài đã cho. Từ đó, ta nhận được hàm số xác định bởi công thức $P = f(x)$.

Bước 3: Xác định tập hợp D gồm các giá trị mà biến x có thể nhận.
Bước 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $P = f(x)$ trên D và trả lời bài toán.

Ví dụ 1. Trên một cánh đồng rộng lớn, người ta dự định rào một đồng cỏ có dạng hình chữ nhật với diện tích 80 000 m^2 và tiếp giáp với một bờ sông thẳng (Hình 2). Cần chọn các kích thước của đồng cỏ bằng bao nhiêu để độ dài của hàng rào cần dựng nhỏ nhất?



Hình 2

Giải

Gọi x, y $(x, y > 0)$ là hai kích thước (tính theo m) của đồng cỏ.

Do đồng cỏ có diện tích 80000 m^2 nên $xy = 80000$, suy ra $y = \dfrac{80\,000}{x}$.

Tổng chiều dài (tính theo m) của hàng rào là

$$f(x) = x + 2y = x + 2\,.\,\frac{80\,000}{x} = x + \frac{160\,000}{x}.$$

Xét hàm số $f(x) = x + \dfrac{160\,000}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = 1 - \dfrac{160\,000}{x^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{160\,000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 160000 \Leftrightarrow x = 400 \text{ (do } x > 0).$$

Bảng biến thiên:

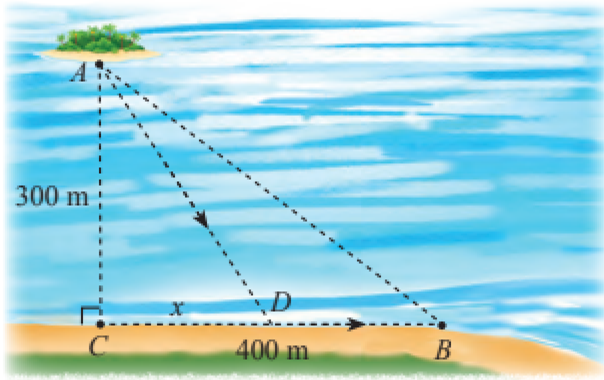
x	0		400		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	800	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 800, đạt được khi $x = 400$.

Khi đó, $y = \dfrac{80\,000}{400} = 200$.

Vậy để độ dài hàng rào cần dựng là nhỏ nhất, đồng cỏ cần có chiều dài 400 m và chiều rộng 200 m.

Ví dụ 2. Xét tình huống ở ▶ (trang 15). Giả sử người đó chèo thuyền thẳng đến điểm D nằm giữa B và C và cách C một đoạn x (m), rồi chạy bộ thẳng đến B. Tìm giá trị của x để người đó tốn ít thời gian nhất.



Hình 3

Giải

Ta có: $AD = \sqrt{x^2 + 300^2} = \sqrt{x^2 + 90\,000}$ (m); $DB = 400 - x$ (m) với $0 \le x \le 400$.

Thời gian người đó tiêu tốn là

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + 90\,000}}{50} + \frac{400 - x}{100} = \frac{1}{100}\left(2\sqrt{x^2 + 90\,000} + 400 - x\right) \text{ (phút).}$$

Xét hàm số $y = 2\sqrt{x^2 + 90\,000} + 400 - x$ với $0 \le x \le 400$, ta có:

$$y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 90\,000}} - 1;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 90\,000}} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 90\,000} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 90\,000$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 30\,000 \Leftrightarrow x = 100\sqrt{3} \in [0; 400].$$

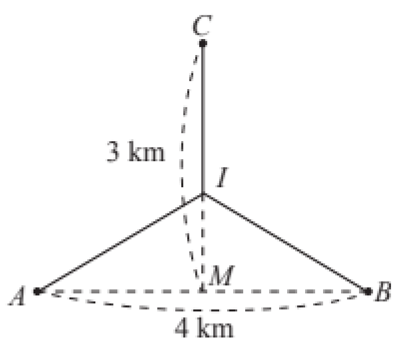
Ta có $y(0) = 1\,000$; $y(100\sqrt{3}) = 300\sqrt{3} + 400 \approx 920$; $y(400) = 1\,000$.

Vậy $\min\limits_{[0;400]} y = y(100\sqrt{3}) \approx 920$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của t là $\frac{920}{100} = 9{,}2$ (phút), đạt được khi $x = 100\sqrt{3} \approx 173$ (m).

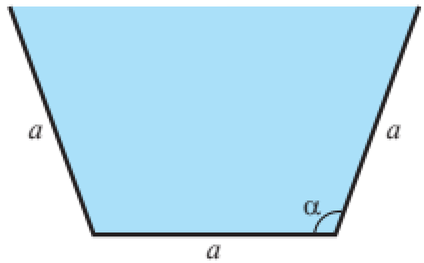
Vậy người đó tốn ít thời gian nhất khi $x = 100\sqrt{3} \approx 173$ (m).

1 Hai nhà máy được đặt tại các vị trí A và B cách nhau 4 km. Nhà máy xử lí nước thải được đặt ở vị trí C trên đường trung trực của đoạn thẳng AB, cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng là 3 km. Người ta muốn làm đường ống dẫn nước thải từ hai nhà máy A, B đến nhà máy xử lí nước thải C gồm các đoạn thẳng AI, BI và IC, với I là vị trí nằm giữa M và C (Hình 4). Cần chọn vị trí điểm I như thế nào để tổng độ dài đường ống nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.



Hình 4

Mặt cắt ngang của một máng dẫn nước là một hình thang cân có độ dài đáy bé bằng độ dài cạnh bên và bằng a (cm) không đổi (Hình 5). Gọi α là một góc của hình thang cân tạo bởi đáy bé và cạnh bên ($\frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi$). Tìm α để diện tích mặt cắt ngang của máng lớn nhất.



Hình 5

2. Giải bài toán tối ưu trong kinh tế

Trong sản xuất, kinh doanh, người ta thường cố gắng tìm các phương án sao cho chi phí bỏ ra thấp nhất, lợi nhuận thu được lớn nhất, …. Từ đây xuất hiện nhiều bài toán tối ưu trong kinh tế mà ta có thể giải nhờ ứng dụng đạo hàm. Dưới đây, ta xét một số bài toán đơn giản.

Ví dụ 3. Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0{,}001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100 m^3 sản phẩm.

a) Tính tổng chi phí (kí kiệu là C, đơn vị: triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm trong một ngày.

b) Tính chi phí trung bình (kí hiệu là $\overline{C}$) trên mỗi mét khối sản phẩm.

c) Tìm giá trị của x sao cho chi phí trung bình $\overline{C}$ thấp nhất. Tìm giá trị thấp nhất đó.

Giải

a) Tổng chi phí (triệu đồng) để xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm trong một ngày là

$$C = C(x) = 4 + 0{,}2x + 0{,}001x^2 \text{ với } 0 \le x \le 100.$$

b) Chi phí trung bình (triệu đồng) trên mỗi mét khối sản phẩm là

$$\overline{C} = \overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{4 + 0{,}2x + 0{,}001x^2}{x} = 0{,}001x + \frac{4}{x} + 0{,}2 \text{ với } 0 < x \le 100.$$

c) Ta có: $\overline{C}'(x) = 0{,}001 - \frac{4}{x^2}$;

$$\overline{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}001 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4000 \Leftrightarrow x = 20\sqrt{10} \in (0;\, 100].$$

Ta có $\overline{C}(20\sqrt{10}) = \frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5} \approx 0{,}326$.

Bảng biến thiên:

x	0		$20\sqrt{10}$		100
$\overline{C}'$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{10}}{25} + \frac{1}{5}$	$\nearrow$	$0{,}34$

Từ bảng biến thiên, ta thấy chi phí trung bình thấp nhất là $\overline{C}(20\sqrt{10}) \approx 0{,}326$ (triệu đồng/m^3 sản phẩm), đạt được khi $x = 20\sqrt{10} \approx 63$ (m^3).

Ví dụ 4. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tuần A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x sản phẩm thì giá bán cho mỗi sản phẩm là $P(x) = 45 - 0{,}001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x sản phẩm trong một tuần là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi sản phẩm).

a) Nếu mỗi tuần A bán x sản phẩm cho B thì A thu được lợi nhuận bao nhiêu?

b) A bán cho B bao nhiêu sản phẩm mỗi tuần thì thu được lợi nhuận lớn nhất? Tìm giá trị lợi nhuận lớn nhất đó.

Giải

a) Số tiền mà A thu được (gọi là doanh thu) từ việc bán x sản phẩm ($x \in \mathbb{Z}$, $0 \le x \le 100$) cho B là

$$R(x) = x \,.\, P(x) = x(45 - 0{,}001x^2) = 45x - 0{,}001x^3 \text{ (triệu đồng)}.$$

Lợi nhuận (triệu đồng) mà A thu được là

$$L(x) = R(x) - C(x) = 45x - 0{,}001x^3 - (100 + 30x)$$
$$= -0{,}001x^3 + 15x - 100 \ (x \in \mathbb{Z},\ 0 \le x \le 100).$$

b) Xét hàm số $f(x) = -0{,}001x^3 + 15x - 100$ với $0 \le x \le 100$, ta có:

$f'(x) = -0{,}003x^2 + 15;$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 5000 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \in [0; 100].$

Ta có $f(0) = -100$; $f(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607{,}107$; $f(100) = 400$.

Bảng biến thiên:

x	0		$50\sqrt{2}$		100
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-100	$\nearrow$	$500\sqrt{2} - 100$	$\searrow$	400

Từ bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{[0;100]} f(x) = f(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100 \approx 607{,}107$.

Ta có $70 < 50\sqrt{2} < 71$ và $f(70) = 607$; $f(71) = 607{,}089$.

Vậy nhà máy A thu được lợi nhuận lớn nhất khi bán cho nhà máy B 71 sản phẩm mỗi tuần và lợi nhuận lớn nhất thu được là 607,089 triệu đồng.

3 Tại một xưởng sản xuất, chi phí để sản xuất x sản phẩm mỗi tháng là

$$C(x) = 5000 + 50x + 0{,}005x^2 \text{ (nghìn đồng)}.$$

a) Tính chi phí trung bình để sản xuất một sản phẩm.

b) Mỗi tháng xưởng sản xuất bao nhiêu sản phẩm thì chi phí trung bình để sản xuất một sản phẩm thấp nhất?

Cơ sở A chuyên cung cấp một loại sản phẩm nông nghiệp X cho nhà phân phối B. Hai bên thoả thuận rằng, nếu đầu tháng B đặt hàng x tạ sản phẩm X thì giá bán mỗi tạ sản phẩm là $P(x) = 5 - 0{,}0005x^2$ (triệu đồng) ($x \leq 40$). Chi phí A phải bỏ ra cho x tạ sản phẩm X trong một tháng là $C(x) = 10 + 3{,}5x$ (triệu đồng).

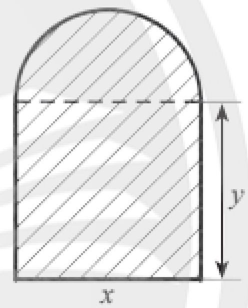
a) Nếu trong một tháng A bán x tạ sản phẩm X cho B thì A nhận được bao nhiêu doanh thu, bao nhiêu lợi nhuận?

b) Trong một tháng B đặt hàng bao nhiêu tạ sản phẩm X từ A thì A nhận được lợi nhuận lớn nhất?

Hiện tại, mỗi tháng một cửa hàng đồ lưu niệm bán được 100 sản phẩm A. Với mỗi sản phẩm A bán được, cửa hàng thu được 20 nghìn đồng lợi nhuận. Qua khảo sát, người ta thấy rằng với mỗi nghìn đồng giảm giá, cửa hàng bán thêm được 10 sản phẩm A. Cửa hàng nên giảm giá bao nhiêu cho mỗi sản phẩm A để thu được lợi nhuận lớn nhất từ việc bán sản phẩm này? Tính lợi nhuận lớn nhất đó.

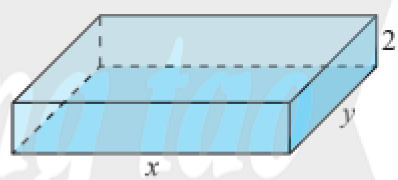
BÀI TẬP

1. Người ta muốn xây một đường cống thoát nước có mặt cắt ngang là hình tạo bởi một nửa hình tròn ghép với một hình chữ nhật (Hình 6). Biết rằng mặt cắt ngang có diện tích 2 m^2. Các kích thước x, y (đơn vị: m) bằng bao nhiêu để chu vi của mặt cắt ngang là nhỏ nhất? Tính chu vi nhỏ nhất đó.



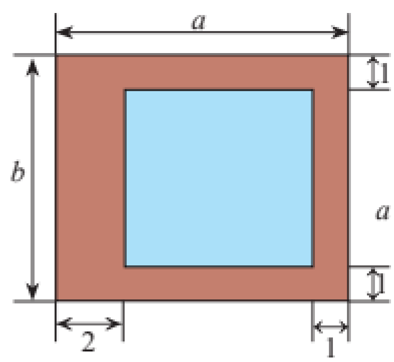
Hình 6

2. Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích 1 800 m^3 và chiều sâu 2 m (Hình 7). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Cần chọn chiều dài và chiều rộng của bể bằng bao nhiêu để tiết kiệm chi phí xây dựng bể nhất?



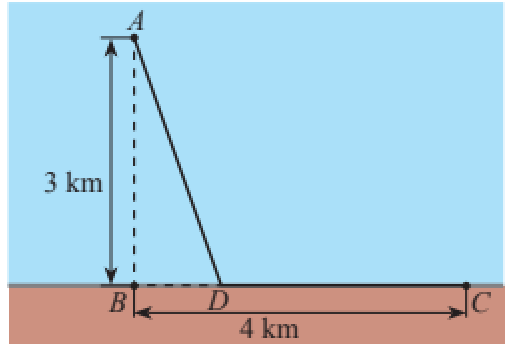
Hình 7

3. Người ta muốn thiết kế một lồng nuôi cá có bề mặt hình chữ nhật bao gồm phần mặt nước có diện tích bằng 54 m^2 và phần đường đi xung quanh với kích thước (đơn vị: m) như Hình 8. Bề mặt của lồng có chiều dài và chiều rộng bằng bao nhiêu để diện tích phần đường đi là bé nhất?



Hình 8

4. Một giếng dầu ngoài khơi được đặt ở vị trí A cách bờ biển 3 km, B là vị trí trên bờ biển gần giếng dầu nhất. Nhà máy lọc dầu được đặt ở vị trí C trên bờ biển, cách vị trí B một khoảng 4 km (Hình 9). Người ta dự định lắp đặt đường ống dẫn dầu gồm hai đoạn thẳng AD và DC (D là một vị trí nằm giữa B và C). Biết rằng mỗi mét đường ống đặt dưới biển có chi phí lắp đặt cao gấp đôi so với mỗi mét đường ống đặt trên bờ. Vị trí của D như thế nào để giảm thiểu chi phí lắp đặt nhất?



Hình 9

5. Tại một xí nghiệp, nếu trong một tuần xí nghiệp sản xuất x nghìn sản phẩm thì chi phí sản xuất gồm: 10 triệu đồng chi phí cố định, 3 triệu đồng cho mỗi nghìn sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng thiết bị.

a) Tính chi phí trung bình trên mỗi nghìn sản phẩm theo x.

b) Mỗi tuần xí nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để chi phí trung bình thấp nhất?

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 1

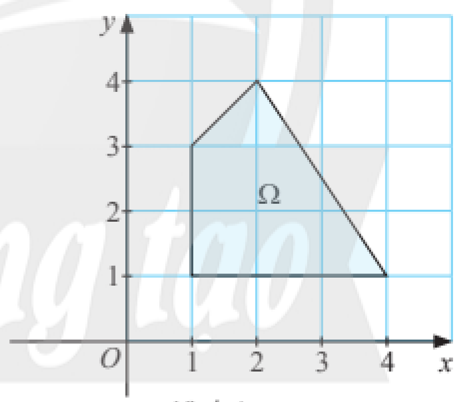
CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x; y) = 5x - 2y$ trên miền Ω ở Hình 1 là

A. 3. B. 22.

C. 18. D. 20.

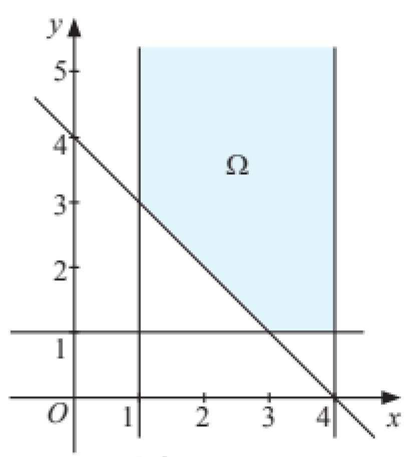


Hình 1

2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = 5x + 2y$ trên miền Ω ở Hình 2 là

A. 11. B. 17.

C. 7. D. 20.



Hình 2

3. Một nhà phân phối có thể thuê tối đa 3 chiếc xe tải loại A và 8 chiếc xe tải loại B để vận chuyển 100 chiếc máy giặt từ nhà máy sản xuất đến nơi tiêu thụ. Mỗi xe loại A chở được tối đa 20 máy giặt với giá cước 3 triệu đồng mỗi chuyến, mỗi xe loại B chở được tối đa 10 máy giặt với giá cước 2 triệu đồng mỗi chuyến. Nếu mỗi xe chỉ chở nhiều nhất một chuyến, số tiền cước tối thiểu (triệu đồng) mà nhà phân phối phải trả là

A. 19. B. 17. C. 15. D. 25.

4. Một người muốn làm một bể chứa hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích 4 m^3, chiều cao 1 m. Biết rằng chi phí làm đáy bể là 3 triệu đồng/m^2, chi phí làm thành bể là 2 triệu đồng/m^2. Chi phí tối thiểu để làm bể là

A. 20. B. 24. C. 28. D. 32.

5. Chi phí để sản xuất x sản phẩm là $C(x) = 2\,500 + 10x + \frac{1}{4}x^2$ (nghìn đồng). Chi phí trung bình trên mỗi sản phẩm là thấp nhất khi số lượng sản phẩm được sản xuất là

A. 20. B. 50. C. 100. D. 1 000.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

6. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 40x + 15y \to \max, \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} 5x + 3y \le 15 \\ x + 3 \le 3y \\ x \ge 0. \end{cases}$$

7. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$F = 3x + 5y \to \min$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} 2x - y + 4 \ge 0 \\ 4x + 3y \ge 12 \\ 2x - 3y \le 6. \end{cases}$$

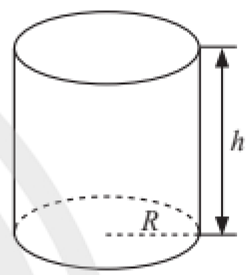
8. Thức ăn chăn nuôi A gồm 60% bột ngô và 40% bột đậu nành, thức ăn chăn nuôi B gồm 80% bột ngô và 20% bột đậu nành. Hiện tại xí nghiệp sản xuất chỉ còn 2,4 tấn bột ngô và 1,2 tấn bột đậu nành. Với số nguyên liệu này, xí nghiệp đó nên sản xuất khối lượng bao nhiêu mỗi loại sản phẩm A và B để thu được lợi nhuận cao nhất? Biết rằng A cho lợi nhuận 2 triệu đồng/tấn và B cho lợi nhuận 1,8 triệu đồng/tấn.

9. Hàm lượng protein, lipid và glucid (tính theo gam) trong 100 g mỗi loại thực phẩm A và B được cho bởi bảng sau:

	Protein	Lipid	Glucid
A	24	3	60
B	8	2	80

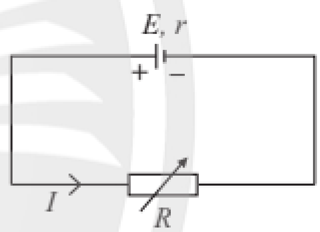
Từ hai loại thực phẩm A và B, người ta muốn tạo ra một lượng thực phẩm chứa ít nhất 480 g protein, 90 g lipid và 2 400 g glucid. Biết rằng một kilôgam mỗi loại thực phẩm A và B có giá lần lượt là 80 nghìn đồng, 100 nghìn đồng. Cần chọn bao nhiêu kilôgam mỗi loại thực phẩm A và B để chi phí thấp nhất?

10. Một người muốn làm một thùng chứa hình trụ có nắp, có dung tích 500 dm^3. Cần chọn bán kính đáy và chiều cao của thùng bằng bao nhiêu để tiết kiệm nguyên liệu nhất? Biết đáy và mặt xung quanh của thùng có độ dày như nhau và xác định trước.



Hình 3

11. Cho mạch điện có sơ đồ như Hình 4. Nguồn điện có suất điện động $E = 4$ V và điện trở trong $r = 2\ \Omega$. Điện trở ở mạch ngoài là R (Ω) thay đổi. Cường độ dòng điện I (A) chạy trong mạch và công suất P (W) của dòng điện ở mạch ngoài được tính lần lượt theo các công thức



Hình 4

$$I = \frac{E}{r + R} \text{ và } P = I^2R$$

(Vật lí 11, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2012, trang 49, 51).

Điện trở R bằng bao nhiêu thì công suất P có giá trị lớn nhất? Tính giá trị lớn nhất đó.

12. Theo kết quả thăm dò trước một buổi biểu diễn văn nghệ ngoài trời, nếu giá bán mỗi vé là p nghìn đồng thì sẽ có x người mua vé xem biểu diễn, giữa p và x có mối liên hệ: $p = 500.e^{-0,0005x}$. Đơn vị tổ chức nên bán vé với giá bao nhiêu thì đạt được doanh thu (tổng số tiền bán vé) cao nhất?

Chuyên đề 2

ỨNG DỤNG TOÁN HỌC TRONG MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN TÀI CHÍNH

Toán học có rất nhiều ứng dụng trong các vấn đề về tài chính như: tính toán chi tiêu trong ngân sách, tính lãi suất trong tiết kiệm, đầu tư, … . Trong chuyên đề 2, chúng ta sẽ tìm hiểu một số vấn đề về tiền tệ, lãi suất, tín dụng, vay nợ, đầu tư tài chính và kế hoạch tài chính cá nhân. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu về cách vận dụng toán học để giải quyết một số vấn đề về tài chính.

Toán học được sử dụng trong hầu hết các hoạt động tài chính của các ngân hàng.

Sau chuyên đề này, bạn có thể:

– Nhận biết được một số vấn đề về tiền tệ: các loại tiền, các đơn vị tiền tệ, tỉ giá, lạm phát.
– Thiết lập được kế hoạch tài chính cá nhân cho các nhu cầu dài hạn như giáo dục hoặc sống tự lập.
– Nhận biết được một số vấn đề về lãi suất và vay nợ của các tổ chức tín dụng (như ngân hàng, quỹ tín dụng, …).
– Tính được lãi suất được hưởng qua tiền tiết kiệm và các giá trị thực chất có tính đến lạm phát.
– Tính được lãi suất cần trả cho thẻ tín dụng, phí sử dụng thẻ (bao gồm các giao dịch).
– Nhận biết được kết quả của việc trả các khoản tiền nợ đúng thời hạn, bao gồm hồ sơ tín dụng và giá trị tín dụng.
– Giải thích được rằng các khoản đầu tư có thể tăng giá trị và cũng như tiền, có thể giảm giá trị nếu lạm phát vượt tỉ lệ lãi suất.
– Vận dụng được kiến thức toán học trong việc giải quyết một số vấn đề về tài chính.

Bài 1. TIỀN TỆ. LÃI SUẤT

Từ khoá: Tiền tệ; Lãi suất; Lãi đơn; Lãi kép; Lạm phát; Tỉ lệ lạm phát; Lãi suất thực.

Tại sao con người lại phát minh ra tiền? Hãy nêu những khó khăn trong đời sống khi con người chưa phát minh ra tiền giấy.

1. Tiền tệ

Khái niệm tiền tệ

(*Nguồn:* Ngô Tuấn Nghĩa, Giáo trình Kinh tế chính trị Mác – Lê Nin, Nhà xuất bản Chính trị quốc gia Sự thật, 2019)

1

a) Hằng ngày bạn dùng tiền để làm gì?

b) Kể tên các hình thức của tiền từ xưa đến nay mà bạn biết.

c) Đơn vị tiền tệ của mỗi nước có giống nhau không?

Hình 1

Tiền là hình thái biểu hiện giá trị của hàng hoá. Tiền phản ánh lao động xã hội và mối quan hệ giữa những người sản xuất và trao đổi hàng hoá.

Tiền (tiền tệ) là bất cứ phương tiện nào được thừa nhận chung để trao đổi hàng hoá, dịch vụ hoặc để trả các khoản nợ.

Chú ý: Các chức năng của tiền được thừa nhận là: thước đo giá trị, phương tiện lưu thông, phương tiện cất giữ, phương tiện thanh toán, tiền tệ thế giới.

Đơn vị tiền tệ

Khi phân biệt tiền tệ của quốc gia này với tiền tệ của quốc gia khác, người ta dùng cụm từ ***"đơn vị tiền tệ"***. Đơn vị tiền tệ của nhiều quốc gia có thể có tên gọi riêng (ví dụ: Việt Nam đồng, Nhân dân tệ, ...) hoặc có cùng một tên gọi (ví dụ: đô la (Dollar)) và để phân biệt các đơn vị tiền tệ đó, người ta thường phải gọi kèm tên quốc gia sử dụng đồng tiền (ví dụ: đô la Úc, đô la Mỹ, ...). Với sự hình thành của các khu vực tiền tệ thống nhất, ngày nay có nhiều quốc gia dùng chung một đơn vị tiền tệ như đồng Euro.

Ví dụ 1. Kể tên và kí hiệu đơn vị tiền tệ (theo Ngân hàng Nhà nước Việt Nam) của các nước: Mỹ, Nga, Trung Quốc, Thái Lan.

Giải

Theo Ngân hàng Nhà nước Việt Nam, ta có:

Quốc gia	Mỹ	Nga	Trung Quốc	Thái Lan
Tên đơn vị tiền tệ	Đô la Mỹ	Rúp Nga	Nhân dân tệ	Bath Thái
Kí hiệu	USD	RUB	CNY	THB

(*Nguồn:* https://www.sbv.gov.vn/TyGia)

1 Kể tên đơn vị tiền tệ của các nước: Anh, Úc, Nhật Bản, Hàn Quốc, Malaysia (theo Ngân hàng Nhà nước Việt Nam).

1 Kể tên bốn nước dùng chung đơn vị tiền tệ là đồng Euro.

Tỉ giá

2 a) Làm thế nào để quy đổi tiền của nước này sang tiền của nước khác?

b) Em hãy tìm hiểu một số thông tin trong bảng ở Hình 2.

STT	Ngoại tệ	Tên ngoại tệ	Mua	Bán
1	USD	Đô la Mỹ	23.450	24.780
2	EUR	Đồng Euro	24.300	26.857
3	JPY	Yên Nhật	169	187
4	GBP	Bảng Anh	27.592	30.497
5	CHF	Phơ răng Thuỵ Sĩ	24.394	26.962
6	AUD	Đô la Úc	14.969	16.545
7	CAD	Đô la Canada	16.526	18.265

(*Nguồn: https://www.sbv.gov.vn/TyGia/faces/TyGiaSGD.jspx,* hình chụp trên trang web ngày 30/3/2023)

Hình 2

Trong các hoạt động buôn bán, giao dịch thương mại quốc tế, người ta thường phải đổi từ tiền tệ của quốc gia này sang tiền tệ của quốc gia khác. Việc trao đổi này được thực hiện dựa trên tỉ giá giữa hai loại tiền tệ.

Tỉ giá là tỉ lệ quy đổi giá trị một đơn vị tiền tệ này sang một đơn vị tiền tệ khác.

Ví dụ 2. Bảng trong Hình 2 cho biết giá mua và bán đô la Mỹ (USD) và đồng Euro (EUR) của Sở giao dịch Ngân hàng Nhà nước Việt Nam vào ngày 30/3/2023.

Nhìn vào bảng ta thấy có sự chênh lệch giữa giá mua và giá bán mỗi loại ngoại tệ. Ngân hàng bán ra 1 USD với giá 24 780 VND và mua vào 1 USD với giá 23 450 VND. Như vậy, khi mua 1 USD từ ngân hàng, người mua phải trả 24 780 VND và khi bán 1 USD cho ngân hàng, người bán thu được 23 450 VND.

Xét hai giao dịch sau trong ngày 30/3/2023.

a) Ông Đức mua 14 USD từ ngân hàng. Hỏi ông phải trả bao nhiêu VND?

b) Công ty B bán 100 000 USD cho ngân hàng. Hỏi công ty B thu được bao nhiêu VND?

Giải

a) Ông Đức cần mua đô la Mỹ từ ngân hàng nên ngân hàng sẽ áp dụng tỉ giá bán cho ông Đức. Vậy ông Đức cần trả: $24\,780 \,.\, 14 = 346\,920$ (VND).

b) Công ty B bán đô la Mỹ cho ngân hàng nên ngân hàng sẽ áp dụng tỉ giá mua để quy đổi. Vậy công ty B sẽ thu được: $23\,450 \,.\, 100\,000 = 2\,345\,000\,000$ (VND).

2 Sử dụng Bảng tỉ giá ở Hình 2 để trả lời câu hỏi sau:

a) Bà Lan mua 250 EUR từ ngân hàng vào ngày 30/3/2023. Hỏi bà Lan phải trả bao nhiêu VND?

b) Anh Tuấn bán 3500 EUR cho ngân hàng vào ngày 30/3/2023. Hỏi anh Tuấn thu được bao nhiêu VND?

2 Truy cập trang web *https://www.sbv.gov.vn/TyGia/faces/TyGia.jspx* của Ngân hàng Nhà nước Việt Nam để xem tỉ giá trao đổi ngoại tệ trong ngày.

a) Xác định giá mua 1 000 GBP (bảng Anh) từ ngân hàng.

b) Xác định giá bán 15 000 JPY (yên Nhật) cho ngân hàng.

c) Xác định giá mua 20 000 AUD (đô la Úc) từ ngân hàng.

2. Lãi suất

Khái niệm lãi suất

3 Đầu năm ông A đã vay của ông B 100 triệu đồng, hai bên thoả thuận đến cuối năm ông A phải hoàn trả cho ông B 100 triệu đồng tiền vốn đã vay và trả thêm 8 triệu đồng tiền lãi. Tìm tỉ số phần trăm giữa tiền lãi và tiền vốn.

Khi đi vay, người vay phải trả người cho vay một khoản tiền gọi là tiền lãi. Số tiền lãi tính theo một đơn vị thời gian xác định được gọi là ***lãi suất*** và thường tính theo đơn vị phần trăm (%). Thời gian vay được gọi là ***kì hạn vay***. Thời gian định kì trả lãi được gọi là ***kì trả lãi*** (***kì tính lãi***). Kì hạn vay tính theo số kì trả lãi gọi là số ***chu kì vay***. Mỗi chu kì vay bằng một kì trả lãi.

Lãi suất của một chu kì là tỉ lệ phần trăm giữa tiền lãi thu được ở cuối chu kì và tiền vốn cho vay từ đầu chu kì đó.

Chú ý: Trong chuyên đề này, nếu không nói gì thêm thì ta hiểu trong suốt kì hạn vay, lãi suất của mỗi chu kì vay là không đổi.

Cách tính lãi suất

4 Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng. So sánh số tiền lãi mà người đó nhận được sau 4 năm (kì hạn một năm) trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Lãi suất 8%/năm. Tiền lãi không được nhập vào vốn sau mỗi năm tính lãi của khoản vay.

Trường hợp 2. Lãi suất 7,5%/năm. Tiền lãi được nhập vào vốn sau mỗi năm để tính lãi cho năm kế tiếp của khoản vay.

Hình 3

Lãi đơn

Việc tính tiền lãi bằng cách lấy số tiền lãi ở mỗi chu kì không được tính vào vốn gốc để tính lãi cho chu kì tiếp theo gọi là ***phương thức tính lãi đơn***. Số tiền lãi tính theo phương thức này gọi là ***lãi đơn***.

Gọi P là vốn gốc, r là lãi suất trên một kì hạn, theo cách tính lãi đơn ta có:
Tiền lãi sau n chu kì là: $I_n = P \,.\, r \,.\, n$.
Giá trị cả vốn lẫn lãi sau n chu kì là: $F_n = P + I_n = P(1 + nr)$.

Lãi kép

Việc tính tiền lãi bằng cách lấy số tiền lãi của chu kì trước nhập vào vốn để tính lãi cho chu kì tiếp theo gọi là ***phương thức tính lãi kép***. Số tiền lãi tính theo phương thức này gọi là ***lãi kép***.

Gọi P là vốn gốc, r là lãi suất trên một kì hạn, theo cách tính lãi kép ta có:
Giá trị cả vốn lẫn lãi sau n chu kì là: $F_n = P(1 + r)^n$.
Tiền lãi sau n chu kì là: $I_n = F_n - P = P[(1 + r)^n - 1]$.

Ví dụ 3. Cho vay với vốn gốc 100 triệu đồng, lãi suất 8%/năm, kì trả lãi 1 năm, kì hạn vay 5 năm. Tìm tiền lãi sau 5 năm theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Giải

Ta có $P = 100$ (triệu đồng); $r = 8\%$; $n = 5$.

a) Tiền lãi tính theo phương thức tính lãi đơn là:

$$I_n = P \,.\, r \,.\, n = 100 \,.\, 8\% \,.\, 5 = 40 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Tiền lãi tính theo phương thức tính lãi kép là:

$$I_n = P[(1 + r)^n - 1] = 100[(1 + 8\%)^5 - 1] \approx 46{,}933 \text{ (triệu đồng).}$$

Ví dụ 4. Cho vay với vốn gốc 500 triệu đồng, lãi suất 6%/năm, kì trả lãi 3 tháng, kì hạn vay 2 năm. Tính tiền lãi sau 2 năm theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Giải

Ta có $P = 500$ (triệu đồng); $r = \dfrac{3}{12} \,.\, 6\%$; $n = \dfrac{2 \,.\, 12}{3} = 8$.

a) Tiền lãi tính theo phương thức tính lãi đơn là:

$$I_n = P \,.\, r \,.\, n = 500 \,.\, \left(\frac{3}{12} \,.\, 6\%\right) . \, 8 = 60 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Tiền lãi tính theo phương thức tính lãi kép là:

$$I_n = P[(1+r)^n - 1] = 500\left[\left(1 + \frac{3}{12} \,.\, 6\%\right)^8 - 1\right] \approx 63{,}246 \text{ (triệu đồng).}$$

Cho vay với vốn gốc 250 triệu đồng, lãi suất 12%/năm, kì trả lãi 6 tháng, kì hạn vay 4 năm. Tính tiền lãi sau 4 năm theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

Bác Tư gửi 400 triệu đồng vào ngân hàng A với lãi suất 4,8%/năm, kì trả lãi 3 tháng. Nếu rút trước kì hạn thì ngân hàng sẽ tính theo lãi suất không kì hạn là 0,1%/năm cho số ngày gửi thêm (tính lãi theo ngày). Tính tổng số tiền cả vốn và lãi bác Tư nhận được sau 290 ngày gửi tiền vào ngân hàng A (lãi suất không đổi suốt kì gửi tiền) theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

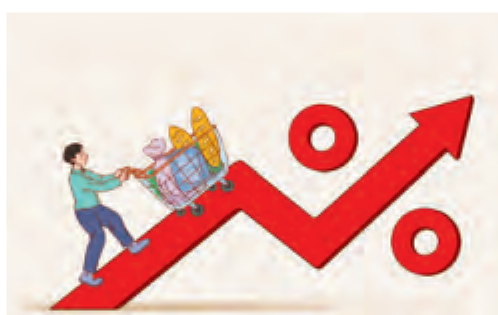
3. Lạm phát

Khái niệm lạm phát

Bạn Minh hay đi chợ giúp mẹ. Minh nhận thấy 1 kg thịt bò hôm nay có giá 280 nghìn đồng trong khi cách đây một năm 1 kg thịt bò đó chỉ có giá 250 nghìn đồng.

a) So với năm ngoái, giá một cân thịt bò đã tăng bao nhiêu phần trăm?

b) Theo em, sự tăng giá của giá cả hàng hoá nói lên điều gì về giá trị đồng tiền?



Hình 4

Lạm phát là sự tăng giá của hàng hoá, dịch vụ trong một khoảng thời gian, dẫn đến việc giảm giá trị của đồng tiền.
Tỉ lệ lạm phát được tính bằng tỉ lệ phần trăm sự thay đổi giá của hàng hoá, dịch vụ trong một khoảng thời gian (thường là một năm).

Các giá trị thực chất có tính đến lạm phát

So sánh giá trị của tiền tại hai thời điểm khác nhau

6 Giả sử tỉ lệ lạm phát của năm 2023 so với năm 2022 là 10%. Hãy cho biết:

a) 1 triệu đồng năm 2023 có giá trị tương đương với bao nhiêu tiền vào năm 2022.

b) 1 triệu đồng năm 2022 có giá trị tương đương với bao nhiêu tiền vào năm 2023.

Khi so sánh giá trị của đồng tiền tại hai thời điểm khác nhau, thực chất người ta có tính đến lạm phát.

Nếu tỉ lệ lạm phát của năm sau so với năm trước là i thì A đồng của năm sau có giá trị tương đương với $\frac{A}{1+i}$ đồng của năm trước và ngược lại A đồng của năm trước có giá trị tương đương với $A(1+i)$ đồng của năm sau.

Ví dụ 5. Giả sử tỉ lệ lạm phát của năm 2024 so với năm 2023 là 4%. Hãy cho biết:
a) 100 triệu đồng năm 2024 có giá trị tương đương với bao nhiêu tiền vào năm 2023.
b) 100 triệu đồng năm 2023 có giá trị tương đương với bao nhiêu tiền vào năm 2024.

Giải

a) Ta có $\frac{1}{1+4\%}.100 \approx 96,154$ (triệu đồng).

Vậy 100 triệu đồng năm 2024 có giá trị tương đương với khoảng 96,154 triệu đồng ở năm 2023.

b) Ta có $(1 + 4\%) . 100 = 104$ (triệu đồng).

Vậy 100 triệu đồng năm 2023 có giá trị tương đương với 104 triệu đồng ở năm 2024.

4 Giả sử tỉ lệ lạm phát của năm 2022 so với năm 2021 là 5%. Hãy cho biết:

a) 50 triệu đồng năm 2022 có giá trị tương đương với bao nhiêu tiền vào năm 2021.

b) 50 triệu đồng năm 2021 có giá trị tương đương với bao nhiêu tiền vào năm 2022.

4 Giả sử tỉ lệ lạm phát của năm 2012 so với năm 2011 là 16,7% và tỉ lệ lạm phát năm 2013 so với năm 2012 là 7,1%. Cho biết giá của một ổ bánh mì cuối năm 2011 là 2 000 đồng và giá bánh mì gia tăng theo lạm phát thì giá một ổ bánh mì năm 2013 sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm.)

Lãi suất thực

7 Ngày 01/6/2021, ông An gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất năm là $R = 10\%$ (kì hạn một năm).

a) Đến ngày 01/6/2022 ông An rút tiền ra thì tổng số tiền cả vốn và lãi là bao nhiêu?

b) Cho biết từ 01/6/2021 đến 01/6/2022 tỉ lệ lạm phát là $i = 2\%$. Hỏi số tiền ông An nhận được tương đương với bao nhiêu tiền vào thời điểm 01/6/2021?

Hình 5

c) Tính lãi suất thực tế r nếu có tính thêm yếu tố lạm phát.

Lãi suất danh nghĩa là lãi suất không đề cập đến các yếu tố lạm phát. ***Lãi suất thực*** là lãi suất thực sự còn lại sau khi có tính yếu tố lạm phát.

> Gọi i là tỉ lệ lạm phát, R là lãi suất danh nghĩa, r là lãi suất thực một năm.
>
> Ta có $1+r = \dfrac{1+R}{1+i}$; $r = \dfrac{(1+R)}{1+i} - 1$.

(*Nguồn:* Nguyễn Tấn Bình, Toán tài chính ứng dụng, Nhà xuất bản Thống kê, 2009; Bùi Hữu Phước, Toán tài chính, Nhà xuất bản Phương Đông, 2012)

Ví dụ 6. Bạn Minh gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất được ngân hàng niêm yết là 10%/năm (kì hạn một năm). Cho biết trong năm đó tỉ lệ lạm phát là 2%. Tính lãi suất danh nghĩa và lãi suất thực.

Giải

Lãi suất danh nghĩa là $R = 10\%$, tỉ lệ lạm phát là $i = 2\%$.

Lãi suất thực là $r = \dfrac{(1+R)}{1+i} - 1 = \dfrac{(1+10\%)}{1+2\%} - 1 \approx 7{,}84\%$.

Chú ý: Trong thực tế, để đơn giản người ta thường tính giá trị gần đúng r' của lãi suất thực bằng cách lấy lãi suất danh nghĩa trừ đi tỉ lệ lạm phát: $r' = R - i$. Chẳng hạn, trong Ví dụ 6 ta có $r' = R - i = 10\% - 2\% = 8\%$.

5 Ba của Lan gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất được ngân hàng niêm yết là 12%/năm (kì hạn một năm). Cho biết trong năm đó tỉ lệ lạm phát là 4%. Tính lãi suất danh nghĩa và lãi suất thực.

5 Theo Tổng cục Thống kê năm 2021, tỉ lệ lạm phát của Việt Nam là 1,84% (*nguồn:* www.gso.gov.vn). Ông Đạt gửi tiết kiệm trong năm 2021 với lãi suất 6%/năm, kì hạn một năm. Tính lãi suất danh nghĩa và lãi suất thực.

BÀI TẬP

1. Dưới đây là bảng tỉ giá trao đổi ngoại tệ và VND tại Ngân hàng Nhà nước Việt Nam ngày 16/6/2023.

TỈ GIÁ ÁP DỤNG CHO NGÀY 16/6/2023

Đơn vị: VND

STT	Ngoại tệ	Tên ngoại tệ	Mua	Bán
1	USD	Đô la Mỹ	23 400	24 846
2	EUR	Đồng Euro	24 652	27 247
3	JPY	Yên Nhật	161	178
4	GBP	Bảng Anh	28 794	31 825
5	CHF	Phơ răng Thuỵ Sĩ	25 254	27 912
6	AUD	Đô la Úc	15 499	17 130
7	CAD	Đô la Canada	17 031	18 823

Ghi chú: Tỉ giá mua, bán ngoại tệ USD/VND là tỉ giá giao ngay.

(*Nguồn:* https://www.sbv.gov.vn/TyGia/faces/TyGia)

Áp dụng bảng tỉ giá trên để:

a) Quy đổi 1 500 JPY sang VND theo giá mua vào.

b) Quy đổi 750 AUD sang VND theo giá bán ra.

2. Ông Dũng cho vay 800 triệu đồng với lãi suất 9%/năm, kì trả lãi 6 tháng. Tính số tiền lãi ông Dũng nhận được sau 2 năm theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

3. Bà Hương gửi 600 triệu đồng vào ngân hàng B với lãi suất 6,3%/năm, kì hạn 3 tháng. Nếu rút trước kì hạn thì ngân hàng sẽ tính theo lãi suất không kì hạn là 0,2%/năm cho số ngày gửi thêm. Tính tổng số tiền cả vốn và lãi bà Hương nhận được sau 370 ngày gửi tiền vào ngân hàng B theo phương thức tính:

a) Lãi đơn; b) Lãi kép.

4. Nếu tỉ lệ lạm phát hằng năm là 4% thì bao nhiêu năm nữa 1 tỉ đồng chỉ còn một nửa giá trị.

5. Ông Long gửi tiền vào ngân hàng B với lãi suất thoả thuận là 9%/năm. Cho biết trong năm đó tỉ lệ lạm phát là 3%, tính lãi suất danh nghĩa và lãi suất thực.

Bài 2. TÍN DỤNG. VAY NỢ

Từ khoá: Tín dụng; Thẻ tín dụng; Phí sử dụng thẻ; Tổ chức tín dụng; Hồ sơ tín dụng; Giá trị tín dụng.

Nêu các lợi ích của việc các cá nhân hoặc tổ chức có thể vay tiền các ngân hàng.

1. Thẻ tín dụng

Khái niệm tín dụng

1 Tìm hiểu các quy định của pháp luật Việt Nam về hoạt động cho vay phục vụ kinh doanh và nhu cầu đời sống (Khoản 1, Điều 2, Thông tư 39/2016/TT-NHNN).

Hình 1

Tín dụng là quan hệ vay mượn giữa người cho vay vốn và người vay vốn dựa trên nguyên tắc hoàn trả có kì hạn cả vốn và lãi.

Tín dụng có đặc điểm cơ bản là:

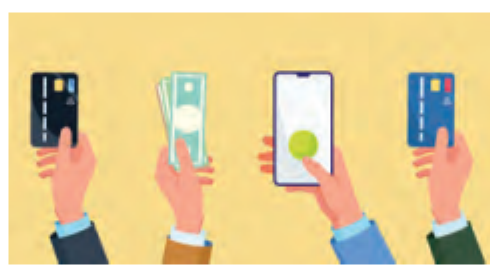
– Dựa trên sự tin tưởng: Người cho vay chỉ cấp tín dụng khi có lòng tin vào việc người vay có khả năng hoàn trả nợ đúng hạn.

– Có tính tạm thời: Người cho vay chỉ nhượng quyền sử dụng vốn cho người vay trong một khoảng thời gian nhất định.

– Có tính hoàn trả cả gốc lẫn lãi: Đến thời hạn, người vay có nghĩa vụ và trách nhiệm hoàn trả cả vốn và lãi cho người cho vay theo đúng thoả thuận giữa hai bên và phù hợp với quy định của pháp luật.

Thẻ tín dụng

2 Làm thế nào để các ngân hàng giúp người sử dụng tín dụng có thể mua hàng hoặc thanh toán dịch vụ trước và trả lại tiền sau cho ngân hàng?



Hình 2

Thẻ tín dụng là một loại phương tiện thanh toán cho phép chủ thẻ sử dụng số tiền trong hạn mức tín dụng đã thoả thuận trước với đơn vị phát hành thẻ (thường là ngân hàng thương mại) mà không cần phải có số dư tiền trong thẻ.

Chú ý:

a) Nói đơn giản, thẻ tín dụng là loại thẻ giúp bạn mua hàng trước và thanh toán lại sau cho đơn vị phát hành thẻ (ngân hàng thương mại).

b) Cần phân biệt thẻ tín dụng (Credit Card) và thẻ ghi nợ (Debit Card): Thẻ ghi nợ là loại thẻ thanh toán được liên kết trực tiếp với tài khoản ngân hàng, cho phép chủ thẻ thực hiện các giao dịch có hạn mức sử dụng đúng với số tiền có trong tài khoản.

Phí sử dụng thẻ tín dụng

3 Người sử dụng thẻ tín dụng cần phải trả các loại phí nào cho ngân hàng?

Hình 3

Chú ý:

a) Để có thể sử dụng được thẻ tín dụng, người sử dụng cần phải trả nhiều loại phí như: phí phát hành thẻ, phí thường niên, phí chậm thanh toán, phí lãi suất, phí huỷ thẻ, …

b) Hai loại phí sử dụng quan trọng mà người sử dụng thẻ cần lưu ý là:

– *Phí chậm thanh toán*

Thẻ tín dụng sẽ miễn lãi tối đa 45 ngày cho mỗi người sử dụng thẻ. Vì vậy, nếu sau 45 ngày đó, người sử dụng thẻ vẫn chưa trả hết dư nợ thì sẽ phải chi trả thêm khoản phí chậm thanh toán số tiền tối thiểu dựa trên số ngày quá hạn cùng với lãi suất ngân hàng đã đưa ra. Mỗi ngân hàng có một mức phí khác nhau dựa trên giá trị số tiền tối thiểu cần thanh toán.

– *Phí lãi suất*

Lãi suất là khoản tiền quan trọng nhất mà chủ thẻ cần lưu ý khi chọn dịch vụ thẻ tín dụng để đăng kí. Mỗi ngân hàng sẽ có quy định mức lãi suất khác nhau cho thẻ tín dụng và thay đổi theo từng thời kì để phù hợp với các quy định của pháp luật. Mức lãi suất được tính nếu chủ thẻ trả nợ muộn quá 45 ngày miễn lãi phí. Mức lãi suất thẻ tín dụng khá cao so với các dịch vụ vay tiền khác, thường dao động từ 20%/năm đến 40%/năm tuỳ vào loại thẻ và ngân hàng phát hành.

(*Nguồn:* https://techcombank.com/khach-hang-ca-nhan/chi-tieu/the/the-tin-dung)

Ví dụ 1. Bác Nam sử dụng loại thẻ tín dụng X của ngân hàng A với chế độ sử dụng như sau: Miễn lãi tối đa 45 ngày, phí lãi suất 35%/năm, phí chậm thanh toán 6% nếu không trả trước 5%, ngày đến hạn thanh toán là ngày 25 mỗi tháng.

Ngày 11/10, bác Nam dùng thẻ tín dụng nói trên để mua một chiếc ti vi có giá 30 triệu đồng và đến ngày 20/12 bác mới thanh toán cho ngân hàng. Tính tổng số tiền cả vốn và phí bác Nam phải trả cho ngân hàng.

Giải

Từ 11/10 đến 20/12 được tính là 70 ngày.

Do số ngày nợ thẻ vượt quá 45 ngày nên bác Nam phải trả lãi cho 70 ngày nợ và trả phí chậm thanh toán do không trả trước 5% số tiền nợ.

Phí trả lãi: $30 \,.\, 35\% \,.\, \dfrac{70}{365} \approx 2{,}014$ (triệu đồng).

Phí chậm thanh toán do không trả trước 5% là:

$$30 \,.\, 6\% = 1{,}8 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy tổng số tiền cả vốn và phí bác Nam phải trả cho ngân hàng là khoảng:

$$30 + 2{,}014 + 1{,}8 = 33{,}814 \text{ (triệu đồng).}$$

Ví dụ 2. Giả sử bạn đang sử dụng thẻ tín dụng tại ngân hàng A có thời gian miễn lãi là 45 ngày, với chu kì thanh toán từ ngày 15/3 đến ngày 15/4, ngày đến hạn thanh toán là 30/4. Trong đó, lãi suất áp dụng là 20%/năm và số dư nợ tối thiểu cần thanh toán là 5% tổng số tiền chi tiêu. Phí trả chậm bằng 4% số dư nợ tối thiểu cần trả và tối thiểu là 150 000 đồng. Thẻ của bạn không có dư nợ đầu kì và trong 30 ngày vừa qua bạn đã thực hiện các chi tiêu:

- Ngày 20/3: Bạn thanh toán mua hàng siêu thị 4 triệu đồng. Số dư nợ 1 là 4 triệu đồng.
- Ngày 10/4: Bạn thanh toán tiền điện 2 triệu đồng. Số dư nợ 2 là 6 triệu đồng.
- Ngày 04/5: Bạn trả ngân hàng 3 triệu đồng. Số dư nợ 3 (số nợ còn lại) là 3 triệu đồng.

Tính số tiền lãi phát sinh từ dịch vụ sử dụng thẻ tín dụng nói trên đến ngày 04/5.

Giải

Do bạn đã không trả đủ toàn bộ số dư nợ và khoản thanh toán tối thiểu tại thời điểm ngày 30/4 nên số tiền lãi sẽ bị tính gồm có:

- Số dư nợ 1 từ ngày 20/3 đến ngày 09/4 nên số tiền lãi phải trả là:

$$4\,000\,000 \,.\, \frac{20\%}{365} \,.\, 20 \approx 43\,836 \text{ (đồng).}$$

- Số dư nợ 2 từ ngày 10/4 đến ngày 04/5 nên số tiền lãi phải trả là:

$$6\,000\,000 \,.\, \frac{20\%}{365} \,.\, 24 \approx 78\,904 \text{ (đồng).}$$

- Tính phí trả chậm:

$$(5\% \,.\, 6\,000\,000) \,.\, 4\% = 12\,000 < 150\,000.$$

Nên tính phí trả chậm là 150 000 đồng.

Vậy tổng số tiền lãi và phí phát sinh mà bạn cần phải trả đến ngày 04/5 là:

$$43\,836 + 78\,904 + 150\,000 = 272\,740 \text{ (đồng).}$$

Chú ý: Ngoài ra, số tiền 3 triệu đồng vẫn bị tính tiếp lãi cho tới thời điểm bạn thanh toán cho ngân hàng.

Giả sử bạn đang sử dụng thẻ tín dụng tại ngân hàng B có thời gian miễn lãi là 45 ngày, với chu kì thanh toán từ ngày 10/5 đến ngày 10/6, ngày đến hạn thanh toán là 25/6. Trong đó, lãi suất áp dụng là 18%/năm và số dư nợ tối thiểu cần thanh toán là 5% tổng số tiền chi tiêu. Phí trả chậm bằng 3% số dư nợ tối thiểu cần trả và tối thiểu là 100 000 đồng. Thẻ của bạn không có dư nợ đầu kì và trong 30 ngày vừa qua bạn đã thực hiện các chi tiêu:

- Ngày 15/5: Bạn thanh toán mua hàng trực tuyến 3 triệu đồng. Số dư nợ 1 là 3 triệu đồng.
- Ngày 05/6: Bạn thanh toán tiền thuế 1 triệu đồng. Số dư nợ 2 là 4 triệu đồng.
- Ngày 28/6: Bạn trả ngân hàng 2 triệu đồng. Số dư nợ 3 (số nợ còn lại) là 2 triệu đồng.

Tính số tiền lãi phát sinh từ dịch vụ sử dụng thẻ tín dụng nói trên đến ngày 28/6.

Ông Long sử dụng thẻ tín dụng của một ngân hàng để mua một món hàng giá 10 triệu đồng với các điều lệ sử dụng thẻ như sau:

Loại phí	Mức phí
Phí phát hành thẻ tín dụng mới	500 000 đồng
Phí duy trì thường niên	1 499 000 đồng/năm
Phí chậm thanh toán	6% số tiền chậm thanh toán, tối thiểu 150 000 đồng
Lãi suất sau thời gian miễn lãi	2,58%/tháng, tính lãi kép theo ngày

a) Cho biết ông Long đã trả tiền ngân hàng trễ hạn 40 ngày sau ngày hết hạn miễn lãi. Hãy tính số tiền ông Long phải nộp cho ngân hàng.
b) Nếu tính cả phí phát hành thẻ và phí duy trì thường niên thì tổng số tiền mà ông Long đã bỏ ra cho dịch vụ tín dụng trên là bao nhiêu?

2. Vay nợ của các tổ chức tín dụng

(*Nguồn:* Luật các tổ chức tín dụng số 47/2010/QH12; Luật số 17/2017/QH14; Văn bản hợp nhất số 07/VBHN-VPQH ngày 12/12/2017)

Tổ chức tín dụng

Tổ chức tín dụng là các cơ quan có chức năng cho vay vốn được pháp luật công nhận. Đại diện tiêu biểu cho các tổ chức tín dụng là ngân hàng thương mại (gọi tắt là ngân hàng), thực hiện các nghiệp vụ ngân hàng bao gồm: huy động, cho vay và thực hiện thanh toán.

Chú ý: Theo luật Các tổ chức tín dụng năm 2010, tổ chức tín dụng là doanh nghiệp thực hiện một, một số hoặc tất cả các hoạt động ngân hàng. Các tổ chức tín dụng thường gặp là các ngân hàng thương mại và các công ty tài chính.

Ví dụ 3. Bác Tú vay của ngân hàng A với hợp đồng vay như sau: Số tiền vay là 50 triệu đồng, thời hạn vay 6 tháng, trả gốc và lãi cuối kì, lãi suất cho vay 11%/năm. Tiền lãi tính theo dư nợ ban đầu. Tính tổng số tiền gốc và lãi mà lãi bác Tú phải trả cho ngân hàng vào cuối kì vay.

Giải

Do tiền lãi tính theo dư nợ ban đầu nên bác Tú sẽ trả nợ ngân hàng theo phương thức lãi đơn.

Ta có $P = 50,\ r = \frac{1}{12} \,.\, 11\%, n = 6.$

Áp dụng công thức tính lãi đơn, ta có:

$$F = P(1 + nr) = 50\left(1 + 6 \,.\, \frac{1}{12} \,.\, 11\%\right) = 52{,}75 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy tổng số tiền gốc và lãi mà lãi bác Tú phải trả cho ngân hàng vào cuối kì vay là 52,75 triệu đồng.

Ví dụ 4. Bác Hoa vay của ngân hàng B với hợp đồng vay như sau: Số tiền vay là 50 triệu đồng, thời hạn vay 6 tháng, lãi suất cho vay 11%/năm. Tiền gốc phải trả đều mỗi tháng. Tiền lãi tính theo dư nợ giảm dần. Ngày giải ngân là ngày 01/01/2023.

a) Tính số tiền gốc và lãi mà bác Hoa phải trả hằng tháng.

b) Tính tổng số tiền gốc và lãi mà bác Hoa phải trả cho ngân hàng vào cuối kì vay.

Giải

a) Áp dụng công thức tính lãi đơn cho từng tháng, theo hợp đồng vay ta có bảng tính sau:

Tháng	Kì trả nợ	Số gốc còn lại	Gốc	Lãi	Tổng tiền
0	01/01/2023	50 000 000			
1	01/02/2023	41 666 667	8 333 333	458 333	8 791 667
2	01/3/2023	33 333 333	8 333 333	381 944	8 715 278
3	01/4/2023	25 000 000	8 333 333	305 556	8 638 889
4	01/5/2023	16 666 667	8 333 333	229 167	8 562 500
5	01/6/2023	8 333 333	8 333 333	152 778	8 486 111
6	01/7/2023	0	8 333 333	76 389	8 409 722
Tổng tiền			50 000 000	1 604 167	51 604 167

b) Tổng số tiền gốc và lãi mà bác Hoa phải trả cho ngân hàng là 51,604 triệu đồng.

2 Công ty A vay của ngân hàng B với hợp đồng vay như sau: Số tiền vay 100 triệu đồng, thời hạn vay 12 tháng, lãi suất cho vay 9%/năm. Tiền lãi tính theo dư nợ ban đầu.

a) Tính tổng số tiền gốc và lãi mà công ty A phải trả cho ngân hàng B vào cuối kì vay.

b) Nếu hợp đồng vay yêu cầu tiền gốc phải trả đều mỗi tháng, tiền lãi tính theo dư nợ giảm dần. Tính số tiền gốc và lãi mà công ty A phải trả mỗi tháng và tổng số tiền gốc và lãi công ty đã trả tổng cộng cho hợp đồng vay nói trên.

2 Bác Hà vay của ngân hàng ABC 500 triệu đồng để mua ô tô với hợp đồng vay như sau: Thời hạn vay 7 năm, gốc trả đều hằng tháng theo số tháng vay, lãi trả hằng tháng với lãi suất 12%/năm tính theo dư nợ giảm dần. Tính:

a) Số tiền gốc và lãi mà bác Hà phải trả ở tháng thứ k ($k = 1, 2, \ldots, 84$).

b) Tổng số tiền gốc và lãi mà bác Hà phải trả sau 84 tháng.

BÀI TẬP

1. Anh Bình sử dụng loại thẻ tín dụng Y của ngân hàng B với chế độ sử dụng như sau: Miễn lãi tối đa 45 ngày, phí lãi suất 22%/năm, phí chậm thanh toán 6% nếu không trả trước 5%, ngày đến hạn thanh toán là ngày 5 mỗi tháng.

   Ngày 21/10, anh Bình dùng thẻ tín dụng nói trên để mua một chiếc máy cày có giá 100 triệu đồng. Đến ngày 5/11, anh đã trả được 5 triệu đồng cho ngân hàng và đến ngày 20/12, anh mới có tiền thanh toán hết nợ thẻ cho ngân hàng. Tính tổng số tiền cả vốn và phí mà anh Bình phải trả cho ngân hàng vào ngày 20/12.

2. Bác Phương vay của ngân hàng A với hợp đồng vay như sau: Số tiền vay là 60 triệu đồng, thời hạn vay 12 tháng, lãi suất cho vay 12%/năm. Tiền lãi tính theo dư nợ ban đầu. Tính tổng số tiền gốc và lãi mà bác Phương phải trả cho ngân hàng vào cuối kì vay.

3. Doanh nghiệp C vay của công ty tài chính D với hợp đồng vay như sau: Số tiền vay là 500 triệu đồng, thời hạn vay 6 tháng, lãi suất cho vay 12%/năm. Tiền gốc phải trả đều mỗi tháng. Tiền lãi tính theo dư nợ giảm dần. Ngày giải ngân 01/6/2023.

   a) Tính số tiền gốc và lãi mà doanh nghiệp C phải trả hằng tháng.

   b) Tính tổng số tiền gốc và lãi mà doanh nghiệp C đã trả vào cuối kì vay.

4. Cô Nguyệt vay ngân hàng B 500 triệu đồng để mua căn hộ với lãi suất 9%/năm, thời hạn vay 60 tháng. Tiền lãi tính theo dư nợ ban đầu. Cho biết gốc và lãi phải trả hằng tháng. Tính số tiền gốc và lãi mà cô Nguyệt phải trả cho ngân hàng mỗi tháng.

5. Ba của bạn Mai mua một chuyến du lịch Phú Quốc giá 15 triệu đồng ngày 16/8/2022 cho cả nhà bằng thẻ tín dụng phát hành ngày 06/8/2022 của ngân hàng X. Ngân hàng có chế độ không tính lãi trong 30 ngày đầu và cộng thêm khuyến mãi 25 ngày không tính lãi. Sau thời hạn trên, ngân hàng sẽ tính lãi với lãi suất 20%/năm (tính lãi kép theo ngày). Ba của Mai dự định sẽ hoàn tiền cho ngân hàng X vào ngày 01/11/2022. Khi đó ba của Mai phải hoàn trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng?

6. Giả sử bạn đang sử dụng thẻ tín dụng tại ngân hàng C có thời gian miễn lãi là 45 ngày, với chu kì thanh toán từ ngày 05/7 đến ngày 05/8, ngày đến hạn thanh toán là 20/8. Trong đó, lãi suất áp dụng là 24%/năm và số dư nợ tối thiểu cần thanh toán là 5% tổng số tiền chi tiêu. Phí trả chậm bằng 5% số dư nợ tối thiểu cần trả và tối thiểu là 200 000 đồng. Thẻ của bạn không có dư nợ đầu kì và trong 30 ngày vừa qua bạn đã thực hiện các chi tiêu:

   • Ngày 10/7: Bạn thanh toán mua vé máy bay 5 triệu đồng. Số dư nợ 1 là 5 triệu đồng.

   • Ngày 01/8: Bạn thanh toán tiền nhà 3 triệu đồng. Số dư nợ 2 là 8 triệu đồng.

   • Ngày 22/8: Bạn trả ngân hàng 4 triệu đồng. Số dư nợ 3 (số nợ còn lại) là 4 triệu đồng.

   Tính số tiền lãi phát sinh từ dịch vụ sử dụng thẻ tín dụng nói trên đến ngày 22/8.

Bài 3. ĐẦU TƯ TÀI CHÍNH. LẬP KẾ HOẠCH TÀI CHÍNH CÁ NHÂN

Từ khoá: Đầu tư tài chính; Chứng khoán; Cổ phiếu; Trái phiếu; Chứng chỉ quỹ; Kế hoạch tài chính cá nhân; Ngân sách.

Hãy nêu những lợi ích và rủi ro của việc các cá nhân hoặc tổ chức thu nhập bằng cách cho các cá nhân hoặc tổ chức khác vay vốn.

1. Một số vấn đề về đầu tư tài chính

(*Nguồn:* How Money Works, DK, Penguin Random House, 2019; Luật Chứng khoán năm 2019 số 54/2019/QH14)

1

a) Nêu một vài trải nghiệm của bạn hoặc người thân về hoạt động gửi tiết kiệm, mua bán trái phiếu, cổ phiếu, … để có lợi nhuận trong tương lai.

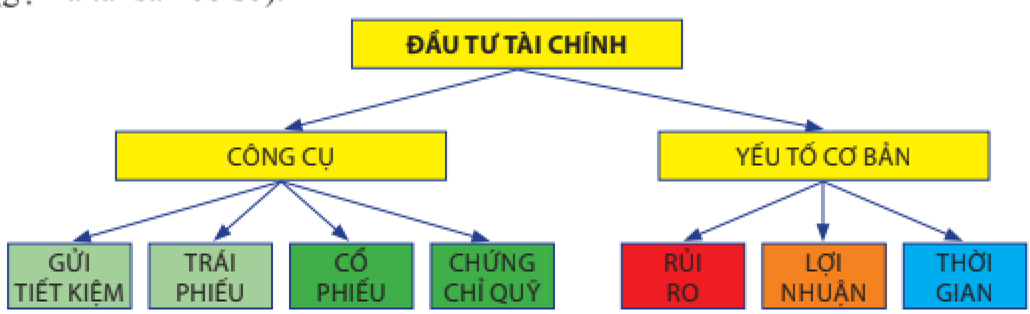
b) Hãy kể tên một vài loại hình tương tự như vậy mà bạn biết.

Hình 1

Đầu tư tài chính là quá trình cá nhân hoặc tổ chức sử dụng nguồn vốn để mua cổ phiếu, trái phiếu, chứng chỉ quỹ, gửi tiết kiệm hay các tài sản tài chính khác nhằm mục đích kiếm thu nhập và lợi nhuận trong tương lai.

Chú ý:

a) Tài sản tài chính là tài sản, thường có khả năng chuyển đổi ra tiền nhanh, có quyền và phát sinh giá trị từ quyền (gọi là phái sinh) đòi hỏi sở hữu hay hưởng lợi từ một tài sản khác (gọi là tài sản cơ sở).



b) Đầu tư thường được áp dụng để tăng giá trị tài sản hoặc tạo ra thu nhập cho nhà đầu tư và có tác dụng phát triển kinh tế, tạo thêm việc làm và sản phẩm cho xã hội.
c) Có ba yếu tố cơ bản cần chú ý trong đầu tư là: rủi ro, lợi nhuận và thời gian.
d) Các công cụ đầu tư bao gồm: gửi tiết kiệm, mua chứng khoán, mua cổ phiếu, mua trái phiếu, mua chứng chỉ quỹ, …

Chứng khoán là tài sản, bao gồm các loại sau đây:
– Cổ phiếu, trái phiếu, chứng chỉ quỹ;
– Chứng quyền, chứng quyền có bảo đảm, quyền mua cổ phần, chứng chỉ lưu kí;
– Chứng khoán phái sinh;
– Các loại chứng khoán khác do Chính phủ quy định.
Cổ phiếu là loại chứng khoán xác nhận quyền và lợi ích hợp pháp của người sở hữu đối với một phần vốn cổ phần của tổ chức phát hành.
Trái phiếu là loại chứng khoán xác nhận quyền và lợi ích hợp pháp của người sở hữu đối với một phần nợ của tổ chức phát hành.
Chứng chỉ quỹ là loại chứng khoán xác nhận quyền sở hữu của nhà đầu tư đối với một phần vốn góp của quỹ đầu tư chứng khoán.

Chú ý: ***Cổ tức*** là khoản lợi nhuận ròng được trả cho mỗi cổ phiếu bằng tiền mặt hoặc bằng tài sản khác.

Ví dụ 1.

a) Ông An mua một trái phiếu được phát hành bởi một doanh nghiệp với giá trị 100 triệu đồng, thời hạn đáo hạn là 10 năm, lãi suất 12%/năm được tính theo hình thức lãi kép, gộp lãi theo năm, lĩnh một lần khi đáo hạn. Tính số tiền ông An nhận được sau 10 năm.
b) Một nhà đầu tư mua một lô trái phiếu có mệnh giá 100 triệu đồng với lãi suất 10%/năm và tiền lãi được trả 6 tháng một lần theo phương thức tính lãi kép, thời hạn trái phiếu là 5 năm. Tính tổng số tiền nhà đầu tư đã nhận được khi đáo hạn.
c) Ông Tín có 3 000 cổ phiếu trong chuỗi cửa hàng phở X. Giá thị trường hiện tại của mỗi cổ phiếu là 35 000 đồng và cổ tức vừa được chia cho mỗi cổ phiếu là 4 000 đồng. Tính tổng số tiền cổ tức ông Tín nhận được và tỉ số phần trăm cổ tức với giá trị của cổ phiếu.
d) Chú Thành đầu tư 200 triệu đồng vào chứng chỉ quỹ xây dựng Y với lãi suất 12%/năm theo phương thức tính lãi kép trong thời gian 4 năm. Tính số tiền chú Thành nhận được sau 4 năm.

Giải

a) Số tiền ông An nhận được sau 10 năm là:
$$100 \,.\, (1 + 12\%)^{10} \approx 310{,}58 \text{ (triệu đồng).}$$
b) Số tiền nhà đầu tư nhận được khi trái phiếu đáo hạn là:
$$100 \,.\, \left(1 + \frac{1}{2} \,.\, 10\%\right)^{10} \approx 162{,}89 \text{ (triệu đồng).}$$
c) Tổng số tiền cổ tức ông Tín nhận được là: $3\,000 \,.\, 4\,000 = 12\,000\,000$ (đồng).
Tỉ số phần trăm cổ tức với giá trị của cổ phiếu là: $\dfrac{4000 \,.\, 100\%}{35000} \approx 11{,}4\%$.
d) Số tiền chú Thành nhận được sau 4 năm là: $200 \,.\, (1 + 0{,}12)^4 \approx 314{,}7$ (triệu đồng).

2. Giải quyết một số vấn đề về đầu tư

Vận dụng các kiến thức toán học có thể giúp giải quyết một số vấn đề về đầu tư.

Ví dụ 2. Mỗi cổ phiếu của công ty A có giá bán 32 000 đồng và lợi nhuận trên mỗi cổ phiếu được công bố là 4 600 đồng/năm. Mỗi cổ phiếu của công ty B có giá bán 20 000 đồng và lợi nhuận trên mỗi cổ phiếu được công bố là 2 200 đồng/năm.
a) Tính tỉ số phần trăm giữa lợi nhuận và giá bán mỗi cổ phiếu của công ty A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

b) Nếu các nhà đầu tư có xu hướng thích mua các cổ phiếu có tỉ lệ phần trăm lợi nhuận cao hơn so với giá bán thì cổ phiếu của công ty nào có giá trị đầu tư cao hơn?

Giải

a) Gọi E/P là tỉ số phần trăm giữa lợi nhuận và giá bán mỗi cổ phiếu.

Tỉ số phần trăm giữa lợi nhuận và giá bán mỗi cổ phiếu của công ty A là

$$\mathrm{E/P} = \frac{4600}{32000} \approx 14,4\%.$$

Tỉ số phần trăm giữa lợi nhuận và giá bán mỗi cổ phiếu của công ty B là

$$\mathrm{E/P} = \frac{2200}{20000} = 11\%.$$

b) Nếu các nhà đầu tư có xu hướng thích mua các cổ phiếu có tỉ lệ phần trăm lợi nhuận cao hơn so với giá bán thì cổ phiếu của công ty A có giá trị đầu tư cao hơn.

Ví dụ 3. Nếu theo những khoảng thời gian bằng nhau, nhà đầu tư đều bỏ ra những khoản tiền đầu tư bằng nhau, ta nói người đó đã tạo ra một *dòng tiền đều*.
Cho biết trong n năm, một người cuối mỗi năm đều gửi tiết kiệm một số tiền là A vào ngân hàng với lãi suất kép r%/năm.

Cuối năm	1	2	3	...	$n-2$	$n-1$	n
Gửi tiết kiệm	A	A	A	...	A	A	A

a) Tính số tiền F người đó thu được ở cuối dòng tiền (F gọi là giá trị tương lai của dòng tiền) theo A, n, r.
b) Tính n theo A, F và r.
c) Một sinh viên đầu tư một dòng tiền đều bằng cách cuối mỗi tháng đều gửi tiết kiệm 1 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 8%/năm theo phương thức tính lãi kép với kì hạn 1 tháng. Hỏi sau bao lâu thì sinh viên này có đủ 21 triệu đồng để đóng tiền cho một khoá học tiếng Anh giao tiếp với chuyên gia nước ngoài?

Giải

a) Áp dụng công thức tính lãi kép cho số tiền A gửi từng năm, ta có số tiền thu được vào cuối năm thứ n của số tiền A đầu tư tại:
cuối năm thứ nhất là $A(1 + r)^{n-1}$,
cuối năm thứ hai là $A(1 + r)^{n-2}$,
...
cuối năm thứ $n - 1$ là $A(1 + r)^1$,
cuối năm thứ n là $A(1 + r)^0$.

Tổng số tiền F người đó thu được ở cuối dòng tiền là:

$$F = A(1+r)^0 + A(1+r)^1 + \ldots + A(1+r)^{n-2} + A(1+r)^{n-1}.$$

Áp dụng công thức cấp số nhân, ta có: $F = A\cdot\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$. (1)

b) Từ (1) ta có $(1+r)^n = \dfrac{Fr}{A} + 1$, suy ra $n\ln(1+r) = \ln\left(\dfrac{Fr}{A}+1\right)$,

suy ra $n = \dfrac{\ln\left(\dfrac{Fr}{A}+1\right)}{\ln(1+r)}$. (2)

c) Tương tự như chu kì năm, với chu kì tháng ta cũng có thể áp dụng công thức (2) cho dòng tiền:

Cuối tháng	1	2	...	$n-1$	n
Gửi tiết kiệm	1 triệu đồng	1 triệu đồng	...	1 triệu đồng	1 triệu đồng

ta có:

$$n = \frac{\ln\left(\dfrac{Fr}{A}+1\right)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln\left(\dfrac{21.8\%}{12}+1\right)}{\ln\left(1+\dfrac{8\%}{12}\right)} \approx 19,7 \text{ (tháng)}.$$

Vậy sau khoảng 20 tháng thì sinh viên này có đủ 21 triệu đồng.

Ví dụ 4. Một công ty có ngân sách chi tiêu là T đồng, nếu giữ tiền mặt x đồng và đầu tư $(T-x)$ đồng thì sẽ có lợi nhuận là:

$$f(x) = \frac{a(T-x)}{2} - \frac{bT}{x},$$

trong đó: x: số tiền mặt cần giữ, $x \in (0; T]$;

a: lãi suất đầu tư 25%;

b: chi phí mỗi lần rút tiền mặt: 20,1%.

a) Tìm x để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Với $T = 20$ tỉ đồng, hãy cho biết để đạt lợi nhuận đầu tư lớn nhất thì công ty nên giữ số tiền mặt là bao nhiêu.

Giải

a) Xét hàm số $f(x) = \dfrac{a(T-x)}{2} - \dfrac{bT}{x}$ trên $(0; T]$, ta có:

$$f'(x) = \frac{-a}{2} + \frac{bT}{x^2} = \frac{-ax^2 + 2bT}{2x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-ax^2+2bT}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow -ax^2 + 2bT = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{2bT}{a} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2bT}{a}}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;\ T]$:

x	0		$\sqrt{\dfrac{2bT}{a}}$		T
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f\left(\sqrt{\dfrac{2bT}{a}}\right)$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, lợi nhuận $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = \sqrt{\dfrac{2bT}{a}}$.

b) Với $T = 20$; $a = 25\%$; $b = 20{,}1\%$, ta có $x = \sqrt{\dfrac{2bT}{a}} = \sqrt{\dfrac{2.20{,}1.20}{25}} \approx 5{,}67$.

Vậy để đạt lợi nhuận lớn nhất công ty nên giữ số tiền mặt vào khoảng 5,67 tỉ đồng.

Ví dụ 5. Ông Hải đầu tư bằng cách mua chứng chỉ quỹ trị giá 1 tỉ đồng, lãi suất 8%/năm theo phương thức tính lãi kép.

a) Tính tiền lãi ông Hải nhận được sau 3 năm.

b) Giả sử trong ba năm đầu tư, tỉ lệ lạm phát mỗi năm đều là 3%. Tính giá trị tương đương của số tiền vốn đầu tư 1 tỉ đồng của ông Hải sau 3 năm. Hãy cho biết vốn đầu tư của ông Hải tăng hay giảm giá trị.

c) Giả sử trong ba năm đầu tư, tỉ lệ lạm phát mỗi năm lần lượt là 5%, 10%, 15%. Tính giá trị tương đương của số tiền vốn đầu tư 1 tỉ đồng của ông Hải sau 3 năm. Hãy cho biết vốn đầu tư của ông Hải tăng hay giảm giá trị.

Giải

a) Số tiền cả gốc và lãi ông Hải nhận được sau 3 năm là

$$F = P(1 + r)^n = 1.\ (1 + 8\%)^3 \approx 1{,}260 \text{ (tỉ đồng)}.$$

Sau 3 năm, ông Hải nhận được số tiền lãi là $I = F - P = 0{,}260$ (tỉ đồng).

b) Giá trị tương đương của số tiền vốn đầu tư 1 tỉ đồng sau ba năm lạm phát là

$$P_1 = P(1 + i)^n = 1.\ (1 + 3\%)^3 \approx 1{,}093 \text{ (tỉ đồng)}.$$

Ta có $F - P_1 \approx 1{,}260 - 1{,}093 = 0{,}167$ (tỉ đồng).

Do đó, vốn đầu tư của ông Hải tăng giá trị.

c) Giá trị tương đương của số tiền vốn đầu tư 1 tỉ đồng sau ba năm lạm phát là

$$P_2 = P(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) = 1.\ (1 + 5\%)(1 + 10\%)(1 + 15\%) \approx 1{,}328 \text{ (tỉ đồng)}.$$

Ta có $P_2 - F = 1{,}328 - 1{,}260 = 0{,}68$ (tỉ đồng).

Do đó, vốn đầu tư của ông Hải giảm giá trị.

Ví dụ 6. Đầu năm ông Huy vay ngân hàng 100 triệu đồng để mua cổ phiếu mã MNP với giá 50 000 đồng một cổ phiếu. Lãi suất ngân hàng là 9%/năm.

Ông Huy lên kế hoạch vào đầu năm sau sẽ bán toàn bộ cổ phiếu đó và lấy tiền trả nợ cho ngân hàng. Biết rằng vào đầu năm sau, mỗi cổ phiếu mã MNP có giá là 65 000 đồng.

Hãy cho biết số tiền ông Huy còn lại sau khi trả nợ ngân hàng.

Giải

Số tiền cả vốn lẫn lãi ông Huy phải trả ngân hàng là

$$100(1 + 9\%) = 109 \text{ (triệu đồng).}$$

Số cổ phiếu mã MNP ông Huy đã mua là 100 000 000 : 50 000 = 2 000 (cổ phiếu).

Số tiền ông Huy thu được từ việc bán cổ phiếu là: 2 000 . 65 000 = 130 (triệu đồng).

Số tiền ông Huy còn lại sau khi trả nợ ngân hàng là: 130 – 109 = 21 (triệu đồng).

1. Ông An đầu tư 1 tỉ đồng vào chứng chỉ quỹ tín dụng Q với lãi suất 10%/năm theo phương thức tính lãi kép trong thời gian 2 năm. Tính số tiền ông An nhận được sau 2 năm nếu kì trả lãi là 6 tháng, 3 tháng.

2. Mỗi cổ phiếu của công ty X có giá bán 25 000 đồng và lợi nhuận trên mỗi cổ phiếu được công bố là 2 500 đồng/năm. Mỗi cổ phiếu của công ty Y có giá bán 10 000 đồng và lợi nhuận trên mỗi cổ phiếu được công bố là 500 đồng/năm.

   a) Tính tỉ số phần trăm giữa giá bán và lợi nhuận trên mỗi cổ phiếu của công ty X và công ty Y (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

   b) Nếu các nhà đầu tư có xu hướng thích mua các cổ phiếu được định giá thấp so với lợi nhuận thì cổ phiếu nào có giá trị đầu tư cao hơn?

3. Một công ty có ngân sách chi tiêu là T đồng. Nếu giữ tiền mặt x đồng và đầu tư $(T - x)$ đồng thì sẽ có lợi nhuận là:

$$f(x) = \frac{a(T-x)}{2} - \frac{bT}{x}$$

   trong đó: x: số tiền mặt cần giữ;

   a: lãi suất đầu tư 28%;

   b: chi phí mỗi lần rút tiền mặt 20,5%.

   Tìm x để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $T = 12$ tỉ đồng.

4. Ông Sơn tạo ra một dòng tiền bằng cách cuối mỗi năm đều gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 9%/năm theo phương thức tính lãi kép với kì hạn 1 năm. Hỏi sau bao lâu thì ông Sơn có đủ 2 tỉ đồng để mua một mảnh đất?

3. Lập kế hoạch tài chính cá nhân

(*Nguồn:* https://www.britannica.com/money/setting-monthly-budget)

Bảng ngân sách

Bạn Nam là một sinh viên năm nhất thuê nhà trọ để học đại học. Dưới đây là bảng thu chi trong sổ tay của bạn Nam.

THU NHẬP	
Học bổng:	1 400 000 đồng/tháng
Dạy kèm:	2 000 000 đồng/tháng
Trợ cấp từ cha mẹ:	1 000 000 đồng/tháng
Làm và bán đồ thủ công mĩ nghệ (handmade):	1 000 000 đồng/tháng

CHI PHÍ	
Tiền thuê phòng trọ:	1 000 000 đồng/tháng
Tiền điện thoại:	100 000 đồng/tháng
Tiền đi lại:	500 000 đồng/tháng
Tiền ăn uống:	2 150 000 đồng/tháng
Sách vở, tài liệu:	200 000 đồng/tháng
Tiêu vặt:	450 000 đồng/tháng

a) Hãy trình bày lại sổ tay của bạn Nam dưới dạng một bảng tính để tính toán tổng thu, tổng chi và cho biết bạn Nam còn dư hay thiếu tiền trong mỗi tháng.

b) Bạn có thể làm một bảng tính tương tự về thu chi của chính mình không?

Bảng ngân sách là công cụ giúp theo dõi, tổng hợp thông tin về thu nhập, chi tiêu và tiết kiệm trong một khoảng thời gian nhất định, thông thường là hằng tháng hoặc hằng năm.

Lập bảng ngân sách cá nhân giúp quản lí tài chính cá nhân một cách hiệu quả. Cụ thể là:

– Đánh giá thu nhập và chi tiêu: Điều này giúp cá nhân hiểu rõ hơn về tình hình tài chính của mình và điều chỉnh chi tiêu để đảm bảo không tiêu quá nhiều so với thu nhập.

– Điều chỉnh chi tiêu: Bảng ngân sách giúp cá nhân biết mình đang chi tiêu những khoản tiền vào mục đích gì và đưa ra quyết định đúng đắn về việc cắt giảm chi tiêu không cần thiết để tiết kiệm tiền.

– Tiết kiệm tiền: Cá nhân có thể nhìn thấy được mức độ tiết kiệm tiền của mình, từ đó có thể đưa ra kế hoạch tiết kiệm tiền để đáp ứng các mục tiêu tài chính cá nhân.

Ví dụ 7. Dựa trên bảng thu chi của bạn Nam ở 2, hãy lập bảng ngân sách của bạn Nam.

Giải

Dựa trên các thông tin trên ta có thể lập bảng ngân sách cho bạn Nam như sau:

NGÂN SÁCH HẰNG THÁNG CỦA BẠN NAM

Đơn vị tính: đồng/tháng

Thu nhập		Chi tiêu	
Khoản mục	**Số tiền**	**Khoản mục**	**Số tiền**
Học bổng	1 400 000	Tiền phòng trọ	1 000 000
Dạy kèm	2 000 000	Tiền điện thoại	100 000
Trợ cấp từ cha mẹ	1 000 000	Tiền đi lại	500 000
Làm và bán đồ thủ công mĩ nghệ (handmade)	1 000 000	Tiền ăn uống	2 150 000
		Sách vở, tài liệu	200 000
		Tiêu vặt	450 000
Tổng thu	**5 400 000**	**Tổng chi**	**4 400 000**
Số dư	**1 000 000**		

5 Dựa trên các thông tin sau để lập bảng ngân sách của bạn Ngân.

THU NHẬP

Giao hàng: 2 000 000 đồng/tháng

Trợ cấp từ cha mẹ: 1 000 000 đồng/tháng

Phụ bán hàng: 1 000 000 đồng/tháng

CHI PHÍ

Tiền điện thoại: 500 000 đồng/tháng

Tiền đi lại: 500 000 đồng/tháng

Tiền ăn uống: 3 000 000 đồng/tháng

Sách vở, tài liệu: 200 000 đồng/tháng

Tiêu vặt: 900 000 đồng/tháng

Kế hoạch tài chính cá nhân

3 Thảo luận nhóm để mỗi học sinh trong nhóm có cơ hội trình bày:

a) Một mục tiêu tài chính cá nhân.

b) Các biện pháp để thực hiện mục tiêu đó.

Kế hoạch tài chính cá nhân là một bản kế hoạch chi tiết cho việc quản lí và sử dụng tiền của cá nhân để đạt được mục tiêu tài chính của mình trong tương lai. Kế hoạch tài chính cá nhân bao gồm các mục tiêu tài chính cụ thể, định rõ thu nhập hằng tháng, chi tiêu hằng tháng và các khoản tiết kiệm.

Chú ý:

a) Lập kế hoạch tài chính cá nhân giúp cho mỗi người có đủ tiền để đáp ứng các nhu cầu và mục tiêu tài chính trong tương lai.

b) Để lập kế hoạch tài chính cá nhân, bạn có thể thực hiện các bước sau đây:

Bước 1: Xác định mục tiêu tài chính cụ thể. Ví dụ: Tiết kiệm được bao nhiêu tiền? Khoảng thời gian tiết kiệm là bao lâu? Số tiền tiết kiệm được để làm gì?

Bước 2: Lập bảng ngân sách tháng: Liệt kê tất cả các khoản thu nhập và các khoản chi phí hằng tháng để có cái nhìn tổng quan về tài chính của mình.

Bước 3: Hạn chế các khoản chi phí không cần thiết, tìm cách tăng thu nhập để có thể tiết kiệm được nhiều tiền hơn.

Bước 4: Triển khai thực hiện để đạt được mục tiêu tài chính.

Ví dụ 8. Bạn Dung, một học sinh lớp 12, muốn lập kế hoạch kiếm đủ 20 triệu đồng trong vòng một năm để đóng tiền học phí cho một khoá học giao tiếp bằng tiếng Anh. Ngân sách hằng tháng của bạn Dung như sau:

NGÂN SÁCH HẰNG THÁNG CỦA BẠN DUNG

Đơn vị tính: đồng/tháng

Thu nhập		**Chi tiêu**	
Khoản mục	**Số tiền**	**Khoản mục**	**Số tiền**
Học bổng	400 000	Tiền điện thoại	100 000
Dạy kèm	2 000 000	Tiền đi lại	500 000
Trợ cấp từ cha mẹ	1 000 000	Tiền ăn uống	2 150 000
Làm và bán đồ thủ công mĩ nghệ (handmade)	1 000 000	Sách vở, tài liệu	200 000
		Tiêu vặt	450 000
Tổng thu	**4 400 000**	**Tổng chi**	**3 400 000**
Số dư	**1 000 000**		

Hãy giúp bạn Dung xây dựng kế hoạch tài chính cá nhân để đạt mục tiêu.

Giải

Dưới đây là một kế hoạch tài chính cá nhân cho bạn Dung để đạt được mục tiêu:

– Xác định mục tiêu tiết kiệm: Tiết kiệm đủ 20 triệu đồng trong vòng 12 tháng để có đủ tiền đóng học phí cho khoá học giao tiếp bằng tiếng Anh.

– Điều tra tình hình tài chính hiện tại của bạn: Thu nhập hằng tháng của bạn Dung là 4 400 000 đồng, chi phí hằng tháng của bạn Dung là 3 400 000 đồng.

– Xây dựng kế hoạch chi tiêu hằng tháng: Tổng chi phí hằng tháng của bạn Dung là 3 400 000 đồng. Hãy xem xét cách giảm chi phí hằng tháng để có thể tiết kiệm được khoảng 1 667 000 đồng mỗi tháng:

• Giảm chi phí ăn uống: Hãy tìm kiếm các món ăn giá rẻ hơn và nấu ăn tại nhà thay vì ăn ngoài.

• Giảm tiêu vặt: Hãy cân nhắc các chi tiêu không cần thiết và hạn chế việc mua sắm các món đồ không cần thiết.

• Giảm chi phí đi lại: Hãy xem xét việc đi bộ hoặc sử dụng phương tiện công cộng để giảm chi phí đi lại.

– Xác định nguồn tiết kiệm hằng tháng: Bạn Dung có thể tiết kiệm được khoảng 1 000 000 đồng mỗi tháng.

– Tính toán nguồn tiết kiệm còn thiếu: Sau khi trừ đi chi phí hằng tháng và các nguồn tiết kiệm đã có, bạn Dung cần tiết kiệm thêm khoảng 667 000 đồng mỗi tháng để đạt được mục tiêu 20 triệu đồng sau 12 tháng.

Với kế hoạch tài chính cá nhân này, bạn Dung có thể đạt được mục tiêu tài chính của mình.

6 Bạn Khánh là một học sinh lớp 12 có mục tiêu tiết kiệm đủ 15 triệu đồng trong một năm để có đủ tiền mua một chiếc xe đạp điện. Ngân sách hằng tháng của bạn Khánh như sau:

NGÂN SÁCH HẰNG THÁNG CỦA BẠN KHÁNH

Đơn vị tính: đồng/tháng

Thu nhập		Chi tiêu	
Khoản mục	**Số tiền**	**Khoản mục**	**Số tiền**
Học bổng Dạy kèm Phụ việc của hàng Làm và bán đồ thủ công mĩ nghệ (handmade)	1 000 000 2 000 000 1 000 000 1 000 000	Tiền điện thoại Tiền đi lại Tiền ăn uống Sách vở, tài liệu Tiêu vặt	500 000 800 000 3 600 000 700 000 400 000
Tổng thu	**5 000 000**	**Tổng chi**	**6 000 000**
Số dư	**–1 000 000**		

Hãy giúp bạn Khánh xây dựng kế hoạch tài chính cá nhân để đạt mục tiêu.

BÀI TẬP

1. Anh Minh đầu tư bằng cách gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với số tiền là 200 triệu đồng. Lãi suất 10%/năm được tính theo phương thức lãi kép, gộp lãi theo năm nhận một lần. Hỏi sau 7 năm, anh Minh sẽ nhận được bao nhiêu tiền?

2. Ông Quân đầu tư vào một trái phiếu được phát hành bởi một doanh nghiệp với giá trị 400 triệu đồng, thời hạn đáo hạn là 5 năm, lãi suất 8%/năm được tính theo phương thức lãi kép, gộp lãi theo năm nhận một lần khi đáo hạn.

a) Tính số tiền ông Quân nhận được sau 5 năm.

b) Giả sử trong 5 năm đầu tư, tỉ lệ lạm phát mỗi năm đều bằng 3%. Tính giá trị tương đương của số tiền 400 triệu đồng mà ông Quân đã đầu tư sau 5 năm.

3. Một công ty có ngân sách chi tiêu là T đồng, nếu giữ tiền mặt x đồng và đầu tư $(T - x)$ đồng thì sẽ có lợi nhuận là:

$$f(x) = \frac{a(T-x)}{2} - \frac{bT}{x}$$

trong đó: x: số tiền mặt cần giữ;

a: lãi suất đầu tư 30%;

b: chi phí mỗi lần rút tiền mặt 20,5%.

Tìm x để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $T = 8$ tỉ đồng.

4. Ông Minh đầu tư 800 triệu đồng vào chứng chỉ quỹ tăng trưởng ABC với lãi suất 15%/năm theo phương thức tính lãi kép trong thời gian 3 năm. Tính số tiền ông Minh nhận được sau 3 năm nếu kì trả lãi là 1 tháng, 4 tháng.

5. Đầu năm ông Tâm vay ngân hàng 200 triệu đồng để mua cổ phiếu mã CPX với giá 40 000 đồng một cổ phiếu. Lãi suất ngân hàng là 12%/năm.
Ông Tâm lên kế hoạch vào đầu năm sau sẽ bán toàn bộ cổ phiếu đó và lấy tiền trả nợ cho ngân hàng. Biết rằng vào đầu năm sau, mỗi cổ phiếu mã CPX có giá là 85 000 đồng với xác suất là 0,3 và 62 000 đồng với xác suất là 0,7.
Hãy cho biết số tiền ông Tâm còn lại sau khi trả nợ ngân hàng có thể nhận những giá trị nào và xác suất để số tiền của ông Tâm còn lại nhận mỗi giá trị đó.

6. Dựa trên các thông tin sau:
Bạn Bình:

THU NHẬP	
Dạy kèm:	1500000 đồng/tháng
Phụ bếp buổi sáng:	2500000 đồng/tháng
Giao hàng:	1000000 đồng/tháng

CHI TIÊU	
Tiền điện thoại:	300000 đồng/tháng
Tiền đi lại:	800000 đồng/tháng
Tiền ăn uống:	2500000 đồng/tháng
Sách vở, tài liệu:	200000 đồng/tháng
Tiêu vặt:	400000 đồng/tháng

Bạn Mai:

THU NHẬP	
Dạy kèm:	1500000 đồng/tháng
Phụ giữ xe buổi tối:	2500000 đồng/tháng
Giao hàng:	1000000 đồng/tháng

CHI TIÊU	
Tiền điện thoại:	500000 đồng/tháng
Tiền đi lại:	1000000 đồng/tháng
Tiền ăn uống:	3600000 đồng/tháng
Sách vở, tài liệu:	600000 đồng/tháng
Tiêu vặt:	600000 đồng/tháng
Xem ca nhạc:	400000 đồng/tháng

a) Lập bảng ngân sách hằng tháng của bạn Bình và bạn Mai.
b) Lập kế hoạch tài chính giúp bạn Bình đạt mục tiêu có được 20 triệu đồng trong vòng một năm để mua một chiếc xe máy để đi học.
c) Lập kế hoạch tài chính giúp bạn Mai đạt mục tiêu có được 16 triệu đồng trong vòng một năm để theo học một khoá dạy bán hàng trực tuyến.

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Trong chuyển đổi giữa các đơn vị tiền tệ, phương thức được sử dụng phổ biến nhất là

A. Sản lượng tiền tệ. B. Tỉ giá hối đoái.
C. Tỉ lệ mua hàng hoá. D. Biểu đồ lịch sử giá.

2. Trong nền kinh tế, chỉ số lạm phát giúp đo lường

A. Sản lượng tiền tệ. B. Tỉ lệ thất nghiệp.
C. Sự gia tăng giá cả hàng hoá và dịch vụ. D. Tăng trưởng kinh tế hằng năm.

3. Lãi suất danh nghĩa của một khoản vay là 12%/năm, tỉ lệ lạm phát là 4% mỗi năm. Lãi suất thực hằng năm của khoản vay đó là

A. 48%. B. 8%. C. 16%. D. 3%.

4. Nếu đầu năm bạn gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất danh nghĩa là 9%/năm, tỉ lệ lạm phát là 3%. Số tiền (triệu đồng) bạn nhận được cuối năm tương đương với số tiền lúc đầu năm là

A. 103. B. 109. C. 112. D. 106.

5. Ông An gửi tiết kiệm 1 tỉ đồng theo phương thức tính lãi kép với lãi suất 6%/năm cho kì trả lãi 1 năm. Tổng số tiền (tỉ đồng) cả vốn và lãi ông An nhận được sau 10 năm là

A. 1,6. B. 1,791. C. 1,952. D. 2,047.

6. Trường A có các ngành học với các gói học phí như sau:
Gói 1: 150 triệu đồng; Gói 2: 200 triệu đồng;
Gói 3: 250 triệu đồng; Gói 4: 300 triệu đồng.
Để chuẩn bị tiền sau 3 năm nữa cho con lựa chọn ngành học phù hợp với các gói học phí như trên, ông Đức đã gửi 1 tỉ đồng vào ngân hàng theo phương thức tính lãi kép với lãi suất 8%/năm, kì trả lãi 1 năm. Với số tiền lãi ông Đức nhận được sau 3 năm, số nguyện vọng tối đa mà con ông Đức có thể chọn được phù hợp với các gói học phí trên là

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4.

7. Bà Nhung muốn có 500 triệu đồng trong vòng 5 năm, bằng cách gửi tiết kiệm vào ngân hàng B với lãi suất 8%/năm theo phương thức tính lãi kép với kì hạn 1 năm. Số tiền (triệu đồng) mỗi tháng bà Nhung cần gửi tiết kiệm vào ngân hàng B để đạt mục tiêu tài chính nói trên là

A. 69. B. 78. C. 86. D. 96.

8. Để lập kế hoạch tài chính cá nhân, điều quan trọng nhất là

A. Xác định mục tiêu tài chính của bạn. B. Lượng tiền thu nhập của bạn.
C. Số tiền tiết kiệm hiện có của bạn. D. Số nợ hiện tại của bạn.

9. Bạn muốn tiết kiệm tiền, điều bạn nên làm là

A. Mua nhiều đồ đắt tiền hơn. B. Đi ăn ngoài thường xuyên.
C. Đi làm thêm để tăng thu nhập. D. Cắt giảm chi tiêu không cần thiết.

10. Bạn mua một trái phiếu có mệnh giá 1 000 USD với lãi suất 5%/năm và thời hạn 10 năm. Nếu lãi được trả theo phương thức lãi đơn, số tiền lãi (USD) nhận được sau 10 năm là

A. 500. B. 1 500. C. 629. D. 1 629.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

11. Tỉ lệ phần trăm giá cả trung bình của hàng hoá và dịch vụ của Việt Nam năm sau so với năm trước được cho trong bảng sau:

Năm	2017	2018	2019	2020	2021
Tỉ lệ phần trăm giá cả trung bình so với năm trước	103,53	103,54	102,79	103,23	101,84

(*Nguồn:* Tổng cục Thống kê)

Hãy tính tỉ lệ lạm phát của Việt Nam trong các năm từ 2017 đến 2021.

12. Ông Đạt đem gửi hai khoản tiền vào hai ngân hàng khác nhau. Khoản tiền thứ nhất gửi vào ngân hàng A trong 15 tháng, lãi suất 14%/năm. Khoản tiền thứ hai gửi vào ngân hàng B trong 12 tháng với lãi suất 12,5%/năm. Cho biết hai khoản tiền trên chênh lệch nhau 30 triệu đồng, lãi của khoản tiền thứ nhất gấp đôi lãi của khoản tiền thứ hai và cả hai khoản tiền đều tính lãi theo phương thức lãi đơn. Hãy tính khoản tiền ông Đạt gửi ở mỗi ngân hàng.

13. Giả sử bạn đang sử dụng thẻ tín dụng tại ngân hàng D có thời gian miễn lãi là 45 ngày, với chu kì thanh toán từ ngày 12/9 đến ngày 12/10, ngày đến hạn thanh toán là 27/10. Trong đó, lãi suất áp dụng là 16%/năm và số dư nợ tối thiểu cần thanh toán là 4% tổng số tiền chi tiêu. Phí trả chậm bằng 2% số dư nợ tối thiểu cần trả và tối thiểu là 200 000 đồng. Thẻ của bạn không có dư nợ đầu kì và trong 30 ngày vừa qua bạn đã thực hiện các chi tiêu:

- Ngày 18/9: Bạn thanh toán mua sách 2 triệu đồng. Số dư nợ 1 là 2 triệu đồng.
- Ngày 8/10: Bạn thanh toán tiền điện thoại 1 triệu đồng. Số dư nợ 2 là 3 triệu đồng.
- Ngày 01/11: Bạn trả ngân hàng 1 triệu đồng. Số dư nợ 3 (số nợ còn lại) là 2 triệu đồng.

Tính số tiền lãi phát sinh từ dịch vụ sử dụng thẻ tín dụng nói trên đến ngày 01/11.

14. Đầu mỗi năm ông Hải đều gửi tiết kiệm 500 triệu đồng vào ngân hàng với hình thức lãi kép kì hạn một năm. Tìm số tiền ông Hải có được sau 5 năm, nếu lãi suất của ngân hàng là:

a) 8%/năm; b) 14%/năm.

15. Bác Tâm có hai thẻ tín dụng, có chế độ hoàn tiền khác nhau.

Thẻ tín dụng A tính lãi kép 22%/năm (tính lãi kép theo ngày) kèm theo khuyến mãi 52 ngày không tính lãi.

Thẻ tín dụng B tính lãi kép 19%/năm (tính lãi kép theo ngày) nhưng chỉ tặng thêm 40 ngày không tính lãi.

Bác Tâm dự định dùng thẻ để mua một chiếc ti vi có giá 20 triệu đồng vào đúng ngày kích hoạt thẻ để có thể hưởng tối đa số ngày không tính lãi. Hãy cho biết bác Tâm nên sử dụng thẻ nào để thanh toán cho cửa hàng trong trường hợp bác Tâm chỉ có thể hoàn tiền cho ngân hàng sau ngày mua một số ngày sau đây:

a) 30 ngày; b) 60 ngày; c) 90 ngày; d) 240 ngày.

16. Bác Hà sở hữu 500 cổ phiếu trong công ty B sản xuất máy bơm. Cho biết giá một cổ phiếu của công ty B là 4 500 đồng và công ty công bố chia cổ tức 500 đồng cho mỗi cổ phiếu.

a) Tính tổng số tiền cổ tức bác Hà nhận được.

b) Tính tỉ suất sinh lời cổ phiếu của công ty B.

17. Cho biết thông tin về một số cổ phiếu theo mã và ngành như sau:

Mã	Ngành	Giá đóng cửa ngày 03/4/2023 (VND)	Tỉ suất cổ tức	Cổ tức (VND)	Khối lượng giao dịch trung bình 3 tháng (cổ phiếu)
CPH	Bán lẻ	300	653,33%	1 960	0
ICC	Xây dựng và Vật liệu	24 000	22,25%	5 340	100
NSS	Sản xuất thực phẩm	3 000	33,33%	1 000	0
PAT	Hoá chất	91 480	33,51%	30 655	28 000
PRC	Vận tải	27 200	128,68%	35 000	11 220
PTG	Hàng cá nhân	300	666,67%	2 000	0
ST8	Thiết bị và Phần cứng	17 450	48,71%	8 500	543 340
VOC	Sản xuất thực phẩm	24 180	41,36%	10 000	212 710

(*Nguồn:* https://tuoitre.vn/bat-ngo-voi-nhung-doanh-nghiep-tra-co-tuc-cao-tren-600-20230406084911879.htm)

a) Vào ngày 03/4/2013, bác Hiền đầu tư bằng cách mua 20 000 cổ phiếu ICC với giá mỗi cổ phiếu là 12 000 đồng. Đến ngày 03/4/2023, bác Hiền bán hết số cổ phiếu nói trên. Hãy tính tổng số tiền lời mà bác Hiền thu được từ việc cổ phiếu tăng giá và tiền cổ tức được chia hằng năm.

b) Vào ngày 03/4/2018, cô Trang đã mua 28 000 cổ phiếu PAT với giá mỗi cổ phiếu là 61 480 đồng. Đến ngày 03/4/2023, cô Trang bán hết số cổ phiếu nói trên. Hãy tính tổng số tiền lời mà cô Trang thu được từ việc cổ phiếu tăng giá và tiền cổ tức được chia hằng năm.

18. Công ty C đầu tư 10 tỉ đồng vào một quỹ đầu tư trong thời gian 10 năm với hợp đồng như sau:

– Lãi suất 14%/năm (tính lãi kép theo nửa năm) cho 4 năm đầu tiên.

– Lãi suất 12%/năm (tính lãi kép theo quý) cho 3 năm tiếp theo.

– Lãi suất 10%/năm (tính lãi kép theo tháng) cho 3 năm cuối.

Vậy giá trị tích luỹ sau 10 năm của công ty B sẽ là bao nhiêu?

19. Dựa trên các thông tin sau đây:

Anh An:

THU NHẬP	
Dạy kèm:	2 000 000 đồng/tháng
Phụ giữ xe buổi tối:	3 000 000 đồng/tháng
Giao hàng:	1 000 000 đồng/tháng

CHI TIÊU	
Tiền điện thoại:	500 000 đồng/tháng
Tiền đi lại:	1 000 000 đồng/tháng
Tiền ăn uống:	2 500 000 đồng/tháng
Sách vở, tài liệu:	500 000 đồng/tháng
Tiêu vặt:	500 000 đồng/tháng

Chị Lan:

THU NHẬP	
Trợ giúp của gia đình:	1 000 000 đồng/tháng
Phụ bán hàng:	2 000 000 đồng/tháng
Trông trẻ:	1 000 000 đồng/tháng

CHI TIÊU	
Tiền điện thoại:	500 000 đồng/tháng
Tiền đi lại:	1 000 000 đồng/tháng
Tiền ăn uống:	3 000 000 đồng/tháng
Sách vở, tài liệu:	500 000 đồng/tháng
Tiêu vặt:	500 000 đồng/tháng
Xem ca nhạc:	500 000 đồng/tháng

a) Lập bảng ngân sách hằng tháng của anh An và chị Lan.

b) Lập kế hoạch tài chính giúp anh An đạt mục tiêu có được 30 triệu đồng trong vòng một năm để theo học một khoá học tiếng Anh.

c) Lập kế hoạch tài chính giúp chị Lan đạt mục tiêu có được 10 triệu đồng trong vòng một năm để theo học một khoá dạy bán hàng trực tuyến.

d) Anh An có thể tạo ra một dòng tiền trong 36 tháng bằng cách mỗi tháng gửi 1 triệu đồng tiết kiệm được từ ngân sách vào ngân hàng với lãi suất 6%/năm theo phương thức tính lãi kép cho kì hạn 1 tháng (kì trả lãi theo tháng). Tính số tiền anh An thu được vào cuối dòng tiền.

Chuyên đề 3

BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Biến ngẫu nhiên được dùng để mô tả nhiều đại lượng ngẫu nhiên trong thực tế, ví dụ như số câu trả lời đúng của học sinh trong một bài thi trắc nghiệm, số bàn thắng trong một trận đấu bóng đá hay giá của cổ phiếu trên thị trường chứng khoán.

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu về biến ngẫu nhiên rời rạc, trong trường hợp các biến ngẫu nhiên chỉ nhận hữu hạn giá trị. Chúng ta sẽ tìm hiểu cách xây dựng bảng phân bố và cách xác định các số đặc trưng như kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc. Chúng ta cũng sẽ tìm hiểu một số phân bố có nhiều ứng dụng trong thực tế là phân bố Bernoulli và phân bố nhị thức.

Con tem in hình chân dung nhà toán học người Thuỵ Sĩ Jakob Bernoulli (1655 – 1705), người đã có những đóng góp quan trọng cho Lí thuyết Xác suất.

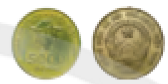
Sau chuyên đề này, bạn có thể:

- Nhận biết được khái niệm biến ngẫu nhiên rời rạc; phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc; kì vọng, phương sai, độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Lập và đọc được bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc với một số ít giá trị.
- Tính được kì vọng, phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Giải thích được ý nghĩa thực tiễn của các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc.
- Nhận biết được khái niệm về phép thử lặp và công thức Bernoulli.
- Nhận biết được khái niệm phân bố nhị thức. Nhận biết được ý nghĩa của phân bố nhị thức.
- Vận dụng được kiến thức về xác suất, các số đặc trưng của biến ngẫu nhiên rời rạc, phân bố nhị thức để giải quyết một số bài toán liên quan đến thực tiễn.

Bài 1. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Từ khoá: Biến ngẫu nhiên rời rạc; Phân bố xác suất;
Kì vọng; Phương sai; Độ lệch chuẩn.

Bạn Hà tham gia trò chơi gieo đồng xu trúng thưởng với luật chơi như sau: Ở mỗi lượt chơi, bạn Hà gieo đồng thời hai đồng xu cân đối và đồng chất. Nếu cả hai đồng xu đều sấp, bạn Hà được thưởng 4 quyển vở; nếu có đúng 1 đồng xu sấp, bạn Hà được thưởng 1 quyển vở; còn nếu không có đồng xu nào sấp, bạn Hà không được thưởng. Gọi X là số quyển vở bạn Hà được thưởng sau 1 lượt chơi. Xác suất X nhận giá trị bằng bao nhiêu là cao nhất?

Kết quả tung đồng xu	Số quyển vở được thưởng (X)
	4
	1
	1
	0

1. Biến ngẫu nhiên rời rạc

Một hộp chứa 4 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 4. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp.

a) Đại lượng tổng các số viết trên 2 thẻ có thể nhận các giá trị nào?

b) Đại lượng tích các số viết trên 2 thẻ có thể nhận các giá trị nào?

Khi thực hiện một phép thử ngẫu nhiên, các kết quả của phép thử có thể được mô tả thông qua một đại lượng nhận giá trị bằng số.

Biến ngẫu nhiên rời rạc là một đại lượng nhận một số hữu hạn các giá trị bằng số, các giá trị này là ngẫu nhiên và không thể dự đoán trước được.

Các biến ngẫu nhiên rời rạc thường được kí hiệu bởi các chữ cái in hoa X, Y, Z, …

Ví dụ 1. Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất.

a) Xác định không gian mẫu của phép thử.

b) Xét đại lượng X là trung bình cộng của số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc. X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không? Tại sao?

c) Xác định tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố "Giá trị của X không vượt quá 2", được kí hiệu là $[X \leq 2]$.

Giải

a) Không gian mẫu của phép thử là $\Omega = \{(i; j) \mid i, j \in \mathbb{N}; 1 \leq i, j \leq 6\}$, trong đó $(i; j)$ là chỉ kết quả số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất và thứ hai lần lượt là i và j.

b) Ta không thể dự đoán trước được giá trị của X, tuy nhiên ta biết X chỉ có thể nhận giá trị thuộc tập hợp $\{1; 1{,}5; 2; 2{,}5; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5; 5; 5{,}5; 6\}$ gồm hữu hạn phần tử. Do đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc.

c) Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố $[X \leq 2]$ là $\{(1; 1); (1; 2); (2; 1); (1; 3); (3; 1); (2; 2)\}$.

1 Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 7 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Các viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 5; các viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 7. Lấy ra ngẫu nhiên cùng một lúc 2 viên bi từ hộp. Trong các đại lượng sau, đại lượng nào là biến ngẫu nhiên rời rạc?

a) Đại lượng X là tổng các số ghi trên hai viên bi.

b) Đại lượng Y là tích các số ghi trên hai viên bi.

c) Đại lượng Z bằng 1 nếu hai viên bi cùng màu, bằng 0 nếu hai viên bi khác màu.

2 Một hộp chứa 10 tấm thẻ giống nhau, trong đó có 1 thẻ là thẻ may mắn. Bạn Khuê rút ngẫu nhiên từng thẻ trong hộp cho đến khi lấy được thẻ may mắn. Gọi X là số thẻ bạn Khuê đã rút cho đến khi lấy được thẻ may mắn. Hỏi X có phải là biến ngẫu nhiên rời rạc không nếu thẻ đã rút ra không được cho lại vào hộp?

2. Phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc

2 Câu lạc bộ bóng rổ của trường có 20 học sinh 16 tuổi, 14 học sinh 17 tuổi và 10 học sinh 18 tuổi. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của câu lạc bộ và gọi X là tuổi của học sinh đó.

Hỏi X có thể nhận những giá trị nào? Tính xác suất để X nhận mỗi giá trị đó.

Hình 1

Với X là biến ngẫu nhiên rời rạc bất kì, ta có thể không biết trước được giá trị của X. Tuy nhiên, ta có thể xác định được tập hợp các giá trị có thể của X. Trong thực tế, người ta quan tâm đến xác suất để X nhận mỗi giá trị đó.

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Với mỗi $k = 1; 2; \ldots; n$, gọi p_k là xác suất X nhận giá trị x_k, kí hiệu là

$$P(X = x_k) = p_k.$$

Bảng sau đây được gọi là ***bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc*** X, hay ***bảng phân bố xác suất*** của X.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Chú ý: Trong bảng phân bố xác suất của X, ta luôn có

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Ví dụ 2. Lập bảng phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X xác định ở ▶ (trang 54).

Giải

Tập các giá trị có thể của X là $\{0; 1; 4\}$.

Biến cố "X bằng 4" xảy ra khi cả hai đồng xu cùng sấp. Do đó $P(X = 4) = \frac{1}{4}$.

Biến cố "X bằng 1" xảy ra khi có đúng một đồng xu sấp. Do đó $P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Xác suất của biến cố "X bằng 0" là $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 4) = \frac{1}{4}$.

Bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Ví dụ 3. Một túi chứa 5 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên cùng một lúc 3 viên bi từ túi. Gọi Y là số viên bi xanh trong 3 viên bi được chọn ra.

a) Tìm tập các giá trị có thể của biến ngẫu nhiên rời rạc Y.

b) Lập bảng phân bố xác suất của Y.

Giải

a) Do chỉ có 2 viên bi đỏ nên nếu chọn ra 3 viên bi từ túi thì phải có ít nhất 1 viên bi xanh trong 3 viên bi đó. Vậy tập các giá trị có thể của Y là $\{1; 2; 3\}$.

b) Tổng số kết quả có thể xảy ra của phép thử là $n(\Omega) = C_7^3 = 35$.

- Biến cố "Y bằng 1" xảy ra khi chọn ra được 1 viên bi xanh và 2 viên bi đỏ. Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Y bằng 1" là $C_5^1C_2^2 = 5$.

  Xác suất của biến cố "Y bằng 1" là $P(Y = 1) = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$.

- Biến cố "Y bằng 2" xảy ra khi chọn ra được 2 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ. Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Y bằng 2" là $C_5^2C_2^1 = 20$.

  Xác suất của biến cố "Y bằng 2" là $P(Y = 2) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$.

- Biến cố "Y bằng 3" xảy ra khi chọn ra được 3 viên bi xanh và không có viên bi đỏ nào. Số kết quả thuận lợi cho biến cố "Y bằng 3" là $C_5^3 = 10$.

  Xác suất của biến cố "Y bằng 3" là $P(Y = 3) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$.

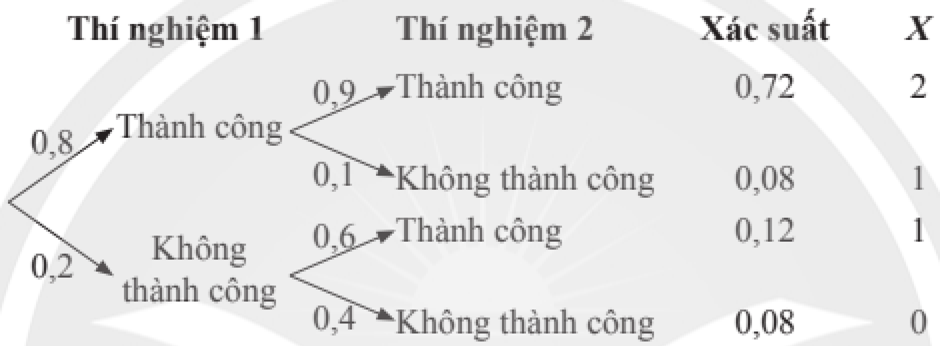
Bảng phân bố xác suất của Y là:

Y	1	2	3
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

Ví dụ 4. Minh phải thực hiện hai thí nghiệm. Xác suất thành công của thí nghiệm đầu tiên là 0,8. Xác suất thành công của thí nghiệm thứ hai bằng 0,9 nếu thí nghiệm đầu tiên thành công và bằng 0,6 nếu thí nghiệm đầu tiên không thành công. Gọi X là số thí nghiệm Minh thực hiện thành công. Hãy lập bảng phân bố xác suất của X.

Giải

Ta có sơ đồ hình cây sau:



Bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	2
P	0,08	0,2	0,72

Ví dụ 5. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	$-0,7$	$-0,3$	0,3	1
P	p	0,3	0,4	0,1

a) Xác định giá trị của p.

b) Tính xác suất của biến cố "X nhỏ hơn 0,3" và của biến cố "X nhỏ hơn 1".

Giải

a) Do $p + 0,3 + 0,4 + 0,1 = 1$ nên suy ra $p = 0,2$.

b) Biến cố "X nhỏ hơn 0,3" xảy ra khi $X = -0,7$ hoặc $X = -0,3$. Do đó xác suất của biến cố "X nhỏ hơn 0,3" là

$$P(X < 0,3) = P(X = -0,7) + P(X = -0,3) = 0,2 + 0,3 = 0,5.$$

Biến cố đối của biến cố "X nhỏ hơn 1" xảy ra khi $X = 1$ nên xác suất của biến cố "X nhỏ hơn 1" là

$$P(X < 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0,1 = 0,9.$$

Bạn Dung tham gia trò chơi ném phi tiêu trúng thưởng với luật chơi như sau: Ở mỗi lượt chơi, bạn Dung ném một mũi phi tiêu. Nếu bạn Dung ném được vào vòng 10 điểm, bạn Dung được thưởng 2 quả bóng bay; nếu ném được vòng 9 điểm, bạn Dung được thưởng 1 quả bóng bay. Nếu không ném được vào vòng 9 hay 10 điểm thì bạn Dung không được thưởng. Gọi X là số bóng bay bạn Dung được thưởng trong một lượt chơi. Lập bảng phân bố xác suất của X biết rằng xác suất bạn Dung ném được vào vòng 10 điểm là 0,1 và vòng 9 điểm là 0,2.

3. Kì vọng của biến ngẫu nhiên rời rạc

Khảo sát 40 học sinh lớp 12A về số xe máy có ở gia đình mỗi bạn. Kết quả được ghi vào bảng tần số sau:

Số lượng xe	0	1	2	3
Tần số	4	12	18	6

Hỏi trung bình trong mỗi gia đình các bạn lớp 12A có bao nhiêu xe máy?

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Kì vọng của X, kí hiệu là $E(X)$, là một số được tính theo công thức

$$E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Ví dụ 6. Ở 3, chọn ngẫu nhiên một bạn học sinh lớp 12A và gọi X là số xe máy có ở gia đình bạn đó.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính kì vọng của X.

Giải

Do mỗi gia đình các bạn học sinh lớp 12A có từ 0 đến 3 xe máy nên biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận các giá trị là 0; 1; 2; 3.

Tổng số kết quả có thể xảy ra khi chọn ngẫu nhiên một học sinh lớp 12A là $n(\Omega) = 40$.

Do có 4 gia đình có 0 xe máy nên số kết quả thuận lợi cho biến cố "X bằng 0" là 4.

Vậy xác suất của biến cố "X bằng 0" là $P(X = 0) = \dfrac{4}{40} = 0{,}1$.

Tương tự, ta có $P(X = 1) = \dfrac{12}{40} = 0{,}3$; $P(X = 2) = \dfrac{18}{40} = 0{,}45$; $P(X = 3) = \dfrac{6}{40} = 0{,}15$.

a) Bảng phân bố xác suất của X là

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,45	0,15

b) Kì vọng của X là

$$E(X) = 0 \,.\, 0{,}1 + 1 \,.\, 0{,}3 + 2 \,.\, 0{,}45 + 3 \,.\, 0{,}15 = 1{,}65.$$

Ý nghĩa của kì vọng

Kì vọng $E(X)$ là đại lượng đặc trưng cho độ lớn trung bình của biến ngẫu nhiên X. Do đó, kì vọng $E(X)$ còn được gọi là giá trị trung bình của biến ngẫu nhiên X, nó có thể không thuộc tập các giá trị của biến ngẫu nhiên.

Ví dụ 7. Đầu năm 2022, chị Thuỷ có 100 triệu đồng. Tại thời điểm đó, lãi suất ngân hàng là 9% một năm (kì hạn một năm) và giá mỗi cổ phiếu ABC là 25 000 đồng. Một chuyên gia cho rằng đến cuối năm 2022, giá cổ phiếu ABC sẽ là 26 000 đồng với xác suất 0,4 và là 30 000 đồng với xác suất 0,6.

Hình 2

a) Giả sử chị Thuý dùng 100 triệu đồng để mua cổ phiếu ABC vào đầu năm 2022. Gọi X là số tiền chị Thuý thu được khi bán hết lượng cổ phiếu đó vào cuối năm 2022. Hãy tính kì vọng của X.

b) Nếu chị Thuý gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng vào đầu năm 2022 và rút sau một năm thì thu được bao nhiêu tiền?

c) Trong hai phương án đầu tư trên, phương án nào có khả năng thu được tiền lãi cao hơn? Giải thích.

Giải

a) Tại thời điểm đầu năm 2022, giá mỗi cổ phiếu ABC là 25 000 đồng nên chị Thuý mua được

$$100\,000\,000 : 25\,000 = 4\,000 \text{ (cổ phiếu).}$$

Nếu vào cuối năm 2022, giá mỗi cổ phiếu ABC là 26 000 đồng thì

$$X = 26\,000 \,.\, 4\,000 = 104\,000\,000 \text{ (đồng) với xác suất } 0{,}4.$$

Nếu vào cuối năm 2022, giá mỗi cổ phiếu ABC là 30 000 đồng thì

$$X = 30\,000 \,.\, 4\,000 = 120\,000\,000 \text{ (đồng) với xác suất } 0{,}6.$$

Ta có bảng phân bố xác suất của X là

X	104 000 000	120 000 000
P	0,4	0,6

Kì vọng của X là

$$E(X) = 104\,000\,000 \,.\, 0{,}4 + 120\,000\,000 \,.\, 0{,}6 = 113\,600\,000.$$

b) Nếu chị Thuý gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng vào đầu năm 2022 và rút sau một năm thì chị Thuý thu được số tiền là

$$100\,000\,000 \,.\, (1 + 9\%) = 109\,000\,000 \text{ (đồng).}$$

c) Vì $E(X) > 109\,000\,000$ nên nếu chị Thuý đầu tư vào cổ phiếu ABC thì sẽ có khả năng nhận được tiền lãi cao hơn so với gửi tiết kiệm vào ngân hàng.

Một hộp chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 3.

a) Lấy ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi X là số ghi trên thẻ đó. Hãy tính kì vọng của X.

b) Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Gọi Y là số lớn hơn trong hai số ghi trên hai thẻ đó. Hãy tính kì vọng của Y.

Ở một hội chợ, người ta tổ chức trò chơi có thưởng như sau: Có 3 quả bóng giống nhau được đánh số từ 1 đến 3 và 3 cái hộp giống nhau cũng được đánh số từ 1 đến 3. Người chơi bị bịt mắt và phải cho bóng vào hộp sao cho mỗi hộp có đúng 1 quả bóng. Ứng với mỗi quả bóng cho vào hộp có cùng số với nó, người chơi sẽ được thưởng 2 000 đồng. Trước mỗi lượt chơi, người chơi phải mua vé ở chỗ quản trò với giá 1 000 đồng. Nếu so sánh về mặt trung bình thì người chơi hay quản trò có lợi hơn?

4. Phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc

Cho hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y có bảng phân bố xác suất như sau:

X	-3	2	3
P	0,25	0,5	0,25

Y	-200	2	200
P	0,25	0,5	0,25

a) Hãy so sánh kì vọng của X và kì vọng của Y.

b) Biến ngẫu nhiên rời rạc nào có các giá trị "phân tán" rộng hơn?

Để biết mức độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên rời rạc, ta có khái niệm phương sai và độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên rời rạc như sau:

Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Phương sai của X, kí hiệu là $V(X)$, được xác định bởi

$$V(X) = [x_1 - E(X)]^2 p_1 + \ldots + [x_n - E(X)]^2 p_n.$$

Độ lệch chuẩn của X, kí hiệu là $\sigma(X)$, là căn bậc hai số học của phương sai, nghĩa là

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Từ công thức tính $V(X)$ và $\sigma(X)$ ở trên, ta thấy nếu các giá trị $x_1, \ldots, x_n$ càng cách xa kì vọng $E(X)$ thì $V(X)$ và $\sigma(X)$ càng lớn.

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

– Phương sai và độ lệch chuẩn là các số không âm dùng để đo mức độ phân tán các giá trị của một biến ngẫu nhiên rời rạc xung quanh kì vọng của nó. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán càng lớn.

– Độ lệch chuẩn và biến ngẫu nhiên rời rạc có cùng đơn vị đo.

Ví dụ 8.

a) Tính phương sai và độ lệch chuẩn của các biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y ở 4 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b) Sử dụng độ lệch chuẩn, hãy so sánh độ phân tán của hai biến ngẫu nhiên rời rạc X và Y.

Giải

a) Kì vọng của X là

$$E(X) = (-3) \,.\, 0,25 + 2 \,.\, 0,5 + 3 \,.\, 0,25 = 1.$$

Phương sai của X là

$$V(X) = (-3-1)^2 \,.\, 0,25 + (2-1)^2 \,.\, 0,5 + (3-1)^2 \,.\, 0,25 = 5,5.$$

Độ lệch chuẩn của X là

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5,5} \approx 2,35.$$

Kì vọng của Y là

$$E(Y) = (-200) \,.\, 0,25 + 2 \,.\, 0,5 + 200 \,.\, 0,25 = 1.$$

Phương sai của Y là

$$V(Y) = (-200-1)^2 \,.\, 0,25 + (2-1)^2 \,.\, 0,5 + (200-1)^2 \,.\, 0,25 = 20\,001.$$

Độ lệch chuẩn của Y là

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{20\,001} \approx 141,42.$$

b) Do $\sigma(Y) > \sigma(X)$ nên xét theo độ lệch chuẩn, biến ngẫu nhiên rời rạc Y có độ phân tán cao hơn biến ngẫu nhiên rời rạc X.

Chú ý: Phương sai $V(X)$ cũng có thể được tính bởi công thức sau:

$$V(X) = x_1^2 p_1 + \ldots + x_n^2 p_n - [E(X)]^2. \quad (1)$$

5 Hãy tính $V(Y)$ ở Ví dụ 8 bằng công thức (1).

Ví dụ 9. Hiện tại, giá một cổ phiếu ABC là 20 000 đồng và một cổ phiếu DEF là 25 000 đồng. Theo các chuyên gia dự đoán, nếu thị trường xấu đi thì sau một năm, giá cổ phiếu ABC và DEF sẽ lần lượt là 21 000 đồng và 23 000 đồng; còn nếu thị trường tốt lên thì sau một năm, giá cổ phiếu ABC và DEF sẽ lần lượt là 25 000 đồng và 34 000 đồng. Xác suất thị trường tốt lên và xác suất thị trường xấu đi đều bằng 0,5.

Anh Phước vay ở một ngân hàng 100 triệu đồng để mua cổ phiếu ABC và chị Lộc cũng vay ở ngân hàng đó 100 triệu đồng để mua cổ phiếu DEF. Lãi suất ngân hàng là 8% một năm. Sau 1 năm, anh Phước và chị Lộc cùng bán hết số cổ phiếu đã mua. Gọi X và Y là số tiền còn lại sau khi trả nợ ngân hàng của anh Phước và chị Lộc. X và Y chính là khoản lãi do hoạt động đầu tư mang lại.

a) Căn cứ theo thông tin của chuyên gia, hãy so sánh khoản lãi trung bình của anh Phước và chị Lộc.

b) Giả sử độ rủi ro của một khoản đầu tư được tính bằng tỉ số giữa độ lệch chuẩn của khoản lãi và số tiền mua cổ phiếu ban đầu. Hãy so sánh độ rủi ro của khoản đầu tư của anh Phước và chị Lộc.

Giải

a) Số cổ phiếu ABC anh Phước mua được là

$$100 \;.\; 10^6 : 20\,000 = 5\,000 \text{ (cổ phiếu)}.$$

Số tiền vốn và lãi anh Phước phải trả cho ngân hàng sau 1 năm là

$$100 \;.\; 10^6 \;.\; (1 + 8\%) = 108\,000\,000 \text{ (đồng)}.$$

Nếu thị thường xấu đi, khoản lãi anh Phước thu được sau 1 năm là

$$X = 5\,000 \;.\; 21\,000 - 108\,000\,000 = -3\,000\,000 \text{ (đồng) với xác suất } 0,5.$$

Nếu thị trường tốt lên, khoản lãi anh Phước thu được sau 1 năm là

$$X = 5\,000 \;.\; 25\,000 - 108\,000\,000 = 17\,000\,000 \text{ (đồng) với xác suất } 0,5.$$

Ta có bảng phân bố xác suất của X là

X	$-3\,000\,000$	$17\,000\,000$
P	0,5	0,5

Kì vọng của X là

$$E(X) = -3\,000\,000 \;.\; 0,5 + 17\,000\,000 \;.\; 0,5 = 7\,000\,000 \text{ (đồng)}.$$

Số cổ phiếu DEF chị Lộc mua được là

$$100 \;.\; 10^6 : 25\,000 = 4\,000 \text{ (cổ phiếu)}.$$

Số tiền vốn và lãi chị Lộc phải trả cho ngân hàng sau 1 năm là

$$100 \;.\; 10^6 \;.\; (1 + 8\%) = 108\,000\,000 \text{ (đồng)}.$$

Nếu thị thường xấu đi, khoản lãi chị Lộc thu được sau 1 năm là

$$Y = 4\,000 \;.\; 23\,000 - 108\,000\,000 = -16\,000\,000 \text{ (đồng) với xác suất } 0,5.$$

Nếu thị trường tốt lên, khoản lãi chị Lộc thu được sau 1 năm là

$$Y = 4\,000 \;.\; 34\,000 - 108\,000\,000 = 28\,000\,000 \text{ (đồng) với xác suất } 0,5.$$

Ta có bảng phân bố xác suất của Y là

Y	$-16\,000\,000$	$28\,000\,000$
P	0,5	0,5

Kì vọng của Y là

$$E(Y) = -16\,000\,000 \;.\; 0,5 + 28\,000\,000 \;.\; 0,5 = 6\,000\,000 \text{ (đồng)}.$$

Vậy nếu căn cứ theo thông tin chuyên gia thì khoản lãi trung bình của anh Phước cao hơn của chị Lộc.

b) Phương sai của X là

$$V(X) = (-3\,000\,000)^2 \,.\, 0{,}5 + 17\,000\,000^2 \,.\, 0{,}5 - 7\,000\,000^2 = 100 \,.\, 10^{12}.$$

Tỉ số giữa độ lệch chuẩn của khoản lãi và số tiền mua cổ phiếu ban đầu của anh Phước là

$$\frac{\sqrt{100 \,.\, 10^{12}}}{100 \,.\, 10^{6}} = 0{,}1.$$

Phương sai của Y là

$$V(Y) = (-16\,000\,000)^2 \,.\, 0{,}5 + 28\,000\,000^2 \,.\, 0{,}5 - 6\,000\,000^2 = 484 \,.\, 10^{12}.$$

Tỉ số giữa độ lệch chuẩn của khoản lãi và số tiền mua cổ phiếu ban đầu của chị Lộc là

$$\frac{\sqrt{484 \,.\, 10^{12}}}{100 \,.\, 10^{6}} = 0{,}22.$$

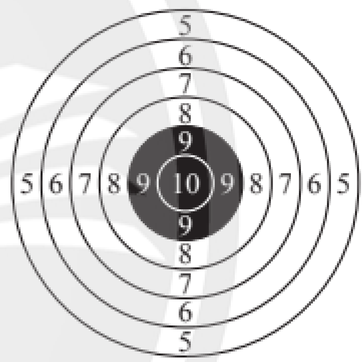
Vậy khoản đầu tư của chị Lộc có độ rủi ro cao hơn khoản đầu tư của anh Phước.

6 Mỗi ngày trong tuần, bác Linh sẽ chọn một trong ba phương tiện là xe đạp, xe máy hoặc xe buýt để đi đến cơ quan. Thời gian đi từ nhà đến cơ quan khi đi bằng xe đạp, xe máy hoặc xe buýt lần lượt là 20 phút, 10 phút và 12 phút. Biết rằng xác suất bác Linh chọn xe đạp, xe máy và xe buýt lần lượt là 0,3; 0,5 và 0,2. Chọn ngẫu nhiên một ngày trong tuần và gọi X là thời gian bác Linh đi từ nhà đến cơ quan ngày hôm đó. Tính kì vọng và phương sai của X.

2 Hai xạ thủ Vinh và Huy cùng tập bắn vào một bia. Xác suất bắn trúng vòng 9 và 10 của xạ thủ Vinh lần lượt là 0,4 và 0,3. Xác suất bắn trúng vòng 9 và 10 của xạ thủ Huy lần lượt là 0,6 và 0,2. Điểm số xạ thủ đạt được khi bắn trúng vòng 10 và 9 lần lượt là 2 và 1. Nếu xạ thủ không bắn trúng hai vòng trên thì được 0 điểm.

a) Nếu so sánh theo kì vọng thì xạ thủ nào có kết quả bắn tốt hơn?

b) Nếu so sánh theo phương sai thì xạ thủ nào có kết quả bắn ổn định hơn?



Hình 3

BÀI TẬP

1. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc Z có bảng phân bố xác suất như sau:

Z	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

a) Tìm tập các giá trị có thể của Z.

b) Tính xác suất của biến cố "Z bằng 0" và của biến cố "Z là số âm".

2. Sau khi khảo sát hiệu quả sử dụng của các cột sạc ô tô điện ở một khu vực, người ta thu được bảng phân bố xác suất của số lượng xe, kí hiệu là X, sạc điện ở mỗi cột sạc trong một ngày như sau:

X	0	1	2	3	4
P	0,1	p	$4p$	$3p$	p

a) Tìm p.

b) Hỏi trung bình một ngày có bao nhiêu xe được sạc điện ở một cột sạc?

c) Tính độ lệch chuẩn của X.

3. Một túi chứa 2 viên bi xanh và 8 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ túi. Gọi Y là số viên bi đỏ trong 2 viên bi được chọn ra.
a) Hãy tìm tập các giá trị có thể của Y.
b) Lập bảng phân bố xác suất của Y.
c) Tính kì vọng và phương sai của Y.

4. Kết quả khảo sát cân nặng (làm tròn đến 100 g) của 50 trái sầu riêng trong một lô hàng A được tổng hợp ở bảng sau:

Cân nặng (gam)	2 400	2 500	2 600	2 700
Tần số	6	20	16	8

a) Chọn ngẫu nhiên 1 trái sầu riêng trong lô hàng A và gọi X là cân nặng (làm tròn đến 100 g) của trái sầu riêng đó. Hãy tính kì vọng và độ lệch chuẩn của X.

b) Cân nặng của một quả sầu riêng được lựa chọn ngẫu nhiên từ lô hàng B có kì vọng 2 524 g và độ lệch chuẩn là 121 g. Hỏi nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì sầu riêng ở lô hàng nào có cân nặng đồng đều hơn?

Bài 2. PHÂN BỐ BERNOULLI VÀ PHÂN BỐ NHỊ THỨC

Từ khoá: Phép thử lặp; Phân bố Bernoulli; Công thức Bernoulli; Phân bố nhị thức.

Một loại hạt giống có xác suất nảy mầm là 0,9. Bác Hoan gieo 100 hạt giống đó một cách độc lập với nhau.
Có người cho rằng "Trong 100 hạt giống bác Hoan gieo sẽ có đúng 90 hạt nảy mầm". Nhận định đó là đúng hay sai?

1. Phân bố Bernoulli

1 Thuyền trưởng Vinh gửi một tín hiệu vô tuyến từ thuyền đến trạm điều khiển. Xác suất để trạm điều khiển thu được tín hiệu vô tuyến là 0,8. Gọi X là số tín hiệu vô tuyến của thuyền trưởng Vinh được thu bởi trạm điều khiển. Hãy tính kì vọng và phương sai của X.

Trong nhiều phép thử, người ta chỉ quan tâm xem kết quả của nó là thành công hay thất bại. Những phép thử đó được gọi là phép thử Bernoulli. Xét biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận giá trị bằng 1 nếu phép thử thành công và bằng 0 nếu phép thử thất bại. Phân bố xác suất của X được gọi là phân bố Bernoulli.

> Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có ***phân bố Bernoulli*** với tham số $p \in (0; 1)$, kí hiệu là $X \sim Ber(p)$, nếu X chỉ nhận hai giá trị là 0 và 1, và $P(X = 1) = p$; $P(X = 0) = 1 - p$.

Chú ý: Nếu $X \sim Ber(p)$ thì $E(X) = p$ và $V(X) = p(1 - p)$.

Ví dụ 1. Trong các biến ngẫu nhiên rời rạc sau, biến ngẫu nhiên rời rạc nào có phân bố Bernoulli? Xác định giá trị của tham số p và tính phương sai của các biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố Bernoulli đó.

a) X là số mặt sấp xuất hiện khi gieo một đồng xu cân đối và đồng chất.

b) Y là số mặt sấp xuất hiện khi gieo hai đồng xu cân đối và đồng chất.

c) Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Biến ngẫu nhiên rời rạc Z nhận giá trị bằng 1 nếu hai mặt có cùng số chấm xuất hiện, bằng 0 nếu ngược lại.

Giải

a) X nhận hai giá trị là 0, 1 và $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = \frac{1}{2}$.

Vậy X có phân bố Bernoulli với tham số $p = \frac{1}{2}$.

Phương sai của X là $V(X) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

b) Y nhận ba giá trị là 0; 1 và 2 nên Y không có phân bố Bernoulli.

c) Z nhận hai giá trị là 0 và 1. Vì có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố "$Z = 1$" trong tổng số 36 kết quả có thể xảy ra nên

$$P(Z = 1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Vậy Z có phân bố Bernoulli với tham số $p = \frac{1}{6}$.

Phương sai của Z là $V(Z) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36}$.

1 Trong các biến ngẫu nhiên rời rạc sau, biến ngẫu nhiên rời rạc nào có phân bố Bernoulli? Xác định giá trị của tham số p và tính độ lệch chuẩn của các biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố Bernoulli đó.

a) X là số mặt 6 chấm xuất hiện khi gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất.

b) Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Biến ngẫu nhiên rời rạc Y nhận giá trị bằng 1 nếu xuất hiện mặt 6 chấm, bằng 0 nếu không xuất hiện mặt nào 6 chấm.

c) Gieo 1 con xúc xắc cân đối và đồng chất, gọi Z là số dư khi chia số chấm xuất hiện cho 2.

d) Gieo 1 con xúc xắc cân đối và đồng chất, gọi T là số dư khi chia số chấm xuất hiện cho 3.

2. Phép thử lặp và công thức Bernoulli

Xét phép thử ngẫu nhiên T là "Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất". Hãy liệt kê tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử T ba lần liên tiếp một cách độc lập.

Trong thực tế có nhiều hành động được lặp lại nhiều lần, ví dụ như gieo hạt trồng cây, truyền phát tín hiệu giữa các thiết bị hay kiểm tra chất lượng các sản phẩm.

Giả sử T là một phép thử ngẫu nhiên. Hoạt động lặp lại nhiều lần phép thử T được gọi là ***phép thử lặp*** nếu các lần thực hiện phép thử một cách độc lập với nhau, tức là kết quả của mỗi lần thực hiện phép thử không ảnh hưởng đến kết quả của các lần thử khác. Số lần thực hiện phép thử T được gọi là ***số lần lặp*** của phép thử lặp đó.

Ví dụ 2. Trong các hoạt động sau, hoạt động nào là phép thử lặp? Hãy cho biết số lần lặp của các hoạt động là phép thử lặp.

a) Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 10 lần một cách độc lập.

b) Một hộp chứa 4 viên bi xanh và 3 viên bi trắng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp, xem màu rồi trả lại hộp. Thực hiện hoạt động này 5 lần.

c) Một hộp chứa 4 viên bi xanh và 3 viên bi trắng có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp, xem màu và bỏ ra ngoài hộp. Thực hiện hoạt động này 2 lần.

Giải

a) Gọi T là phép thử "Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất".
Trong hoạt động ở câu a), phép thử T được lặp lại 10 lần một cách độc lập. Do đó hoạt động này là phép thử lặp với số lần lặp là 10.

b) Gọi T là phép thử "Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ một hộp chứa 4 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng".
Trong hoạt động ở câu b), phép thử T được lặp lại 5 lần và sau mỗi lần thử, viên bi được trả lại hộp nên không làm ảnh hưởng đến kết quả của các lần thử khác, tức là 5 lần thử được thực hiện độc lập. Vậy hoạt động ở câu b) là phép thử lặp với số lần lặp là 5.

c) Xét hoạt động ở câu c). Nếu lần thử thứ nhất lấy được viên bi màu xanh thì xác suất lấy được viên bi màu xanh ở lần thử thứ hai là $\frac{3}{6}$. Ngược lại, nếu lần thử thứ nhất lấy được viên bi màu trắng thì xác suất lấy được viên bi màu xanh ở lần thử thứ hai là $\frac{4}{6}$. Do đó kết quả của lần thử thứ nhất ảnh hưởng đến kết quả của lần thử thứ hai. Vậy hoạt động c) không phải là phép thử lặp.

Cho phép thử T và A là một biến cố liên quan đến phép thử T. Giả sử xác suất biến cố A xảy ra ở mỗi lần thực hiện phép thử T là $P(A) = p$ với $0 < p < 1$.
Thực hiện lặp lại n lần phép thử T một cách độc lập. Kí hiệu A_k là biến cố "Biến cố A xảy ra đúng k lần trong n lần thực hiện phép thử T", $k = 0, 1, \ldots, n$. Khi đó xác suất của A_k được xác định bởi ***công thức Bernoulli*** sau:

$$P(A_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian, vệ tinh Alpha truyền lần lượt từng tín hiệu đến vệ tinh Beta. Biết rằng mỗi lần vệ tinh Alpha truyền tín hiệu, xác suất vệ tinh Beta nhận được thành công tín hiệu đó đều bằng 0,95. Giả sử vệ tinh Alpha truyền 10 tín hiệu đến vệ tinh Beta một cách độc lập. Tính xác suất của các biến cố sau:

C: "Vệ tinh Beta nhận được thành công 8 tín hiệu";

D: "Vệ tinh Beta nhận được thành công ít nhất 9 tín hiệu".

(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)

Giải

Gọi T là phép thử "Vệ tinh Alpha truyền 1 tín hiệu đến vệ tinh Beta". Theo đề bài, phép thử T được lặp 10 lần một cách độc lập. Gọi A là biến cố "Vệ tinh Beta nhận thành công tín hiệu từ vệ tinh Alpha". Ta có $P(A) = 0{,}95$.

Gọi A_k là biến cố "Vệ tinh Beta nhận thành công k tín hiệu trong 10 tín hiệu", với $k = 0, 1, \ldots, 10$. Áp dụng công thức Bernoulli, ta có

$$P(A_k) = C_{10}^{k}.0{,}95^{k}.(1-0{,}95)^{10-k}, \text{ với } k = 0, 1, \ldots, 10.$$

Do đó,

$$P(C) = P(A_8) = C_{10}^{8}.0{,}95^{8}.0{,}05^{2} \approx 0{,}07.$$

Vì $D = A_9 \cup A_{10}$ với $A_9 \cap A_{10} = \varnothing$ nên

$$P(D) = P(A_9) + P(A_{10}) = C_{10}^{9}.0{,}95^{9}.0{,}05^{1} + C_{10}^{10}.0{,}95^{10}.0{,}05^{0} = 1{,}45.0{,}95^{9} \approx 0{,}91.$$

2 Trong ▶ (trang 64), hãy tính xác suất của biến cố "Trong 100 hạt giống bác Hoan gieo, có đúng 90 hạt nảy mầm".

3 Tỉ lệ người lao động có bằng đại học ở một khu công nghiệp là 30%. Tiến hành phỏng vấn lần lượt 10 người lao động được lựa chọn ngẫu nhiên một cách độc lập từ khu công nghiệp đó. Tính xác suất của các biến cố sau:

A: "Có đúng 3 trong 10 người được phỏng vấn có bằng đại học";

B: "Có ít nhất 1 trong 10 người được phỏng vấn có bằng đại học".

3. Phân bố nhị thức

3 Một công ty dược nhận thấy xác suất một bệnh nhân có phản ứng phụ khi được điều trị bằng một loại thuốc M là 0,08. Chọn ngẫu nhiên 10 000 bệnh nhân được điều trị một cách độc lập bằng thuốc M. Gọi X là số bệnh nhân có phản ứng phụ trong 10 000 bệnh nhân đó. Hãy viết biểu thức tính kì vọng của X.

Ta thấy X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị từ 0 đến 10 000. Biến cố "X nhận giá trị bằng k" xảy ra khi có đúng k trong 10 000 bệnh nhân có phản ứng phụ với thuốc M. Do các bệnh nhân được điều trị độc lập với nhau và xác suất xảy ra phản ứng phụ của mỗi bệnh nhân đều là 0,08 nên áp dụng công thức Bernoulli, ta có

$$P(X = k) = C_{10000}^{k}.0{,}08^{k}.0{,}92^{10000-k}, \text{ với } k = 0, 1, \ldots, 10\,000.$$

Ta nói biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bố nhị thức $B(10\,000; 0{,}08)$.

Một cách tổng quát, ta có định nghĩa phân bố nhị thức như sau:

Cho số nguyên dương n và số thực $p \in (0; 1)$. Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có ***phân bố nhị thức*** $B(n; p)$ nếu X chỉ nhận các giá trị thuộc tập hợp $\{0; 1; \ldots; n\}$ và

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ với } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Chú ý:

• Cho phép thử T và biến cố A liên quan đến phép thử T với xác suất $P(A) = p$, $0 < p < 1$. Thực hiện phép thử T lặp lại n lần một cách độc lập và gọi X là số lần xảy ra biến cố A. Khi đó X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức $B(n; p)$.

• Khi $n = 1$ thì phân bố nhị thức $B(1; p)$ là phân bố Bernoulli.

Ví dụ 4. Trong các biến ngẫu nhiên rời rạc sau, biến ngẫu nhiên rời rạc nào có phân bố nhị thức?

a) Một hộp chứa 4 viên bi xanh và 1 viên bi đỏ, các viên bi cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Gọi X là số bi đỏ được lấy ra trong 2 viên bi đó.

b) Y là số lần xuất hiện mặt 1 chấm khi gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất 4 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau.

Giải

a) X nhận các giá trị 0 và 1. Ta có $P(X = 0) = \dfrac{C_4^2}{C_5^2} = 0{,}6$ và $P(X = 1) = 0{,}4$ nên X có phân bố nhị thức $B(1; 0{,}4)$.

b) Gọi T là phép thử "Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất" và A là biến cố "Xuất hiện mặt 1 chấm". Y là số lần xảy ra biến cố A khi lặp 4 lần phép thử T. Do phép thử T được lặp 4 lần độc lập với nhau và xác suất xảy ra biến cố A trong mỗi lần thử đều bằng $\dfrac{1}{6}$ nên theo chú ý trên, Y là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức $B\left(4; \dfrac{1}{6}\right)$.

Ví dụ 5. Trong một phân xưởng, tỉ lệ sản phẩm bị lỗi của một dây chuyền sản xuất là 0,2%. Nhân viên quản lí chất lượng chọn ngẫu nhiên một cách độc lập N sản phẩm của dây chuyền sản xuất để kiểm tra.

a) Tính xác suất để nhân viên quản lí chất lượng tìm ra ít nhất một sản phẩm bị lỗi khi $N = 10$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của N sao cho xác suất tìm ra ít nhất một sản phẩm bị lỗi lớn hơn 0,9.

(Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.)

Giải

Gọi T là phép thử "Chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm của dây chuyền", A là biến cố "Sản phẩm lấy ra bị lỗi" và X là số lần xảy ra biến cố A khi lặp N lần phép thử T.

Do phép thử T được thực hiện N lần độc lập với nhau và xác suất xảy ra biến cố A trong mỗi lần thử đều bằng 0,002 nên X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức $B(N; 0{,}002)$.

a) Khi $N = 10$ thì xác suất tìm ra ít nhất một sản phẩm lỗi là

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}998^{10} \approx 0{,}020.$$

b) Xác suất tìm ra ít nhất một sản phẩm lỗi trong N sản phẩm được kiểm tra là

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}998^N > 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}998^N < 0{,}1 \Leftrightarrow N > \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}998}.$$

Do $\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}998} \approx 1\,150{,}141$ nên giá trị nhỏ nhất của N thoả mãn yêu cầu đề bài là 1 151.

Ví dụ 6. Trong một phép lai, xác suất một cá thể tạo ra ở thế hệ F_1 mang biến dị tổ hợp là $\frac{5}{8}$. Gọi X là số cá thể mang biến dị tổ hợp trong 3 cá thể F_1 được lựa chọn ngẫu nhiên một cách độc lập.

a) Lập bảng phân bố xác suất của X.

b) Tính kì vọng và phương sai của X.

Giải

a) Gọi T là phép thử "Chọn ngẫu nhiên 1 cá thể ở thế hệ F_1" và A là biến cố "Cá thể được chọn mang biến dị tổ hợp". Gọi X là số lần xảy ra biến cố A khi lặp 3 lần phép thử T.

Do phép thử T được thực hiện 3 lần một cách độc lập với nhau và xác suất xảy ra biến cố A trong mỗi lần thử đều bằng $\frac{5}{8}$ nên X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân bố nhị thức $B(3; \frac{5}{8})$. Do đó

$$P(X = k) = C_3^k . \left(\frac{5}{8}\right)^k . \left(\frac{3}{8}\right)^{3-k}, \text{ với } k = 0, 1, 2, 3.$$

Lần lượt tính $P(X = k)$ với $k = 0, 1, 2, 3$ từ công thức trên, ta thu được bảng phân bố xác suất của X như sau:

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{512}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{225}{512}$	$\frac{125}{512}$

b) Kì vọng của X là

$$E(X) = 0 . \frac{27}{512} + 1 . \frac{135}{512} + 2 . \frac{225}{512} + 3 . \frac{125}{512} = \frac{15}{8} = 1{,}875.$$

Phương sai của X là

$$V(X) = 0^2 . \frac{27}{512} + 1^2 . \frac{135}{512} + 2^2 . \frac{225}{512} + 3^2 . \frac{125}{512} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{45}{64} = 0{,}703125.$$

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng khi biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bố nhị thức $B(n; p)$ thì

$$E(X) = np \text{ và } V(X) = np(1 - p).$$

Tính kì vọng của X ở 3 (trang 67).

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bố nhị thức $B(5; 0,2)$.
a) Tính xác suất của biến cố "X lớn hơn 3".
b) Tính kì vọng và độ lệch chuẩn của X.

Vào đầu mùa đông, trang trại A lắp mới 10 bóng đèn để sưởi ấm cho gà. Các bóng đèn hoạt động độc lập với nhau và sẽ được bật liên tục trong mùa đông. Bóng bị hỏng không được thay thế. Xác suất không bị hỏng trong cả mùa đông của mỗi bóng đều bằng 0,8. Đàn gà sẽ đủ ấm nếu có ít nhất 7 bóng đèn hoạt động.
a) Tính xác suất của biến cố "Đàn gà đủ ấm trong suốt mùa đông".
b) Nếu người ta mua dự trữ thêm 1 bóng đèn loại rất tốt, chắc chắn có thể sử dụng hết cả mùa đông, và sẽ sử dụng nó thay thế cho bóng đèn đầu tiên bị hỏng trong 10 bóng đèn ban đầu, thì xác suất của biến cố "Đàn gà đủ ấm trong suốt mùa đông" là bao nhiêu?

BÀI TẬP

1. Một hộp chứa 10 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 10. Trong các biến ngẫu nhiên rời rạc dưới đây, biến ngẫu nhiên rời rạc nào có phân bố nhị thức?
a) Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ từ hộp và gọi X là số các thẻ ghi số chẵn trong 3 thẻ đó.
b) Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ từ hộp và gọi Y là số các thẻ ghi số chia hết cho 5 trong 3 thẻ đó.
c) Lấy ra 1 thẻ từ hộp, xem số rồi trả thẻ lại hộp. Lặp lại phép thử trên thêm 2 lần một cách độc lập và gọi Z là số thẻ ghi số chẵn trong các thẻ lấy ra.

2. Tỉ lệ người có nhóm máu O trong một cộng đồng là 40%. Chọn ngẫu nhiên một cách độc lập 8 người từ cộng đồng đó.
a) Tính xác suất để có đúng 3 người được chọn có nhóm máu O.
b) Tính xác suất để có từ 3 đến 5 người được chọn có nhóm máu O.
c) Gọi X là số người có nhóm máu O trong 8 người được chọn. Tính kì vọng và phương sai của X.

3. Có 60% tài xế thường xuyên nghe tin tức giao thông trên đài khi lái xe. Chọn ngẫu nhiên một cách độc lập 6 tài xế.
a) Tính xác suất để có đúng 4 tài xế thường xuyên nghe tin tức giao thông trên đài.
b) Tính xác suất để có ít nhất 5 tài xế thường xuyên nghe tin tức giao thông trên đài.

4. Tỉ lệ phát bóng hỏng của một vận động viên bóng chuyền là 15%. Vận động viên đó thực hiện 40 quả phát bóng một cách độc lập với nhau. Gọi X là số quả phát bóng hỏng trong 40 quả đó.
a) Tính kì vọng và phương sai của X.
b) Hỏi xác suất X nhận giá trị bằng bao nhiêu là lớn nhất?

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 3

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có bảng phân bố xác suất như sau:

X	-5	1	5
P	0,2	0,4	0,4

a) Xác suất của biến cố "X lớn hay bằng 2" là

A. 0. B. 0,4. C. 0,8. D. 0,2.

b) Kì vọng của X là

A. -1. B. 0,4. C. 1. D. 1,4.

c) Phương sai của X là

A. 13,44. B. 15,4. C. 1,96. D. 12,6.

2. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bố nhị thức $B(5; 0,2)$.

a) Xác suất của biến cố "X bằng 2" là

A. 0,2048. B. 0,0512. C. 0,0205. D. 0,4.

b) Kì vọng của X là

A. 0,2. B. 1. C. 0,8. D. 5.

c) Phương sai của X là

A. 0,8. B. 0,89. C. 0,64. D. 1.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

3. Kết quả khảo sát chiều cao (đơn vị: cm, làm tròn đến hàng đơn vị) của 50 cây gỗ Trầm Hương giống được thống kê lại ở bảng tần số sau:

Chiều cao (cm)	18	19	20	21
Tần số	5	21	17	7

Chọn ngẫu nhiên 1 cây giống trong 50 cây đó và gọi X là chiều cao của cây (đơn vị: cm, làm tròn đến hàng đơn vị). Hãy tính kì vọng và độ lệch chuẩn của X.

4. Đầu năm cô Hà vay ngân hàng 2 triệu đồng mua cổ phiếu mã DEF với giá 20 000 đồng một cổ phiếu. Lãi suất ngân hàng là 9,5% một năm. Đến cuối năm, cô Hà bán toàn bộ cổ phiếu đó và lấy tiền trả nợ cho ngân hàng. Gọi X là số tiền còn lại. Hãy lập bảng phân bố xác suất của X, biết rằng đến cuối năm, mỗi cổ phiếu mã DEF có giá là 25 000 đồng với xác suất là 0,3 và 31 000 đồng với xác suất là 0,7.

5. Một hộp chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 5. Thẻ số 5 có thể đổi được 10 điểm còn mỗi thẻ ghi số chẵn có thể đổi được 5 điểm. Các thẻ còn lại không đổi được điểm. Rút ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp và đổi các thẻ này lấy điểm. Gọi X là số điểm đổi được. Hãy lập bảng phân bố xác suất, tính kì vọng và phương sai của X.

6. Trong hộp có 10 quả trứng cùng loại, trong đó có 8 quả trứng bình thường và 2 quả trứng đặc biệt có 2 lòng đỏ. Bác Lan lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 quả trứng từ hộp, đập chúng vào bát và quan sát số lòng đỏ trứng. Gọi X là số lòng đỏ bác Lan quan sát được. Hãy lập bảng phân bố xác suất và tính kì vọng của X.

Hình 1

7. Tỉ lệ người cao tuổi trong một cộng đồng dân cư là 23%. Chọn ngẫu nhiên một cách độc lập 5 người trong cộng đồng dân cư. Gọi X là số người cao tuổi trong 5 người được chọn. Hãy tính kì vọng và phương sai của X.

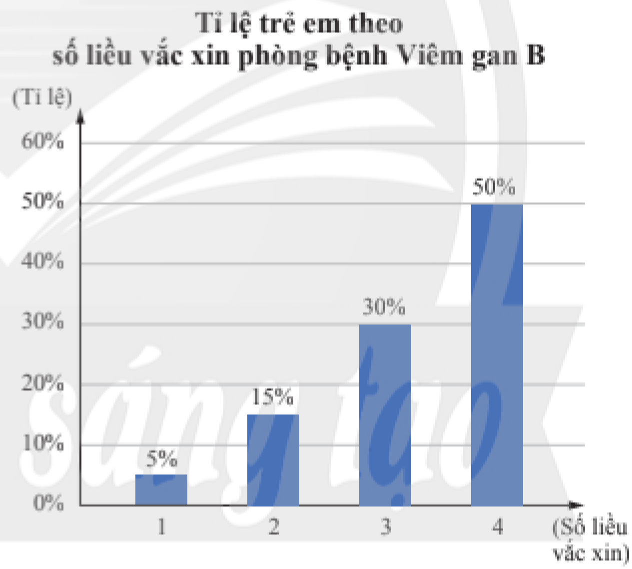
8. Bác Minh thực hiện 10 lần ghép cành một cách độc lập với nhau. Biết rằng xác suất thành công của mỗi lần ghép là 0,75. Hãy tính xác suất của các biến cố:

A: "Có đúng 8 trong 10 lần ghép thành công";

B: "Có ít nhất 8 trong 10 lần ghép thành công".

9. Ở một khu vực, tất cả trẻ sơ sinh đều đã được tiêm từ 1 đến 4 liều vắc xin phòng bệnh Viêm gan B trước khi được 18 tháng tuổi.

Biểu đồ bên biểu diễn tỉ lệ trẻ em theo số liều vắc xin phòng bệnh Viêm gan B đã được tiêm cho đến khi được 18 tháng tuổi ở khu vực đó.



a) Trung bình mỗi trẻ em ở khu vực đó được tiêm bao nhiêu liều vắc xin phòng bệnh Viêm gan B trước khi được 18 tháng tuổi?

b) Chọn ngẫu nhiên một cách độc lập 50 trẻ em từ khu vực đó. Gọi X là số trẻ em đã được tiêm ít nhất 3 mũi vắc xin phòng bệnh Viêm gan B trước khi được 18 tháng tuổi. Hãy tính kì vọng và phương sai của X.

10. Cô An thiết kế một đề thi trắc nghiệm gồm m câu hỏi, mỗi câu hỏi có k lựa chọn. Mỗi câu trả lời đúng được 1 điểm. Cô An muốn thiết kế sao cho nếu một học sinh lựa chọn phương án trả lời cho mỗi câu hỏi một cách ngẫu nhiên và độc lập với nhau thì điểm số trung bình của học sinh đó sẽ là 10 với độ lệch chuẩn ít nhất là $2\sqrt{2}$. Cô An cũng muốn số phương án trả lời k ít nhất có thể. Vậy cô An nên thiết kế đề với m và k bằng bao nhiêu?

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

B	**Bài toán quy hoạch tuyến tính** Bài toán quy hoạch tuyến tính (hai biến) là bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng $F(x, y) = ax + by$ (a và b là các số thực không đồng thời bằng 0) trên miền nghiệm Ω của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn (x và y). **Bảng ngân sách** Là công cụ giúp theo dõi, tổng hợp thông tin về thu nhập, chi tiêu và tiết kiệm trong một khoảng thời gian nhất định, thông thường là hằng tháng hoặc hằng năm. **Biến ngẫu nhiên rời rạc** Là đại lượng nhận một số hữu hạn các giá trị bằng số, các giá trị này là ngẫu nhiên và không thể dự đoán trước được.
C	**Chứng chỉ quỹ** Là loại chứng khoán xác nhận quyền sở hữu của nhà đầu tư đối với một phần vốn góp của quỹ đầu tư chứng khoán. **Chứng khoán** Là tài sản, bao gồm các loại sau đây: cổ phiếu, trái phiếu, chứng chỉ quỹ; chứng quyền, chứng quyền có bảo đảm, quyền mua cổ phần, chứng chỉ lưu kí; chứng khoán phái sinh; các loại chứng khoán khác do Chính phủ quy định. **Cổ phiếu** Là loại chứng khoán xác nhận quyền và lợi ích hợp pháp của người sở hữu đối với một phần nợ của tổ chức phát hành. **Công thức Bernoulli** Thực hiện lặp lại n lần phép thử T một cách độc lập. Gọi p **là xác suất xuất hiện biến cố** A trong mỗi lần thử. Xác suất biến cố A xuất hiện k lần trong n lần thử là $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ với $k = 0, 1, \ldots, n$.
Đ	**Đầu tư tài chính** Là quá trình cá nhân hoặc tổ chức sử dụng nguồn vốn để mua cổ phiếu, trái phiếu, chứng chỉ quỹ, gửi tiết kiệm hay các tài sản tài chính khác, … nhằm mục đích kiếm thu nhập và lợi nhuận trong tương lai. **Độ lệch chuẩn** Đặc trưng cho độ phân tán của biến ngẫu nhiên và bằng căn bậc hai số học của phương sai.
K	**Kế hoạch tài chính cá nhân** Là một bản kế hoạch chi tiết cho việc quản lí và sử dụng tiền của một người để đạt được mục tiêu tài chính của mình trong tương lai. **Kì vọng** Đại diện cho giá trị trung bình mà biến ngẫu nhiên có thể nhận, bằng tổng các tích của mỗi giá trị mà biến ngẫu nhiên có thể nhận với xác suất biến ngẫu nhiên nhận giá trị đó.
L	**Lãi đơn** Là tiền lãi được tính theo phương thức số tiền lãi ở mỗi chu kì không được tính vào vốn gốc để tính lãi cho chu kì tiếp theo. **Lãi kép** Là tiền lãi được tính theo phương thức số tiền lãi ở chu kì trước nhập vào vốn gốc để tính lãi cho chu kì tiếp theo. **Lãi suất** Là tỉ lệ phần trăm giữa tiền lãi thu được ở cuối chu kì và tiền vốn cho vay từ đầu chu kì đó.

L	**Lãi suất danh nghĩa** Là lãi suất không đề cập đến các yếu tố lạm phát. **Lãi suất thực** Là lãi suất thực sự còn lại sau khi có tính yếu tố lạm phát. **Lạm phát** Là sự tăng giá của hàng hoá, dịch vụ trong một khoảng thời gian, dẫn đến việc giảm giá trị của đồng tiền.
P	**Phân bố Bernoulli** Biến ngẫu nhiên rời rạc X được gọi là có phân bố Bernoulli nếu X chỉ nhận hai giá trị là 0 và 1. **Phân bố nhị thức** Biến ngẫu nhiên rời rạc X có phân bố nhị thức $B(n; p)$ nếu tập giá trị của biến ngẫu nhiên X là $\{0; 1; \ldots; n\}$ và $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. **Phép thử lặp** Là hoạt động lặp lại nhiều lần phép thử T trong đó các lần thử được thực hiện một cách độc lập. **Phí sử dụng thẻ** Là các loại phí người sử dụng cần phải trả để có thể sử dụng thẻ tín dụng. **Phương sai** Phương sai của X, kí hiệu là $V(X)$, đặc trưng cho độ phân tán của biến ngẫu nhiên X.
R	**Ràng buộc** Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong bài toán quy hoạch tuyến tính còn được gọi là ràng buộc của bài toán đó.
T	**Tập phương án** Là tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất trong bài toán quy hoạch tuyến tính. **Thẻ tín dụng** Là một loại phương tiện thanh toán giúp bạn mua hàng trước và thanh toán lại sau cho đơn vị phát hành thẻ. **Tỉ giá** Là tỉ lệ quy đổi giá trị một đơn vị tiền tệ này sang một đơn vị tiền tệ khác. **Tỉ lệ lạm phát** Được tính bằng tỉ lệ phần trăm sự thay đổi giá của hàng hoá, dịch vụ trong một khoảng thời gian (thường là một năm). **Tiền** Là bất cứ phương tiện nào được thừa nhận chung để trao đổi hàng hoá, dịch vụ hoặc để trả các khoản nợ. **Tín dụng** Là quan hệ vay mượn giữa người cho vay vốn và người vay vốn dựa trên nguyên tắc hoàn trả có kì hạn cả vốn và lãi. **Tổ chức tín dụng** Là các cơ quan có chức năng cho vay vốn được pháp luật công nhận. **Trái phiếu** Là loại chứng khoán xác nhận quyền và lợi ích hợp pháp của người sở hữu đối với một phần nợ của tổ chức phát hành.

BẢNG TRA CỨU TỪ NGỮ

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:
Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung:	TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ – NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ
Thiết kế sách:	HOÀNG CAO HIỀN
Trình bày bìa:	ĐẶNG NGỌC HÀ – TỐNG THANH THẢO
Minh hoạ:	PHẠM NGỌC KHANG – NGUYỄN NGỌC ĐAN THANH
Sửa bản in:	TRẦN THANH HÀ – ĐẶNG THỊ THUÝ NGUYỄN THỊ PHƯỚC THỌ – HOÀNG THỊ THU DUNG
Chế bản:	CÔNG TY CỔ PHẦN DỊCH VỤ XUẤT BẢN GIÁO DỤC GIA ĐỊNH

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 12 (CHÂN TRỜI SÁNG TẠO)

Mã số: ....
In .... bản, (QĐ in số ....) khổ 19 x 26,5 cm
Đơn vị in: ....
Địa chỉ: ....
Số ĐKXB: ....
Số QĐXB: ...., ngày .... tháng .... năm 20...
In xong và nộp lưu chiểu tháng .... năm 20...
Mã số ISBN: ....

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 12 – CHÂN TRỜI SÁNG TẠO

1. Toán 12, Tập một
2. Toán 12, Tập hai
3. Chuyên đề học tập Toán 12
4. Ngữ văn 12, Tập một
5. Ngữ văn 12, Tập hai
6. Chuyên đề học tập Ngữ văn 12
7. Tiếng Anh 12
   Friends Global – Student Book
8. Lịch sử 12
9. Chuyên đề học tập Lịch sử 12
10. Địa lí 12
11. Chuyên đề học tập Địa lí 12
12. Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
13. Chuyên đề học tập Giáo dục kinh tế và pháp luật 12
14. Vật lí 12
15. Chuyên đề học tập Vật lí 12
16. Hoá học 12
17. Chuyên đề học tập Hoá học 12
18. Sinh học 12
19. Chuyên đề học tập Sinh học 12
20. Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
21. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Tin học ứng dụng
22. Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
23. Chuyên đề học tập Tin học 12 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Âm nhạc 12
25. Chuyên đề học tập Âm nhạc 12
26. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 (1)
27. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 12 (2)
28. Giáo dục quốc phòng và an ninh 12

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn