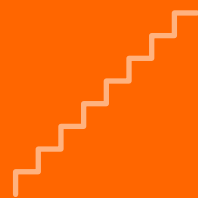




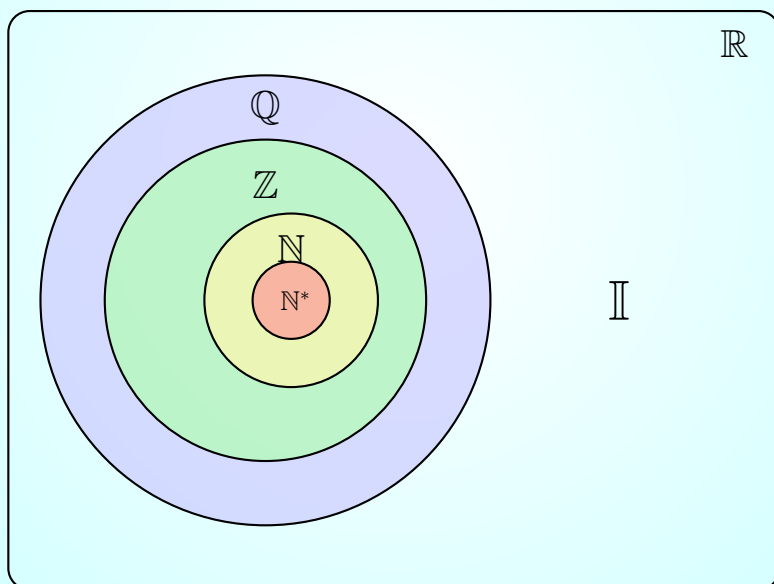
SƯU TẦM VÀ BIÊN SOẠN

LÊ DIÊN PHÚ
SĐT: 0866 590 573



TOÁN 10

HỌC KÌ I



ĐỒNG THÁP 2025

MỤC LỤC

Chương I. Mệnh đề và tập hợp

4

- 🍏 Chuyên đề 1. Mệnh đề 4
- 🍏 Chuyên đề 2. Tập hợp, các phép toán trên tập hợp 13

Chương II. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

28

- 🍏 Chuyên đề 1. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn . . 28
- 🍏 Chuyên đề 2. Bài toán thực tế về bất phương trình, hệ bất phương trình . 36

Chương III. Hàm số và đồ thị

40

- 🍏 Chuyên đề 1. Hàm số và đồ thị 40
- 🍏 Chuyên đề 2. Hàm số bậc hai 51
- 🍏 Chuyên đề 3. Xét dấu hàm bậc nhất và hàm bậc hai 63

Chương IV. Hệ thức lượng trong tam giác

70

- 🍏 Chuyên đề 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180° 70
- 🍏 Chuyên đề 2. Định lí cosin và định lí sin 75
- 🍏 Chuyên đề 3. Ứng dụng hệ thức lượng trong tam giác 79

Chương V. Vectơ

82

- 🍏 Chuyên đề 1. Khái niệm vectơ 82
- 🍏 Chuyên đề 2. Tổng và hiệu của hai vectơ 86
- 🍏 Chuyên đề 3. Tích của vectơ với 1 số 94

 Chuyên đề 4. Tích vô hướng của hai vectơ	104
 Chuyên đề 5. Vectơ trong mặt phẳng tọa độ	110

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

Mục lục của chương

Chuyên đề 1. Mệnh đề.....	4
Chuyên đề 2. Tập hợp, các phép toán trên tập hợp.....	13

1 MỆNH ĐỀ

I. MỆNH ĐỀ, MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

Nhắc lại kiến thức về mệnh đề, mệnh đề chứa biến

- ◇ Mệnh đề là một câu khẳng định **đúng** hoặc **sai**.
- ◇ Mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- ◇ Kí hiệu $P, Q, R, \dots$
- ◇ Mệnh đề chứa biến là mệnh đề mà chúng ta chưa biết tính đúng sai, khi thay biến là 1 giá trị cụ thể ta mới biết tính đúng sai.
- ◇ Mệnh đề chứa biến không phải là mệnh đề.

☛ Ví dụ 1



P : "3 chia hết cho 2" là 1 mệnh đề sai.

Q : " $3 > 2$ " là 1 mệnh đề đúng.

R : "Tôi thích bạn" không là mệnh đề.

☛ Ví dụ 2



Xét P : " n chia hết cho 2, $n \in \mathbb{N}$ "

+) $n = 3 \Rightarrow 3$ chia hết cho 2 là mệnh đề sai.

+) $n = 6 \Rightarrow 6$ chia hết cho 2 là mệnh đề đúng.

II. MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH

Nhắc lại kiến thức về mệnh đề phủ định

- ◇ Phủ định của P là "không" P , kí hiệu là $\overline{P}$.
- ◇ $P, \overline{P}$ là hai mệnh đề trái ngược nhau.

☛ Ví dụ 3



Phát biểu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và nhận xét tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó

- a) P : "17 là số chính phương".
- b) Q : "10 chia hết cho 3".
- c) A : " $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm".
- d) B : "5 là số hữu tỉ".
- e) C : "Paris là thủ đô của nước Anh".

👉 Lời giải.

- a) $\overline{P}$: "17 không là số chính phương", $\overline{P}$ đúng.
- b) $\overline{Q}$: "10 không chia hết cho 3", $\overline{Q}$ đúng.
- c) $\overline{A}$: " $x^2 - 4x + 4 = 0$ vô nghiệm", $\overline{A}$ sai.
- d) $\overline{B}$: "5 không là số hữu tỉ", $\overline{B}$ đúng.
- e) $\overline{C}$: "Paris không là thủ đô nước Anh", $\overline{C}$ đúng.

III. MỆNH ĐỀ KÉO THEO, MỆNH ĐỀ ĐẢO

Khái niệm mệnh đề kéo theo



$P \Rightarrow Q$ đọc là " P kéo theo Q " hay " P suy ra Q " hay "Nếu P thì Q " với P là giả thiết và Q là kết luận.

trong đó

P là điều kiện cần để có Q .

Q là điều kiện đủ để có P ,

Ví dụ 4



Cho hai câu sau

P : "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A ".

Q : "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".

Hãy phát biểu câu ghép có dạng "Nếu P thì Q và cho biết tính đúng, sai của mệnh đề đó.

Lời giải.

Nếu "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A thì Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$ " (Đây là mệnh đề đúng).

Khái niệm mệnh đề đảo



$P \Rightarrow Q$ có mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$.

$P \Rightarrow Q$ đúng thì chưa chắc $Q \Rightarrow P$ đúng.

Ví dụ 5



Nếu ABC là tam giác đều thì $\hat{A} = 60^\circ$ có mệnh đề đảo là: Nếu $\hat{A} = 60^\circ$ thì $\triangle ABC$ đều.

Ví dụ 6



Hãy phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của các mệnh đề đảo này

a) A : "Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tam giác ABC là tam giác cân.

b) B : "Nếu a và b chia hết cho c thì $a + b$ chia hết cho c .

Lời giải.

a) Nếu $\triangle ABC$ cân thì $\triangle ABC$ đều là mệnh đề sai.

b) Nếu $a + b$ chia hết cho c thì a và b chia hết cho c là mệnh đề sai vì $(2 + 4)$ chia hết cho 6.

IV. MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG

Khái niệm mệnh đề tương đương



$P \Leftrightarrow Q$ đọc là " P tương đương Q " hay " P khi và chỉ khi Q " hay " P nếu và chỉ nếu Q " hay " P là điều kiện cần và đủ để có Q ".

Ví dụ 7

Cho hai mệnh đề

P : "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông".

Q : "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau".

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng, sai của mệnh đề tương đương này.

Lời giải.

$P \Leftrightarrow Q$: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Xét

$P \Rightarrow Q$: mệnh đề đúng.

$Q \Rightarrow P$: mệnh đề sai.

Do đó $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

V. MỆNH ĐỀ CHỨA $\forall, \exists$

Nhắc lại kiến thức về mệnh đề chứa $\forall, \exists$

◇ $\forall$: với mọi.

◇ $\exists$: tồn tại hoặc có một.

Ví dụ 8

a) P : " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ " đọc là Với mọi số thực, bình phương của nó không âm.

b) Q : " $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 2$ " đọc là Tồn tại một số hữu tỉ, mà bình phương của nó bằng hai.

Ví dụ 9

Dùng kí hiệu $\forall$ hoặc $\exists$ để viết các mệnh đề sau, xét tính đúng sai của mệnh đề đó

a) "Có ít nhất một số tự nhiên bằng với nghịch đảo của nó".

b) "Mọi số thực đều có bình phương khác 1".

c) "Tồn tại một số thực mà bình phương của nó cộng với 1 bằng 0".

d) "Bình phương của mọi số thực đều dương".

Lời giải.

a) " $\exists x \in \mathbb{N}, x = \frac{1}{x}$ " là mệnh đề đúng vì $x = 1$ thoả mãn.

b) " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$ " là mệnh đề sai vì $1^2 = 1$.

c) " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$ " là mệnh đề sai vì $x^2 = -1$ vô lí.

d) " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ " là mệnh đề sai vì $0^2 > 0$ vô lí.

VI. MỆNH ĐỀ PHỦ ĐỊNH CỦA $\forall, \exists$

Nhắc lại kiến thức về mệnh đề phủ định của $\forall, \exists$

Cho mệnh đề: " $P(x), x \in X$ "

◇ Phủ định của mệnh đề: " $\forall x \in X, P(x)$ " là mệnh đề: " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ ".

◇ Phủ định của mệnh đề: " $\exists x \in X, P(x)$ " là mệnh đề: " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ ".

Ví dụ 10

Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$.
- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$.
- c) Tồn tại số nguyên chia hết cho 3.
- d) Mọi số thập phân viết được dưới dạng phân số.

Lời giải.

- a) $\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$.
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0$.
- c) $\exists x \in \mathbb{Z}, x : 3$.
- d) Có một số thập phân không viết được dưới dạng phân số.

Ví dụ 11

Lập mệnh đề phủ định và xét tính đúng sai của mệnh đề sau a) $A: \frac{5}{1,2}$ là một phân số".

- b) $B: \text{"Phương trình } x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ có nghiệm"}$.
- c) $C: \text{"Số 2025 chia hết cho 15"}$.

Lời giải.

- a) $\bar{A}: \frac{5}{1,2}$ không là một phân số" là mệnh đề sai.
- b) $\bar{B}: \text{"Phương trình } x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ vô nghiệm"}$ là mệnh đề sai.
- c) $\bar{C}: \text{"Số 2015 không chia hết cho 15"}$ là mệnh đề sai.

Ví dụ 12

Lập mệnh đề phủ định và xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 2x - 2$.
- b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x - 1$.
- c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

Lời giải.

- a) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2x - 2$.

Xét tính đúng sai

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x + 2 \neq 0. \\ \Rightarrow & (x^2 - 2x + 1) + 1 \neq 0. \\ \Leftrightarrow & (x - 1)^2 + 1 \neq 0. \\ \Leftrightarrow & (x - 1)^2 \neq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vì mệnh đề gốc của câu a) đúng nên mệnh đề phủ định của nó sai.

- b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 2x - 1$.

Xét tính đúng sai

$$\begin{aligned} & x^2 \leq 2x - 1. \\ \Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 \leq 0. \\ \Leftrightarrow & (x - 1)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Vì mệnh đề gốc của câu b) sai nên mệnh đề phủ định của nó đúng.

- c) $\forall x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} < 2$ là mệnh đề sai vì mệnh đề gốc của nó đúng (khi $x = 1 \Rightarrow 1 + 1 \geq 2$ đúng).
- d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$.
- Xét tính đúng sai

$$\begin{aligned} & x^2 - x + 1 < 0. \\ \Leftrightarrow & \left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} < 0. \\ \Leftrightarrow & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} < 0. \\ \Leftrightarrow & \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Vì mệnh đề gốc của câu d) sai nên mệnh đề phủ định của nó đúng.

BÀI TẬP

❖ **Câu 1.** Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề?

- (A) Buồn ngủ quá!.
- (B) Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau.
- (C) 8 là số chính phương.
- (D) Băng Cốc là thủ đô của Mianma.

➤ *Hướng dẫn* (A)

❖ **Câu 2.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu không phải là mệnh đề?

- a) Huế là một thành phố của Việt Nam.
- b) Sông Hương chảy ngang qua thành phố Huế.
- c) Hãy trả lời câu hỏi này!
- d) $5 + 19 = 24$.
- e) $6 + 81 = 25$.
- f) Bạn có rảnh tối nay không?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

➤ *Hướng dẫn* (C)

❖ **Câu 3.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Hãy đi nhanh lên!
- b) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
- c) $5 + 7 + 4 = 15$.
- d) Năm 2018 là năm nhuận.

- (A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

➤ *Hướng dẫn* (B)

❖ **Câu 4.** Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

- a) Cố lên, sắp đối rồi!
- b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là 180° .

d) x là số nguyên dương.

(A) 3.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 1.

 Hướng dẫn  (B)

❖ **Câu 5.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

(A) $x + 1 = 25$.

(B) Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới.

(C) 22 là số nguyên tố.

(D) Không được làm việc riêng trong giờ học.

 Hướng dẫn  (B)

❖ **Câu 6.** Câu nào trong các câu sau không phải là mệnh đề?

(A) $3 + 2 = 7$.

(B) $x^2 + 1 > 0$.

(C) $-2 - x^2 < 0$.

(D) $4 + x$.

 Hướng dẫn  (D)

❖ **Câu 7.** Với giá trị thực nào của x thì mệnh đề chứa biến $P(x): 2x^2 - 1 < 0$ là mệnh đề đúng:

(A) 0.

(B) 5.

(C) 1.

(D) $\frac{4}{5}$.

 Hướng dẫn  (A)

❖ **Câu 8.** Cho mệnh đề chứa biến $P(x): "x + 15 \leq x^2"$ với x là số thực. Mệnh đề nào sau đây đúng:

(A) $P(0)$.

(B) $P(3)$.

(C) $P(4)$.

(D) $P(5)$.

 Hướng dẫn  (D)

❖ **Câu 9.** Cho mệnh đề chứa biến $P(n): "n^2 - 1$ chia hết cho 4" với n là số nguyên. Xét xem các mệnh đề $P(5)$ và $P(2)$ đúng hay sai?

(A) $P(5)$ đúng và $P(2)$ sai.

(B) $P(5)$ sai và $P(2)$ sai.

(C) $P(5)$ đúng và $P(2)$ sai.

(D) $P(5)$ sai và $P(2)$ đúng.

 Hướng dẫn  (C)

❖ **Câu 10.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

(A) Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

(B) Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.

(C) Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

(D) Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

 Hướng dẫn  (D)

❖ **Câu 11.** Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề đúng?

(A) Nếu $a \geq b$ thì $a^2 \geq b^2$.

(B) Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

(C) Nếu em chăm chỉ thì em thành công.

(D) Nếu một tam giác có một góc bằng 60° thì tam giác đó đều.

 Hướng dẫn  (B)

❖ Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- (A) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.
- (B) Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.
- (C) Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
- (D) Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng 60° .

 Hướng dẫn  (A)

❖ Câu 13. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

- (A) Nếu số tự nhiên n có tổng các chữ số bằng 9 thì số tự nhiên n chia hết cho 3.
- (B) Nếu $x > y$ thì $x^2 > y^2$.
- (C) Nếu $x = y$ thì $t.x = t.y$.
- (D) Nếu $x = y$ thì $x^3 = y^3$.

 Hướng dẫn  (D)

❖ Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- (A) " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân".
- (B) " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân và có một góc 60° ".
- (C) " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow ABC$ là tam giác có ba cạnh bằng nhau".
- (D) " ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC có hai góc bằng 60° ".

 Hướng dẫn  (A)

❖ Câu 15. Tìm mệnh đề sai:

- (A) 10 chia hết cho $5 \Leftrightarrow$ Hình vuông có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau.
- (B) Tam giác ABC vuông tại $C \Leftrightarrow AB^2 = CA^2 + CB^2$.
- (C) Hình thang $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O) \Leftrightarrow ABCD$ là hình thang cân.
- (D) 63 chia hết cho $7 \Rightarrow$ Hình thang có hai đường chéo vuông góc với nhau.

 Hướng dẫn  (D)

❖ Câu 16. Tìm mệnh đề đúng:

- (A) Đường tròn có một tâm đối xứng và có một trục đối xứng.
- (B) Hình chữ nhật có hai trục đối xứng.
- (C) Tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow A = 45^\circ$.
- (D) Hai tam giác vuông ABC và $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau $\Leftrightarrow \triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

 Hướng dẫn  (B)

❖ Câu 17. Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề: "Số 6 chia hết cho 2 và 3".

- (A) Số 6 chia hết cho 2 hoặc 3.
- (B) Số 6 không chia hết cho 2 và 3.
- (C) Số 6 không chia hết cho 2 hoặc 3.
- (D) Số 6 không chia hết cho 2 và chia hết cho 3.

 Hướng dẫn  (B)

❖ **Câu 18.** Mệnh đề " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ " khẳng định rằng:

- (A) Bình phương của mỗi số thực bằng 2.
- (B) Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 2.
- (C) Chỉ có một số thực mà bình phương của nó bằng 2.
- (D) Nếu x là một số thực thì $x^2 = 2$.

➡ *Hướng dẫn* (B)

❖ **Câu 19.** Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ, $P(x)$ là mệnh đề chứa biến " x cao trên 180 cm". Mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " khẳng định rằng:

- (A) Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180 cm.
- (B) Trong số các cầu thủ của đội tuyển bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 180 cm.
- (C) Bất kì ai cao trên 180 cm đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.
- (D) Có một số người cao trên 180 cm là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

➡ *Hướng dẫn* (A)

❖ **Câu 20.** Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề "Mọi động vật đều di chuyển"?

- (A) Mọi động vật đều không di chuyển.
- (B) Mọi động vật đều đứng yên.
- (C) Có ít nhất một động vật không di chuyển.
- (D) Có ít nhất một động vật di chuyển.

➡ *Hướng dẫn* (C)

❖ **Câu 21.** Mệnh đề $P(x): "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0"$. Phủ định của mệnh đề P là

- (A) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
- (B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
- (C) $\forall x \notin \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.
- (D) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

➡ *Hướng dẫn* (D)

❖ **Câu 22.** Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x): "x^2 + 3x + 1 > 0$ với mọi x " là

- (A) Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 > 0$.
- (B) Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 \leq 0$.
- (C) Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 = 0$.
- (D) Tồn tại x sao cho $x^2 + 3x + 1 < 0$.

➡ *Hướng dẫn* (B)

❖ **Câu 23.** Cho mệnh đề $P(x): "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0"$. Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$ là

- (A) " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0$ ".
- (B) " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ".
- (C) " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$ ".
- (D) " $\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$ ".

➡ *Hướng dẫn* (C)

❖ **Câu 24.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- (A) Không có số chẵn nào là số nguyên tố.
- (B) $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 < 0$.
- (C) $\exists n \in \mathbb{N}, n(n + 11) + 6$ chia hết cho 11.
- (D) Phương trình $3x^2 - 6 = 0$ có nghiệm hữu tỷ.

 Hướng dẫn  **C**

❖ **Câu 25.** Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- Ⓐ Với mọi số thực x , nếu $x < -2$ thì $x^2 > 4$.
- Ⓑ Với mọi số thực x , nếu $x^2 < 4$ thì $x < -2$.
- Ⓒ Với mọi số thực x , nếu $x < -2$ thì $x^2 < 4$.
- Ⓓ Với mọi số thực x , nếu $x^2 > 4$ thì $x > -2$.

 Hướng dẫn  **A**

2 TẬP HỢP, CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

I. TẬP HỢP

Nhắc lại kiến thức về tập hợp

- ◇ Mệnh đề là 1 khái niệm cơ bản của Toán, không định nghĩa (Tập).
- ◇ Kí hiệu
 $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.
 $B = \{5; 1; 2; 7\}$.
 $C = \{n \in \mathbb{N}/n \leq 3\}$.
- ◇ Một tập hợp có thể có nhiều phần tử, một phần tử, vô số phần tử, hoặc không có phần tử nào.
- ◇ Có hai cách chỉ ra một tập hợp (liệt kê và chỉ ra tính chất đặc trưng).
- ◇ Ở ví dụ phần kí hiệu ta dễ dàng thấy người ta đã chỉ ra tập hợp A, B bằng cách liệt kê và tập hợp C bằng cách chỉ ra tính chất đặc trưng.

☛ Ví dụ 1



Cho $D = \{n \in \mathbb{N}/n \text{ là số nguyên tố}, 5 < n < 20\}$.

- a) Dùng kí hiệu $\in, \notin$ để viết câu trả lời cho câu hỏi sau: Trong các số 5, 12, 17, 18, số nào thuộc tập D , số nào không thuộc tập D ?
- b) Viết tập hợp D bằng cách liệt kê các phần tử. Tập hợp D có bao nhiêu phần tử?

☛ *Lời giải.*

- a) $5 \in D, 12 \notin D, 17 \in D, 18 \notin D$.
- b) $D = \{7; 11; 13; 17; 19\} \Rightarrow n_D = 5$.

☛ Ví dụ 2



Viết các tập hợp sau bằng phương pháp liệt kê

- a) $A = \{x \in \mathbb{Q}/(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0\}$.
- b) $B = \{x \in \mathbb{N}/5 < x^2 < 40\}$.
- c) $C = \{x \in \mathbb{Z}/x^2 < 9\}$.
- d) $D = \{x \in \mathbb{R}/|2x + 1| = 5\}$.

☛ *Lời giải.*

- a) $(x^2 - 1)(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 & (\text{tm}) \\ x = \pm\sqrt{5} & (\text{loại}) \end{cases} \Rightarrow A = \{\pm 1\}$.
- b) $5 < x^2 < 40 \Rightarrow 2, 23 < |x| < 6, 32 \Rightarrow B = \{3; 4; 5; 6\}$ do $n \in \mathbb{N}$.
- c) $x^2 < 9 \Rightarrow -\sqrt{9} < x < \sqrt{9} \Leftrightarrow -3 < x < 3 \Rightarrow C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ do $x \in \mathbb{Z}$.
- d) $|2x + 1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 5 \\ 2x + 1 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow D = \{-3; 2\}$.

☛ Ví dụ 3



Viết tập hợp sau bằng cách chỉ rõ tính chất đặc trưng của phần tử đó

- a) $A = \{1; 3; 5; \dots; 15\}$.

- b) $B = \{0; 5; 10; 15; 20; \dots\}$
 c) $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
 d) $D = \{0; 1; 4; 9; 25; 36; 49; 64; \dots; 81\}$.

Lời giải.

- a) A là tập hợp số lẻ không vượt quá 15.
 b) B là tập hợp số tự nhiên chia hết cho 5.
 c) $C = \{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x \leq 2\}$.
 d) D là tập hợp hợp số chính phương không vượt quá 81 hoặc $D = \{x^2 / x \in \mathbb{N}, x \leq 9\}$.

II. TẬP RỖNG

Nhắc lại kiến thức về tập rỗng

- ◇ Tập rỗng là tập hợp không chứa phần tử nào.
- ◇ Kí hiệu: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.
- ◇ Giả sử tập $A \neq \emptyset$ thì $\exists x \in A$.

Ví dụ 4

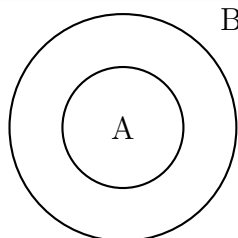
- a) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ (vô nghiệm). Vậy $S = \emptyset$.
 b) Tập hợp người sống trên mặt trời. Vậy $S = \emptyset$.

III. TẬP CON, TẬP HỢP BẰNG NHAU

Nhắc lại kiến thức về tập con



- ◇ Kí hiệu: $A \subset B \Leftrightarrow x \in A \text{ thì } x \in B$.
- ◇ Nếu A không là con $B \Rightarrow A \not\subset B$.
- ◇ Lưu ý
 $A \subset A$.
 $\emptyset \subset A$.
 Tập A có n phần tử $\Rightarrow 2^n$ tập con.
 Tập A có C_n^k tập con có k phần tử.



Ví dụ 5

- $A = \{1; 2; 3\}$
 A có 3 phần tử $\Rightarrow$ có $2^3 = 8$ tập con gồm

$\{1; 2; 3\}, \{1; 2\}, \{1; 3\}, \{2; 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \emptyset$.

Ví dụ 6



Cho tập hợp $C = \{-4; 0; 1; 2\}$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

Phát biểu	Đ	S
A C là tập con của $\mathbb{Z}$.		
B C là tập con của $\mathbb{N}$.		
C C là tập con của $\mathbb{R}$.		
D Cho tập hợp $B = \{-2; 0; 1; 2\}$, ta có $C \subset B$.		

Lời giải.



Nhắc lại kiến thức về hai tập hợp bằng nhau

◇ $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$.

Ví dụ 7



Xét quan hệ giữa mỗi cặp tập hợp bằng nhau. Chúng có bằng nhau không?

a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{0; 2; 4\}$.

b) $C = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\}$ và $D = \{x \in \mathbb{R}, |x| = 2\}$.

$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 3\}$ và $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là bội của } 6\}$.

Lời giải.

a) $A \neq B$.

b)

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow C = \{\pm 2\}.$$

$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow D = \{\pm 2\}.$$

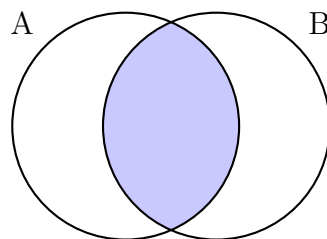
$$\Rightarrow C = D.$$

c) $G = \{0; 3; 6; 9; 12; \dots\}, H = \{0; 6; 12; 18; \dots\} \Rightarrow G \neq H$.

IV. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

Nhắc lại kiến thức về phép giao

◇ $A \cap B = \{x, x \in A \text{ và } x \in B\}$.



Ví dụ 8



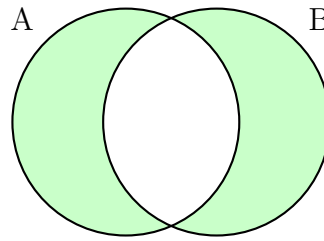
$$A = \{1; 2; 5; 7\}.$$

$$B = \{1; 3; 5; 6\}.$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{1; 5\}.$$

Nhắc lại kiến thức về phép hợp

$$\diamond A \cup B = \{x, x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$



Ví dụ 9

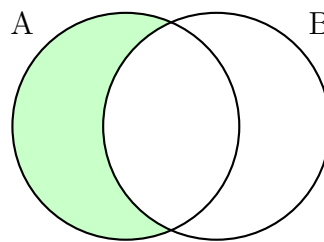
$$A = \{3; 1; a; 5\}.$$

$$B = \{1; 6; a; 3\}.$$

$$\Rightarrow A \cup B = \{3; 1; a; 5; 6\}.$$

Nhắc lại kiến thức về phép hiệu

$$\diamond A \setminus B = \{x \in A \text{ và } x \notin B\}, B \setminus A = \{x \in B \text{ và } x \notin A\}.$$



Ví dụ 10

$$A = \{1; 2; 5; 7\}.$$

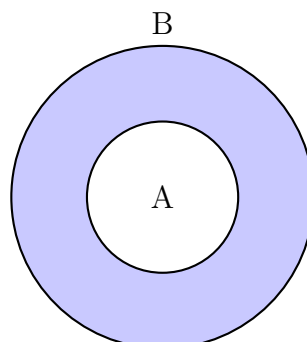
$$B = \{3; 4; 1; 5\}.$$

$$\Rightarrow A \setminus B = \{2; 7\}, B \setminus A = \{3; 4\}.$$

Nhắc lại kiến thức về phép lấy phần bù

$$\diamond A \subset B.$$

$$\diamond C_B A = B \setminus A.$$



Ví dụ 11 ★ ★ ★ ★ ★

$$A = \{1; 2\}, B = \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow C_B A = B \setminus A = \{3; 4\}.$$

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $B = \{n \in \mathbb{N}, n \text{ là ước của } 12\}$. Tìm các tập hợp sau:

- a) $A \cap B$. b) $A \cup B$. c) $A \setminus B$. d) $B \setminus A$.

Hướng dẫn giải.

- a) $A \cap B = \{1; 2; 3; 6\}$.
 b) $A \cup B = \{1; 2; 3; 6; 5; 4; 12\}$.
 c) $A \setminus B = \{5\}$.
 d) $B \setminus A = \{4; 12\}$.

Bài 2. Cho tập hợp $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ và các tập hợp con $A = \{1; 2; 3; 4\}$ và $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Xác định các tập hợp sau

- a) $C_E A$. b) $C_E B$. c) $C_E(A \cup B)$. d) $C_E A \cap C_E B$.

Hướng dẫn giải.

- a) $C_E A = E \setminus A = \{5; 6; 7; 8; 9\}$.
 b) $C_E B = E \setminus B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
 c) $A \cap B = \{2; 4; 1; 3; 6; 8\}$.
 $C_E(A \cup B) = E \setminus (A \cup B) = \{5; 7; 9\}$.
 d) $C_E A \cap C_E B = \{5; 7; 9\}$.

Bài 3. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} / 3x - 1 \leq 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{Z} / 3x^2 - 14x + 1 = 0\}$. Tìm các tập hợp sau:

- a) $A \cap B$. b) $A \cup B$. c) $A \setminus B$. d) $B \setminus A$.

Hướng dẫn giải.

- $3x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{11}{3} \approx 3,6$ vì $x \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \{0; 1; 2; 3\}$.
 $3x^2 - 14x + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} & (\text{loại}) \\ x = 1 & (\text{tm}) \end{cases}$ vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow B = \{1\}$.
 a) $A \cap B = \{1\}$.
 b) $A \cup B = \{1; 0; 2; 3\} = A$.
 c) $A \setminus B = \{0; 2; 3\}$.
 d) $B \setminus A = \emptyset$.

V. TẬP HỢP SỐ VÀ CÁC PHÉP TOÁN

Các tập số đã học

- ◇ Số tự nhiên: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$.
- ◇ Số nguyên: $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.
- ◇ Số hữu tỷ: $\mathbb{Q}: \frac{a}{b}, b \neq 0$ bao gồm số thập phân hữu hạn và số thập phân vô hạn tuần hoàn.

Ví dụ: $1, 2 \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

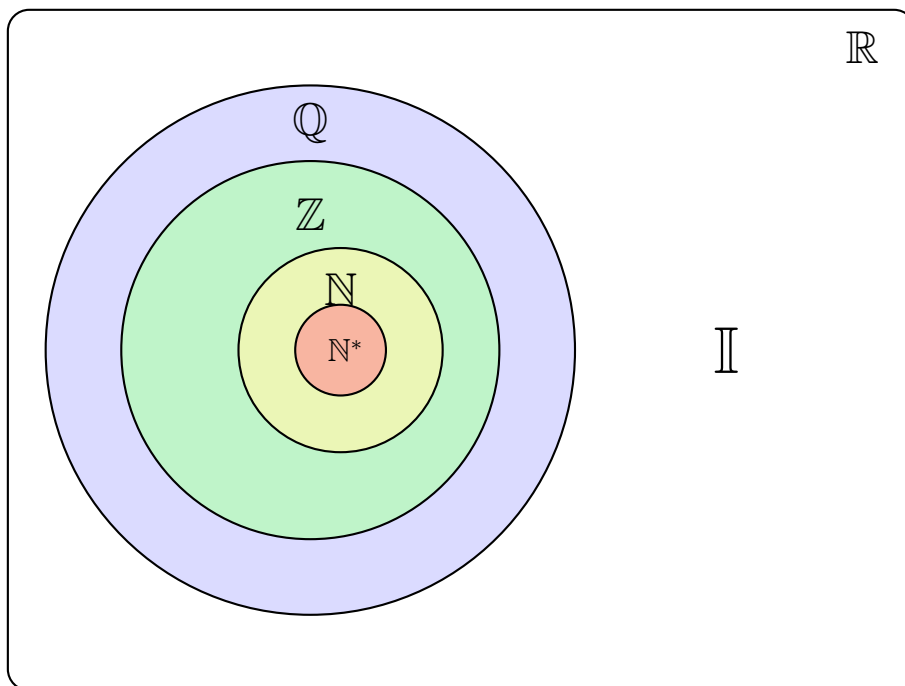
◇ Số vô tỷ: $\mathbb{I}$ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

Ví dụ: $\pi \in \mathbb{I}, \sqrt{2} \in \mathbb{I}$.

◇ Số thực: $\mathbb{R}$.

◇ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

◇ $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$.



VI. MỘT SỐ TẬP CON THƯỜNG DÙNG CỦA $\mathbb{R}$

Kí hiệu	Tên gọi	Biểu diễn tập hợp	Biểu diễn trên trục số
(a, b)	Khoảng	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	Đoạn	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
$[a, +\infty)$	Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
$(a, +\infty)$	Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$(-\infty, b]$	Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, b)$	Nửa khoảng	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
$(-\infty, +\infty)$	Khoảng	$\mathbb{R}$	

Ví dụ 12



Đọc tên, kí hiệu và biểu diễn trên trục số:

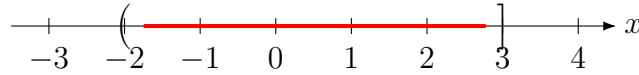
a) $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 3\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 1\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 > 0\}$.

Lời giải.

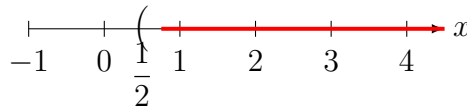
a) Nửa khoảng, $A = (-2; 3]$.



b) Đoạn, $B = [-3; 1]$.



c) Khoảng, $C = (\frac{1}{2}, +\infty)$.



VII. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TRỤC SỐ

Dạng 1: Phép giao

$\diamond A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}$.

Ví dụ 13



Tìm giao các tập hợp sau:

a) $(1; 3) \cap [2; 4)$. b) $[-3; -7] \cap (2; 5)$. c) $(-\infty, 1] \cap [0; 3)$.

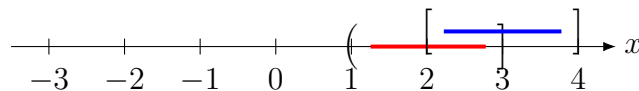
d) $(-1; 3] \cap [3; 4)$. e) $(-1; 2) \cap [2; +\infty)$. f) $(-\infty; 1) \cap (1; +\infty)$.

Lời giải.

Có 2 cách giải cho bài này. Tôi sẽ giải 2 cách chi tiết ở câu a)

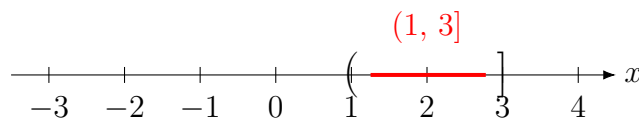
a)

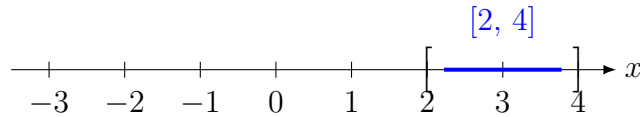
Cách 1: Vẽ 1 trục.



$\Rightarrow (1; 3) \cap [2; 4) = [2; 3)$.

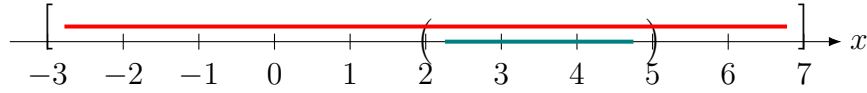
Cách 2: Vẽ 2 trục.





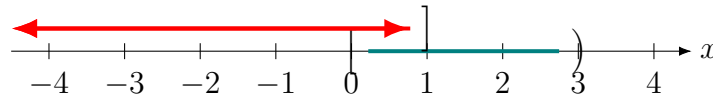
$$\Rightarrow (1; 3) \cap [2; 4] = [2; 3).$$

b)



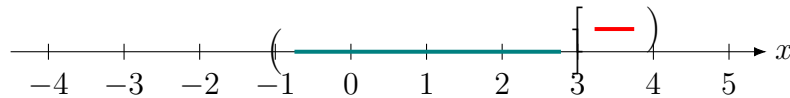
$$\Rightarrow [-3; -7] \cap (2; 5) = \emptyset.$$

c)



$$\Rightarrow (-\infty, 1] \cap [0; 3) = [0; 1].$$

d)



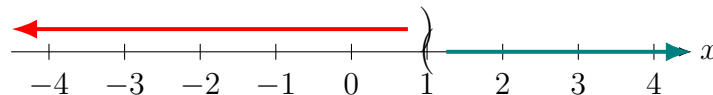
$$\Rightarrow (-1; 3] \cap [3; 4) = \{3\}.$$

e)



$$\Rightarrow (-1; 2) \cap [2; +\infty) = \emptyset.$$

f)



$$\Rightarrow (-\infty; 1) \cap (1; +\infty) = \emptyset.$$

Dạng 2: Phép hợp

$$\diamond A \cup B = \{x/x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Ví dụ 14



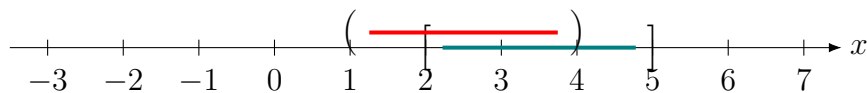
Tìm hợp của các tập hợp sau:

a) $(1; 4) \cup [2; 5]$. b) $(0; 2] \cup (-3; 1)$. c) $(1; 3) \cup (-2; 3]$.

d) $[-2; 5) \cup (3; 5]$. e) $(-\infty; 2) \cup [2; +\infty)$. f) $(-\infty; 0] \cup (-2; 0)$.

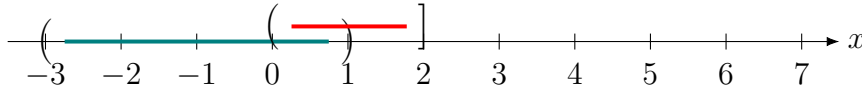
Lời giải.

a)



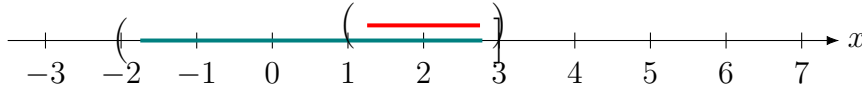
$$\Rightarrow (1; 4) \cup [2; 5] = (1; 5).$$

b)



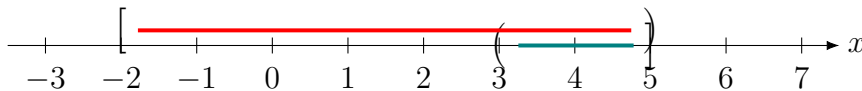
$$\Rightarrow (0; 2] \cup (-3; 1) = (-3; 2].$$

c)



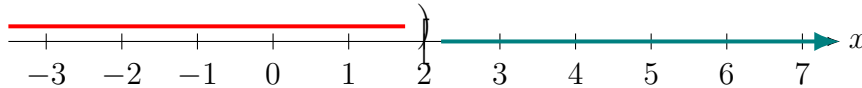
$$\Rightarrow (1; 3) \cup (-2; 3] = (-2; 3].$$

d)



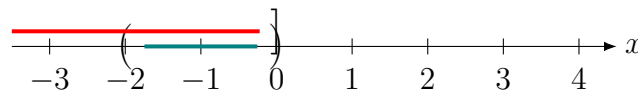
$$\Rightarrow [-2; 5) \cup (3; 5] = [-2; 5].$$

e)



$$\Rightarrow (-\infty; 2) \cup [2; +\infty) = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}.$$

f)



$$\Rightarrow (-\infty; 0] \cup (-2; 0) = (-\infty; 0].$$

Dạng 3: Phép hiệu

◇ $A \setminus B = \{x \in A \text{ và } x \notin B\}$, $B \setminus A = \{x \in B \text{ và } x \notin A\}$ (Nhớ đổi 1 dấu từ tròn thành vuông và ngược lại).

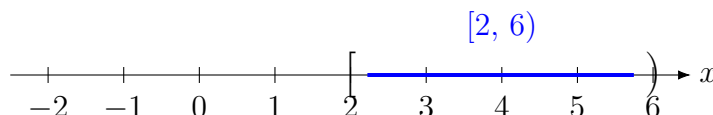
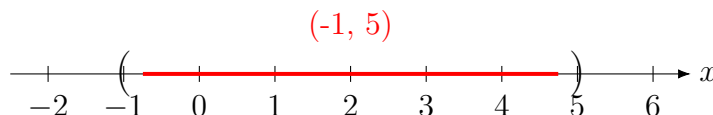
Ví dụ 15

Tìm hiệu các tập hợp sau:

a) $(-1; 5) \setminus [2; 6)$. b) $(-3; 2) \setminus [1; 3)$. c) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$. d) $[3; 5] \setminus (-1; 4)$.

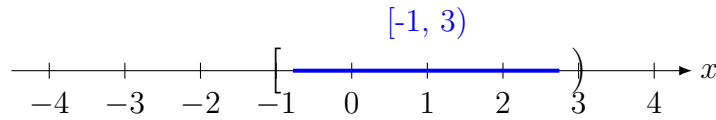
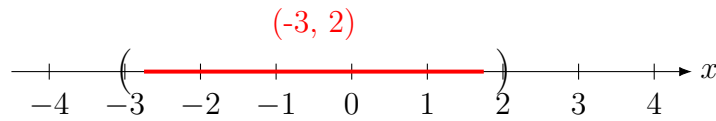
Lời giải.

a)



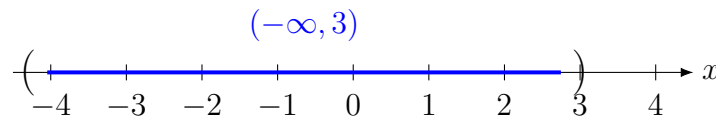
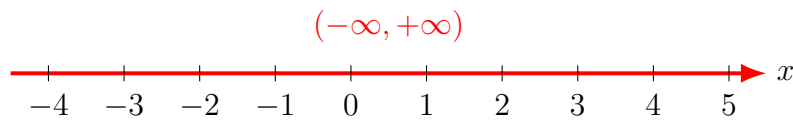
$$\Rightarrow (-1; 5) \setminus [2; 6) = (-1; 2).$$

b)



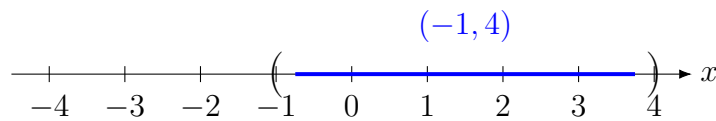
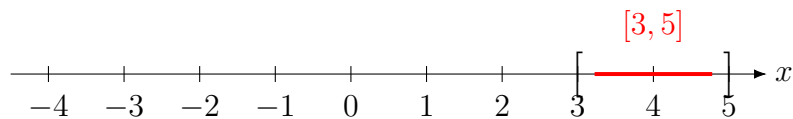
$$\Rightarrow (-3; 2) \setminus [1; 3) = (-3; 1).$$

c)



$$\Rightarrow \mathbb{R} \setminus (-\infty; 3) = [3; +\infty).$$

d)



$$\Rightarrow [3; 5] \setminus (-1; 4) = [4; 5].$$

Dạng 4: Phép lấy phần bù

$$\diamond C_B A = B \setminus A.$$

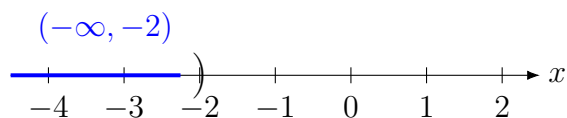
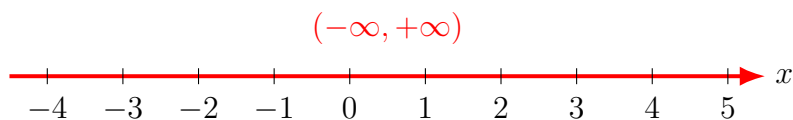
Ví dụ 16

a) Cho $A = (-\infty; -2)$. Tìm $C_{\mathbb{R}} A$.

b) Cho $B = (-5; +\infty)$. Tìm $C_{\mathbb{R}} B$.

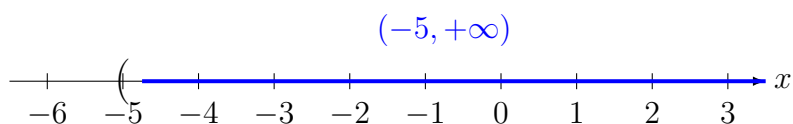
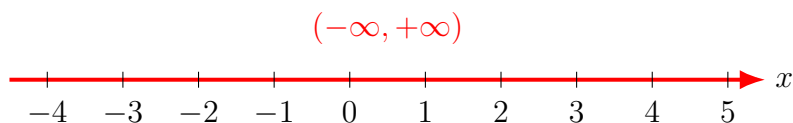
Lời giải.

a)



$$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}A = A \setminus \mathbb{R} = [-2; +\infty).$$

b)



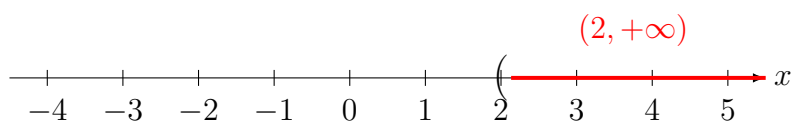
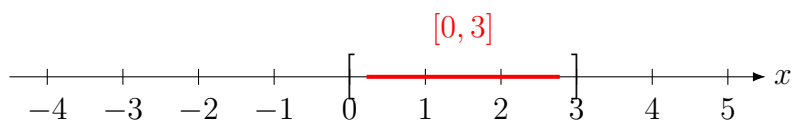
$$\Rightarrow C_{\mathbb{R}}B = \mathbb{R} \setminus B = (-\infty; -5].$$



① Cho 2 tập hợp $A = [0; 3]$, $B = (2; +\infty)$. Tìm

- a) $A \cap B$. b) $A \cup B$. c) $A \setminus B$. d) $B \setminus A$.

Hướng dẫn giải.



- a) $A \cap B = (2; 3]$. b) $A \cup B = [0; +\infty)$. c) $A \setminus B = [0; 2]$. d) $B \setminus A = (3; +\infty)$.

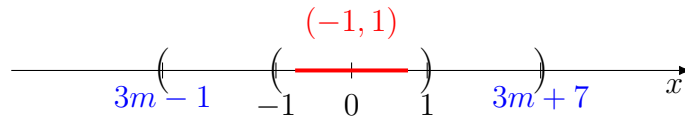
Dạng 5: Giao - Hợp - Hiệu chứa m

Ví dụ 17



Cho 2 tập hợp $A = (3m - 1; 3m + 7)$, $B = (-1; 1)$. Tìm m để $B \setminus A$.

Lời giải.

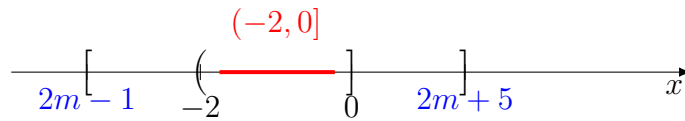


$$\text{Để } B \setminus A \text{ thì } \begin{cases} 3m - 1 \leq -1. \\ 3m + 7 \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0. \\ m \geq 2. \end{cases}$$

Ví dụ 18

Cho 2 tập hợp $A = [2m - 1; 2m + 5]$, $B = (-2; 0]$. Tìm m để $B \setminus A$.

Lời giải.

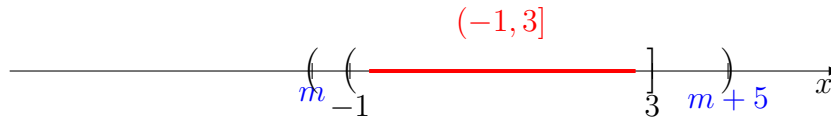


$$\text{Để } B \setminus A \text{ thì } \begin{cases} 2m - 1 \leq -2. \\ 2m + 5 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{2}. \\ m \geq -\frac{5}{2}. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 19

Cho 2 tập hợp $A = (m; m + 5)$, $B = (-1; 3]$. Tìm m để $B \setminus A$.

Lời giải.



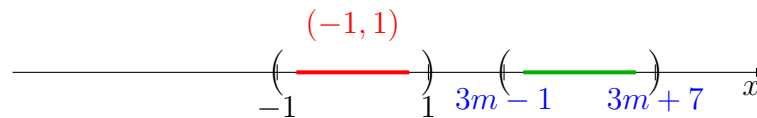
$$\text{Để } B \setminus A \text{ thì } \begin{cases} m \leq -1. \\ m + 5 > 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1. \\ m > -2. \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 1.$$

Ví dụ 20

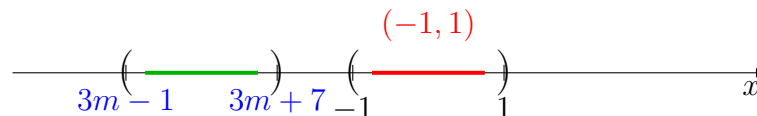
Cho 2 tập hợp $A = (3m - 1; 3m + 7)$, $B = (-1; 1)$. Tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

① $3m - 1 \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}.$



② $3m + 7 \leq -1 \Leftrightarrow m \leq -\frac{8}{3}.$



Ví dụ 21



Cho 2 tập hợp $A = [2m - 1; 2m + 5)$, $B = [-2; 5]$. Hãy tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

① $2m - 1 > 5 \Leftrightarrow m > 3$.



② $2m + 5 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{2}$.



Ví dụ 22



Cho 2 tập hợp $A = [m - 2; m + 6)$, $B = (-3; 4)$. Hãy tìm m để $A \cap B = \emptyset$.

Lời giải.

① $m - 2 \geq 4 \Leftrightarrow m \geq 6$.



② $m + 6 \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -9$.

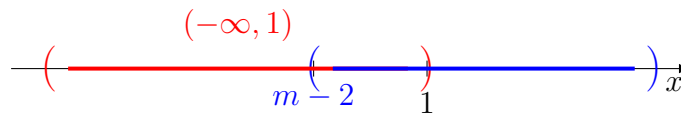


Ví dụ 23



Cho 2 tập hợp $A = (m - 2; +\infty)$, $B = (-\infty; 1)$. Tìm m để $A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.



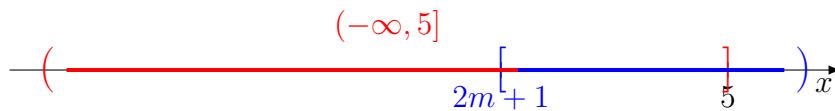
Để $A \cap B \neq \emptyset$ thì $m - 2 < 1 \Leftrightarrow m < 3$.

Ví dụ 24



Cho 2 tập hợp $A = [2m + 1; +\infty)$, $B = (-\infty; 5]$. Tìm m để $A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.



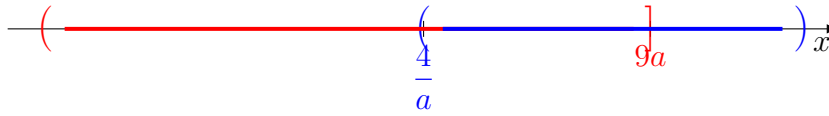
Để $A \cap B \neq \emptyset$ thì $2m + 1 \leq 5 \Leftrightarrow m \leq 2$.

Ví dụ 25



Cho số thực $a < 0$ và 2 tập hợp $A = (-\infty; 9a)$, $B = \left(\frac{4}{a}; +\infty\right)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a để $A \cap B \neq \emptyset$.

Lời giải.



$$\text{Để } A \cap B \neq \emptyset \text{ thì } \frac{4}{a} < 9a \Leftrightarrow 4 > 9a^2 \Leftrightarrow a^2 < \frac{4}{9} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < a < \frac{2}{3}.$$

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Mục lục của chương

Chuyên đề 1. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn . 28

Chuyên đề 2. Bài toán thực tế về bất phương trình, hệ bất phương trình 36

1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhắc lại kiến thức về bất phương trình bậc nhất hai ẩn



- ◇ Bất nghĩa là $< , > , \leq , \geq$.
- ◇ Bậc nhất hai ẩn nghĩa là $ax + by$.
- ◇ Bất phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng:
 $ax + by > c, ax + by < c, ax + by \leq c, ax + by \geq c (a = 0 \text{ hoặc } b = 0)$.

Ví dụ 1

$2x + 3y > 5, x - y < 0, y \geq 4, 5x \leq 0$ là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

II. NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Nhắc lại kiến thức về nghiệm của bất phương trình

- ◇ Nếu (x_0, y_0) thỏa mãn $ax + by > c$ (các bpt còn lại) thì ta nói (x_0, y_0) là nghiệm của bất phương trình.
- ◇ Bất phương trình bậc nhất luôn có vô số nghiệm.

Ví dụ 2

Cho $x + y > 5$. Trong các cặp số sau, đâu là nghiệm của bất phương trình.

- a) $(1; 2)$. b) $(0; 0)$. c) $(-1; 7)$. d) $(2; 4)$.

Lời giải.

- a) $1 + 2 > 5$ (sai) $\Rightarrow (1; 2)$ không phải là nghiệm của bất phương trình trên.
 b) $0 > 5$ (sai) $\Rightarrow (0; 0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình trên.
 c) $6 > 5$ (đúng) $\Rightarrow (-1; 7)$ là nghiệm của bất phương trình trên.
 d) $6 > 5$ (đúng) $\Rightarrow (2; 4)$ là nghiệm của bất phương trình trên.

III. MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Nhắc lại kiến thức về miền nghiệm của bất phương trình

- ◇ Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq 0$.
 Bước 1: Vẽ đường thẳng $d: ax + by = c$.
 Bước 2: Lấy điểm $A(x_0, y_0)$ không thuộc d . Tính $ax_0 + by_0$ rồi so sánh với c .
 Bước 3: Kết luận
 Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (kể cả bờ d) chứa điểm $A(x_0, y_0)$.
 Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng (kể cả bờ d) không chứa điểm $A(x_0, y_0)$.

Ví dụ 3



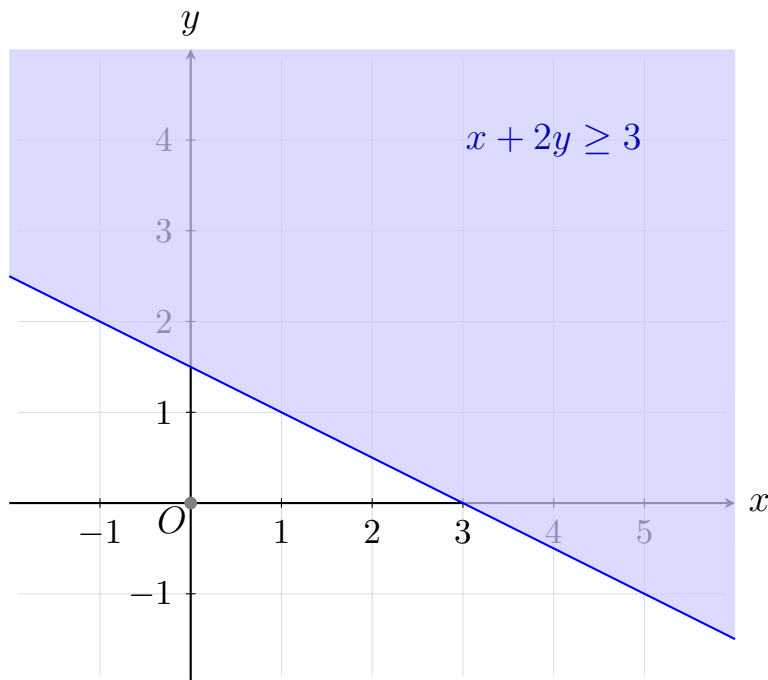
Vẽ miền nghiệm của $x + 2y \geq 3$.

Lời giải.

Bước 1: Vẽ đường thẳng $d : x + 2y = 3$.

Bước 2: Thay $(0; 0) \Rightarrow 0 \geq 3$ (loại).

Bước 3: Vậy miền nghiệm của bất phương trình là phần bị gạch và chứa d .



Ví dụ 4



Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

- a) $x + y - 3 \geq 0$. b) $x - 2y + 3 < 0$. c) $x + 2y < 0$. d) $x \geq 0$. e) $y \geq 0$.

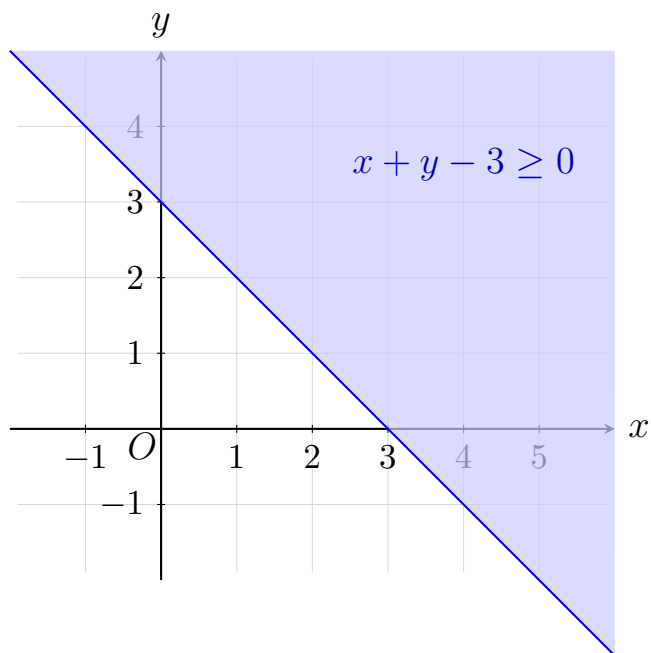
Lời giải.

a)

Bước 1: Vẽ đường thẳng $d_1 : x + y - 3 = 0$.

Bước 2: Thay $(0; 0) \Rightarrow -3 \geq 0$ (sai).

Bước 3: Vậy miền nghiệm của bất phương trình là phần bị gạch và chứa d .

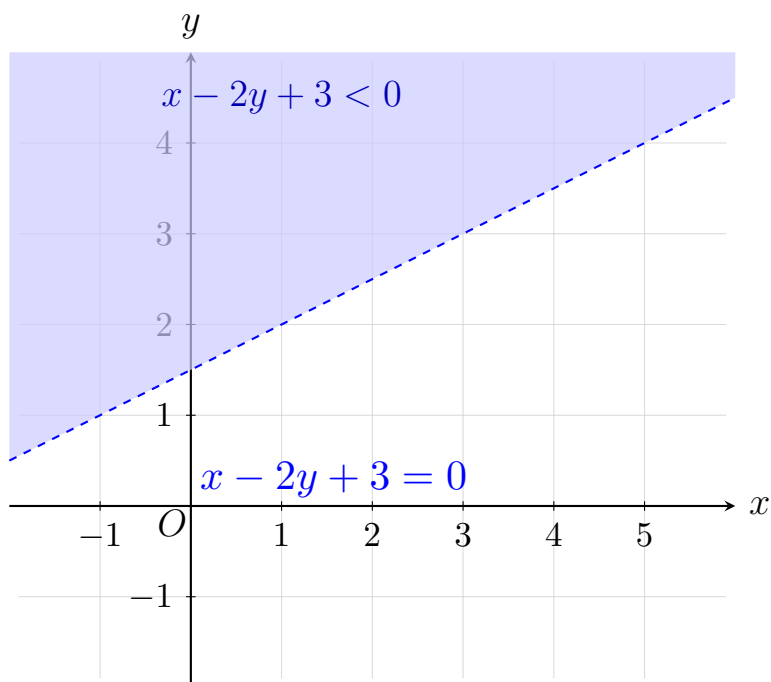


b)

Bước 1: Vẽ đường thẳng $d_2 : x - 2y + 3 = 0$.

Bước 2: Thay $(0; 0) \Rightarrow 3 < 0$ (sai).

Bước 3: Vậy miền nghiệm của bất phương trình là phần bị gạch và không chứa d .

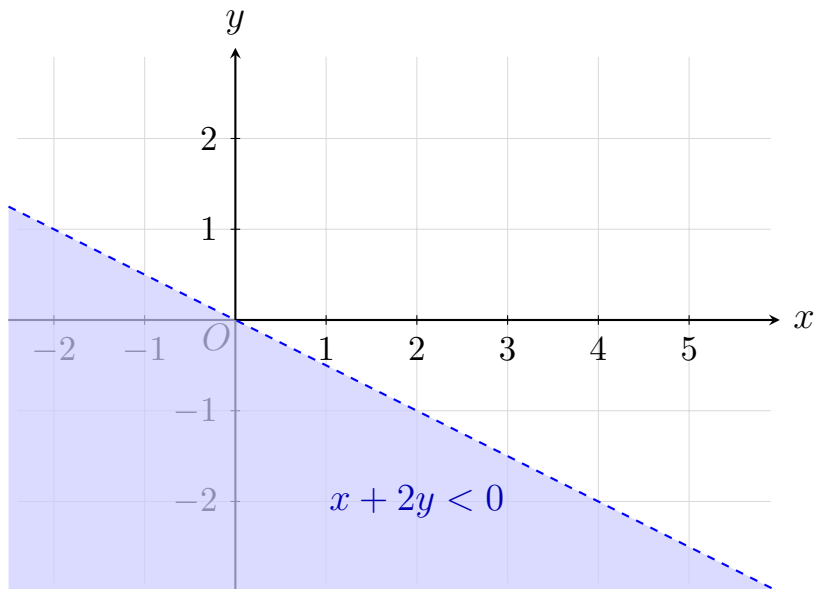


c)

Bước 1: Vẽ đường thẳng $d_3 : x + 2y = 0$.

Bước 2: Thay $(1; 1) \Rightarrow 3 < 0$ (sai).

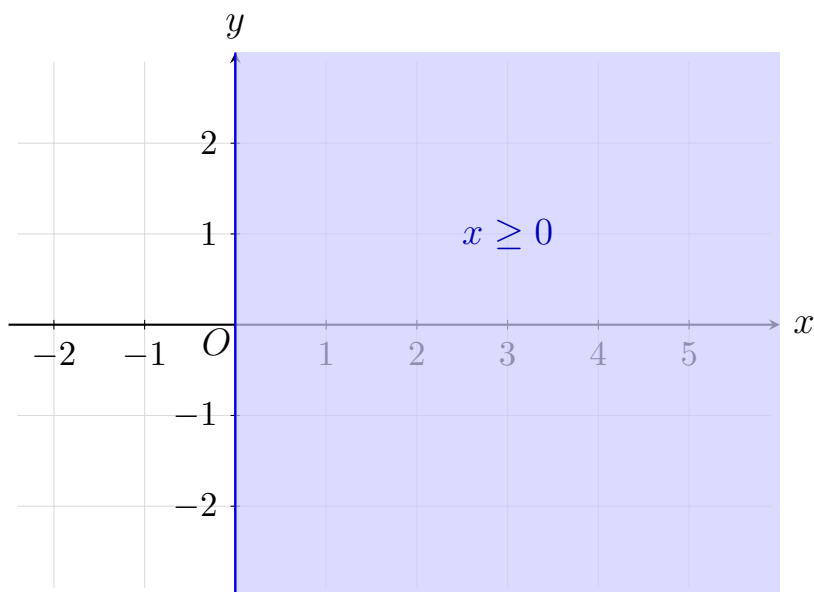
Bước 3: Vẽ miền nghiệm của bất phương trình là phần bị gạch và không chứa d .



d)

Vẽ đường thẳng $x = 0$ (trục Oy).

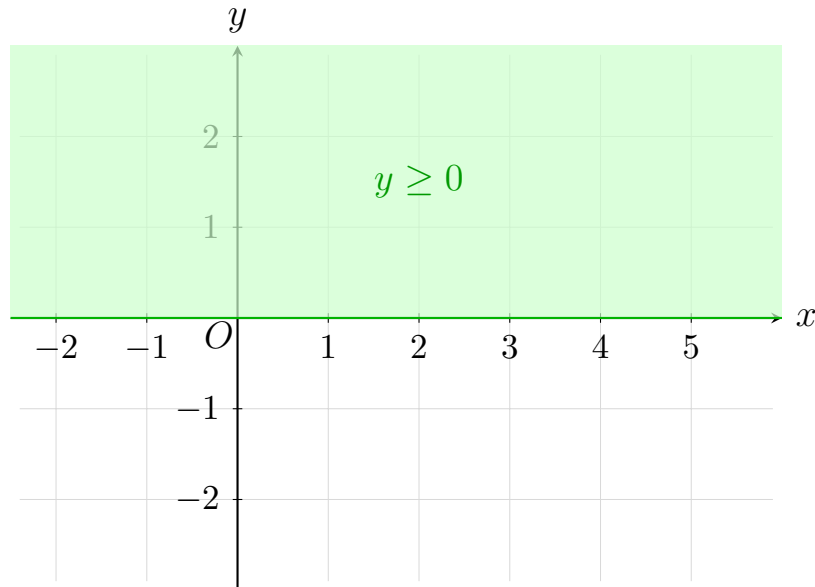
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là phần bị gạch và chứa trục Oy .



e)

Vẽ đường thẳng $y = 0$ (trục Ox).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là phần bị gạch và chứa trục Ox .



IV. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhắc lại kiến thức về hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ◇ Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y .

V. NGHIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhắc lại kiến thức về nghiệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- ◇ Cặp số (x_0, y_0) được gọi là một nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn nếu nó là nghiệm chung của tất cả các bất phương trình trong hệ.

VI. MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Nhắc lại kiến thức về miền nghiệm của hệ bất phương trình

- ◇ Trong mặt phẳng Oxy , miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là tập hợp các điểm (x_0, y_0) là nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Ví dụ 5



Vẽ miền nghiệm của các bất phương trình sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x \geq 0. \\ y \geq 0. \\ x + y \leq 15. \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x \geq 0. \\ y \geq 0. \\ x + y \leq 10. \\ 2x + y \leq 12. \end{cases} \end{array}$$

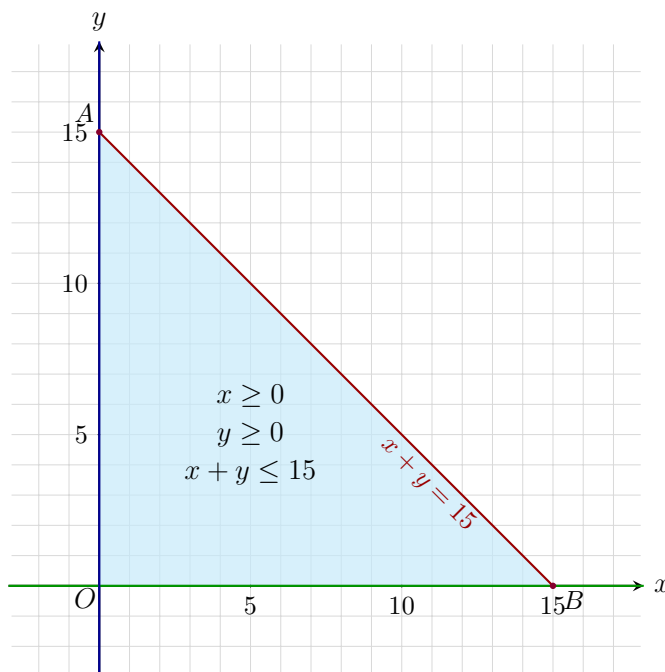
 Lời giải.

a)

Bước 1: Vẽ đường thẳng $x = 0, y = 0, x + y = 15$.

Bước 2: Thay $(0; 0) \Rightarrow 0 \leq 15$ (đúng).

Bước 3: Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình là $\triangle OAB$ và chứa các cạnh (bờ).

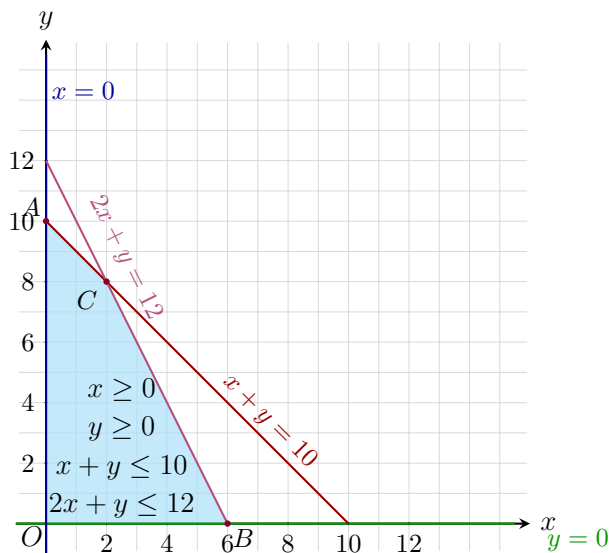


b)

Bước 1: Vẽ đường thẳng $x = 0, y = 0, x + y = 10, 2x + y = 12$.

Bước 2: Ta thấy $(0; 0)$ thỏa (3), (4).

Bước 3: Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ và chứa bờ.



VII. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Nhắc lại kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

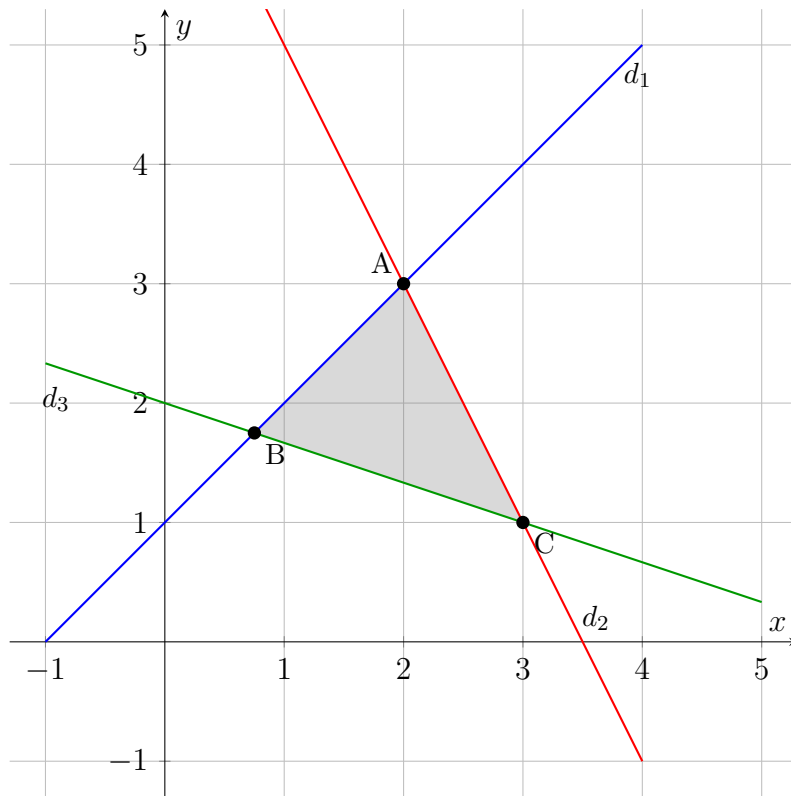
◇ Giả thuyết cho $F(x, y) = ax + by$ và hệ bất phương trình.

◇ Các bước tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Bước 1: Vẽ miền nghiệm.

Bước 2: Tìm đỉnh đa giác bằng cách giải hệ phương trình.

Bước 3: Thay vào $F(x, y)$ rồi so sánh và kết luận.



Ví dụ 6



Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = y - x$ với điều kiện

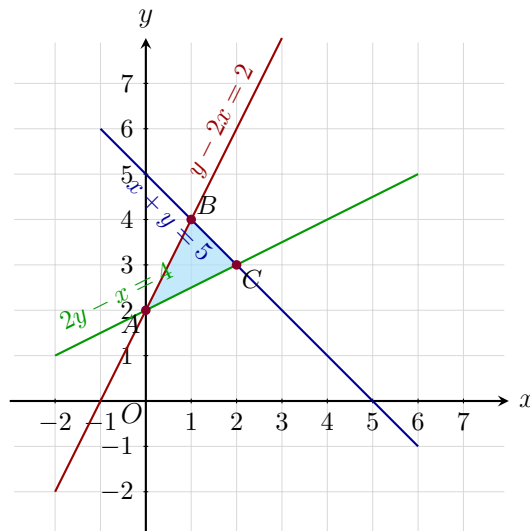
$$\begin{cases} y - 2x \leq 2 & (1). \\ 2y - x \geq 4 & (2). \\ x + y \leq 5 & (3). \end{cases}$$

Lời giải.

Vẽ đường thẳng $d_1 : y - 2x = 2, d_2 : 2y - x = 4, d_3 : x + y = 5$.

Ta thấy $(0; 0)$ thỏa cả (1), (2), (3).

Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình là $\triangle ABC$ và chứa bờ.



Ta có

$$A(0; 2).$$

$$B = d_1 \cap d_3 = \begin{cases} -2x + y = 2. \\ x + y = 5. \end{cases} \Rightarrow B(1; 4).$$

$$C = d_3 \cap d_2 = \begin{cases} x + y = 5. \\ -x + 2y = 4. \end{cases} \Rightarrow C(2; 3).$$

$$F(A) = 2 - 0 = 2, F(B) = 4 - 1 = 3, F(C) = 3 - 2 = 1.$$

$$\text{Vậy } F_{\min} = 1 \text{ tại } C(2; 3).$$

Ví dụ 7

Tìm giá trị nhỏ nhất của $F = x - 2y$ với điều kiện

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 & (1). \\ x \geq 0 & (2). \\ x + y - 2 \geq 0 & (3). \\ x - y - 2 \leq 0 & (4). \end{cases}$$

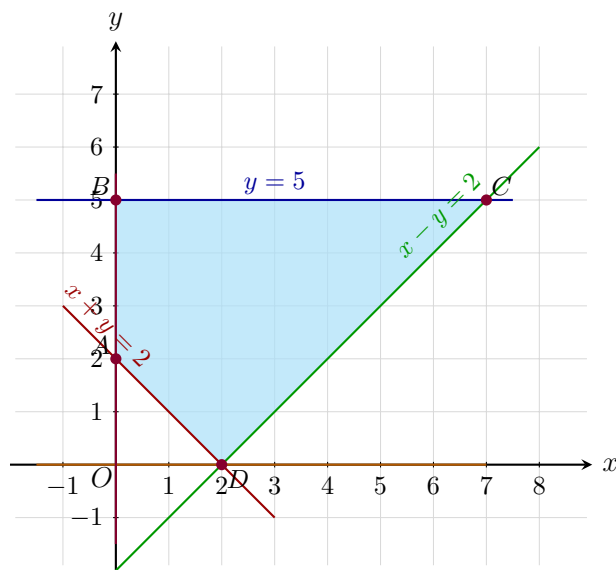
Lời giải.

Vẽ đường thẳng $0 \leq y \leq 5, d_2 : x \geq 0, x + y - 2 \geq 0, x - y - 2 \leq 0$.

Thay $(0; 0)$ vào (3) $\Rightarrow -2 \geq 0$ (sai).

Thay $(0; 0)$ vào (4) $\Rightarrow -2 \leq 0$ (đúng).

Vậy miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $ABCD$ và chứa bờ.



Ta có

$$A(0; 2), B(0; 5), D(2; 0), C = \begin{cases} x - y = 2. \\ y = 5. \end{cases} \Rightarrow C(7; 5).$$

$$F(A) = -4, F(B) = -10, F(C) = -3, F(D) = 2.$$

$$\text{Vậy } F_{\min} = -10 \text{ tại } B(0; 5).$$

2 BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. PHƯƠNG PHÁP CHUNG

Nhắc lại các bước làm

- ◇ Bước 1: Gọi $x, y \Rightarrow$ lập hệ bất phương trình.
- ◇ Bước 2: Biểu diễn tập nghiệm $\Rightarrow$ hình khép kín (tam giác, tứ giác, ngũ giác...).
- ◇ Xác định toạ độ nếu hình dễ, còn khó thì ta bấm hệ phương trình.

☛ Ví dụ 8



Thầy Thức có một mảnh đất rộng 6 ha. Thầy dự định trồng cà chua và ngô cho vụ mùa sắp tới. Nếu trồng ngô thì thầy cần 10 ngày để trồng 1 ha, nếu trồng cà chua thì thầy cần 20 ngày để trồng 1 ha. Biết rằng mỗi ha ngô sau thu hoạch được bán 30 triệu, mỗi ha cà chua sau thu hoạch bán được 50 triệu và thầy chỉ còn 100 ngày để canh tác cho kịp vụ mùa. Số tiền nhiều nhất mà thầy có thể thu hoạch sau vụ này là bao nhiêu?

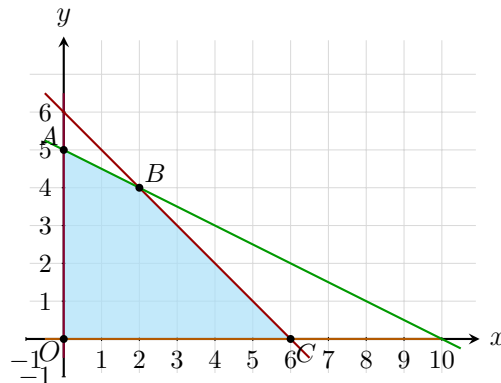
☛ *Lời giải.*

Gọi $x, y (x, y \geq 0)$ lần lượt là 1 ha ngô và 1 ha cà chua $\Rightarrow F = 30x + 50y$ (triệu).

$$\text{Ta có hệ bất phương trình } \begin{cases} x, y \geq 0. \\ x + y \leq 6. \\ 10x + 20y \leq 100. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0. \\ x + y \leq 6. \\ x + 2y \leq 10. \end{cases} \quad (1). \quad (2).$$

Vẽ đường thẳng $d_1: x + y = 6, d_2: x + 2y = 10$.

Thay $(0; 0)$ vào $(1), (2)$ ta thấy thoả mãn.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ với

$O(0; 0), A(0; 5), C(6; 0), B = d_1 \cap d_2 = (2; 4)$.

$F(O) = 0, F(A) = 250, F(B) = 260, F(C) = 180$.

Vậy số tiền lớn nhất thu được là 260 triệu khi trồng 2 ha ngô và 4 ha cà chua.

☛ Ví dụ 9



Một phân xưởng cần sản xuất ra hai loại sản phẩm. Để sản xuất 1 kilogram sản phẩm loại I cần sử dụng máy trong 30 giờ và tiêu tốn 2 kilogram nguyên liệu. Để sản xuất 1 kilogram sản phẩm loại II cần sử dụng máy trong 15 giờ và tiêu tốn 4 kilogram nguyên liệu. Biết rằng 1 kilogram sản phẩm loại I thu lãi được 40000 đồng, 1 kilogram sản phẩm loại II thu lãi được 30000 đồng, có thể

sử dụng máy tối đa 12000 giờ và có 200 kilogram nguyên liệu. Hỏi phân xưởng đó nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu kilogram để thu lãi cao nhất?

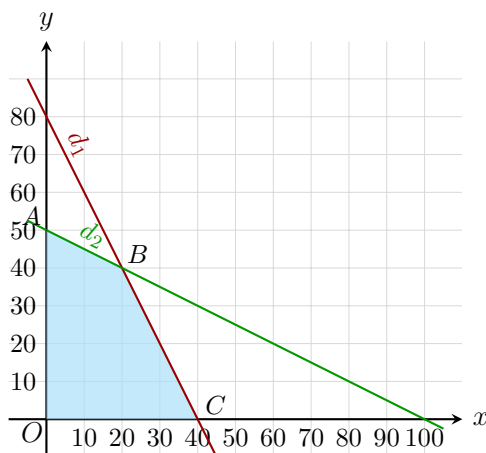
Lời giải.

Gọi $x, y (x, y \geq 0)$ lần lượt là số kilogram nhiên liệu I và II $\Rightarrow L = 40x + 30y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x, y \geq 0. \\ 30x + 15y \leq 1200. \\ 2x + 4y \leq 200. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0. \\ 2x + y \leq 80 \quad (1). \\ x + y \leq 100 \quad (2). \end{cases}$$

Vẽ đường thẳng $d_1 : 2x + y = 80, d_2 : x + y = 100$.

Thay $(0; 0)$ vào (1), (2) ta thấy thoả mãn.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ với

$O(0; 0), A(0; 50), B(20; 40), C(40; 0)$.

$L(0) = 0, L(A) = 1500, L(B) = 2000, L(C) = 1600$.

Vậy lãi cao nhất thu được là 2 triệu khi sản xuất 20 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II.

Ví dụ 10

Thời gian (tính bằng giờ) cần thiết để lắp ráp và đóng gói hai loại sản phẩm A và B được thể hiện trong bảng dưới đây:

Quy trình	Sản phẩm A	Sản phẩm B
Lắp ráp	4	4
Đóng gói	1	2

Tổng số thời gian để lắp ráp không quá 400 giờ. Tổng số thời gian để đóng gói sản phẩm không quá 160 giờ. Lợi nhuận thu được khi bán sản phẩm A là 3 triệu đồng, sản phẩm B là 5 triệu đồng. Hỏi cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm mỗi loại để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

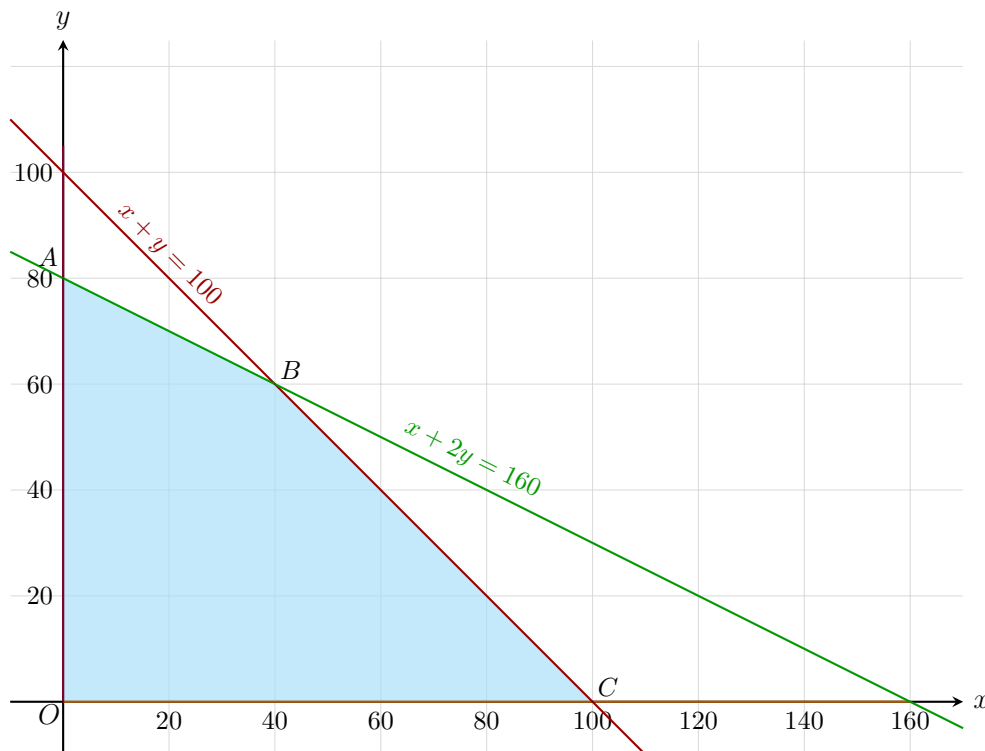
Lời giải.

Gọi $x, y (x, y \geq 0)$ lần lượt là sản phẩm A, B $\Rightarrow L = 3x + 5y$ (triệu).

Ta có hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x, y \geq 0. \\ 4x + 4y \leq 400. \\ x + 2y \leq 160. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0. \\ x + y \leq 100 \quad (1).. \\ x + 2y \leq 160 \quad (2). \end{cases}$$

Vẽ đường thẳng $d_1 : x + y = 100, d_2 : x + 2y = 160$.

Thay $(0; 0)$ vào (1), (2) ta thấy thoả mãn.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình là tứ giác $OABC$ với

$O(0; 0)$, $A(0; 80)$, $B(40; 60)$, $C(100; 0)$.

$L(0) = 0$, $L(A) = 400$, $L(B) = 420$, $L(C) = 300$.

Vậy lợi nhuận nhất thu được là 420 triệu khi sản xuất 40 sản phẩm A và 60 sản phẩm B.

Ví dụ 11 ★★★★★

Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua tối đa 1,6 kilogram thịt bò và 1,1 kilogram thịt lợn; giá tiền 1 kilogram thịt bò là 45 nghìn đồng, 1 kilogram thịt lợn là 35 nghìn đồng. Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kilogram thịt mỗi loại để số tiền bỏ ra là ít nhất.

Lời giải.

Gọi $x, y (x, y \geq 0)$ lần lượt là số kilogram thịt bò, lợn $\Rightarrow T = 45x + 35y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6. \\ 0 \leq y \leq 1,1. \\ 200x + 400y \geq 400 \quad (1). \\ 800x + 600y \geq 900 \quad (2). \end{cases}$$

Người đọc tự giải tự luận theo giống 3 ví dụ trên.

Ở bài này tôi sẽ giới thiệu thêm cách giải nhanh đối với trắc nghiệm.

Chỉ cần đưa hệ bất trình (1), (2) thành hệ phương trình tức là
$$\begin{cases} 200x + 400y = 400. \\ 800x + 600y = 900. \end{cases} \quad \text{thì sẽ ra}$$

đáp án trắc nghiệm cần tìm.

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

Mục lục của chương

Chuyên đề 1. Hàm số và đồ thị	40
Chuyên đề 2. Hàm số bậc hai	51
Chuyên đề 3. Xét dấu hàm bậc nhất và hàm bậc hai	63

1 HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

I. HÀM SỐ

Nhắc lại kiến thức về hàm số



- ◇ Hàm số có dạng $y = f(x), y = h(x), y = g(x) \dots$ $\begin{cases} x & \text{là biến số.} \\ y & \text{là hàm số.} \end{cases}$
- ◇ Với mỗi giá trị của $x \Leftrightarrow 1$ giá trị tương ứng.
- ◇ Tập xác định: $\mathbb{D}$ là điều kiện của x để y xác định.
Ví dụ: $\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0, \frac{1}{x} \Rightarrow x \neq 0$.
- ◇ Tập giá trị $\mathbb{T}$ là tập hợp các giá trị y thoả mãn.
Ví dụ: $y = x^2$ có tập giá trị $\mathbb{T} = [0; +\infty)$.

II. CÁCH CHO HÀM SỐ

Cách 1: Hàm số cho bằng 1 công thức

Ví dụ 1

- a) $y = \sqrt{x} \Rightarrow \mathbb{D} = [0; +\infty)$.
- b) $y = x^2 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$.
- c) $y = 2x - 1 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$.
- d) $\frac{1}{x+1} \Rightarrow x \neq -1. \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

BÀI TẬP

❖ **Câu 1.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{x-2}{x+2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x(x-2)}$ là

- (A) $\mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$.
- (B) $[2; +\infty)$.
- (C) $(2; +\infty)$.
- (D) $\mathbb{R} \setminus \{2; 0\}$.

Hướng dẫn **A**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x+2 \neq 0. \\ x \neq 0. \\ x(x-2) \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2. \\ x \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2; 0\}.$$

❖ **Câu 2.** Tập xác định của hàm số $y = \frac{2x}{x^2+1} - 5 - \frac{3}{x^2+1}$ là

- (A) $\mathbb{D} \setminus \{1\}$.
- (B) $\mathbb{D} \setminus \{-1\}$.
- (C) $\mathbb{D} \setminus \{\pm 1\}$.
- (D) $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Hướng dẫn **D**

$$\text{Điều kiện } x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}.$$

❖ **Câu 3.** Tập xác định của phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-3}$

- (A) $(3; +\infty)$. (B) $[2; +\infty)$. (C) $[1; +\infty)$. (D) $[3; +\infty)$.

➤ *Hướng dẫn* **Q** (D)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x-1 \geq 0. \\ x-2 \geq 0. \\ x-3 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1. \\ x \geq 2. \\ x \geq 3. \end{cases} \Rightarrow x \geq 3. \Rightarrow \mathbb{D} = [3; +\infty).$$

❖ **Câu 4.** Tập xác định của phương trình $\sqrt{3x-2} + \sqrt{4-3x} = 1$ là

- (A) $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. (B) $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$.
(C) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right\}$. (D) $\left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$.

➤ *Hướng dẫn* **Q** (D)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 3x-2 \geq 0. \\ 4-3x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}. \\ x \leq \frac{4}{3}. \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{4}{3}. \Rightarrow \mathbb{D} = \left[\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right].$$

❖ **Câu 5.** Cho hàm số $f(x) = 3x^3 - 7\sqrt{x} + \frac{6}{x}$. Hãy tính $f(4) = ?$

- (A) $f(4) = 359$. (B) $f(4) = \frac{359}{2}$. (C) $f(4) = \frac{359}{3}$. (D) $f(4) = \frac{359}{4}$.

➤ *Hướng dẫn* **Q** (B)

❖ **Câu 6.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 3x - 5$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $f(0) > 0$. (B) $f(2) < f(3)$.
(C) $f(2) > f(3)$. (D) $f(0) < f(2) < f(3)$.

➤ *Hướng dẫn* **Q** (C)

❖ **Câu 7.** Cho hàm số $y = \frac{x^2+3x+2}{x^2+1}$. Hãy tính $y(\sqrt{3})$

- (A) $y(\sqrt{3}) = \frac{5}{2} + 3\sqrt{3}$. (B) $y(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.
(C) $y(\sqrt{3}) = \frac{5+3\sqrt{3}}{2}$. (D) $y(\sqrt{3}) = 5 + 3\sqrt{3}$.

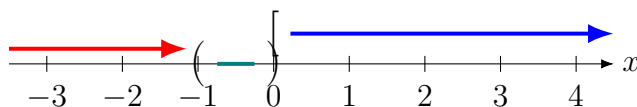
➤ *Hướng dẫn* **Q** (C)

Cách 2: Hàm số cho bằng nhiều công thức

❖ Hàm hằng $y = c$ không phụ thuộc vào x .

Ví dụ 2

Cho $y = \begin{cases} x - 2, & x \geq 0. \\ x, & x \in (-1, 0). \\ x + 1, & x \leq -1. \end{cases}$



$\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_3 = (-\infty; +\infty) = \mathbb{R}.$

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -1 + x, & x < 0. \\ x^2 - 2, & x = 0. \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

- a) Tìm tập xác định của hàm số.
b) Tính giá trị của hàm số khi $x = -2; x = 0; x = 2023$.

Lời giải.

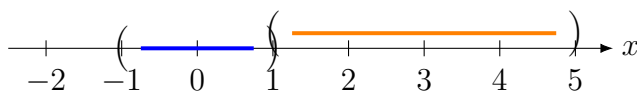
- a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}.$
b)
 $f(-2) = -1 - 2 = -3$ ($x = -2 < 0$).
 $f(0) = 0^2 - 2 = -2.$
 $f(2023) = 1.$

Ví dụ 4

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 1. & (1). \\ 1, & x = 1. & (2). \\ 2, & 5 > x > 1 & (3). \end{cases}$

- a) Tìm tập xác định của hàm số.
b) Tìm tập giá trị của hàm số đó.

Lời giải.



- a) $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_3 = (-1; 5).$
b) $\mathbb{T} = \{-1; 1; 2\}.$

BÀI TẬP

Câu 8. Tập hợp nào sau đây là TXĐ của hàm số $y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}; & x \leq 0 & (1). \\ \sqrt{x+2}; & x \geq 0 & (2). \end{cases}$

- (A) $[-2; +\infty).$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}.$
(C) $\mathbb{R}.$ (D) $[-2; +\infty) \setminus \{-1\}.$

Hướng dẫn

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 = \mathbb{R}.$$

⇒ **Câu 9.** Cho hàm số $y = \begin{cases} 3x^2 + 1, & x \leq 2. \\ 4x - 3, & 2 < x < 5. \\ 2x^2 - 3, & x \geq 5. \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $f(5) = 17.$

(B) $f(2) = 5.$

(C) $f(-3) = 28.$

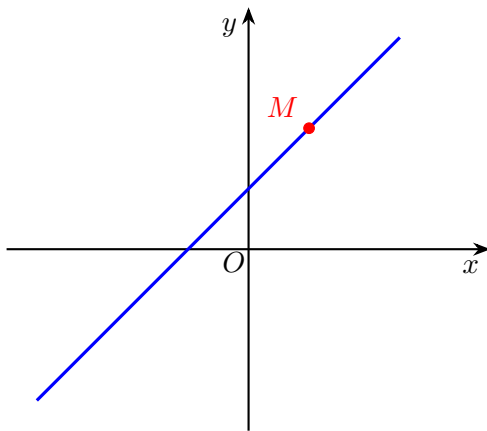
(D) $f(3) = -26.$

Hướng dẫn

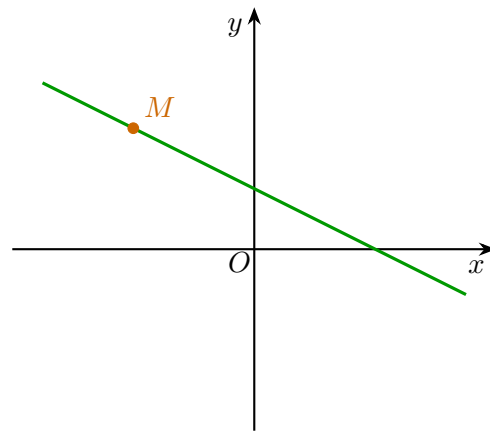
III. ĐIỂM THUỘC ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Nhắc lại kiến thức về điểm thuộc đồ thị hàm số

◇ Hàm bậc nhất $y = ax + b$.



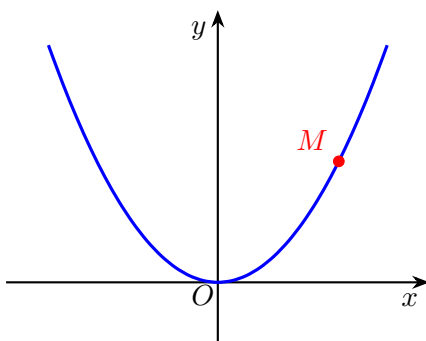
Trường hợp $a > 0$



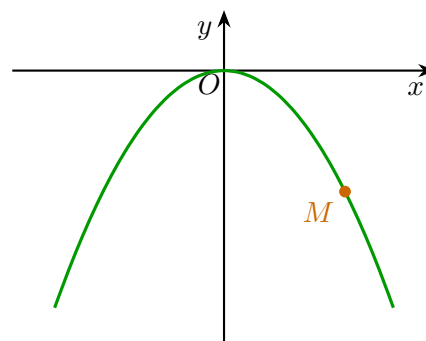
Trường hợp $a < 0$

$M \in y = f(x) \Rightarrow$ thay $M(x_M, y_M)$ thỏa mãn hệ số.

◇ Hàm số bậc hai $y = ax^2$



Trường hợp $a > 0$



Trường hợp $a < 0$

BÀI TẬP

⇒ **Câu 10.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{(x-3)(x-1)}$, điểm nào sau đây thuộc đồ thị hàm số đã cho

(A) $M(2; 1).$

(B) $M(1; 1).$

(C) $M(4; 1).$

(D) $M\left(0; -\frac{2}{3}\right).$

Hướng dẫn **D**

Câu 11. Hàm số $y = \frac{x-2}{(x-5)x}$, điểm nào thuộc đồ thị

- (A) $M(2; 1)$. (B) $\left(1; \frac{1}{4}\right)$. (C) $(3; 1)$. (D) $(0; -1)$.

Hướng dẫn **B**

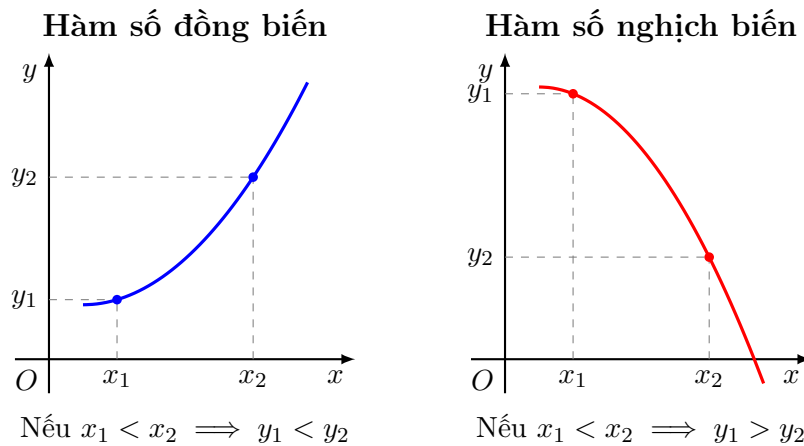
Câu 12. Điểm $M(2; 5)$ thuộc đồ thị hàm số nào sau đây

- (A) $y = 2x + 5$. (B) $y = 3x + 7$. (C) $y = x^2 + 3$. (D) $y = x^2 + 1$.

Hướng dẫn **D**

IV. SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Nhắc lại kiến thức về sự biến thiên của hàm số



♦ Phương pháp: Xét $T = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \begin{cases} T > 0 & \text{thì hàm số đồng biến.} \\ T < 0 & \text{thì hàm số nghịch biến.} \end{cases}$

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho:

- a) Nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

a)

$$\text{Xét } x_1, x_2 \in (0; +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x_1 > 0. \\ x_2 > 0. \end{cases}$$

Giả sử $x_2 > x_1$.

$$\text{Xét } T = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} = -\frac{1}{x_1 x_2}.$$

$$\forall \begin{cases} x_1 > 0. \\ x_2 > 0. \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 > 0 \Rightarrow T < 0 \quad \forall x \in (0; +\infty).$$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

b)

$$\text{Xét } x_1, x_2 \in (-\infty; 0) \Rightarrow \begin{cases} x_1 < 0. \\ x_2 < 0. \end{cases}.$$

Giả sử $x_2 > x_1$.

$$\text{Xét } T = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} = -\frac{1}{x_1 x_2}.$$

$$\forall \begin{cases} x_1 < 0. \\ x_2 < 0. \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2 > 0. \Rightarrow T < 0 \quad \forall x \in (-\infty; 0).$$

$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Ví dụ 6

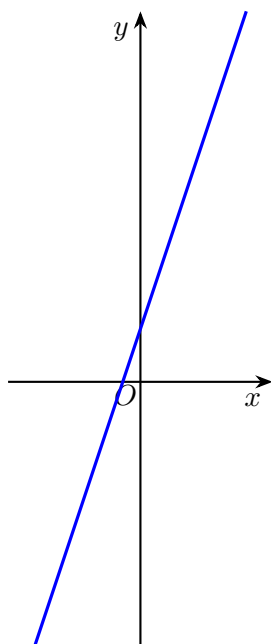
Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x + 1$ và $y = -2x^2$. Hãy cho biết:

a) Hàm số $y = 3x + 1$ đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $y = -2x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

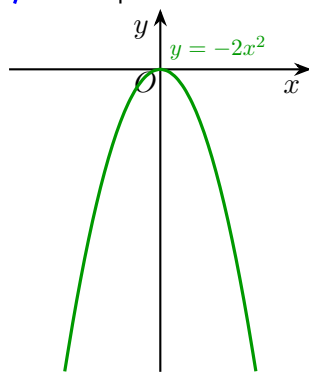
Lời giải.

a)



Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b)



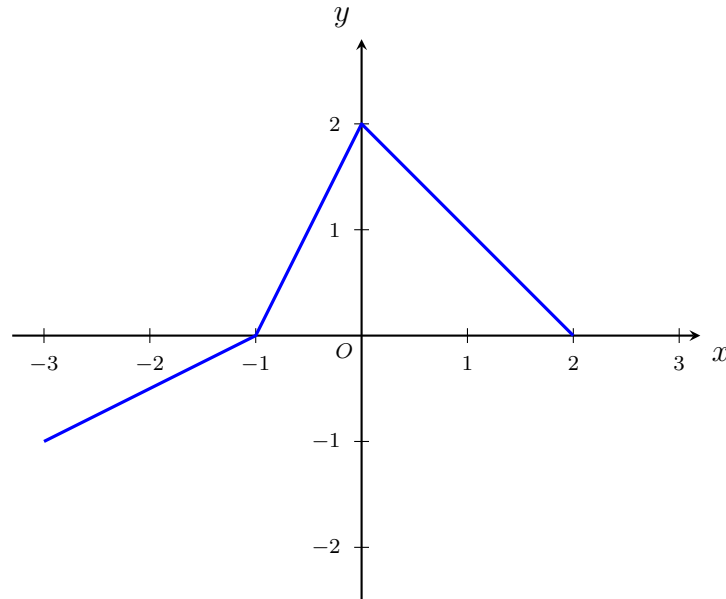
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 7



Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên:



Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(-3; 0)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

V. TẬP XÁC ĐỊNH CHỨA THAM SỐ M

Dạng 1: Phân thức

$$\diamond y = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0.$$

Ví dụ 8



Tìm m để:

a) $y = \frac{x-1}{x+m}$ xác định trên $(-2; 3)$.

b) $y = \frac{x-3}{x+2m-1}$ xác định trên $[-1; 4)$.

c) $y = \frac{x+3-m}{2x-m+1}$ xác định trên $(-3; +\infty)$.

d) $y = \frac{x-3}{x-m+1}$ xác định trên $(-\infty; 3]$.

e) $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên $[0; 1)$.

Lời giải.

a)

$$\text{Điều kiện } x \neq m \Rightarrow -m \notin (-2; 3) \Rightarrow \begin{cases} -m \leq -2. \\ -m \geq 3. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2. \\ m \leq -3. \end{cases}$$

b)

$$\text{Điều kiện } x \neq -2m + 1 \Rightarrow -2m + 1 \notin [-1; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 1 < -1. \\ -2m + 1 \geq 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1. \\ m \geq -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

c)

$$\text{Điều kiện } x \neq \frac{m-1}{2} \Rightarrow \frac{m-1}{2} \notin (-3; +\infty) \Rightarrow \frac{m-1}{2} \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -5.$$

d)

$$\text{Điều kiện } x \neq m-1 \Rightarrow m-1 \notin (-\infty; 3] \Rightarrow m-1 > 3 \Leftrightarrow m > 4.$$

e)

$$\text{Điều kiện } x \neq 2m-1 \Rightarrow 2m-1 \notin [0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0. \\ 2m-1 \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2}. \\ m \geq 1. \end{cases}$$

Dạng 2: Căn thức

$$\diamond y = \sqrt{g(x)}, g(x) \geq 0.$$

$$\diamond y = \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}, g(x) > 0.$$

$$\diamond y \text{ có tập xác định là } \mathbb{D}, \text{ xác định trên } \mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K} \subset \mathbb{D}.$$

Ví dụ 9



Tìm m để:

a) $y = \sqrt{x-m+1}$ xác định trên $(3; +\infty)$.

b) $y = \frac{3x-4}{\sqrt{2x+m-3}}$ xác định trên $[-4; 5]$.

c) $y = \sqrt{x+m} + \sqrt{2x-m+1}$ xác định trên $(0; +\infty)$.

d) $y = \sqrt{2m-x} + \sqrt{x+3m-5}$ xác định trên $[0; 1]$.

e) $y = \sqrt{x-m+2} - \frac{x}{\sqrt{-x+2m-1}}$ xác định trên $[0; 1)$.

f) $y = \sqrt{2x-5m+7} + \frac{x^2-x-2}{x+4-m}$ xác định trên $[4; +\infty)$.

g) $y = \frac{1}{\sqrt{-x+m-1}} + \frac{x+m}{x-2m+1}$ xác định trên $(-\infty; 2)$.

h) $y = \frac{x+2m-2}{\sqrt{2x+m-1}} - \frac{1}{x+2m+1}$ xác định trên $[-2; 5]$.

 Lời giải.

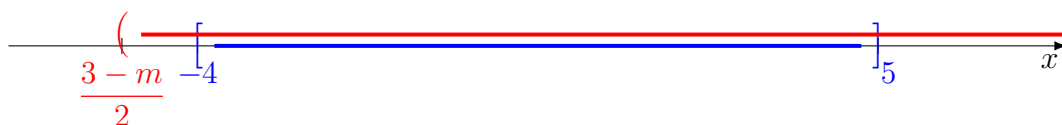
a)

$$\text{Điều kiện } x-m+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq m-1 \Rightarrow \mathbb{D} = [m-1; +\infty).$$



$$\text{Để } [m-1; +\infty) \text{ xác định trên } (3; +\infty) \text{ thì } 3 \geq m-1 \Leftrightarrow m \leq 4.$$

b) Điều kiện $x > \frac{3-m}{2}$.



Để $(\frac{3-m}{2}; +\infty)$ xác định trên $[-4; 5]$ thì $\frac{3-m}{2} < 4 \Leftrightarrow m > 11$.

c)

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -m. \\ x \geq \frac{m-1}{2}. \end{cases}$

Để $[-m; +\infty) \cup [\frac{m-1}{2}; +\infty)$ xác định trên $(0; +\infty)$ thì $\begin{cases} 0 \geq -m. \\ 0 \geq \frac{m-1}{2}. \end{cases} \Rightarrow 0 \leq m \leq 1$.

d)

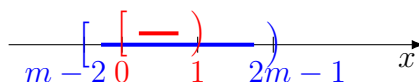
Điều kiện $\begin{cases} 2m - x \geq 0. \\ x + 3m - 5 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2m. \\ x \geq 5 - 3m. \end{cases} \Rightarrow \mathbb{D} = [5 - 3m; 2m].$



Để $[5 - 3m; 2m]$ xác định trên $[0; +\infty]$ thì $\begin{cases} 5 - 3m \leq 0. \\ 1 \leq 2m. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{5}{3}. \\ m \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow m \geq \frac{5}{3}.$

e)

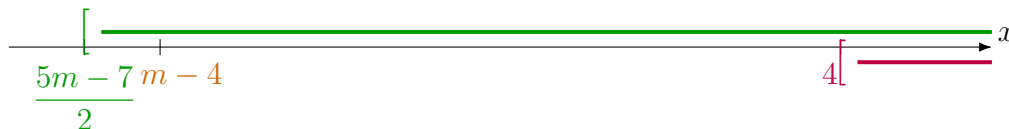
Điều kiện $\begin{cases} x \geq m - 2. \\ -x > -2m + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m - 2. \\ x < 2m - 1. \end{cases}$



Để $[m - 2; +\infty) \cup (-\infty; 2m - 1)$ xác định trên $[0; 1]$ thì $\begin{cases} m - 2 \leq 0. \\ 1 \leq 2m - 1. \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m \leq 2.$

f)

Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{5m-7}{2}. \\ x \neq m - 4. \end{cases}$



Để $[\frac{5m-7}{2}; +\infty) \setminus \{m - 4\}$ xác định trên $[4; +\infty)$ thì $\begin{cases} \frac{5m-7}{2} \leq 4. \\ m - 4 < 4. \end{cases} \Rightarrow m \leq 3.$

g) Điều kiện $\begin{cases} -x + m - 1 > 0. \\ x - 2m + 1 \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < m - 1. \\ x \neq 2m - 1. \end{cases}$



Để $(-\infty; m - 1) \setminus \{2m - 1\}$ xác định trên $(-\infty; 2)$ thì $\begin{cases} 2 \leq m - 1. \\ 2m - 1 \geq 2. \end{cases} \Rightarrow m \geq 3.$

f) Điều kiện $\begin{cases} x > \frac{1 - m}{2}. \\ x \neq -2m - 1. \end{cases}$



Để $\left(\frac{1 - m}{2}; +\infty\right) \setminus \{-2m - 1\}$ xác định trên $[-2; 5]$ thì $\begin{cases} -2 > \frac{1 - m}{2}. \\ \begin{cases} -2m - 1 < -2. \\ -2m - 1 > 5. \end{cases} \end{cases} \Rightarrow m > 5.$

Ví dụ 10

Tìm giá trị của tham số m để $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 6x + m - 2}$ xác định trên $\mathbb{R}$

Lời giải.

Điều kiện

$$x^2 - 6x + m - 2 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 6x + m - 2 = 0 \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 9 - m + 2 < 0 \Leftrightarrow m > 11.$$

Ví dụ 11

Tìm m để $y = \frac{x - 2m}{x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m}$ xác định trên $[-2; 5]$.

Lời giải.

Điều kiện

$$\begin{aligned} & x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m \neq 0. \\ \Leftrightarrow \Delta &= (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m) = 1. \\ \Rightarrow & \begin{cases} x_1 \neq \frac{2m + 1 + 1}{2} = m + 1. \\ x_2 \neq \frac{2m + 1 - 1}{2} = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Cách giải nhanh

Bước 1: Ta mặc định thay $x = 100$ vào phương trình $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m = 0$. Ta tìm được $x = 101 = m + 1$ hoặc $x = 100 = m$.

Bước 2: Vẽ trục số.



TH1: $m \geq 5$.

TH2: $\begin{cases} m < -2. \\ 5 \leq m + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2. \\ m \geq 4. \end{cases}$

TH3: $m + 1 < -2 \Leftrightarrow m < -3$.

Bước 3: Kết luận

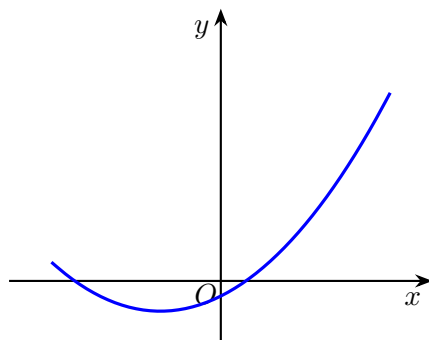
Vậy $m \geq 5$ hoặc $m < -3$.

2 HÀM SỐ BẬC HAI

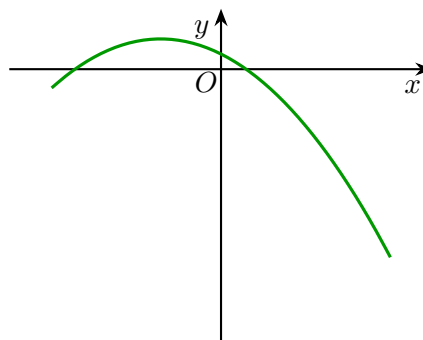
I. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Nhắc lại kiến thức về khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

◇ $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$



Trường hợp $a > 0$



Trường hợp $a < 0$

◇ Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}.$

◇ Đỉnh $I \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a} \right).$

Ví dụ: $x^2 - 2x + 4 (a = 1, b = -2, c = 4)$ có $\begin{cases} x_I = 1. \\ y_I = \frac{4 - 16}{-4} = 3. \end{cases} \Rightarrow I \left(\frac{7}{2}; \frac{61}{4} \right).$

◇ Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}.$

◇ Giao với $Ox: y = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0.$

◇ Giao với $Oy: x = 0 \Leftrightarrow y = c.$

◇ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

Trường hợp $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

Trường hợp $a > 0$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty \right)$ và $\left(-\infty; -\frac{b}{2a} \right).$

Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

◇ Vẽ đồ thị

x			$-\frac{b}{2a}$		
y			$-\frac{\Delta}{4a}$		

Ví dụ 12

Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2x + 3$

Lời giải.

Đỉnh $I(-1; 4)$.

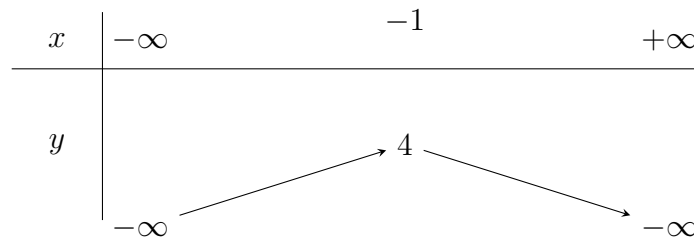
Trục đối xứng $x = -1$.

Tập xác định $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

Giao Ox : $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1. \\ x = -3. \end{cases}$

Giao Oy : $x = 0 \Leftrightarrow y = 3$.

Bảng biến thiên



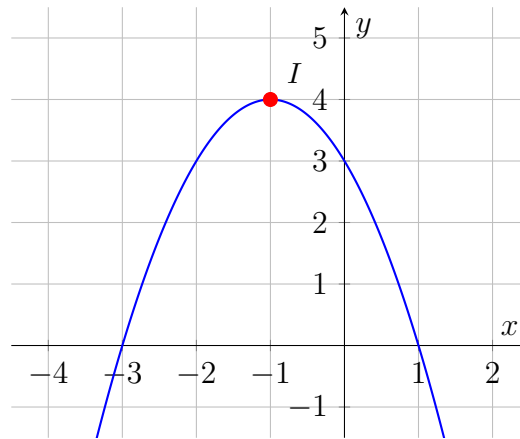
Vì $a < 0 \Rightarrow$ bề lõm quay xuống.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Vẽ đồ thị

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	3	4	3	0

Đồ thị hàm số $y = -x^2 - 2x + 3$



II. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Xác định parabol, tìm hệ số a, b, c

Bài 1. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

- Đi qua hai điểm $M(1; 5)$ và $N(-2; 8)$.
- Đi qua $A(3; -4)$ và có trục đối xứng là $x = \frac{3}{2}$.
- Có đỉnh $I(2; -2)$.
- Đi qua điểm $B(-1; 6)$ và tung độ của đỉnh là $-\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải.

a)

$$\text{Vì } M(1; 5) \in y = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow 5 = a + b + 2 \Leftrightarrow a + b = 3.$$

$$\text{Vì } N \in y = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow 8 = 4a - 2b + 2 \Leftrightarrow 4a - 2b = 6.$$

$$\text{Khi đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} a + b = 3. \\ 4a - 2b = 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2. \\ b = 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } y = 2x^2 + x + 2.$$

b)

$$\text{Vì } A \in y = ax^2 + bx + 2 \Rightarrow -4 = 9a + 3b + 2 \Leftrightarrow 9a + 3b = -6.$$

$$x = -\frac{3}{2} = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow 6a = 2b \Leftrightarrow 3a - b = 0.$$

$$\text{Khi đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} 9a + 3b = -6. \\ 3a - b = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3}. \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2.$$

c)

$$\text{Vì } I(-2; 2) \in (P) \Rightarrow -2 = 4a + 2b + 2 \Leftrightarrow 4a + 2b = -4.$$

$$x_I = -\frac{b}{2a} = 2 \Leftrightarrow 4a + b = 0.$$

$$\text{Khi đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4a + 2b = -4. \\ 4a + b = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1. \\ b = -4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } y = x^2 - 4x + 2.$$

d)

$$\text{Vì } B(-1; 6) \in (P) \Rightarrow 6 = a - b + 2 \Leftrightarrow a - b = 4 \quad (1).$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \Delta = 4a \Leftrightarrow b^2 - 9a = 0.$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow a = b + 4.$$

$$\text{Thay } b^2 - 9a = 9 \text{ vào (1) ta được } b^2 - 9b - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 12 \Rightarrow a = 16. \\ b = -3 \Rightarrow a = 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } y = 16x^2 + 12x + 2 \text{ hoặc } y = x^2 - 3x + 2.$$

Bài 2. Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(8; 0)$ và có đỉnh $I(6; -12)$.

Hướng dẫn giải.

$$A \in (P) \Rightarrow 0 = 64a + 8b + c.$$

$$I \in (P) \Rightarrow -12 = 36a + 6b + c.$$

$$x_I = -\frac{b}{2a} = 6 \Leftrightarrow 12a + b = 0.$$

$$\text{Khi đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} 0 = 64a + 8b + c. \\ -12 = 36a + 6b + c. \\ 12a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3. \\ b = -36. \\ c = 96. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } y = 3x^2 - 36x + 96.$$

Bài 3. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = a(x - m)^2$. Tìm a và m trong mỗi trường hợp sau

a) (P) có đỉnh là $(-3; 0)$ và cắt trục tung tại điểm $M(0; -5)$.

b) Đường thẳng $y = 4$ cắt (P) tại hai điểm $A(-1; 4)$ và $B(3; 4)$.

Hướng dẫn giải.

a)

$$I(-3; 0) \in (P) \Rightarrow 0 = a(-3 - m)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0. \\ m = -3. \end{cases}$$

$$M(0; -5) \in (P) \Rightarrow -5 = (0 - m)^2 \cdot a \Leftrightarrow am^2 = -5.$$

$$\text{TH1: } a = 0 \Rightarrow 0 = -5 \text{ (vô lí).}$$

$$\text{TH2: } m = -3 \Rightarrow a = -\frac{5}{9}.$$

$$\text{Vậy } y = -\frac{5}{9}(x + 3)^2.$$

b)

$$A(-1; 4) \in (P) \Rightarrow 4 = a(-1 - m)^2.$$

$$B(3; 4) \in (P) \Rightarrow 4 = a(3 - m)^2.$$

$$\text{Khi đó ta có hệ phương trình } \begin{cases} 4 = a(-1 - m)^2 & (1). \\ 4 = a(3 - m)^2 & (2). \end{cases}$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow a(-1 - m)^2 = a(3 - m)^2 \Leftrightarrow 1 + 2m + m^2 = 9 - 6m + m^2 \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{Thay } m = 1 \text{ vào (1) ta được } a = 1.$$

$$\text{Vậy } y = (x - 1)^2.$$

Dạng 2: Tìm Max-min dựa vào bảng biến thiên

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

$$\text{a) } y = x^2 + 2x - 3.$$

$$\text{b) } y = 2x^2 - 4x - 5 \text{ trên } [-5; -2].$$

c) $y = -x^2 + x - 1$ trên $[-3; 4]$.

 *Hướng dẫn giải.*

a)

Đỉnh $I(-1; -4)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-4	$+\infty$

Vậy $\min y = -4$ tại $x = -1$.

b)

Đỉnh $I(1; -7)$. bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$
y	$+\infty$	65	11	-7	$+\infty$

$\max y = 65$ tại $x = -5$, $\min y = 11$ tại $x = -2$.

c)

Đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$.

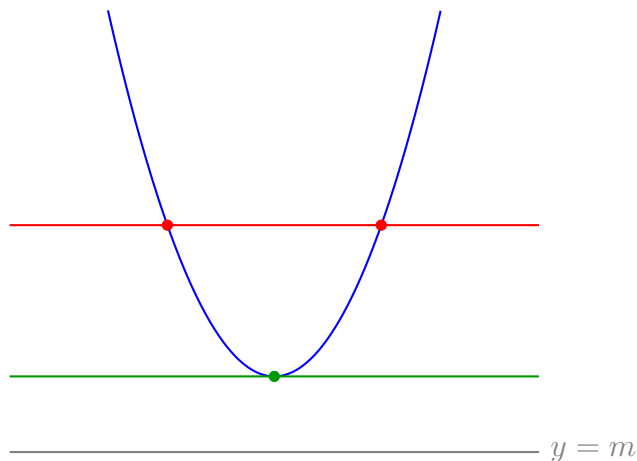
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	4	$+\infty$
y	$-\infty$	-13	$-\frac{3}{4}$	-13	$-\infty$

$\max y = -\frac{3}{4}$ tại $x = \frac{1}{2}$, $\min y = -13$ tại $x = -3$ hoặc $x = 4$.

Dạng 3: Tìm nghiệm dựa vào bảng biến thiên

◇ Phương trình có nghiệm $f(x) = m \Leftrightarrow \min f(x) \leq m \leq \max f(x)$ (số nghiệm = số giao điểm).



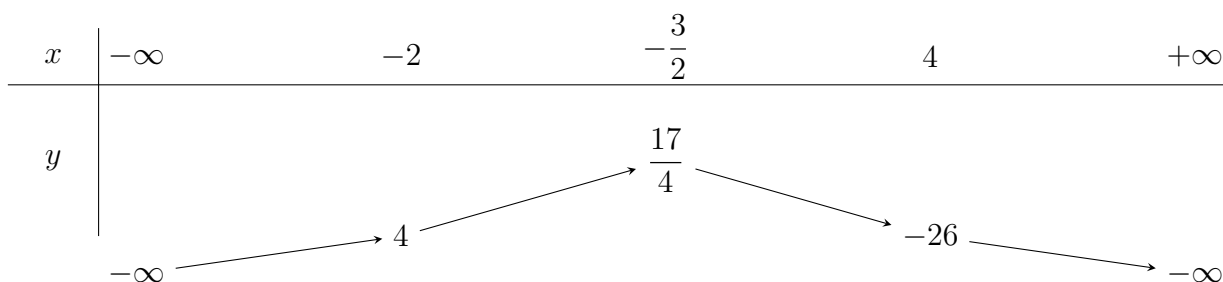
Bài 5. Tìm m để phương trình $x^2 + 3x - 2 + m = 0$ có nghiệm trên $[-2; 4]$.

Hướng dẫn giải.

$$m = -x^2 - 3x + 2, x \in [-2; 4].$$

$$\text{Đỉnh } I\left(-\frac{3}{2}; \frac{17}{4}\right).$$

Bảng biến thiên



Để phương trình có nghiệm trên $[-2; 4]$ thì $-26 \leq m \leq \frac{17}{4}$.

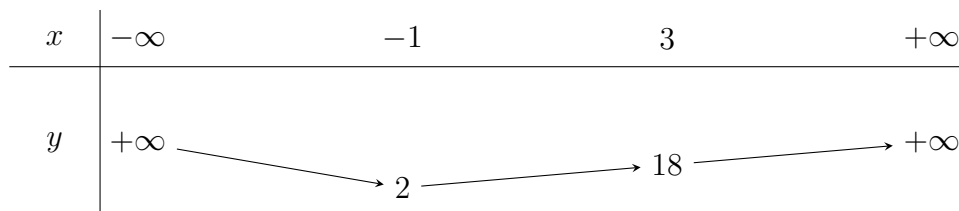
Bài 6. Tìm m để phương trình $-x^2 - 2x + 2m - 3 = 0$ có nghiệm trên $[-1; 3]$.

Hướng dẫn giải.

$$2m = x^2 + 2x + 3, x \in [-1; 3].$$

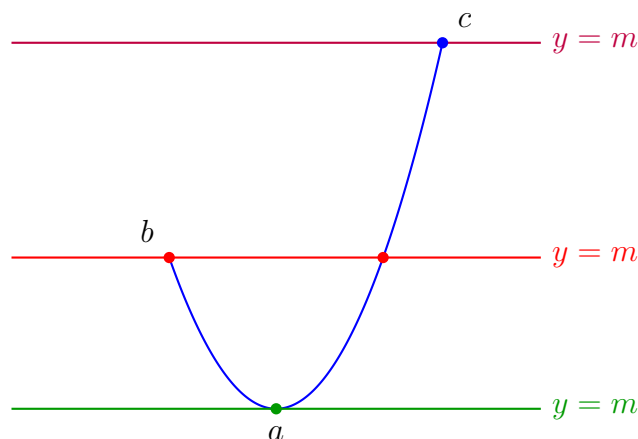
$$\text{Đỉnh } I(-1; 2).$$

Bảng biến thiên



Để phương trình có nghiệm trên $[-1; 3]$ thì $2 \leq 2m \leq 18 \Leftrightarrow 1 \leq m < 9$.

◇ Phương trình có n nghiệm $f(x) = m \Rightarrow$ vẽ cụ thể.



Nếu $m < a$ thì phương trình vô nghiệm.

Nếu $m = a, b < m < c, m = c$ thì phương trình có 1 nghiệm.

Nếu $a < m < b, m = b$ thì phương trình có 2 nghiệm.

Nếu $m > c$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 7. Tìm m để phương trình $x^2 - 2x + 4 - m$ có 2 nghiệm phân biệt trên $(-1; 5)$.

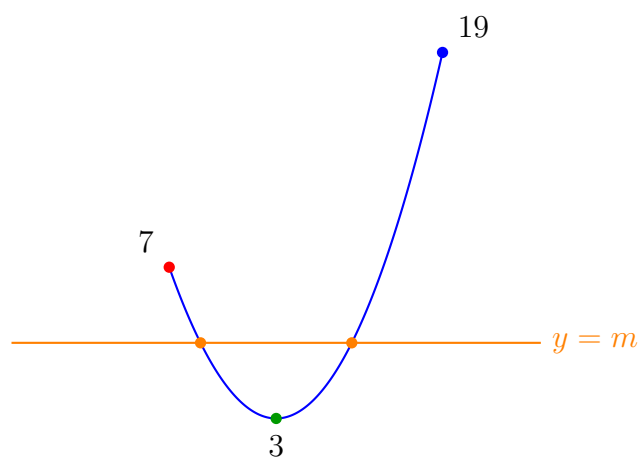
Hướng dẫn giải.

$$m = x^2 - 2x + 4, x \in (-1; 5).$$

Đỉnh $I(1; 3)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$
y	$+\infty$	7	3	19	$+\infty$



Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt trên $(-1; 5)$ thì $3 < m < 7$.

Bài 8. Tìm m để phương trình $-x^2 + 4x - 5 + 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trên $[-4; 3]$.

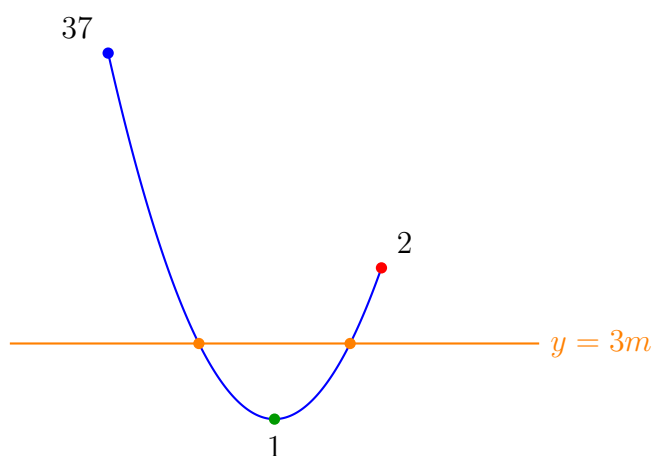
Hướng dẫn giải.

$$3m = x^2 - 4x + 5.$$

Đỉnh $I(2; 1)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-4	2	3	$+\infty$
y	$+\infty$	37	1	2	$+\infty$



Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt trên $[-4; 3]$ thì $\frac{1}{3} < m \leq \frac{2}{3}$.

Bài 9. Tìm m để phương trình $-x^2 - 2x + 2 - m$ có 1 nghiệm duy nhất trên $(-2; 3]$.

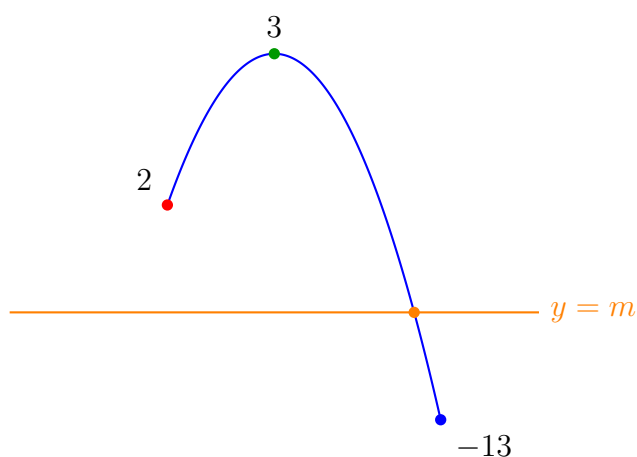
Hướng dẫn giải.

$$m = -x^2 - 2x + 2.$$

Đỉnh $I(-1; 3)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$
y	$-\infty$	2	3	-13	$-\infty$



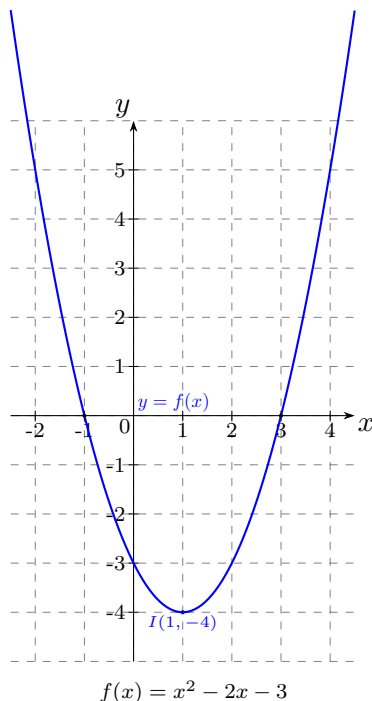
Để phương trình có 1 nghiệm duy nhất trên $(-2; 3]$ thì $\begin{cases} -13 \leq m \leq 2. \\ m = -3. \end{cases}$

III. ĐỒ THỊ HÀM GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Nhắc lại kiến thức về đồ thị hàm giá trị tuyệt đối

◇ $y = |f(x)|$.

Đồ thị $y = f(x)$

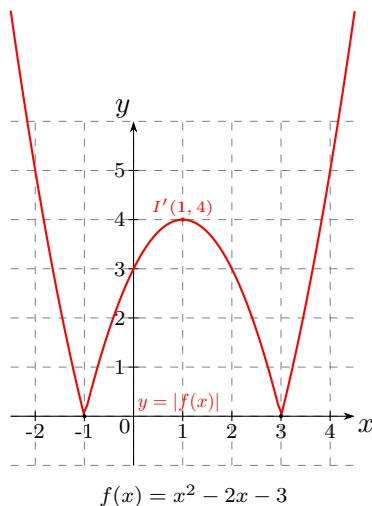


Các bước vẽ đồ thị $y = |f(x)|$.

Bước 1: Xóa đồ thị dưới Ox.

Bước 2: Lấy đối xứng dưới lên trên.

Đồ thị $y = |f(x)|$



☕ Ví dụ 13



a) Vẽ đồ thị $y = x^2 - 2x - 2$ (1).

b) Dựa vào đồ thị (1) hãy vẽ đồ thị $y = |x^2 - 2x - 2|$ (2).

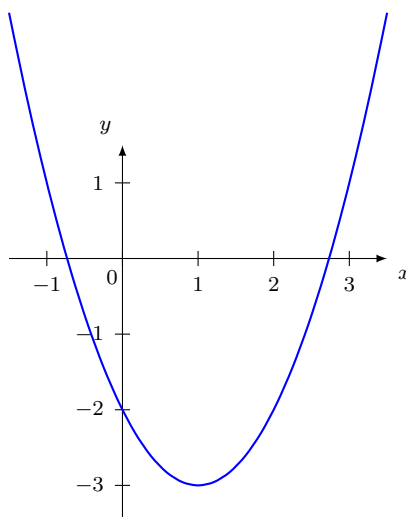
 *Lời giải.*

a)

Đỉnh $I(1; -3)$.

Vẽ đồ thị

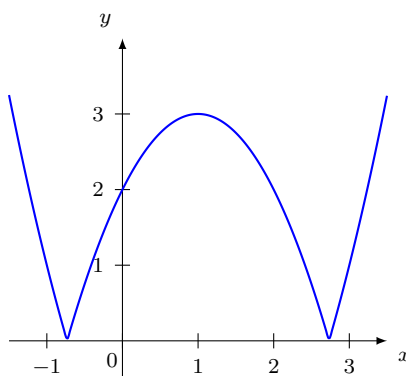
x	-1	0	1	2	3
y	1	-2	-3	-2	1



b)

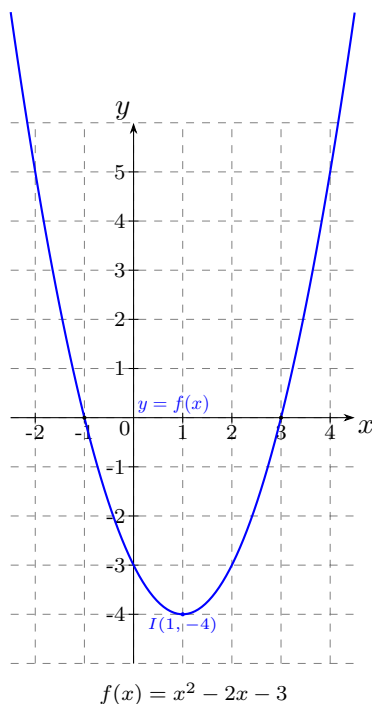
Bước 1: Xoá đồ thị dưới Ox .

Bước 2: Lấy đối xứng dưới lên trên.



◇ $y = f(|x|)$.

Đồ thị $y = f(x)$

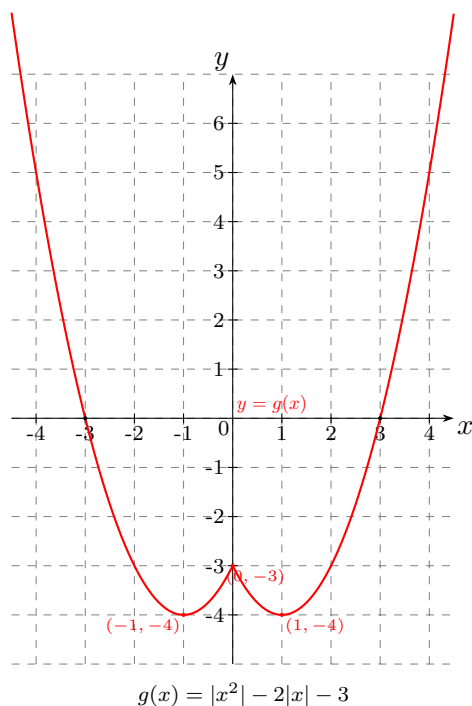


Các bước vẽ đồ thị $y = f(|x|)$.

Bước 1: Xoá phần đồ thị bên trái Oy .

Bước 2: Lấy đối xứng bên phải sang trái.

Đồ thị $y = f(|x|)$



Ví dụ 14



a) Vẽ đồ thị $y = |x^2| - 2|x| - 2$ (1).

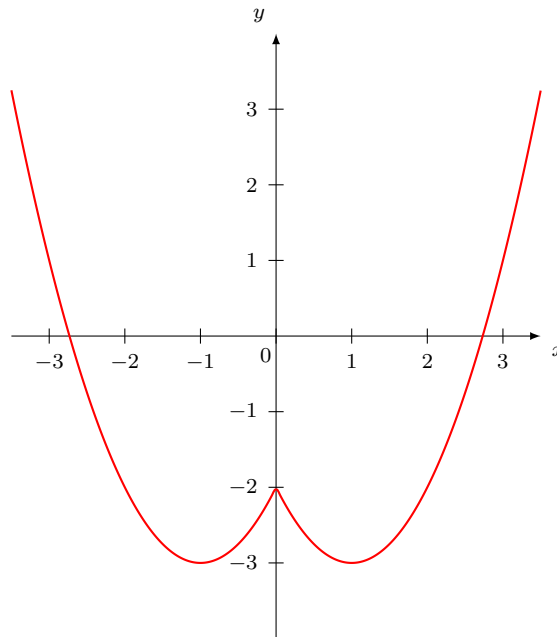
c) Dựa vào đồ thị (1), biện luận số nghiệm của phương trình $|x^2| - 2|x| - 3 + m = 0$.

 *Lời giải.*

a)

Bước 1: Xoá đồ thị bên trái Oy .

Bước 2: Lấy đối xứng bên phải sang trái.



b)

$$\begin{aligned} |x^2| - 2|x| - 3 + m &= 0. \\ \Leftrightarrow |x^2| - 2|x| - 2 - 1 + m &= 0. \\ \Leftrightarrow |x^2| - 2|x| - 2 &= -m + 1. \quad (*) \end{aligned}$$

Số nghiệm của $(*)$ = số nghiệm của $\begin{cases} y = |x^2| - 2|x| - 2. \\ y = -m + 1. \end{cases}$

Biện luận.

$-m - 1 < 3 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$-m + 1 = 3 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

$-3 < -m + 1 < -2 \Rightarrow$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

$-m + 1 = -2 \Rightarrow$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

$-m + 1. - 2 \Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

3 XÉT DẤU HÀM BẬC NHẤT VÀ HÀM BẬC HAI

I. KỸ THUẬT XÉT DẤU PHỔ THÔNG

Nhắc lại kiến thức xét dấu hàm bậc nhất và hàm bậc hai

◇ Hàm bậc nhất $f(x) = ax + b$ (phải cùng trái khác dấu a).

◇ Hàm bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$.

① $\Delta > 0 \Rightarrow 2$ nghiệm phân biệt x_1, x_2 (trong trái ngoài cùng dấu a).

② $\Delta = 0 \Rightarrow$ nghiệm kép x_0 .

③ $\Delta < 0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 5x + 7$ có $\begin{cases} \Delta < 0. \\ a = 1 > 0. \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

☕ Ví dụ 15

Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = 2x - 1$.

b) $f(x) = -3x + 5$.

📖 *Lời giải.*

a)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Kết luận.

$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right).$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

b)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Kết luận.

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right).$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right).$$

Ví dụ 16

Dựa vào bảng xét dấu để giải bất phương trình sau:

a) $(1-x)(2x+7)(9-3x) \leq 0.$

b) $\frac{(x+1)(2-x)}{x+3} \geq 0.$

Lời giải.

a)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{1; -\frac{7}{2}; 3\right\}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	1	3	$+\infty$
$1-x$	+		+	0	-
$2x+7$	-	0	+		+
$9-3x$	+		+		0
$f(x)$	-	0	+	0	-

Mà $f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{7}{2}\right] \cup [1; 3].$

b)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 2\}.$$

Điều kiện $x \neq -3.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-		-	0	+
$2-x$	+		+		0
$x+3$	-	0	+		+
$f(x)$	+		-	0	-

Mà $f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3] \cup [-1; 2].$

Ví dụ 17

Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$.

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

c) $f(x) = -5x^2 + 7x - 69$.

Lời giải.

a)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1. \\ x = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Kết luận.

$$f(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (-1; +\infty).$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right).$$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Vì $\begin{cases} \Delta < 0. \\ a = -5 < 0. \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Ví dụ 19

Dựa vào bảng xét dấu để giải các bất phương trình sau:

a) $(2x + 1)(x^2 + x + 30) \geq 0$.

b) $\frac{x^2 - 9x + 4}{x^2 - 5x + 4} > 0$.

c) $\frac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} < -1$.

Lời giải.

a)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-6; -\frac{1}{2}; 5\right\}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-6	$-\frac{1}{2}$	5	$+\infty$		
$2x + 1$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$x^2 + x - 30$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Mà $f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -6] \cup \left[-\frac{1}{2}; 5\right]$.

b)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{7; 2\}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	2	4	7	$+\infty$			
$x^2 - 9x + 4$	$+$	$ $	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$x^2 - 5x + 4$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$+$
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$

Mà $f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (2; 4)$.

c)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$.

Điều kiện $x \neq 5, x \neq -2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$			
$-x^2 + 4x - 3$	$-$	$ $	$-$	0	$+$	0	$-$	$ $	$-$
$x^2 - 3x - 10$	$+$	0	$-$	$ $	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$-$

Mà $f(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (1; 3) \cup (5; +\infty)$.

II. KỸ THUẬT XÉT DẤU 1 DÒNG

Phương pháp: thường sử dụng để giải nhanh những bài trắc nghiệm về giải bất phương trình.

♦ Xét 1 khoảng bất kì (ngoài cùng).

♦ Qua nghiệm bội chẵn thì không đổi dấu. Ví dụ: $x^2, x^4, (x-3)^2 \dots$

♦ Qua nghiệm bội lẻ thì đổi dấu. Ví dụ: $x, x^3, (x-5)^{2019} \dots$

Ví dụ 19

Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x^2(x+1)(x-2)^3}{x+4} \geq 0$.

b) $\frac{(3-x)(1-x)^{2019}x^{2020}}{(x+1)^3(x-2)} > 0$.

c) $\frac{(2-x)^5(x+1)(3+x)^{11}}{(3-x)(1-x^2)}$.

Lời giải.

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	0	2	$+\infty$	
$f(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$-$	0	$+$

Chọn $x = 3 \Rightarrow f(x) > 0$.

Mà $f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -4) \cup [-1; 2]$.

b)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$ $	$-$	0	$-$	0	$+$

Chọn $x = 4 \Rightarrow f(x) > 0$.

Mà $f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$.

c)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$+$

Chọn $x = 4 \Rightarrow f(x) > 0$.

Mà $f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -3]$.

III. CÁC DẠNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Bài toán nghiệm đúng - vô nghiệm

◇ Cho $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Khi đó

$$\diamond f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0. \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

$$\diamond f(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0. \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$$

$$\diamond f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0. \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

$$\diamond f(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0. \\ \Delta < 0. \end{cases}$$

BÀI TẬP

◇ Câu 1. Tìm m để $f(x) = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 3 \geq 0$ đúng với mọi x .

- (A) $m > 1$. (B) $m \geq 1$. (C) $m \leq 1$. (D) $m < 1$.

Hướng dẫn (B)

❖ **Câu 2.** Tìm m để biểu thức $f(x) = (m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1$ luôn âm.

- (A) $m > \frac{3}{7}$. (B) $m \geq \frac{3}{7}$. (C) $m \geq 1$. (D) $m < \frac{3}{7}$.

Hướng dẫn (D)

❖ **Câu 3.** Tìm m để $f(x) = (m^2 + 4m - 5)x^2 - 2(m - 1)x + 2 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi x .

- (A) $m = 1$. (B) $m \geq 0$. (C) $m = \emptyset$. (D) $m \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn (C)

❖ **Câu 4.** Tìm m để $f(x) = \frac{x + 3}{\sqrt{(m + 2)x^2 + 5x - 4}}$ luôn có nghĩa với mọi x .

- (A) $m < 0$. (B) $m \geq 0$. (C) $m = \emptyset$. (D) $m < 1$.

Hướng dẫn (C)

❖ **Câu 5.** Tìm m để bất phương trình $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 \leq 0$ vô nghiệm?

- (A) $-1 < m < 7$. (B) $m \geq 7 \cup m \leq -1$.
(C) $m > -2$. (D) $m \leq -2$.

Hướng dẫn (A)

❖ **Câu 6.** Tìm m để bất phương trình $mx^2 - 2mx - 2 - 3m > 0$ vô nghiệm?

- (A) $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$. (B) $-\frac{1}{2} \leq m < 0$.
(C) $m > 0$. (D) $m > \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn (A)

Dạng 2: Bài toán về phương trình bậc hai

BÀI TẬP

❖ **Câu 7.** Tìm tất cả giá trị của m để phương trình $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$ vô nghiệm?

- (A) $m < 0$. (B) $m > 2$.
(C) $\begin{cases} m > 3 \\ m < 1 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} m \neq 2 \\ 1 < m < 3 \end{cases}$.

Hướng dẫn (C)

❖ **Câu 8.** Tìm tất cả giá trị của m để $f(x) = (m - 3)x^2 + (m + 3)x - (m + 1)$ đổi dấu 2 lần trên $\mathbb{R}$.

- (A) $\left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. (B) $\left(-\frac{3}{5}; 1\right)$.
(C) $(1; +\infty)$. (D) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Mục lục của chương

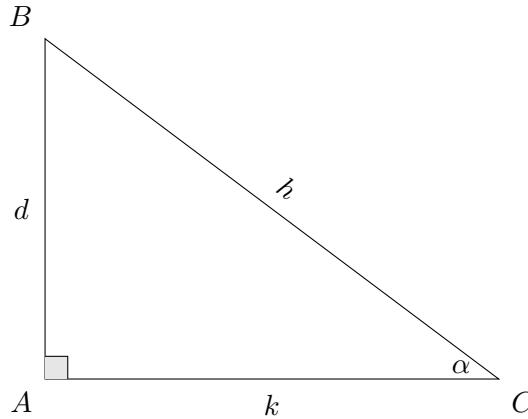
Chuyên đề 1. Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°	70
Chuyên đề 2. Định lí cosin và định lí sin	75
Chuyên đề 3. Ứng dụng hệ thức lượng trong tam giác	79

1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

I. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC GÓC NHỌN

Nhắc lại kiến thức về tỉ số lượng giác góc nhọn

◇ Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$.



$$\diamond \sin \alpha = \frac{d}{h} = \frac{BA}{BC}.$$

$$\diamond \cos \alpha = \frac{k}{h} = \frac{AC}{BC}.$$

$$\diamond \tan \alpha = \frac{d}{k} = \frac{AB}{AC}.$$

$$\diamond \cot \alpha = \frac{k}{d} = \frac{AC}{AB}.$$



$$\diamond \sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha).$$

$$\diamond \cos(90^\circ - \alpha) = \sin(\alpha).$$

$$\diamond \tan(90^\circ - \alpha) = \cot(\alpha).$$

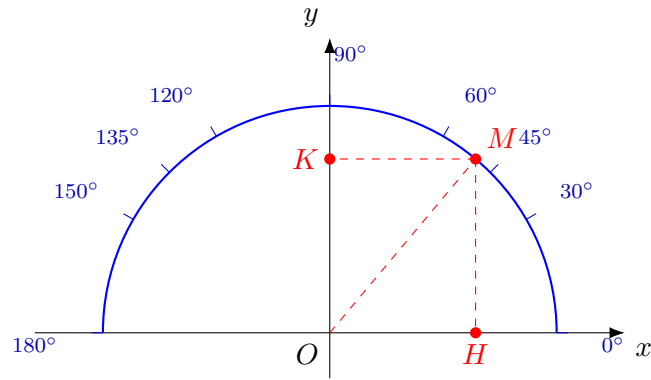
$$\diamond \cot(90^\circ - \alpha) = \tan(\alpha).$$

$$\diamond \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\diamond \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

$$\diamond 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

$$\diamond 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

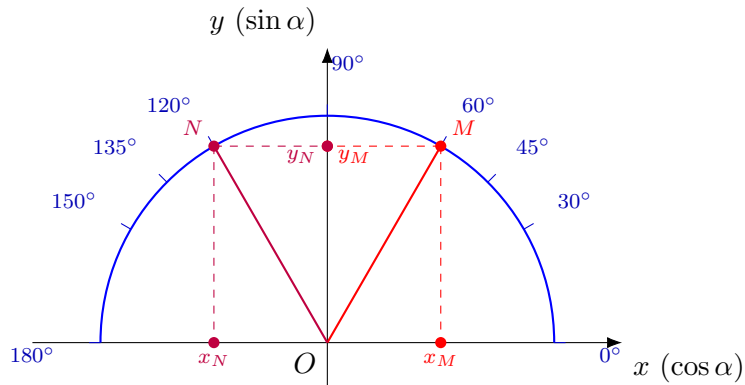


- ◇ Tâm $O(0; 0)$, bán kính $R = 1$.
- ◇ Chiều dương: ngược chiều kim đồng hồ có gốc $A(1; 0)$.
- ◇ Khi $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{MH}{OM} = \frac{y_M}{1} = y_M \text{ (tung độ điểm } M\text{).} \\ \cos \alpha &= \frac{OH}{OM} = \frac{x_M}{1} = x_M \text{ (hoành độ điểm } M\text{).} \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y_M}{x_M}. \\ \cot \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{x_M}{y_M}.\end{aligned}$$

II. HAI GÓC PHỤ NHAU

Nhắc lại kiến thức về mối quan hệ giữa hai góc bù nhau



- ◇ Ta thấy $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$, $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$, $\cos 60^\circ = \cos 120^\circ$.
- ◇ Kết luận: Cho α và $180^\circ - \alpha$ thì

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha. \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha. \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha. \\ \cot(180^\circ - \alpha) &= -\cot \alpha.\end{aligned}$$

III. XÉT DẤU CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Nhắc lại kiến thức về xét dấu các giá trị lượng giác

$$\diamond \alpha \text{ nhọn } (0^\circ < \alpha < 90^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0. \\ \cos \alpha > 0. \\ \tan \alpha > 0. \\ \cot \alpha > 0. \end{cases}$$

$$\diamond \alpha \text{ tù } (90^\circ < \alpha < 180^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha > 0. \\ \cos \alpha < 0. \\ \tan \alpha < 0. \\ \cot \alpha < 0. \end{cases}$$

IV. BẢNG GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC GÓC ĐẶC BIỆT

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot x$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

V. CASIO TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Bài 1. Tính $\sin 80^\circ$, $\cos 175^\circ$, $\tan 70^\circ$?

Bài 2. Tính số đo góc α (từ 0° đến 180° và làm tròn đến hàng đơn vị theo đơn vị độ, biết:

- a) $\cos \alpha = -0,94$. b) $\tan \alpha = 0,8$. c) $\sin \alpha = 0,65$.

VI. MỘT SỐ BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Bài 3. Tính (không được sử dụng máy tính cầm tay)

- a) $A = \sin 150^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ$.
 b) $B = 2 \cos 30^\circ - 3 \tan 150^\circ + \cot 135^\circ$.
 c) $C = 2 \cos 30^\circ + \sin 135^\circ + \tan 135^\circ$.
 d) $D = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ$.

Hướng dẫn giải.

- a) $A = \sin 30^\circ + (-\tan 45^\circ) + \cot 45^\circ = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$.
 b) $B = 2 \cos 30^\circ - 3(-\tan 30^\circ) + (-\cot 45^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-1) = 2\sqrt{3} - 1$.
 c) $C = 2 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ + (-\tan 45^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + (-1) = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

d) $D = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \sin 35^\circ + (-\cos 15^\circ) - (-\cos 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1.$

Bài 4. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ biết:

a) $\sin \alpha = \frac{3}{2}.$ b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$ c) $\tan \alpha = -1.$ d) $\cot \alpha = -\sqrt{3}.$

Hướng dẫn giải.

a)

Ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2}. \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vì α nhọn $\Rightarrow \sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}.$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b)

Ta có

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Vì α tù $\Rightarrow \sin \alpha > 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1, \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -1.$$

c)

Ta có

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow -1 \cdot \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \cot \alpha = -1.$$

Hơn nữa,

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + (-1)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Vì α tù $\Rightarrow \sin \alpha > 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d)

Ta có

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \tan \alpha \cdot (-\sqrt{3}) = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Hơn nữa,

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}. \\ \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Vì } \alpha \text{ tù} \Rightarrow \sin \alpha > 0, \tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Bài 5. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

- a) $\sin A = \sin(B + C)$.
- b) $\cos A = -\cos(B + C)$.
- c) $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B + C}{2}$.
- d) $\tan \frac{B + C}{2} = \cot \frac{A}{2}$.

Hướng dẫn giải.

- a)
 Vì $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow B + C = 180^\circ - A \Rightarrow \sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$ (đpcm).
- b)
 Vì $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A \Rightarrow -\cos(B + C) = \cos A$ (đpcm).
- c)
 Vì $A + B + C = 180^\circ \Rightarrow \frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{B + C}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \sin \frac{A}{2}$ (đpcm).
- d)
 Vì $\frac{B + C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} \Rightarrow \tan \left(\frac{B + C}{2}\right) = \tan \left(90^\circ - \frac{A}{2}\right) = \cot \frac{A}{2}$ (đpcm).

Bài 6.

- a) Cho góc α với $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^2 \alpha + 5\cos^2 \alpha$.
- b) Cho $\tan \alpha = 2$. Tính $B = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}$, $C = \frac{\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha}{3\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$, $D = \frac{1 - 3\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha + 5}$.
- c) Cho $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Tính $E = \frac{\tan \alpha + \cot \alpha}{\tan \alpha - \cot \alpha}$.

Hướng dẫn giải.

- a)
 Ta có
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$. Khi đó $A = 2 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$.
- b)
 Chia cả tử và mẫu cho $\cos \alpha \Rightarrow B = \frac{\tan \alpha + 1}{2\tan \alpha - 1} = \frac{2 + 1}{2 \cdot 2 - 1} = 3$.
 Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha \Rightarrow C = \frac{\tan^2 \alpha + 2}{3\tan^2 \alpha - 1} = \frac{2^2 + 2}{3 \cdot 2^2 - 1} = \frac{6}{11}$.
 Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 \alpha \Rightarrow D = \frac{(1 + \tan^2 \alpha) - 3\tan^2 \alpha}{2 + 5(1 - \tan^2 \alpha)} = \frac{1 + 2^2 - 3 \cdot 2^2}{2 + 5 \cdot (1 - 2^2)} = -\frac{7}{27}$.
- c)

$$E = \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) : \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} : \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{1}{2\sin^2 \alpha - 1} = 8.$$

2 ĐỊNH LÍ COSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN

I. LÝ THUYẾT

Các công thức cần nhớ

◇ Định lí cos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

◇ Định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

◇ Công thức diện tích: $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A = \frac{abc}{4R} = p \cdot r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,
với $p = \frac{a+b+c}{2}$.

◇ Công thức trung tuyến: $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

II. BÀI TẬP

Bài 7. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C (*)$. Chứng minh $\triangle ABC$ cân.

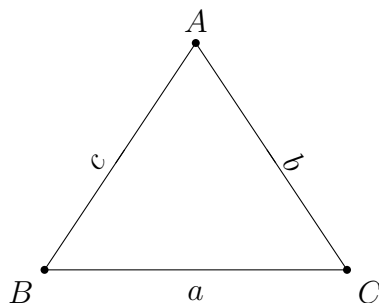
Hướng dẫn giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \\ \frac{b}{\sin B} &= 2R \Rightarrow \sin B = \frac{b}{2R} \\ \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{aligned}$$

Thay vào (*) ta được

$$\begin{aligned} \frac{a}{2R} &= 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} \\ \Leftrightarrow a^2 &= a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c. \end{aligned}$$



$\Rightarrow \triangle ABC$ cân tại A (đpcm).

Bài 8. Cho tam giác có $S = 2R^2 \cdot \sin A \cdot \sin B$. Chứng minh $\triangle ABC$ là 1 tam giác vuông.

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{a}{2R} \\ \sin B = \frac{b}{2R} \end{cases}$$

Thay vào (*) ta được $S = 2R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} = \frac{ab}{2}$.

Mà $S = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C$.

$$\Rightarrow \frac{ab}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \sin C \Leftrightarrow \sin C = 1 \Leftrightarrow \widehat{C} = 90^\circ.$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C (đpcm).

Bài 9. Cho tam giác ABC , các đường cao h_a, h_b, h_c thỏa mãn $3h_a = 2h_b + h_c$. Chứng minh $\frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$.

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \Rightarrow \begin{cases} h_a = \frac{2S}{a} \\ h_b = \frac{2S}{b} \\ h_c = \frac{2S}{c} \end{cases}$$

Thay vào (*) ta được

$$3 \cdot \frac{2S}{a} = 2 \cdot \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} \Leftrightarrow 2S \cdot \frac{3}{a} = 2S \cdot \left(\frac{2}{b} + \frac{1}{c} \right) \Leftrightarrow \frac{3}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài 10. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

a) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$

b) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$

Hướng dẫn giải.

a)

Ta có

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cdot \left(\frac{1}{2} bc \sin A \right)} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}.$$

$$\cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac \sin B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4 \cdot \left(\frac{1}{2} ac \sin B \right)} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}.$$

$$\cot C = \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab \sin C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4 \cdot \left(\frac{1}{2} ab \sin C \right)} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}.$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C = \frac{(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2)}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}. \\ m_b^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}. \\ m_c^2 &= \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2) + (2a^2 + 2c^2 - b^2) + (2a^2 + 2b^2 - c^2)}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (đpcm)}.$$

Bài 11. Cho tam giác ABC có $S = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4} (*)$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

Hướng dẫn giải.

$$(*) \Leftrightarrow S = \frac{a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc - ca + bc - c^2}{4} = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4}.$$

$$\Leftrightarrow 4 \left(\frac{1}{2} bc \sin A \right) = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc.$$

$$\Leftrightarrow 2bc \sin A = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc.$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2bc(1 - \sin A).$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 1 - \sin A \Leftrightarrow \cos A = 1 - \sin A.$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \sin A = 1 \Leftrightarrow \cos^2 A + 2 \sin A \cos A + \sin^2 A = 1.$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin A \cos A = 1.$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A \cos A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = 0 \Rightarrow \hat{A} = 0^\circ & (\text{loại}). \\ \cos A = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ & (\text{tm}). \end{cases}$$

$$\Rightarrow ABC \perp A.$$

Bài 12. Chứng minh $\triangle ABC$ đều khi thoả mãn

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \quad (*).$$

Hướng dẫn giải.

Ta có

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc}.$$

$$S = \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}.$$

Thay vào (*) ta được

$$a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ac} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{bc + ac + ab}{abc}.$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab = 0.$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0.$$

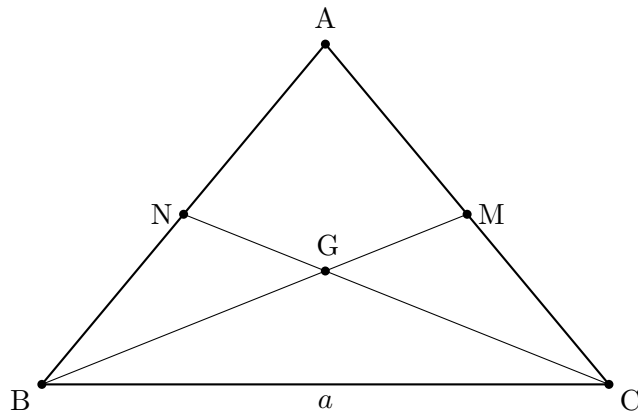
$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a-b)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(a-c)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(b-c)^2}_{\geq 0} = 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} a-b=0. \\ a-c=0. \\ b-c=0. \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều (đpcm)}.$

Bài 13. Cho tam giác ABC . Chứng minh điều kiện cần và đủ để 2 đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Hướng dẫn giải.



Gọi $BM \cap CN = G$ là trọng tâm $\triangle ABC$.

Vì $\triangle BCG$ vuông tại G ($CN \perp BM$) nên

$$BC^2 = BG^2 + CG^2.$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2.$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right) + \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right).$$

$$\Leftrightarrow 9a^2 = 4 \cdot \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} + 4 \cdot \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

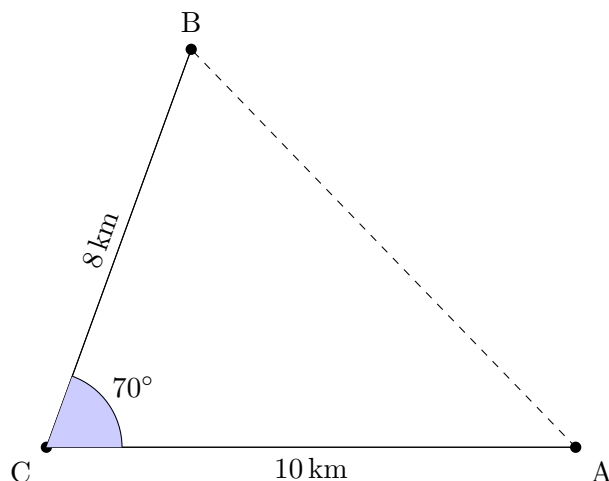
$$\Leftrightarrow 9a^2 = 4a^2 + c^2 + b^2.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2.$$

ỨNG DỤNG HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài 14. Để lắp đường dây điện cao thế từ vị trí A đến vị trí B , do phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10 km, sau đó nối đường dây từ vị trí C đến vị trí B dài 8 km. Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 70° . Tính chiều dài tăng thêm vì không thể nối trực tiếp từ A đến B .



Hướng dẫn giải.

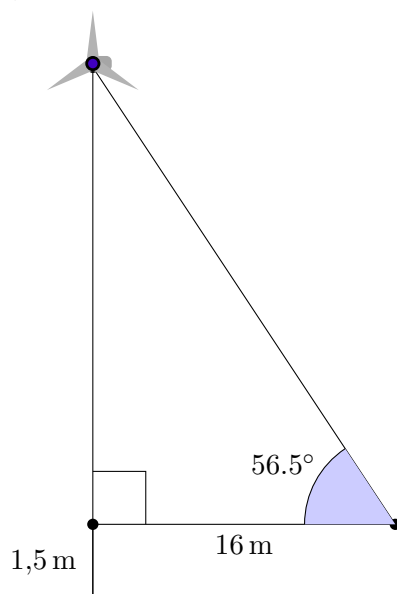
Áp dụng định lí cosin trong $\triangle ABC$, ta có

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \widehat{ACB} = 10^2 + 8^2 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos 70^\circ \approx 109,28.$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{109,28} \approx 10,45.$$

Vậy chiều dài tăng thêm: $AC + CB - AB \approx 7,55$ km.

Bài 15. Một người đứng cách thân một cái quạt gió 16 m và nhìn thấy tâm của cánh quạt với góc nâng $56,5^\circ$. Tính khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất. Cho biết khoảng cách từ mắt của người đó đến mặt đất là 1,5 m.



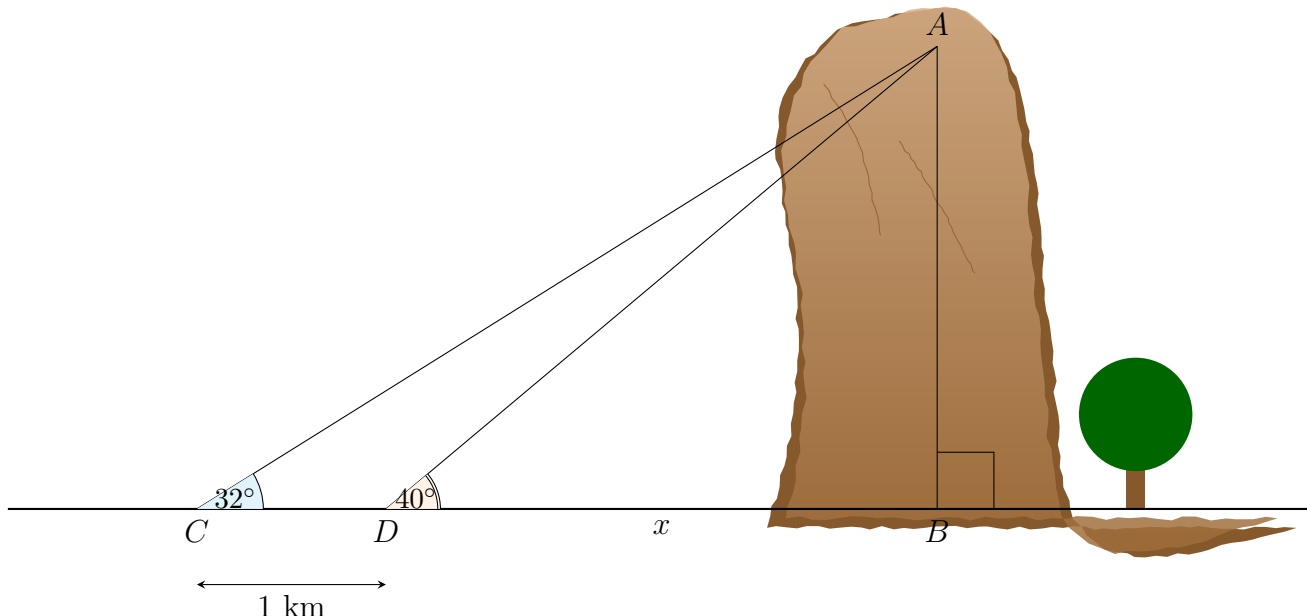
Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC vuông tại C , ta có, ta có

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \tan \widehat{ABC} = 16 \cdot \tan 56,5^\circ \approx 24,17 \text{ m.}$$

Vậy khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất là $AD = AC + CD \approx 24,17 + 1,5 \approx 25,67 \text{ m.}$

Bài 16. Tính chiều cao AB của một ngọn núi. Biết tại hai điểm C, D cách nhau 1 km trên mặt đất (B, C, D thẳng hàng), người ta nhìn thấy điểm A của núi với góc nâng lần lượt là 32° và 40° .



Hướng dẫn giải.

Ta có

$$\widehat{ADB} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} \Rightarrow \widehat{DAC} = 40^\circ - 32^\circ = 8^\circ.$$

Áp dụng định lí sin cho $\triangle ACD$

$$\frac{AD}{\sin C} = \frac{CD}{\sin \widehat{CAD}} \Rightarrow AD = \frac{CD \cdot \sin C}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{1 \cdot \sin 32^\circ}{\sin 8^\circ} = \frac{\sin 32^\circ}{\sin 8^\circ}.$$

Xét $\triangle ABD$ vuông tại B có

$$\sin \widehat{ADB} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB = AD \cdot \sin \widehat{ADB} = \frac{\sin 32^\circ}{\sin 8^\circ} \cdot \sin 40^\circ \approx 2,45.$$

VECTƠ

Mục lục của chương

Chuyên đề 1. Khái niệm vectơ	82
Chuyên đề 2. Tổng và hiệu của hai vectơ	86
Chuyên đề 3. Tích của vectơ với 1 số	94
Chuyên đề 4. Tích vô hướng của hai vectơ	104
Chuyên đề 5. Vectơ trong mặt phẳng tọa độ	110

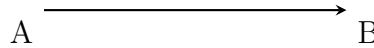
1 KHÁI NIỆM VECTƠ

I. LÝ THUYẾT VECTƠ VÀ CÁC KHÁI NIỆM

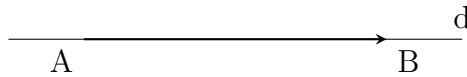
Nhắc lại kiến thức về lý thuyết vectơ và các khái niệm

- ◇ Đường thẳng không có điểm đầu và không có điểm kết thúc.
- ◇ Tia có điểm đầu và kéo dài chỉ có một đầu.
- ◇ Đoạn thẳng có điểm đầu và điểm cuối.
- ◇ Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Ví dụ: $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu là A , điểm cuối là B .



- ◇ Giá của vectơ là đường thẳng đi qua A, B .



- ◇ Nếu không cần chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối thì ta có thể kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \dots$
- ◇ Vectơ không $\vec{0}$ có điểm đầu trùng với điểm cuối.

Ví dụ: $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}$.

🔥 Ví dụ 1



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Lập được 2 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) từ hai điểm A, B .
- b) Lập được 5 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) từ ba điểm A, B, C .
- c) Lập được 12 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) từ bốn điểm A, B, C, D .
- d) Lập được 380 vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) từ 20 điểm bất kì phân biệt.

🔪 *Lời giải.*

- a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ (đúng).
- b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ (sai).
- c) A, B, C, D đều có 3 vectơ (đúng).
- d) $20 = 1 + 19$ có $19 \cdot 20 = 380$ vectơ (đúng).



n điểm có $(n - 1) \cdot n$ vectơ khác $\vec{0}$.

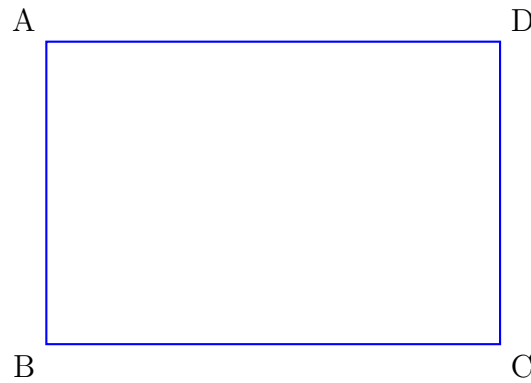
🔥 Ví dụ 2



Cho hình chữ nhật $ABCD$, biết $AB = 6, BC = 10$. Tính

- a) $|\overrightarrow{CD}|, |\overrightarrow{AD}|$.
- b) $|\overrightarrow{AC}|$.
- c) $|\overrightarrow{AG}|$ với G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải.



a) $|\overrightarrow{CD}| = CD = AB = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = AD = BC = 10$.

b)

Xét $\triangle ABC$, $\widehat{B} = 90^\circ$.

Pytago: $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 10^2} = 2\sqrt{34}$.

c)

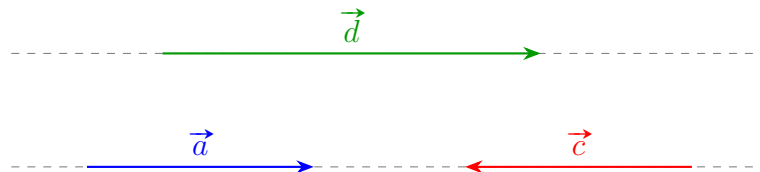
$|\overrightarrow{AG}| = AG = \frac{2}{3}AM$.

$\triangle ABM$ có $AM = \sqrt{AB^2 + BM^2} = \sqrt{61} \Rightarrow AG = \frac{2}{3}\sqrt{61}$.

II. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG - CÙNG HƯỚNG

Nhắc lại khái niệm về hai vectơ cùng phương - cùng hướng

- ◇ Giá của 2 vectơ mà song song hoặc trùng nhau thì hai vectơ đó cùng phương.
- ◇ Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.



Ví dụ: $\vec{a}, \vec{d}$ cùng hướng, $\vec{a}, \vec{c}$ ngược hướng.

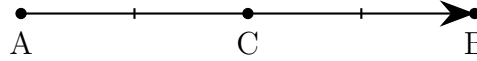
$\vec{0}$ cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ khác.

Ví dụ 3

Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng $\overrightarrow{BC}$.
- b) $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}$.
- c) $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\overrightarrow{BC}$.
- d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.
- e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$.
- f) $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{BC}|$.

Lời giải.



- a) sai. b) đúng. c) đúng. d) sai. e) đúng. f) đúng.

III. HAI VECTƠ BẰNG NHAU - ĐỐI NHAU

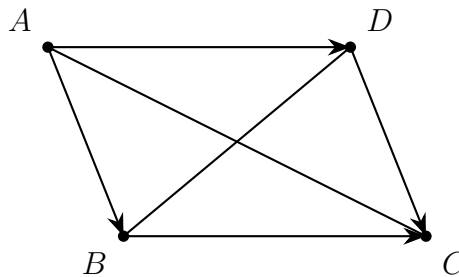
Ví dụ 4



Cho hình bình hành $ABCD$. Các mệnh đề sau đúng hay sai:

- a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. b) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.
 c) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. d) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
 e) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. f) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$.

Hướng dẫn giải.



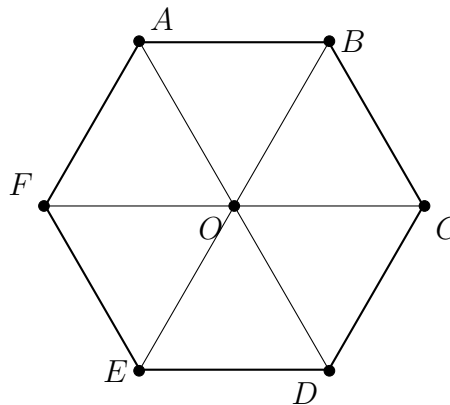
- a) sai. b) đúng. c) sai. d) đúng. e) đúng. f) sai.

Ví dụ 5



Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Có 3 vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$ mà có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh hoặc tâm của lục giác đều.
 b) Có 5 vector (khác vector $\vec{0}$) cùng phương với vector $\overrightarrow{ED}$ mà có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lục giác đều.
 c) Có 4 vector (khác vector $\vec{0}$) cùng hướng với vector $\overrightarrow{FC}$ mà có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh hoặc tâm của lục giác đều.



- d) Có 5 vector (khác vector $\vec{0}$)

Lời giải.

- a) $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ (đúng).
 b) $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}$ (đúng).
 c) $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$ (đúng).
 d) $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EF}$ (sai).

Ví dụ 6

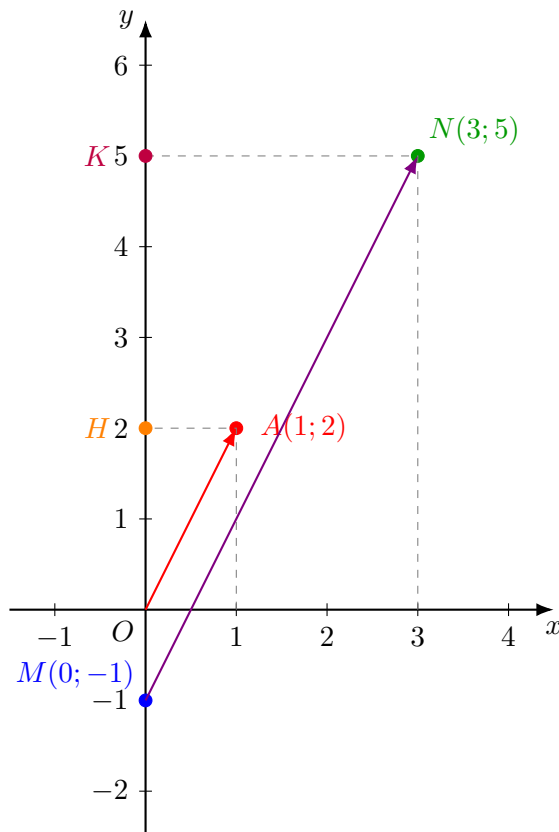


Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$ với $A(1; 2), M(0; -1), N(3; 5)$.

a) Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vectơ trên.

b) 1 vật thể khởi hành từ M , chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn với vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N ?

Lời giải.

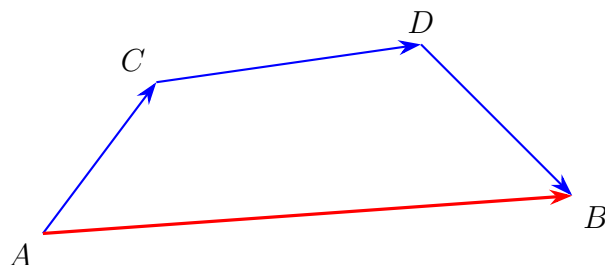


- a)
 $\triangle OHA, \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow \tan \widehat{HOA} = \frac{HA}{OH} = \frac{1}{2}$.
 $\triangle KMN, \hat{K} = 90^\circ \Rightarrow \tan \widehat{KMN} = \frac{KN}{KM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
 $\Rightarrow \widehat{HOA} = \widehat{KMN}$ mà chúng đồng vị $\Rightarrow \overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.
 $\Rightarrow \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$ cùng hướng (vì $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$ cùng chiều mũi tên).
- b)
 $OA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, MN = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5} \Rightarrow MN = 3OA$.
 Vậy sau $3h$ sẽ tới.

2 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

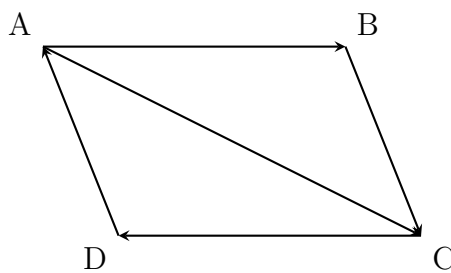
Quy tắc chèn điểm



$$\diamond \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.$$

$$\diamond \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}.$$

Quy tắc hình bình hành



$$\diamond \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Tính chất

$$\diamond \text{ Giao hoán: } \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$$

$$\diamond \text{ Kết hợp: } (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} = (\vec{c} + \vec{b}) + \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$$

$$\diamond \text{ Cộng vectơ } \vec{0}: \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$$

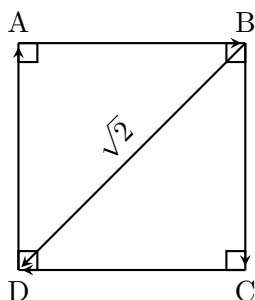
BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vectơ.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.



$$a) |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{2}.$$

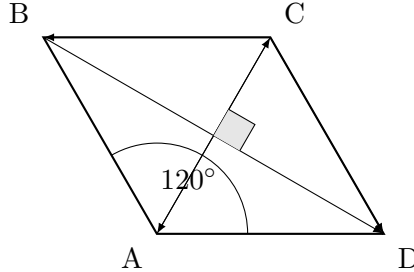
$$b) |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = BD = \sqrt{2}.$$

Bài 2. Cho hình thoi $ABCD$ với độ dài cạnh bằng 1 và $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Tính độ dài vectơ.

$$a) \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}.$$

$$b) \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}.$$

Hướng dẫn giải.

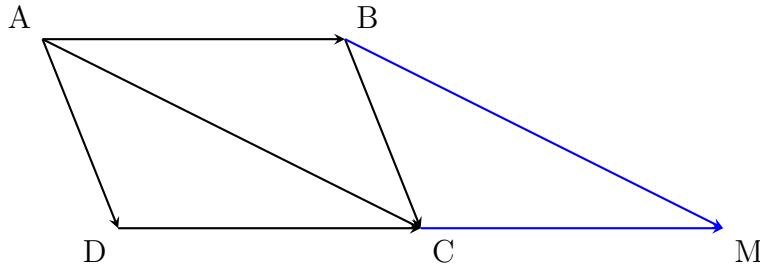


$$a) |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = 1 (\triangle ABC \text{ đều}).$$

$$b) |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = 1.$$

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

Hướng dẫn giải.



$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC} \text{ (quy tắc hình bình hành).}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} \parallel \overrightarrow{AC}. \\ |\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AC}|. \end{cases}$$

Khi đó $ABMC$ là hình bình hành.

$$\text{Vì } \begin{cases} CM \parallel AB, CM = AB. \\ CD \parallel AB, CD = AB. \end{cases} \Rightarrow C \text{ là trung điểm của } DM.$$

$\Rightarrow$ vectơ $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}$ có cùng độ dài nhưng ngược hướng.

$\Rightarrow \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}$ là 2 vectơ đối nhau.



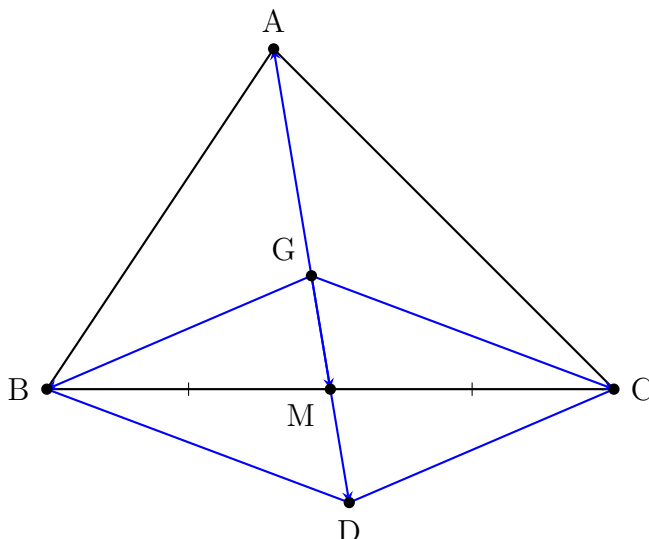
Tổng 2 vectơ đối nhau thì bằng 0.

Bài 4. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm của BC và D là điểm đối xứng của G qua M . Chứng minh:

$$a) \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}.$$

$$b) \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Hướng dẫn giải.



a)

Xét tứ giác $GBDC$ có M là trung điểm của BC và $GD \Rightarrow GBDC$ là hình bình hành.
 $\Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

b)

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Vì $\begin{cases} GA = GD (= 2GM). \\ \overrightarrow{GA} \uparrow \downarrow \overrightarrow{GD}. \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GD} \text{ là 2 vectơ đối nhau} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$



G là trọng tâm của $\triangle ABC$ thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

II. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

Nhắc lại kiến thức về hiệu của hai vectơ

$$\diamond \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

$$\text{Ví dụ: } \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

$$\diamond \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{KA}. \quad \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} \text{ (chung đầu, lộn ngược).}$$

BÀI TẬP

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$ và O là giao của 2 đường chéo. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

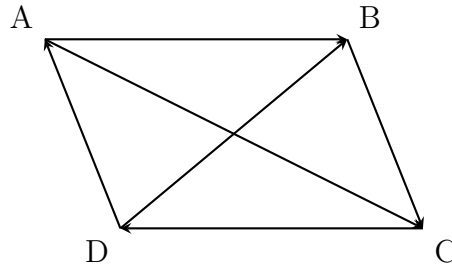
a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|.$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}.$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO}.$

d) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}.$

Hướng dẫn giải.

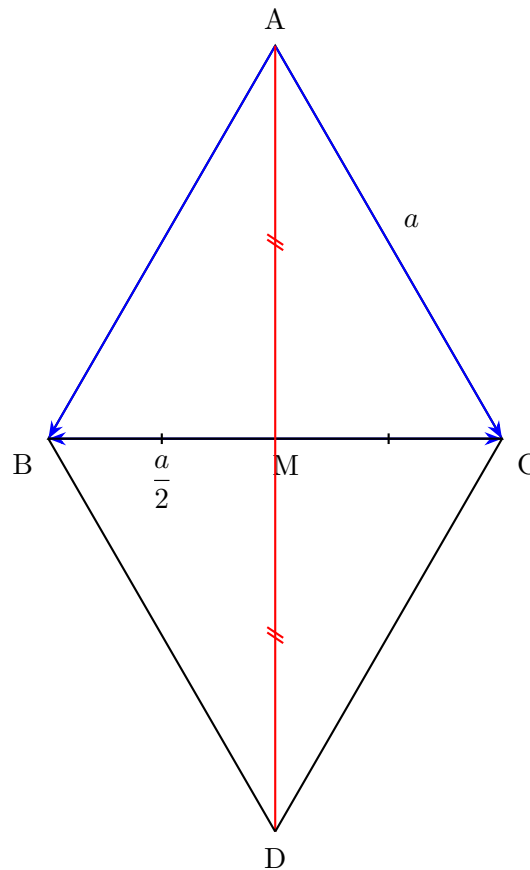


- a) đúng. b) sai. c) đúng. d) đúng.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài của các cạnh.

- a) $|\vec{AB} - \vec{AC}|$ b) $|\vec{AC} - \vec{BC}|$ c) $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

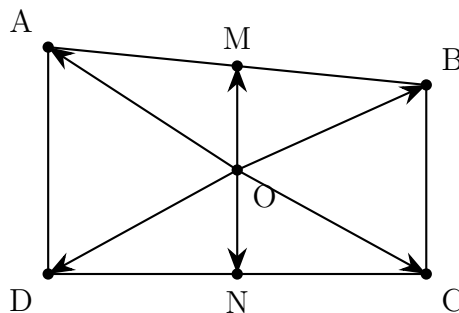
Hướng dẫn giải.



- a) $|\vec{AB} - \vec{AC}| = |\vec{CB}| = CB = a.$
 b) $|\vec{AC} - \vec{BC}| = |\vec{AC} + (-\vec{BC})| = |\vec{AC} + \vec{CB}| = |\vec{AB}| = AB = a.$
 c) $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = |2\vec{AM}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ (quy tắc trung tuyến).

Bài 7. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N là trung điểm của AB và CD . Gọi O là trung điểm của MN . Chứng minh rằng $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 2\vec{OM} + 2\vec{ON} = 2(\vec{OM} + \vec{ON}) = 2\vec{0} = \vec{0}.$$

III. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Chứng minh biểu thức A=B

♦ 3 cách: chuyển vế sau đó biến đổi, biến đổi VT thành VP, biến đổi VP thành VT.

Bài 8. Chứng minh các biểu thức sau bằng nhau:

- a) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} = \vec{CB} + \vec{ED}.$
 b) $\vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} = \vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}.$

Hướng dẫn giải.

a)

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} &= \vec{CB} + \vec{ED}. \\ \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EA} - \vec{CB} - \vec{ED} &= \vec{0}. \\ \Leftrightarrow \vec{AB} + (\vec{CD} - \vec{CB}) + (\vec{EA} - \vec{ED}) &= \vec{0}. \\ \Leftrightarrow \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DA} &= \vec{0}. \\ \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{DA} &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AA} = \vec{0}. \end{aligned}$$

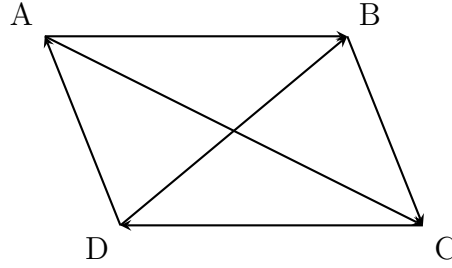
b)

$$\begin{aligned} \vec{AC} + \vec{CD} - \vec{EC} &= \vec{AE} - \vec{DB} + \vec{CB}. \\ \Leftrightarrow \vec{AD} - \vec{EC} - \vec{AE} + \vec{DB} - \vec{CB} &= \vec{0}. \\ \Leftrightarrow (\vec{AD} - \vec{AE}) + \vec{DB} - (\vec{EC} + \vec{CB}) &= \vec{0}. \\ \Leftrightarrow \vec{ED} + \vec{DB} - \vec{EB} &= \vec{0}. \\ \Leftrightarrow \vec{EB} - \vec{EB} &\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Bài 9. Cho ABCD là hình bình hành. Chứng minh các biểu thức sau bằng nhau:

- a) $\vec{BA} + \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{0}.$
 b) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}.$

Hướng dẫn giải.

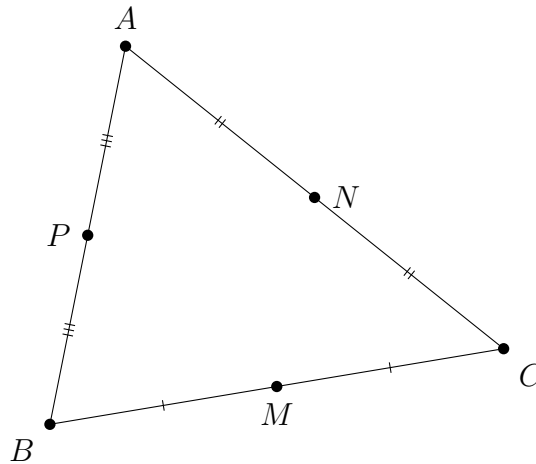


- a)
$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$$
- b)
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Bài 10. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh

- a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$
 b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$
 c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.$

Hướng dẫn giải.



- a)
$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PP} = \vec{0}.$$
- b)
$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} + (-\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}.$$
- c)
$$\begin{aligned} &\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OP}) = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Dạng 2: Tính độ dài vector

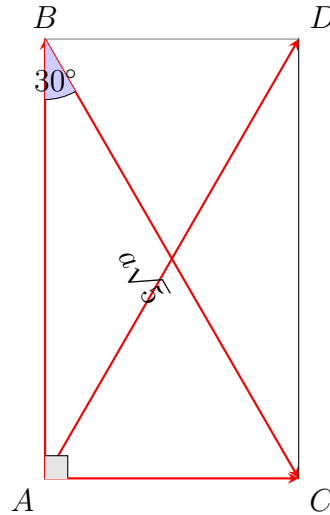
- ◇ $|\overrightarrow{AB}| = AB, |\vec{0}| = 0.$
 ◇ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AB + AC$ (sai).

◇ $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ biến đổi về 1 vectơ.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vectơ:

- a) $\vec{AB} + \vec{BC}$. b) $\vec{AC} - \vec{BC}$. c) $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Hướng dẫn giải.



a)

$$|\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\sin 30^\circ = \frac{AC}{a\sqrt{5}} \Rightarrow AC = a\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

b)

$$|\vec{AC} - \vec{BC}| = |\vec{AC} + \vec{CB}| = |\vec{AB}| = AB.$$

$$\text{Pytago: } BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow 5a^2 - \frac{5a^2}{4} = AB^2 \Rightarrow AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

c)

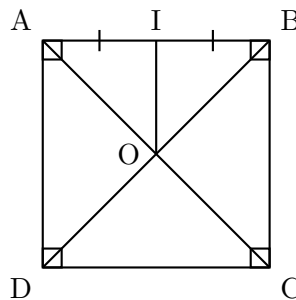
$$|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = BC = a\sqrt{5} \text{ (vì } ABCD \text{ là hình chữ nhật)}.$$

Bài 12. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a . M là một điểm bất kì.

a) Tính $|\vec{AB} + \vec{AD}|$, $|\vec{OA} - \vec{CB}|$, $|\vec{CD} - \vec{DA}|$.

b) Chứng minh $\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD}$ không phụ thuộc vị trí M . Tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

Hướng dẫn giải.



a)

$$|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC.$$

$$\text{Pytago: } AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}.$$

$$|\vec{OA} - \vec{CB}| = |\vec{OA} + \vec{BC}| = |\vec{OA} + \vec{AD}| = |\vec{OD}| = OD = \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = AC = a\sqrt{2}.$$

b)

$$\vec{u} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} \text{ (không phụ thuộc } M).$$

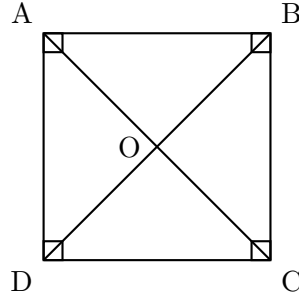
$$|\vec{u}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB}| = |2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2 \cdot 2|\overrightarrow{OI}| = 4OI = 4 \cdot \frac{AD}{2} = 2a.$$

Bài 13. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a . M là một điểm bất kì.

a) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|$, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$.

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Hướng dẫn giải.



a)

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{OC}| = OC = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}| = |\vec{0}| = 0.$$

b)

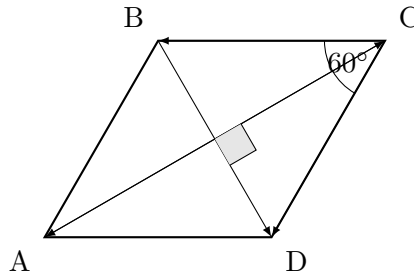
$$\vec{u} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CD} \Rightarrow |\vec{u}| = |2\overrightarrow{CD}| = 2a.$$

Bài 14. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BCD} = 60^\circ$. Gọi O là tâm hình thoi. Tính

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

b) $|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}|$.

Hướng dẫn giải.



a)

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AO}| = 2AO.$$

$$\triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

b)

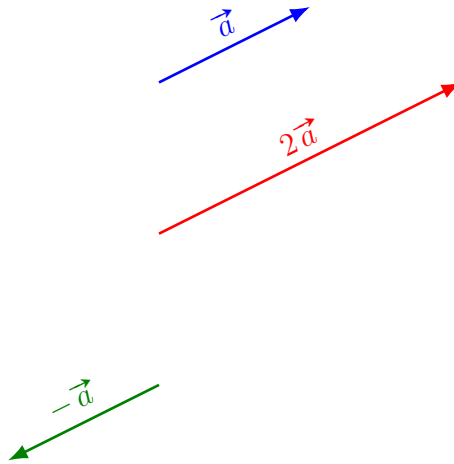
$$|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{OA}| = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

3 TÍCH CỦA VECTƠ VỚI 1 SỐ

I. LÝ THUYẾT

Nhắc lại kiến thức về tích của vectơ với 1 số

- ◇ Cho $\vec{a}$, vẽ $2\vec{a}$ và $-\vec{a}$. Khi đó $k \cdot \vec{a}$ thì
 - $k > 0 \Rightarrow$ vectơ mới cùng chiều với $\vec{a}$.
 - $k < 0 \Rightarrow$ vectơ mới ngược chiều với $\vec{a}$.
- ◇ $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$.

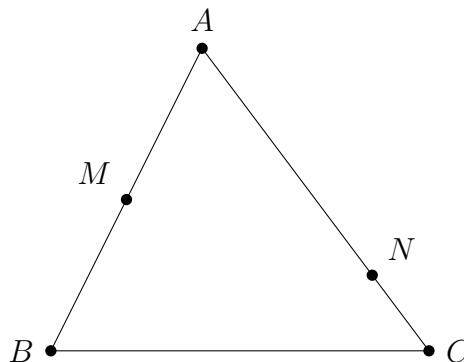


Ví dụ 7

Cho tam giác ABC , $N \in AC$, $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$, M là trung điểm AB . Tính

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| a) $\vec{AM} = ? \vec{AB}$. | b) $\vec{MB} = ? \vec{BA}$. |
| c) $\vec{MA} = ? \vec{MB}$. | d) $\vec{AB} = ? \vec{MB}$. |
| e) $\vec{AN} = ? \vec{AC}$. | f) $\vec{AC} = ? \vec{NC}$. |
| g) $\vec{CN} = ? \vec{AN}$. | h) $\vec{NA} = ? \vec{AC}$. |

Lời giải.



a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

c) $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

d) $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{MB}$.

e) $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

f) $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{NC}$.

g) $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$.

h) $\overrightarrow{NA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 8



Cho tam giác ABC , M bất kì, G là trọng tâm. Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}.$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}.$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3\overrightarrow{MG} \text{ (vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC).$$

Ví dụ 9



Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M bất kì. Chứng minh

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}.$$

Lời giải.

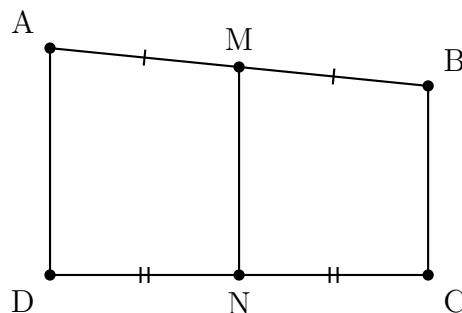
$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{MO} + \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})}_{=\vec{0}} + \underbrace{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})}_{=\vec{0}}.$$

Ví dụ 10



Cho tứ giác $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AB và CD . Chứng minh $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.



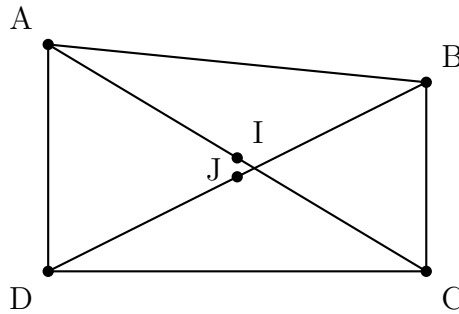
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}) = 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}) \\ &= 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CN}) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}. \end{aligned}$$

Ví dụ 11



Cho tứ giác $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AC và BD . Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Hướng dẫn giải.



$$VT = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}) = 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CI}) + (\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD}) = 2\overrightarrow{CI} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{CI}.$$

Ví dụ 12



Chứng minh nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và $A'B'C'$ thì

$$3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}.$$

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}.$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}.$$

$$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Ví dụ 13



Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$. Chứng minh nếu $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ thì hai tam giác đó cùng trọng tâm.

Lời giải.

Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$, ta cần chứng minh $G \equiv G' \Leftrightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.

$$VT = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}).$$

$$= 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'} + \vec{0} + \vec{0} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

Theo giả thiết, ta có $\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'$ (đpcm).

Ví dụ 14

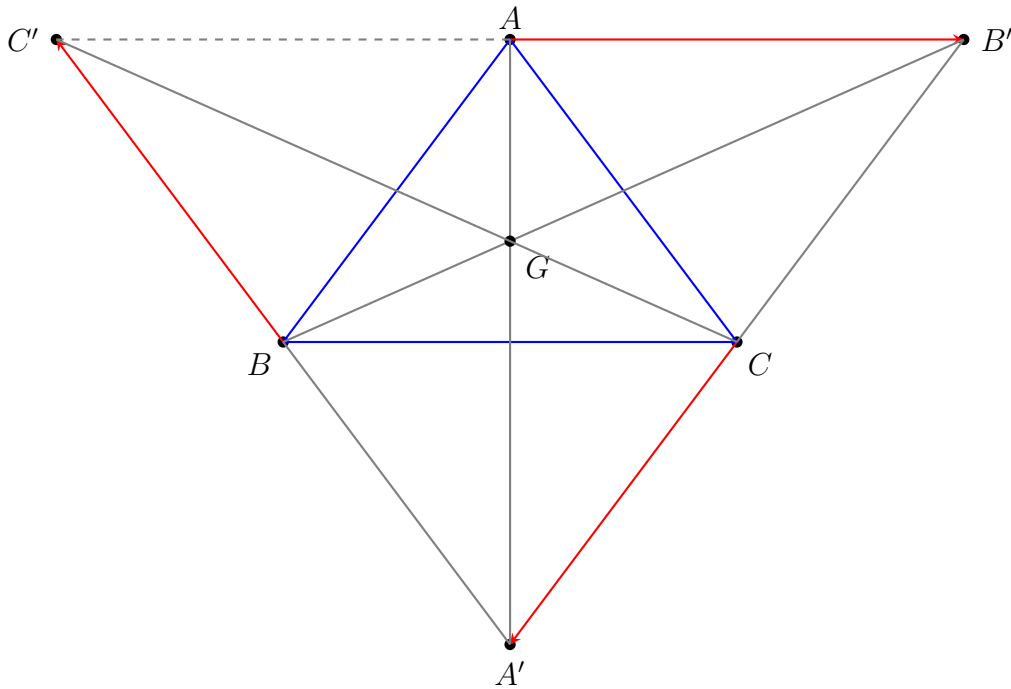


Cho tam giác ABC . Đặt $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$.

a) Chứng minh A là trung điểm của BC .

b) Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Lời giải.



a) Ta cần chứng minh $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0}$.

Ta có

$$\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}.$$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA} \Rightarrow ACBC' \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CB}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ (luôn đúng).}$$

b)

Chứng minh tương tự ta được C là trung điểm của $A'B'$, B là trung điểm của $A'C'$.

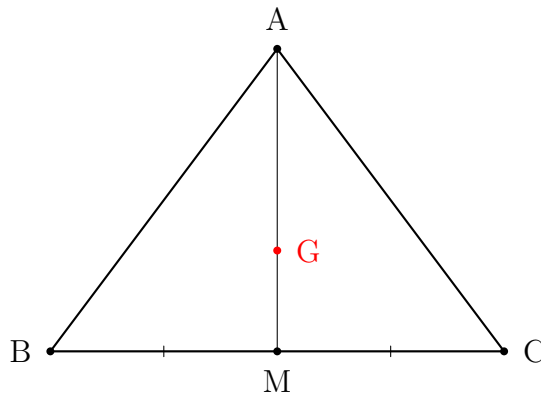
$\Rightarrow AA', BB', CC'$ là 3 đường trung tuyến của $\triangle A'B'C'$ đồng quy tại G .

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Cho dữ kiện độ dài $\Rightarrow$ vẽ hình

◇ Biểu diễn $\vec{a} = x\vec{m} + y\vec{n}$.

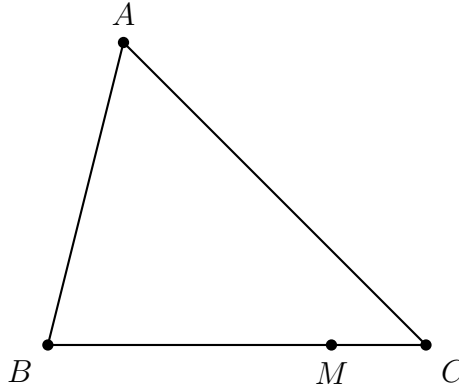
Ví dụ: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ hoặc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$.



$$\diamond \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}, \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Bài 15. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 3MC$. Khi đó điểm biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

Hướng dẫn giải.



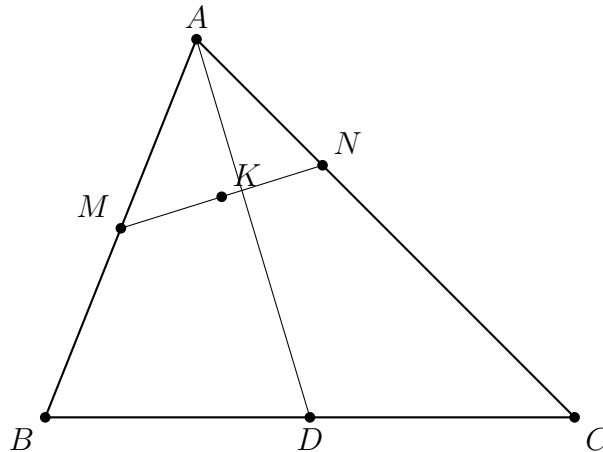
Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Bài 16. Cho tam giác ABC với M là trung điểm của AB , $N \in AC$ sao cho $NC = 2NA$. Gọi K là trung điểm của MN , D là trung điểm của BC .

a) Tính $\overrightarrow{AK}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{KD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải.



a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Bài 17. Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

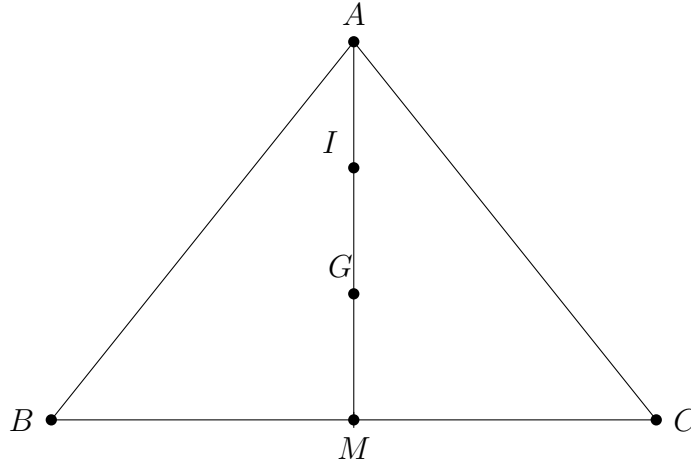
a) Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{CG}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

c) Biểu diễn $\overrightarrow{AI}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$ với I là trung điểm AG .

d) Biểu diễn $\overrightarrow{CI}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

Hướng dẫn giải.



a)

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA}) = \frac{1}{3}(\vec{b} - 2\vec{a}).$$

$$\text{b) } \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - 2\vec{a}) = \frac{3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a}}{3} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}.$$

$$\text{c) } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{b} - 2\vec{a}}{3} = \frac{\vec{b} - 2\vec{a}}{6}.$$

$$\text{d) } \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = \vec{a} + \frac{\vec{b} - 2\vec{a}}{6} = \frac{4\vec{a} + \vec{b}}{6}.$$

Dạng 2: Cho dữ kiện vectơ $\Rightarrow$ chèn điểm

Bài 18. Cho tam giác ABC , $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Biểu diễn $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Chèn } C: \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI} = 2(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CI}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}.$$

Bài 19. Cho tam giác ABC , $I \in BC$ sao cho $\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Tính $\overrightarrow{AI}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{Chèn } A: \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AI} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}.$$

Bài 20. Cho tam giác ABC , I thỏa mãn $5\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MB}$. Nếu $\overrightarrow{IA} = m\overrightarrow{IM} + n\overrightarrow{IB}$ thì cặp (m, n) bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Chèn I

$$5(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IM}) = 2(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IM}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} - 5\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IM}.$$

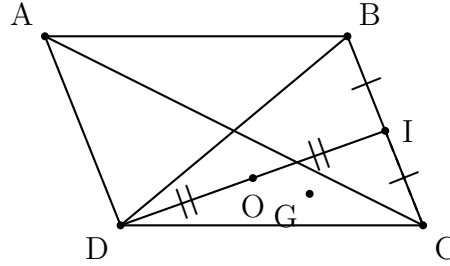
$$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IM} + \frac{2}{5}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{5} \\ n = \frac{2}{5} \end{cases}.$$

Bài 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

a) Biểu diễn $\overrightarrow{DI}$ theo 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ với I là trung điểm BC .

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ với G là trọng tâm $\triangle CDI$.

Hướng dẫn giải.



a)
$$\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}).$$

b)

Lấy O là trung điểm của DI .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{CO} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CD}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \vec{a} \right) = \vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}.\end{aligned}$$

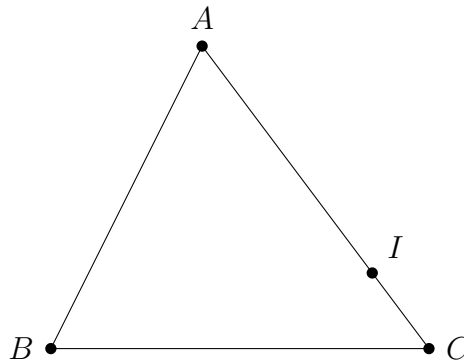
Dạng 3: Chứng minh ba điểm thẳng hàng



♦ A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ hoặc $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

Bài 22. Cho tam giác ABC , $I \in AC$ sao cho $CI = \frac{1}{4}CA$, J thỏa $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Chứng minh B, I, J thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



Ta có

$$\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BJ}.$$

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad (1).$$

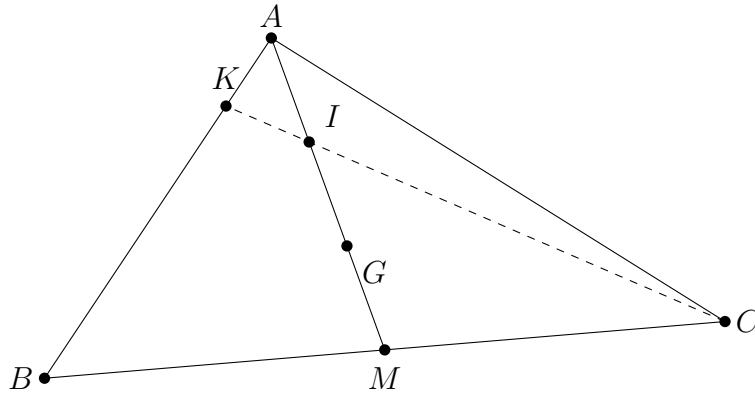
$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow k = \frac{-\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}}{-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow B, I, J \text{ thẳng hàng}.$$

Bài 23. Cho tam giác ABC với trọng tâm G . Gọi I là trung điểm của đoạn AG và K là điểm

trên cạnh AB sao cho $AK = \frac{1}{5}AB$. Chứng minh C, I, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



Ta có

$$\overrightarrow{CI} = k\overrightarrow{CK}.$$

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AC} \quad (1).$$

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad (2).$$

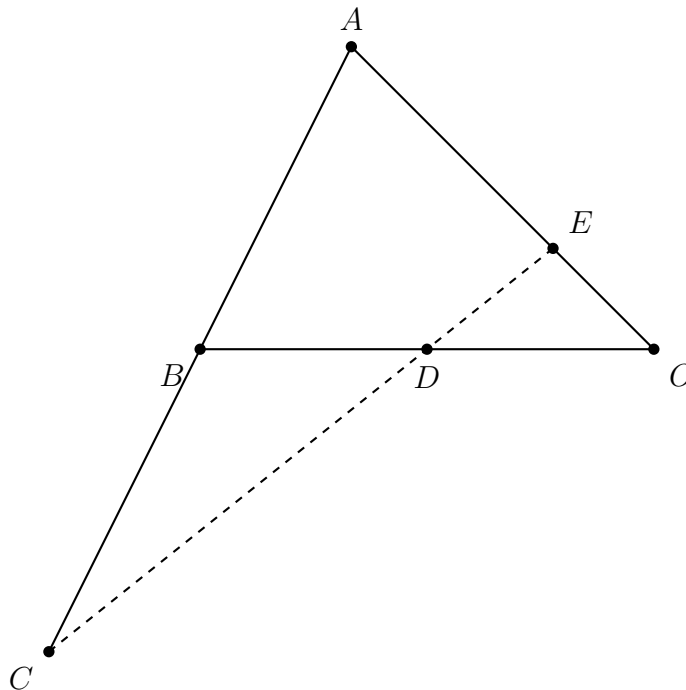
$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow k = \frac{\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AC}}{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}} \Rightarrow k = \frac{5}{6} \Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CK} \Rightarrow C, I, K \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 24. Cho tam giác ABO , các điểm C, D, E lần lượt nằm trên AB, BO, OA sao cho

$$AC = 2AB, OD = \frac{1}{2}OB, OE = \frac{1}{3}OA$$

Chứng minh C, D, E thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



Ta có

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{CE}.$$

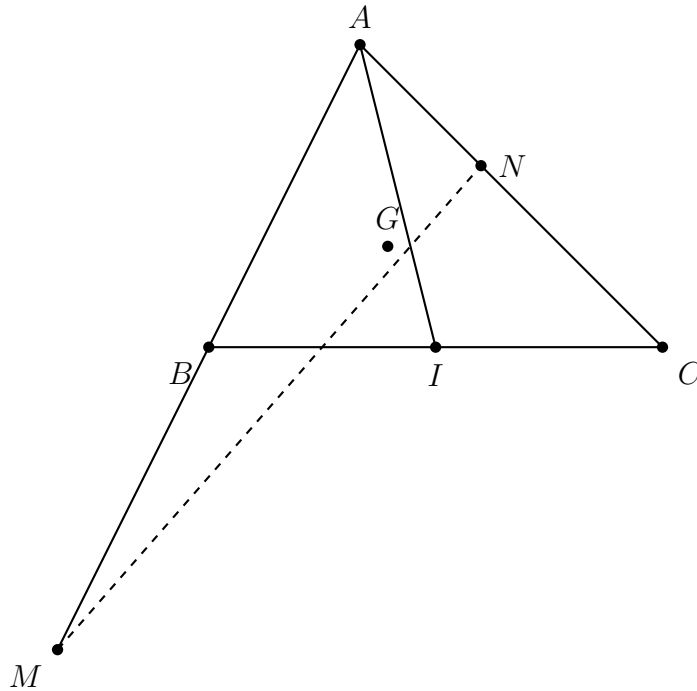
$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} \quad (1).$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow k = \frac{-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AO}}{-2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CE} \Rightarrow C, D, E \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 25. Cho tam giác ABC với trọng tâm G và hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Chứng minh M, G, N thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



Ta có
 $\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{MN}$.

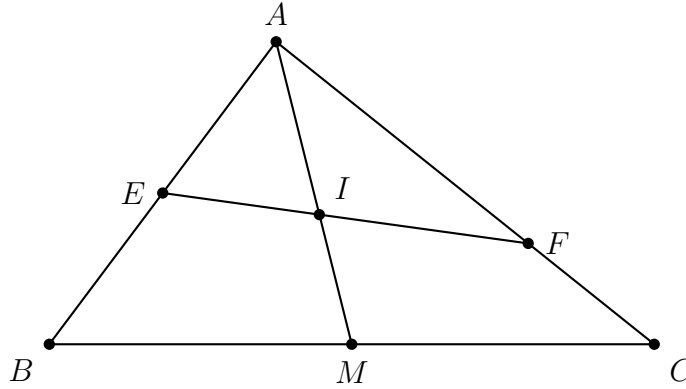
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = -2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ &= -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad (1). \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow k = \frac{5}{6} \Rightarrow \overrightarrow{MG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{MN} \Rightarrow M, G, N \text{ thẳng hàng.}$$

Bài 26. Cho tam giác ABC có E là trung điểm AB . Điểm F thuộc AC sao cho $AF = 2FC$. Gọi M là trung điểm BC , $I \in EF$ sao cho $4EI = 3FI$. Chứng minh A, M, I thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



Ta có
 $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AI}$.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AC} \quad (2). \end{aligned}$$

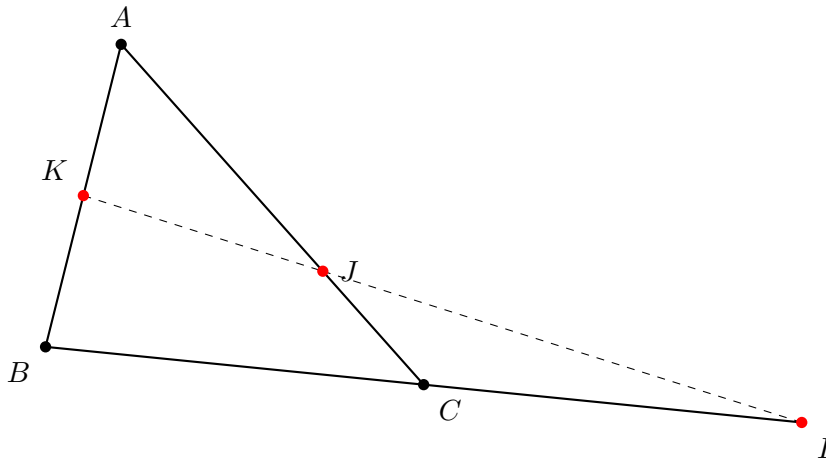
Từ (1), (2) $\Rightarrow k = \frac{7}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AI} \Rightarrow A, I, M$ thẳng hàng.

Bài 27. Cho tam giác ABC với I, J, K lần lượt được xác định bởi

$$\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{JC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$$

Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

Hướng dẫn giải.



Ta có
 $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{JK}$.

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \quad (1).$$

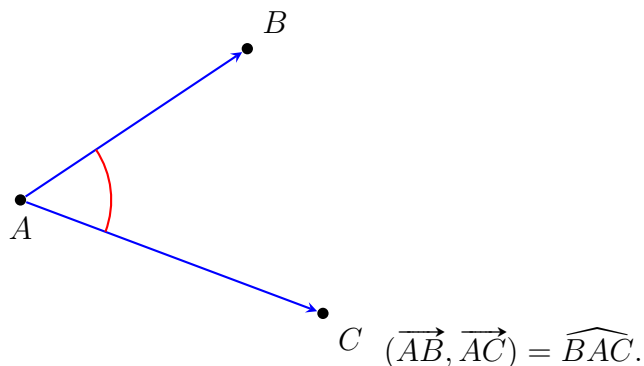
$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (2).$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow k = 2 \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{JK} \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng.

4 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Nhắc lại kiến thức về góc giữa hai vectơ



◇ $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$

◇ $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ.$

◇ $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ.$

◇ $0^\circ \leq (\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ.$

Mẹo xác định góc có 1 điểm chung

◇ Chung điểm $\Rightarrow$ góc đó.

◇ Cùng vị trí $\Rightarrow$ góc đó.

◇ Khác vị trí $\Rightarrow 180^\circ -$ góc đó.

Ví dụ

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC}.$

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \widehat{ABC}.$

$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC}.$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB}.$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BAC}.$

🍷 Ví dụ 15



Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{B} = 60^\circ$. Xác định và tính góc giữa hai vectơ.

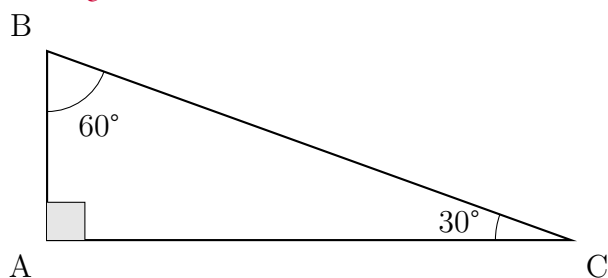
a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$

b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}).$

c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}).$

d) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}).$

🍷 *Lời giải.*



a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ$ (vì $AB \perp AC$).

b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$

c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$

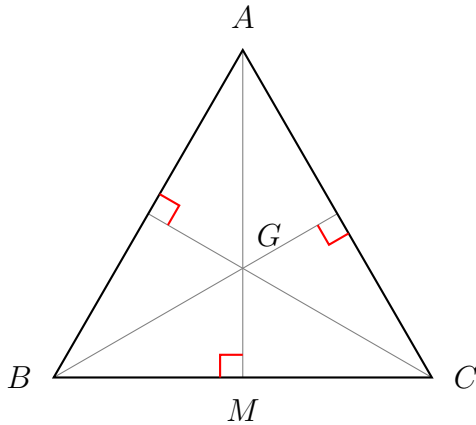
d) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$

Ví dụ 16

Cho tam giác ABC đều, M là trung điểm BC , G là trọng tâm. Xác định và tính góc giữa các vectơ.

- a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. b) $(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BC})$.
 c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$. d) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CB})$.
 e) $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MB})$. f) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC})$.
 g) $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{AB})$. h) $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$.

Lời giải.



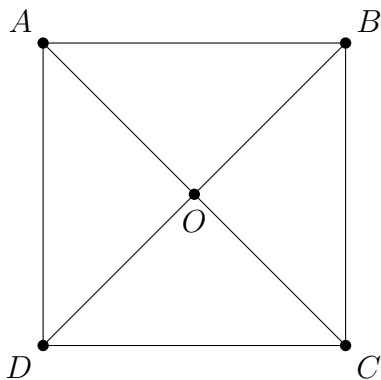
- a) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{ABC} = 60^\circ$.
 b) $(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{GBC} = 30^\circ$.
 c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{ACB} = 60^\circ$.
 d) $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ$.
 e) $(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{MB}) = 0^\circ$.
 f) $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$.
 g) $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{AB}) = 90^\circ$.
 h) $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \widehat{AGB} = 120^\circ$.

Ví dụ 17

Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , xác định và tính góc giữa hai vectơ.

- a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$.
 c) $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$. d) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC})$.
 e) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC})$. f) $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DC})$.
 g) $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO})$. h) $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC})$.

Lời giải.



- a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 180^\circ$.
 b) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ$.
 c) $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = 45^\circ$.
 d) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC}) = \widehat{ACD} = 45^\circ$.
 e) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$.
 f) $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DC}) = 180^\circ - \widehat{ODC} = 135^\circ$.
 g) $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}) = 0^\circ$.
 h) $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = 90^\circ$.

II. TÍCH VÔ HƯỚNG

Nhắc lại kiến thức về tích vô hướng



- ◇ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.
- ◇ $(\vec{a}, \vec{b})$ nhọn $\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$.
- ◇ $(\vec{a}, \vec{b})$ tù $\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) < 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.
- ◇ $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- ◇ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán).
- ◇ $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất kết hợp).
- ◇ $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = (k\vec{b}) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$.

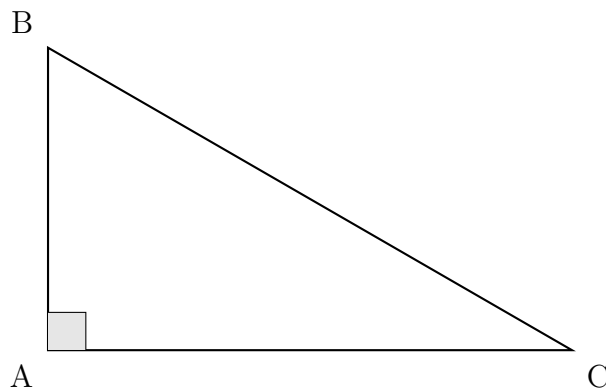
Ví dụ 18



Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Tính các tích vô hướng.

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$. c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Lời giải.



- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos 90^\circ = 0$.
- b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = -\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos(\vec{CA}, \vec{CB}) = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$.
- c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = -a \cdot 2a \cdot \frac{a}{2a} = -a^2$.

Ví dụ 19



Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tính các tích vô hướng.

- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$. b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB}$. c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$.

Lời giải.

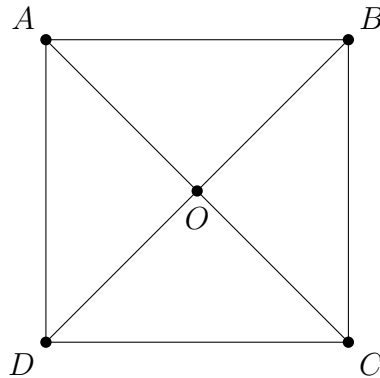
- a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.
- b) $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = -\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \cdot \cos(\vec{CA}, \vec{CB}) = -\frac{a^2}{2}$.
- c) $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}$.

Ví dụ 20

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các giá trị biểu thức sau:

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$.
- $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$.

Lời giải.



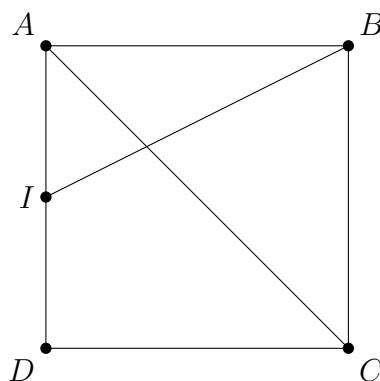
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2$.
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \widehat{ACB} = a^2$.
- $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC} \cdot (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \cdot BC \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a^2$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$.
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = 2\overrightarrow{AC} \cdot 2\overrightarrow{AD} = 4 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 4 \cdot 0 = 0$ (vì $AC \perp BD$).

Tính góc khó thông qua tích vô hướng

Ví dụ 21

Cho hình vuông $ABCD$ có I là trung điểm của AD . Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI})$.

Lời giải.



$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BI}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BI}|} \quad (1).$$

Đặt cạnh = 1. Ta có

$$|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2} \quad (2).$$

$$BI = \sqrt{AI^2 + AB^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad (3).$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \cdot AI \cdot \cos 45^\circ - AC \cdot AB \cdot \cos 45^\circ = -\frac{1}{2} \quad (4).$$

Từ (1), (2), (3), (4) $\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BI}) = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$

III. MỘT SỐ DẠNG BÀI TẬP HAY

Dạng 1: Chứng minh đẳng thức vector

Bài 28. Tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M thì

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GB^2 + GC^2 + GA^2.$$

Hướng dẫn giải.

Vì G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$

$$\begin{aligned} VT = MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2. \\ &= (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2) + (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + GB^2) + (MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + GC^2). \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

Bài 29. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC thì $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} (*)$.

Hướng dẫn giải.

$$\begin{aligned} (*) \Leftrightarrow S_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - AB^2 \cdot AC^2 \cdot \cos^2 \widehat{BAC}}. \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 \cdot (1 - \cos^2 \widehat{BAC})} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sqrt{\sin^2 \widehat{BAC}}. \\ &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC}. \end{aligned}$$

Dạng 2: Tích vô hướng trong tam giác kết hợp với định lí cos

$$\diamond \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = AB \cdot AC \cdot \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2}.$$

$$\diamond \text{Tương tự ta có } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2}, \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2}.$$

Bài 30. Cho tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, AC = 8$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra giá trị của góc A .

b) Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

c) Gọi D là điểm trên CA sao cho $CD = 3$. Tính $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải.

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2} = 20.$$

$$\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{20}{5 \cdot 8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{b) } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{CA^2 + CB^2 - AB^2}{2} = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2} = 44.$$

$$c) \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\frac{3}{8} \overrightarrow{CA} \right) \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{3}{8} \cdot 44 = \frac{33}{2}.$$

Bài 31. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = \sqrt{2}$, $AD = 1$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.

$$\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|}.$$

$$AC = BD = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -1.$$

$$\text{Vậy } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = -\frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) \approx 109^\circ.$$

5 VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ

I. TOẠ ĐỘ ĐIỂM

Nhắc lại kiến thức toạ độ điểm

◇ Cho $M(x_M, y_M), A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. Khi đó

$$M \text{ là trung điểm của } AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

$$G \text{ là trọng tâm } \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

☕ Ví dụ 22



Cho ba điểm $A(-1; 2), B(-3; 0), C(5; 1)$.

- Tìm toạ độ vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.
- Tìm toạ độ trung điểm AB , toạ độ trung điểm AC , toạ độ trung điểm BC .
- Tìm toạ độ trọng tâm tam giác ABC .

Lời giải.

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; -2), \overrightarrow{AC} = (6; -1), \overrightarrow{BC} = (8; 1)$.

b)

Giả sử M là trung điểm $AB \Rightarrow M(-2; 1)$.

Giả sử N là trung điểm $AC \Rightarrow N\left(2; \frac{3}{2}\right)$.

Giả sử P là trung điểm $BC \Rightarrow P\left(1; \frac{1}{2}\right)$.

c) Giả sử G là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow G\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

II. TOẠ ĐỘ VECTƠ

Nhắc lại kiến thức về toạ độ vectơ

◇ Vectơ đơn vị $\begin{cases} \vec{i} = (1; 0) \\ \vec{j} = (0; 1) \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow a(x, y)$.

◇ Cho 2 vectơ bằng nhau $\begin{cases} \vec{u} = (x, y) \\ \vec{v} = (x', y') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

◇ Cho 2 vectơ cùng phương $\begin{cases} \vec{u} = (x, y) \\ \vec{v} = (x', y') \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$.

◇ Nhân vectơ với 1 số: $k\vec{u} = (kx, ky)$.

◇ Cộng trừ $\vec{u} \pm \vec{v} = (x \pm x', y \pm y')$.

◇ A, B, C thẳng hàng $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

- ◇ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = AB,$
- ◇ $\vec{u} = (x, y) \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$
- ◇ $M \in Ox \Rightarrow M(x; 0), M \in Oy \Rightarrow M(0; y).$

Ví dụ 23

Tìm tọa độ các vectơ sau trong mặt phẳng tọa độ.

- a) $\vec{a} = -\vec{i}.$
- b) $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}.$
- c) $\frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}).$
- d) $0,15\vec{i} + 1,3\vec{j}.$
- e) $\pi \cdot \vec{i} - (\cos 24^\circ)\vec{j}.$
- f) $-12\vec{j} + 3\vec{i}.$
- g) $2018\vec{i} - 2010\vec{j}.$
- h) $-\vec{j}.$

Lời giải.

- a) $\vec{a} = (-1; 0).$
- b) $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j} = (3; -4).$
- c) $\frac{1}{2}(\vec{j} - \vec{i}) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$
- d) $0,15\vec{i} + 1,3\vec{j} = (0,15; 1,3).$
- e) $\pi \cdot \vec{i} - (\cos 24^\circ)\vec{j} = (\pi; -\cos 24^\circ).$
- f) $-12\vec{j} + 3\vec{i} = (3; -12).$
- g) $2018\vec{i} - 2010\vec{j} = (2018; -2010).$
- h) $-\vec{j} = (0; -1).$

Ví dụ 24

Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm các giá trị của k để hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right), \vec{v} = (k; -4).$

$\vec{u}$ cùng phương $\vec{v} \Leftrightarrow -2 = 5k \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}.$

Ví dụ 25

Cho $\vec{a}(2; 1), \vec{b}(3; 4), \vec{c}(7; 2).$

- a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}.$
- b) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}.$
- c) Tìm các số k, l sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}.$

Lời giải.

a) $2\vec{a} = (4; 2), 3\vec{b} = (9; 12), \vec{c} = (7; 2).$
 $\Rightarrow \vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = (2; -8).$

b) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{a} = (-6; 1).$

c) Ta có $k\vec{a} = (2k; k), l\vec{b} = (3l; 4l).$
 $\Rightarrow k\vec{a} + l\vec{b} = (2k + 3l; k + 4l), \vec{c} = (7; 2).$

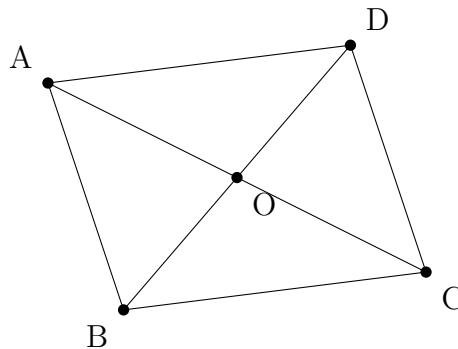
$$\text{Vì } \vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} \text{ nên } \begin{cases} 2k + 3l = 7. \\ k + 4l = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{22}{5}. \\ l = -\frac{3}{5}. \end{cases}$$

Ví dụ 26

Cho tam giác ABC có $A(-1; 3), B(2; 1), C(4; -3)$.

- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Cho điểm $M(5; -1)$. Chứng minh 3 điểm A, B, M thẳng hàng.

Lời giải.



- Ta có $\vec{AD} = (x + 1; y - 3), \vec{BC} = (2; -4)$.
 $\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = 2. \\ y - 3 = -4. \end{cases} \Rightarrow D(1; -1).$
- Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm $AC \Rightarrow O\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.
- $G\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
- $\vec{AB}$ cùng phương $\vec{AM}$ với $\begin{cases} \vec{AB} = (3; -2). \\ \vec{AM} = (6; -4). \end{cases}$

Ví dụ 27

Trong mặt phẳng Oxy , cho $A(-3; 2), B(1; 4)$. Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn $\vec{AM} = -2\vec{AB}$.

Lời giải.

Gọi $M(x, y)$. Ta có
 $\vec{AB} = (4; 2) \Rightarrow -2\vec{AB} = (-8; -4), \vec{AM} = (x + 3; y - 2)$.
 $\vec{AM} = -2\vec{AB} \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = -8. \\ y - 2 = -4. \end{cases} \Rightarrow M(-11; -2).$

Ví dụ 28

Trong mặt phẳng Oxy , cho 3 điểm $A(m - 1; 1), B(2; 6 - 2m), C(m + 1; 3)$. Tìm giá trị m để A, B, C thẳng hàng.

Lời giải.

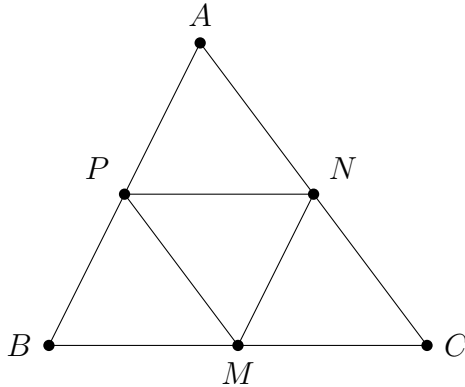
Ta có $\vec{AB} = (3 - m; 5 - 2m), \vec{AC} = (2; 2)$.

Để A, B, C thẳng hàng thì $\frac{3 - m}{2} = \frac{5 - 2m}{2} \Leftrightarrow m = 2$.

Ví dụ 29

Trong mặt phẳng Oxy , cho các điểm $M(2; -2), N(3; 1), P(4; -1)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC . Toạ độ đỉnh A là?

Lời giải.



$$\vec{AP} = (4 - x_A; -1 - y_A) \text{ và } \vec{NM} = (-1; -3).$$

$APMN$ là hình bình hành suy ra $\vec{AP} = \vec{NM}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - x_A = -1 \\ -1 - y_A = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 2 \end{cases}$$

Vậy toạ độ điểm A là $A(5; 2)$.

Ví dụ 30

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho ba điểm $A(-3; 4), B(1; 1), C(9; -5)$.

- Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.
- Tìm toạ độ điểm D sao cho A là trung điểm BD .
- Tìm toạ độ điểm E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

Lời giải.

a) Để A, B, C thẳng hàng thì $\vec{AB}$ cùng phương $\vec{AC} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{-3}{-9}$ (luôn đúng).

b)

$$A \text{ là trung điểm } BD \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_A = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot (-3) = 1 + x_D \\ 2 \cdot 4 = 1 + y_D \end{cases} \Rightarrow D(-7; 7).$$

c)

Ta có

$$E \in Ox \Rightarrow E(x, 0).$$

$$\vec{AB} = (4; -3), \vec{AE} = (x + 3; -4).$$

$$\text{Để } A, B, E \text{ thẳng hàng thì } \frac{4}{x + 3} = \frac{-3}{-4} \Rightarrow x = \frac{7}{3} \Rightarrow E\left(\frac{7}{3}; 0\right).$$

III. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ

Nhắc lại kiến thức về biểu thức toạ độ

$$\diamond \text{ Cho } \vec{u}(x, y), \vec{v}(x', y') \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y'.$$

$$\diamond \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow x.x' + y.y' = 0.$$

$$\diamond |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow (\vec{u})^2 = x^2 + y^2.$$

$$\diamond \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

$$\diamond \overrightarrow{AB} = (x, y), \overrightarrow{AC} = (x', y') \Rightarrow S_{ABC} = \frac{|xy' - x'y|}{2}.$$

Ví dụ 31

Cho $\vec{a} = (1; -3)$, $\vec{b} = (2; 5)$. Tính các tích vô hướng sau:

a) Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$, $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$.

b) Tìm m để $\vec{c} = m\vec{a} + 3\vec{b} \perp \vec{a}$.

c) Tìm n để $\vec{d} = -2\vec{a} + n\vec{b}$ có độ dài bằng $\sqrt{17}$,

Lời giải.

a)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 5 = -13.$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 + 2 \cdot (-13) = -16.$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2 = 10 - (2^2 + 5^2) = -19.$$

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 2(\vec{a})^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2(\vec{b})^2 = 2 \cdot 10 - 3 \cdot (-13) - 2 \cdot 29 = 1.$$

b)

$$\vec{c} = m\vec{a} + 3\vec{b} \perp \vec{a} \Rightarrow (m\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow m \cdot (\vec{a})^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 10m + 3 \cdot (-13) = 0 \Rightarrow m = \frac{39}{10}.$$

c)

$$|\vec{d}| = \sqrt{17} \Leftrightarrow |-2\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{17} \Leftrightarrow 29n^2 + 52n + 23 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1. \\ n = -\frac{23}{29}. \end{cases}$$

Ví dụ 32

Tính góc giữa hai vectơ sau:

a) $\vec{a} = (1; -2)$ và $\vec{b} = (-2; -6)$.

b) $\vec{a} = (-3; 4)$ và $\vec{b} = (4; 3)$.

Lời giải.

a)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 12 = 10, |\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b}| = \sqrt{40}.$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{40}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

$$b) \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-12 + 12}{5 \cdot 5} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Ví dụ 33

Cho $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (4; 1)$.

a) Tìm k, m sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{u} = a + m\vec{b}$ vuông góc với Ox .

b) Tìm vectơ $\vec{d}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = 2$.

c) Tìm k để vectơ $\vec{v} = k\vec{a} + \vec{b}$ tạo với $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$ một góc 45° .

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned} \begin{cases} (k\vec{a} + m\vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 0. \\ (\vec{a} + m\vec{b}) \cdot \vec{i} = 0. \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k(\vec{a})^2 + k\vec{a}\vec{b} + m\vec{a}\vec{b} + m(\vec{b})^2 = 0. \\ \vec{a}\vec{i} + m\vec{b}\vec{i} = 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 13k + k \cdot (-5) + (-5) \cdot m + m \cdot 17 = 0. \\ -2 + m \cdot 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2}. \\ k = -\frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}, k = -\frac{3}{4}$.

b)

Gọi $\vec{d}(x, y), \vec{a}(-2; 3), \vec{b}(4; 1)$.

Theo đề bài $\begin{cases} -2x + 3y = 4. \\ 4x + y = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7}. \\ y = \frac{6}{5}. \end{cases} \Rightarrow \vec{d}\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{5}\right)$.

c)

$\vec{v} = k\vec{a} + \vec{b} = (-2k + 4; 3k + 1), \vec{w} = \vec{i} + \vec{j} = (1; 1)$.

Theo đề bài

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{w}) = 45^\circ &\Leftrightarrow \cos(\vec{v}, \vec{w}) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ &\Leftrightarrow \frac{k + 5}{\sqrt{(-2k + 4)^2 + (3k + 1)^2} \cdot \sqrt{2}} \Leftrightarrow k + 5 = \sqrt{4k^2 - 16k + 16 + 9k^2 + 6k + 1}. \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 5. \\ k^2 + 10k + 25 = 13k^2 - 10k + 17. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -5. \\ 12k^2 - 20k - 8 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq -5. \\ k = 2. \\ k = -\frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $k = 2$ và $k = -\frac{1}{3}$.

Ví dụ 34

Cho ba điểm $A(4; 6), B(5; 1), C(1; -3)$.

- Chứng minh ba điểm đó tạo thành tam giác.
- Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC .
- Tính các góc của tam giác và cho biết ABC là tam giác gì?
- Xác định trực tâm H của tam giác ABC .

Lời giải.

a)

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; -5), \overrightarrow{AC} = (-3; -9)$.

Vì $\frac{1}{-3} \neq \frac{-5}{-9} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ không cùng phương $\overrightarrow{AC} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

$\Rightarrow A, B, C$ không tạo tam giác.

b)

$AB = \sqrt{(4 - 5)^2 + (6 - 1)^2} = \sqrt{26}$.

$AC = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 + 3)^2} = 3\sqrt{10}$.

$BC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Chu vi: $C = AB + AC + BC = \sqrt{26} + 3\sqrt{10} + 4\sqrt{2}$.

$$S_{ABC} = \frac{|1 \cdot (-9) - (-3) \cdot (-5)|}{2} = 12.$$

$$\text{c) } \cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-3 + 45}{\sqrt{26} \cdot 3\sqrt{10}}.$$

d)

Gọi $H(x, y)$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

Ta có

$$\overrightarrow{AH} = (x - 4; y - 6), \overrightarrow{BC} = (-4; -4), \overrightarrow{BH} = (x - 5; y - 1), \overrightarrow{AC} = (-3; -9).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0. \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4(x - 4) - 4(y - 6) = 0. \\ -3(x - 5) - 9(y - 1) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 4y = -40. \\ -3x - 9y = -24. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 11. \\ y = -1. \end{cases}$$

Vậy $H(11; -1)$.