NGUYỄN HOÀNG VIỆT

Giáo viên THTP Lương Thế Vinh

Chuyên đề

PHỤC DỰNG HÌNH ẨN

MATH :VD _VDC

NHÓM TOÁN VD-VDC

NĂM HỌC 2021 - 2022

DỰ ÁN PHỤC DỰNG HÌNH ẨN

Nhóm biên soạn: Nhóm toán VD - VDC (nay là NHÓM GIÁO VIÊN TOÁN VIỆT NAM)

Biên tập: Nguyễn Hoàng Việt

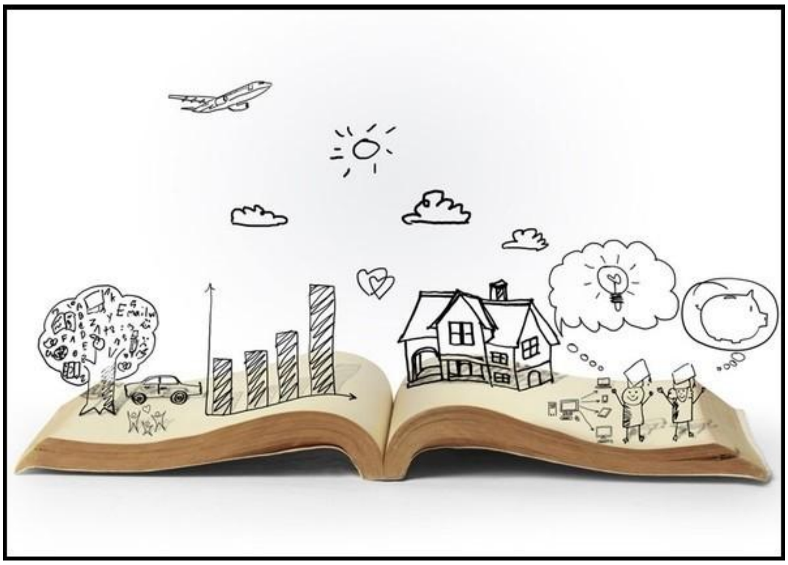
Qua nhiều bài toán chúng ta gặp phải ở trong các đề thi THPT Quốc gia, thường có các bài toán về xác định góc, khoảng cách giữa các yếu tố đường thẳng, mặt phẳng và bài toán tính thể tích các khối chóp, khối lăng trụ,... Trong các bài toán này, dữ kiện đề bài thường cho sẵn một đường thẳng cụ thể vuông góc với mặt đáy và việc tính toán thường xoay quanh vấn đề đường cao.

Tuy nhiên, trong nhiều bài toán, để tăng mức độ cho câu hỏi về hình học không gian, người ra đề thường làm ẩn đi các yếu tố này làm cho việc tính toán các yếu tố góc, khoảng cách hay thể tích khối trở nên khó khăn hơn.

Để giải quyết được bài toán HHKG đã bị ẩn các yếu tố này, ta có thể sử dụng phương pháp "Phục dựng hình ẩn".

MỤC LỤC

"Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường."



PHẦN 1 ĐỀ BÀI

Câu 1: Tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $ABC = BCD = ADC = 90°$, $\left(AD, BC\right) = 60°$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

Ⓐ. $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$.　Ⓑ. $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$.　Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$.　Ⓓ. $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $ABC = BAS = BCS = 90°$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.　Ⓑ. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.　Ⓒ. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.　Ⓓ. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC và α là góc giữa MN với (ABC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.　Ⓑ. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　Ⓒ. $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.　Ⓓ. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $SAB = SCB = 90°$ và khoảng cách từ điểm A đến (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $2\pi a^2$.　Ⓑ. $8\pi a^2$.　Ⓒ. $16\pi a^2$.　Ⓓ. $12\pi a^2$.

Câu 5: **(Sở Bắc Ninh lần 2 2018-2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $DAB = CBD = 90^{\circ}$; $AB = a; AC = a\sqrt{5}; ABC = 135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABD),(BCD)$ bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$.　Ⓑ. $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$.　Ⓒ. $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$.　Ⓓ. $\dfrac{a^3}{6}$.

Câu 6: **(Sở Bắc Ninh lần 2 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;0;0), B(0;4;0), S(0;0;c)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên SA, SB. Khi góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(OA'B')$ lớn nhất thì giá trị của số thực c thuộc khoảng nào dưới đây?

Ⓐ. $\left(-\dfrac{17}{2}; -\dfrac{15}{2}\right)$.　Ⓑ. $(-9;-8)$.　Ⓒ. $(0;3)$.　Ⓓ. $(-8;-6)$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $ABC = BCD = CDA = 90^\circ$, $BC = CD = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

Ⓐ. 60°. Ⓑ. 30°. Ⓒ. 45°. Ⓓ. 90°.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = a$, các tam giác SAB, SAC là tam giác vuông tại B và C. Biết độ dài đường cao của hình chóp $S.ABC$ gấp hai lần độ dài đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Ⓐ. a. Ⓑ. $a\sqrt{3}$. Ⓒ. $\frac{a}{2}$. Ⓓ. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9: Trong không gian cho đoạn thẳng AB cố định và có độ dài bằng 4. Qua các điểm A và B lần lượt kẻ các tia Ax và By chéo nhau và hợp nhau góc 30°, đồng thời cùng vuông góc với đoạn thẳng AB. Trên các tia Ax và By lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $MN = 5$. Đặt $AM = a$ và $BN = b$. Biết thể tích khối tứ diện $ABMN$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Giá trị biểu thức $S = \left(a^2 + b^2\right)^2$ bằng

Ⓐ. 144. Ⓑ. 324. Ⓒ. 100. Ⓓ. 256.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SAB = SCB = 90^\circ$, góc giữa AB và g (SBC) bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Ⓐ. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Ⓑ. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. Ⓒ. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. Ⓓ. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = a$, $BAC = 120^\circ$, $SBA = SCA = 90^\circ$. Gọi φ là góc giữa SB và (SAC) thỏa mãn $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{8}$, khoảng cách từ S đến mặt đáy nhỏ hơn $2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. Ⓑ. $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. Ⓓ. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2BC$ và $BAC = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SC lần lượt là M và N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

Ⓐ. 45°. Ⓑ. 60°. Ⓒ. 15°. Ⓓ. 30°.

Câu 13: **(VDC)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a, CD = a\sqrt{2}, ABC = DAB = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 45°. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD bằng

Ⓐ. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Ⓑ. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Ⓒ. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Ⓓ. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

Câu 14: **(VDC)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=2a, AC=a$. Các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\frac{2a}{3}$, cosin của góc giữa (SAB) và (SBC) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$.   B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.   C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$.   D. $\frac{\sqrt{11}}{12}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $BAC=120°$, $BC=2a$ và $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{39}}{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Thể tích của khối chóp $G.ABC$ bằng

A. $\frac{2a^3}{9}$.   B. a^3.   C. $\frac{a^3}{3}$.   D. $\frac{a^3}{9}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $SAB=SCB=90°$. Gọi M là trung điểm của SA. Biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\frac{6a}{\sqrt{21}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{8a^3\sqrt{39}}{3}$.   B. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{9}$.   C. $\frac{4a^3\sqrt{13}}{3}$.   D. $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có $ABC=ADC=90°$ và $BC=1$, $CD=\sqrt{3}$, $BD=2$, $AB=3$. Khoảng cách từ B đến (ACD) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{7}$.   B. $\frac{\sqrt{42}}{7}$.   C. $\frac{\sqrt{7}}{7}$.   D. $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=2, AC=3, BC=4$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA=1$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC), giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\frac{16\sqrt{15}}{15}$.   B. $\sqrt{15}$.   C. 4.   D. $\frac{6\sqrt{15}}{5}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC=a, AB=a\sqrt{3}, BAC=150°$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.   B. $\frac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$.   C. $\frac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.   D. $\frac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=AB=\sqrt{3}$; $SB=\sqrt{6}$; $AC=2BC=2$; $SC=\sqrt{5}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

Ⓐ. $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.　Ⓑ. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.　Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{13}}{6}$.　Ⓓ. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=2a$, $AC=a$. Các tam giác SBA và SCA lần lượt vuông tại B và C. Biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $a\sqrt{2}$, cosin của góc tạo bởi đường thẳng SC và (SAB) bằng

Ⓐ. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.　Ⓑ. $\dfrac{1}{3}$.　Ⓒ. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.　Ⓓ. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+(z-6)^2=45$ và $M(1;4;5)$. Ba đường thẳng thay đổi d_1, d_2, d_3 nhưng đôi một vuông góc tại O cắt mặt cầu tại điểm thứ hai lần lượt là A, B, C. Khi khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC) lớn nhất thì phương trình mặt phẳng (ABC) là

Ⓐ. $x+2y+z-8=0$.　Ⓑ. $2x+y+z-4=0$.　Ⓒ. $x+y+2z-1=0$.　Ⓓ. $x-y+z-3=0$

Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=a$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA, SC. Biết BD vuông góc với AE, chiều cao của hình chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$.　Ⓑ. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.　Ⓒ. $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.　Ⓓ. $\dfrac{a}{3}$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B, $BC=\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　Ⓑ. $\dfrac{1}{2}$.　Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.　Ⓓ. $\dfrac{1}{6}$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=BC=CD=2$, $AC=BD=1$, $AD=\sqrt{3}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. 1.　Ⓑ. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.　Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.　Ⓓ. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB=60°$, $BSC=90°$, $CSA=120°$, $SA=a$, $SB=2a$, $SC=3a$. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAB) bằng

Ⓐ. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.　Ⓑ. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.　Ⓓ. $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB=BSC=CSA=60°$ và $SA=2, SB=3, SC=4$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $4\sqrt{3}$.　Ⓑ. $2\sqrt{3}$.　Ⓒ. $2\sqrt{2}$.　Ⓓ. $4\sqrt{2}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=4, SB=6, SC=12$ và $\widehat{ASB}=60°, \widehat{BSC}=90°$ và $\widehat{CSA}=120°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

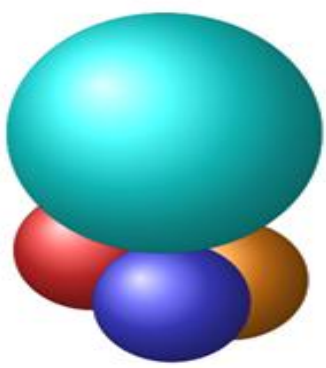
Ⓐ. $36\sqrt{3}$. Ⓑ. $36\sqrt{2}$. Ⓒ. $24\sqrt{3}$. Ⓓ. $24\sqrt{2}$.

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$, có tam giác BCD đều, hai tam giác ABD và ACD vuông cân đáy AD. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (CDG) và (MNB), giá trị $\cos\alpha$ bằng

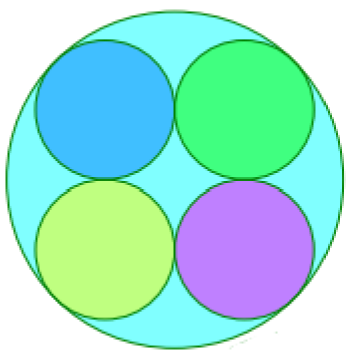
Ⓐ. $\frac{1}{11}$. Ⓑ. 0. Ⓒ. $\frac{1}{\sqrt{11}}$. Ⓓ. $\frac{-1}{\sqrt{11}}$.

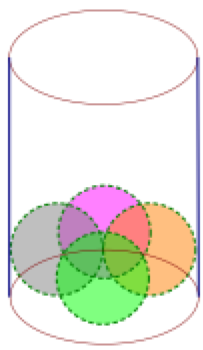
Câu 30: Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kỳ trên (S). Khoảng cách lớn nhất từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

Ⓐ. $3+\frac{\sqrt{123}}{4}$. Ⓑ. $\frac{52}{9}$. Ⓒ. $3+\frac{\sqrt{30}}{2}$. Ⓓ. $3+\frac{\sqrt{69}}{3}$.



Câu 31: Người ta thả vào bên trong một cái ống nước dạng hình trụ 4 quả bóng tenis có cùng bán kính bằng 1. Biết rằng các quả bóng tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với các đường sinh của ống hình trụ. Biết chiều cao của ống bằng 2. Thể tích của ống nước đó bằng





Ⓐ. $(3+2\sqrt{2})\pi$. Ⓑ. $(1+\sqrt{2})\pi$. Ⓒ. $(6+4\sqrt{2})\pi$. Ⓓ. $(2+2\sqrt{2})\pi$.

Câu 32: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=\sqrt{10}$, $AD=BC=\sqrt{5}$, $AC=BD=\sqrt{13}$. Gọi φ là góc giữa AB và (ACD), giá trị $\cos\varphi$ bằng

Ⓐ. $\frac{6\sqrt{10}}{35}$. Ⓑ. $\frac{\sqrt{865}}{35}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{10}}{10}$. Ⓓ. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Câu 33: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD=BC=3$; $AC=BD=4$; $AB=CD=2\sqrt{3}$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. $\frac{\sqrt{2470}}{12}$. Ⓑ. $\frac{\sqrt{2047}}{12}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{2474}}{12}$. Ⓓ. $\frac{\sqrt{2740}}{12}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=BC=x$, $SB=AC=y$, $SC=AB=z$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=12$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ⓑ. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4; AC=BD=5; AD=BC=6$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$. Ⓑ. $\frac{15\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ. $\frac{45\sqrt{6}}{4}$. Ⓓ. $\frac{45\sqrt{6}}{2}$.

Câu 36: Xét khối tứ diện $ABCD$ có $AB=x$ và các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Giá trị của x để thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất là

Ⓐ. $x=\sqrt{6}$. Ⓑ. $x=2\sqrt{2}$. Ⓒ. $x=\sqrt{14}$. Ⓓ. $x=3\sqrt{2}$.

Câu 37: Cho tứ diện $ACFG$ có số đo các cạnh lần lượt là $AC=AF=FC=a\sqrt{2}$, $AG=a\sqrt{3}$, $GF=GC=a$. Thể tích của khối tứ diện $ACFG$ bằng

Ⓐ. $\frac{a^3}{6}$. Ⓑ. $\frac{a^3}{3}$. Ⓒ. $\frac{a^3}{12}$. Ⓓ. $\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A; $AB=AC=a; SA=a\sqrt{3}$.

Các tam giác $SAB; SAC$ lần lượt vuông tại $B; C$. Gọi $O; M$ lần lượt là trung điểm của $BC; SC$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(OMA);(SAB)$, giá trị $\tan\alpha$ bằng

Ⓐ. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ⓑ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ. $\sqrt{3}$.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $AD=a\sqrt{3}$ và AD vuông góc với AB và AC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và DE. Góc giữa AF với CD bằng

Ⓐ. $45°$. Ⓑ. $60°$. Ⓒ. $90°$. Ⓓ. $30°$.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=1; CD=\sqrt{2}; ABC=DAB=90°$. Góc giữa hai đường thẳng $AD; BC$ bằng $30°$. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

Ⓐ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ⓑ. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ. $\sqrt{5}$. Ⓓ. $\sqrt{2}$.

Câu 41: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, gọi I là trung điểm $A'B'$ và φ là góc giữa AC' với (BIC'). Biết $AA' = a; AB = 2a$, giá trị $\cos\varphi$ bằng

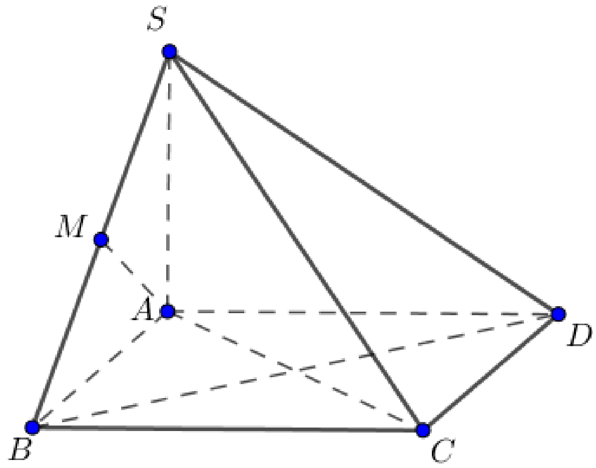
Ⓐ. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. Ⓑ. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. Ⓒ. $\frac{3}{5}$. Ⓓ. $\frac{2}{5}$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = BC = a$, cạnh bên bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng

Ⓐ. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa SAB và SCD bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SB, khoảng cách giữa AM và SD bằng

Ⓐ. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ. $\frac{a}{2}$. Ⓓ. $\frac{a\sqrt{5}}{4}$.



Câu 44: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$; $AD = BC = b$; $BD = AC = c$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$. Ⓑ. $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{8}}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{8}$. Ⓓ. $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

PHẦN 2 BẢNG ĐÁP ÁN

1.D	2.C	3.B	4.D	5.D	6.A	7.A	8.A	9.A	10.A
11.C	12.D	13.D	14.A	15.D	16.B	17.B	18.A	19.C	20.A
21.D	22.A	23.C	24.A	25.C	26.B	27.C	28.D	29.C	30.D
31.C	32.B	33.A	34.A	35.A	36.D	37.A	38.B	39.C	40.A
41.A	42.A	43.B	44.B						

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

PHẦN 3 LỜI GIẢI CHI TIẾT

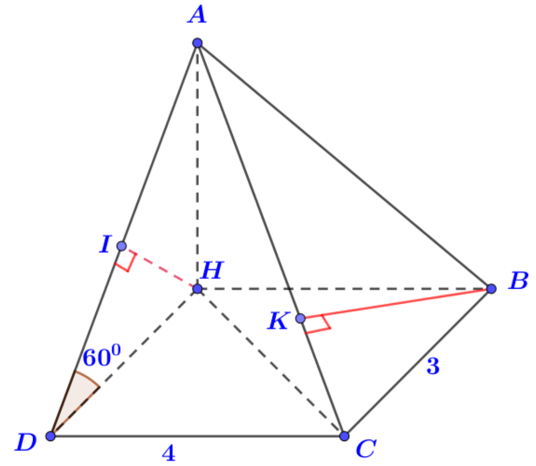
Câu 1. Tứ diện $ABCD$ có $BC=3$, $CD=4$, $\widehat{ABC}=\widehat{BCD}=\widehat{ADC}=90°$, $\left(\widehat{AD,BC}\right)=60°$. Cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

Ⓐ. $\dfrac{\sqrt{43}}{86}$. Ⓑ. $\dfrac{4\sqrt{43}}{43}$. Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{43}}{43}$. Ⓓ. $\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp AH \end{cases} \Rightarrow BC\perp HB$.(1)

Lại có: $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp AH \end{cases} \Rightarrow CD\perp HD$.(2)

Mà $\widehat{BCD}=90°$.

Từ đây ta suy ra $HBCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác: $\left(\widehat{AD,BC}\right)=\left(\widehat{AD,HD}\right)=\widehat{ADH}=60°$. Suy ra: $AH=HD\tan 60°=3\sqrt{3}$.

Gọi K, I lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên AC và của H lên AD.

Suy ra: $d\left(B,(ACD)\right)=d\left(H,(ACD)\right)=HI=HD\sin 60°=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

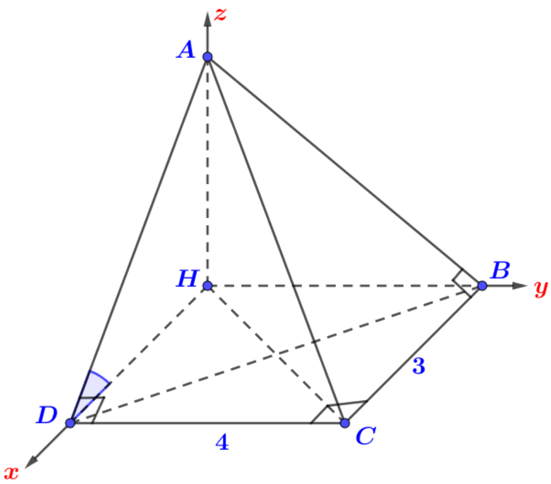
Tam giác ABC vuông tại B có: $\dfrac{1}{BK^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AH^2+HB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{52}{387}$

$\Rightarrow BK=\dfrac{3\sqrt{559}}{26}$.

Gọi $\varphi=\left(\widehat{(ABC),(ACD)}\right)$ ta có: $\sin\varphi=\dfrac{d\left(B,(ACD)\right)}{BK}=\dfrac{HI}{BK}\Rightarrow \cos\varphi=\sqrt{1-\left(\dfrac{HI}{BK}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{43}}{43}$

.

Cách 2:



Gọi H là chân đường cao của tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp HB$.(1)

Lại có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HD$.(2)

Mà $\widehat{BCD} = 90^\circ$.

Từ đây ta suy ra $HBCD$ là hình chữ nhật.

Mặt khác: $\left(AD, BC\right) = \left(AD, HD\right) = \widehat{ADH} = 60^\circ$. Suy ra: $AH = HD \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$.

Chọn hệ trục $Oxyz \equiv H.DBA$ như hình vẽ.

Ta có: $H(0;0;0)$, $A\left(0;0;3\sqrt{3}\right)$, $B(0;4;0)$, $C(3;4;0)$, $D(3;0;0)$.

$\overrightarrow{AD} = \left(3;-3;-3\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(3;4;-3\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(0;4;-3\sqrt{3}\right)$.

Gọi $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ lần lượt là một véc tơ pháp tuyến của (ABC) và (ABD).

Suy ra: $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(0;-9\sqrt{3};-12\right)$; $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(21\sqrt{3};0;21\right)$.

Vậy $\cos\left((ABC),(ADC)\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}$

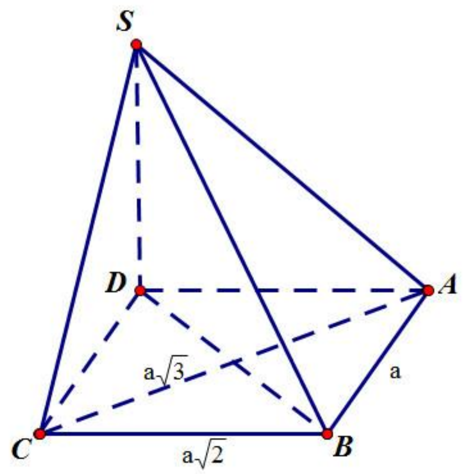
$$= \frac{\left|0.21\sqrt{3} - 9\sqrt{3}.0 - 12.21\right|}{\sqrt{0^2 + \left(-9\sqrt{3}\right)^2 + (-12)^2}.\sqrt{\left(21\sqrt{3}\right)^2 + 0^2 + (21)^2}} = \frac{2\sqrt{43}}{43}.$$

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB > 2a$ và $\widehat{ABC} = \widehat{BAS} = \widehat{BCS} = 90^\circ$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$. Ⓑ. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. Ⓒ. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. Ⓓ. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



- Dựng $SD\perp(ABC)$ tại D. Ta có: $\begin{cases}BA\perp SA\\BA\perp SD\end{cases}\Rightarrow BA\perp AD$.

Và: $\begin{cases}BC\perp SD\\BC\perp SC\end{cases}\Rightarrow BC\perp CD\Rightarrow ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow DA=BC=a\sqrt{2}$, $DC=AB=a$

.

- Sử dụng công thức $\sin(SB,(SAC))=\dfrac{d(B,(SAC))}{SB}$.

$$\Rightarrow\frac{\sqrt{11}}{11}=\frac{d(B;(SAC))}{SB}=\frac{d(D;(SAC))}{SB}\Rightarrow\frac{1}{d^2(D;(SAC))}=\frac{11}{SB^2}\ (1).$$

- Lại có :

$$\frac{1}{d^2(D;(SAC))}=\frac{1}{DS^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{SB^2-BD^2}+\frac{1}{DA^2}+\frac{1}{DC^2}=\frac{1}{SB^2-3a^2}+\frac{3}{2a^2}\ (2).$$

- Từ (1) và (2) suy ra: $\dfrac{11}{SB^2}=\dfrac{1}{SB^2-3a^2}+\dfrac{3}{2a^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}SB^2=6a^2\\SB^2=\dfrac{11}{3}a^2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}SB=a\sqrt{6}\\SB=a\sqrt{\dfrac{11}{3}}\end{array}\right.$

Theo giả thiết $SB>2a\Rightarrow SB=a\sqrt{6}\Rightarrow SD=a\sqrt{3}$.

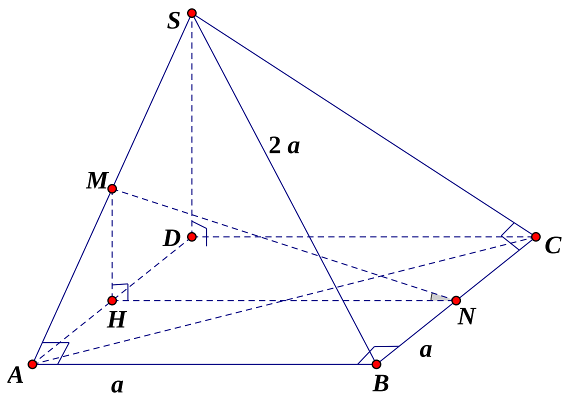
Vậy $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}SD.\dfrac{1}{2}BA.BC=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$, $SA\perp AB$, $SC\perp BC$, $SB=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC và α là góc giữa MN với (ABC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$. B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$. D. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng $SD \perp (ABC)$, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD \text{ và } \begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD.$$

Mà ABC là tam giác vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

Gọi H là trung điểm của AD, ta có $MH \,//\, SD \Rightarrow MH \perp (ABCD)$.

Do đó HN là hình chiếu của MN lên (ABC).

$\Rightarrow \alpha = (MN, (ABC)) = (MN, NH) = \widehat{MNH}$.

Ta có: $SC = \sqrt{SB^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Lại có: $SD = \sqrt{SC^2 - DC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

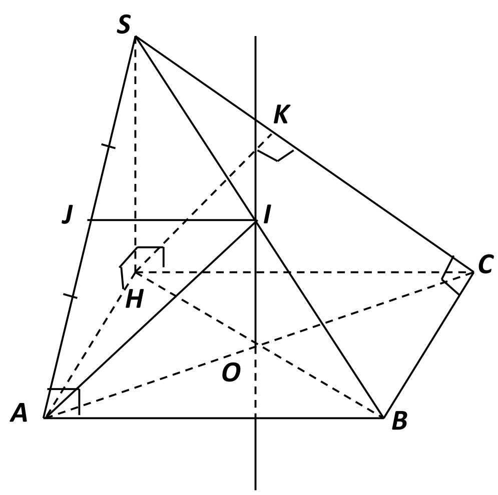
$$\tan\alpha = \frac{MH}{NH} = \frac{\frac{1}{2}.SD}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a\sqrt{3}$, $\widehat{SAB} = \widehat{SCB} = 90°$ và khoảng cách từ điểm A đến (SBC) bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $2\pi a^2$. Ⓑ. $8\pi a^2$. Ⓒ. $16\pi a^2$. Ⓓ. $12\pi a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SC \\ SH \perp BC \end{cases} \Rightarrow HC \perp BC$

Tương tự $AH \perp AB$

Và ΔABC vuông cân tại B nên $ABCH$ là hình vuông. Gọi $O = AC \cap BH$, O là tâm hình vuông. Dựng một đường thẳng d qua O vuông góc với $(ABCH)$, dựng mặt phẳng trung trực của SA qua trung điểm J cắt d tại $I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp.

Ta hoàn toàn có $IJ \perp SA \Rightarrow IJ // AB \Rightarrow I$ là trung điểm SB, hay $I = d \cap SC$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp: $r_{S.ABC} = AI = \sqrt{IJ^2 + JA^2}$; $IJ = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Do $AH // (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = d\left(H,(SBC)\right) = HK$

(K là hình chiếu của H lên SC và $BC \perp (SHC) \Rightarrow HK \perp (SBC)$)

$\Rightarrow HK = a\sqrt{2}$. Tam giác SHC vuông tại H $\Rightarrow SH = a\sqrt{6}$.

Tam giác SHA vuông tại H $\Rightarrow SA = 3a$.

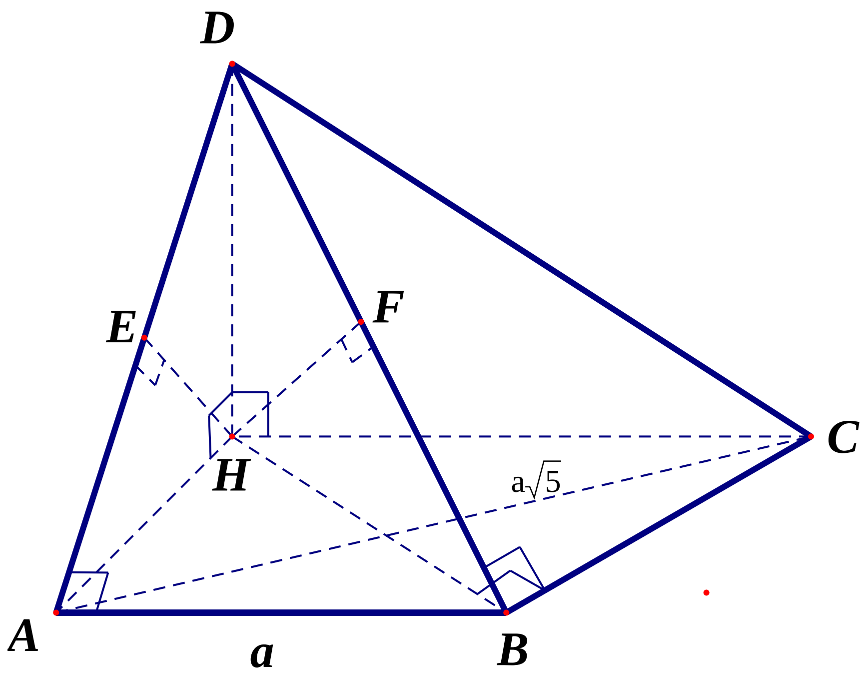
$JA = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow r_{S.ABC} = AI = a\sqrt{3} \Rightarrow S_{mc} = 4\pi r^2 = 12\pi a^2$.

Câu 5. **(Sở Bắc Ninh lần 2 2018-2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $DAB = CBD = 90^o$; $AB = a; AC = a\sqrt{5}; ABC = 135°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABD),(BCD)$ bằng $30°$. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB = a$, $ABH = 45^{\circ} \Rightarrow \Delta HAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin CBA = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases} HE \perp DA \\ HF \perp DB \end{cases} \Rightarrow HE \perp (DAB)$ và $HF \perp (DBC)$.

Suy ra $((DBA),(DBC)) = (HE, HF) = EHF$ và tam giác HEF vuông tại E.

Đặt $DH = x$, khi đó $HE = \dfrac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $HF = \dfrac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + x^2}}$.

Suy ra $\cos EHF = \dfrac{HE}{HF} = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2a^2}}{\sqrt{2x^2 + 2a^2}} \Rightarrow x = a$.

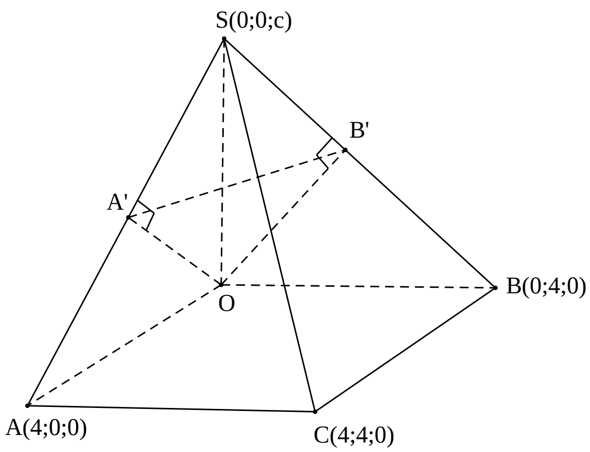
Vậy $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3}{6}$.

Câu 6. **(Sở Bắc Ninh lần 2 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(4;0;0), B(0;4;0), S(0;0;c)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên SA, SB. Khi góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(OA'B')$ lớn nhất thì giá trị của số thực c thuộc khoảng nào dưới đây?

Ⓐ. $\left(-\dfrac{17}{2}; -\dfrac{15}{2}\right)$. Ⓑ. $(-9;-8)$. Ⓒ. $(0;3)$. Ⓓ. $(-8;-6)$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình vuông $OACB$, khi đó $C\ 4;4;0$. Dễ chứng minh được

$\begin{cases} OA' \perp SC \\ OB' \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp\ OA'B'$.

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

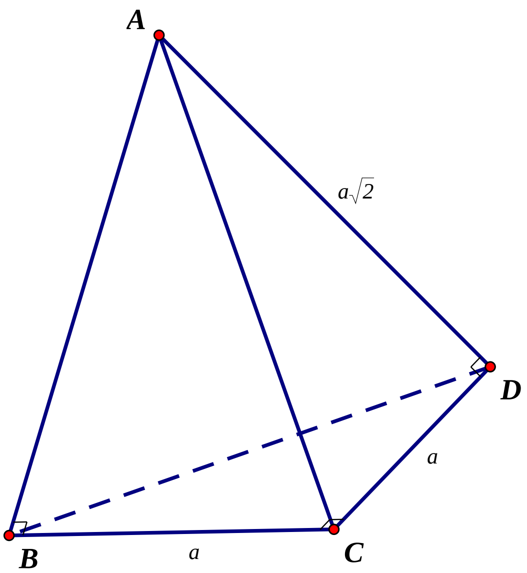
Khi đó d tạo với $(OA'B')$ góc lớn nhất khi và chỉ khi $d \perp OA'B' \Leftrightarrow \overrightarrow{u_d}\ 1;1;2$ cùng phương $\overrightarrow{SC}\ 4;4;-c$ nên $c=-8$.

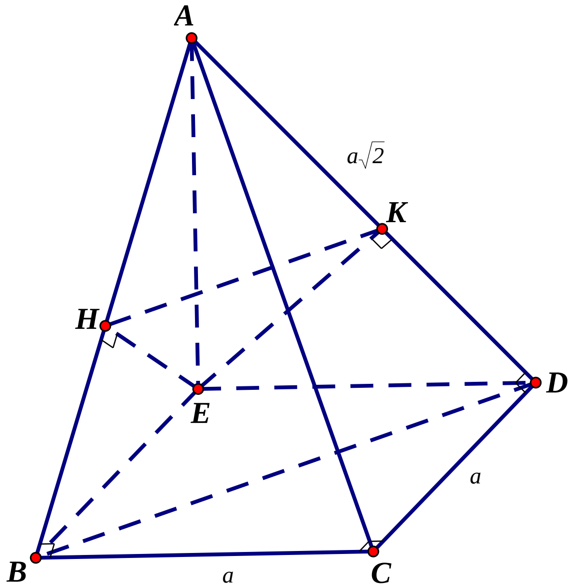
Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $ABC = BCD = CDA = 90°$, $BC = CD = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) bằng

Ⓐ. $60°$. Ⓑ. $30°$. Ⓒ. $45°$. Ⓓ. $90°$.

Lời giải

Chọn A





Gọi E là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD)

Kết hợp đề bài $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp BE$; $\left.\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp AE \end{matrix}\right\} \Rightarrow CD \perp ED$ và $BC = CD = a$ suy ra tứ giác $BCDE$ là hình vuông cạnh a.

Khi đó $AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = a$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của E lên $(ABC),(ACD)$ thì $EH \perp (ABC), EK \perp (ACD)$ nên góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là góc (EH, EK)

Nhận xét 2 tam giác SEB và SED là vuông cân tại E nên $EH = EK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $HK = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác EHK đều.

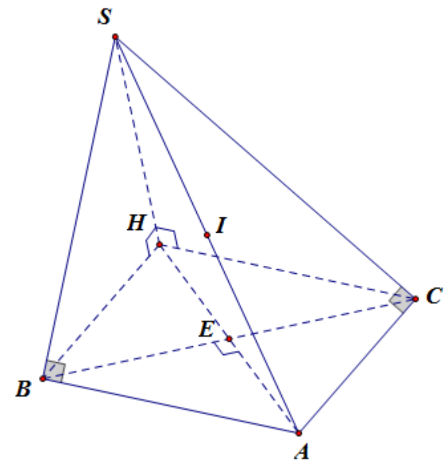
Vậy số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (ACD) là $60°$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = a$, các tam giác SAB, SAC là tam giác vuông tại B và C. Biết độ dài đường cao của hình chóp $S.ABC$ gấp hai lần độ dài đường cao của tam giác ABC hạ từ đỉnh A. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có giá trị nhỏ nhất bằng

Ⓐ. a. Ⓑ. $a\sqrt{3}$. Ⓒ. $\frac{a}{2}$. Ⓓ. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC). Khi đó ta có SBH, SCH là hai tam giác vuông tại B, C. Gọi E là trung điểm BC, suy ra $AE \perp BC$.

Ta đặt $AE = h \Rightarrow SH = 2h, 0 < h < a$.

+ $AB^2 = AE.AH \Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AE} = \frac{a^2}{h}$

+ $SA = \sqrt{4h^2 + \frac{a^4}{h^2}} \geq 2a$.

+ Các điểm A, B, C, S cùng nhìn SA với một góc vuông, suy ra SA là đường kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và trung điểm I của SA là tâm mặt cầu. Vậy $R = \frac{SA}{2} \geq a \Rightarrow R_{\min} = a.$

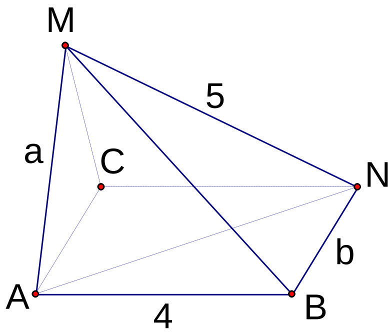
Câu 9. Trong không gian cho đoạn thẳng AB cố định và có độ dài bằng 4. Qua các điểm A và B lần lượt kẻ các tia Ax và By chéo nhau và hợp nhau góc $30°$, đồng thời cùng vuông góc với đoạn thẳng AB. Trên các tia Ax và By lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $MN = 5$. Đặt $AM = a$ và $BN = b$. Biết thể tích khối tứ diện $ABMN$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Giá trị biểu thức $S = (a^2 + b^2)^2$ bằng

Ⓐ. 144. Ⓑ. 324. Ⓒ. 100. Ⓓ. 256.

Lời giải

Chọn A

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688



AB là đoạn vuông góc chung của AM, BN nên $d\left(AM, BN\right) = AB = 4$

Ta có công thức: $V_{ABMN} = \dfrac{1}{6} AM.BN.d\left(AM, BN\right).\sin\left(AM, BN\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{6}.a.b.4.\sin 30^0 \Rightarrow ab = \sqrt{3}$.

Dựng hình chữ nhật $ABNC$. Khi đó: $\left(AM, AC\right) = \left(AM, BN\right) = 30^0$ và $AC = BN = b$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp BN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB \perp AM \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp \left(AMC\right)$.

Mà $CN \parallel AB \Rightarrow CN \perp \left(AMC\right) \Rightarrow CN \perp CM$. Do đó $CM = \sqrt{MN^2 - CN^2} = 3$.

Ta có: $\left|\cos MAC\right| = \cos\left(AM, AC\right) \Rightarrow \left|\dfrac{AM^2 + AC^2 - CM^2}{2AM.AC}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\dfrac{a^2 + b^2 - 9}{2\sqrt{3}}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

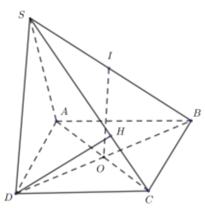
$\Rightarrow a^2 + b^2 = 12$. Vậy $S = 144$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SAB = SCB = 90°$, góc giữa AB và g $\left(SBC\right)$ bằng $60°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình vuông $ABCD$ tâm O.

Do $SAB = SCB = 90^0$ nên hình chóp $S.ABC$ nội tiếp mặt cầu tâm I đường kính SB.
Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên OI là trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Suy ra $OI \perp (ABC) \Rightarrow SD \perp (ABC)$.

$(AB,(SBC)) = (DC,(SBC)) = (CD,CS) = DCS = 60°$.

Ta có: $SD = CD.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

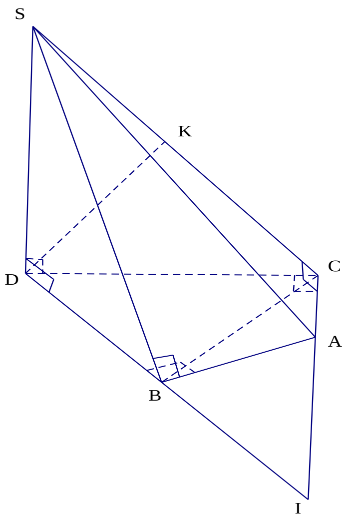
Từ đây ta suy ra: $V = \dfrac{1}{3}.SD.S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = a$, $BAC = 120°$, $SBA = SCA = 90°$. Gọi φ là góc giữa SB và (SAC) thỏa mãn $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$, khoảng cách từ S đến mặt đáy nhỏ hơn $2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.   Ⓑ. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.   Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.   Ⓓ. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Lời giải

Chọn C



+ Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên đáy (ABC), đặt $SD = x(0 < x < 2a)$.

Ta có $\begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp SD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SDC) \Rightarrow AC \perp DC$. Tương tự ta cũng có $AB \perp DB$.

+ Tam giác ABC cân tại A và $CAB = 120°$ $\Rightarrow BC = a\sqrt{3}$ và $DBC = DCB = 60° \Rightarrow \Delta DBC$ đều cạnh $a\sqrt{3}$.

+ Tam giác SDC vuông tại D $\Rightarrow SB = \sqrt{3a^2 + x^2}$

+ Kẻ $DK \perp SC$ tại $K \Rightarrow DK \perp (SAC)$ $\Rightarrow d(D;(SAC)) = DK = \dfrac{x.a\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + x^2}}$.

+ Gọi $I = BD \cap AC$, xét ΔDIC vuông tại C và $BDC = 60°$

$\Rightarrow DI = \dfrac{DC}{\cos BDC} = 2a\sqrt{3}$ $\Rightarrow B$ là trung điểm của $DI \Rightarrow d(B;(SAC)) = \dfrac{1}{2}d(D;(SAC))$.

Theo giả thiết $\varphi = \left(SB;(SAC)\right) \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{d\left(B;(SAC)\right)}{SB} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{8} = \dfrac{xa\sqrt{3}}{2\left(3a^2+x^2\right)}$

$\Leftrightarrow x^2+3a^2-4ax=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 - 4\dfrac{x}{a}+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=3a \end{array}\right.$. So sánh với điều kiện suy ra $x=a$.

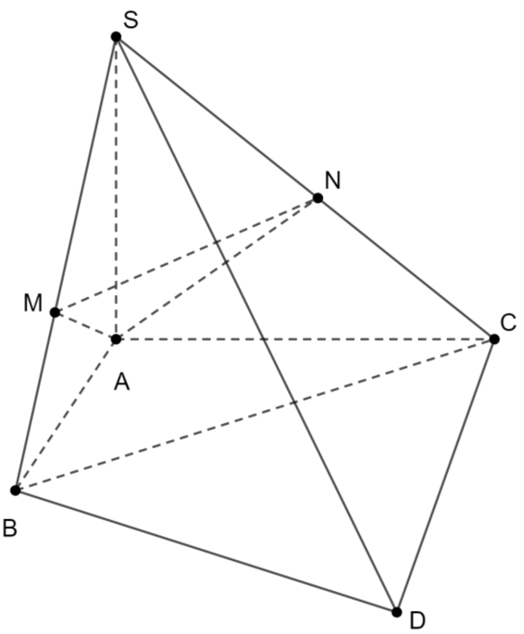
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy, $SA = 2BC$ và $BAC = 120^\circ$. Hình chiếu vuông góc của A lên các cạnh SB và SC lần lượt là M và N. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 15°. **D.** 30°.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường kính là AD.
Khi đó tam giác ABD vuông tại B $\Rightarrow AB \perp BD$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{BD} \perp \mathrm{AM}$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AM \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow AM \perp SD$.

Tương tự, ta chứng minh được $AN \perp SD$.

Do đó $SD \perp (AMN)$ suy ra $(ABC);(AMN) = SA;SD = ASD$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $\tan ASD = \dfrac{AD}{SA}$.

Với $AD = 2R_{\Delta ABC} = 2\dfrac{BC}{\sin 120^o} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}SA$.

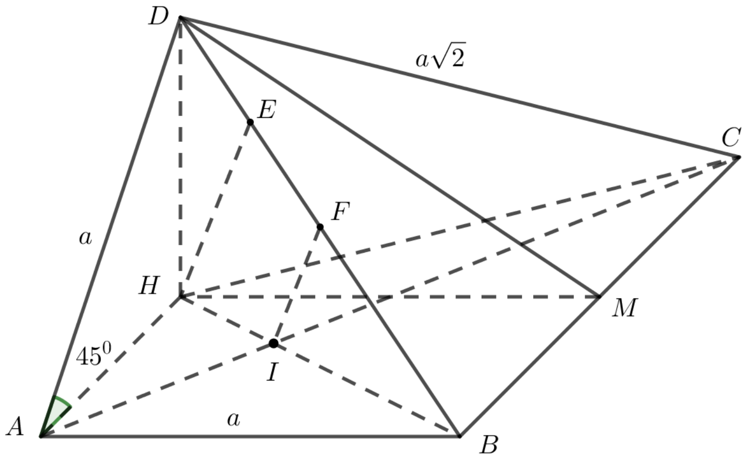
Do đó $\tan ASD = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ASD = 30^o \Rightarrow \left((ABC);(AMN) \right) = 30^o$.

Câu 13. **(VDC)** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a, CD = a\sqrt{2}, ABC = DAB = 90°$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng $45°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên mặt phẳng (ABC)

Ta có $\begin{cases} DH \perp AB \\ DA \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp AH$

Mà $BC \perp AB \Rightarrow AH \parallel BC \Rightarrow \left(AD, BC\right) = \left(AD, AH\right) = DAH = 45^0$ (Vì ΔDAH vuông tại H)

$\Rightarrow AH = DH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+) ΔABD vuông tại $A \Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra $DB = DC = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta DBC$ cân tại D.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có $\begin{cases} DM \perp BC \\ DH \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp HM$.

$\Rightarrow AHMB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AH = BM = \dfrac{1}{2}BC$.

+) Trong hình thang $ABCH$ $(AH \parallel BC)$, gọi $I = AC \cap BH$.

Theo định lí thalet ta có $\dfrac{IH}{IB} = \dfrac{AH}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IH = \dfrac{1}{3}HB$.

+) ΔAHB vuông tại A, có $HB = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Có $HI.HB = \dfrac{1}{3}HB^2 = \dfrac{a^2}{2} = AH^2 \Rightarrow AI \perp HB$ hay $HB \perp AC$

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

+) Có $\begin{cases} AC \perp HB \\ AC \perp DH \end{cases} \Rightarrow AC \perp DB$

Trong tam giác ΔDHB dựng $HE \perp DB, IF \parallel HE \Rightarrow IF \perp BD \Rightarrow d\left(AC, BD\right) = IF$.

ΔDHB vuông tại $H \Rightarrow HE = \dfrac{HB.HD}{\sqrt{HB^2 + HD^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

+) Trong ΔBHE, có $IF \parallel HE \Rightarrow \dfrac{IF}{HE} = \dfrac{BI}{BH} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IF = \dfrac{2}{3}HE = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

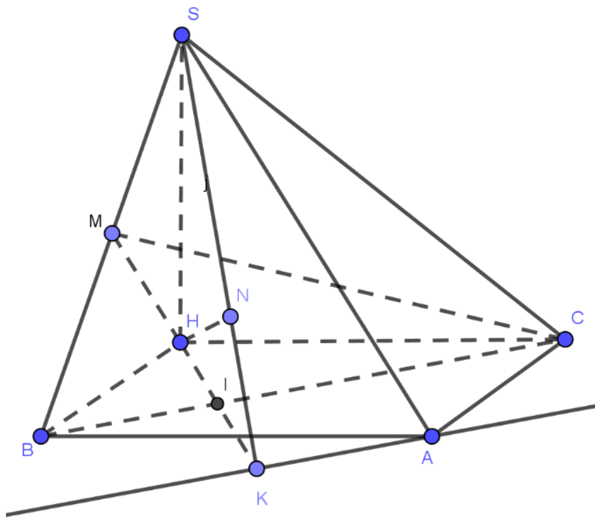
Vậy $d\left(AC, BD\right) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 14. **(VDC)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, AC = a$. Các tam giác SAB, SAC lần lượt vuông tại B và C. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{2a}{3}$, cosin của góc giữa $\left(SAB\right)$ và $\left(SBC\right)$ bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{11}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Kẻ $SH \perp \left(ABC\right) \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow HB \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc).

Tương tự ta có $AC \perp HC$.

Mà $AB \perp AC$ nên tứ giác $ABHC$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HC = 2a, HB = a$.

Từ A kẻ $Ax // BC \Rightarrow BC // \left(SAx\right)$

$\Rightarrow d\left(BC, SA\right) = d\left(BC, \left(SAx\right)\right) = d\left(I, \left(SAx\right)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(H, \left(SAx\right)\right) = \dfrac{2a}{3}$

(với $HK \perp Ax = K, HK \cap BC = I$).

$\Rightarrow d\left(H, SAx\right) = \dfrac{4a}{3} = HN$. (với N là hình chiếu vuông góc của H trên SK).

Ta có $HK = 2HI = 2.\dfrac{HB.HC}{\sqrt{HB^2 + HC^2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{5}}$.

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

Xét $\triangle SHK$ vuông tại H có $\dfrac{1}{HN^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}\Rightarrow SH=2a$.

Dựng $HM\perp SB=M\Rightarrow HM=\dfrac{HS.HB}{\sqrt{HS^2+HB^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Dễ dàng chứng minh được $CH\perp(SHB)\Rightarrow CM\perp SB$. nên $((SAB),(SBC))=CMH$.

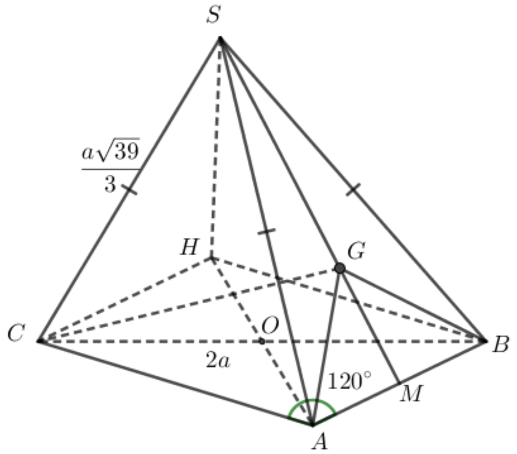
Ta có $\cos CMH=\dfrac{MH}{CM}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $BAC=120^\circ$, $BC=2a$ và $SA=SB=SC=\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB. Thể tích của khối chóp $G.ABC$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{2a^3}{9}$. Ⓑ. a^3. Ⓒ. $\dfrac{a^3}{3}$. Ⓓ. $\dfrac{a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy, vì $SA=SB=SC$ nên $HA=HB=HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC\Rightarrow HA=HB=HC=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi O là trung điểm BC, tam giác ABC cân tại A nên $\begin{cases}AO\perp BC\\ BAO=CAO=60^\circ\end{cases}$.

Suy ra $AB=AC=\dfrac{BO}{\sin BAO}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 120^\circ=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Đường cao của khối chóp là $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\dfrac{39a^2}{9}-\dfrac{12a^2}{9}}=a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3}{3}$.

Do G là trọng tâm tam giác SAB nên $GM=\dfrac{1}{3}SM\Rightarrow \mathrm{d}(G,(ABC))=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(S,(ABC))$

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

$\Rightarrow V_{G.ABC}=\frac{1}{3}V_{S.ABC}=\frac{a^3}{9}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$. Gọi M là trung điểm của SA. Biết khoảng cách từ A đến (MBC) bằng $\frac{6a}{\sqrt{21}}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{8a^3\sqrt{39}}{3}$. **B.** $\frac{10a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{13}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

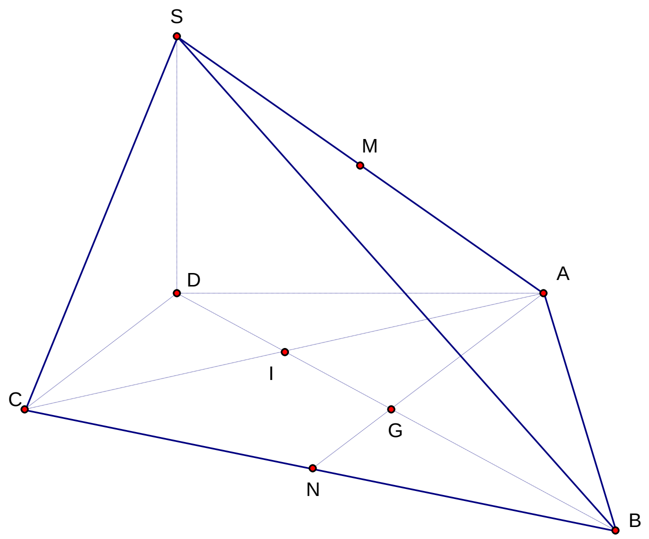
Trong mp (ABC) xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ vuông tại A và C

Khi đó ta có: $\begin{cases} AB\perp AD \\ AB\perp SA \end{cases}\Rightarrow AB\perp SD$; $\begin{cases} CB\perp CD \\ CB\perp SC \end{cases}\Rightarrow CB\perp SD$

Vậy $SD\perp(ABCD)\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SD.S_{\Delta ABC}$

Có tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=a^2\sqrt{3}$

Ta đi tìm SD

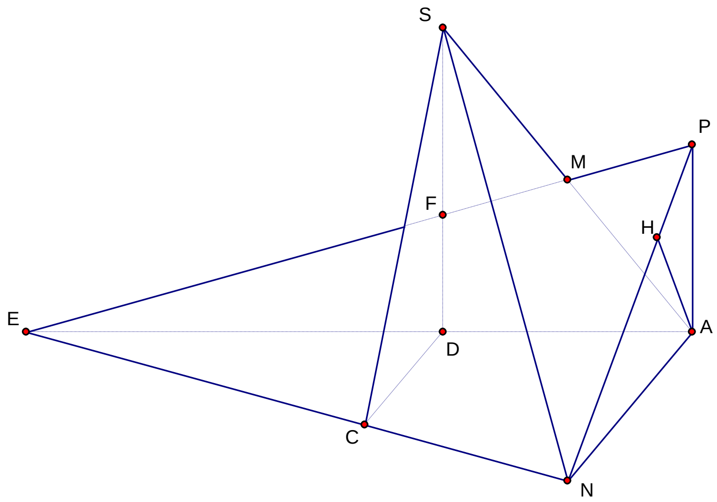


Gọi I là trung điểm AC vì tam giác ABC đều nên $I\in BD\Rightarrow AC\perp BD$

Gọi N là trung điểm $BC\Rightarrow AN\perp BC\Rightarrow AN//CD$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC dễ thấy $AGCD$ là hình thoi $\Rightarrow CD=AG=\frac{2}{3}AN$ (1)

Xét hình chóp $S.ANCD$ có đáy $ANCD$ là hình thang vuông tại C, N. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (MNC) bằng $\frac{6a}{\sqrt{21}}$ vì $(MNC)\equiv(MBC)$.



Trong mp $(ANCD)$ gọi $\{E\} = CN \cap AD$

Trong mp (SAD) kẻ tia $At//SD$ gọi $\{P\} = EM \cap At$

Gọi K là hình chiếu của G trên mặt phẳng (CFH)

Khi đó ta có $\begin{cases} AP//SD \Rightarrow AP \perp CN \\ AN \perp CN \end{cases} \Rightarrow (APN) \perp CN$

Trong mp (APN) kẻ $AH \perp PN$ ta có $AH = d\left(A,(MCN)\right) = \dfrac{6a}{\sqrt{21}}$

Mà tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a \Rightarrow AN = a\sqrt{3}$

Từ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AP^2} + \dfrac{1}{AN^2} \Rightarrow \dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{21}{36a^2} - \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow AP = 2a$

Dễ thấy $\Delta APM = \Delta SFM \Rightarrow SF = AP = 2a$ (2)

Xét tam giác EAN có $CD//AN$ nên $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{CD}{AN} = \dfrac{2}{3}$ (theo (1))

Xét tam giác EAP có $FD//PA$ nên $\dfrac{FD}{PA} = \dfrac{ED}{EA} \Rightarrow \dfrac{FD}{PA} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow FD = \dfrac{4a}{3}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $SD = SF + FD = \dfrac{10a}{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SD.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{10a}{3}.a^2\sqrt{3} = \dfrac{10a^3\sqrt{3}}{9}$ (đpt).

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $ABC = ADC = 90°$ và $BC = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $BD = 2$, $AB = 3$. Khoảng cách từ B đến (ACD) bằng

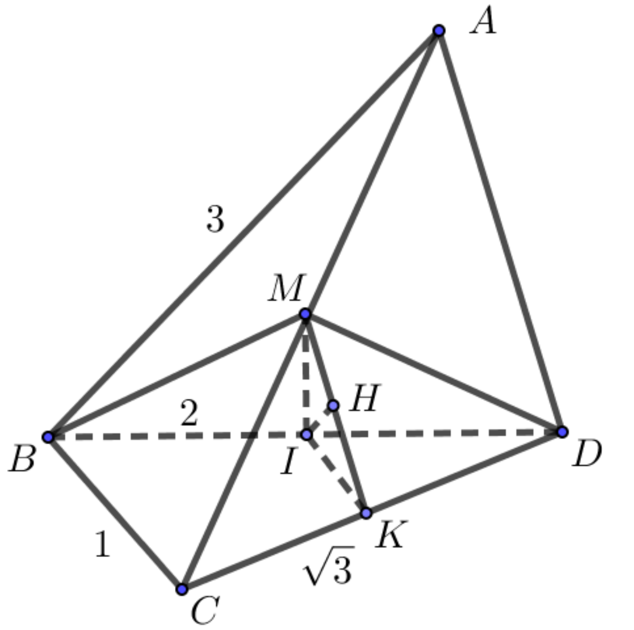
A. $\dfrac{\sqrt{6}}{7}$. B. $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$. C. $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. D. $\dfrac{\sqrt{14}}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688



Gọi M là trung điểm của AC.

Theo giả thiết $ABC = ADC = 90^\circ \Rightarrow MB = MD = MA = MC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow M$ thuộc trục đường tròn ngoại tiếp ΔBCD (1).

Lại có $BC = 1$, $CD = \sqrt{3}$, $BD = 2 \Rightarrow BC^2 + DC^2 = BD^2 \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại C. Gọi I là trung điểm của $BD \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MI \perp (BCD)$.

Gọi K là trung điểm của $CD \Rightarrow IK // BC \Rightarrow IK \perp CD$ mà $CD \perp MI \Rightarrow CD \perp (MIK)$ (3).

Kẻ $IH \perp MK$ tại H. Từ (3) $\Rightarrow IH \perp CD \Rightarrow IH \perp (MCD)$.

Do vậy, $d\left(B,(ACD)\right) = 2d\left(I,(MCD)\right) = 2IH$.

Ta có $IK = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \Rightarrow MC = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

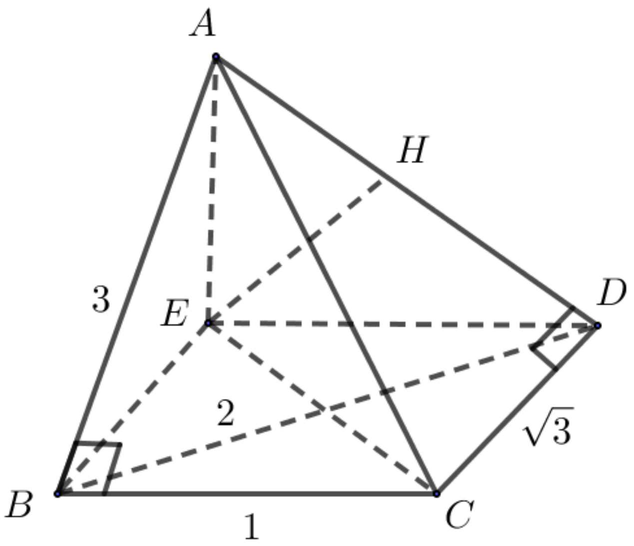
$$IC = \frac{1}{2}BD = 1 \Rightarrow MI = \sqrt{MC^2 - IC^2} = \sqrt{\frac{10}{4} - 1} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{6} + 4 = \frac{28}{6} \Rightarrow IH = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}.$$

Vậy $d\left(B,(ACD)\right) = 2IH = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

Cách 2:

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688



$BC = 1,\ CD = \sqrt{3},\ BD = 2 \Rightarrow BC^2 + DC^2 = BD^2 \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại C.

Dựng hình chữ nhật $BCDE \Rightarrow BC // ED$ mà $DC \perp BC \Rightarrow DC \perp DE$, lại có $DC \perp AD$

$\Rightarrow DC \perp (ADE) \Rightarrow DC \perp AE$ (1).

Chứng minh tương tự $BC \perp (ABE) \Rightarrow BC \perp AE$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (BCDE)$.

Kẻ $EH \perp AD$ tại H. Do $DC \perp (ADE)$ nên $DC \perp EH \Rightarrow EH \perp (ACD)$.

$BE // CD \Rightarrow d(B,(ACD)) = d(E,(ACD)) = EH$.

$AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$.

$\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{EA^2} + \frac{1}{ED^2} = \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6} \Rightarrow EH = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

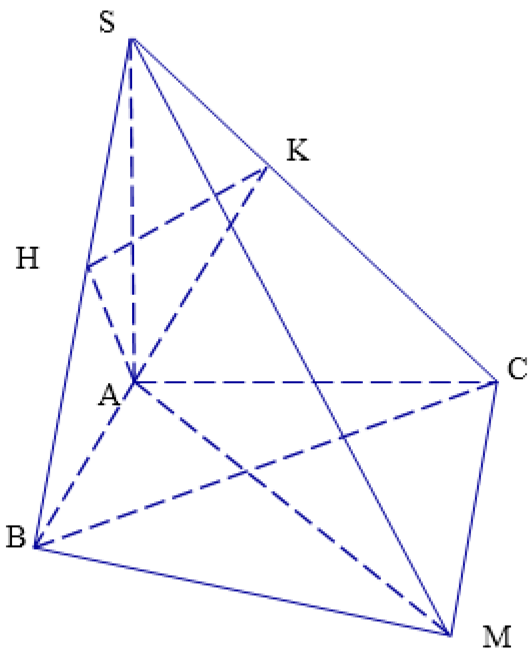
Vậy $d(B,(ACD)) = EH = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 2, AC = 3, BC = 4$, SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 1$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SC. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và (ABC), giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\frac{16\sqrt{15}}{15}$. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** 4. **D.** $\frac{6\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi AM là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó $\begin{cases} BM \perp AB \\ CM \perp AC \end{cases}$.

Lại có:

$\begin{cases} BM \perp SA \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BM \perp (SAB) \\ CM \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BM \perp AH \\ CM \perp AK \end{cases}$. Mà $\begin{cases} AH \perp SB \\ AK \perp SC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH \perp (SBM) \\ AK \perp (SCM) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} AH \perp SM \\ AK \perp SM \end{cases} \Rightarrow SM \perp (AHK)$.

Mặt khác $SA \perp (ABC)$ nên $\alpha = \left((ABC),(AHK)\right) = \left(SA, SM\right) = SAM$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{AM}{SA} = \dfrac{2R_{\Delta ABC}}{1} = 2R_{\Delta ABC}$.

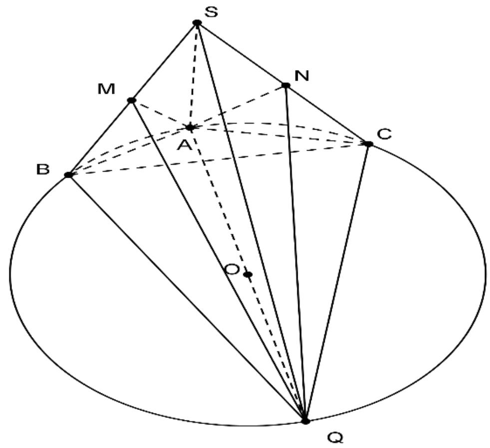
Lại có: theo công thức Hê- rông $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4} \Rightarrow R_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}} = \dfrac{8\sqrt{15}}{15}$

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{16\sqrt{15}}{15}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AC = a, AB = a\sqrt{3}, BAC = 150°$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCNM$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{4\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. Ⓑ. $\dfrac{44\sqrt{11}\pi a^3}{3}$. Ⓒ. $\dfrac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$. Ⓓ. $\dfrac{20\sqrt{5}\pi a^3}{3}$.

Lời giải



Chọn C

Dựng đường tròn tâm O là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Kẻ đường kính AQ

Xét tam giác ACB:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos BAC = 3a^2 + a^2 - 2.a^2.\sqrt{3}.\cos 150^o = 7a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{7}$

$R_{\Delta ABC} = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2.\sin 150^o} = a\sqrt{7} \Rightarrow AO = a\sqrt{7}$

Vì AQ là đường kính đường tròn tâm O, điểm B thuộc đường tròn này nên $QB \perp AB$

.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} QB \perp AB \\ QB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow QB \perp (SAB) \Rightarrow QB \perp AM$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AM \perp QB \\ AM \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow AM \perp (SQB) \Rightarrow AM \perp QM \Rightarrow \Delta AMQ$ vuông tại M.

Chứng minh tương tự ta được: ΔANQ vuông tại N

Ta có các tam giác: $\Delta ABQ, \Delta AMQ, \Delta ANQ, \Delta ACQ$ là các tam giác vuông lần lượt ở B, M, N, C

Do đó các điểm A, B, C, N, M thuộc mặt cầu đường kính AQ

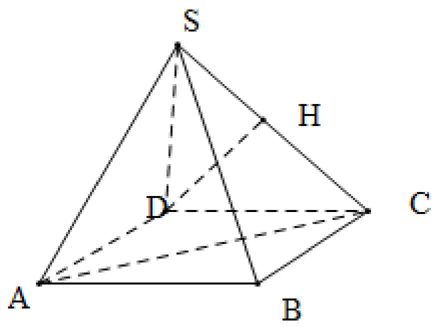
$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $A.BCMN$ bằng $AO = a\sqrt{7}$

$\Rightarrow V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(a\sqrt{7}\right)^3 = \dfrac{28\sqrt{7}\pi a^3}{3}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = AB = \sqrt{3}$; $SB = \sqrt{6}$; $AC = 2BC = 2$; $SC = \sqrt{5}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

Lời giải



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật.
Áp dụng định lý Pitago ta có các tam giác SAB ; ABC ; SBC lần lượt vuông góc tại A, B, C.

Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ BA \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp SD (1)$

$\begin{cases} BC \perp CD \\ BC \perp SC \end{cases} \Rightarrow BC \perp SD (2)$.Từ $(1);(2)$ $\Rightarrow SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp BC$. Vậy $(SBC) \perp (SDC)$ theo giao tuyến SC. Kẻ DH vuông góc với SC tại H thì $DH \perp (SBC)$.

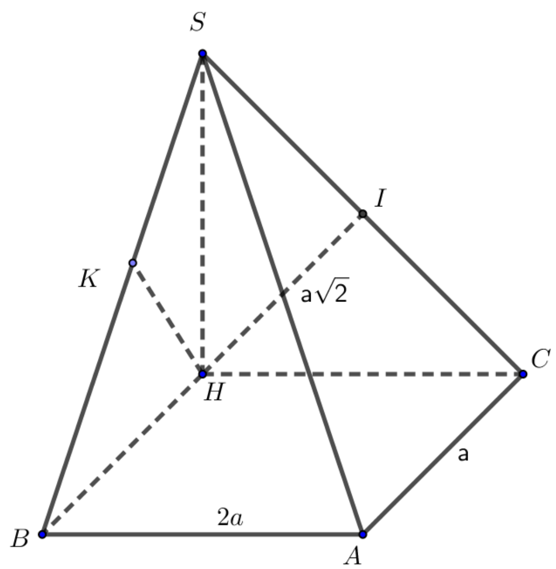
Có $AD \parallel (SBC)$ $\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = d\left(D,(SBC)\right) = DH = \dfrac{DS.DC}{\sqrt{DS^2 + DC^2}} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$. Các tam giác SBA và SCA lần lượt vuông tại B và C. Biết khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $a\sqrt{2}$, cosin của góc tạo bởi đường thẳng SC và (SAB) bằng

A. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi $\alpha = \left(SC,\left(SAB\right)\right) \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{d\left(C,\left(SAB\right)\right)}{SC}$.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $\left(ABC\right) \Rightarrow SH \perp AB,\ SH \perp AC$.

Theo giả thiết các tam giác SBA và SCA lần lượt là các tam giác vuông tại B và C
$\Rightarrow SB \perp AB,\ SC \perp AC$.

Khi đó $\begin{cases} SH \perp AB \\ SB \perp AB \end{cases} \Rightarrow HB \perp AB\left(1\right)$.

$\begin{cases} SH \perp AC \\ SC \perp AC \end{cases} \Rightarrow HC \perp AC\left(2\right)$.

Từ (1) và (2) suy ra H là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $BACH$.

Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của H lên SC và SB.

Ta có $HB//\left(SAC\right) \Rightarrow d\left(B,\left(SAC\right)\right) = d\left(H,\left(SAC\right)\right) = HI = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SHC: $\dfrac{1}{HI^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{1}{HI^2} - \dfrac{1}{HC^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{1}{2a^2} - \dfrac{1}{4a^2}$

$\Leftrightarrow SH = 2a$.

$SC^2 = SH^2 + HC^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2 \Rightarrow SC = 2a\sqrt{2}$.

Mặt khác $HB//\left(SAC\right) \Rightarrow d\left(C,\left(SAB\right)\right) = d\left(H,\left(SAB\right)\right) = HK$.

Xét tam giác vuông SHB: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HS^2} + \dfrac{1}{HB^2} \Leftrightarrow HK = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

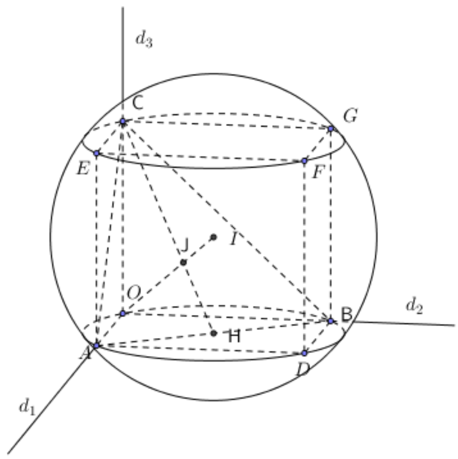
$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{HK}{SC} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}.2a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \text{cosin}\,\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{1}{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right): x^2 + \left(y-3\right)^2 + \left(z-6\right)^2 = 45$ và $M\left(1;4;5\right)$. Ba đường thẳng thay đổi d_1, d_2, d_3 nhưng đôi một vuông góc tại O cắt mặt cầu tại điểm thứ hai lần lượt là A, B, C. Khi khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(ABC\right)$ lớn nhất thì phương trình mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là

Ⓐ. $x + 2y + z - 8 = 0$. Ⓑ. $2x + y + z - 4 = 0$. Ⓒ. $x + y + 2z - 1 = 0$. Ⓓ. $x - y + z - 3 = 0$

Lời giải

Chọn A



Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;3;6), R=3\sqrt{5}$

Nhận xét:

1. O thuộc mặt cầu (S)

2. $OABC$ là một tứ diện vuông nội tiếp mặt cầu (S) nên tồn tại một hình hộp chữ nhật $OADB.CEFG$ nội tiếp mặt cầu (S).

3. Gọi H là trung điểm AB, $J=OI\cap CH \Rightarrow J$ là trọng tâm tam giác OCD.

Ta có: $\overrightarrow{OJ}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Rightarrow J(0;2;4)$.

Mặt phẳng (ABC) luôn qua J cố định.

Đánh giá: $d(M,(ABC)) \le MJ \Rightarrow d(M,(ABC))_{Max}=MJ \Rightarrow (ABC)$ qua J và nhận $\overrightarrow{JM}$ làm vectơ pháp tuyến.

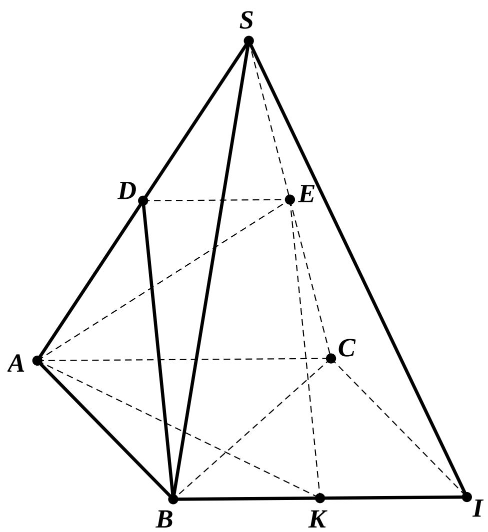
Phương trình có dạng: $x+2y+z-8=0$.

Câu 23. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA=a$. Gọi D,E lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA,SC. Biết BD vuông góc với AE, chiều cao của hình chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$. **D.** $\dfrac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Dựng hình thoi $ABIC$, gọi K là trung điểm BI.

Khi đó DE song song và bằng BK nên tứ giác $BDEK$ là hình bình hành.

$\Rightarrow BD//KE \Rightarrow AE\perp KE$ (Do $AE\perp BD$).

Đặt $AC=x$, ta có $AK^2=AE^2+EK^2 \Leftrightarrow 2BD^2=AK^2$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x^2+a^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{7x^2}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Do vậy $h=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

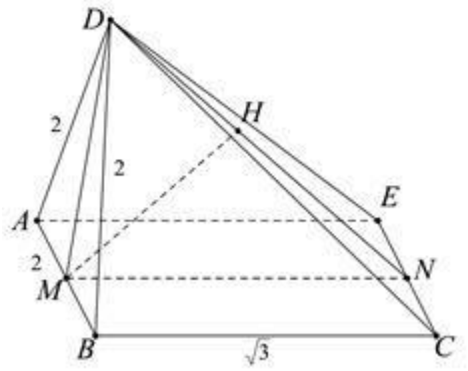
Bình luận: Bài toán trên có thể giải bằng nhiều cách dựng thêm hình khác nhau để khai thác tính chất đường thẳng AE vuông góc với đường thẳng BD, hoặc có thể khai thác giả thiết này theo cách sử dụng phương pháp véc tơ, tọa độ hóa.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABD đều cạnh bằng 2, tam giác ABC vuông tại B, $BC=\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ. $\frac{1}{2}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Ⓓ. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng hình chữ nhật $ABCE$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CE.

Xét ΔABD đều có DM là đường trung tuyến nên $DM\perp AB, DM=\frac{\sqrt{3}}{2}.AB=\sqrt{3}.$

Từ M kẻ $MH\perp DN$. Khi đó ta có

$$\begin{cases}CE\perp MN\\ CE\perp DM\ (CE//AB)\end{cases}\Rightarrow CE\perp (DMN)\Rightarrow CE\perp MH.$$

Do đó $d(AB,CD)=d(M,(CDE))=MH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra

$$DN=DH+HN=\sqrt{DM^2-MH^2}+\sqrt{MN^2-MH^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=3.$$

Ta có $CE\perp MH\Rightarrow CE\perp DN\Rightarrow CD=\sqrt{DN^2+NC^2}=\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$

Ta có $\sin(AB,CD)=\sin(CE,CD)=\sin ECD=\frac{DN}{DC}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

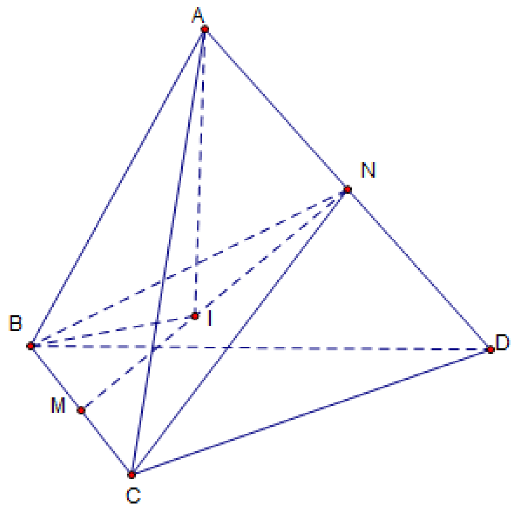
Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{6}.AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)=\frac{1}{6}.2\sqrt{10}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=BC=CD=2$, $AC=BD=1$, $AD=\sqrt{3}$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. 1. Ⓑ. $\frac{\sqrt{7}}{3}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{39}}{6}$. Ⓓ. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD

Ta có $\Delta BAD = \Delta CDA \Rightarrow BN = CN$. Suy ra MN là đường trung trực của BC.

Tương tự MN là đường trung trực của AD.

Khi đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là điểm I sao cho $IB = IA$.

Tam giác ABD vuông tai D nên $BN^2 = BD^2 + DN^2 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

$MN^2 = \frac{BN^2 + CN^2}{2} \frac{BC^2}{4} = \frac{14}{8} - 1 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ (1).

Ta có $MN = \sqrt{R^2 - BM^2} + \sqrt{R^2 - AN^2} = \sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}}$ (2).

Từ $(1),(2)$ ta có $\sqrt{R^2 - 1} + \sqrt{R^2 - \frac{3}{4}}$ $(2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

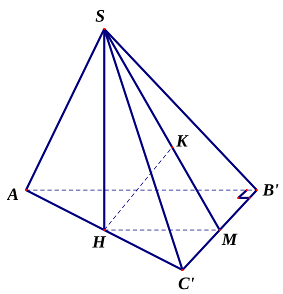
Sử dụng máy tính được nghiệm là $R = \frac{\sqrt{39}}{6}$. (hoặc dùng phím CACL thử đáp án)

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB = 60°$, $BSC = 90°$, $CSA = 120°$, $SA = a$, $SB = 2a$, $SC = 3a$. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAB) bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Chọn B



Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

+ Trên cạnh SB, SC lần lượt lấy các điểm B', C' sao cho $SB' = SC' = a \Rightarrow SA = SB' = SC'$. Gọi H là chân đường cao của hình chóp $S.AB'C' \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C'$.

Từ giả thiết suy ra $AB' = a,\ B'C' = a\sqrt{2}, AC' = a\sqrt{3} \Rightarrow AB'^2 + B'C'^2 = AC'^2 \Rightarrow \Delta AB'C'$ vuông tại $B' \Rightarrow H$ là trung điểm của cạnh AC'.

+ Kẻ $HM \perp B'C'$ (M là trung điểm của $B'C'$), $HK \perp SM \Rightarrow HK \perp (SB'C')$

$\Rightarrow HK = d\left(H, (SB'C')\right)$

Ta có $SH^2 = SA^2 - AH^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{a}{2} \Rightarrow \Delta SHM$ vuông cân tại $H \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

+ Tam giác SAB' là tam giác đều $\Rightarrow d\left(A, SB'\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

+ Đặt α là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(SAB) \Rightarrow \alpha = \left((SB'C'), (SAB')\right)$.

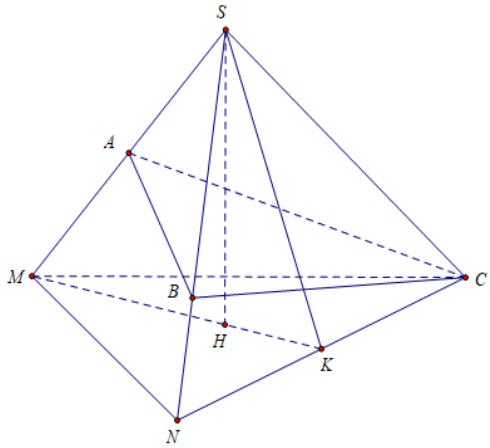
Ta có $\sin\alpha = \dfrac{d\left(A, (SB'C')\right)}{d\left(A, SB'\right)} = \dfrac{2d\left(H, (SB'C')\right)}{d\left(A, SB'\right)} = \dfrac{2.\dfrac{a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABC$ có $ASB = BSC = CSA = 60°$ và $SA = 2, SB = 3, SC = 4$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Trên tia SA, SB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $SM = SN = 4$.

Khi đó ta có các tam giác SCM, SCN và SMN đều $\Rightarrow$ $SMNC$ là tứ diện đều cạnh $SC = 4$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CMN) thì H là tâm của tam giác CMN.

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

Khi đó ta có $MH=\frac{2}{3}MK=\frac{2}{3}.\frac{4\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SM^2-MH^2}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

$S_{\Delta CMN}=\frac{1}{2}CM.CN.\sin MCN=4\sqrt{3}\Rightarrow V_{SCMN}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta CMN}=\frac{16\sqrt{2}}{3}$.

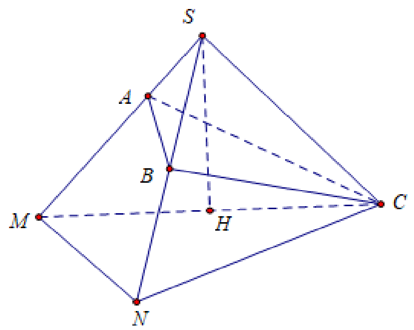
Mặt khác ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}}=\frac{SA}{SM}.\frac{SB}{SN}.\frac{SC}{SC}=\frac{3}{8}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{3}{8}V_{S.MNC}=2\sqrt{2}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=4, SB=6, SC=12$ và $ASB=60°, BSC=90°$ và $CSA=120°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $36\sqrt{3}$. Ⓑ. $36\sqrt{2}$. Ⓒ. $24\sqrt{3}$. Ⓓ. $24\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Trên tia SA, SB lần lượt lấy cá điểm M, N sao cho $SM=SN=12$. Khi đó ta có :

Tam giác SMN đều $\Rightarrow MN=12$.

Tam giác SNC vuông tại S nên $CN=SC\sqrt{2}=12\sqrt{2}$.

Tam giác SMC cân tại S có $MC=\sqrt{SC^2+SM^2-2SC.SM.\cos CSM}=12\sqrt{3}$.

Từ đó suy ra $MC^2=MN^2+CN^2$ $\Rightarrow$ tam giác CMN vuông tại N.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (CMN).

Vì $SC=SM=SN=12$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN $\Rightarrow H$ là trung điểm của MC $\Rightarrow SH=\sqrt{SC^2-CH^2}=6$.

$S_{CMN}=\frac{1}{2}MN.NC=72\sqrt{2}\Rightarrow V_{S.CMN}=\frac{1}{3}.SH.S_{CMN}=144\sqrt{2}$.

Mặt khác, ta có $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}}=\frac{SA}{SM}.\frac{SB}{SN}.\frac{SC}{SC}=\frac{1}{6}$ $\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{6}V_{S.MNC}=24\sqrt{2}$.

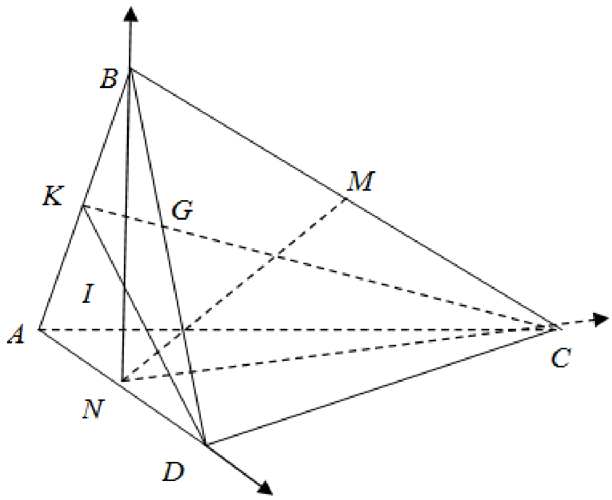
Câu 29. Cho tứ diện $ABCD$, có tam giác BCD đều, hai tam giác ABD và ACD vuông cân đáy AD. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AD. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (CDG) và (MNB), giá trị $\cos\alpha$ bằng

Ⓐ. $\frac{1}{11}$. Ⓑ. 0. Ⓒ. $\frac{1}{\sqrt{11}}$. Ⓓ. $\frac{-1}{\sqrt{11}}$.

Lời giải

Chọn C

Cách1. *Ta khôi phục về chóp tứ giác đều tất cả các cạnh bằngnhau *



Gọi K là trung điểm AB. Thì $I = DK \cap BN \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác ABD

$\left((CDG),(MNB) \right) = \left((CDK),(CNB) \right) = \alpha$.

Rõ ràng $BN \perp (ACD)$ và $ND \perp CN$.

Tứ diện đã cho là nửa chóp tứ giác đều tất cả các cạnh bằng nhau. **Chọn cạnh bằng 1**

Nên chọn hệ trục toạ độ $N \equiv O(0;0;0)$.

Gọi cạnh $AB = 2 \Rightarrow AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow CN = BN = ND = NA = \sqrt{2}$

$D\left(\sqrt{2};0;0\right), C\left(0;\sqrt{2};0\right), B\left(0;0;\sqrt{2}\right) \Rightarrow I\left(0;0;\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$.

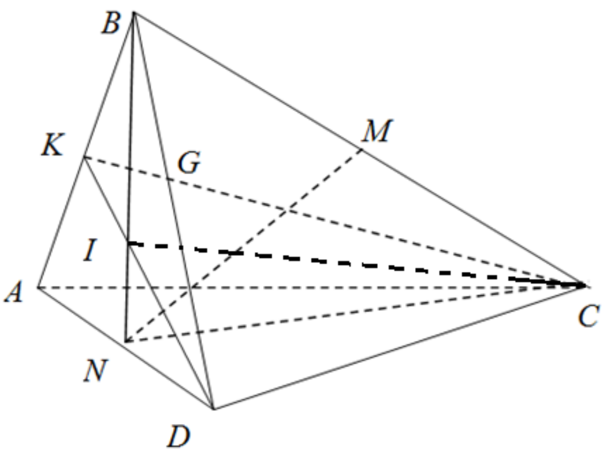
Mặt phẳng (CDK) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại D, C, I nên có phương trình dạng:

$\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} + \dfrac{z}{\sqrt{2}/3} = 1$, suy ra VTPT của (CDK) là $\overrightarrow{n_{(CDK)}} = (1;1;3)$

$ND \perp (BNC) \Rightarrow \overrightarrow{ND} = \left(\sqrt{2};0;0\right) \Rightarrow \vec{i} = (1;0;0)$ là VTPT của mặt phẳng (BNC)

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\vec{i}.\overrightarrow{n_{(CDK)}}\right|}{\left|\vec{i}\right|.\left|\overrightarrow{n_{(CDK)}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{11}}$$

Cách 2. *Phương pháp khoảng cách để tính góc.*

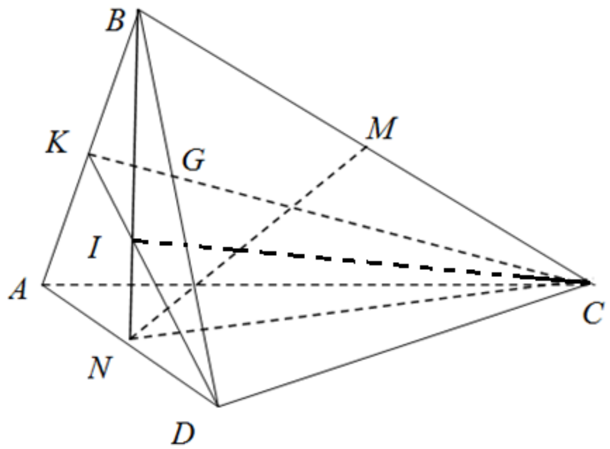


$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{d\left(D,(CNB)\right)}{d\left(D,CI\right)}$

$\Rightarrow ND \perp (CNB) \Rightarrow ND = d\left(D,(CNB)\right)$.

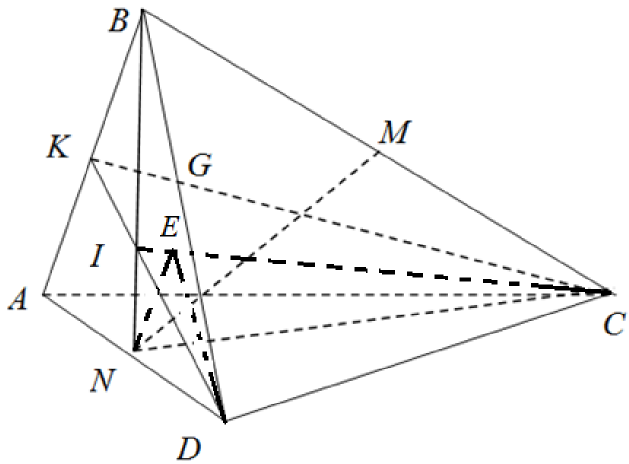
$d\left(D,CI\right) = \dfrac{2S_{CDI}}{CI}$. Từ đó ta cũng tính được $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$

Cách 3. *Phương pháp đa giác chiếu để tính góc.*



$\cos\alpha = \dfrac{S_{INC}}{S_{IDC}}$. Từ đó ta cũng tính được $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$

Cách 4. PP xác định góc để tính góc.



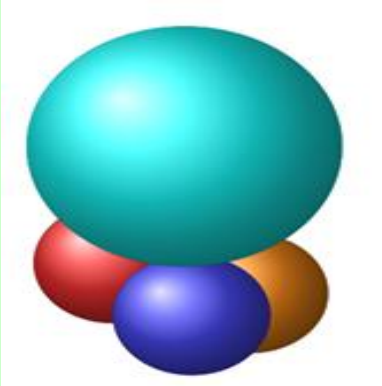
Kẻ $NE \perp CI, E \in CI$, ta chứng minh được $DE \perp IC$

$\Rightarrow \alpha = NED$, ta tính được $\tan\alpha = \dfrac{ND}{NE} = \sqrt{10} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{11}}$

Câu 30. Ba quả bóng dạng hình cầu có bán kính bằng 1 đôi một tiếp xúc nhau và cùng tiếp xúc với mặt phẳng (P). Mặt cầu (S) bán kính bằng 2 tiếp xúc với ba quả bóng trên. Gọi M là điểm bất kỳ trên (S). Khoảng cách lớn nhất từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

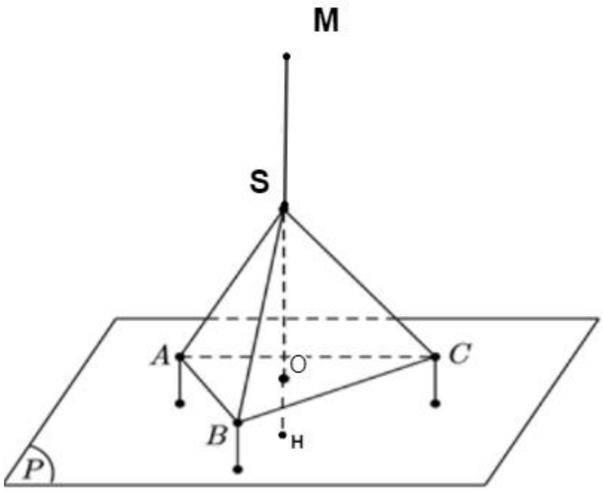
A. $3+\dfrac{\sqrt{123}}{4}$. **B**. $\dfrac{52}{9}$. **C**. $3+\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. **D**. $3+\dfrac{\sqrt{69}}{3}$.

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688



Lời giải

Chọn D



Gọi tâm quả ba quả cầu nhỏ là A, B, C và tâm của quả cầu lớn bên trên là S.
Khi đó $S.ABC$ là chóp tam giác đều có cạnh đáy là 2 và cạnh bên là 3.
Gọi O là chân đường cao của chóp $S.ABC$. Gọi H là hình chiếu của M lên mặt phẳng (P)

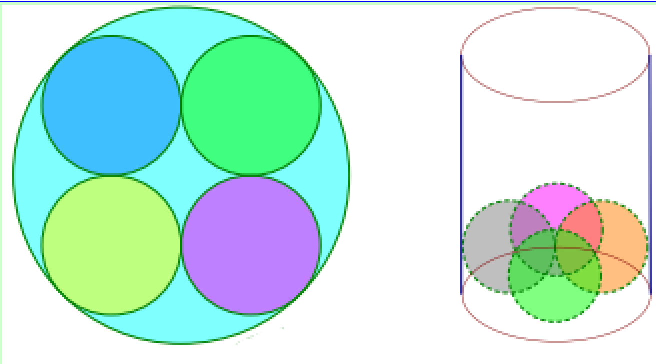
Suy ra MH lớn nhất khi M, S, O, H thẳng hàng.
$MH_{\max} = MS + SO + OH = 2 + SO + 1$.

Ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3}.\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}$.

Suy ra: $MH_{\max} = 3 + SO = 3 + \frac{\sqrt{69}}{3}$.

Câu 31. Người ta thả vào bên trong một cái ống nước dạng hình trụ 4 quả bóng tenis có cùng bán kính bằng 1. Biết rằng các quả bóng tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với các đường sinh của ống hình trụ. Biết chiều cao của ống bằng 2. Thể tích của ống nước đó bằng

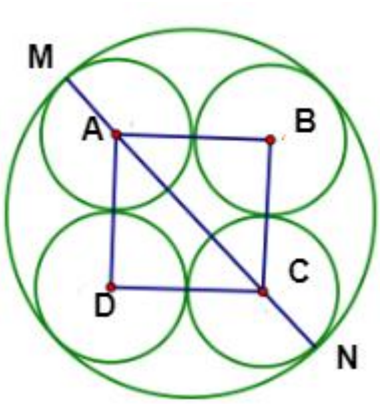
Nguyễn Hoàng Việt 0905193688



Ⓐ. $\left(3+2\sqrt{2}\right)\pi$. Ⓑ. $\left(1+\sqrt{2}\right)\pi$. Ⓒ. $\left(6+4\sqrt{2}\right)\pi$. Ⓓ. $\left(2+2\sqrt{2}\right)\pi$.

Lời giải

Chọn C

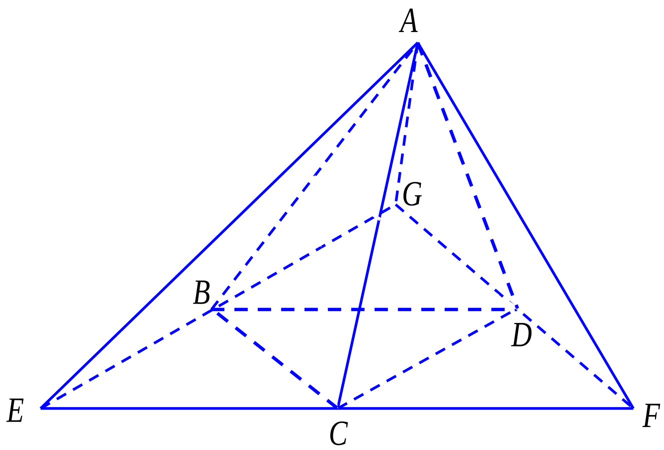


Gọi tâm của 4 quả bóng lần lượt là A, B, C, D như hình vẽ.

Khi đó $ABCD$ là hình vuông với cạnh bằng $2R = 2.1 = 2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{2}$.

Do đó bán kính đáy của hình trụ là: $r = \dfrac{\left(MA + AC + CN\right)}{2} = \dfrac{1+2\sqrt{2}+1}{2} = 1+\sqrt{2}$.

Vậy thể tích ống nước đó là: $V = \pi r^2 h = \pi.\left(1+\sqrt{2}\right)^2.2 = \left(6+4\sqrt{2}\right)\pi$.

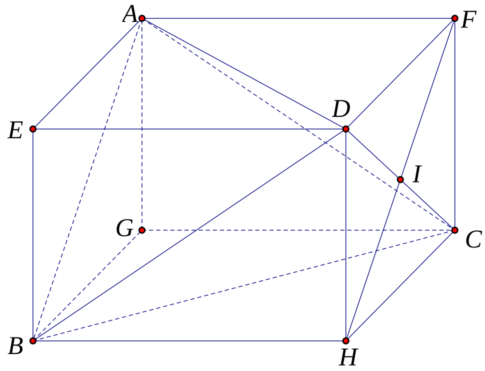


Câu 32. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = \sqrt{10}$, $AD = BC = \sqrt{5}$, $AC = BD = \sqrt{13}$. Gọi φ là góc giữa AB và $\left(ACD\right)$, giá trị $\cos\varphi$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{6\sqrt{10}}{35}$. Ⓑ. $\dfrac{\sqrt{865}}{35}$. Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. Ⓓ. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng hình hộp $AEDF.GBHC$.

Do các cạnh đối của tứ diện $ABCD$ bằng nhau nên các đường chéo của mỗi mặt của hình hộp bằng nhau suy ra $AEDF.GBHC$ là hình hộp chữ nhật.

Đặt $AE = x, AF = y, AG = z\left(x, y,\ z > 0\right)$.

Ta có hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + z^2 = 13 \\ z^2 + x^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Ta thấy: $AB\ //\ HF\ \Rightarrow \left(AB;\left(ACD\right)\right) = \left(HF;\left(ACD\right)\right)$

Gọi $I = HF \cap CD\ \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{d_{\left(F;\left(ACD\right)\right)}}{IF}$.

Tứ diện $FACD$ vuông tại F nên: $\dfrac{1}{\left[d_{\left(F;\left(ACD\right)\right)}\right]^2} = \dfrac{1}{FA^2} + \dfrac{1}{FD^2} + \dfrac{1}{FC^2} = \dfrac{49}{36}$

$\Rightarrow d_{\left(F;\left(ACD\right)\right)} = \dfrac{6}{7}$.

$FI = \dfrac{1}{2}FH = \dfrac{1}{2}\sqrt{FC^2 + FD^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

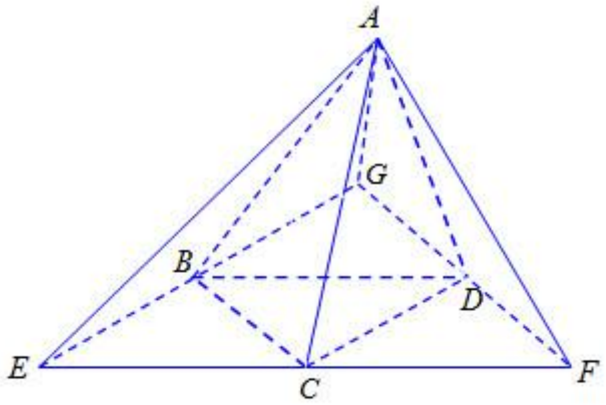
$\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{6\sqrt{10}}{35} \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{865}}{35}$.

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh $AD = BC = 3$; $AC = BD = 4$; $AB = CD = 2\sqrt{3}$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2470}}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2047}}{12}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2474}}{12}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2740}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Từ các đỉnh của tam giác BCD ta kẻ các đường thẳng song song với cạnh đối diện chúng tạo thành tam giác EFG có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác BCD.
Các tam giác AEF, AFG, AGE là các tam giác vuông tại A nên ta có:
$AE^2+AF^2=EF^2=64\ (1)$; $AF^2+AG^2=FG^2=36\ (2)$ và $AE^2+AG^2=EG^2=48\ (3)$.

Từ (1), (2), (3) ta có: $2\left(AE^2+AF^2+AG^2\right)=148 \Rightarrow AE^2+AF^2+AG^2=74\ \ (4)$.

Từ (1), (4) ta có: $AG^2=10 \Rightarrow AG=\sqrt{10}$.

Từ (2), (4) ta có: $AE^2=38 \Rightarrow AE=\sqrt{38}$.

Từ (3), (4) ta có: $AF^2=26 \Rightarrow AF=\sqrt{38}$.

Thể tích khối chóp $A.EFG$ là : $V'=\frac{1}{6}AE.AF.AG=\frac{1}{6}\sqrt{9880}=\frac{1}{3}\sqrt{2470}$.

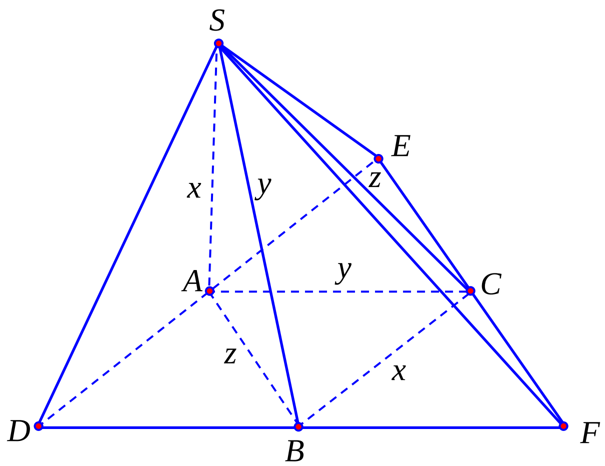
Do đó thể tích tứ diện $ABCD$ là : $V=\frac{1}{4}V'=\frac{\sqrt{2470}}{12}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=BC=x$, $SB=AC=y$, $SC=AB=z$ thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=12$. Giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

Ⓐ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Ⓑ. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Trong mặt phẳng (ABC) dựng D, E, F sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF. Khi đó ta có $DE = 2SA = 2x$; $DF = 2SB = 2y$; $= 2SC = 2z$. Suy ra SD, SE, SF đôi một vuông góc.

Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{4}V_{S.DEF} = \frac{1}{4}.\frac{1}{6}.SD.SE.SF$.

Mặt khác $\begin{cases} SD^2 + SE^2 = 4x^2 \\ SD^2 + SF^2 = 4y^2 \\ SE^2 + SF^2 = 4z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SD^2 = 2\left(x^2 + y^2 - z^2\right) \\ SE^2 = 2\left(x^2 + z^2 - y^2\right) \\ SF^2 = 2\left(y^2 + z^2 - x^2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SD = 2\sqrt{6 - z^2} \\ SE = 2\sqrt{6 - y^2} \\ SF = 2\sqrt{6 - x^2} \end{cases}$.

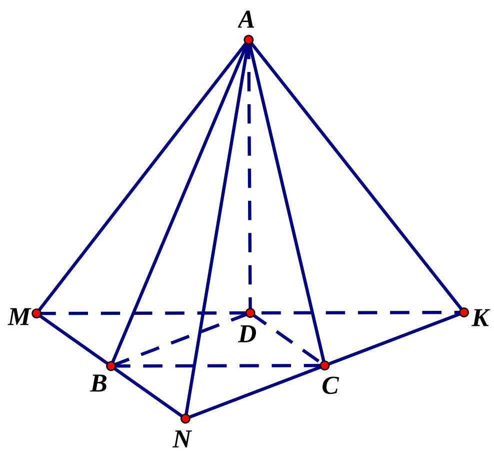
Khi đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{24}.8.\sqrt{\left(6 - x^2\right)\left(6 - y^2\right)\left(6 - z^2\right)} \le \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{6 - x^2 + 6 - y^2 + 6 - z^2}{3}\right)^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 35. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 4; AC = BD = 5; AD = BC = 6$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{15\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{45\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{45\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Dựng tứ diện $AMNK$, sao cho B, C, D là trung điểm của các cạnh MN, NK, KM. Tứ diện $AMNK$ vuông tại A.

$\begin{cases} AM^2 + AN^2 = 64 \\ AN^2 + AK^2 = 100 \\ AK^2 + AM^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = 54 \\ AN^2 = 10 \\ AK^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 3\sqrt{6} \\ AN = \sqrt{10} \\ AK = 3\sqrt{10} \end{cases}$.

$V_{AMNK} = \frac{1}{6}AM.AN.AK = \frac{1}{6}.3\sqrt{6}\sqrt{10}.3\sqrt{10} = 15\sqrt{6} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$.

Câu 36. Xét khối tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ và các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$. Giá trị của x để thể tích của khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất là

Ⓐ. $x=\sqrt{6}$. Ⓑ. $x=2\sqrt{2}$. Ⓒ. $x=\sqrt{14}$. Ⓓ. $x=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của cạnh AB, do ΔABC cân tại C nên CH là đường cao. Tam giác ABD có $AD=BD=2\sqrt{3}$ nên là tam giác cân tại D. Do đó HD là đường cao. Khi đó ta có $\begin{cases} CH\perp AB \\ HD\perp AB \end{cases} \Rightarrow AB\perp (CHD)$.

Hạ đường cao CK xuống HD khi đó $CK\perp AB$. Do đó $CK\perp (ABD)$. Vậy CK là đường cao của tứ diện. Ta có $HB=\frac{x}{2}$. Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác HBC ta có

$$HC=\sqrt{BC^2-HB^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{48-x^2}}{2}$$

Tương tự, ta có $HD=\frac{\sqrt{48-x^2}}{2}$. Đặt $y=KD$. Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác CHK và CKD ta có

$$CK^2=CH^2-HK^2=CD^2-KD^2 \Leftrightarrow CH^2-(HD-y)^2=12-y^2.$$

$$CH^2-HD^2+2HD.y-y^2=12-y^2 \Leftrightarrow y=\frac{6}{HD}=\frac{12}{\sqrt{48-x^2}}.$$

Vì vậy

$$CK^2=CD^2-y^2=12-\frac{12}{\sqrt{48-x^2}}=\frac{12\left[\left(48-x^2\right)-12\right]}{48-x^2}=\frac{12\left(36-x^2\right)}{48-x^2}\Rightarrow CK=\sqrt{\frac{12\left(36-x^2\right)}{48-x^2}}$$

Diện tích tam giác ABD là $S_1=\frac{1}{2}AB.HD=\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{48-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{48-x^2}}{4}$

Do đó thể tích tứ diện là $V=\frac{1}{3}CK.S_1=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{12\left(36-x^2\right)}{48-x^2}}.\frac{x\sqrt{48-x^2}}{4}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.x.\sqrt{36-x^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho $\left(x,\sqrt{36-x^2}\right)$,

ta có $V=\frac{\sqrt{3}}{6}x.\sqrt{36-x^2}\le\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{x^2+\left(36-x^2\right)}{2}=3\sqrt{3}.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=\sqrt{36-x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Nhận xét. Chúng ta có thể thay điều kiện các cạnh còn lại bằng $2\sqrt{3}$ bởi điều kiện các cạnh còn lại bởi một số $a>0$ nào đó bất kì, để được một bài toán khác nhưng cách làm tương tự bài này.

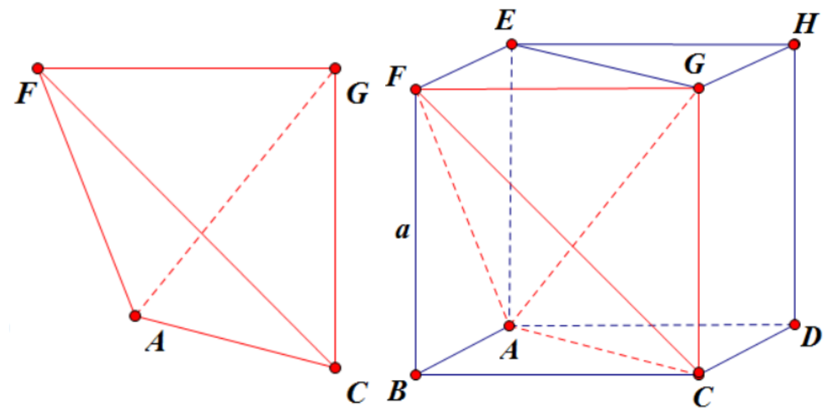
Câu 37. Cho tứ diện $ACFG$ có số đo các cạnh lần lượt là $AC=AF=FC=a\sqrt{2}$, $AG=a\sqrt{3}$, $GF=GC=a$. Thể tích của khối tứ diện $ACFG$ bằng

Ⓐ. $\frac{a^3}{6}$. Ⓑ. $\frac{a^3}{3}$. Ⓒ. $\frac{a^3}{12}$. Ⓓ. $\frac{\sqrt{15}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Dựng hình lập phương như hình vẽ



Khi đó $ABCD.EFGH$ là hình lập phương cạnh a nên thể tích của hình lập phương là $V = a^3$.

Thể tích tứ diện $ACGF$ có được là do ta chia hình lập phương theo các mặt phẳng $(ACGE),(ACF)$ và (AGF). Khi đó ta có $V_{ACGF} = \frac{1}{3}V_{ABC.EFG} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}V_{ABCD.EFGH} = \frac{a^3}{6}$

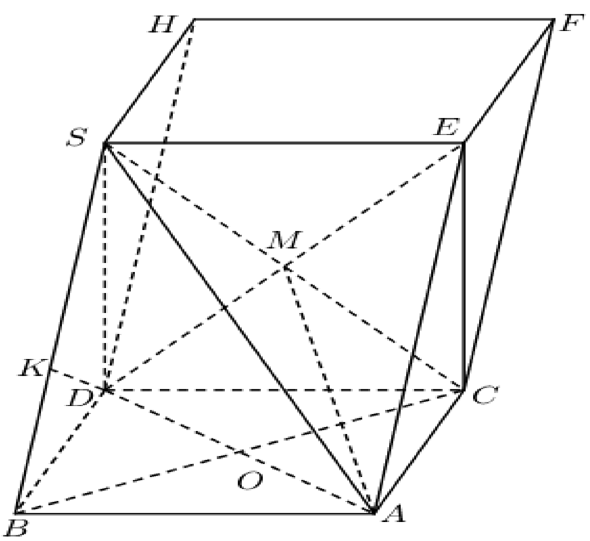
Câu 38. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A; $AB = AC = a; SA = a\sqrt{3}$.

Các tam giác $SAB; SAC$ lần lượt vuông tại $B; C$. Gọi $O; M$ lần lượt là trung điểm của $BC; SC$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(OMA);(SAB)$, giá trị $\tan\alpha$ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng hình vuông $ABDC$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp SC \\ AC \perp DC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SCD) \Rightarrow AC \perp SD$

$\begin{cases} AB \perp DB \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp SD$

$\Rightarrow SD \perp (ABCD)$

$\left((OMA);(SAB)\right) = \left((DMA);(SAB)\right) = \alpha$

$\begin{cases} (DMA) \supset OM \\ (SAB) \supset SB \\ OM // SB \end{cases} \Rightarrow (DMA) \cap (SAB) = AE \; (AE // SB // OM)$

$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{d(D;(SAB))}{d(D;AE)}$

Ta có: $SC = SB = a\sqrt{2} \Rightarrow SD = a$

$DA = DE = AE = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ADE$ đều $\Rightarrow d(D;AE) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Kẻ $DK \perp SB \Rightarrow DK \perp (SAB) \Rightarrow d(D;(SAB)) = DK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (ΔSAD vuông cân tại D)

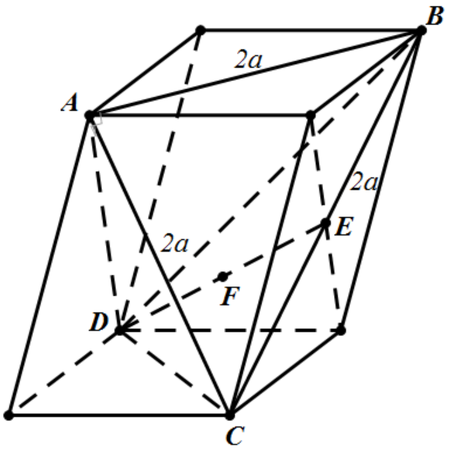
$\Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $AD = a\sqrt{3}$ và AD vuông góc với AB và AC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và DE. Góc giữa AF với CD bằng

Ⓐ. $45°$. Ⓑ. $60°$. Ⓒ. $90°$. Ⓓ. $30°$.

Lời giải

Chọn C



Dựng thêm từ tứ diện $ABCD$ thành hình hộp.

Ta có $\overrightarrow{AF} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2=\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2-a^2=0.$$

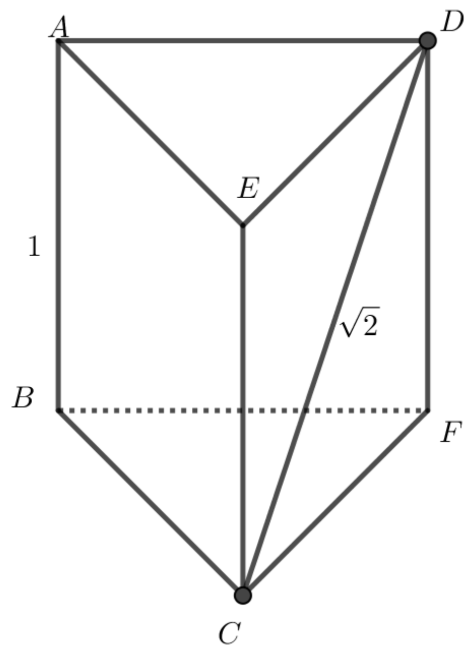
Vậy số đo góc giữa AF và CD bằng 90°.

Câu 40. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=1; CD=\sqrt{2}; ABC=DAB=90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng $AD; BC$ bằng 30°. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Dựng $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AD}$ ta được lăng trụ đứng $ADE.BFE$

Góc $(AD,BC)=(AD,AE)=30^\circ$, $ED=\sqrt{CD^2-CE^2}=1$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ đứng này là $R=\sqrt{R_d^2+\frac{h^2}{4}}$

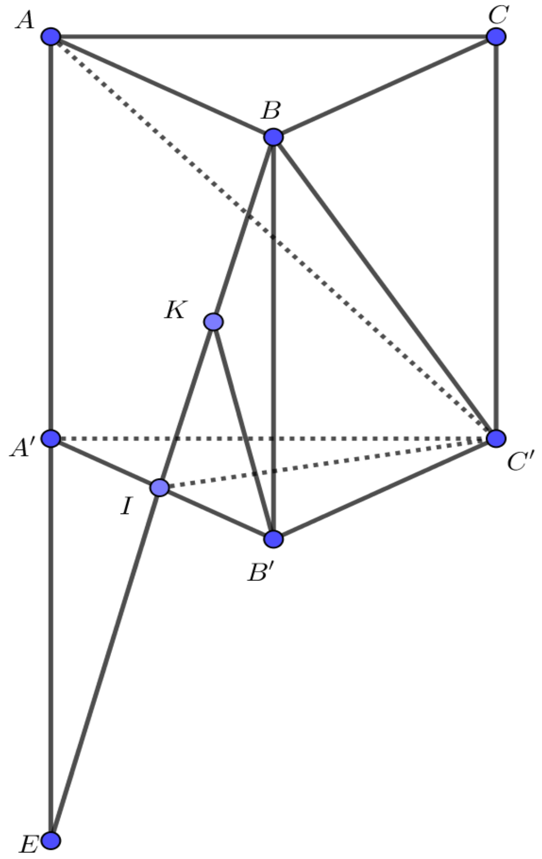
$\frac{ED}{\sin EAD}=2R_d \Leftrightarrow R_d=\frac{ED}{2\sin EAD}=1$ suy ra $R=\sqrt{R_d^2+\frac{h^2}{4}}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 41. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, gọi I là trung điểm $A'B'$ và φ là góc giữa AC' với (BIC'). Biết $AA'=a; AB=2a$, giá trị $\cos\varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{3}{5}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn A



$AC' \cap (BIC') = C'$, φ là Góc giữa AC' và (BIC'), Ta có $\sin\varphi = \dfrac{d(A,(BIC'))}{AC'}$.

Ta có $(BIC') \perp (ABB'A')$ (Vì $C'I \perp (ABB'A')$, $(BIC') \cap (ABB'A') = IB$

Gọi K là trung điểm IB suy ra $B'K \perp IB$. Suy ra $B'K \perp (BIC')$

Suy ra $d(B',(BIC')) = B'K$.

Mặt khác I là trung điểm $A'B'$ nên $d(A',(BIC')) = d(B',(BIC')) = B'K$.

Gọi E là giao điểm của $A'A$ và BI suy ra $E = A'A \cap (BIC')$ nên $\dfrac{EA'}{EA} = \dfrac{d(A',(BIC'))}{d(A,(BIC'))}$.

Mặt khác $\dfrac{EA'}{EA} = \dfrac{A'I}{AB} = \dfrac{1}{2}(Do\ AB // A'I)$.

Suy ra $\dfrac{EA'}{EA} = \dfrac{d(A',(BIC'))}{d(A,(BIC'))} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow d(A,(BIC')) = 2d(A',(BIC')) = 2B'K = 2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$.

$AC' = \sqrt{(A'A)^2 + (A'C')^2} = a\sqrt{5}$.

$\sin\varphi = \dfrac{d(A,(BIC'))}{AC'} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$ suy ra $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 42. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = BC = a$, cạnh bên bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng

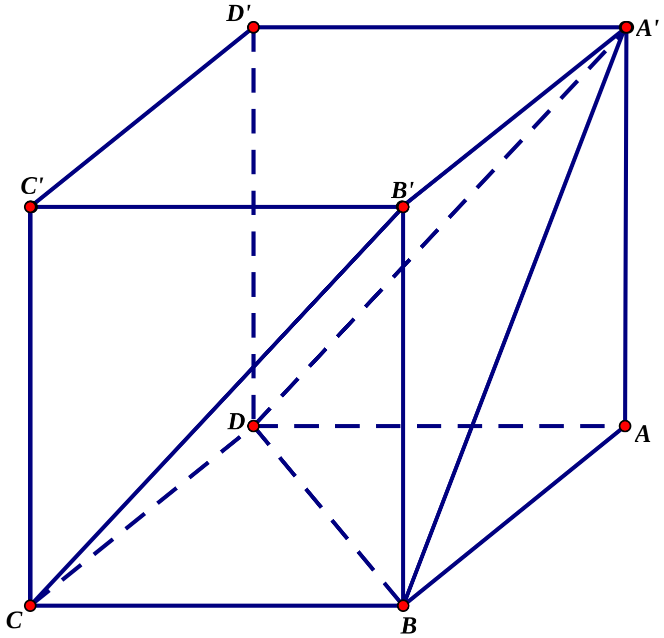
Nguyễn Hoàng Việt 0905193688

Ⓐ. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓑ. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Dựng hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó $B'C//(A'DB)$.



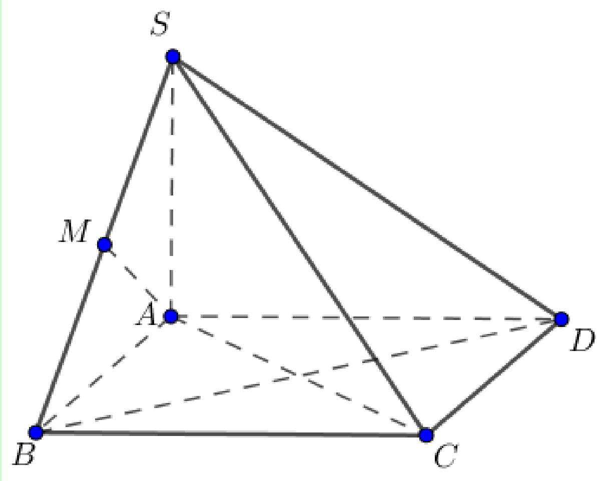
Suy ra $d(A'B,B'C)=d(B'C,(A'BD))=d(C,(A'BD))=d(A,(A'BD))$.

Ta thấy $A.A'BD$ là tứ diện vuông đỉnh A nên $\dfrac{1}{\left[d(A,(A'BD))\right]^2}=\dfrac{1}{AA'^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{3}{a^2}$.

Vậy $d(A'B,B'C)=d(A,(A'BD))=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

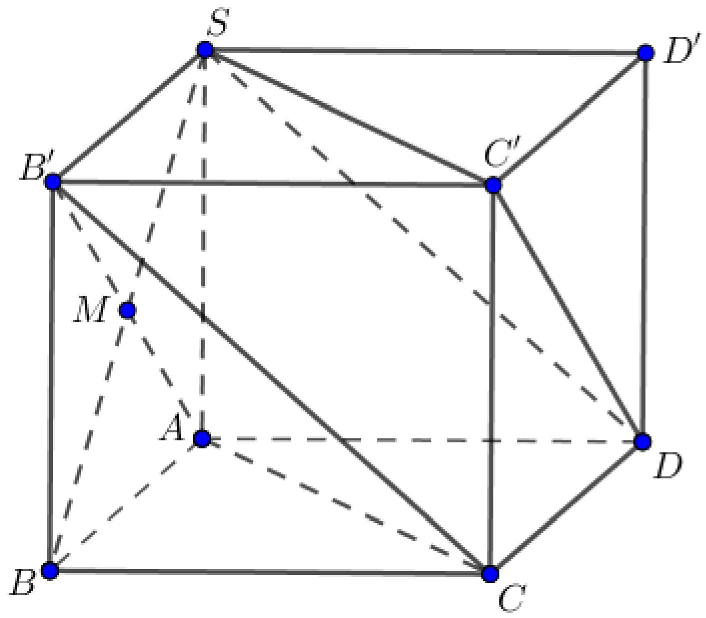
Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt đáy. Góc giữa SAB và SCD bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SB, khoảng cách giữa AM và SD bằng

Ⓐ. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ. $\dfrac{a}{2}$. Ⓓ. $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.



Lời giải

Chọn B



Ta có góc giữa SAB và SCD bằng $ASD = 45^\circ \Rightarrow SA = a$.

Dựng hình lập phương $ABCD.SB'C'D'$ như hình vẽ

Khi đó $d\;\;AM;SD\;\; = d\;\;B'AC\;\;;\;\;SC'D\;\; = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

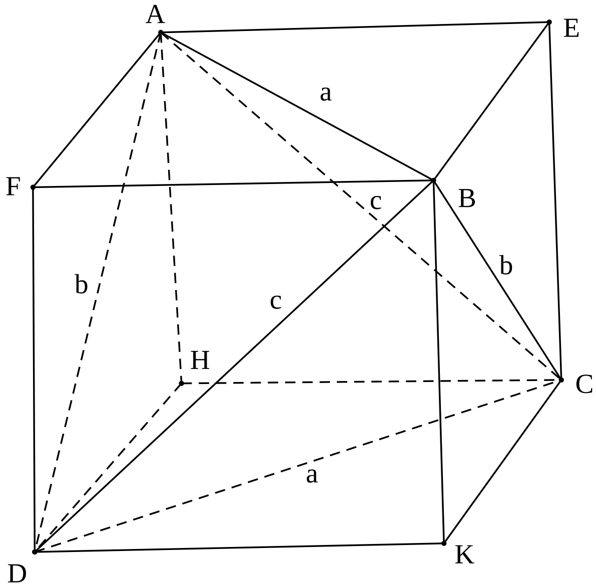
Câu 44. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$; $AD = BC = b$; $BD = AC = c$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

Ⓐ. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.   Ⓑ. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{8}}$.   Ⓒ. $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{8}$.   Ⓓ. $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

Lời giải

Chọn B

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688



Dựng hình hộp chữ nhật $AEBF.HCKD$. Đặt $AH = x,\ AE = y,\ \grave{A}F = z$.

Ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 \\ x^2 + z^2 = b^2 \\ y^2 + z^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = AK^2$.

Do đó $R = \dfrac{AK}{2} = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{8}}$.

Nguyễn Hoàng Việt 0905193688