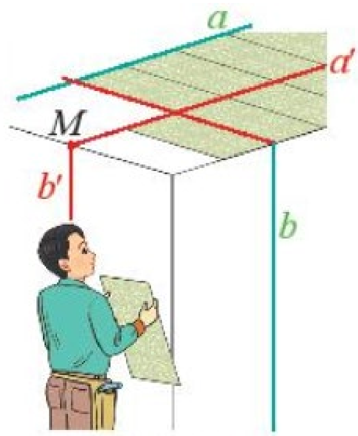
CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG:



Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Nhận xét

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

b) Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0° \le (a,b) \le 90°$.

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN:

Định nghĩa: Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

Bước 1. Sử dụng tính chất sau:

$$\begin{cases}(d_1,d_2)=\alpha \\ d_2 // d_3\end{cases} \Rightarrow (d_1,d_2)=(d_1,d_3)=\alpha$$

Bước 2. Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB=AC=a, \widehat{BAC}=120°$ và cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng

a) AB và $B'C'$

b) AC và $B'C'$

c) $A'C'$ và $B'C$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $(MN,\ SC)$ bằng:

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

Câu 5: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, khi đó $\cos\alpha$ bằng

Câu 6: Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{ABC}=\widehat{B'BA}=\widehat{B'BC}=60°$. Chứng minh tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $BAD, DAA', A'AB$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, tính giá trị của $\cos\alpha$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $CD=\frac{4}{3}AB$. Gọi G,E,F lần lượt là trung điểm của BC,AC,DB, biết $EF=\frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa CD và AB.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Tính côsin góc giữa SB và AC.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng:

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của cạnh AB. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'I$ được kết quả là

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$.

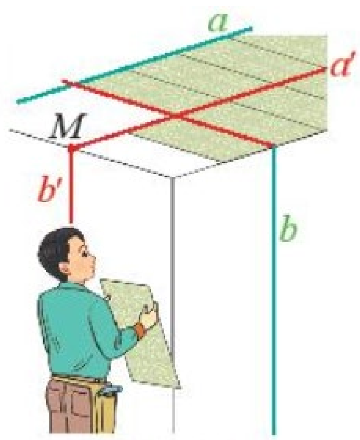
Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°, \widehat{CAD} = 90°$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài cạnh AC để côsin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. GÓC GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG:



Định nghĩa

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Nhận xét

a) Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

b) Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0° \le (a,b) \le 90°$.

2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN:

Định nghĩa: Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

1. PHƯƠNG PHÁP.

Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

Bước 1. Sử dụng tính chất sau:

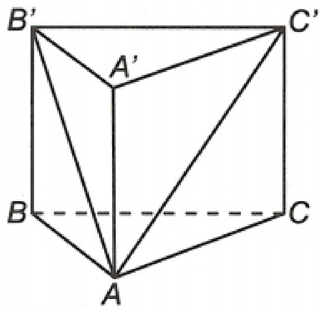
$$\begin{cases}(d_1,d_2)=\alpha\\ d_2//d_3\end{cases}\Rightarrow (d_1,d_2)=(d_1,d_3)=\alpha$$

Bước 2. Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

2. BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB=AC=a,\widehat{BAC}=120°$ và cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC.

Lời giải



Ta có $BC//B'C'\Rightarrow \widehat{(AB',BC)}=\widehat{(AB',B'C')}$

Xét $\Delta AB'C'$ có $AB'=AC'=\sqrt{AB^2+BB'^2}=a\sqrt{3}$

Áp dụng định lý cosin cho ΔABC, ta có

$BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC.\cos\widehat{BAC}$

$=a^2+a^2-2.a.a.\cos 120°=3a^2$

$\Rightarrow BC=B'C'=a\sqrt{3}$

Suy ra $\Delta AB'C'$ đều, do đó

$\widehat{(AB',BC)}=\widehat{(AB',B'C')}=\widehat{AB'C'}=60°$

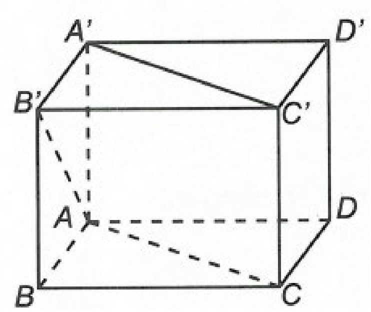
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng

a) AB và $B'C'$

b) AC và $B'C'$

c) $A'C'$ và $B'C$

Lời giải



a) Ta có $AB//A'B'$ mà $\left(\widehat{A'B',B'C'}\right)=90°$ nên $\left(\widehat{AB,B'C'}\right)=90°$

b) Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\left(\widehat{AC,BC}\right)=45°$.

Ta có $BC//B'C'$ nên $\left(\widehat{AC,B'C'}\right)=45°$

c) Ta có $AC//A'C'$ và $\Delta ACB'$ là tam giác đều vì có các cạnh đều bằng đường chéo của các hình vuông bằng nhau. Do đó $\left(\widehat{A'C',B'C}\right)=\left(\widehat{AC,B'C}\right)=60°$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $(MN,\ SC)$ bằng:

Lời giải

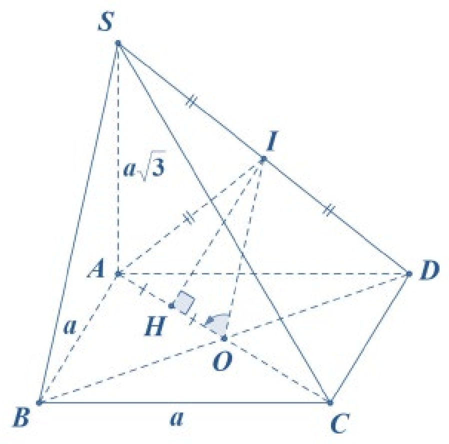
Ta có: $MN//SA \Rightarrow (MN,SC)=(SA,SC)$.

Ta lại có: $AC=a\sqrt{2}$. Xét ΔSAC, nhận thấy: $AC^2=SA^2+SC^2$.

Theo định lí Pitago đảo, ΔSAC vuông tại S. Suy ra: $\angle ASC=90^0$ hay $(MN,SC)=(SA,SC)=90^0$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

Lời giải



Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔSBD

$$\Rightarrow \begin{cases} OI // SB \\ OI = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a \end{cases}$$

Vì $OI // SB \Rightarrow \widehat{(SB, AC)} = \widehat{(OI, AC)} = \widehat{AOI}$

Ta có: $AI = \dfrac{SD}{2} = \dfrac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$

$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \Delta AOI$ cân tại I.

Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow IH \perp OA$

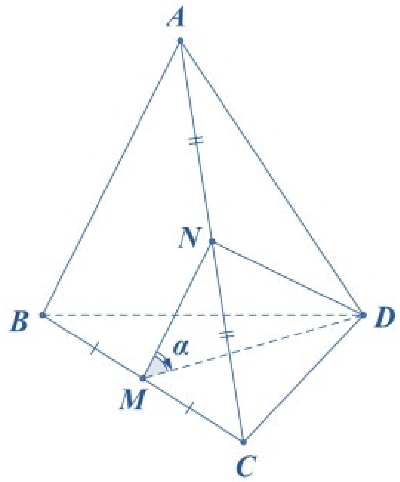
Và $OH = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

Xét ΔOHI, ta có: $\cos \widehat{HOI} = \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Vậy $\cos \widehat{(SB, AC)} = \cos \widehat{HOI} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 5: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, khi đó $\cos\alpha$ bằng

Lời giải:



Gọi N là trung điểm của AC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC

$$\Rightarrow \begin{cases} MN//AB \\ MN = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}$$

Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh bằng a

$$\Rightarrow MD = ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $MN//AB \Rightarrow \alpha = \left(\widehat{AB, DM}\right) = \left(\widehat{MN, DM}\right)$

Xét ΔMND, ta có:

$$\cos\widehat{NMD} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN.MD}$$

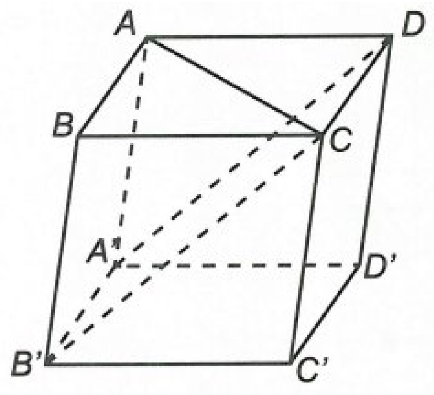
$$= \frac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

$$\Rightarrow \widehat{NMD} < 90^\circ \Rightarrow \left(\widehat{MN, DM}\right) = \widehat{NMD}$$

Vậy $\cos\alpha = \cos\widehat{NMD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6: Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và $\widehat{ABC} = \widehat{B'BA} = \widehat{B'BC} = 60^\circ$. Chứng minh tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.

Lời giải



Ta có tứ giác $A'B'CD$ là hình bình hành.

Do $\widehat{B'BC} = 60°$ nên $\Delta BB'C$ đều. Suy ra $B'C = a$.

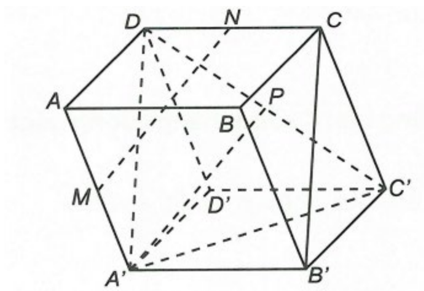
Do đó $CD = B'C = a$ nên $A'B'CD$ là hình thoi.

Ta có $\overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'}\right).\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BA} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$.

Suy ra $CB' \perp CD$. Vậy tứ giác $A'B'CD$ là hình vuông.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $BAD, DAA', A'AB$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, tính giá trị của $\cos\alpha$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} A'D \,//\, B'C \\ MN \,//\, A'P \end{cases}$ với P là trung điểm của DC'.

Suy ra $\widehat{(MN, B'C)} = \widehat{(A'P, A'D)} = \widehat{DA'P}$

Vì $\widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = \widehat{A'AB} = 60°$ và các cạnh của hình hộp bằng a.

Do đó $A'D = a, C'D = C'A' = a\sqrt{3}$.

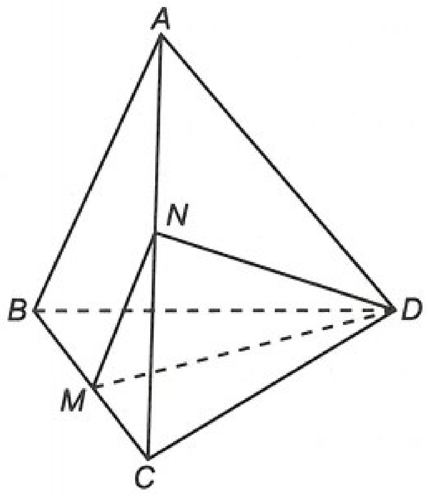
Suy ra $A'P = \frac{A'D^2 + A'C'^2}{2} - \frac{DC'^2}{4} \Rightarrow A'P = \frac{\sqrt{5}a}{2}$.

Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'DP$, ta có

$$\cos\alpha = \frac{A'D^2 + A'P^2 - DP^2}{2A'D.A'P} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a, M là trung điểm của cạnh BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DM.

Lời giải



Gọi N là trung điểm AC thì $MN\,//\,AB$.

Suy ra $\widehat{(AB,DM)}=\widehat{(MN,DM)}$.

Ta có $\cos\widehat{DMN}=\dfrac{MN^2+DM^2-DN^2}{2.MN.DM}$

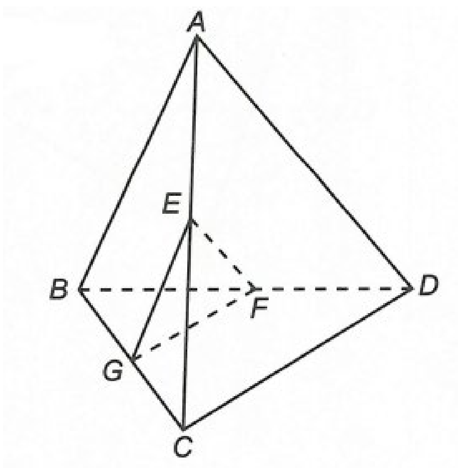
$$=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

Suy ra $\widehat{DMN}=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $\widehat{(AB,DM)}=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có $CD=\dfrac{4}{3}AB$. Gọi G,E,F lần lượt là trung điểm của BC,AC,DB, biết $EF=\dfrac{5}{6}AB$. Tính góc giữa CD và AB.

Lời giải



Gọi G là trung điểm của BC.

Đặt $AB = a$. Ta có $GE = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

$GF = \frac{CD}{2} = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3}; EF = \frac{5}{6}AB = \frac{5a}{6}$.

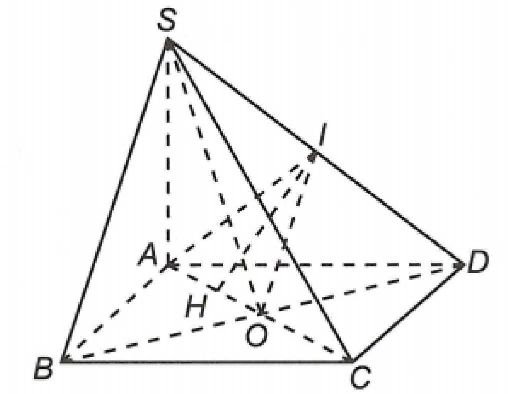
Từ đó $GE^2 + GF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{4a^2}{9} = \frac{25a^2}{36} = EF^2$

$\Rightarrow \Delta GEF$ vuông tại *G*.

Vì $GE // AB, GF // CD$ nên $\left(\widehat{AB, CD}\right) = \left(\widehat{GE, GF}\right) = \widehat{EGF} = 90°$.

Câu 10: Cho hình chóp *S.ABCD*, có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O*, cạnh bằng *a* ; *SA* vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính côsin góc giữa *SB* và *AC*.

Lời giải



Gọi *I* là trung điểm của *SD*

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔSBD. Suy ra

$$\begin{cases} OI // SB \\ OI = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a \end{cases}$$

Vì $OI // SB \Rightarrow \left(\widehat{SB, AC}\right) = \left(\widehat{OI, AC}\right) = \widehat{AOI}$

Ta có $AI = \frac{SD}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AD^2}}{2} = \frac{\sqrt{3a^2 + a^2}}{2} = a$

$\Rightarrow AI = OI \Rightarrow \Delta AOI$ cân tại *I*.

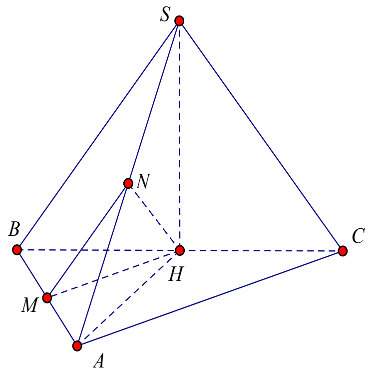
Gọi *H* là trung điểm của $OA \Rightarrow IH \perp OA$ và $OH = \frac{OA}{2} = \frac{AC}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

Xét ΔOHI có $\cos\widehat{HOI} = \frac{OH}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Vậy $\cos\left(\widehat{SB, AC}\right) = \cos\widehat{HOI} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng:

Lời giải



Tập có $AB^2+AC^2=a^2+a^2=2a^2=BC^2$. Suy ra tam giác ABC vuông tại A.

Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm của BC, AB, SA.

$\begin{cases} MN // SB \\ MH // AC \end{cases}$ nên góc giữa SB và AC là góc giữa MN và MH.

$MN=\dfrac{SB}{2}=\dfrac{a}{2}$, $NH=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a}{2}$, $AH=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác SBC có $SB=SC$ nên $SH\perp BC\Rightarrow SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{2a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

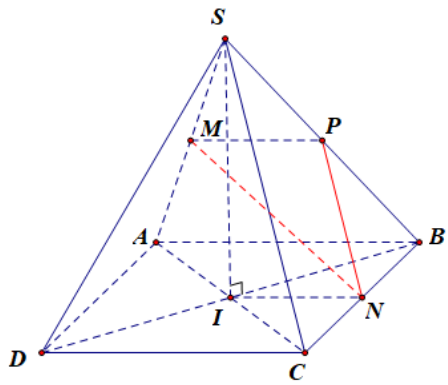
Lại có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mà $SA=SB=SC=a$ nên $SH\perp(ABC)$. Suy ra tam giác SAH vuông cân tại H.

$HN=\dfrac{SA}{2}=\dfrac{a}{2}$. Do đó tam giác MHN đều cạnh $\dfrac{a}{2}$. Góc cần tìm bằng 60^0.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

Lời giải



Gọi P là trung điểm của SB, ta có $SC // NP\Rightarrow (MN,SC)=(MN,NP)=\widehat{MNP}$.

Mà $MP=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$; $NP=\dfrac{1}{2}SC=\dfrac{a}{2}$; $MC^2=\dfrac{2\left(SC^2+AC^2\right)-SA^2}{4}=\dfrac{2\left(a^2+2a^2\right)-a^2}{4}=\dfrac{5a^2}{4}$;

$MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

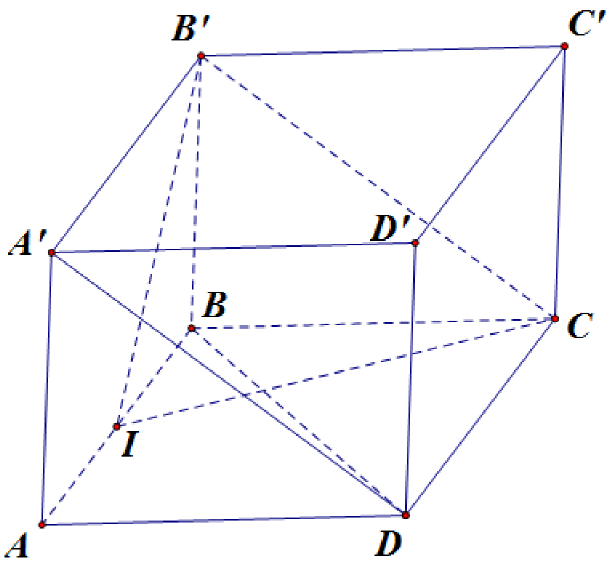
$$MN^2 = \dfrac{2\left(MC^2 + MB^2\right) - BC^2}{4} = \dfrac{2\left(\dfrac{5a^2}{4} + \dfrac{3a^2}{4}\right) - a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}.$$

Do đó $\cos\widehat{MNP} = \dfrac{NP^2 + MN^2 - MP^2}{2.NP.MN} = \dfrac{MN}{2NP} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{2.\dfrac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\widehat{MNP} = 30°$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của cạnh AB. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'I$ được kết quả là

Lời giải



Gọi độ dài cạnh hình lập phương là $a > 0$.

Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow \left(\widehat{A'D, B'I}\right) = \left(\widehat{B'I, B'C}\right)$.

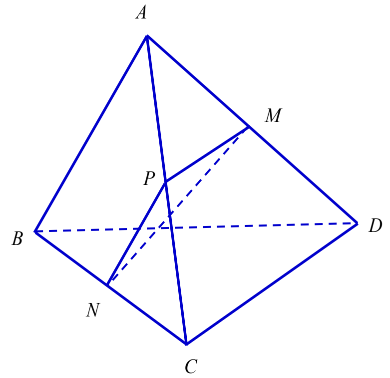
Tính được $B'I = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = CI; B'C = a\sqrt{2}$.

Trong tam giác $B'CI$ có $\cos\widehat{IB'C} = \dfrac{\left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2}{2.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}.a\sqrt{2}} = \dfrac{2a^2}{a^2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $\cos\left(\widehat{A'D, B'I}\right) = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm AC.

Ta có $NP // AB, MP // CD$ à $NP = MP = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow \left(\widehat{AB, MN}\right) = \left(\widehat{NP, MN}\right)$.

$$\cos\widehat{MNP} = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2.MN.NP} = \frac{MN^2 + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}{2.MN.\frac{a}{2}} = \frac{MN}{a}.$$

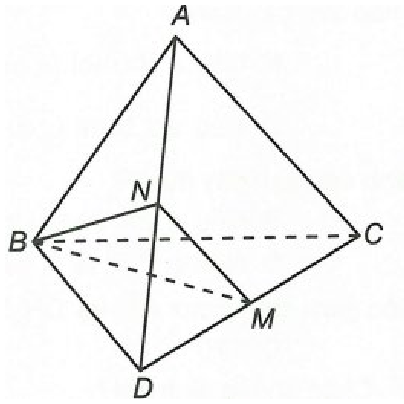
$$\left(\widehat{AB, MN}\right) = 30° \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{MNP} = 30° \\ \widehat{MNP} = 150°\end{array}\right.$$

$$\widehat{MNP} = 30° \Rightarrow \frac{MN}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\widehat{MNP} = 150° \Rightarrow \frac{MN}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (loại).}$$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°, \widehat{CAD} = 90°$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài cạnh AC để côsin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AD. Ta có $\widehat{\left(BM,AC\right)}=\widehat{\left(BM,MN\right)}=\alpha$

Đặt $AC=2x\Rightarrow MN=x>0$

Theo bài ra ta có tam giác ABD đều cạnh a nên $BD=a, BN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ACD vuông tại A nên $DC^2=AD^2+AC^2=a^2+4x^2$

Xét tam giác ABC ta có $BC^2=a^2+4x^2-2ax$

Do đó $BM^2=\dfrac{a^2+a^2+4x^2-2ax}{2}-\dfrac{a^2+4x^2}{4}=\dfrac{3a^2+4x^2-4ax}{4}$

Ta tính $\cos\widehat{BMN}=\dfrac{BM^2+MN^2-BN^2}{2BM.MN}=\dfrac{\dfrac{3a^2+4x^2-4ax}{4}+x^2-\dfrac{3a^2}{4}}{2.\dfrac{\sqrt{3a^2+4x^2-4ax}}{2}.x}$

$=\dfrac{8x^2-4ax}{4x.\sqrt{3a^2+4x^2-4ax}}=\dfrac{2x-a}{\sqrt{3a^2+4x^2-4ax}}$

Theo giả thiết ta có

$\cos\alpha=\left|\dfrac{2x-a}{\sqrt{3a^2+4x^2-4ax}}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 8x^2-8ax=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=a\end{array}\right.$

Do $x>0$ nên $x=a\Rightarrow AC=2x=2a$

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

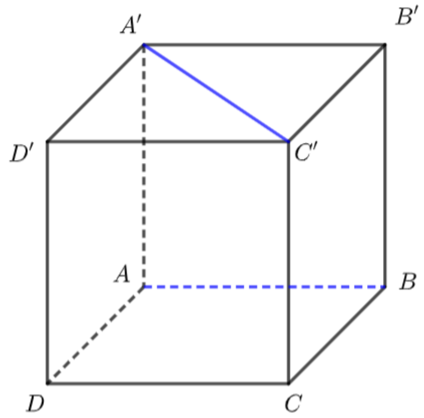
III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA là:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AA'.

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' bằng

A. 60^o. **B.** 120^o. **C.** 90^o. **D.** 45^o.

Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

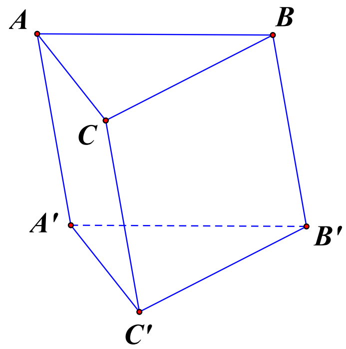
Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA_1 bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 11: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau



Góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là?

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng a. Góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S. Góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Câu 15: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và CD.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C. Các điểm M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD. Góc giữa MN và PQ bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 0^0.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

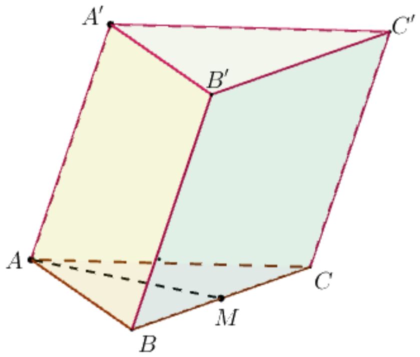
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Câu 19: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a, $SO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, góc giữa hai đường thẳng AB và SD là

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là ABC là tam giác cân tại A, M là trung điểm của BC .



Góc giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AM bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a, JI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, I,J lần lượt là trung điểm của AD,BC. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi F là trung điểm cạnh AB và G là trung điểm của SF. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng CG và BD. Tính $\cos\alpha$?

A. $\frac{\sqrt{82}}{41}$. **B.** $\frac{\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. **D.** $\frac{\sqrt{82}}{82}$.

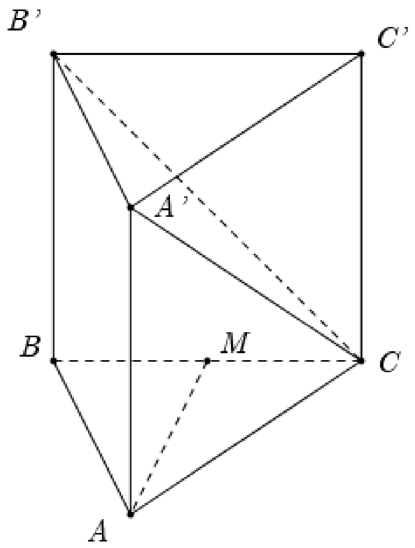
Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và $\widehat{SBA}=30^0$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của AB. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng (SM,BD).

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{26}}{13}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và DM

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $BA = 2AC = 2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, M là trung điểm BC. Cosin góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng



A. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Tam giác SAB vuông cân tại S và $\widehat{BSC} = 60°$. Gọi M là trung điểm cạnh SB, φ là góc giữa đường thẳng AB và CM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc BAD, DAA', $A'AB$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos\alpha$ bằng:

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ và M là trung điểm cạnh SD. Cô-sin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa AM và BD bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

DẠNG 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Câu 31: Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng d?

A. 3. **B.** vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 32: Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Câu 33: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Câu 34: Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $BB' \perp BD$. **B.** $A'C' \perp BD$. **C.** $A'B \perp DC'$. **D.** $BC' \perp A'D$.

Câu 35: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

A. $A'D$. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. $AC \perp SD$. **B.** $BD \perp AC$. **C.** $BD \perp SA$. **D.** $AC \perp SA$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

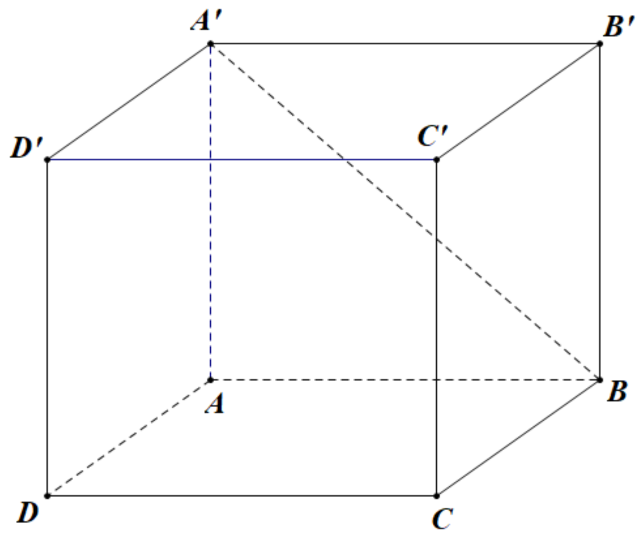
III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

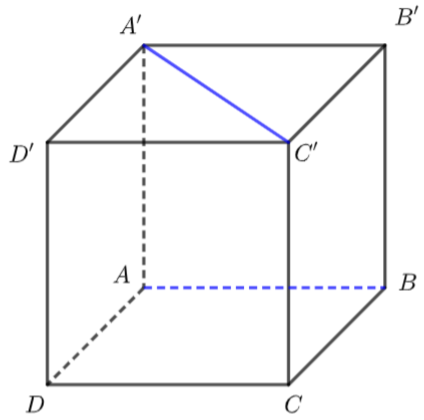
Lời giải



Ta có $AB \parallel CD$ nên $\left(\widehat{BA',CD}\right)=\left(\widehat{BA',AB}\right)$.

Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $\left(\widehat{BA',AB}\right)=\widehat{ABA'}=45°$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AB và $A'C'$ bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

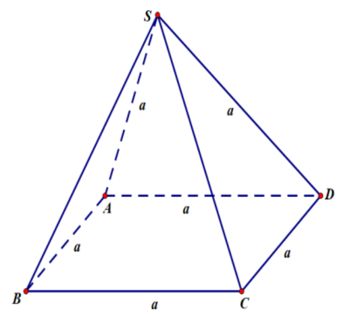
Vì $AB // A'B'$ nên $\left(\widehat{AB, A'C'}\right) = \left(\widehat{A'B', A'C'}\right) = \widehat{B'A'C'}$.

Tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $\widehat{B'A'C'} = 45°$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA là:

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

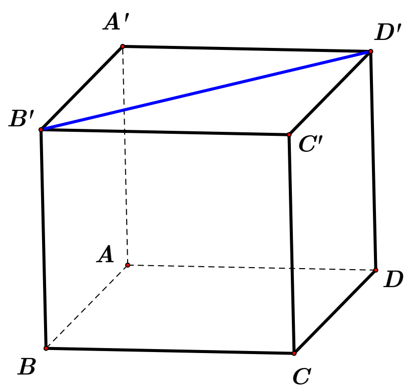


Vì $BC \parallel AD$ nên $(BC, SA) = (AD, SA) = 60°$

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và AA'.

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên các tứ giác $AA'D'D$ và $AA'B'B$ đều là hình vuông.

Do đó $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B'} = 0$

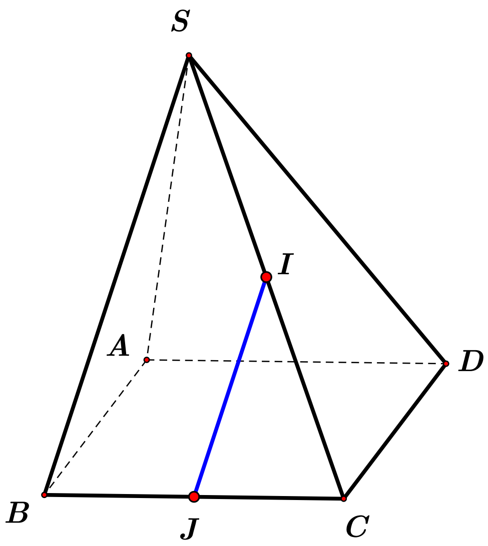
Vậy : $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AA'}.\left(\overrightarrow{A'D} - \overrightarrow{A'B'}\right) = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'D} - \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B'} = 0$

Do đó $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{B'D'}$ nên $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{B'D'}\right) = 90°$. Suy ra $(AA', B'D') = 90°$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC. Số đo của góc (IJ, CD) bằng:

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



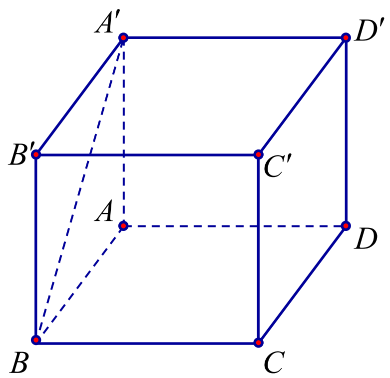
Theo giả thiết ta có IJ là đường trung bình của ΔSBC nên $IJ \,//\, SB$.

Vì $IJ \,//\, SB$ và $CD \,//\, AB$ nên $\left(IJ, CD\right) = \left(SB, AB\right) = \widehat{SBA} = 60°$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Lời giải

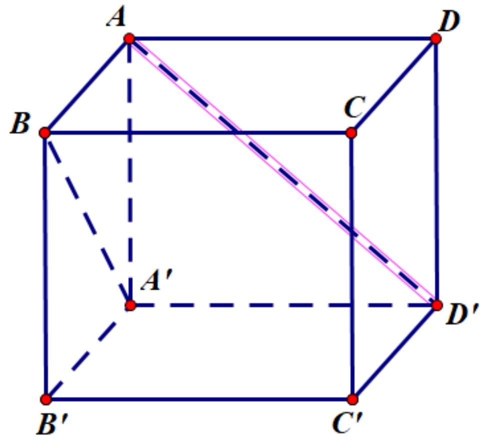


Vì $CD//AB$ nên $\left(BA', CD\right) = \left(BA', BA\right) = \widehat{ABA'} = 45°$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A^{/}B^{/}C^{/}D^{/}$. Góc giữa hai đường thẳng $A^{/}B$ và $AD^{/}$ bằng

A. 60^o. **B.** 120^o. **C.** 90^o. **D.** 45^o.

Lời giải



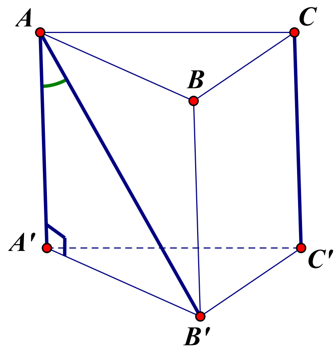
Ta có $A'B//D'C$, nên góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' bằng góc giữa hai đường thẳng $D'C$ và AD' và là góc $\widehat{AD'C} \Rightarrow \widehat{AD'C} = 60^o$;

Mà tam giác ACD' là tam giác đều nên góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và AD' bằng 60^o.

Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng

A. 30^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

Lời giải



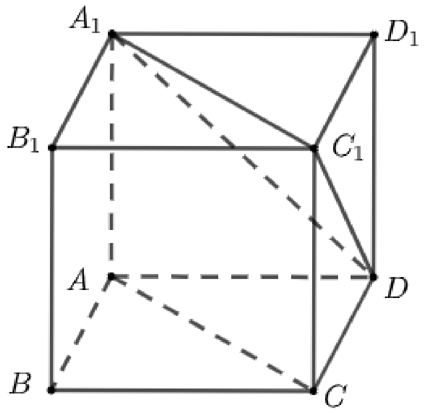
Vì $AA'//CC'$ nên góc giữa CC' và AB' bằng góc giữa AA' và AB' và bằng góc $\widehat{A'AB'}$

Với $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$ thì $\tan\widehat{A'AB'} = \frac{A'B'}{AA'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'AB'} = 30^0$

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA_1 bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $120°$.

Lời giải



Ta có $AC \parallel A_1C_1$, do đó góc giữa $(AC, DA_1) = (A_1C_1, DA_1)$, bằng góc DA_1C_1.

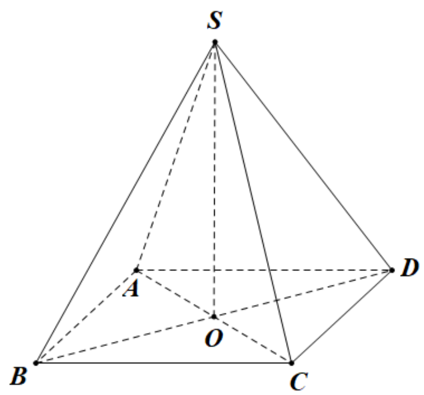
Do $DA_1; A_1C_1, DC_1$ là các đường chéo hình vuông nên bằng nhau. Vậy ΔDA_1C_1 đều,

Vậy góc DA_1C_1 bằng $60°$.

Câu 10: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

A. $30°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

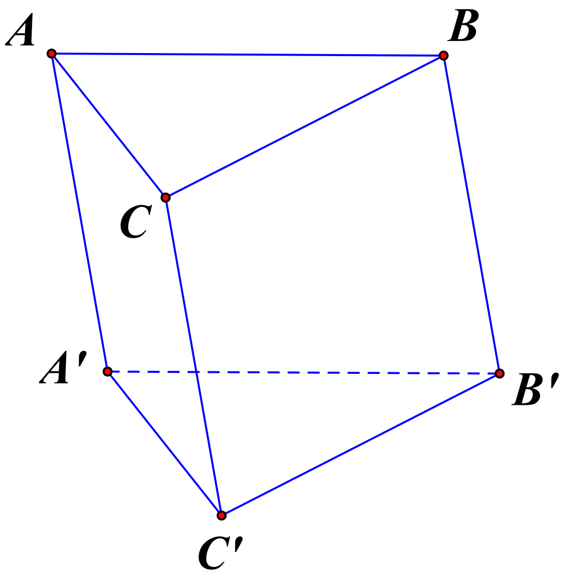
Lời giải



Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \left(\widehat{SA, CD}\right) = \left(\widehat{SA, AB}\right)$.

Tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow \widehat{SAB} = 60°$. Vậy $\left(\widehat{SA, CD}\right) = 60°$.

Câu 11: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau



Góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Ta có tam giác ABC là tam giác đều suy ra $\widehat{BAC}=60°$.

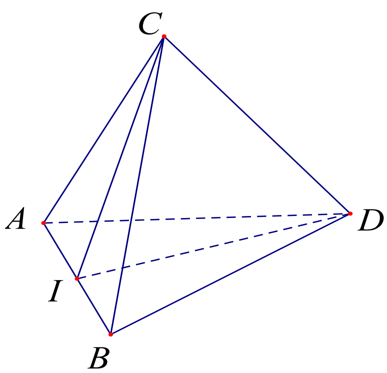
Lại có $CA // C'A' \Rightarrow \left(\widehat{AB,C'A'}\right)=\left(\widehat{AB,CA}\right)=\widehat{BAC}=60°$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng $60°$.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Góc giữa AB và CD là?

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AB

Vì ABC và ABD là các tam giác đều

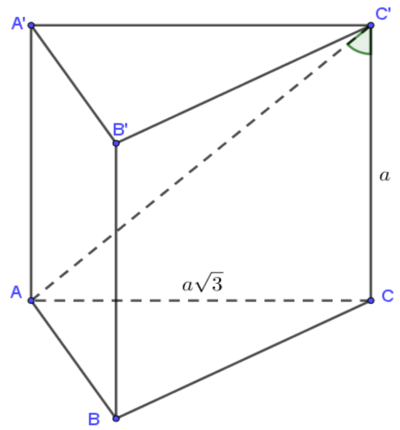
Nên $\begin{cases} CI \perp AB \\ DI \perp AB \end{cases}$.

Suy ra $AB \perp (CID) \Rightarrow AB \perp CD$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng a. Góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Ta có $BB'//CC' \Rightarrow \left(\widehat{BB',AC'}\right)=\left(\widehat{CC',AC'}\right)=\widehat{AC'C}$.

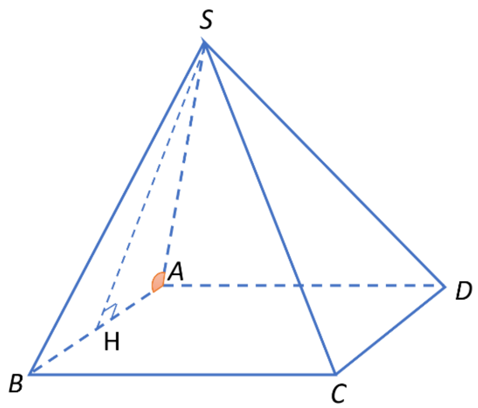
Khi đó $\Delta ACC'$ vuông tại C nên $\tan\widehat{AC'C}=\dfrac{AC}{CC'}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{AC'C}=60°$.

Vậy góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng $60°$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S. Góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

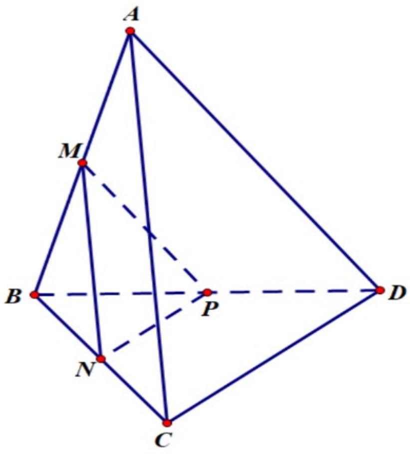


Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $CD//AB \Rightarrow \left(\widehat{SA;CD}\right)=\left(\widehat{SA;AB}\right)=\widehat{SAB}=45°$.

Câu 15: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC. Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và CD.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm của BD.

Ta có MN, NP, MP lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC, BCD, ABD.

Do đó:

$MN // AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

$NP // CD$, $NP = \frac{1}{2}CD$.

$MP // AD$, $MP = \frac{1}{2}AD$.

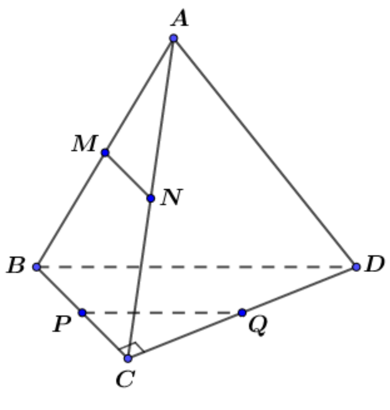
$ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow AC = CD = AD \Rightarrow MN = NP = MP$ nên tam giác MNP là tam giác đều.

$\left(\widehat{MN, CD}\right) = \left(\widehat{MN, NP}\right) = \widehat{MNP} = 60°$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C. Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD. Góc giữa MN và PQ bằng

A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 0^0.

Lời giải

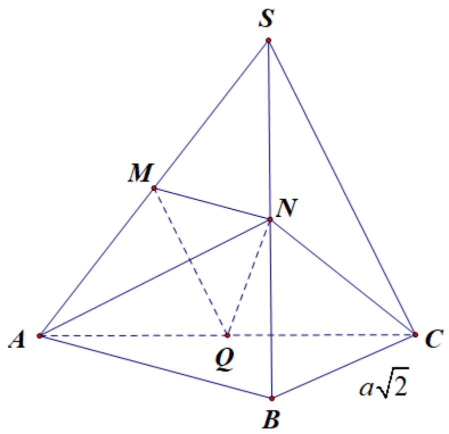


Do MN song song BC và PQ song song BD nên góc giữa MN và PQ bằng góc giữa BC và BD và bằng góc $\widehat{CBD} = 45^0$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải



Cách 1:

Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} MN // AB \\ MQ // SC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AB, SC)} = \widehat{(MN, MQ)}$.

Ta có $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$NC = \sqrt{\frac{SC^2 + BC^2}{2} - \frac{SB^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Xét tam giác NAC có $NQ = \sqrt{\dfrac{NA^2 + NC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}}{2} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

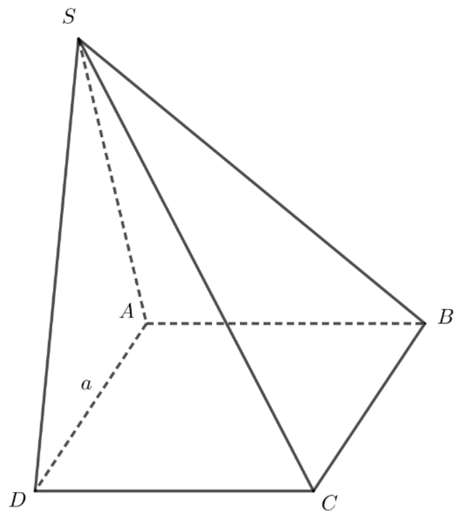
Xét tam giác MNQ có $\cos\widehat{NMQ} = \dfrac{MN^2 + MQ^2 - NQ^2}{2MN.MQ} = \dfrac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = -\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{NMQ} = 120° \Rightarrow \widehat{(MN, MQ)} = 180° - 120° = 60°$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAD đều. Góc giữa BC và SA bằng

A. 60°. **B.** 30°. **C.** 90°. **D.** 45°.

Lời giải

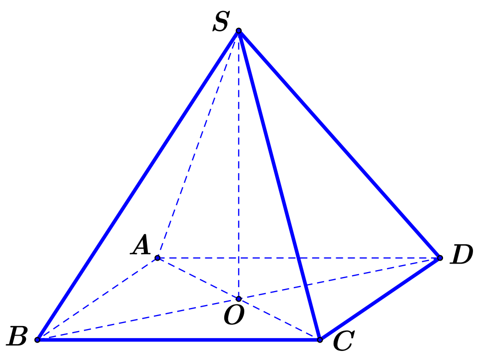


Vì $BC//AD \Rightarrow \left(\widehat{BC,SA}\right)=\left(\widehat{AD,SA}\right)=\widehat{SAD}=60^\circ$.

Câu 19: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a, $SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, góc giữa hai đường thẳng AB và SD là

A. 120°. **B.** 60°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải



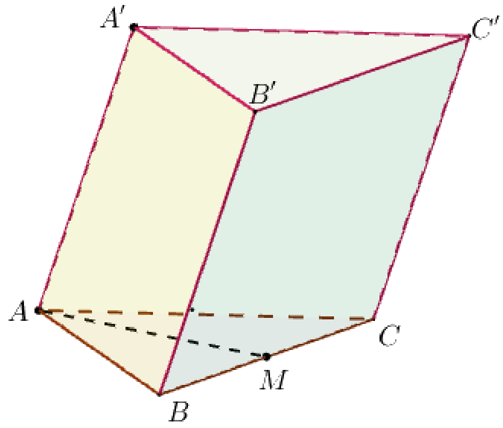
Ta có: $AB//CD \Rightarrow (AB,SD)=(CD,SD)$.

$OD=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}}=a \Rightarrow SD=SC=CD=a \Rightarrow \Delta SCD$ đều $\Rightarrow \widehat{SDC}=60^\circ$.

Suy ra $(AB,SD)=(CD,SD)=\widehat{SDC}=60^\circ$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là ABC là tam giác cân tại A, M là trung điểm của BC
.



Góc giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AM bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

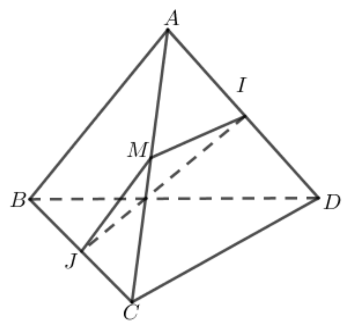
Do tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm đoạn BC nên $AM \perp BC$.

Ta có $BC//B'C'$ do đó $\left(B'C',AM\right)=\left(BC,AM\right)=90°$.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=a, JI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, I,J lần lượt là trung điểm của AD,BC. Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AC. Khi đó góc giữa hai đường thẳng AB,CD bằng góc giữa hai đường thẳng MI và MJ.

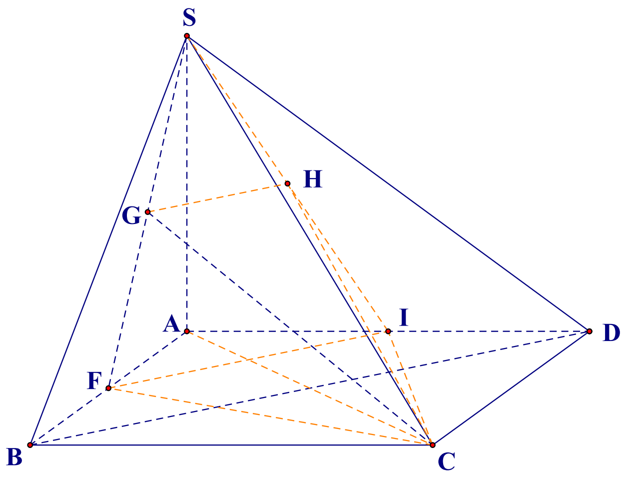
Ta có $\cos\widehat{IMJ}=\dfrac{IM^2+MJ^2-IJ^2}{2MI.MJ}=\dfrac{-1}{2}$.

Từ đó suy ra góc giữa hai đường thẳng AB,CD bằng 60^0.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi F là trung điểm cạnh AB và G là trung điểm của SF. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng CG và BD. Tính $\cos\alpha$?

A. $\dfrac{\sqrt{82}}{41}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{82}}{82}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm AD và H là trung điểm SI.

Dễ thấy $GH // FI$

$BD // FI$

Nên $GH // BD$ suy ra $(CG;BD)=(CG;GH)$.

Ta có $CI=\sqrt{CD^2+DI^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow CF=CI=\frac{a\sqrt{5}}{2}$;

$SF=SI=\sqrt{SA^2+AF^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{17}}{2}$;

$SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{(2a)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{6}$.

Khi đó $CG^2=\frac{CF^2+CS^2}{2}-\frac{SF^2}{4}=\frac{\frac{5a^2}{4}+6a^2}{2}-\frac{\frac{9a^2}{4}}{4}=\frac{41a^2}{16}\Rightarrow CH=CG=\frac{a\sqrt{41}}{4}$;

$GH=\frac{1}{2}FI=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

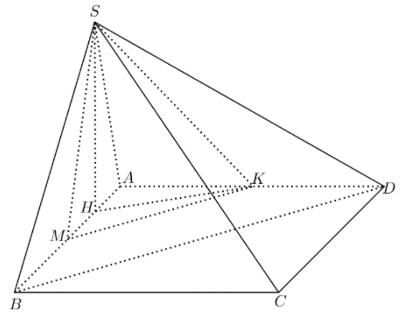
Ta có $\cos\widehat{CGH}=\frac{GC^2+GH^2-HC^2}{2.GC.GH}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{41}}{4}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{41}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{82}}{82}$.

Vậy $\cos\alpha=\frac{\sqrt{82}}{82}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, tam giác SAB vuông tại S và $\widehat{SBA}=30^0$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của AB. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng $\left(SM, BD\right)$.

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{26}}{13}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Đặt $AB = a\ \left(a > 0\right)$.

Ta có $SM = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}; SA = SA.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$ nên tam giác SAM cân tại S.

Gọi H là hình chiếu của S lên AB, do $\left(SAB\right) \perp \left(ABCD\right)$ và $\left(SAB\right) \cap \left(ABCD\right) = AB$ nên $SH \perp \left(ABCD\right)$ hay H là trung điểm của AM.

Gọi K là trung điểm của AD, khi đó $\widehat{\left(SM, BD\right)} = \widehat{\left(SM, MK\right)}$ và $MK = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó $SH = HB.\tan 30^0 = \frac{3a}{4}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

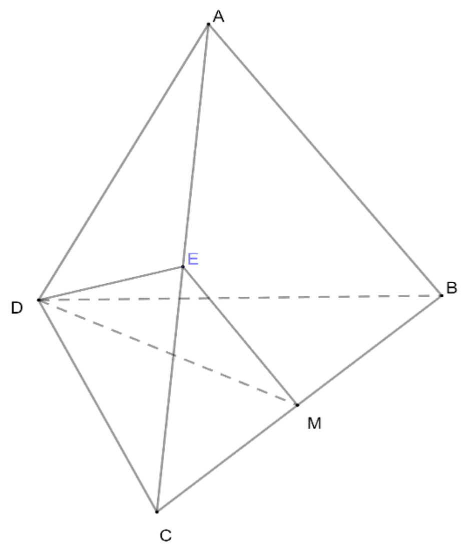
$SK^2 = SH^2 + HK^2 = SH^2 + AH^2 + AK^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ta có $\cos\widehat{SMK} = \frac{SM^2 + MK^2 - SK^2}{2.SM.MK} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}}{2.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 24: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của BC. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB và DM

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



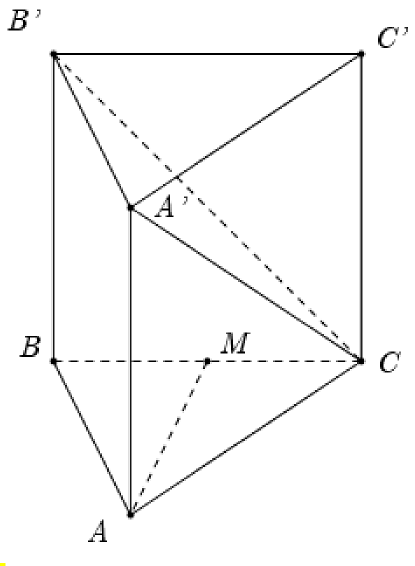
Gọi E là trung điểm cạnh AC. Khi đó ta có $EM \parallel AB$. Suy ra $\cos\left(AB, DM\right) = \cos\left(EM, DM\right)$.

Tứ diện $ABCD$ đều, cạnh a. E, M lần lượt là trung điểm của AC, BC. Suy ra $DM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $DE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $EM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Do đó, $\cos\widehat{DME} = \dfrac{DM^2 + EM^2 - DE^2}{2DM.EM} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

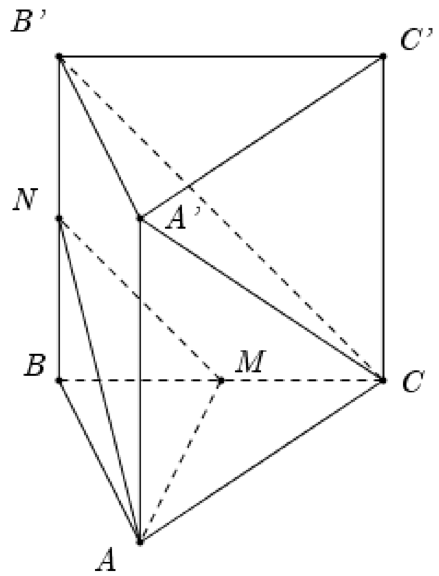
Vậy $\cos\left(AB, DM\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $BA = 2AC = 2a$, cạnh bên $AA' = 2a$, M là trung điểm BC. Cosin góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AM bằng



A. $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm BB', ta có $MN//B'C$ nên $\left(AM,B'C\right)=\left(AM,MN\right)$.

Ta có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a.$

$$AM=\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{5}a}{2}.$$

$$AN=\sqrt{AB^2+BN^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a.$$

$$MN=\frac{B'C}{2}=\frac{\sqrt{BC^2+BB'^2}}{2}=\frac{\sqrt{5a^2+4a^2}}{2}=\frac{3}{2}a.$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác MNA ta có:

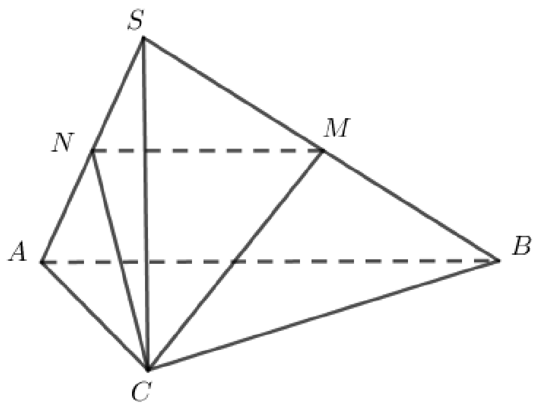
$$\cos\widehat{NMA}=\frac{MN^2+MA^2-AN^2}{2.MN.MA}=\frac{\frac{9}{4}a^2+\frac{5}{4}a^2-5a^2}{2.\frac{3}{2}a.\frac{\sqrt{5}}{2}a}=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $\cos\left(AM,B'C\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C. Tam giác SAB vuông cân tại S và $\widehat{BSC}=60°$. Gọi M là trung điểm cạnh SB, φ là góc giữa đường thẳng AB và CM. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Đặt $SA = a$. Suy ra $SB = CA = CB = a$ và $AB = a\sqrt{2}$.

Lại có $\widehat{BSC} = 60^o$. Suy ra tam giác SBC đều nên $SC = a$.

Suy ra $CM = CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hay MN song song với AB.

Khi đó $\widehat{(AB, CM)} = \widehat{(MN, CM)}$. Áp dụng định lí cosin vào tam giác CMN ta có:

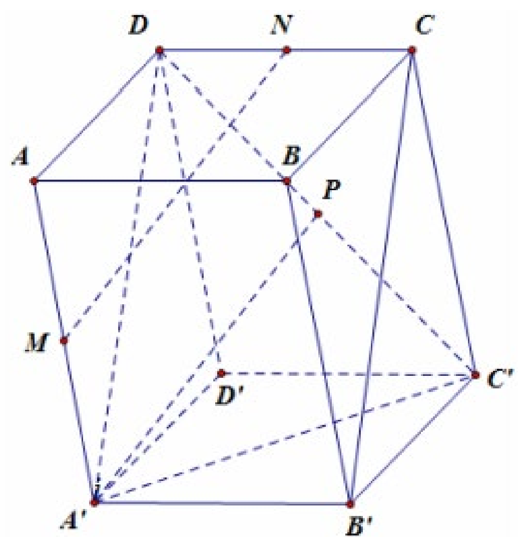
$$\cos\widehat{\text{CMN}} = \frac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2MC.MN} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow \cos(AB, CM) = \cos(MN, CM) = \left|\cos\widehat{CMN}\right| = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc BAD, DAA', $A'AB$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, giá trị của $\cos\alpha$ bằng:

A. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$.

Lời giải



Gọi P là trung điểm của DC'.

Ta có $\begin{cases} A'D // B'C \\ MN // A'P \end{cases}$

Suy ra $\left(\widehat{MN, B'C}\right) = \left(\widehat{A'P, A'D}\right) = \widehat{DA'P} = \alpha$.

$\Delta ADA'$ có $AD = AA'$ và $\widehat{DAA'} = 60°$ nên $\Delta ADA'$ là tam giác đều. Suy ra $A'D = a$.

$\Delta A'AB$ có $AB = AA'$ và $\widehat{A'AB} = 60°$ nên $\Delta A'AB$ là tam giác đều.

Do đó $\Delta D'DC$ cũng là tam giác đều. Vậy $DC' = 2DP = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

ΔBAD có $AD = AB$ và $\widehat{BAD} = 60°$ nên ΔBAD là tam giác đều.

Vì ΔBAD là tam giác đều nên $\Delta B'A'D'$ cũng là tam giác đều.

Gọi $A'I$ là đường cao của $\Delta B'A'D'$. Khi đó $A'C' = 2A'I = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Dễ thấy $A'P$ là đường trung tuyến của tam giác $DA'C'$ nên $A'P = \dfrac{A'D^2 + A'C'^2}{2} - \dfrac{DC'^2}{4} = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$

.

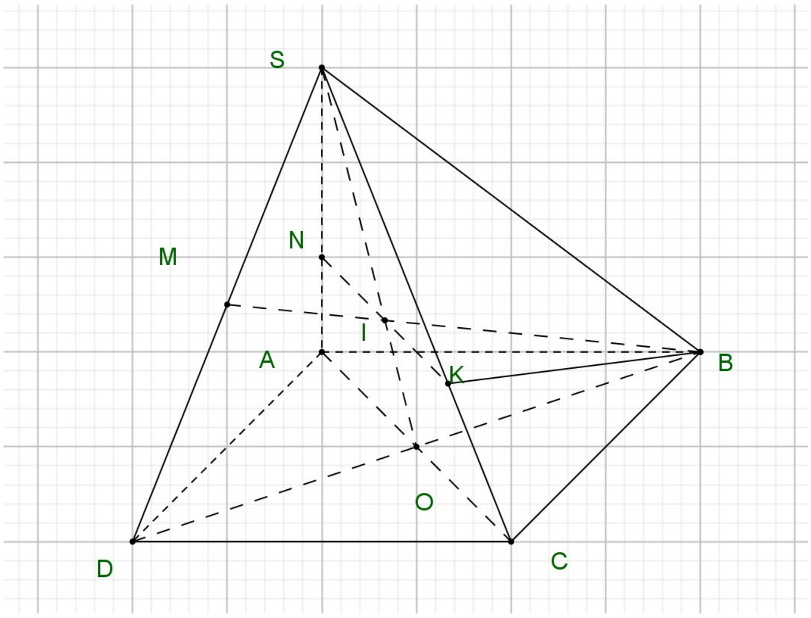
Áp dụng định lý cosin cho tam giác $A'DP$, ta có

$$\cos\alpha = \frac{A'D^2 + A'P^2 - DP^2}{2A'D.A'P} = \frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ và M là trung điểm cạnh SD. Cô-sin góc giữa đường thẳng AC và đường thẳng BM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, $I = SO \cap BM$.

Trong mặt phẳng (SAC) kẻ $NK // AC, NK \cap SA = N, NK \cap SC = K$.

Ta có I là trọng tâm của tam giác SBD.

Ta có $SO^2 = SA^2 + AO^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{3a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác SBD đều cạnh $a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BI = \frac{2}{3}MB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$\frac{IK}{OC} = \frac{2}{3} \Rightarrow IK = \frac{2}{3}OC = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. $\frac{SK}{SC} = \frac{2}{3} \Rightarrow SK = \frac{2}{3}SC = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow \cos\widehat{SBC} = \frac{SB}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta có $KB^2 = SK^2 + SB^2 - 2SK.SB.\cos\widehat{BSK} = \left(\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2 + 2a^2 - 2.\frac{2a\sqrt{3}}{3}.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2}{3}a^2$.

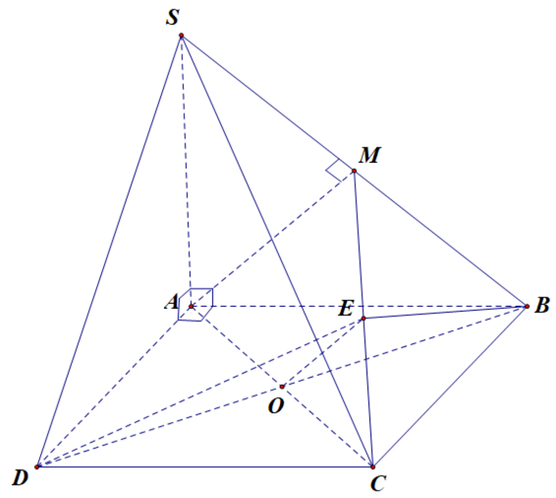
$$\cos\widehat{KIB} = \frac{IK^2 + IB^2 - KB^2}{2IK.IB} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - \frac{2a^2}{3}}{2.\frac{a\sqrt{2}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy cosin góc giữa 2 đường thẳng thẳng AC và đường thẳng BM bằng $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa AM và BD bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải



Xét tam giác SAB vuông tại A có: $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=a\sqrt{2}$.

Gọi E là trung điểm của MC, ta có: $OE \parallel AM \Rightarrow \left(\widehat{AM,BD}\right)=\left(\widehat{OE,BD}\right)$ và $OE=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{4}SB=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ta có: $CB\perp AB, SA\perp CB\Rightarrow CB\perp SB\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

Xét tam giác MBC vuông tại B có: $MC=\sqrt{MB^2+BC^2}=\sqrt{\frac{1}{4}.2a^2+a^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $BE=\frac{1}{2}MC=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Xét tam giác BCD vuông tại C có: $BD=\sqrt{BC^2+DC^2}=a\sqrt{2}\Rightarrow BO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác EBO có: $\cos\widehat{EOB}=\frac{EO^2+OB^2-EB^2}{2.EO.OE}=\frac{\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{2}-\frac{3a^2}{8}}{2.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \widehat{EOB}=60^\circ$

$\Rightarrow\left(\widehat{AM,BD}\right)=\left(\widehat{OE,BD}\right)=\widehat{EOB}=60^\circ$.

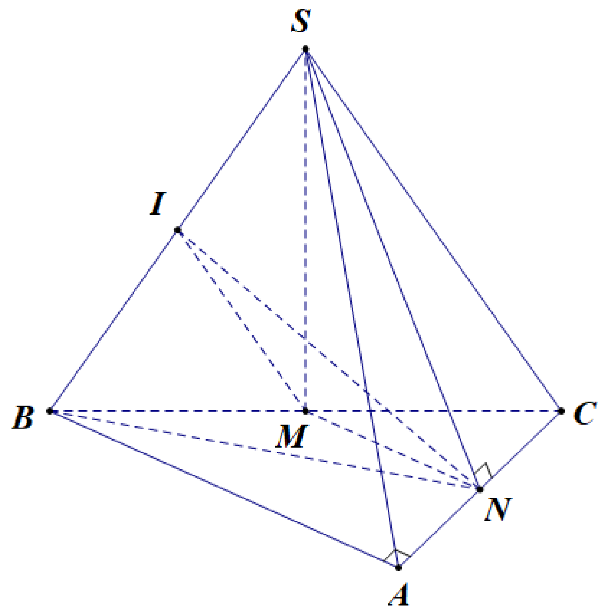
Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA=SB=SC=AB=AC=a$ và $BC=a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC là?

A. 60°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 45°.

Lời giải

Ta có $BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại $A\Rightarrow$ trung điểm M của cạnh huyền BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vì $SA=SB=SC$ nên SM là đường cao của hình chóp $S.ABC$.



Gọi N, I lần lượt là trung điểm của AC, SB.

Ta có $MN \parallel AB$ và $IM \parallel SC$ nên $\left(\widehat{SC, AB}\right) = \left(\widehat{IM, MN}\right)$.

Mà

◎ $BN = \sqrt{AB^2 + AN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

◎ $SN = \sqrt{SC^2 - NC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

◎ $NI = \frac{\sqrt{2\left(BN^2 + SN^2\right) - SB^2}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{5a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}\right) - a^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

◎ $MN = \frac{a}{2}$, $MI = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác IMN, ta có $\cos\widehat{NMI} = \frac{MN^2 + IM^2 - IN^2}{2 \cdot MN \cdot IM} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMI} = 120°$.

Suy ra $\left(\widehat{IM, MN}\right) = 60°$.

DẠNG 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Câu 31: Trong không gian, cho đường thẳng d và điểm O. Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với đường thẳng d?

A. 3. **B.** vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Trong không gian, có vô số đường thẳng qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước. Vì vậy chọn đáp án B

Câu 32: Trong không gian, cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau

C. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.

D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì vuông góc với nhau.

Lời giải

Sử dụng định lí $\begin{cases} a \perp b \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a \perp c.$

Câu 33: Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. Trong không gian hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

B. Trong không gian hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

C. Trong không gian hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

D. Trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.

Lời giải

Chọn B

Đáp án **A** sai do hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.

Ví dụ: Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ ta có $\begin{cases} AA' \perp AB \\ AD \perp AB \end{cases}$. Dễ thấy AA' và AD cắt nhau.

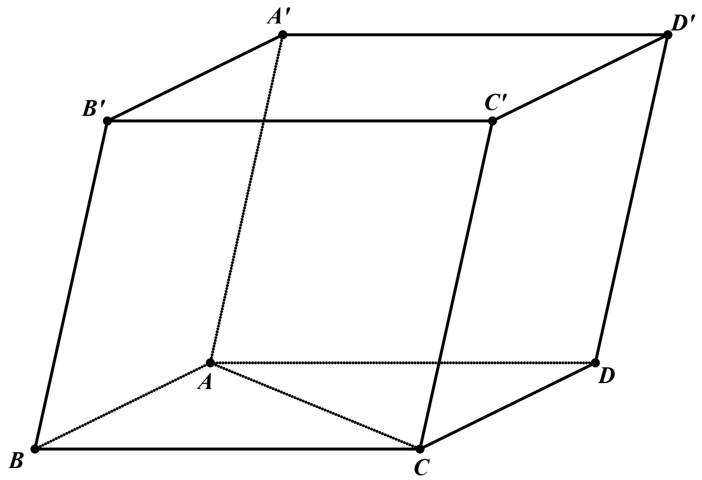
Đáp án **C** sai do hai mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng có thể trùng nhau.

Đáp án D sai do trong không gian hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể chéo nhau.

Câu 34: Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $BB' \perp BD$. **B.** $A'C' \perp BD$. **C.** $A'B \perp DC'$. **D.** $BC' \perp A'D$.

Lời giải



Vì hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA$, $B'C'CB$ đều là hình thoi nên ta có

$AC \perp BD$ mà $AC // A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD$.

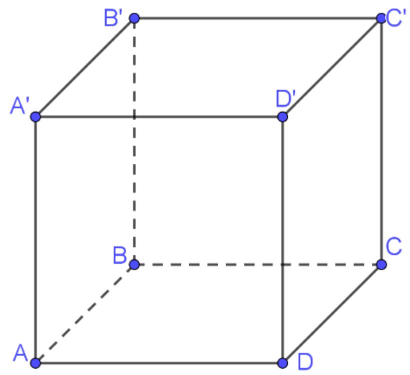
$A'B \perp AB'$ mà $AB' // DC' \Rightarrow A'B \perp DC'$.

$BC' \perp B'C$ mà $B'C // A'D \Rightarrow BC' \perp A'D$.

Câu 35: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

A. $A'D$. **B.** AC. **C.** BB'. **D.** AD'.

Lời giải

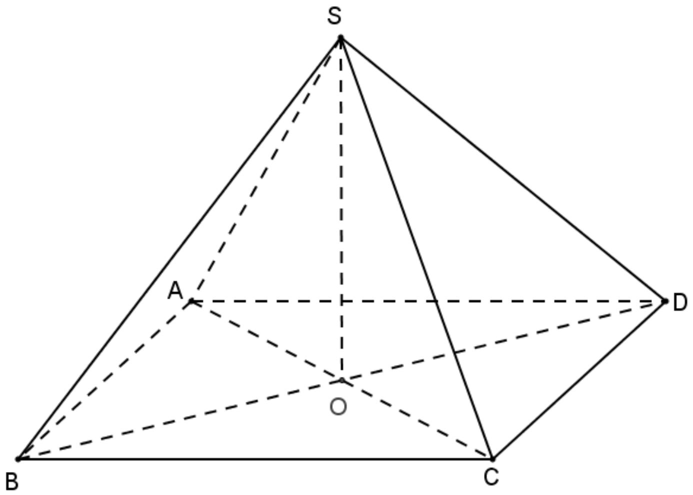


Ta có: $A'D // B'C$, $B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **sai**?

A. $AC \perp SD$. **B.** $BD \perp AC$. **C.** $BD \perp SA$. **D.** $AC \perp SA$.

Lời giải



Ta có tam giác SAC cân tại S và SO là đường trung tuyến cũng đồng thời là đường cao.
Do đó $SO \perp AC$.
Trong tam giác vuông SOA thì AC và SA không thể vuông tại A.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 2: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

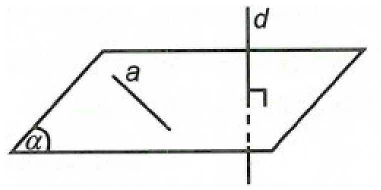
I LÝ THUYẾT.

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1.1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a thuộc mặt phẳng (α).

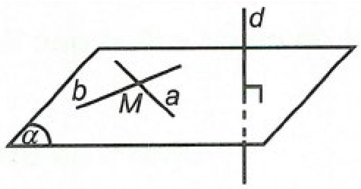
Kí hiệu: $d \perp (\alpha)$ hay $(\alpha) \perp d$.



$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp \mathrm{a}, \forall \mathrm{a} \subset (\alpha)$

1.2. Định lý 1

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi và chỉ khi nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng ấy.

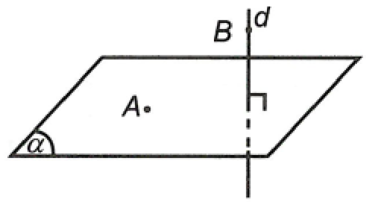


$$\begin{cases} d \perp \mathrm{a} \\ d \perp b \\ \mathrm{a} \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ \mathrm{a} \cap b = M \end{cases} \Rightarrow \mathrm{a} \perp (\alpha).$$

1.3. Định lý 2:

+ Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

+ Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



Có duy nhất đường thẳng d đi qua B và vuông góc với (α).

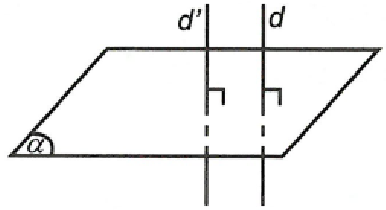
Có duy nhất mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với d.

2. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Định lý 3

• Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song a cũng vuông góc với mặt phẳng (P).

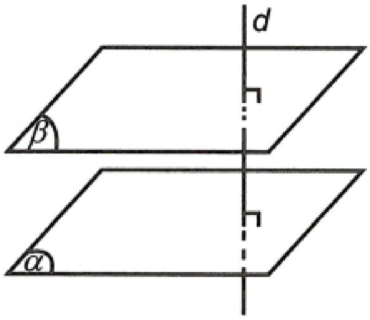
• Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Định lý 4

• Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song mặt phẳng ấy.

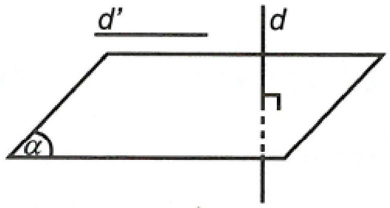
• Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Định lý 5

• Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song mặt phẳng ấy.

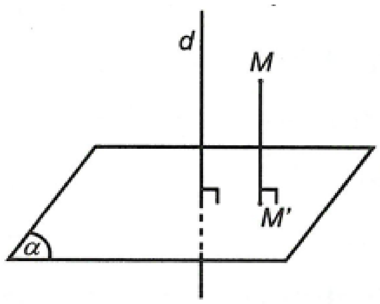
• Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì đường thẳng song song hoặc nằm trong mặt phẳng.



3. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Định nghĩa

Phép chiếu song song theo phương Δ vuông góc với mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

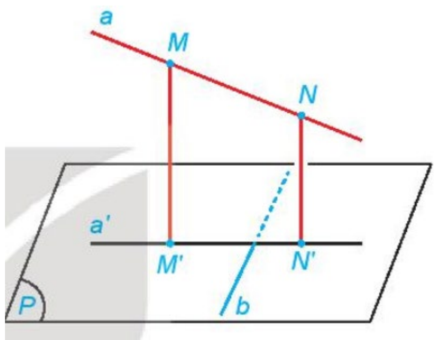


M' là hình chiếu của M lên (α).

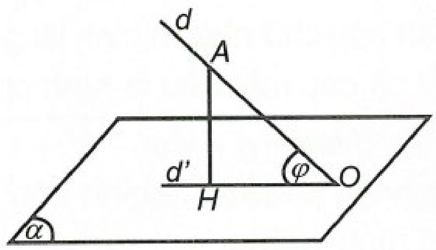
Định lí ba đường vuông góc

Định lý 6

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).



2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).

• Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90°$.

• Nếu a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a với hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a vả mặt phẳng (P).

• Nếu α là góc giữa đường thẳng a vả mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa

$d\perp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp \text{a},\forall \text{a}\subset(\alpha)$

Định lí

$\begin{cases} d\perp \text{a}; d\perp b \\ \text{a}\subset(\alpha), b\subset(\alpha)\Rightarrow d\perp(\alpha) \\ \text{a}\cap b=M \end{cases}$

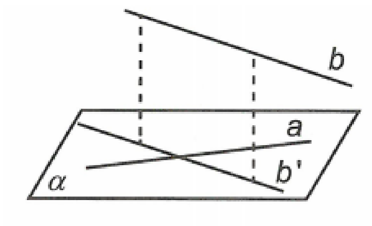
Hệ quả

$\begin{cases} \Delta ABC: \\ d\perp AB\Rightarrow d\perp(ABC) \\ d\perp AC \end{cases}$

Định lí ba đường vuông góc

$\begin{cases} \text{a}\subset(\alpha) \\ b\not\subset(\alpha), b\perp(\alpha) \\ b' \text{ là hình chiếu của b trên } (\alpha) \end{cases}$

$\text{a}\perp b\Leftrightarrow \text{a}\perp b'$



Tính chất

- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song mặt phẳng ấy.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song mặt phẳng ấy.
- Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1. Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong mặt phẳng (P).

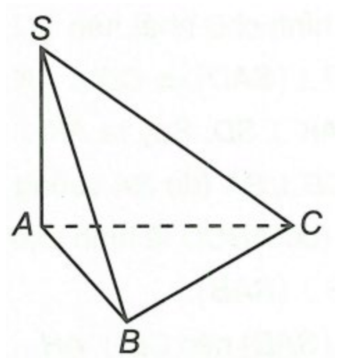
Cách 2. Chứng minh d song song với a mà a $\perp (P)$.

Cách 3. Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q) // (P)$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy.

Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp AB$.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB \cap SA = \{A\} \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh

a) $BC \perp (OAH)$. b) H là trực tâm của ΔABC.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD.

a) Chứng minh $AK \perp (SCD)$.

b) Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, có SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và SD. Chứng minh rằng $HK \perp (SAC)$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $AC' \perp (A'BD)$. b) Chứng minh $AC' \perp (CB'D')$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

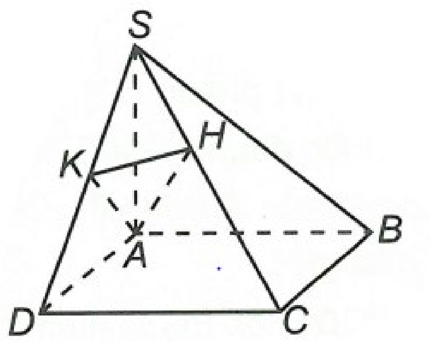
1 PHƯƠNG PHÁP.

Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b, sau đó chứng minh $a \perp (P)$.

Từ đó suy ra $a \perp b$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Chứng minh $HK \perp SC$.

Lời giải



Ta có $CD \perp AD, CD \perp SA$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$.

Mặt khác $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$.

Suy ra $HK \perp SC$.

2 BÀI TẬP.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ACBD), AD = 2a, AB = BC = a$. Chứng minh rằng $CD \perp SC$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là hình tam giác vuông tại A và có $SA \perp (ABC)$. Chứng minh rằng $AC \perp SB$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC, DB = DC$. Chứng minh $AD \perp BC$.

Câu 8: Trong mặt phẳng (P) cho ΔBCD đều. Gọi M là trung điểm của CD, G là một điểm thuộc đoạn thẳng BM. Lấy điểm A nằm ngoài (P) sao cho G là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Chứng mình rằng $AB \perp CD$.

DẠNG 3. THIẾT DIỆN

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Diện tích của tứ giác $MNPQ$ bằng:

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 8$, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC\ (0 < x < 1)$. Mặt phẳng qua M, song song với AB, CD và lần lượt cắt DB, AD, AC tại N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng bao nhiêu?

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 2: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

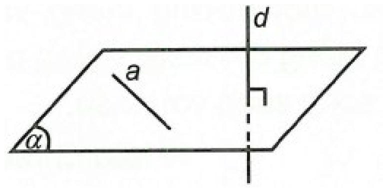
I LÝ THUYẾT.

1. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1.1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a thuộc mặt phẳng (α).

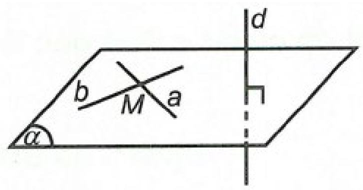
Kí hiệu: $d\perp(\alpha)$ hay $(\alpha)\perp d$.



$d\perp(\alpha)\Leftrightarrow d\perp \text{a}, \forall \text{a}\subset(\alpha)$

1.2. Định lý 1

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng khi và chỉ khi nó vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc mặt phẳng ấy.

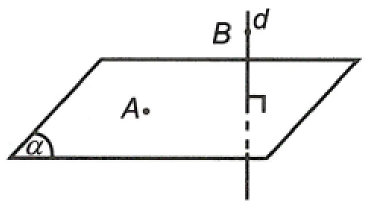


$$\begin{cases} d\perp \text{a} \\ d\perp b \\ \text{a}\subset(\alpha), b\subset(\alpha) \\ \text{a}\cap b = M \end{cases} \Rightarrow \text{a}\perp(\alpha).$$

1.3. Định lý 2:

+ Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

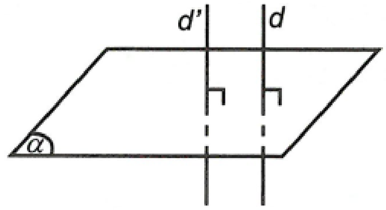
+ Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



Có duy nhất đường thẳng d đi qua B và vuông góc với (α).

Có duy nhất mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với d.

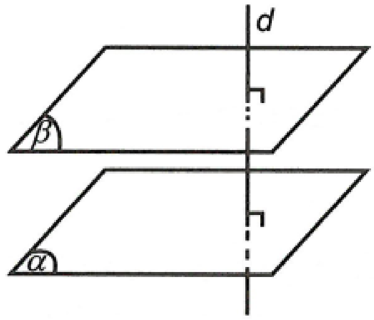
2. LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



Định lý 3

• Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song a cũng vuông góc với mặt phẳng (P).

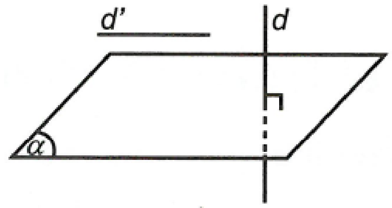
• Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Định lý 4

• Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song mặt phẳng ấy.

• Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Định lý 5

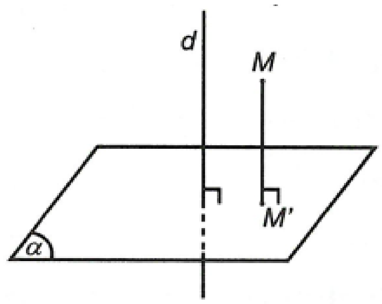
• Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song mặt phẳng ấy.

• Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì đường thẳng song song hoặc nằm trong mặt phẳng.

3. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC

Định nghĩa

Phép chiếu song song theo phương Δ vuông góc với mặt phẳng (P) được gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

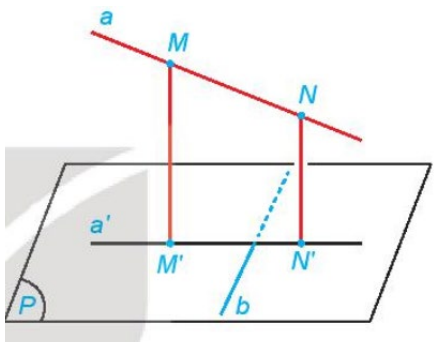


M' là hình chiếu của M lên (α).

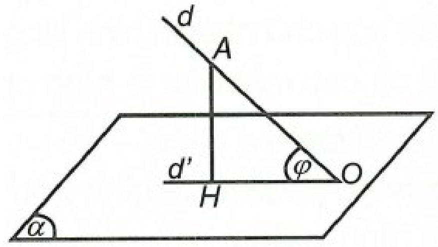
Định lí ba đường vuông góc

Định lý 6

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P).



2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).

• Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90°$.

• Nếu a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a với hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a vả mặt phẳng (P).

• Nếu α là góc giữa đường thẳng a vả mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa

$d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$

Định lí

$\begin{cases} d \perp a; d \perp b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \Rightarrow d \perp (\alpha) \\ a \cap b = M \end{cases}$

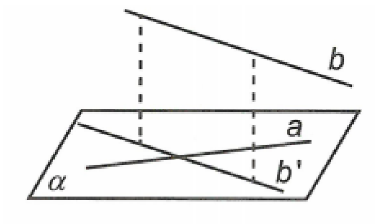
Hệ quả

$\begin{cases} \Delta ABC: \\ d \perp AB \Rightarrow d \perp (ABC) \\ d \perp AC \end{cases}$

Định lí ba đường vuông góc

$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha), b \perp (\alpha) \\ b' \text{ là hình chiếu của b trên } (\alpha) \end{cases}$

$a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$



Tính chất

- Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song mặt phẳng ấy.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song mặt phẳng ấy.
- Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1. Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong mặt phẳng (P).

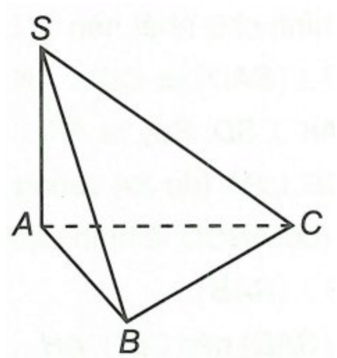
Cách 2. Chứng minh d song song với a mà a $\perp (P)$.

Cách 3. Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q) // (P)$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy.

Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

Lời giải



Ta có tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp AB$.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$.

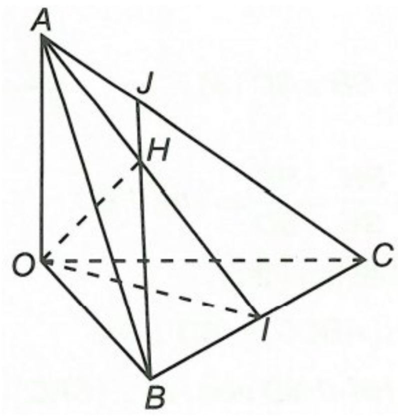
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB \cap SA = \{A\} \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh

a) $BC \perp (OAH)$. b) H là trực tâm của ΔABC.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$

Mà $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$ nên $OH \perp BC.$

Vậy $BC \perp (OAH).$

b) Do $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp AC(1).$

Ta có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases}$ nên $OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC(2).$

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH.$

Mặt khác $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC.$

Vậy H là trực tâm của tam giác $ABC.$

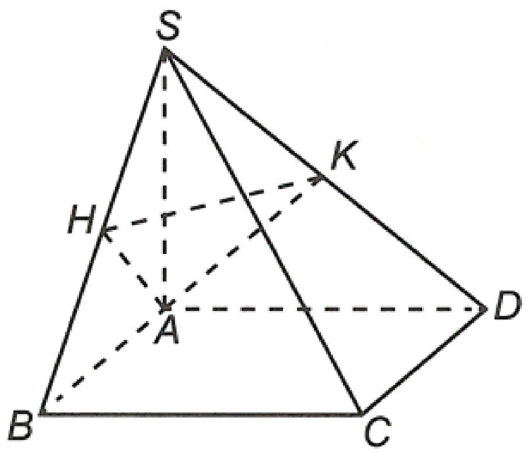
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên $SB,SD.$

a) Chứng minh $AK \perp (SCD).$

b) Chứng minh $AH \perp (SBC).$

c) Chứng minh $SC \perp (AHK).$

Lời giải



a) Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA.$

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $CD \perp AD.$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK.$

Ta lại có $AK \perp SD.$ Suy ra $AK \perp (SCD).$

b) Ta có $CB \perp SA$ (do SA vuông góc với đáy)

$CB \perp AB$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật).

Suy ra $CB \perp (SAB).$

Mà $AH \subset (SAB)$ nên $CB \perp AH.$

Ta lại có $AH \perp SB.$ Suy ra $AH \perp (SBC).$

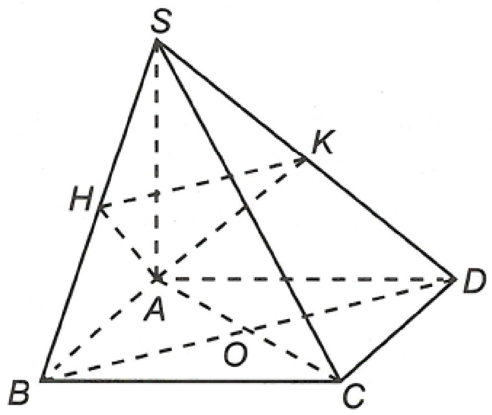
c) Ta có $AK \perp (SCD)$ suy ra $AK \perp SC.$

$AH \perp (SCB)$ suy ra $AH \perp SC.$

Suy ra $SC \perp (AHK).$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, có SA vuông góc $(ABCD).$ Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SB và $SD.$ Chứng minh rằng $HK \perp (SAC).$

Lời giải



Xét ΔSAB vuông tại A, đường cao AH.

Ta có $SA^2 = SH.SB \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2}(1)$.

Xét ΔSAD vuông tại A, đường cao AK.

Ta có $SA^2 = SK.SD \Rightarrow \frac{SK}{SD} = \frac{SA^2}{SD^2}(2)$.

Mà $\begin{cases} SB^2 = SA^2 + AB^2 \\ SD^2 = SA^2 + AD^2 \Rightarrow SB = SD(3). \\ AB = AD \end{cases}$

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK//BD.$

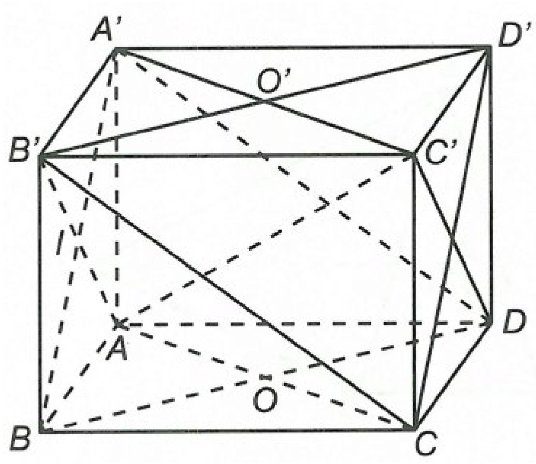
Lại có $BD \perp AC$ (tính chất hình thoi)

mà $SA \perp (ABCD), BD \subset (ABCD) \Rightarrow BD \perp SA.$

Suy ra $BD \perp (SAC)$ mà $HK//BD$ nên $HK \perp (SAC)$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
a) Chứng minh $AC' \perp (A'BD)$. b) Chứng minh $AC' \perp (CB'D')$.

Lời giải



a) Gọi O, I lần lượt là tâm của các hình vuông $ABCD, AA'B'B$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC' (1)$.

$\begin{cases} BA' \perp AB' \\ BA' \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow BA' \perp (AB'C'D) \Rightarrow BA' \perp AC' (2)$.

Từ (1) và (2), ta có $AC' \perp (A'BD)$.

b) Ta có $\begin{cases} BD // B'D' \\ A'B // CD' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BD // (CB'D') \\ A'B // (CB'D') \end{cases} \Rightarrow (A'BD) // (CB'D')$.

Mà $AC' \perp (A'BD)$ nên $AC' \perp (CB'D')$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

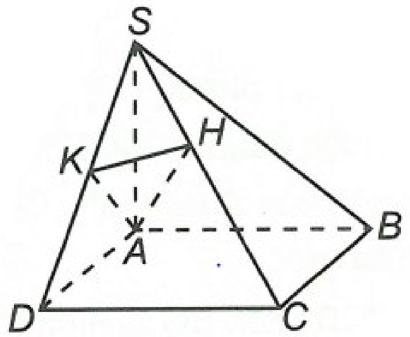
1 PHƯƠNG PHÁP.

Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng b, sau đó chứng minh a $\perp (P)$.

Từ đó suy ra a $\perp b$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Chứng minh $HK \perp SC$.

Lời giải



Ta có $CD \perp AD, CD \perp SA$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$.

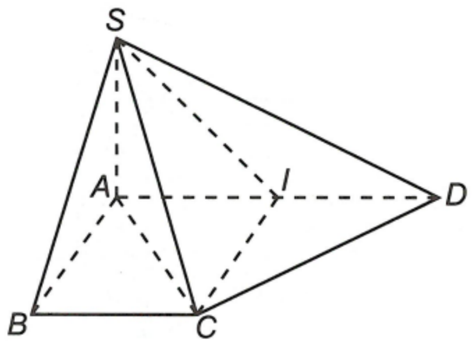
Mặt khác $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$.

Suy ra $HK \perp SC$.

2 BÀI TẬP.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ACBD), AD = 2\text{a}, AB = BC = \text{a}$. Chứng minh rằng $CD \perp SC$.

Lời giải



Ta có: $\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp CD (1)$.

Gọi I là trung điểm của AD. Tứ giác $ABCI$ là hình vuông. Do đó $\widehat{ACI} = 45°$.

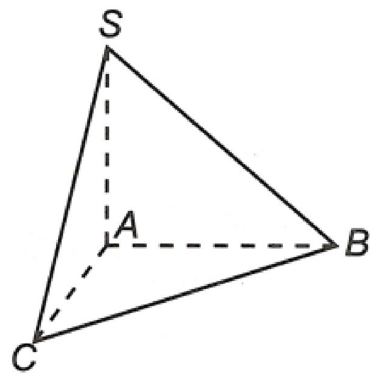
Mặt khác, ΔCID là tam giác vuông cân tại I nên $\widehat{DCI} = 45°$.

Suy ra $\widehat{ACD} = 90°$ hay $AC \perp CD (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là hình tam giác vuông tại A và có $SA \perp (ABC)$. Chứng minh rằng $AC \perp SB$.

Lời giải



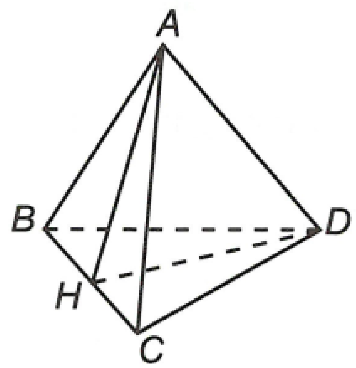
Vì $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC).

Mặt khác theo giả thiết $AC \perp AB$.

Suy ra $AC \perp SB$ (theo định lý ba đường vuông góc).

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC, DB = DC$. Chứng minh $AD \perp BC$.

Lời giải



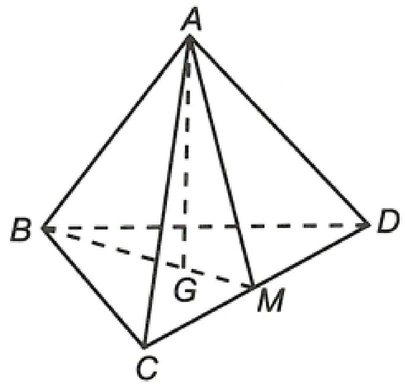
Gọi H là trung điểm BC.

Vì ΔABC cân tại A và ΔDBC cân tại D nên ta có

$AH \perp BC; DH \perp BC \Rightarrow BC \perp (ADH) \Rightarrow AD \perp BC$.

Câu 8: Trong mặt phẳng (P) cho ΔBCD đều. Gọi M là trung điểm của CD, G là một điểm thuộc đoạn thẳng BM. Lấy điểm A nằm ngoài (P) sao cho G là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

Lời giải



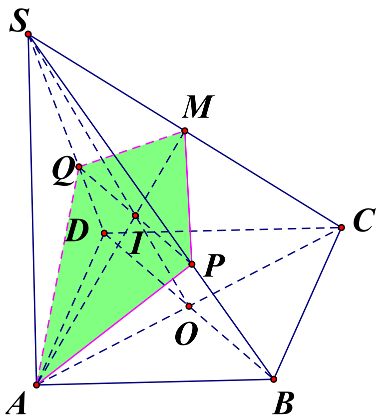
Vì $AG \perp (BCD)$ nên BG là hình chiếu vuông góc của AB trên (BCD).

Mặt khác theo giả thiết $BG \perp CD$ suy ra $AB \perp CD$ (theo định lý ba đường vuông góc).

DẠNG 3. THIẾT DIỆN

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$; $I = SO \cap AM$.

Vì (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD nên (α) cắt (SBD) theo giao tuyến PQ qua I và $PQ//BD$.

Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $APMQ$.

Ta có $AC = BD = AB.\sqrt{2} = a\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2a$.

Vì ΔSAC vuông tại A và có M là trung điểm của cạnh SC nên

$$AM = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$$

Ta có SA vuông góc với đáy và $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow PQ \perp (SAC) \Rightarrow PQ \perp AM$

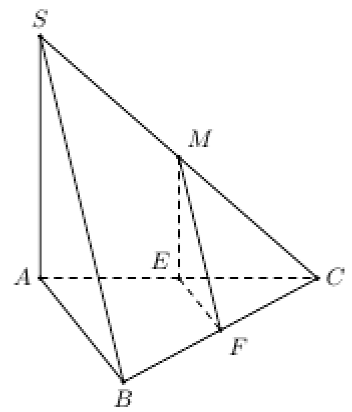
Vì I là giao điểm hai đường trung tuyến SO và AM của ΔSAC nên

$\frac{SI}{SO} = \frac{PQ}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}.BD = \frac{4}{3}a$

Do đó diện tích tứ giác $APMQ$ là $S_{APMQ} = \frac{1}{2}PQ.AM = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}a.a\sqrt{2} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC.

Do đó $ME // SA$, $EF // AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác).

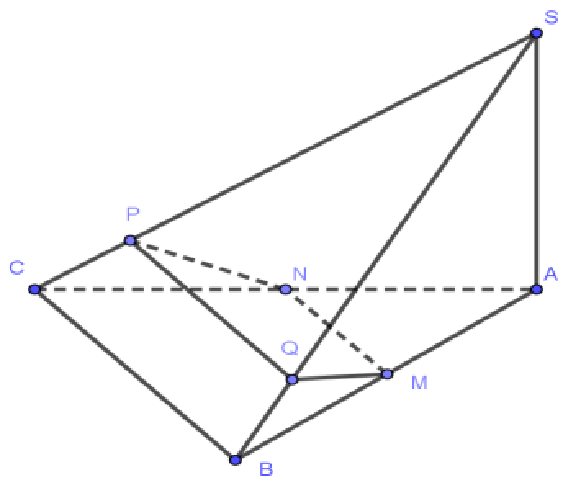
Mà $SA \perp (ABC)$ (gt) nên $ME \perp (ABC)$, suy ra $ME \perp EF$.

Dễ thấy $(MEF) \equiv (P)$, thiết diện là tam giác MEF vuông tại E.

Diện tích thiết diện là $S = \frac{1}{2}ME.EF = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}SA.\frac{1}{2}AB = \frac{a^2}{8}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Diện tích của tứ giác $MNPQ$ bằng:

Lời giải



$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

Do Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q nên $MN // PQ // BC$, do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M, Q.

$S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ$

+ ΔABC có $MN // BC, MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

+ $\Delta MQB \backsim \Delta SAB \Rightarrow \frac{MQ}{MB} = \frac{SA}{SB} \Rightarrow MQ = \frac{SA.MB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a.2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

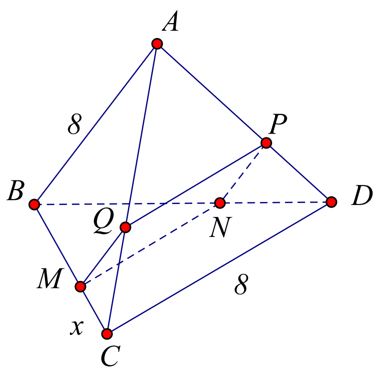
$QB = \sqrt{MB^2 - MQ^2} = \frac{a}{4} \Rightarrow SQ = \frac{7a}{4}$.

Có: $MN // PQ // BC$ nên $\frac{PQ}{BC} = \frac{SQ}{SB} \Rightarrow PQ = \frac{SQ.BC}{SB} = \frac{7a\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(MN + PQ).MQ = \frac{33a^2}{64}$.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 8$, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC$ $(0 < x < 1)$. Mặt phẳng qua M, song song với AB, CD và lần lượt cắt DB, AD, AC tại N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



+) $MQ \,//\, AB$ và $NP \,//\, AB \Rightarrow MQ \,//\, PN$, tương tự $PQ // NM$ (vì cùng $//CD$), mà $AB \perp CD$ $\Rightarrow$Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

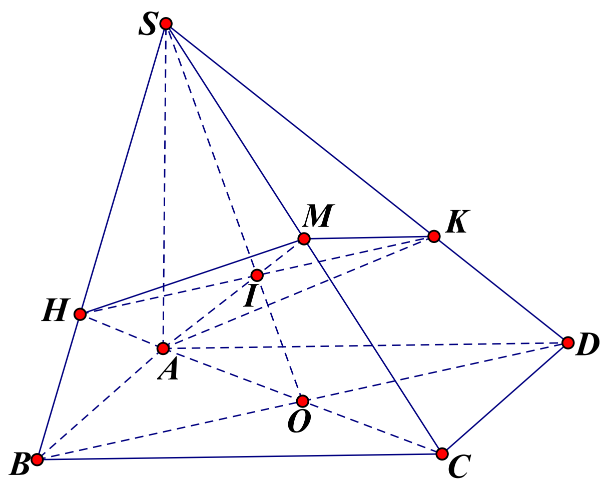
+) $\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{MC}{BC} = 1 - \dfrac{BM}{BC} = 1 - \dfrac{MN}{CD} \Rightarrow \dfrac{MQ}{AB} + \dfrac{MN}{CD} = 1 = \dfrac{MQ + MN}{8} \Rightarrow MQ + MN = 8$.

+) $S_{MNPQ} = MQ.MN \le \dfrac{(MQ + MN)^2}{4} = 16$.

Suy ra diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng 16.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

Lời giải



Trong $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Trong (SAC), gọi $I = SO \cap AM$.

Trong (SBD) kẻ đường thẳng qua I và song song với BD lần lượt cắt SB, SD tại H, K.

Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AMKH$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AM \Rightarrow HK \perp AM$.

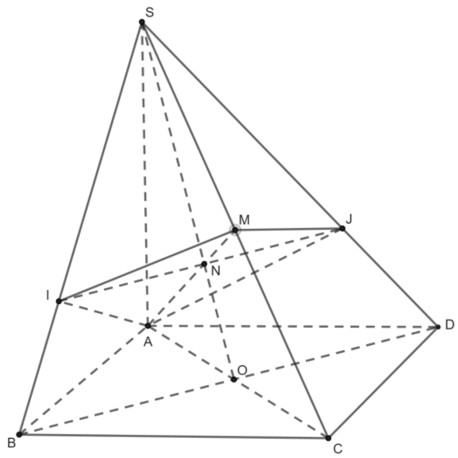
Ta có $AM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{2}a = a\sqrt{2}$.

Và I là trọng tâm tam giác SAC nên $\dfrac{HK}{BD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{4}{3}a$.

Vậy diện tích tứ giác $AHMK$ là $S_{AHMK}=\frac{1}{2}AM.HK=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$; $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (α).

Lời giải



+ Xác định mặt phẳng (α)

Gọi O là giao điểm của AC và BD, N là giao điểm của SO và AM.

Trong mặt phẳng (SBD), qua N kẻ đường thẳng song song với BD, cắt SD, SB lần lượt tại I và J.

Ta có, (α) là mặt phẳng $(AIMJ)$.

Thật vậy, rõ ràng $(AIMJ)$ qua A, M. Mặt khác, BD song song với IJ (theo cách dựng), nên BD song song với $(AIMJ)$.

+ Tính diện tích thiết diện

Ta có: $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SA \end{cases} \Rightarrow BD\perp (SAC)\Rightarrow BD\perp AM$

Mà $BD//IJ$ nên $IJ\perp AM$.

$S_{AIMJ}=\frac{1}{2}.IJ.AM$ (Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc).

Ta có: $AC=BD=2a.$

SA vuông góc với đáy nên $SA\perp AC$.

Suy ra, $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{4a^2+4a^2}=2a\sqrt{2}.$

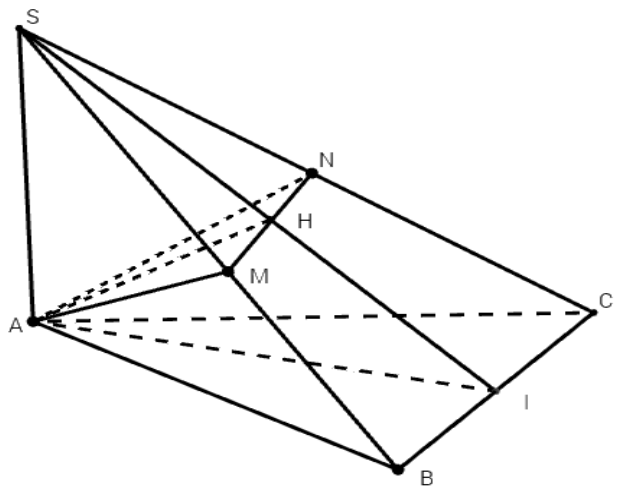
$AM=\dfrac{1}{2}SC=a\sqrt{2}$ (CT độ dài đường trung tuyến trong tam giác vuông).

N là trọng tâm của tam giác SAC. Suy ra, $\dfrac{IJ}{BD}=\dfrac{SN}{SO}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow IJ=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{2}{3}.2a=\dfrac{4a}{3}$.

Vậy $S_{AIMJ}=\dfrac{1}{2}AM.IJ=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4a}{3}.a\sqrt{2}=\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SI.

Kẻ đường thẳng MN qua H và song song với BC và cắt SB, SC lần lượt tại M,N.

Ta có: $SI\perp BC\Rightarrow SI\perp MN$ và $SI\perp AH$.

$\Rightarrow SI\perp(AMN)$.

Ta chứng minh được $BC\perp(SAI)\Rightarrow AH\perp BC\Rightarrow AH\perp MN$.

Ta dễ dàng chứng minh được tam giác AMN cân.

$AH=\sqrt{\dfrac{SA^2.AI^2}{SA^2+AI^2}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}a$.

Ta có: $SI=\sqrt{SA^2+AI^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}a$.

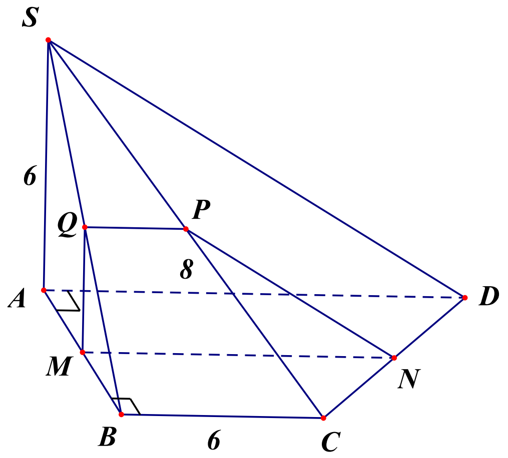
$SA^2=SI.SH\Rightarrow SH=\dfrac{2}{\sqrt{7}}a$.

Do $MN//BC\Rightarrow\dfrac{MN}{BC}=\dfrac{SH}{SI}\Rightarrow MN=\dfrac{4}{7}a$.

$S_{AMN} = \frac{1}{2} MN.AH = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng

Lời giải



Gọi N, P và Q lần lượt là trung điểm của CD, SC và SB.

Ta có: $(P) \cap (SAB) = MQ$, $(P) \cap (ABCD) = MN$, $(P) \cap (SCD) = NP$.

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang vuông tại M, Q và $MQ = PQ = 3$, $MN = 7$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là: $S_{MNPQ} = \frac{MQ.(MN + PQ)}{2} = \frac{3.(7+3)}{2} = 15$.

CHƯƠNG **VIII**

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 2: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1: CÂU HỎI LÍ THUYẾT

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Câu 2: Cho hai đường thẳng a,b và mặt phẳng $\left(P\right)$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. Nếu $a\parallel\left(P\right)$ và $b\perp\left(P\right)$ thì $a\perp b$.

B. Nếu $a\subset\left(P\right)$ và $b\perp\left(P\right)$ thì $a\perp b$.

C. Nếu $a\perp\left(P\right)$ và $b\perp a$ thì $b\parallel\left(P\right)$ hoặc $b\subset\left(P\right)$.

D. Nếu $a\parallel\left(P\right)$ và $b\perp a$ thì $b\perp\left(P\right)$.

Câu 3: Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

Câu 5: Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d. Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d ?

A. Ba. **B.** Hai. **C.** Một. **D.** Vô số.

Câu 6: Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và mặt phẳng $\left(P\right)$. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A. Nếu $\left(P\right)\parallel\left(Q\right)$ và $b\perp\left(P\right)$ thì $b\perp\left(Q\right)$ **B.** Nếu $a\parallel\left(P\right)$ và $b\perp a$ thì $b\perp\left(P\right)$

C. Nếu $a\parallel\left(P\right)$ và $b\perp\left(P\right)$ thì $b\perp a$ **D.** Nếu $a\perp\left(P\right)$, $b\perp\left(P\right)$ thì $a\parallel b$

Câu 7: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a và b. Biết rằng $a \,//\, (P)$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Nếu $b \,//\, (P)$ thì $b \,//\, a$.
B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.
C. Nếu $b \,//\, a$ thì $b \,//\, (P)$.
D. Nếu $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Câu 8: Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d. Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d?

A. Ba. **B.** Hai. **C.** Một. **D.** Vô số.

Câu 9: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng tùy ý nằm trong mỗi mặt phẳng.
B. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.
D. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Câu 10: Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d sẽ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).
B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).
D. Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ và $a // (\alpha)$ thì $d \perp a$.

Câu 11: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \,//\, (\alpha)$.
B. Nếu $a \,//\, (\alpha)$ và $b \,//\, (\alpha)$ thì $b \,//\, a$.
C. Nếu $a \,//\, (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$.
D. Nếu $a \,//\, (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

Câu 12: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b \,//\, a$ thì $b \perp (P)$.
B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \,//\, a$.
C. Nếu $b \perp a$ thì $b \,//\, (P)$.
D. Nếu $b \,//\, (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 13: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Cho đường thẳng $a \perp (\alpha)$, mọi mặt phẳng $(\beta) // (\alpha)$ thì $(\beta) \perp a$.
B. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a thì $b \perp (\alpha)$.
C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.
D. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

DẠNG 2: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

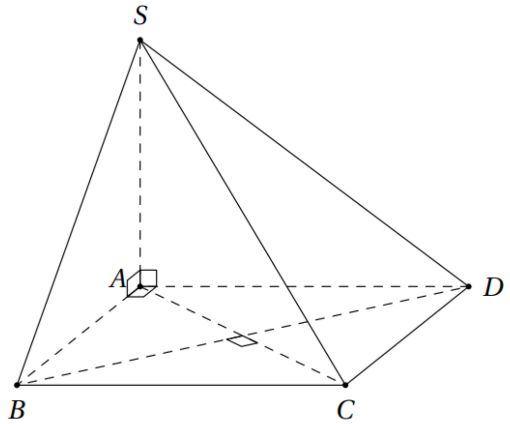
Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $SA\perp(ABCD)$ **B.** $SO\perp(ABCD)$ **C.** $AB\perp(SBC)$ **D.** $AC\perp(SBC)$

Câu 15: Cho hình chóp tam giác $SABC$ có $SA=SB$ và $AC=CB$. Khẳng định nào sau đây **ĐÚNG?**

A. $BC\perp(SBC)$. **B.** $SB\perp AB$. **C.** $SA\perp(ABC)$. **D.** $AB\perp SC$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $AC\perp(SCD)$. **B.** $BD\perp(SAD)$. **C.** $AC\perp(SBD)$. **D.** $BD\perp(SAC)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO\perp(ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAB). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SBD).

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AC\perp(SBC)$. **B.** $BC\perp(SAC)$. **C.** $BC\perp(SAB)$. **D.** $AB\perp(SBC)$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AC\perp(SBC)$. **B.** $BC\perp(SAC)$. **C.** $BC\perp(SAB)$. **D.** $AB\perp(SBC)$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB\perp(SBC)$. **B.** $AC\perp(SBC)$. **C.** $SA\perp(ABCD)$. **D.** $SO\perp(ABCD)$.

Câu 21: Cho hình chóp S.$ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC\perp(SAC)$. **B.** $BD\perp(SAC)$. **C.** $AH\perp(SCD)$. **D.** $AK\perp(SCD)$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(A'BD)$. **B.** $(A'CD')$. **C.** $(A'DC')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Câu 24: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây?

A. $OA \perp (OBC)$. **B.** $AC \perp (OBC)$. **C.** $AB \perp (OBC)$. **D.** $BC \perp (AOB)$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây

A. $AC \perp (A'BD)$. **B.** $B'D' \perp (A'BD)$. **C.** $A'C' \perp (A'BD)$. **D.** $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 26: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Phát biểu nào dưới đây là đúng.

A. $SA \perp (ABC)$. **B.** $SG \perp (ABC)$. **C.** $AB \perp (SAC)$. **D.** $SG \perp (SAB)$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = CD = a$, $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $BC \perp (SAC)$. **B.** $CB \perp (SAB)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $CD \perp (SAC)$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B. Đường thẳng SA vuông góc với đáy. Chọn mệnh đề đúng.

A. $CB \perp (SAB)$. **B.** $SA \perp (SBC)$. **C.** $AC \perp (SAB)$. **D.** $CB \perp (SAC)$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $SC \perp (ABCD)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $HK \perp (SBC)$.

C. $BC \perp (SAB)$. **D.** SH, AK và BC đồng quy.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$. **C.** $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (SBC)$. **B.** $AC \perp (SBC)$. **C.** $SA \perp (ABCD)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAC)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AH \perp (SCD)$. **D.** $AK \perp (SCD)$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của điểm A trên cạnh SB và SC. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $BC\perp(SAB)$. **B.** $AH\perp(SBC)$. **C.** $AK\perp(SBC)$. **D.** $SC\perp(AHK)$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và $SC=a\sqrt{2}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $BC\perp(SAB)$. **B.** $SH\perp(ABCD)$. **C.** $AB\perp(SAD)$. **D.** $CD\perp(SHK)$.

DẠNG 3: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 36: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chọn khẳng định **SAI** trong các khẳng định sau:

A. $AC\perp B'C'$. **B.** $BD\perp A'C'$. **C.** $AD'\perp CB'$. **D.** $AB'\perp CD'$.

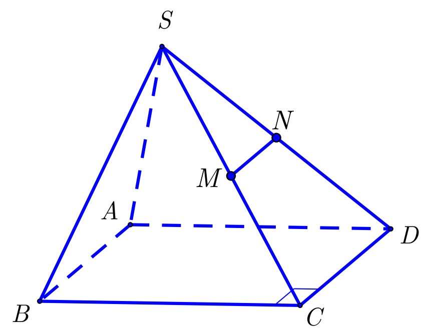
Câu 37: Cho hình chóp $SABC$ có $SA\perp(ABC)$ và $AB\perp BC$. Hình chóp $SABC$ có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD)$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề dưới đây.

A. $SA\perp SB$. **B.** $SA\perp CD$. **C.** $SA\perp BD$. **D.** $SA\perp BC$.

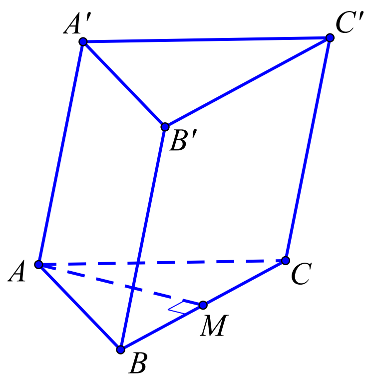
Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $MN\perp AC$. **B.** $MN\perp BD$. **C.** $MN\perp AB$. **D.** $MN\perp BC$.

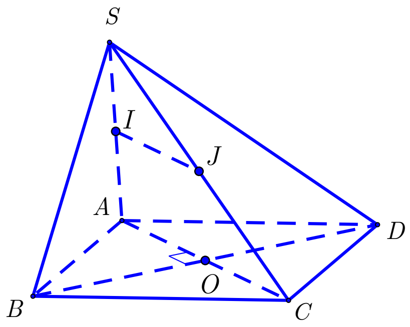
Câu 40: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi M là trung điểm BC.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $AM\perp A'B'$. **B.** $AM\perp BB'$. **C.** $AM\perp B'C'$. **D.** $AM\perp A'C'$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $IJ \perp AB$. **B.** $IJ \perp AD$. **C.** $IJ \perp BD$. **D.** $IJ \perp SD$.

Câu 42: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi (P) là mặt phẳng chứa $A'C'$ và cắt AB, BC lần lượt tại I và J. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $BD \perp A'I$. **B.** $BD \perp IJ$. **C.** $BD \perp C'J$. **D.** $BD \perp A'J$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt bên SAB là tam giác cân. Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB và CD. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $CD \perp SF$. **B.** $CD \perp SE$. **C.** $CD \perp SO$. **D.** $CD \perp EF$.

Câu 44: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Xét các khẳng định sau:

(1) $AH \perp SC$ (2) $BC \perp (SAB)$ (3) $SC \perp AB$

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. $3\cdot$ **B.** $1\cdot$ **C.** $0\cdot$ **D.** $2\cdot$

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông ở B, AH là đường cao của tam giác SAB. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp AC$. **C.** $AH \perp SC$. **D.** $AH \perp BC$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy là hình vuông. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $AC \perp (SAD)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AC \perp (SAB)$.

Câu 47: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông gó **C.** Đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. BC. **B.** AB. **C.** AC. **D.** OA.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

A. $BC \perp AB$. **B.** $BC \perp AC$. **C.** $BC \perp SC$. **D.** $BC \perp AH$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biểu thức nào sau đây đúng

A. $SD \perp SB$. **B.** $BD \perp SC$. **C.** $SC \perp SB$. **D.** $SD \perp CD$.

Câu 50: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **SAI**.

A. $AB \perp OC$. **B.** $OH \perp (ABC)$. **C.** $OH \perp BC$. **D.** $OH \perp OA$.

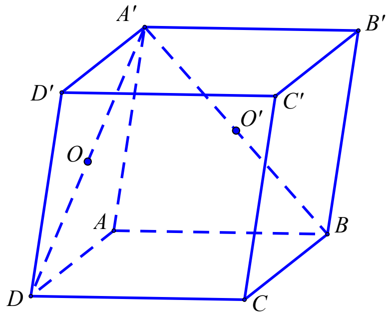
Câu 51: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **SAI**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **SAI**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

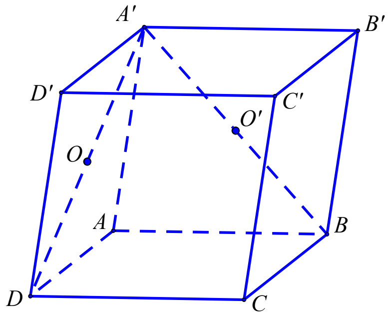
Câu 53: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ và $ABB'A'$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $OO' \perp AC$. **B.** $OO' \perp AA'$. **C.** $OO' \perp AD$. **D.** $OO' \perp AB$.

Câu 54: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ và $ABB'A'$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $OO' \perp AC$. **B.** $OO' \perp AA'$. **C.** $OO' \perp AD$. **D.** $OO' \perp AB$.

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và H là trung điểm cạnh BC. Gọi O là trung điểm AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm OH. Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì?

A. Hình thang cân. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình bình hành.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD); SA=1$, đáy là hình vuông cạnh bằng $x,(0<x\le 1)$. Tính giá trị lớn nhất của thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC.

A. $\frac{\sqrt{6}}{15}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 57: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) qua C và vuông góc BD là hình gì?

A. Ngũ giác. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Tam giác cân.

Câu 58: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a, AA'=a\sqrt{2}$. Tính diện tích của thiết diện của hình hộp chữ nhật khi được cắt bởi mặt phẳng (α) qua A và vuông góc $A'B$.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a^2$ **C.** $a^2\sqrt{2}$ **D.** $a^2\sqrt{6}$

Câu 59: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của BD'. Diện tích thiết diện tạo thành bằng

A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 2: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1: CÂU HỎI LÍ THUYẾT

Câu 1: Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc thì song song với đường thẳng còn lại.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

D. Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Mệnh đề đúng là " Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia "

Câu 2: Cho hai đường thẳng a,b và mặt phẳng (P). Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. Nếu $a\|(P)$ và $b\perp(P)$ thì $a\perp b$.

B. Nếu $a\subset(P)$ và $b\perp(P)$ thì $a\perp b$.

C. Nếu $a\perp(P)$ và $b\perp a$ thì $b\|(P)$ hoặc $b\subset(P)$.

D. Nếu $a\|(P)$ và $b\perp a$ thì $b\perp(P)$.

Lời giải

Nếu $a\|(P)$ và $b\perp(P)$ thì $a\perp b$.

Nếu $a\subset(P)$ và $b\perp(P)$ thì $a\perp b$.

Nếu $a\perp(P)$ và $b\perp a$ thì $b\|(P)$ hoặc $b\subset(P)$.

Nếu $a\|(P)$ và $b\perp a$ thì $b\perp(P)$. Mệnh đề sai vì đường thẳng b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 3: Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Theo tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trướ **C.**

Câu 4: Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng vuông góc với nhau.

B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

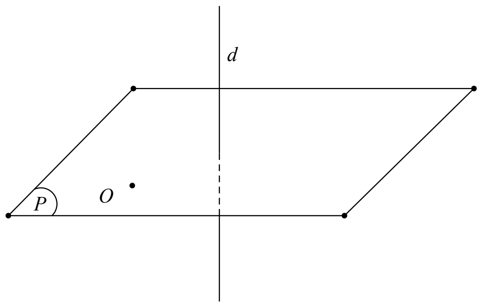
Lời giải

Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Câu 5: Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d. Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d ?

A. Ba. **B.** Hai. **C.** Một. **D.** Vô số.

Lời giải



Qua điểm O có một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d.

Câu 6: Cho hai đường thẳng a, b phân biệt và mặt phẳng (P). Mệnh đề nào sau đây sai ?

A. Nếu $(P) \parallel (Q)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp (Q)$

B. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (P)$

C. Nếu $a \parallel (P)$ và $b \perp (P)$ thì $b \perp a$

D. Nếu $a \perp (P)$, $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$

Lời giải

Câu 7: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng phân biệt a và b. Biết rằng $a \,//\, (P)$. Hỏi mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Nếu $b \,//\, (P)$ thì $b \,//\, a$.

B. Nếu $b \perp (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b \,//\, a$ thì $b \,//\, (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b \perp (P)$.

Lời giải

Nếu $a \,//\, (P)$ và $b \perp (P)$ thì $a \perp b$.

Câu 8: Trong không gian cho điểm O và đường thẳng d. Qua điểm O có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d?

A. Ba. **B.** Hai. **C.** Một. **D.** Vô số.

Lời giải

◆ Theo tính chất qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trướ **C.**

Câu 9: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng tùy ý nằm trong mỗi mặt phẳng.

B. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

C. Góc giữa hai mặt phẳng luôn là góc nhọn.

D. Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai vec tơ chỉ phương của hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Lời giải

Câu 10: Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. Nếu đường thẳng $d\perp(\alpha)$ thì d sẽ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).

B. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d\perp(\alpha)$.

C. Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (α).

D. Nếu đường thẳng $d\perp(\alpha)$ và $a//(\alpha)$ thì $d\perp a$.

Lời giải

Điều kiện cần và đủ để $d\perp(\alpha)$ là đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α).

Câu 11: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Nếu $a\perp(\alpha)$ và $b\perp a$ thì $b//(\alpha)$.
B. Nếu $a//(\alpha)$ và $b//(\alpha)$ thì $b//a$.
C. Nếu $a//(\alpha)$ và $b\perp(\alpha)$ thì $a\perp b$.
D. Nếu $a//(\alpha)$ và $b\perp a$ thì $b\perp(\alpha)$.

Lời giải

Dựa vào tính chất liên hệ giữa quan hệ song song và vuông góc ta **Chọn C**

Câu 12: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a\perp(P)$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu $b//a$ thì $b\perp(P)$.
B. Nếu $b\perp(P)$ thì $b//a$.
C. Nếu $b\perp a$ thì $b//(P)$.
D. Nếu $b//(P)$ thì $b\perp a$.

Lời giải

C sai do b có thể nằm trong (P).

Câu 13: Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Cho đường thẳng $a\perp(\alpha)$, mọi mặt phẳng $(\beta)//(\alpha)$ thì $(\beta)\perp a$.

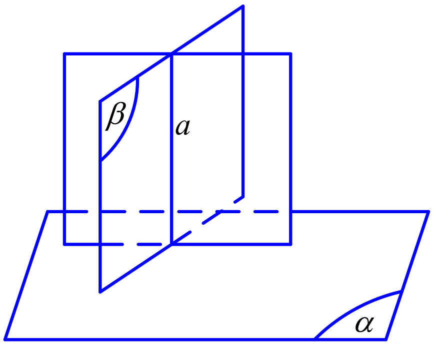
B. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, nếu mặt phẳng (α) chứa a thì $b\perp(\alpha)$.

C. Cho hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, mặt phẳng nào vuông góc với đường này thì song song với đường kia.

D. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b, luôn luôn có mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường thẳng kia.

Lời giải

Chỉ có A đúng còn lại B, C, D là sai.



DẠNG 2: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $SA \perp (ABCD)$ **B.** $SO \perp (ABCD)$ **C.** $AB \perp (SBC)$ **D.** $AC \perp (SBC)$

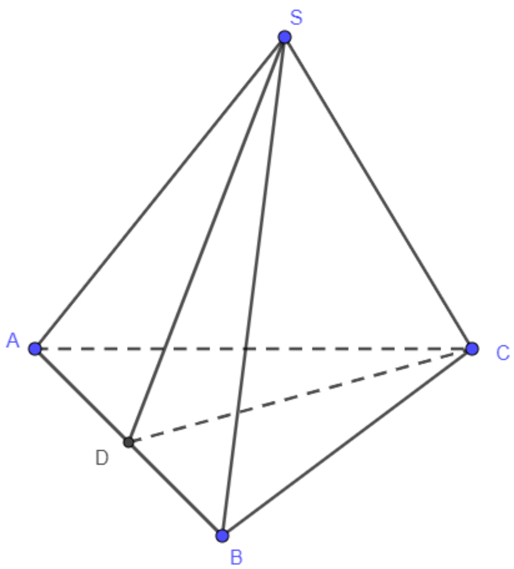
Lời giải

Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau suy ra $SO \perp (ABCD)$

Câu 15: Cho hình chóp tam giác $SABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây **ĐÚNG?**

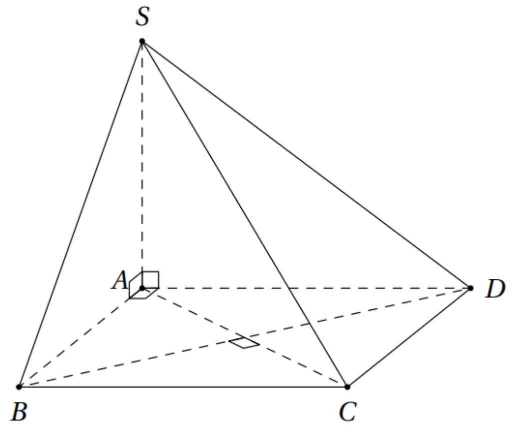
A. $BC \perp (SBC)$. **B.** $SB \perp AB$. **C.** $SA \perp (ABC)$. **D.** $AB \perp SC$.

Lời giải



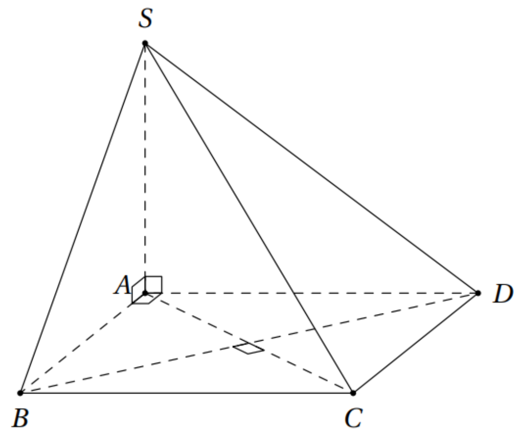
Gọi D là trung điểm của AB, vì tam giác SAB cân tại S và tam giác ABC cân tại C nên suy ra $\begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp SC$. Vậy đáp án D.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $AC \perp (SCD)$. **B.** $BD \perp (SAD)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $BD \perp (SAC)$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$

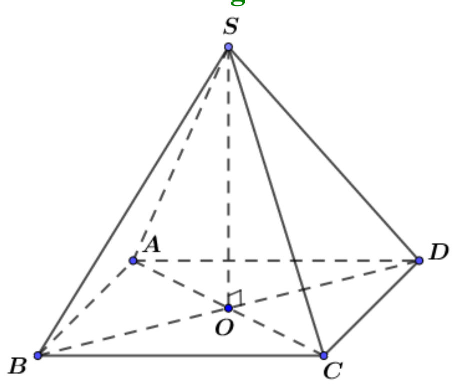
Và $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$.

Vậy $BD \perp (SAC)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAB). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SBD).

Lời giải



$SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO,\ SO \subset (SBD)$.

$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD,\ BD \subset (SBD)$.

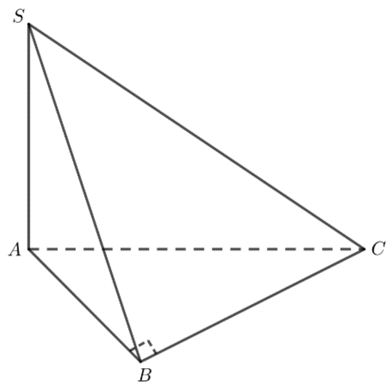
$SO \cap BD = O.$

$\Rightarrow AC \perp (SBD).$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AC \perp (SBC)$. **B.** $BC \perp (SAC)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $AB \perp (SBC)$.

Lời giải



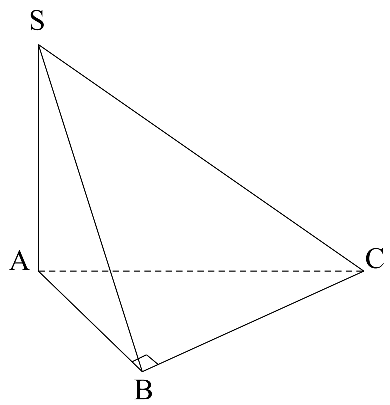
Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$, $BC \perp AB$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AC \perp (SBC)$. **B.** $BC \perp (SAC)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $AB \perp (SBC)$.

Lời giải

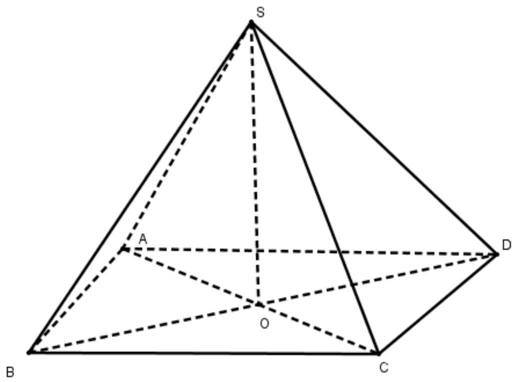


Ta có $\begin{cases} SA \perp BC, AB \perp BC \\ SA \subset (SAB), AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (SBC)$. **B.** $AC \perp (SBC)$. **C.** $SA \perp (ABCD)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình vuông tâm O nên O là trung điểm của AC và BD.

Tam giác SAC có $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S suy ra $SO \perp AC$.

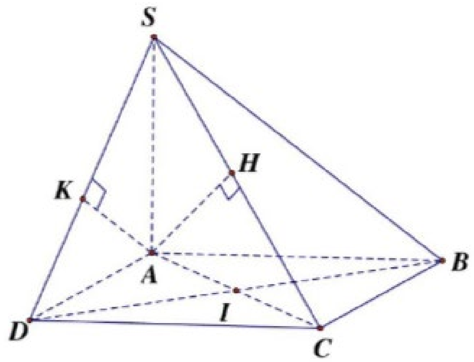
Tam giác SBD có $SB = SD$ nên tam giác SBD cân tại S suy ra $SO \perp BD$.

Vậy $SO \perp (ABCD)$.

Câu 21: Cho hình chóp S.$ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp \left(ABCD\right)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp \left(SAC\right)$. **B.** $BD \perp \left(SAC\right)$. **C.** $AH \perp \left(SCD\right)$. **<u>D</u>.** $AK \perp \left(SCD\right)$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp \left(SAD\right) \Rightarrow CD \perp AK$.

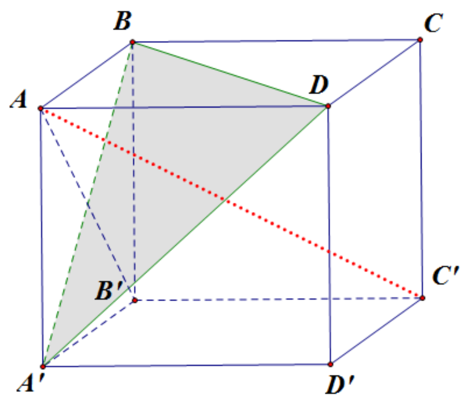
Lại có $SD \perp AK$

Suy ra $AK \perp \left(SCD\right)$.

Câu 22: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

<u>A</u>. $(A'BD)$. **B.** $(A'DC')$. **C.** $(A'CD')$. **D.** $(A'B'CD)$.

Lời giải



Ta có: $\left.\begin{array}{l} A'B \perp AB' \\ A'B \perp B'C' \left(B'C' \perp \left(ABB'A'\right)\right) \\ AB' \cap B'C' = B' \\ AB', B'C' \subset \left(AB'C'\right) \end{array}\right\} \Rightarrow A'B \perp \left(AB'C'\right) \Rightarrow A'B \perp AC'$

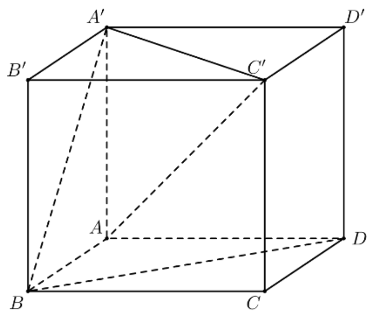
Mặt khác $BD \perp (ACC'A') \Rightarrow \mathrm{BD} \perp AC'$

Như vậy: $\left.\begin{array}{l} AC' \perp A'B\,(cmt) \\ AC' \perp BD\,(cmt) \\ A'B \cap BD = B \\ A'B, BD \subset \left(A'\mathrm{BD}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow AC' \perp \left(A'\mathrm{BD}\right)$.

Câu 23: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $\left(A'BD\right)$. **B.** $\left(A'CD'\right)$. **C.** $\left(A'DC'\right)$. **D.** $\left(A'B'CD\right)$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right).\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = 0$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{BD}$.

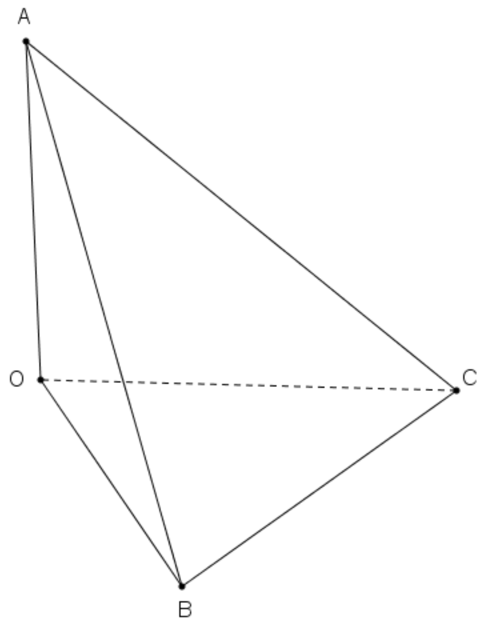
Chứng minh tương tự $\overrightarrow{AC'} \perp \overrightarrow{A'B}$.

Nên $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 24: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây?

A. $OA \perp (OBC)$. **B.** $AC \perp (OBC)$. **C.** $AB \perp (OBC)$. **D.** $BC \perp (AOB)$.

Lời giải



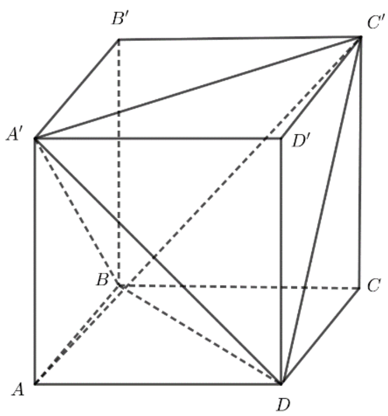
Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề dưới đây

A. $AC \perp (A'BD)$. **B.** $B'D' \perp (A'BD)$.

C. $A'C' \perp (A'BD)$. **D.** $AC' \perp (A'BD)$.

Lời giải



Ta có $AB = AD = AA' = a$ nên A cách đều B, D, A'.

$C'B = C'D = C'A' = a\sqrt{2}$ nên C' cách đều B, D, A'.

Do đó, A, C' cùng nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'BD$.

Suy ra $AC' \perp (A'BD)$.

Câu 26: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Phát biểu nào dưới đây là đúng.

A. $SA \perp (ABC)$. **B.** $SG \perp (ABC)$. **C.** $AB \perp (SAC)$. **D.** $SG \perp (SAB)$.

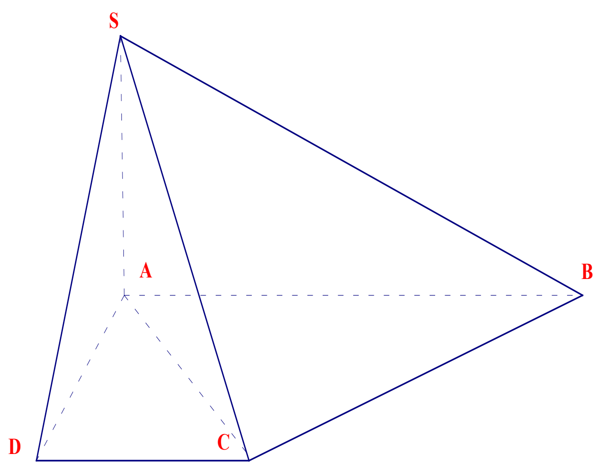
Lời giải

Ta có khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều có trọng tâm G cũng là tâm của đáy nên $SG \perp (ABC)$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = CD = a$, $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $BC \perp (SAC)$. **B.** $CB \perp (SAB)$. **C.** $BD \perp (SAC)$. **D.** $CD \perp (SAC)$.

Lời giải



Từ giả thiết ta có ΔABC vuông cân C. Suy ra $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow$. **A** đúng.

Từ giả thiết, ta có : $\widehat{ABC} = 45° \Rightarrow$ **B** sai.

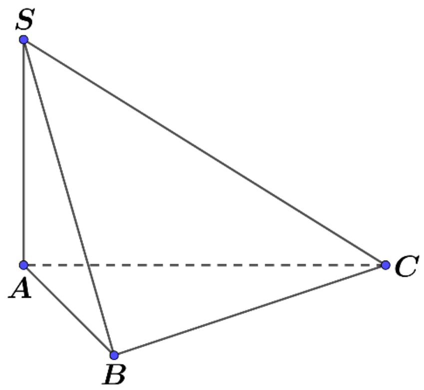
Từ giả thiết, ta có : $\widehat{ACD} = 45° \Rightarrow$ **D** sai.

Từ giả thiết, ta có : BD không vuông góc $AC \Rightarrow$ **C** sai.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B. Đường thẳng SA vuông góc với đáy. Chọn mệnh đề đúng.

A. $CB \perp (SAB)$. **B.** $SA \perp (SBC)$. **C.** $AC \perp (SAB)$. **D.** $CB \perp (SAC)$.

Lời giải



+ $\begin{cases} CB \perp SA \\ CB \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$ nên A đúng.

+ Nếu $SA \perp (SBC)$ thì $SA \perp SB$, mà $SA \perp AB$ ta có điều vô lý, suy ra B sai.

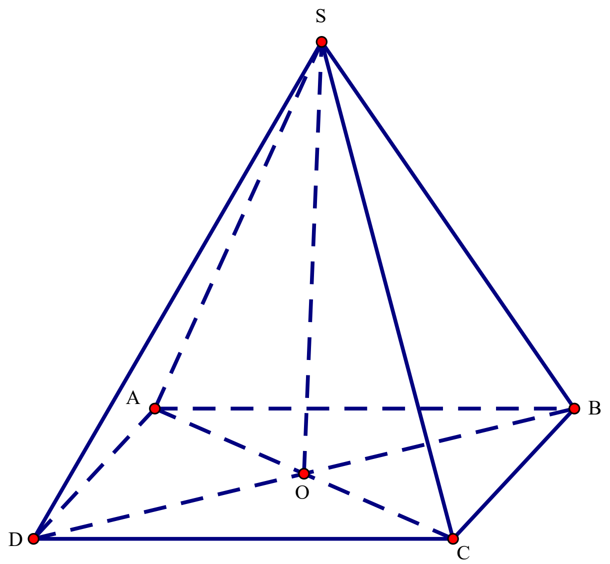
+ Do AC không vuông góc AB nên AC không vuông góc (SAB), suy ra C sai.

+ Do BC không vuông góc AC nên BC không vuông góc (SAC), suy ra D sai.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, $SA = SC, SB = SD$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SO \perp (ABCD)$. **C.** $SC \perp (ABCD)$. **D.** $SB \perp (ABCD)$.

Lời giải



Ta có O là trung điểm của AC, BD

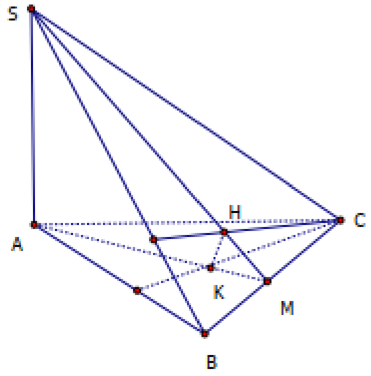
Mà $SA = SC, SB = SD \Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC. Mệnh đề nào **sai** trong các mệnh đề sau?

A. $BC \perp (SAH)$. **B.** $HK \perp (SBC)$.

C. $BC \perp (SAB)$. **D.** SH, AK và BC đồng quy.

Lời giải



Ta có $BC \perp SA, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAH)$

Ta có $CK \perp AB, CK \perp SA \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB$

Mặt khác $CH \perp SB$ nên suy ra $SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK$, tương tự ta chứng minh được $SC \perp HK$ nên $HK \perp (SBC)$.

Gọi M là giao điểm của SH và BC. Do $BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$ hay đường thẳng AM trùng với đường thẳng AK. Hay SH, AK và BC đồng quy.

Do đó $BC \perp (SAB)$ sai.

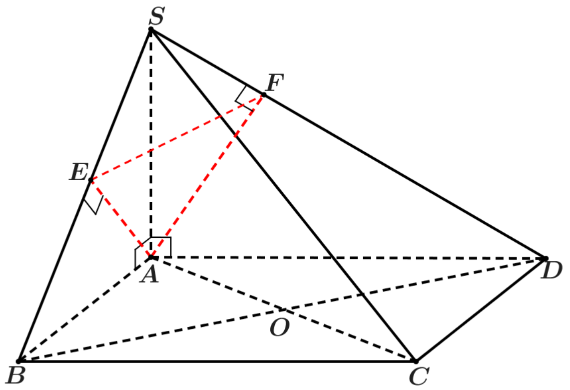
Nhận xét: Ta có thể từ mệnh đề $BC \perp (SAH)$ là đúng suy ra mệnh đề $BC \perp (SAB)$ là sai.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD. Khẳng định nào sau đây là **đúng?**

A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEC)$.

C. $SC \perp (AED)$. **D.** $SC \perp (AEF)$.

Lời giải

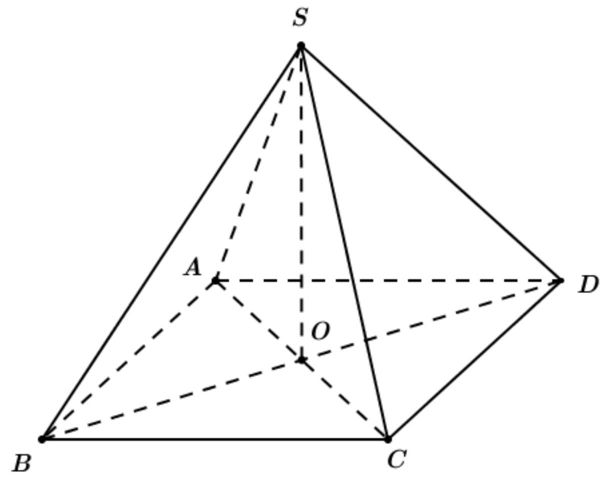


Ta có: $\begin{cases} AF \perp (SCD) \\ AE \perp (SBC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AF \perp SC \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (SEF)$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $AB \perp (SBC)$. **B.** $AC \perp (SBC)$. **C.** $SA \perp (ABCD)$. **D.** $SO \perp (ABCD)$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có:

Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả cạnh bên và cạnh đáy đều bằng nhau do đó:

$SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại A

Lại có $ABCD$ là hình vuông

$\Rightarrow O$ là trung điểm của AC

$\Rightarrow SO$ vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của ΔSAC

$\Rightarrow SO \perp AC$

Tương tự SO vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao của ΔSBD

$\Rightarrow SO \perp BD$

Từ và ta có:

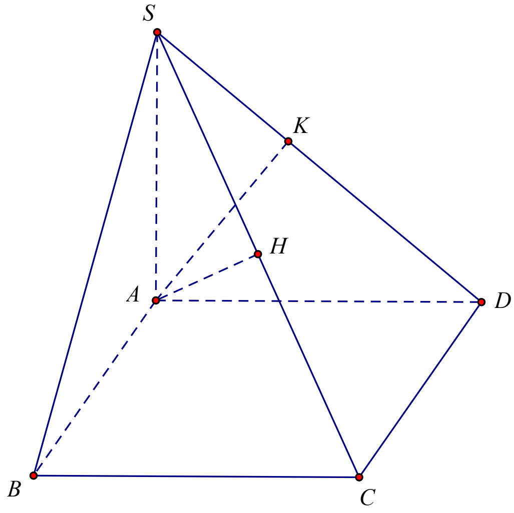
$$\begin{cases} SO \perp AC \subset (ABCD) \\ SO \perp BD \subset (ABCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SC, SD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAC)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AH \perp (SCD)$. **D.** $AK \perp (SCD)$.

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$. Do $ABCD$ là hình chữ nhật nên $AD \perp CD$

Suy ra: $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK,\ (1)$.

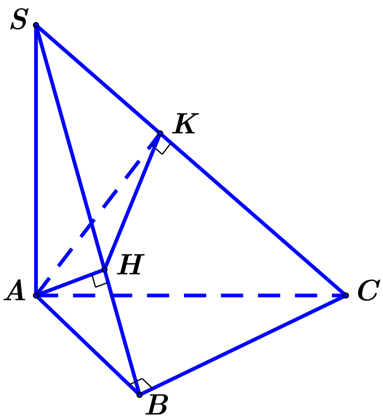
Mặt khác $AK \perp SD,\ (2)$.

Từ và ta có: $AK \perp (SCD)$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của điểm A trên cạnh SB và SC. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $AH \perp (SBC)$. **C.** $AK \perp (SBC)$. **D.** $SC \perp (AHK)$.

Lời giải



$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp BC,\ AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Suy ra đúng.

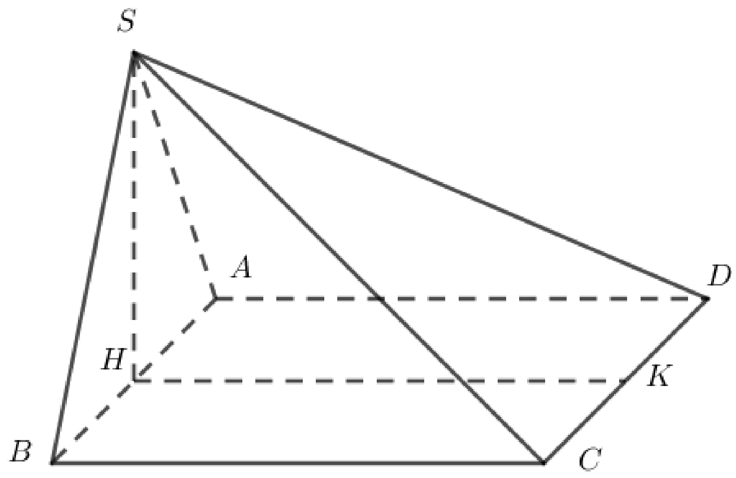
$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ SC \perp AH \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC). \text{ Suy ra đúng}$$

Suy tiếp $\left.\begin{matrix} AH \perp SC \\ AK \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SC \perp (AHK)$. Suy ra đúng.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $SH \perp (ABCD)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $CD \perp (SHK)$.

Lời giải



Ta có tam giác SAB đều cạnh a nên $SB = AB = a$.

Mặt khác tam giác SBC có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2$.

Suy ra tam giác SBC vuông cân tại B. Hay $BC \perp SB$

Mà $BC \perp AB$. Suy ra $BC \perp (SAB)$. Do đó **Chọn A** đúng.

Từ $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$.

Tam giác SAB đều mà H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Từ và suy ra $SH \perp (ABCD)$. **Chọn B** đúng.

Tam giác SAB đều nên AB không vuông góc với mặt phẳng (SAD). **Chọn C** sai.

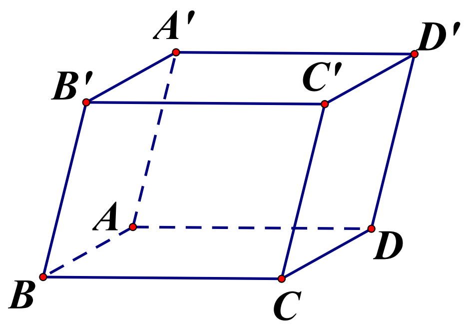
Ta có $\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp (SHK)$. **Chọn D** đúng.

DẠNG 3: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 36: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chọn khẳng định **SAI** trong các khẳng định sau:

A. $AC \perp B'C'$. **B.** $BD \perp A'C'$. **C.** $AD' \perp CB'$. **D.** $AB' \perp CD'$.

Lời giải

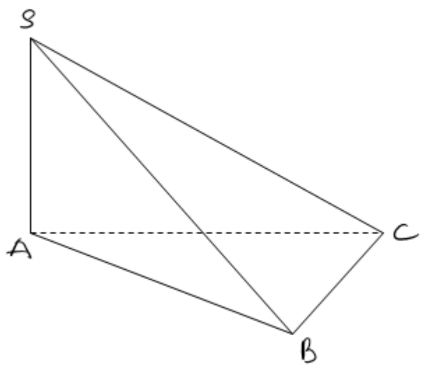


Nếu $AC \perp B'C' \Rightarrow AC \perp BC$.

Câu 37: Cho hình chóp $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Hình chóp $SABC$ có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên ΔSAB, ΔSAC là tam giác vuông.

Vì $AB \perp BC$ nên ΔABC là tam giác vuông

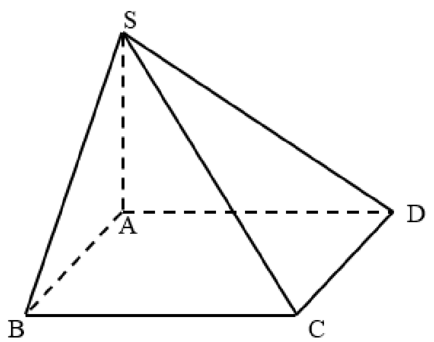
Ta lại có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$ nên ΔSBC là tam giác vuông

Vậy Hình chóp $SABC$ có bốn mặt là tam giác vuông.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp \left(ABCD\right)$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề dưới đây.

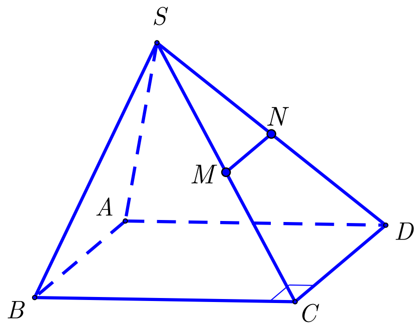
A. $SA \perp SB$. **B.** $SA \perp CD$. **C.** $SA \perp BD$. **D.** $SA \perp BC$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp CD$, $SA \perp BD$ và $SA \perp BC$.

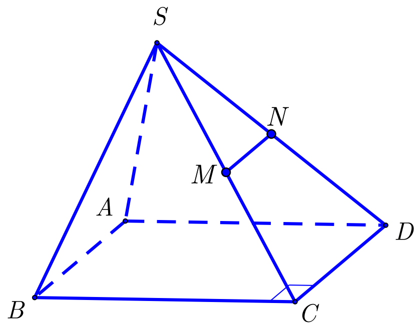
Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $MN \perp AC$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp AB$. **D.** $MN \perp BC$.

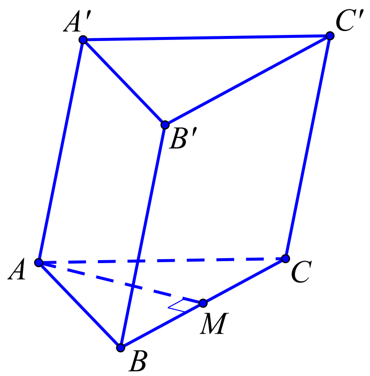
Lời giải



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD. Suy ra $MN // CD$

Ta có $\begin{cases} MN // CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp BC$

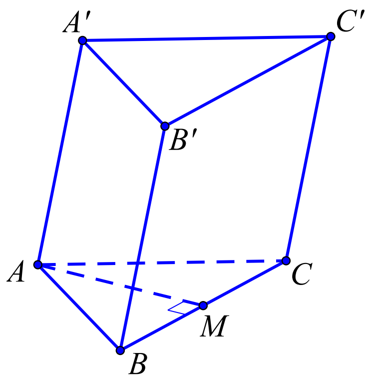
Câu 40: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Gọi M là trung điểm BC.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $AM \perp A'B'$. **B.** $AM \perp BB'$. **C.** $AM \perp B'C'$. **D.** $AM \perp A'C'$.

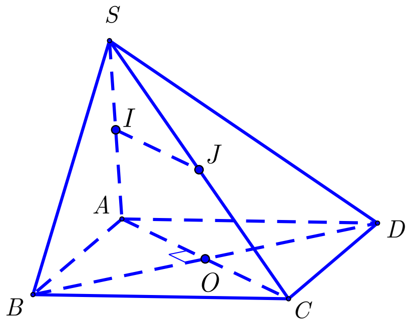
Lời giải



Do ABC là tam giác đều nên $AM \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC // B'C' \end{cases} \Rightarrow AM \perp B'C'$.

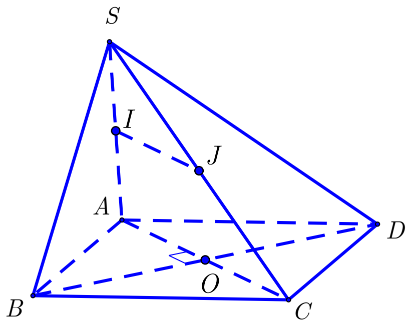
Câu 41: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC.



Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $IJ \perp AB$. **B.** $IJ \perp AD$. **C.** $IJ \perp BD$. **D.** $IJ \perp SD$.

Lời giải



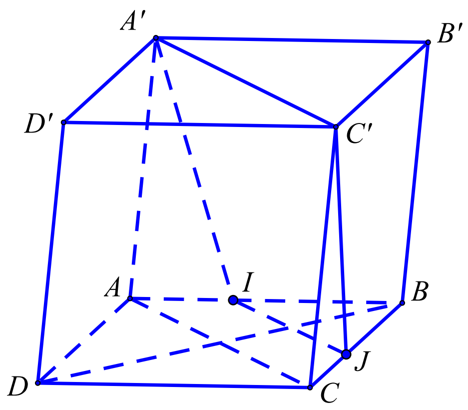
Vì IJ là đường trung bình của tam giác SAC nên $IJ // AC$.

Ta có $\begin{cases} IJ // AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp IJ$.

Câu 42: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi (P) là mặt phẳng chứa $A'C'$ và cắt AB, BC lần lượt tại I và J. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $BD \perp A'I$. **B.** $BD \perp IJ$. **C.** $BD \perp C'J$. **D.** $BD \perp A'J$.

Lời giải



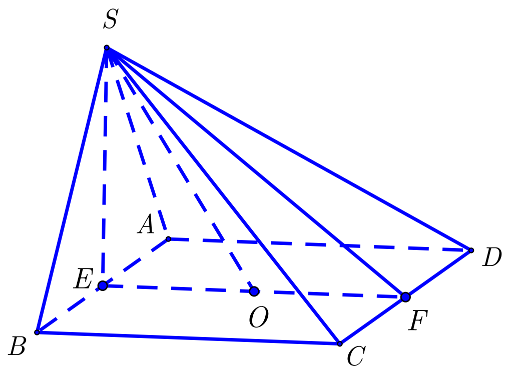
Ta có $\begin{cases}(P)\cap(ABCD)=IJ\\(P)\cap(A'B'C'D')=A'C'\\(ABCD)//(A'B'C'D')\end{cases}\Rightarrow A'C'//IJ$. Mà $A'C'//AC$ nên $IJ//AC$.

Mặt khác $\begin{cases}BD\perp AC\\AC//IJ\end{cases}\Rightarrow BD\perp IJ$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt bên SAB là tam giác cân. Gọi E,F lần lượt là trung điểm AB và CD. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $CD\perp SF$. **B.** $CD\perp SE$. **C.** $CD\perp SO$. **D.** $CD\perp EF$.

Lời giải



Vì tam giác SAB cân tại S nên $SE\perp AB$.

Ta có $\begin{cases}AB//CD\\SE\perp AB\end{cases}\Rightarrow CD\perp SE$.

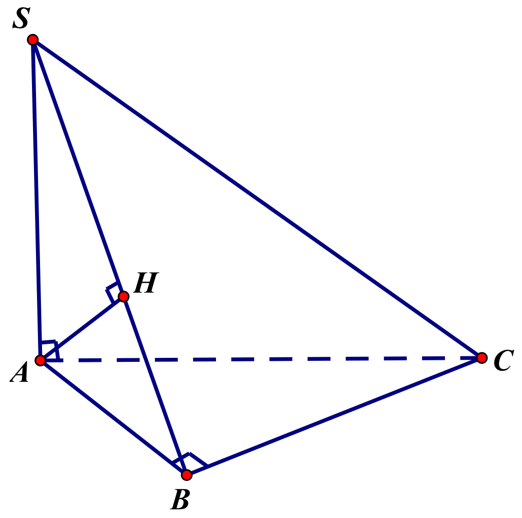
Câu 44: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Xét các khẳng định sau:

(1) $AH\perp SC$ (2) $BC\perp(SAB)$ (3) $SC\perp AB$

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. $3\cdot$ **B.** $1\cdot$ **C.** $0\cdot$ **D.** $2\cdot$

Lời giải



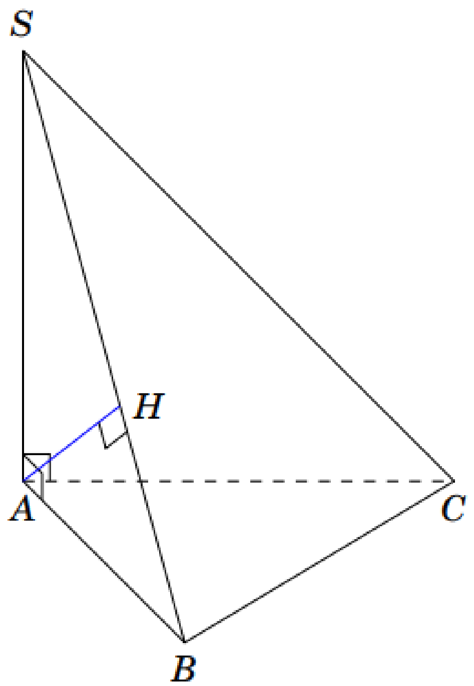
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \ \left(do \ AH \subset (SAB)\right)$

$\begin{cases} AH \perp SB \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông ở B, AH là đường cao của tam giác SAB. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp AC$. **C.** $AH \perp SC$. **D.** $AH \perp BC$.

Lời giải



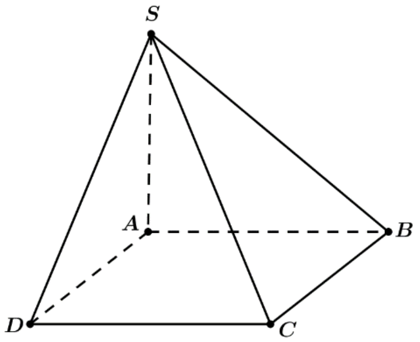
$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ suy ra phương án A đúng.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB(gt) \\ BC \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, mà $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC, AH \perp BC$. Suy ra phương án C,D đúng.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và đáy là hình vuông. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $AC \perp (SAD)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AC \perp (SAB)$.

Lời giải

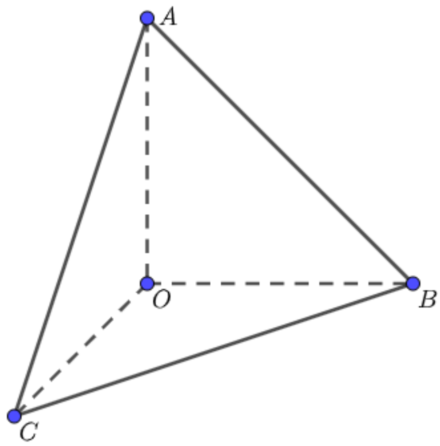


Ta có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases}$. Suy ra $BC \perp (SAB)$.

Câu 47: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông gó **C.** Đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

A. BC. **B.** AB. **C.** AC. **D.** OA.

Lời giải

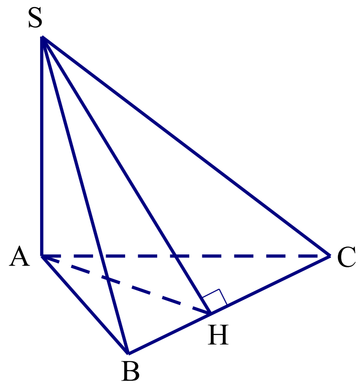


Do $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC)$ mà $BC \subset (OBC)$ nên $OA \perp BC$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định **đúng**.

A. $BC \perp AB$. **B.** $BC \perp AC$. **C.** $BC \perp SC$. **D.** $BC \perp AH$.

Lời giải

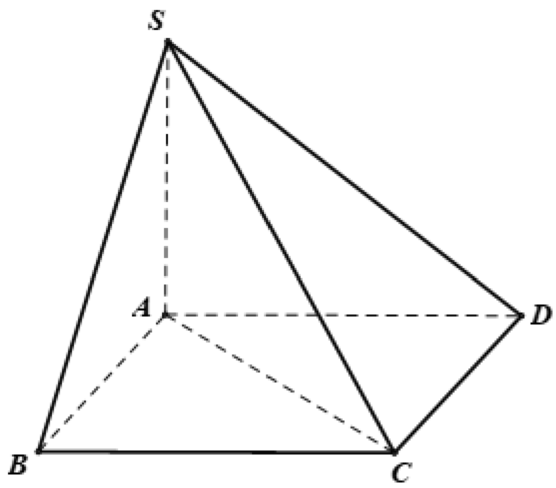


Ta có $SA \perp BC, SH \perp BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$. Biểu thức nào sau đây đúng

A. $SD \perp SB$. **B.** $BD \perp SC$. **C.** $SC \perp SB$. **D.** $SD \perp CD$.

Lời giải

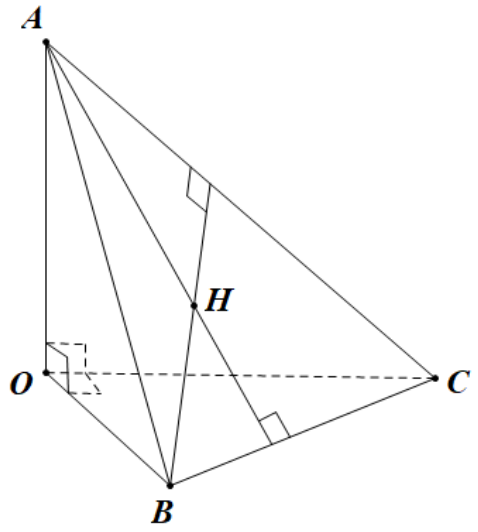


Ta có $\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Câu 50: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây **SAI**.

A. $AB \perp OC$. **B.** $OH \perp (ABC)$. **C.** $OH \perp BC$. **D.** $OH \perp OA$.

Lời giải



Ta có: $OC \perp (OAB)$ nên $OC \perp AB$. **Chọn A** đúng

Ta có $\begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp OA \end{cases}$ nên $BC \perp (OAH)$ hay $BC \perp OH$. **Chọn C** đúng.

Tương tự: $\begin{cases} AB \perp CH \\ AB \perp OC \end{cases}$ nên $AB \perp (OCH)$ hay $AB \perp OH$

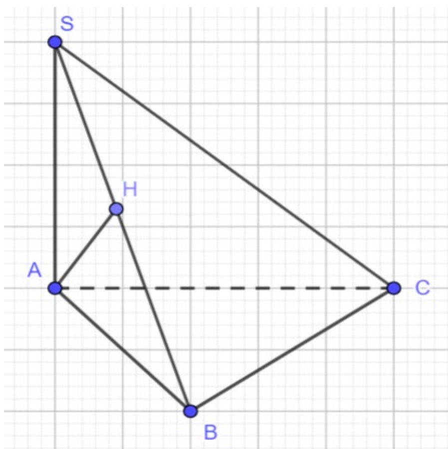
$\Rightarrow OH \perp (ABC)$. **Chọn B** đúng.

Vậy: $OH \perp HA$ hay tam giác HOA vuông tại H. Câu D sai.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **SAI**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Lời giải



Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$. Vậy A đúng.

Ta có $\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (Do } SA \perp (ABC)) \\ AB \cap SA = A \\ AB, SA \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

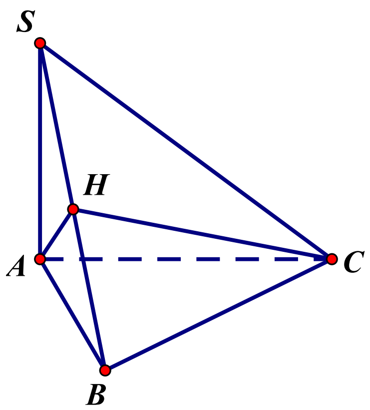
Mặt khác $\left.\begin{array}{l} AH \perp SB \text{ (gt)} \\ AH \perp BC \text{ (Do } BC \perp (SAB)) \\ SB \cap BC = B \\ SB, BC \subset (SBC) \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Suy ra $AH \perp BC$ và $AH \perp SC$

vậy B và D đúng. Suy ra C sai.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB. Khẳng định nào dưới đây là **SAI**?

A. $SA \perp BC$. **B.** $AH \perp BC$. **C.** $AH \perp AC$. **D.** $AH \perp SC$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$. Vậy phương án **A** đúng.

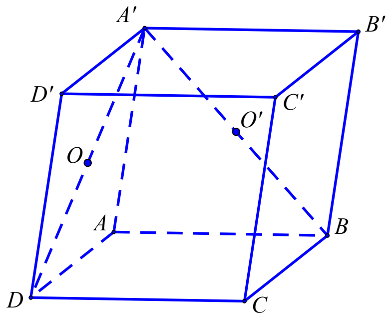
Ta có $\begin{cases} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \ (1)$. Vậy phương án **B** đúng.

Vì H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB nên $AH \perp SB \ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$. Vậy phương án **D** đúng.

Từ $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HC$ nên tam giác AHC vuông tại H do đó AH không thể vuông góc với AC. Vậy phương án **C** sai.

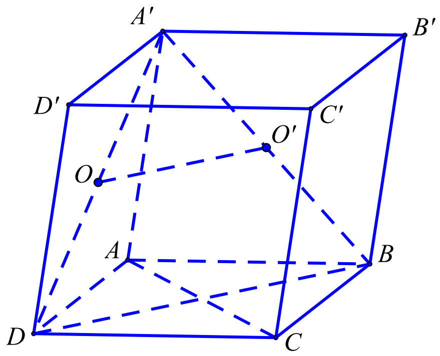
Câu 53: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ và $ABB'A'$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

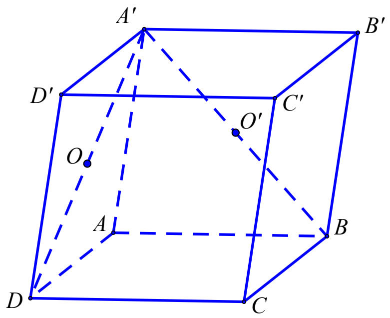
A. $OO' \perp AC$. **B.** $OO' \perp AA'$. **C.** $OO' \perp AD$. **D.** $OO' \perp AB$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} OO'//BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow OO' \perp AC$.

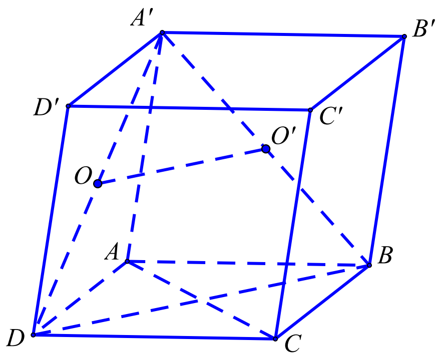
Câu 54: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ và $ABB'A'$.



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $OO' \perp AC$. **B.** $OO' \perp AA'$. **C.** $OO' \perp AD$. **D.** $OO' \perp AB$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} OO'//BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow OO' \perp AC$.

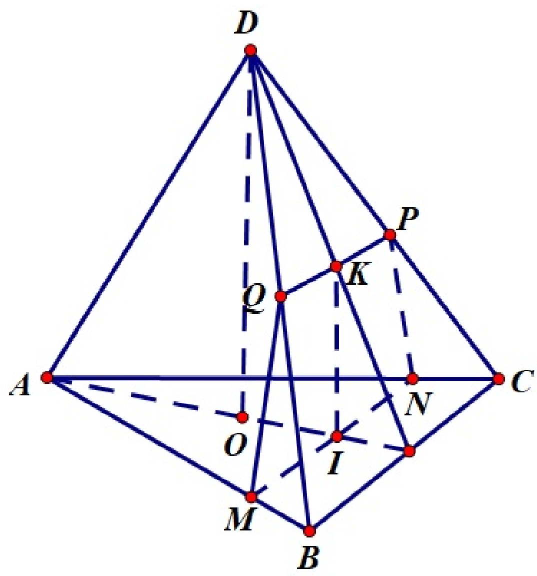
DẠNG 4: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và H là trung điểm cạnh BC. Gọi O là trung điểm AH của tam giác ABC, SO vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm OH. Mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với OH. Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là hình gì?

A. Hình thang cân. **B.** Tam giác vuông.

C. Hình thang vuông. **D.** Hình bình hành.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} (P) \perp OH \\ BC \perp OH \end{cases} \Rightarrow (P)//BC \Rightarrow$ qua I kẻ đường thẳng $d_1//BC$. Gọi $\begin{cases} d_1 \cap AB = M \\ d_1 \cap AC = N \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} SO \perp OH \\ (P) \perp OH \end{cases} \Rightarrow (P)//SO \Rightarrow$ qua I kẻ đường thẳng $IK//SO\,(K \in SH)$.

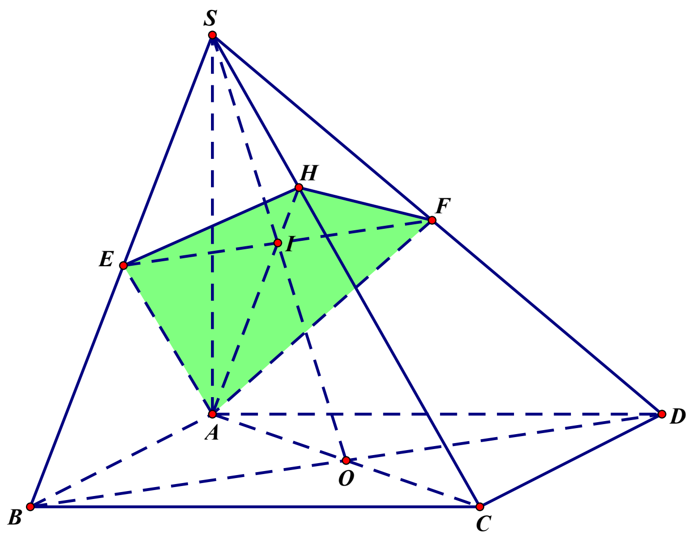
$(P)//BC \Rightarrow$ qua K kẻ đường thẳng $d_2//BC$. Gọi $\begin{cases} d_2 \cap SB = Q \\ d_2 \cap SC = P \end{cases}$.

$\Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ là tứ giác $MNPQ$ có IK là đường trung trực của MN và $PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD); SA = 1$, đáy là hình vuông cạnh bằng $x, (0 < x \le 1)$. Tính giá trị lớn nhất của thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC.

A. $\frac{\sqrt{6}}{15}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Khi đó:

$(\alpha) \cap SC = H; AH \perp SC$
$(\alpha) \cap SB = E; EH \perp SC$
$(\alpha) \cap SD = F; FH \perp SC$

Nối $AE, AF \Rightarrow AEHF$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ tạo bởi mặt phẳng (α)

Vì $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE$ mà $AE \perp SC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AE \perp SB \\ AE \perp EH \end{cases}$.

Tương tự ta cũng có $\begin{cases} AF \perp SD \\ AF \perp FH \end{cases}$

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AE = AF \Rightarrow EH = FH \Rightarrow \Delta AEH = \Delta AFH$

$\Rightarrow S_{AEHF} = 2.S_{\Delta AEH} = AE.EH$

$$AE = \frac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$AH = \frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x^2}}$$

$$EH = \sqrt{AH^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{2x^2}{1+2x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{\left(1+2x^2\right)\left(1+x^2\right)}}$$

$$\Rightarrow S_{AEHF} = \frac{x^2}{\sqrt{\left(1+2x^2\right)\left(1+x^2\right)\left(1+x^2\right)}} = \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+2x^2}} \le \frac{x^2}{2x.\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} = \frac{x\sqrt{3}}{2\left(x+x+1\right)} \le$$

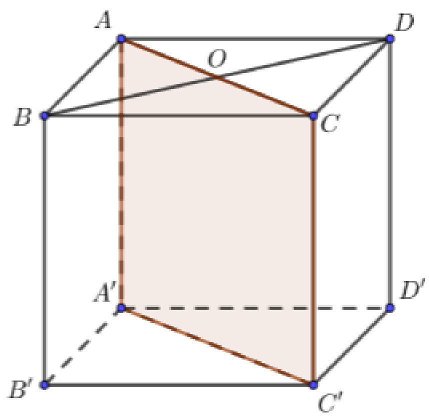
$$\le \frac{x\sqrt{3}}{6.\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt[3]{x}}{6} \le \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$\Rightarrow S_{AEHF}$ lớn nhất $\Leftrightarrow S_{AEHF} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Đạt được khi $x = 1$.

Câu 57: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (α) qua C và vuông góc BD là hình gì?

A. Ngũ giác. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình vuông. **D.** Tam giác cân.

Lời giải

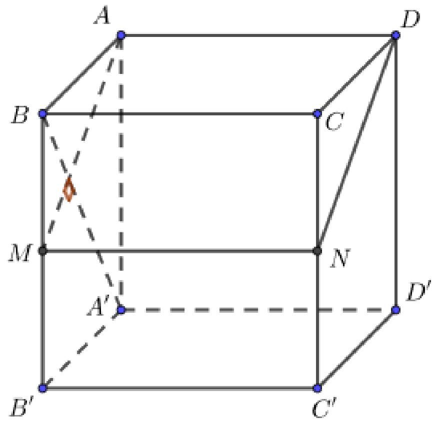


Ta có: $CA \perp BD$ và $CC' \perp BD$ suy ra $(ACC'A') \perp BD$ Vì vậy (α) chính là $(ACC'A')$. Thiết diện là một hình chữ nhật.

Câu 58: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = a\sqrt{2}$. Tính diện tích của thiết diện của hình hộp chữ nhật khi được cắt bởi mặt phẳng (α) qua A và vuông góc $A'B$.

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a^2$ **C.** $a^2\sqrt{2}$ **D.** $a^2\sqrt{6}$

Lời giải



+ Hình chữ nhật $ABB'A'$ có $AB = a, AA' = a\sqrt{2}$. Lấy M là trung điểm BB'. Ta dễ chứng minh $AM \perp A'B$.

+ Ta lại có $AD \perp A'B$. Suy ra (α) chính là (ADM).

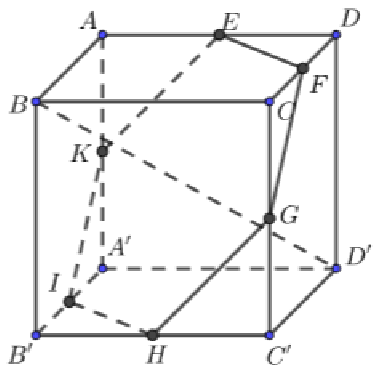
+ Qua M kẻ $MN // AD$. Thiết diện khi đó là hình chữ nhật $ADNM$.

+ Ta tính được $AM = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ và $AD = 2a$. Suy ra diện tích hình chữ nhật $ADNM$ là $a^2\sqrt{6}$.

Câu 59: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của BD'. Diện tích thiết diện tạo thành bằng

A. $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a^2\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AD. Ta có $EB = ED'$ nên E thuộc mặt phẳng trung trực của BD'.

Gọi F, G, H, I, K lần lượt là trung điểm của $CD, CC', B'C', A'B', AA'$.

Chứng minh tương tự ta có các điểm trên đều thuộc mặt phẳng trung trực của BD'.

Vậy thiết diện của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng trung trực của BD' là hình lục giác đều $EFGHIK$ có cạnh bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy diện tích thiết diện là $S = 6.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

CHƯƠNG VIII

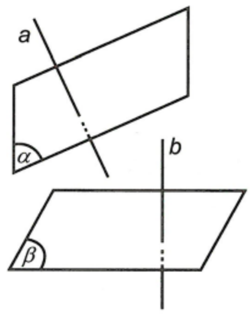
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 3: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. LÝ THUYẾT.

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$

2. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

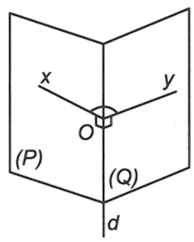
Hai mặt phẳng vuông góc: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90°$

Chú ý: $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$;

$(\alpha)\equiv(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$.

Cách xác định góc khác: Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

+) Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

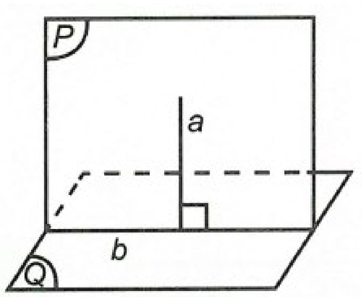
Khi đó: $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)} = \widehat{(Ox,Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)} = \widehat{MOH}$.

Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 1: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} \text{a} \subset (P) \\ \text{a} \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



3. TÍNH CHẤT CƠ BẢN VỀ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định lý 2: Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

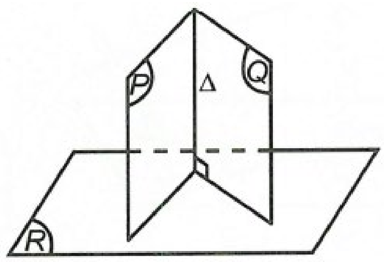
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ \text{a} \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ \text{a} \perp b \end{cases} \Rightarrow \text{a} \perp (Q).$$

Nhận xét: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P).

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in \text{a} \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \text{a} \subset (P).$$

Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ 3.

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R).$$



4. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

a) Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.

- Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên vuông góc với hai đáy.

b) Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

c) Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

d) Hình hộp chữ nhật

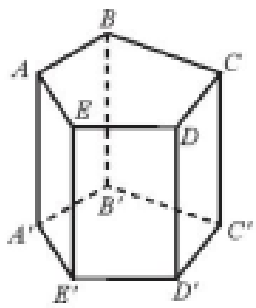
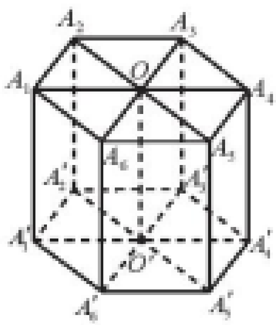
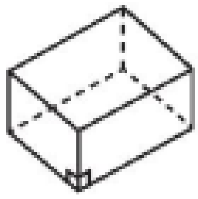
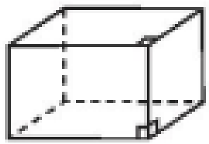
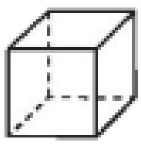
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật.

Đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với a, b, c là 3 kích thước.

e) Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		– Cạnh bên vuông góc với hai đáy. – Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		– Hai đáy là hai đa giác đều. – Mặt bên là các hình chữ nhật. – Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		– Bốn mặt bên là hình chữ nhật. – Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		– Sáu mặt là hình chữ nhật. – Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. – Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Hình lập phương		– Sáu mặt là hình vuông. – Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a: $d=a\sqrt{3}$.

5. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

+) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

+) Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.

+) Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

Hình chóp cụt đều

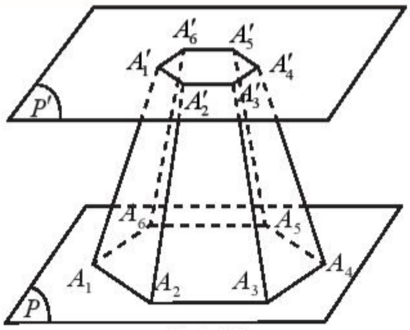
Định nghĩa

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là ***hình chóp cụt đều***.

Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3...A_6.A_1'A_2'A_3'...A_6'$, ta gọi:

– Các điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_6, A_1', A_2', A_3', ..., A_6'$ là các ***đỉnh***.

– Đa giác $A_1A_2A_3...A_6$ là ***đáy lớn***, đa giác $A_1'A_2'A_3'...A_6'$ là ***đáy nhỏ***. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



Hình 26

– Cạnh của hai đa giác đáy là ***cạnh đáy***. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.

– Các hình thang cân $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', ..., A_6A_1A_1'A_6'$ là các ***mặt bên***.

– Cạnh bên của mặt bên gọi là ***cạnh bên*** của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.

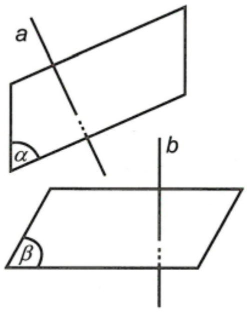
– Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là ***đường cao***. Độ dài đường cao là ***chiều cao***.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐỊNH NGHĨA

1 PHƯƠNG PHÁP.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right).$$

Chú ý: $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 0^o$;

$(\alpha) \equiv (\beta) \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 0^o$.

2 BÀI TẬP.

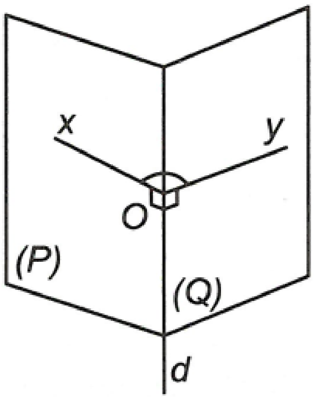
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG DỰA TRÊN GIAO TUYẾN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

+) Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và ($ABCD$) bằng

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC), SA = \sqrt{3}cm, AB = 1cm$. Mặt bên ($SBC$) hợp với mặt đáy góc bằng

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC). Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, SA = a$ và $SA \perp (ABC), AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$). Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và ($ABCD$). Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$, tính góc giữa (SAC) và (SBC).

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD). Giá trị của cosφ bằng

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐINH LÝ HÌNH CHIẾU

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dùng định lý về diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích hình chiếu của H trên (P') và φ là góc giữa (P) và (P') thì $S' = S.\cos\varphi$ hay $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP VỀ GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

Câu 12: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

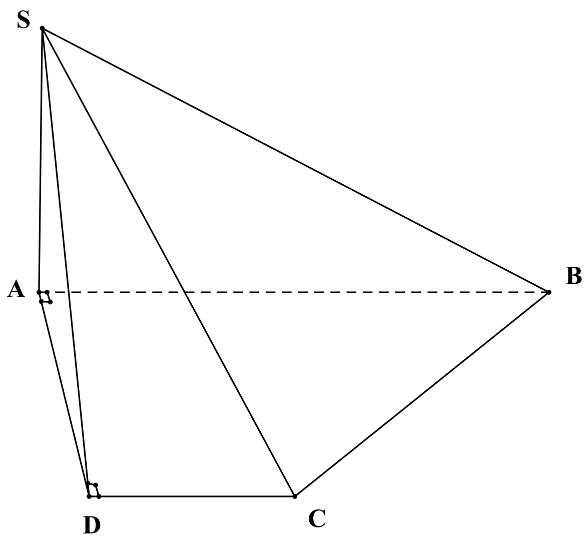
Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Câu 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

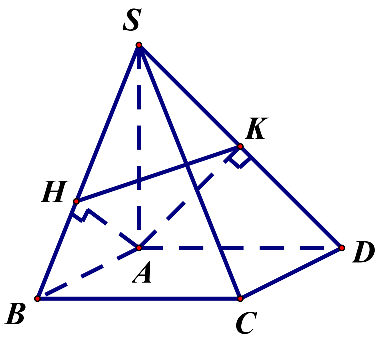
Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng:

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2AD = 2DC = a$ (Hình vẽ minh họa). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng



Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD, tính góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$.

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

Câu 22: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB = a$, góc $\widehat{BAD} = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = x$. Tìm x để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 90^0.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60^0, tam giác SBC đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC).Khi đó

Câu 25: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{6}$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và đáy của hình chóp. Tính $\tan\varphi$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA\perp(ABCD)$, $SA=x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc bằng $60°$.

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng
Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính *cosin* góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Cho biết $AB=2AD=2DC=2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC).

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $BC=\sqrt{2}\,a$ và ΔACD vuông cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD và I là trung điểm SC. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (AHI) và $(ABCD)$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm SB và SD. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC=SB=a, SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Câu 33: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SB=a$, $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB=SA=a$, $SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=BC=a$ và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

Câu 37: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB=AC=a$ và góc $\widehat{BAC}=120°$, cạnh bên $AA'=a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC = 2,\ AA' = \sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

DẠNG 4: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

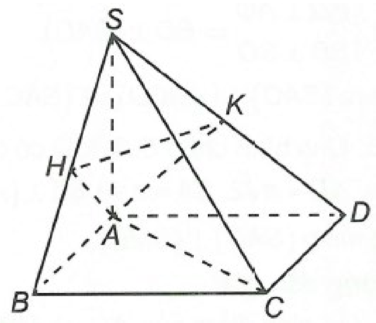
$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 90^0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Ví dụ. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông, *SA* vuông góc với đáy. Gọi *H, K* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB, SD.* Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AHK)$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} SA \perp CD\left(do\ SA \perp (ABCD)\right) \\ CD \perp AD \\ AD \cap SA = \{A\} \end{cases}$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Tương tự ta chứng minh được $AH \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AHK)$.

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (AHK)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 40: Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *C*, *SAC* là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

Câu 41: Cho hình chóp *S.ABCD* có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng *b*. Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Câu 42: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi *M* là trung điểm của *AD.* Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

Câu 43: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN)\perp(SBC)$.

Câu 44: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=AD=a, AA'=b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Câu 45: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d\perp(ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB)\perp(SAC)$.

DẠNG 5: DÙNG MỐI QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIẢI BÀI TOÁN THIẾT DIỆN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng a cắt hình chóp theo một thiết diện.

+) Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì? Tìm đường thẳng song song với (P).

+) Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:

Sử dụng tính chất về giao tuyến song song như sau

$$\begin{cases} a\subset(Q) \\ a//(P) \end{cases} \Rightarrow (P)\cap(Q)=m//a.$$

+ Kết luận hình dạng của thiết diện và tính các yêu cầu liên quan.

✓ Thiết diện là hình gì?

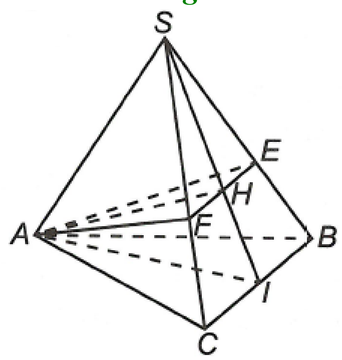
✓ Dựa vào các công thức tính diện tích để tính diện tích thiết diện.

✓ Áp dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất diện tích thiết diện.

Ví dụ: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB=a, SA=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện.

Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải



Kẻ $AH\perp SI$. Suy ra $AH\subset(P)$.

Ta có $AI\perp BC, SI\perp BC \Rightarrow BC\perp AH$.

Mà $(P)\perp SI$ nên $(P)//BC$.

Lại có $(P)\cap(SBC)=d//BC \Rightarrow H\in d$.

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d và SB, SC.

Suy ra thiết diện cần tìm là ΔAEF.

Ta có $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}, AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$SI=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\Delta SAI}=\frac{\sqrt{5}a^2}{8} \Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Ta có $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{SH}{SI}\Rightarrow EF=\dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow S_{AEF}=\dfrac{1}{2}AH.FE=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại $A,\ D;\ AB=2a; SA=AD=DC=a$; $SA\perp(ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha)\perp(SAC)$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Câu 48: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy của lăng trụ bằng a. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc $45°$ và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại $M,\ N,\ P,\ Q$. Tính diện tích thiết diện.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi H là trung điểm của BC, O là trung điểm của AH và G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO=2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD'. Tính diện tích thiết diện.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=b$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sau cho $AM=x(0<x<a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích S của thiết diện theo $a,\ b,\ x$.

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

CHƯƠNG VIII

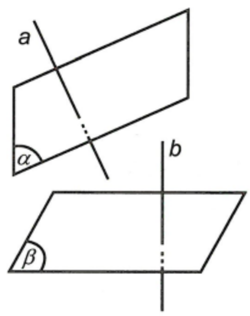
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 3: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

I. LÝ THUYẾT.

1. GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$

2. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

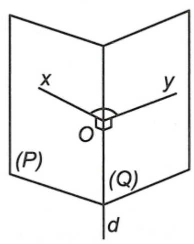
Hai mặt phẳng vuông góc: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.

$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90°$

Chú ý: $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$;

$(\alpha)\equiv(\beta)\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=0^o$.

Cách xác định góc khác: Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

+) Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

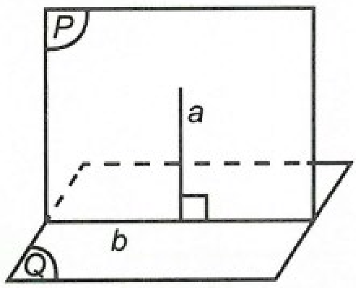
Khi đó: $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{((\alpha),(\beta))} = \widehat{MOH}$.

Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 1: Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} \text{a} \subset (P) \\ \text{a} \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



3. TÍNH CHẤT CƠ BẢN VỀ HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

Định lý 2: Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

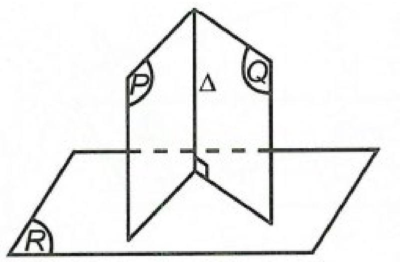
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ \text{a} \subset (P) \\ b = (P) \cap (Q) \\ \text{a} \perp b \end{cases} \Rightarrow \text{a} \perp (Q).$$

Nhận xét: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong (P).

$$\begin{cases} A \in (P) \\ (P) \perp (Q) \\ A \in \text{a} \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow \text{a} \subset (P).$$

Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của chúng cũng vuông góc với mặt phẳng thứ 3.

$$\begin{cases} (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (R).$$



4. HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

a) Hình lăng trụ đứng

Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy.

- Các mặt bên là các hình chữ nhật.
- Các mặt bên vuông góc với hai đáy.

b) Hình lăng trụ đều

Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

c) Hình hộp đứng

Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

d) Hình hộp chữ nhật

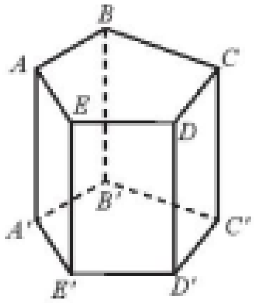
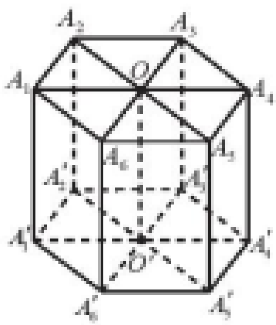
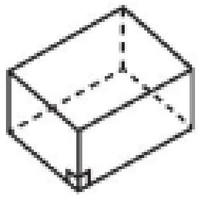
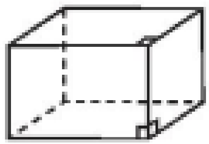
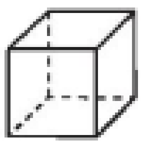
Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật.

Đường chéo $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ với a, b, c là 3 kích thước.

e) Hình lập phương

Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Tên	Hình vẽ	Tính chất cơ bản
Hình lăng trụ đứng		– Cạnh bên vuông góc với hai đáy. – Mặt bên là các hình chữ nhật.
Hình lăng trụ đều		– Hai đáy là hai đa giác đều. – Mặt bên là các hình chữ nhật. – Cạnh bên và đường nối tâm hai đáy vuông góc với hai đáy.
Hình hộp đứng		– Bốn mặt bên là hình chữ nhật. – Hai đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		– Sáu mặt là hình chữ nhật. – Độ dài a, b, c của ba cạnh cùng đi qua một đỉnh gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật. – Độ dài đường chéo d được tính theo ba kích thước: $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
Hình lập phương		– Sáu mặt là hình vuông. – Độ dài đường chéo d được tính theo độ dài cạnh a: $d=a\sqrt{3}$.

5. HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Hình chóp đều

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.

+) Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

+) Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.

+) Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

Hình chóp cụt đều

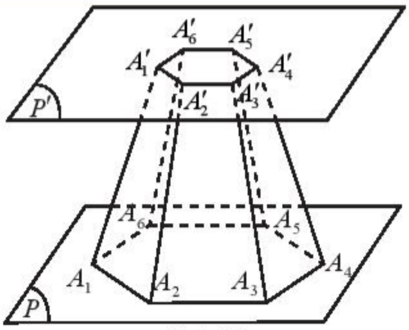
Định nghĩa

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là ***hình chóp cụt đều***.

Trong hình chóp cụt đều $A_1A_2A_3\ldots A_6.A_1'A_2'A_3'\ldots A_6'$, ta gọi:

– Các điểm $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6, A_1', A_2', A_3', \ldots, A_6'$ là các ***đỉnh***.

– Đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_6$ là ***đáy lớn***, đa giác $A_1'A_2'A_3'\ldots A_6'$ là ***đáy nhỏ***. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



Hình 26

– Cạnh của hai đa giác đáy là ***cạnh đáy***. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một.

– Các hình thang cân $A_1A_2A_2'A_1', A_2A_3A_3'A_2', \ldots, A_6A_1A_1'A_6'$ là các ***mặt bên***.

– Cạnh bên của mặt bên gọi là ***cạnh bên*** của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.

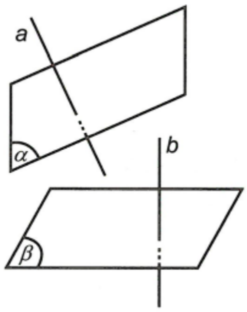
– Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là ***đường cao***. Độ dài đường cao là ***chiều cao***.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐỊNH NGHĨA

1 PHƯƠNG PHÁP.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.



$$\left.\begin{matrix} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = \left(\widehat{a,b}\right).$$

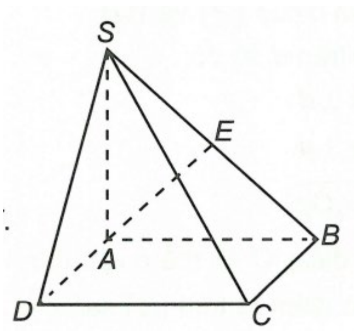
Chú ý: $(\alpha)//(\beta) \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 0^o$;

$(\alpha) \equiv (\beta) \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 0^o$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$.

Gọi E là hình chiếu của A lên SB, dễ thấy $AE \perp (SBC)$.

Vậy góc giữa (SAD) và (SBC) là góc giữa AB và AE.

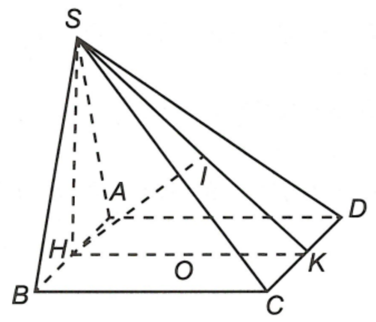
Ta có ΔSAB vuông cân tại A nên $\widehat{SBA}=45^o$.

Suy ra $\widehat{BAE}=45^o$ là góc giữa AB và AE.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng 45°.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

Lời giải



Gọi H, K là trung điểm của AB, CD.

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp.

Ta có $HK\perp AB, HK\perp SH\Rightarrow HK\perp(SAB)$ (1)

Dựng $HI\perp SK\Rightarrow HI\perp(SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là $(HK,HI)=\widehat{IHK}$.

Ta có $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2};HK=a$.

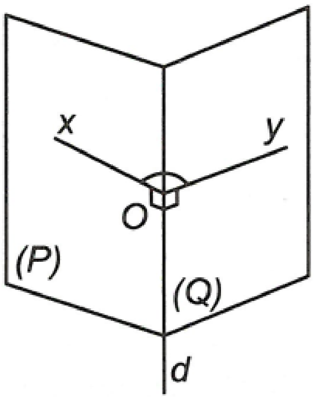
$$\frac{1}{HI^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}\Rightarrow HI=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2+a^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\cos\widehat{IHK}=\dfrac{HI}{HK}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG DỰA TRÊN GIAO TUYẾN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau: "Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm".



Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

+) Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

+) Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

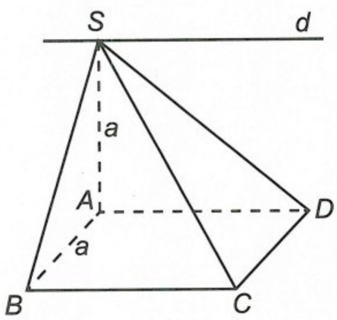
Khi đó: $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)} = \widehat{(Ox,Oy)}$.

Lưu ý: Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau: Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P). Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)} = \widehat{MOH}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Lời giải



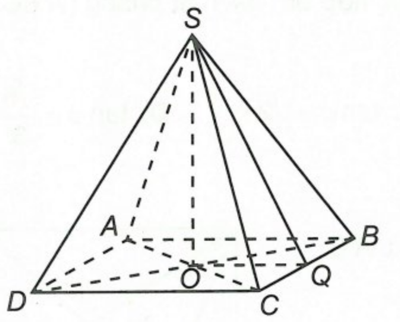
Mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAD) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng $d\,//\,BC\,//\,AD$.

Vì $SA \perp d, SB \perp d$ nên $\widehat{\left((SBC),(SAD)\right)} = \widehat{(SA,SB)} = \widehat{ASB}$.

Vậy ΔASB vuông cân tại A nên $\widehat{ASB} = 45^o$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và ($ABCD$) bằng

Lời giải



Gọi Q là trung điểm BC, suy ra $OQ \perp BC$.

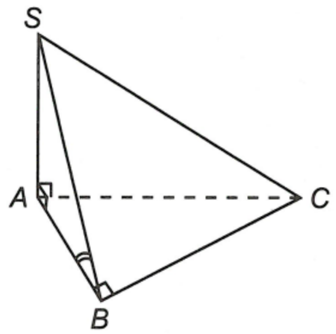
Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((SBC),(ABCD)\right)} = \widehat{(SQ,OQ)} = \widehat{SQO}.$

Tam giác vuông SOQ có $\tan\widehat{SQO} = \dfrac{SO}{OQ} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SQO} = 60^o.$

Vậy mặt phẳng (SBC) hợp với mặt đáy ($ABCD$) một góc 60°.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, SA \perp (ABC), SA = \sqrt{3}cm, AB = 1cm.$ Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC.$

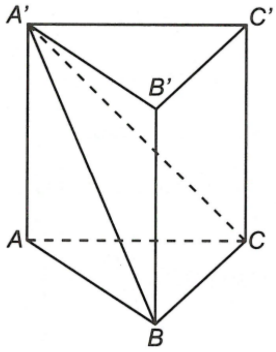
$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{\left((SBC),(ABC)\right)} = \widehat{SBA}.$

$\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^o.$

Vậy góc giữa (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 60°.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC). Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Lời giải



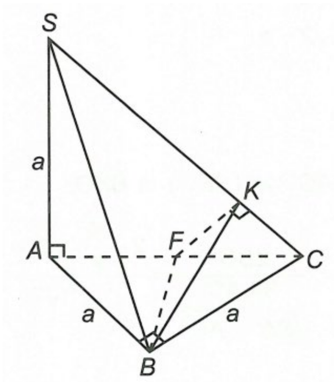
Ta có: $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B.$

Do $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'B \subset (A'BC); A'B \perp BC \\ AB \subset (ABC); AB \perp BC \end{cases}$ nên $\widehat{A'BA} = \varphi$ là góc hợp bởi hai mặt phẳng ($A'BC$) và (ABC).

Xét $\Delta A'BC$ vuông tại A ta có $\tan\varphi = \dfrac{A'A}{BA} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, SA = a$ và $SA \perp (ABC), AB = BC = a.$ Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

Lời giải



Ta có $(SAC) \cap (SBC) = SC.$

Gọi F là trung điểm AC thì $BF \perp (SAC).$

Dựng $BK \perp SC$ tại $K \Rightarrow SC \perp (BKF) \Rightarrow \widehat{((SAC),(SBC))} = \widehat{(KB, KF)} = \widehat{BKF}.$

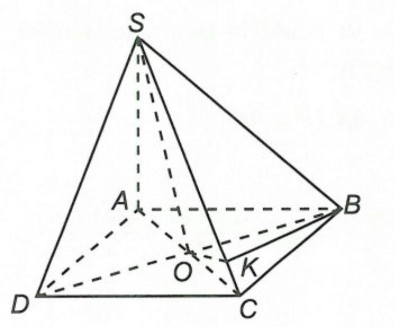
Dễ thấy $\Delta CFK \backsim \Delta CSA \Rightarrow \dfrac{FK}{FC} = \dfrac{SA}{SC} \Rightarrow FK = \dfrac{FC.SA}{SC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{6}}.$

ΔBFK vuông tại F có $\tan\widehat{BKF} = \dfrac{FB}{FK} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{\sqrt{6}}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BKF} = 60^o.$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng 60°.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$). Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và ($ABCD$). Biết $\tan\alpha = \sqrt{2}$, tính góc giữa (SAC) và (SBC).

Lời giải



Gọi O là tâm đáy và K là hình chiếu vuông góc của O trên SC.

Do $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases}$ nên $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO.$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và ($ABCD$) là góc $\widehat{SOA} = \alpha$.

Ta có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{OA} = \sqrt{2} \Rightarrow SA = OA.\sqrt{2} = a.$

Do $\begin{cases} SC \perp BD \\ SC \perp OK \end{cases}$ nên $SC \perp BK$.

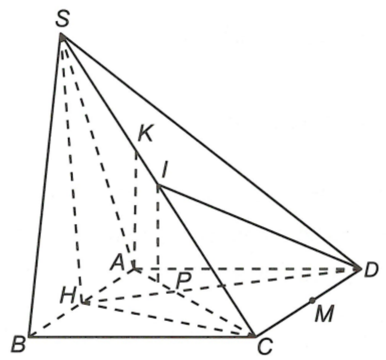
Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là $\widehat{BKO}$.

Ta có $\tan\widehat{BKO} = \dfrac{BO}{OK} = \dfrac{BO}{\frac{1}{2}d(A,SC)} = \dfrac{2BO}{\dfrac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}} = \dfrac{2.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2}}{1.\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$

Suy ra $\widehat{BKO} = 60^o$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với ($ABCD$). Gọi φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD). Giá trị của cosφ bằng

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD. Vì ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $AK \perp SC\,(K \in SC), DI \perp SC\,(I \in SC), IP // AK\,(P \in AC)$.

Suy ra $\varphi = \widehat{(IP, ID)}$.

Ta có $HC = HD = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, SC = SD = a\sqrt{2}, SM = \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow DI = \dfrac{SM.CD}{SD} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

$\Delta CSA = \Delta SCD \Rightarrow AK = DI = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

$CI = SK = \sqrt{CD^2 - DI^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CK = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$.

$\Delta CPI \backsim \Delta CAK \Rightarrow IP = \dfrac{CI}{CK}.AK = \dfrac{a\sqrt{14}}{12}, AP = \dfrac{KI}{CK}.AC = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Áp dụng định lí côsin, ta có

ΔAPD có $PD = \sqrt{AP^2 + AD^2 - 2AP.AD.\cos 45^o} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

ΔIPD có $\cos\widehat{PID} = \dfrac{IP^2 + ID^2 - DP^2}{2.IP.ID} = \dfrac{5}{7}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{5}{7}$.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG BẰNG CÁCH DÙNG ĐINH LÝ HÌNH CHIẾU

1 PHƯƠNG PHÁP.

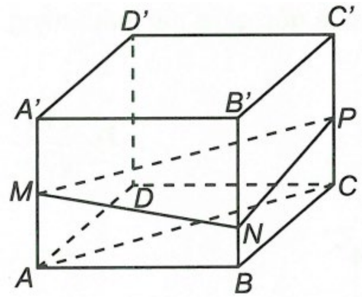
Dùng định lý về diện tích hình chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích hình chiếu của H trên (P') và φ là góc giữa (P) và (P') thì $S' = S.\cos\varphi$ hay $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' thỏa mãn diện tích của tam giác MNP bằng a^2. Tính góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi α là số đo góc của hai mặt phẳng (*MNP*) và (*ABCD*).

Ta có hình chiếu vuông góc của tam giác *MNP* lên (*ABCD*) là Δ*ABC*.

Áp dụng công thức hình chiếu về diện tích ta có

$$S'_{\Delta ABC} = S_{\Delta MNP}.\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.BC = a^2.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^o.$$

Vậy góc của hai mặt phẳng (*MNP*) và (*ABCD*) bằng 60°.

HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP VỀ GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB).

Lời giải

1.Dạng toán: Đây là dạng toán tìm góc giữa hai mặt phẳng

2. Phương pháp:

Sử dụng định lí:

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trong hai mặt phẳng đó và cùng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

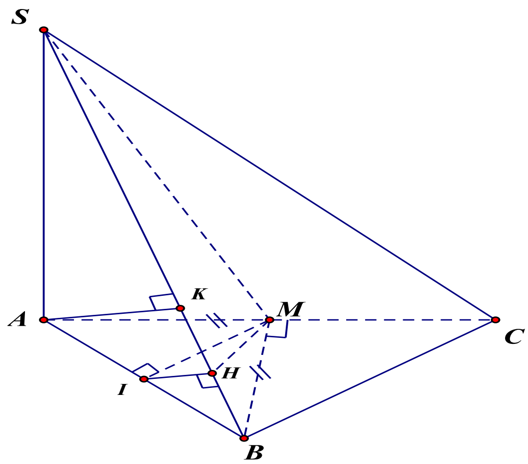
Hướng giải:

B1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM)và (SAB).

B2. Tìm hai đường thẳng lần lượt nàm trong hai mặt phẳng và cùng vuông với giao tuyến

B3. Tính góc giữa hai đường thẳng vừa xác định.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Ta có: $(SBM)\cap(SAB)=SB$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B, M là trung điểm AC nên $MB\perp AC$ và

$MA=MB=MC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB. Vì ΔMAB cân tại M nên $MI\perp AB$ (1)

Hơn nữa $MI\perp SA$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MI\perp SB$ $(*)$.

Kẻ $IH\perp SB$. Suy ra $MH\perp SB$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng góc giữa hai đường thẳng IH và MH.

Ta có $MI=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Vì $MB\perp(SAC)$ nên ΔSMB vuông tại M và có

$$MB=\frac{a\sqrt{2}}{2};SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\sqrt{3a^2+\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{14}}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{MH^2}=\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{MB^2}=\frac{16}{7a^2}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB

Ta có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow IH=\dfrac{AK}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong tam giác MIH ta có $\cos\widehat{MHI}=\dfrac{HI^2+HM^2-MI^2}{2HI.HM}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 12: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Phân tích hướng giải

1. DẠNG TOÁN: Tính góc giữa hai mặt phẳng.

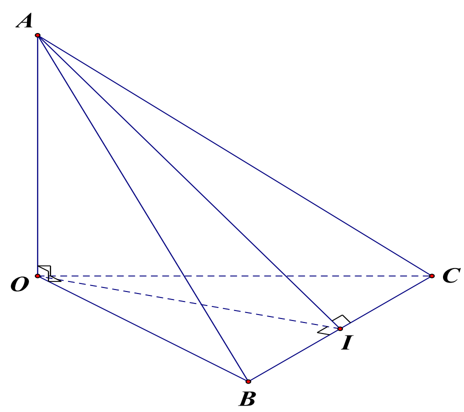
2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Do $OB = OC$ nên gọi I là trung điểm của BC. Khi đó, $((ABC),(OBC)) = \widehat{OIA}$

B2: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính số đo góc $\widehat{OIA}$.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $OA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow ((OBC),(ABC)) = (OI, AI) = \widehat{OIA}$.

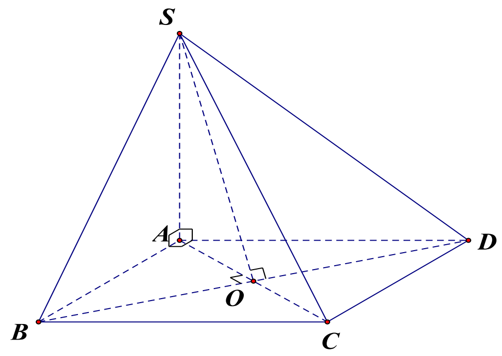
Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan \widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^0$.

Vậy $((ABC),(OBC)) = 30^0$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases}(SBD)\cap(ABCD)=BD\\ SO\perp BD\\ AO\perp BD\end{cases} \Rightarrow ((SBD),(ABCD))=(SO,AO)=\widehat{SOA}$.

Xét tam giác SAO vuông tại A, ta có:

$$\cos\widehat{SOA}=\frac{AO}{SO}=\frac{\frac{1}{2}AC}{\sqrt{SA^2+AO^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 14: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc và $OB=OC=a\sqrt{6},OA=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Phân tích hướng giải

1. DẠNG TOÁN: Tính góc giữa hai mặt phẳng.

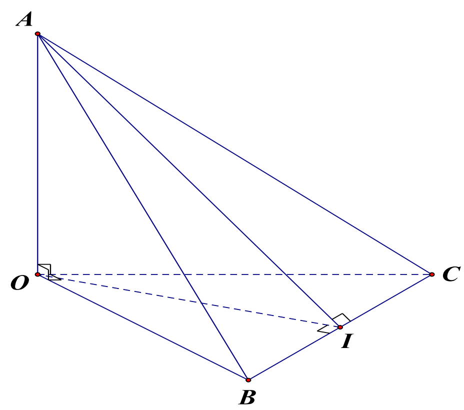
2. HƯỚNG GIẢI:

B1: Do $OB=OC$ nên gọi I là trung điểm của BC**.** Khi đó, $((ABC),(OBC))=\widehat{OIA}$

B2: Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông tính số đo góc $\widehat{OIA}$**.**

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $OA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow ((OBC),(ABC)) = (OI, AI) = \widehat{OIA}$.

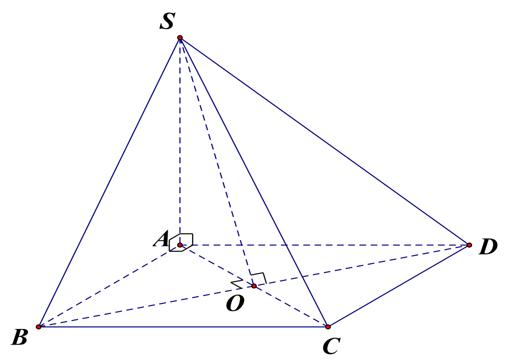
Ta có: $OI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan\widehat{OIA} = \dfrac{OA}{OI} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^0$.

Vậy $((ABC),(OBC)) = 30^0$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \perp BD \\ AO \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = (SO, AO) = \widehat{SOA}$.

Xét tam giác SAO vuông tại A, ta có:

$$\cos\widehat{SOA} = \frac{AO}{SO} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 16: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B'$, $A'C'$ và BC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng:

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm góc giữa hai mặt phẳng.

Phương pháp: Giả sử ta cần tìm góc giữa 2 mặt phẳng (α) và (β), ta tìm một mặt phẳng (P) đồng thời vuông góc với (α) và (β). Mà $(\alpha)\cap(P)=a;(\beta)\cap(P)=b$ suy ra góc giữa (α) và (β) bằng góc giữa đường thẳng a và b.

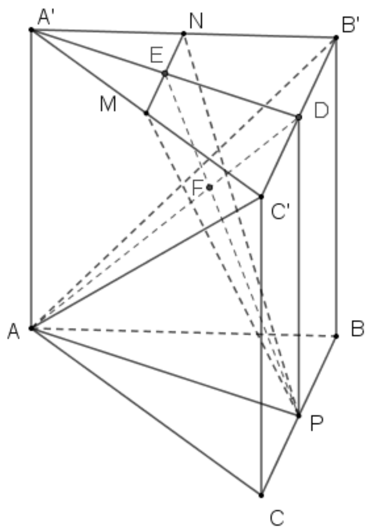
2. Hướng giải:

B1: Tìm mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP).

B2: Tìm $a=(P)\cap(AB'C');b=(P)\cap(MNP)$.

B3: Tính cô-sin góc giữa hai đường thẳng a và b.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Gọi P là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} MN\perp A'D \\ MN\perp PD \end{cases} \Rightarrow MN\perp(APDA')\Rightarrow(MNP)\perp(APDA')$.

$\begin{cases} B'C'\perp A'D \\ B'C'\perp PD \end{cases} \Rightarrow B'C'\perp(APDA')\Rightarrow(AB'C')\perp(APDA')$.

Mặt khác: $(MNP)\cap(APDA')=PE$ và $(AB'C')\cap(APDA')=AD$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng góc giữa hai đường thẳng PE và AD.

Gọi $E=MN\cap A'D$, $F=AD\cap PE$. Ta có $\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{EF}{FP}=\dfrac{ED}{AP}=\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $A'D=\sqrt{A'B'^2-B'D^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=3\Rightarrow ED=\dfrac{3}{2}$.

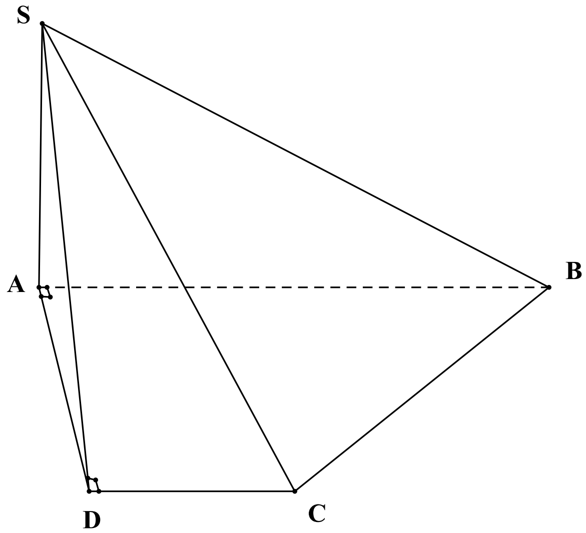
$AD=\sqrt{A'D^2+AA'^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\Rightarrow FD=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

$EP=\sqrt{ED^2+PD^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}\Rightarrow EF=\frac{5}{6}$.

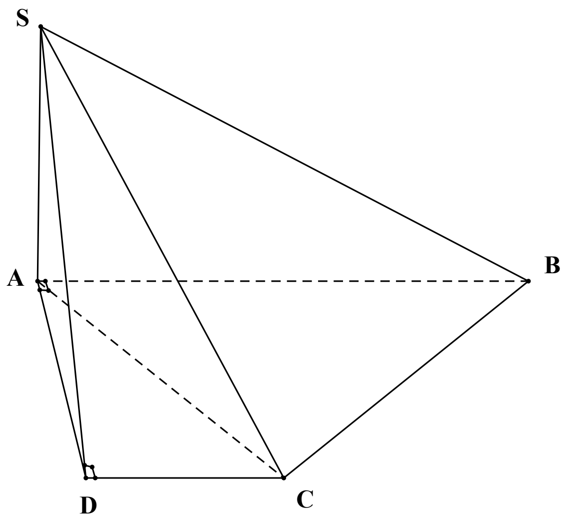
Trong tam giác EDF có $\cos\widehat{EFD}=\frac{EF^2+FD^2-ED^2}{2EF.FD}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2.\frac{5}{6}.\frac{\sqrt{13}}{3}}=-\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Do góc giữa hai mặt phẳng là góc nhỏ hơn hoặc bằng $90°$ nên Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB=2AD=2DC=a$ (Hình vẽ minh họa). Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng



Lời giải



Ta có: $(SBC)\cap(ABCD)=BC$.

Vì $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB=2AD=2DC=a\Rightarrow AC\perp BC$ (1).

$SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$ (2).

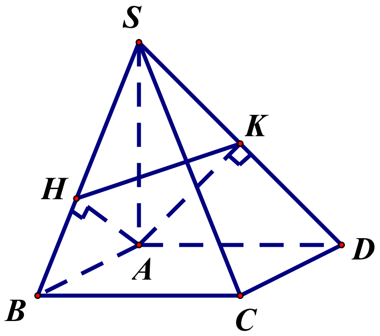
Từ (1) và (2) suy ra: $BC\perp SC$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCA}$.

Trong tam giác vuông DAC có $AD=DC=\frac{a}{2}\Rightarrow AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông ASC có $SA=AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{SCA}=45°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $45°$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB,SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng



Lời giải

Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\\AB\cap SA=\{A\}\\AB,SA\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)$. Suy ra $AH\perp BC$.

Lại có: $\begin{cases}AH\perp BC\\AH\perp SB\\BC\cap SB=\{B\}\\BC,SB\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SC$.

Chứng minh tương tự ta có $AK\perp(SCD)\Rightarrow AK\perp SC$.

Có $\begin{cases} AH \perp SC \\ AK \perp SC \\ AH \cap AK = \{A\} \\ AH, AK \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

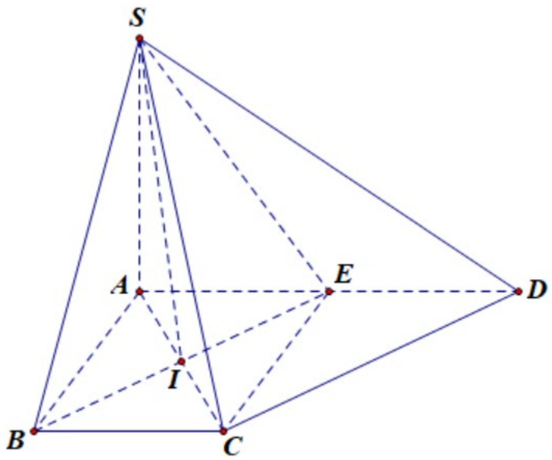
Do $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases}$ suy ra $\widehat{((AHK),(ABCD))} = \widehat{(SC,SA)} = \widehat{ASC}$.

Có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{ASC} = 45°$.

Vậy $\widehat{((AHK),(ABCD))} = 45°$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD, tính góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a. Gọi $I = AC \cap BE$. Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABCD) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases}$.

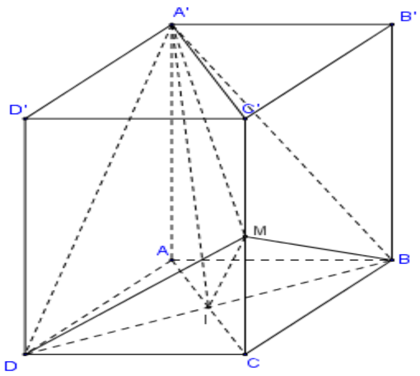
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$ là $\widehat{SIA}$.

Lại có $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI: $\tan \widehat{SIA} = \dfrac{SA}{IA} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} : \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SIA} = 60°$.

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

Lời giải



+) Gọi I là giao điểm của AC và BD.

+) Ta có góc $\widehat{\left(\left(A'BD\right),\left(MBD\right)\right)}=\widehat{\left(IA',IM\right)}$.

Để hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $\left(MBD\right)$ vuông góc với nhau thì $IA'\perp IM \Rightarrow \widehat{A'IM}=90°$.

+) Xét $\Delta A'IM$ có: $A'I^2=b^2+\dfrac{a^2}{2}$; $A'M^2=2a^2+\dfrac{b^2}{4}$; $IM^2=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4}$.

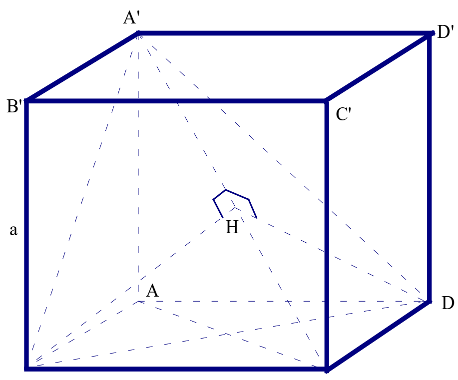
Ta có: $A'M^2=A'I^2+IM^2$

$\Leftrightarrow 2a^2+\dfrac{b^2}{4}=b^2+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{b^2}{4} \Leftrightarrow a^2=b^2 \Rightarrow a=b$.

Vậy $\dfrac{a}{b}=1$.

Câu 21: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $\left(BA'C\right)$ và $\left(DA'C\right)$.

Lời giải



+ $\Delta BA'C$ vuông tại B (vì $BC\perp\left(ABB'A'\right)\Rightarrow BC\perp A'B$).

Kẻ $BH\perp A'C$ trong $\Delta BA'C$.

$BD\perp\left(AA'C\right)$ (vì $BD\perp AC, BD\perp AA'$) $\Rightarrow BD\perp A'C$.

Ta có $BH\perp A'C$; $BD\perp A'C\Rightarrow A'C\perp\left(BHD\right)\Rightarrow A'C\perp HD$.

+ $(BA'C)\cap(DA'C)=A'C$.

$A'C\perp(BHD)$

$(BHD)\cap(BA'C)=BH$

$(BHD)\cap(DA'C)=DH$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng góc giữa BH và DH.

+ $BH=DH\left(\Delta_v BA'C=\Delta_v DA'C\right)$.

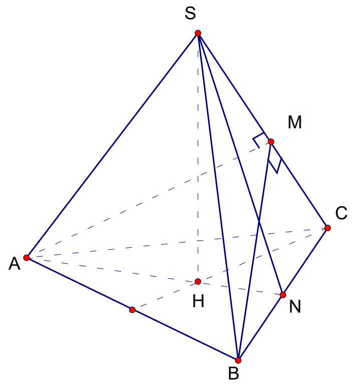
$\Delta_v BA'C$: $\dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{BA'^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow BH^2=\dfrac{2a^2}{3}=DH^2$.

$$\Delta BHD:\cos\widehat{BHD}=\frac{BH^2+DH^2-BD^2}{2BH.DH}=\frac{\frac{2a^2}{3}+\frac{2a^2}{3}-\left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\frac{2a^2}{3}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BHD}=120^0.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng $180^0-120^0=60^0$.

Câu 22: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

Lời giải



Gọi M,N là chân đường cao hạ từ các đỉnh B,S của tam giác SBC. H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $AB\perp(SHC)\Rightarrow AB\perp SC$

Mặt khác $SC\perp BM\Rightarrow SC\perp(ABM)\Rightarrow SC\perp AM$

$$\text{Vậy }\begin{cases}(SAC)\cap(SBC)=SC\\AM\subset(SAC)\\BM\subset(SBC)\\SC\perp AM, SC\perp BM\end{cases}\Rightarrow\left((SAC);(SBC)\right)=(AM;BM).$$

Ta tính góc $\widehat{AMB}$. Xét tam giác AMB.

Tam giác SBC cân tại S nên N là trung điểm của BC.

+) $SN=\sqrt{SC^2-NC^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

+) $BM=\frac{SN.BC}{SC}=\frac{a\sqrt{15}.a}{2.2a}=\frac{a\sqrt{15}}{4}$.

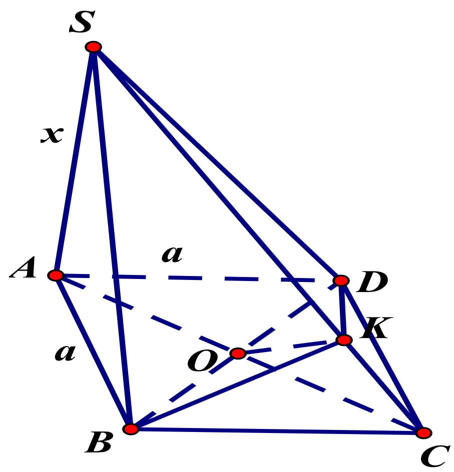
+) $AM=\sqrt{AC^2-MC^2}=\sqrt{BC^2-MC^2}=BM$.

Ta có $\cos\widehat{AMB}=\frac{AM^2+BM^2-AB^2}{2.MA.MB}=\frac{\frac{15a^2}{16}+\frac{15a^2}{16}-a^2}{2.\frac{15a^2}{16}}=\frac{7}{15}>0$, suy ra góc $\widehat{AMB}$ nhọn.

Vậy $\alpha=\left((SAC);(SBC)\right)=(AM;BM)=\widehat{AMB}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{7}{15}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB=a$, góc $\widehat{BAD}=60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=x$. Tìm x để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 90^0.

Lời giải

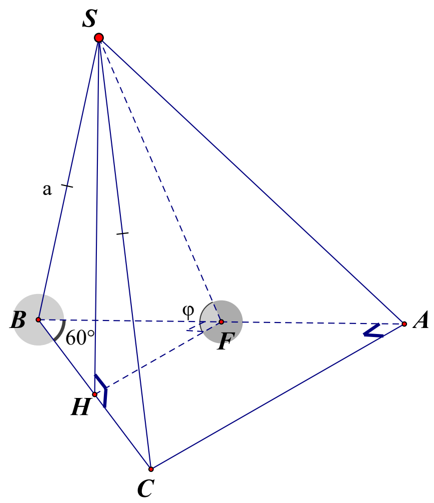


Ta có tam giác SBC và SCD bằng nhau (c-c-c) và chung cạnh SC. Kẻ $BK\perp SC, DK\perp SC$, khi đó góc giữa (ABC) và (SCD) là góc $\widehat{DKB}$. Nối OK, do $SC\perp(BDK)\Rightarrow SC\perp OK\Rightarrow$ tam giác OKC vuông tại K.

Khi $\widehat{DKB}=90^0$, suy ra $OK=\frac{1}{2}BD=\frac{a}{2}$. Ta có $OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}, SC=\sqrt{x^2+3a^2}$ mà $\Delta SAC,\Delta OKC$ đồng dạng, suy ra $\frac{SA}{OK}=\frac{SC}{OC}\Rightarrow SA^2.OC^2=SC^2.OK^2\Rightarrow\frac{3a^2x^2}{4}=\left(x^2+3a^2\right)\frac{a^2}{4}\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60^0, tam giác SBC đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Khi đó

Lời giải



Tam giác SBC đều cạnh a, H là trung điểm của cạnh BC nên $SH \perp BC$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dựng $HF // AC \Rightarrow HF \perp AB$.

Xét tam giác vuông BHF có $\sin 60^0 = \dfrac{HF}{BH} \Rightarrow HF = BH.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

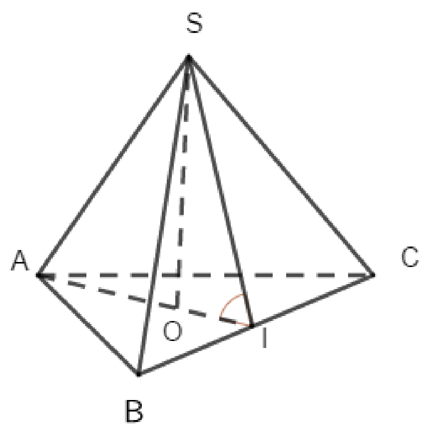
Ta có $\begin{cases} AB \perp HF \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHF)$ mà $SF \subset (SHF)$ nên $SF \perp AB$.

Khi đó $\widehat{((ABC),(SAB))} = \widehat{SFH} = \varphi$.

Trong tam giác vuông SHF có $\tan\varphi = \dfrac{SH}{HF} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{4}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{6}$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và đáy của hình chóp. Tính $\tan\varphi$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC và O là tâm đáy.

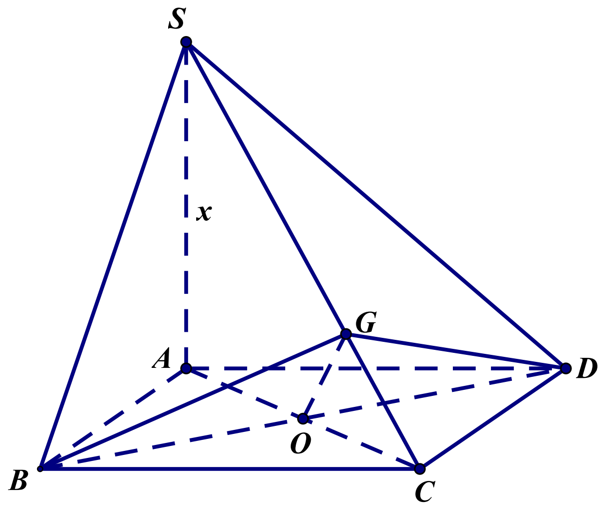
$\Rightarrow SO \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(ABC,SBC)} = \widehat{(AI,SI)} = \widehat{SIA} = \varphi$ (vì ΔSOI vuông tại O).

Vì đáy là tam giác đều cạnh a nên $OI=\frac{1}{3}AI=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Do đó: $\tan\varphi=\frac{SO}{OI}=\frac{a\sqrt{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}=6\sqrt{2}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA\perp(ABCD)$, $SA=x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau một góc bằng $60°$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và $G=hc_{AC}^{O}$.

Vì $BD\perp(SAC)$ nên $BD\perp SC$, mà $SC\perp OG$ suy ra $SC\perp(BGD)$.

Do đó $\left[(SBC),(SCD)\right]=(GB,GD)=60°\Rightarrow\widehat{BGO}=60°\vee\widehat{BGO}=120°$

$\Delta SAC\sim\Delta OGC$ nên: $\frac{SA}{OG}=\frac{SC}{OC}\Rightarrow OG=\frac{x.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}=\frac{xa}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+2a^2}}$.

Xét tam giác BGO:

TH1:

$$\tan 60°=\frac{BO}{GO}=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\sqrt{x^2+2a^2}}{xa}\Rightarrow\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{x^2+2a^2}}{xa}\Rightarrow\sqrt{3}x=\sqrt{x^2+2a^2}\Rightarrow x=a.$$

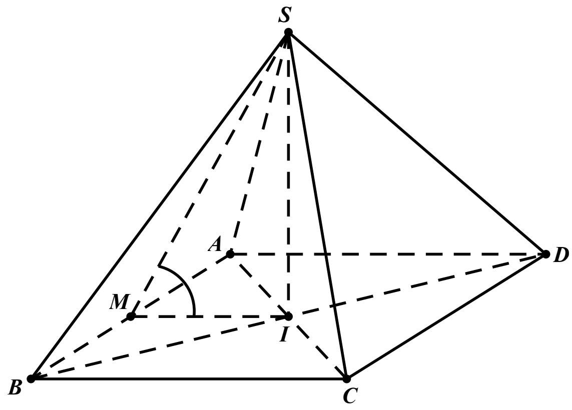
TH2:

$$\tan 30°=\frac{BO}{GO}=\frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\sqrt{x^2+2a^2}}{xa}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{x^2+2a^2}}{xa}\Rightarrow\sqrt{3}x=3\sqrt{x^2+2a^2}$$

$\Rightarrow 6x^2+18a^2=0:vn$

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

Lời giải



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và I là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $SI \perp (ABCD)$ nên chiều cao của hình chóp là $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Vì IM là đường trung bình của tam giác ABD suy ra $IM // AD$. Mặt khác $AB \perp AD$ (do $ABCD$ là hình vuông). Do đó $IM \perp AB$.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên tam giác SAB cân tại $S \Rightarrow SM \perp AB$.

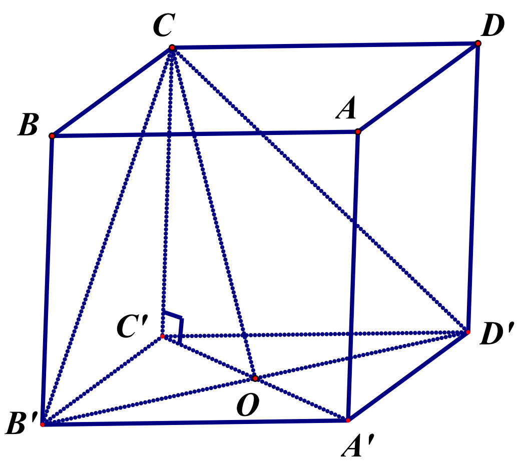
Ta có: $(SAB) \cap (ABCD) = AB$; $SM \subset (SAB)$; $SM \perp AB$; $IM \subset (ABCD)$; $IM \perp AB$ nên $\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SM, IM}\right) = \widehat{SMI}$.

Xét tam giác SMI vuông tại I, ta có: $\tan\widehat{SMI} = \frac{SI}{MI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{a} = \sqrt{3}$. Suy ra $\widehat{SMI} = 60°$.

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính *cosin* góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$.

Lời giải



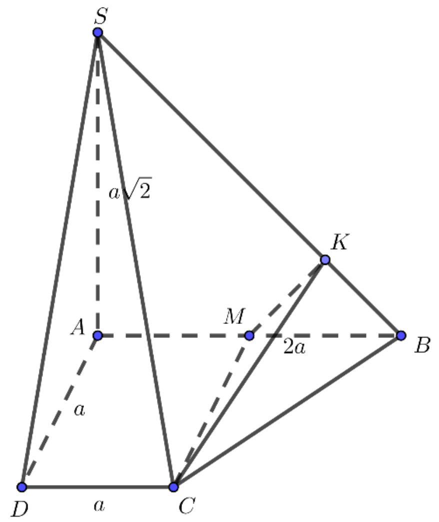
Do $(ABCD)//(A'B'C'D')$ nên góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$ bằng góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(A'B'C'D')$.

Gọi $O = A'C' \cap B'D'$, ta dễ dàng chứng minh được $B'D' \perp (C'OC) \Rightarrow B'D' \perp CO$, nên góc giữa mặt phẳng $(CB'D')$ và $(A'B'C'D')$ là góc giữa CO và $C'O$, là góc $\widehat{C'OC}$.

Đặt $CC'=1$ thì ta có $C'O=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\Rightarrow CO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $\Rightarrow \cos\widehat{C'OC}=\dfrac{C'O}{CO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Cho biết $AB=2AD=2DC=2a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC).

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB khi đó $\left.\begin{matrix} CM\perp AB \\ CM\perp SA \end{matrix}\right\}\Rightarrow CM\perp(SAB)$.

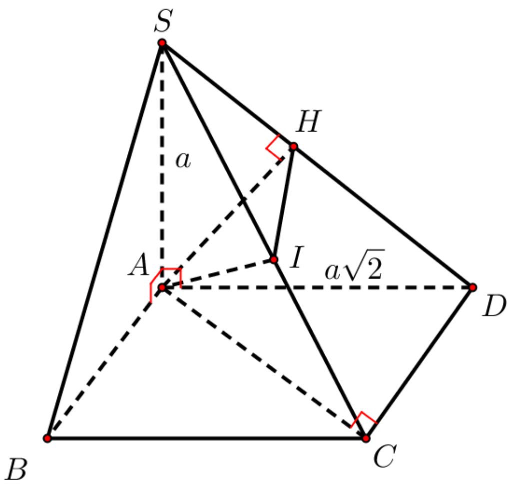
Từ M kẻ $MK\perp SB$ tại K, khi đó $CK\perp SB$ tại K nên góc giữa (SAB) và (SBC) là góc $\widehat{CKM}$.

Ta có $CM=a$. $\Delta BKM\sim\Delta BAS$ nên $\dfrac{KM}{SA}=\dfrac{BM}{SB}=\dfrac{a}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow KM=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

$\tan\widehat{CKM}=\dfrac{CM}{MK}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{CKM}=60^\circ$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $BC=\sqrt{2}\,a$ và ΔACD vuông cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD và I là trung điểm SC. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (AHI) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có $CD = AC = SA = a \Rightarrow AI \perp SC$ (1)

Lại có $CD \perp SA$ và $CD \perp AC \Rightarrow CD \perp AI$ (2)

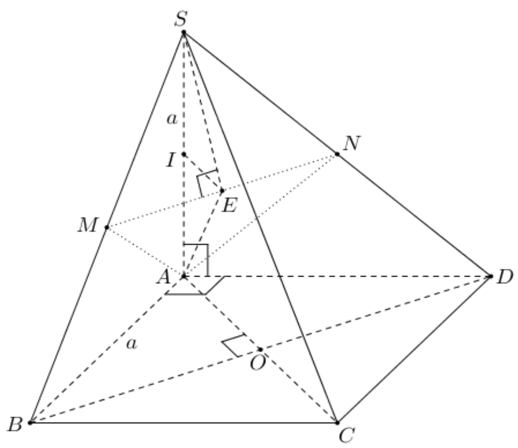
Từ (1) và $(2) \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow AI \perp SD$

$\begin{cases} SD \perp AI \\ SD \perp AH \end{cases} \Rightarrow SD \perp (AHI)$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SD \perp (AHI) \end{cases} \Rightarrow \left((ABCD);(AHI)\right) = (SA;SD) = \widehat{ASD}$; $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = \sqrt{2}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng

Lời giải



Có: $SB = BD = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.

$AM = AN = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = SM = SN \Rightarrow \Delta AMN$ đều.

Gọi E là trung điểm $MN \Rightarrow AE \perp MN$ và $SE \perp MN$.

Có: $\begin{cases}(AMN)\cap(SBD)=MN\\ AE\perp MN\\ SE\perp MN\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(AMN),(SBD)}\right)=\left(\widehat{AE,SE}\right)$.

Tính $\sin\widehat{SEA}$.

AE là đường cao tam giác đều $AMN\Rightarrow AE=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

SE là đường cao tam giác đều $SMN\Rightarrow SE=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\Rightarrow\Delta SEA$ cân tại $E\Rightarrow\widehat{SEA}=2\widehat{SEI}$.

Gọi I là trung điểm $SA\Rightarrow SI=\dfrac{a}{2}\Rightarrow EI=\sqrt{SE^2-SI^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔSEI vuông tại I, ta có: $\sin\widehat{SEI}=\dfrac{SI}{SE}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $\cos\widehat{SEI}=\dfrac{EI}{SE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow\sin\widehat{SEA}=2\sin\widehat{SEI}.\cos\widehat{SEI}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

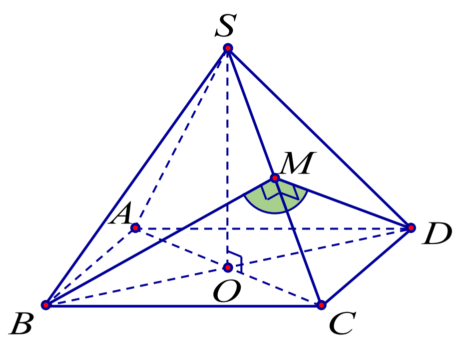
Vậy sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Chú ý: $\widehat{SEA}$ là góc tù nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $180^\circ-\widehat{SEA}$.

Ta vẫn có: $\sin\left(180^\circ-\widehat{SEA}\right)=\sin\widehat{SEA}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $BC=SB=a,SO=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của SC, do tam giác SBC cân tại B nên ta có $SC\perp BM$ (1).

Theo giả thiết ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$. Do đó $SC \perp (BCM)$ suy ra $SC \perp DM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là góc giữa hai đường thẳng BM và DM.

Ta có $\Delta SBO = \Delta CBO$ suy ra $SO = CO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

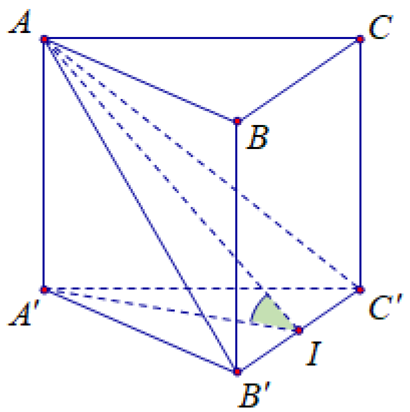
Do đó $OM = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mặt khác $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Do đó tam giác BMO vuông cân tại M hay góc $\widehat{BMO} = 45°$, suy ra $\widehat{BMD} = 90°$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) là $90°$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'I \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AIA')$

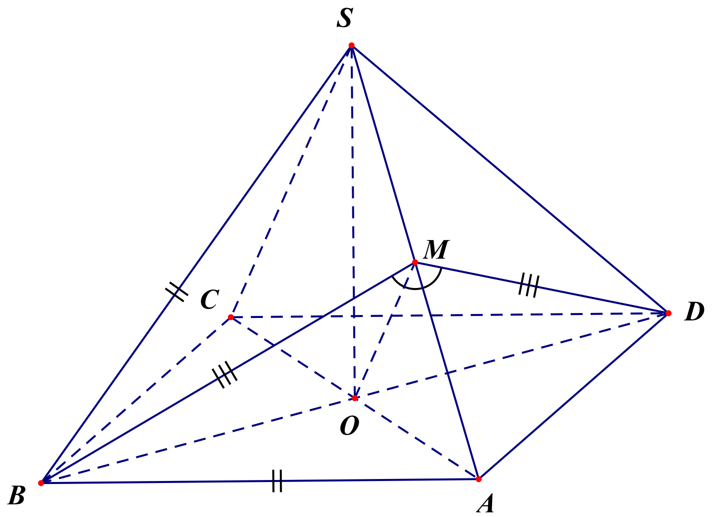
Khi đó: $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan\widehat{AIA'} = \dfrac{AA'}{A'I} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIA'} = \dfrac{\pi}{6}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của SA.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \cap (SAD) = SA \\ BM \perp SA; DM \perp SA \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right) = (BM, DM)$.

Trong ΔSBO vuông tại O, có $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{6a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSAO vuông tại O, ta có $OA = SO = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow SA = OA\sqrt{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

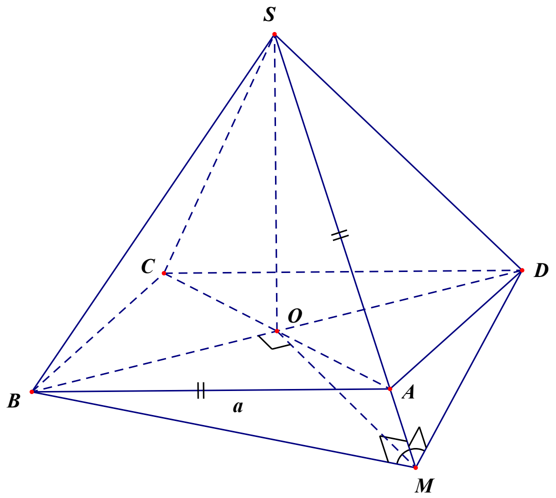
Mặt khác, có $DM = BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

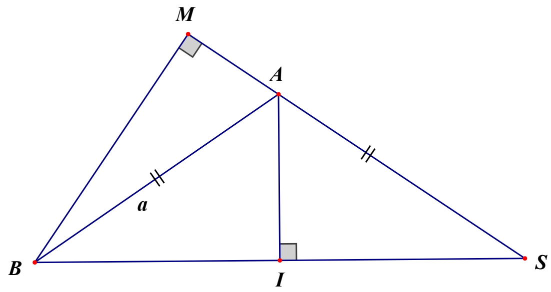
Xét tam giác vuông BOM vuông tại O, có $\sin \widehat{BMO} = \frac{OB}{BM} = \frac{a\sqrt{3}}{3} . \frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BMO} = 45°$.

Vậy góc $\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right) = 90°$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O, đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SA = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tìm số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Lời giải





Gọi M là hình chiếu của B lên SA.

Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(SAD)=SA\\ BM\perp SA; DM\perp SA\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=(BM,DM)$.

Trong ΔSAO vuông tại O, có $OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{a^2-\frac{6a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSOB vuông tạo O, ta có $OB=SO=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow SB=OB\sqrt{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Gọi I là trung điểm SB, suy ra $AI=\sqrt{AB^2-BI^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

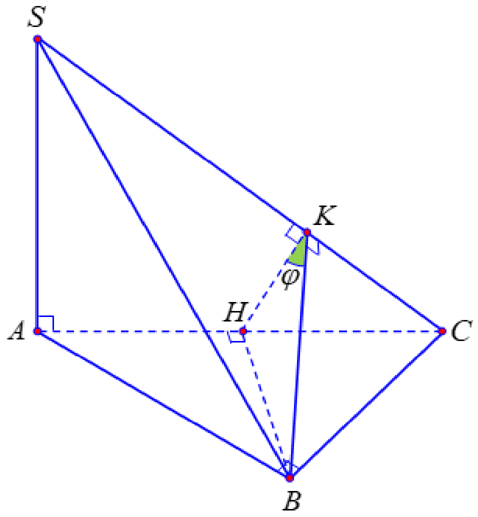
Mặt khác, ta có $\Delta SBM\backsim\Delta SAI$ nên $\frac{SB}{SA}=\frac{BM}{AI}\Rightarrow BM=\frac{SB.AI}{SA}=\frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a}=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Trong tam giác vuông OBM, có $\sin\widehat{BMO}=\frac{OB}{MB}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{3}{2a\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\widehat{BMO}=60^\circ$.

Suy ra $\widehat{BMD}=120^\circ$. Vậy góc $\left(\widehat{(SAB),(SAD)}\right)=60^\circ$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=BC=a$ và $SA=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AC

Ta có $(SAC)\perp(ABC)$(vì $SA\perp(ABC)$) và $BH\perp AC \Rightarrow BH\perp(SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ $HK\perp SC$ thì $SC\perp(BHK)\Rightarrow SC\perp BK$.

$\Rightarrow\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right)=\widehat{SKH}=\varphi$.

Mặt khác

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB=BC=a$ nên $AC=a\sqrt{2}$ và $BH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

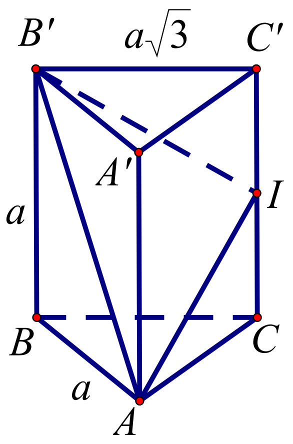
Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK=\dfrac{HC.SA}{SC}\Leftrightarrow HK=\dfrac{HC.SA}{\sqrt{SA^2+AC^2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác BHK vuông tại H có $\tan\varphi=\dfrac{BH}{BK}=\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=60^\circ$.

Vậy $\left(\widehat{(SAC),(SBC)}\right)=60^\circ$.

Câu 37: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB=AC=a$ và góc $\widehat{BAC}=120^\circ$, cạnh bên $AA'=a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

Lời giải



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông $B'AB$ có $AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông IAC có $IA = \sqrt{IC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét tam giác vuông $IB'C'$ có $B'I = \sqrt{B'C'^2 + C'I^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét tam giác $IB'A$ có $B'A^2 + IA^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2 \Rightarrow \Delta IB'A$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{IB'A} = \frac{1}{2}AB'.AI = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}a.a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

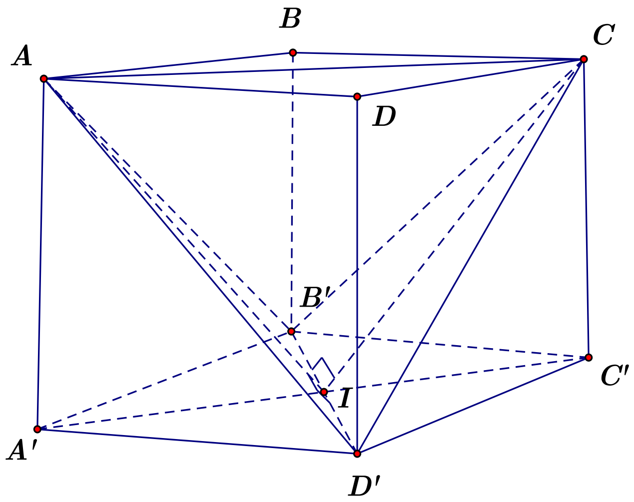
Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là α.

Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'I$ trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $S_{ABC} = S_{IB'A}.\cos\alpha \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{10}}{4}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC = 2,\ AA' = \sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$.

Lời giải



Ta thấy : $(AB'D')\cap(CB'D')=B'D'$

Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Khi đó ta suy ra: $AI\subset(AB'D')$, $AI\perp B'D'$, $CI\subset(CB'D')$, $CI\perp B'D'$.

Suy ra : $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=\widehat{(AI,CI)}$.

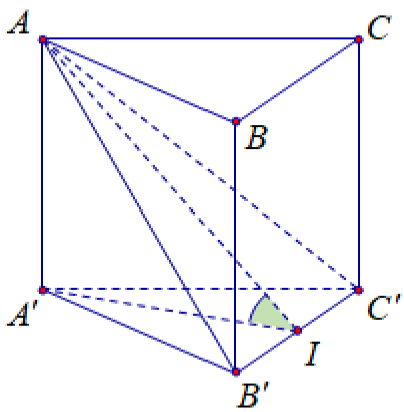
Xét tam giác AIC có: $AC=2$, $CI=AI=\sqrt{AA^2+A'I^2}=\sqrt{3+1}=2$.

Do đó tam giác AIC đều $\Rightarrow \widehat{AIC}=60^0$.

Suy ra: $\left(\widehat{(AB'D'),(CB'D')}\right)=60^0$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C'$. Ta có: $\begin{cases} B'C'\perp A'I \\ B'C'\perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C'\perp(AIA')$

Khi đó: $\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ AI \perp B'C' \\ A'I \perp B'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'B'C')$ là góc $\widehat{AIA'}$.

Xét tam giác AIA' vuông tại A' ta có: $\tan \widehat{AIA'} = \dfrac{AA'}{A'I} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AIA'} = \dfrac{\pi}{6}$.

DẠNG 4: CHỨNG MINH HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta có thể dùng một trong các cách sau:

Cách 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

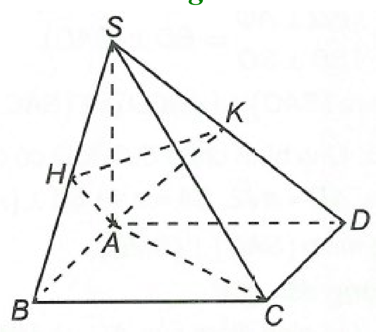
$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) = 90^0 \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Cách 2. Chứng minh trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Ví dụ. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AHK)$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} SA \perp CD\left(do\ SA \perp (ABCD)\right) \\ CD \perp AD \\ AD \cap SA = \{A\} \end{cases}$

Suy ra $CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Tương tự ta chứng minh được $AH \perp SC$.

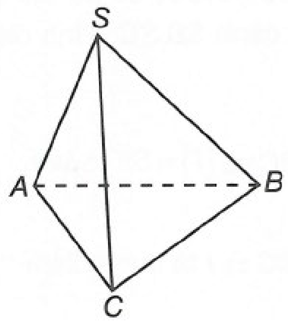
Do đó $SC \perp (AHK)$.

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (AHK)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.

Lời giải

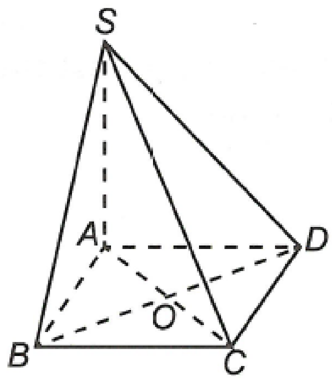


Ta có $\begin{cases}(SAC)\cap(ABC)=AC\\(SAC)\perp(ABC)\\BC\subset(ABC),BC\perp AC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAC)$

Mà $BC\subset(SBC)$ nên $(SBC)\perp SAC$.

Câu 41: Cho hình chóp *S.ABCD* có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng *b*. Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải



Gọi $\{O\}=AC\cap BD$. Vì *ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng *b* nên *ABCD* là một hình thoi. Suy ra $AC\perp BD$ nên *O* là trung điểm của ***BD.***

Mặt khác $SB=SD$ nên ΔSBD cân tại *S*.

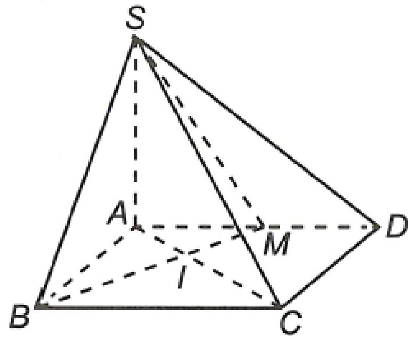
Do đó $SO\perp BD$.

Vậy $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SO\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

Suy ra $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Câu 42: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật với $AB=a,AD=a\sqrt{2},SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi *M* là trung điểm của ***AD.*** Chứng minh $(SAC)\perp(SMB)$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và MB.

Ta có $MA = MD$ và $AD // BC$ nên áp dụng định lý Talet, suy ra $AI = \frac{1}{2}IC$.

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{1}{9}AC^2 = \frac{a^2}{3}$.

$MI^2 = \frac{1}{9}MB^2 = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{a^2}{6}$.

Từ đó suy ra $AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = MA^2$.

Vậy ΔAMI là tam giác vuông tại I. Suy ra $MB \perp AC$.(1)

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$. (2)

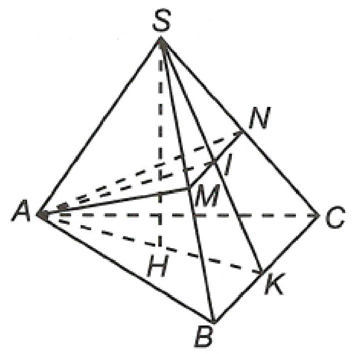
Từ (1), (2) suy ra $MB \perp (SAC)$.

Do $MB \subset (SMB)$ nên $(SMB) \perp (SAC)$.

> ***Chú ý:***
> *Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta có thể xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng* $90°$.
> $\widehat{((\alpha),(\beta))} = 90°$.
> $\Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$.

Câu 43: Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính diện tích tam giác AMN biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của BC và $\{I\} = SK \cap MN$.

Từ giả thiết ta có

$MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, MN // BC \Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AM = AN$ (hai trung tuyến tương ứng).

Suy ra ΔAMN cân tại $A \Rightarrow AI \perp MN$.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC)$.

Suy ra $AI \perp SK$ và ΔSAK cân tại A; $SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

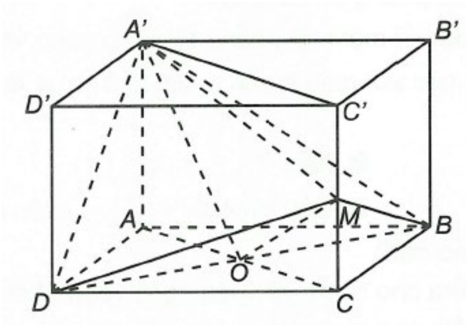
Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$.

Suy ra $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Câu 44: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Ta có $BD=(A'BD)\cap(MBD)$ mà $\begin{cases}AC\perp BD\\ AA'\perp BD\end{cases}$ nên $(ACC'A')\perp BD$.

Ta có $\begin{cases}(ACC'A')\perp BD\\ (ACC'A')\cap(A'BD)=OA'\\ (ACC'A')\cap(MBD)=OM\end{cases}$ nên góc giữa hai đường thẳng $OM,\ OA'$ là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD).

Ta có $OM=\dfrac{AC'}{2}=\dfrac{\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2a^2+b^2}}{2}$ và

$$OA'^2=AO^2+AA'^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+b^2=\frac{a^2}{2}+b^2.$$

$$MA'^2=A'C'^2+MC'^2=a^2+b^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=a^2+\frac{5b^2}{4}.$$

Hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau nên $\Delta OMA'$ vuông tại $O\Rightarrow OM^2+OA'^2=MA'^2$

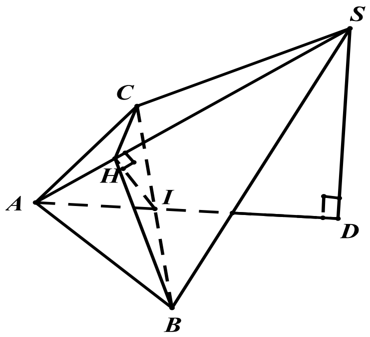
$$\Leftrightarrow\frac{2a^2+b^2}{4}+\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)=\left(a^2+\frac{5b^2}{4}\right)\Leftrightarrow a^2=b^2\Leftrightarrow\frac{a}{b}=1.$$

Vậy $(A'BD)\perp(MBD)$ khi $\dfrac{a}{b}=1$.

Khi đó $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương.

Câu 45: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Trên đường thẳng $d\perp(ABCD)$ tại A lấy điểm S sao cho $SD=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh $(SAB)\perp(SAC)$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC thì $AI \perp BC$ và I cũng là trung điểm của AD.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow BC \perp SA$.

Dựng $IH \perp SA, H \in SA$, khi đó ta có $\begin{cases} SA \perp IH \\ SA \perp CB \end{cases} \Rightarrow SA \perp (HCB)$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là $\widehat{BHC}$.

Ta có $\Delta AHI \sim \Delta ADS \Rightarrow \dfrac{IH}{SD} = \dfrac{AI}{AD}$.

Mà $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AD = 2AI = a\sqrt{3}$, $SA = \sqrt{AD^2 + SD^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$ suy ra

$$IH = \frac{AI.SD}{AD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\frac{3a\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow \widehat{BHC} = 90^0.$$

DẠNG 5: DÙNG MỐI QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIẢI BÀI TOÁN THIẾT DIỆN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc với đường thẳng a cắt hình chóp theo một thiết diện.

+) Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì? Tìm đường thẳng song song với (P).

+) Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:

Sử dụng tính chất về giao tuyến song song như sau

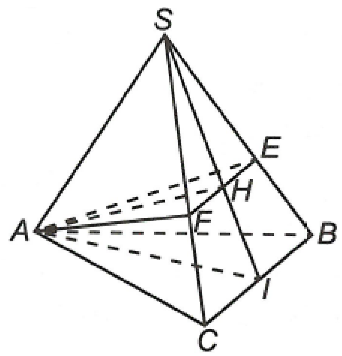
$$\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$$

Ví dụ: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện.

Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

+ Kết luận hình dạng của thiết diện và tính các yêu cầu liên quan.
✓ Thiết diện là hình gì?
✓ Dựa vào các công thức tính diện tích để tính diện tích thiết diện.
✓ Áp dụng bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất diện tích thiết diện.



Kẻ $AH \perp SI$. Suy ra $AH \subset (P)$.

Ta có $AI \perp BC, SI \perp BC \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $(P) \perp SI$ nên $(P) // BC$.

Lại có $(P) \cap (SBC) = d // BC \Rightarrow H \in d$.

Gọi *E, F* lần lượt là giao điểm của *d* và *SB, SC.*

Suy ra thiết diện cần tìm là ΔAEF.

Ta có $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$,

$SI = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$S_{\Delta SAI} = \dfrac{\sqrt{5}a^2}{8} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

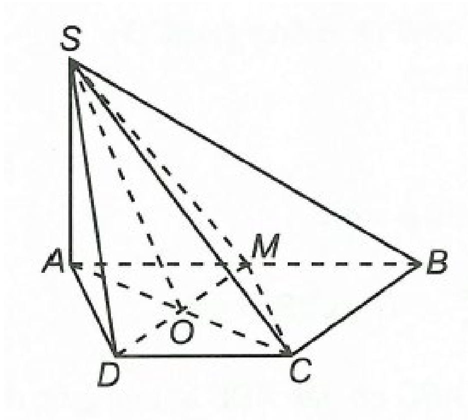
Ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SH}{SI} \Rightarrow EF = \dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{2}AH.FE = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 46: Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình thang vuông tại *A, D;* $AB = 2a; SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua *SD* và $(\alpha) \perp (SAC)$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB.

Tứ giác $ADCM$ là hình vuông $\Rightarrow DM \perp AC$.

Mà $DM \perp SA$ suy ra

$DM \perp (SAC) \Rightarrow (SDM) \perp (SAC) \Rightarrow (\alpha) = (SDM)$.

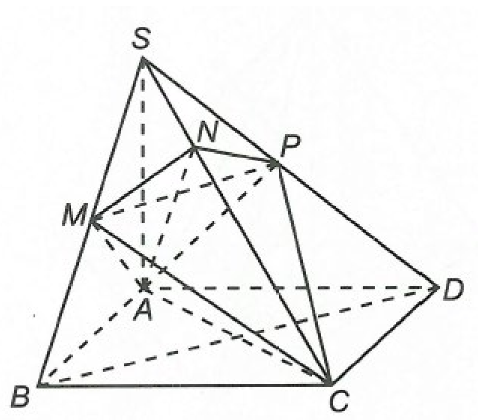
Suy ra thiết diện là ΔSDM.

Ta có $SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}, DM = a\sqrt{2}$.

Diện tích thiết diện là $S_{\Delta SDM} = \dfrac{SO.DM}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (P) với các đường thẳng SB, SC, SD.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$. Mà $BC \perp AB$.

$BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Mặt khác $SC \perp (P) \Rightarrow SC \perp AM$ nên $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SB$.

Tương tự $AN \perp SC, AP \perp SD, MP // BD \Rightarrow MP \perp AN$.

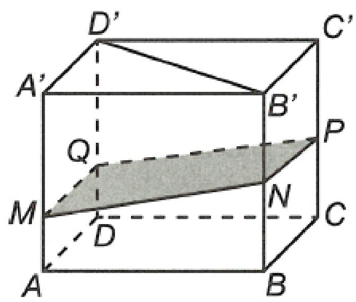
Ta có $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{MP}{BD} = \frac{4}{5} \Rightarrow MP = \frac{4a\sqrt{2}}{5}$.

ΔSAN vuông tại A nên $AN = \frac{AS.AC}{\sqrt{AS^2 + AC^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $S_{AMNP} = \frac{AN.MP}{2} = \frac{4a^2\sqrt{6}}{15}$.

Câu 48: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy của lăng trụ bằng a. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc $45°$ và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M, N, P, Q. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải



Gọi S là diện tích thiết diện $MNPQ$.

Ta có hình chiếu của $MNPQ$ xuống $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

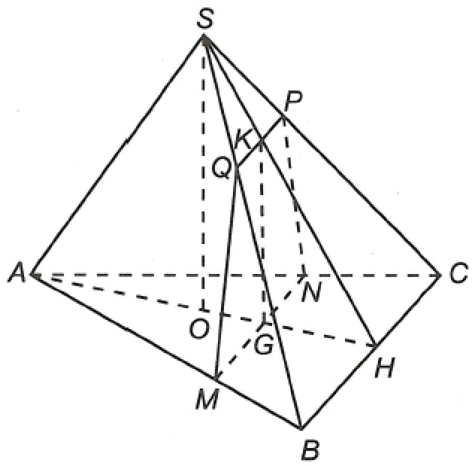
$S' = S_{ABCD} = a^2$.

Gọi $\varphi = \widehat{((\alpha),(ABCD))}$ thì $\varphi = 45°$.

Do $S' = S.\cos\varphi = S.\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}S' = \sqrt{2}a^2$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi H là trung điểm của BC, O là trung điểm của AH và G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO = 2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Lời giải



Qua G dựng đường thẳng MN $\left(M \in AB, N \in AC\right)$ song song với BC thì $MN \perp AH \Rightarrow MN \subset \left(P\right)$.

Qua G dựng đường thẳng $GK\left(K \in SH\right)$ song song với SO thì $GK \perp AH$.

$\Rightarrow GK \subset \left(P\right)$

Qua K dựng đường thẳng PQ $\left(P \in SC, Q \in SB\right)$ song song với BC thì $PQ \perp AH \Rightarrow PQ \subset \left(P\right)$.

Suy ra thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Ta có MN và PQ cùng song song BC suy ra G là trung điểm của MN và K là trung điểm của PQ. Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và $MN // BC \Rightarrow MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}a.$

Ta có $\frac{OH}{AH} = \frac{1}{2}, \frac{HG}{AH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{HG}{OH} = \frac{2}{3}.$

Vì $GK // SO$ nên $\frac{HG}{HO} = \frac{GK}{SO} = \frac{HK}{HS} = \frac{2}{3} \Rightarrow KG = \frac{4}{3}a.$

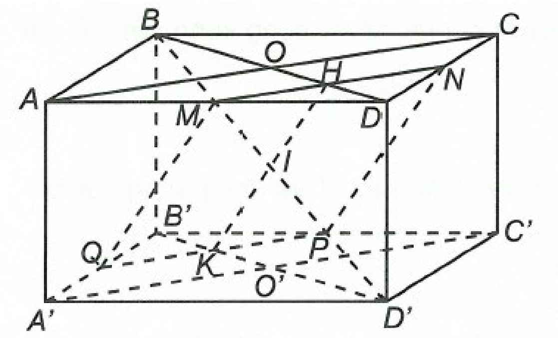
Mặt khác $PQ // BC, \frac{HK}{HS} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SK}{SH} = \frac{1}{3} = \frac{PQ}{BC} \Rightarrow PQ = \frac{1}{3}a.$

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là

$$S = \frac{1}{2}.\left(PQ + MN\right).GK = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a\right).\frac{4}{3}a = \frac{2}{3}a^2.$$

Câu 50: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD'. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải



Thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$.

Ta có $\Delta IBH \backsim \Delta DBD'$ suy ra $\dfrac{IB}{DB}=\dfrac{IH}{DD'}=\dfrac{BH}{BD'}$.

Suy ra $BH=\dfrac{IB.BD'}{DB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$ và $IH=\dfrac{IB.DD'}{DB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}a}{4}$.

Suy ra $\dfrac{DH}{DO}=\dfrac{BD-BH}{DO}=\dfrac{a\sqrt{2}-\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MN=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $NP=HK=2HI=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

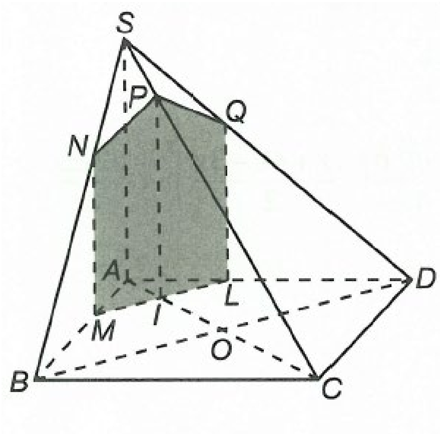
Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=b$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sau cho $AM=x(0<x<a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích S của thiết diện theo a, b, x.

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

Ta có $\begin{cases} SA \perp AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // SA, (\alpha) // BD.$

+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = m$ với m đi qua M và song song với SA cắt cạnh SB tại N.

+) $\begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = n$ với n đi qua M và song song với BD cắt cạnh AD tại L và cắt đoạn AC tại I.

+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = p$ đi qua I và song song với SA cắt cạnh SC tại P.

+) $\begin{cases} (\alpha) // SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = q$ đi qua L và song song với SA cắt cạnh SD tại Q.

Mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình chóp *S.ABCD* theo năm đoạn giao tuyến *MN, NP, PQ, QL, LM* nên thiết diện là ngũ giác *MNPQL*.

b) Tính diện tích S của thiết diện theo *a, b, x*.

Chú ý tính chất đối xứng ta có $S_{MNPQL} = 2S_{MINP}$.

Trong đó tứ giác *MINP* là hình thang vuông tại *I* và *M*, gọi *O* là tâm hình vuông *ABCD* ta có theo định lí Ta-lét, ta có $\dfrac{MN}{SA} = \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \dfrac{b(a-x)}{a}$;

$$\frac{MI}{BO} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow MI = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{IP}{SA} = \frac{CI}{CA} = \frac{CO+OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{BM}{2BA} = \frac{1}{2} + \frac{a-x}{2a} = \frac{2a-x}{2a}.$$

Suy ra $IP=\dfrac{b\left(2a-x\right)}{2a}$. Ta có

$$S_{MNPQL}=\left(MN+IP\right)MI=\left[\frac{b\left(a-x\right)}{a}+\frac{b\left(2a-x\right)}{2a}\right]\frac{x\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}bx\left(4a-3x\right)}{4a}.$$

c) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$S=\frac{\sqrt{2}.bx\left(4a-3x\right)}{4a}=\frac{\sqrt{2}.b}{12a}.3x\left(4a-3x\right)\le\frac{\sqrt{2}.b}{12a}\left(\frac{3x+4a-3x}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}ab}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3x=4a-3x\Leftrightarrow x=\dfrac{2a}{3}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 3: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1: CÂU HỎI LÍ THUYẾT

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA HAI MP, MP VÀ ĐT

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dướI đây

A. $(ABCD) \perp (SBD)$. **B.** $(SAB) \perp (ABCD)$. **C.** $(SAC) \perp (SBD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. $(SAB)\perp(ABCD)$ **B.** $(SAC)\perp(ABCD)$. **C.** $(SAC)\perp(SBD)$. **D.** $(SAB)\perp(SAC)$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH)\perp(SBC)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SBC)\perp(ABC)$. **D.** $(SAC)\perp(SBC)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD)?

A. (SBC). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SAC).

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. $SA\perp(ABC)$, H là trung điểm AC, K là hình chiếu vuông góc của H lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SAC)\perp(SAB)$. **B.** $(BKH)\perp(ABC)$. **C.** $(BKH)\perp(SBC)$. **D.** $(SBC)\perp(SAC)$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $(SBC)\perp(SAB)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SAC)\perp(SBC)$. **D.** $(ABC)\perp(SBC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $AI\perp SC$. **B.** $(SBC)\perp(SAC)$. **C.** $AI\perp BC$. **D.** $(ABI)\perp(SBC)$.

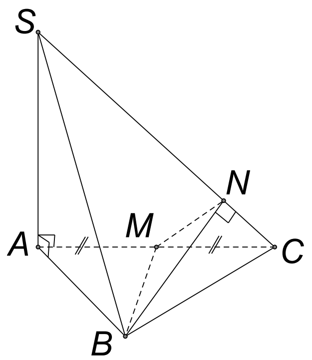
Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(A'BD)$ không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(AB'D)$. **B.** $(ACC'A')$. **C.** (ABD'). **D.** $(A'BC')$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AD=DC=a$, $AB=2a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SBC)\perp(SAC)$. **B.** $(SAD)\perp(SAB)$. **C.** $(SCD)\perp(SAD)$. **D.** $(SAC)\perp(SBD)$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ΔABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC, N là hình chiếu của B lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $(BMN)\perp(SBC)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(BMN)\perp(ABC)$. **D.** $(SAC)\perp(SBC)$.

Câu 16: Cho tam giác ACD và tam giác BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau và $AC = AD = BC = BD = a; CD = 2x$. Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. $\widehat{SBC}$. **B.** $\widehat{SCA}$. **C.** $\widehat{SAB}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB = 2a, AB = 3a, BC = 4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 20: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, BC = 2a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 22: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính tan của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng ?

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

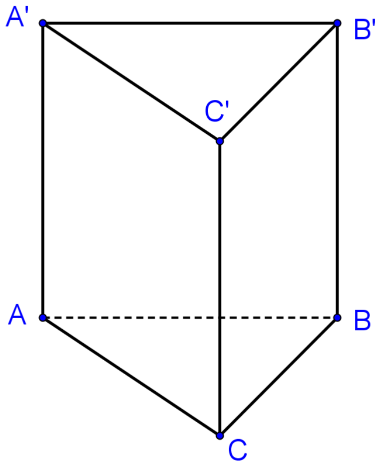
Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng $AC = a\sqrt{2}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Câu 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng:

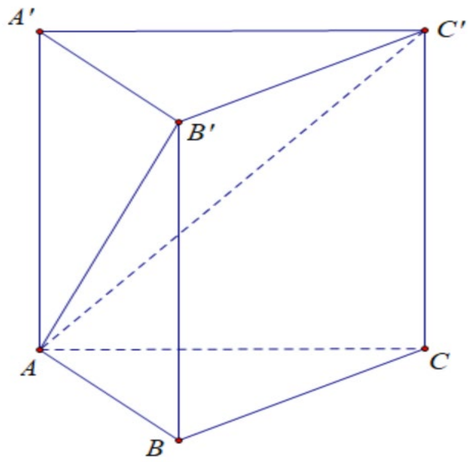
A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0 **D.** 90^0

Câu 26: Cho lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a, tan của góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, chiều cao bằng a. Tính số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC)?



A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** $26^0 33'$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều có thể tích bằng $a^3\sqrt{3}$, trọng tâm G của tam giác ABC là chân đường cao của hình chóp và $SG = 3a$. Gọi α là góc hợp bởi mặt bên (SBC) với mặt đáy. Tính $\cot\alpha$

A. $\cot\alpha = \frac{9}{2}$. **B.** $\cot\alpha = 3\sqrt{3}$. **C.** $\cot\alpha = \frac{2}{9}$. **D.** $\cot\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\tan\varphi=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\tan\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB=BC=a$, $SA=a\sqrt{3}$, $SA\perp(ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Câu 31: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha=\sqrt{6}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\alpha=\sqrt{2}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA,SB,SC đôi một vuông góc nhau và $SA=SC=a$, $SB=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

A. 30^{0}. **B.** 45^{0}. **C.** 60^{0}. **D.** 90^{0}.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=\frac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy $(ABCD)$ là

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 75°.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 90°.

Câu 37: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC=a,\ AC=2a,\ A'A=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trùng với giao điểm H của hai đường chéo AC và BD, $A'H = a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của hình hộp bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$

Câu 40: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = \frac{1}{4}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = 4$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đáy ABC có $BC = a$ và $\widehat{BAC} = 150°$. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB,SC. Góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. 30^0. **B.** 150^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, $SA = \frac{a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1. Mặt bên SBC là tam giác nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Các mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ lần lượt tạo với đáy các góc 60^o và 30^o. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC). Tính $\sin\varphi$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{61}}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{61}}{28}$. **D.** $\frac{\sqrt{235}}{28}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a,\ AC = a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\tan\varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\tan\varphi = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAD cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và có đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC. Giá trị tang của góc giữa hai mặt phẳng (SDM) và (SAM) bằng

A. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{21}}{5}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{42}$. **D.** $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.

Câu 47: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a$, $AD = a$, $\widehat{BAD} = 120^0$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \frac{1}{10}SB$, N là trung điểm của SD. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$

A. $\frac{\sqrt{165}}{55}$. **B.** $\frac{2\sqrt{715}}{55}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = AB\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $AC, \widehat{ACB} = 60°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Tính tan của góc hợp bởi mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

A. $90°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

DẠNG 3: DỰNG MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG CHO TRƯỚC. THIẾT DIỆN, DIỆN TÍCH THIẾT DIỆN

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB = a; AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho

A. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S = \frac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Câu 51: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 3: HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1: CÂU HỎI LÍ THUYẾT

Câu 1: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và một điểm M không thuộc (P) và (Q). Qua M có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) và (Q)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) mà (P) và (Q) song song với nhau nên cũng sẽ có vô số mặt phẳng vuông góc với cả (P) và (Q).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

B. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.

C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

D. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

Lời giải

Theo nội dung định lí về hai mặt phẳng vuông góc ta **Chọn D**

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

B. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó.

C. Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia.

D. Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó cắt cả hai đường thẳng đó.

Lời giải

Chọn A Đúng.

Chọn B Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố cắt nhau.

Chọn C Sai, vì mặt phẳng đó chưa chắc đã tồn tại.

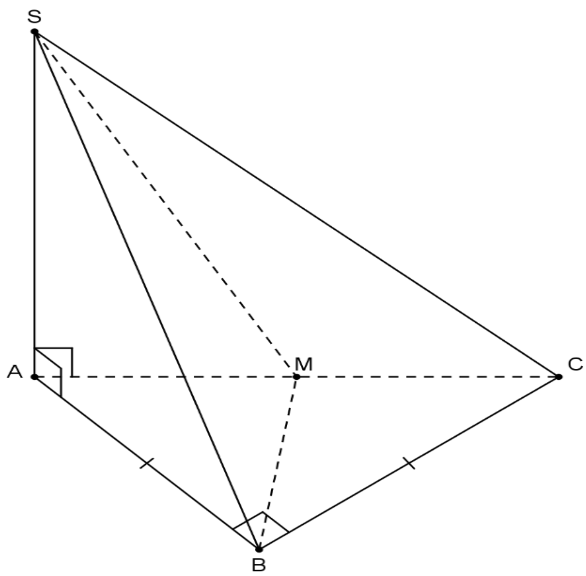
Chọn D Sai, do phát biểu này thiếu yếu tố vuông gó **C.**

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH QUAN HỆ VUÔNG GÓC GIỮA HAI MP, MP VÀ ĐT

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AC. Khẳng định nào sau đây **SAI** ?

A. $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



+ Ta có tam giác ABC vuông cân tại B, BM là trung tuyến nên cũng là đường cao

$\Rightarrow BM \perp AC$.

Lại có $BM \perp SA$

Suy ra $BM \perp (SAC) \Rightarrow BM \perp AC$.

Nên đáp A đúng.

+ Ta có: $\begin{cases} BM \perp (SAC) \\ BM \subset (SBM) \end{cases} \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$

Nên **Chọn B** đúng.

+ Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAB) \perp (SBC)$

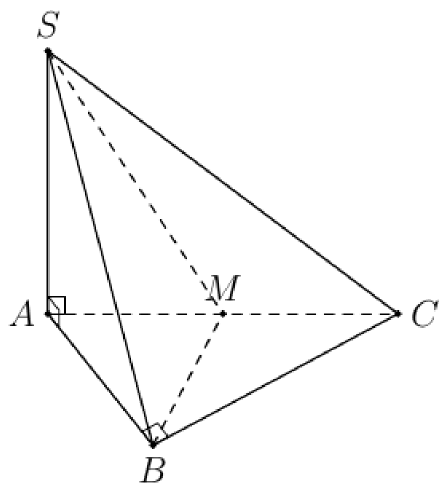
Nên **Chọn C** đúng.

Vậy **Chọn D**

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $BM\perp AC$. **B.** $(SBM)\perp(SAC)$. **C.** $(SAB)\perp(SBC)$. **D.** $(SAB)\perp(SAC)$.

Lời giải



Xét phương án **A**: ΔABC cân tại B, M là trung điểm $AC\Rightarrow BM\perp AC$ nên phương án **A** đúng.

Xét phương án **B**: $\begin{cases}BM\perp SA\\BM\perp AC\end{cases}\Rightarrow BM\perp(SAC)\Rightarrow(SBM)\perp(SAC)$ nên phương án **B** đúng.

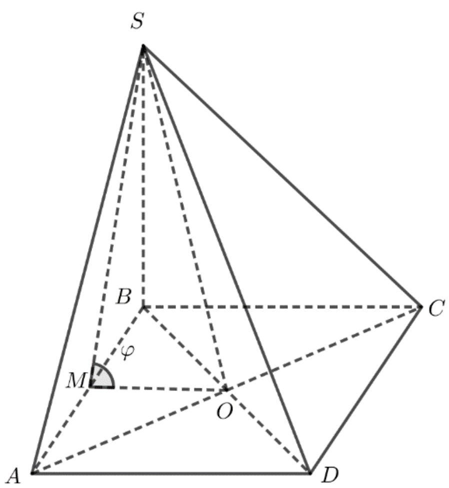
Xét phương án **C**: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(SBC)\perp(SAB)$ nên phương án **C** đúng.

Ta có: $\begin{cases}(SAB)\cap(SAC)=SA\\AC\perp SA\left(SA\perp(ABC)\right)\\AB\perp SA\left(SA\perp(ABC)\right)\end{cases}\Rightarrow\left((SAB),(SAC)\right)=\widehat{BAC}=45^\circ$ nên phương án **D** sai.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dướI đây

A. $(ABCD)\perp(SBD)$. **B.** $(SAB)\perp(ABCD)$. **C.** $(SAC)\perp(SBD)$. **D.** $(SAC)\perp(ABCD)$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB. Suy ra

$$\begin{cases} MO \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SMO} = \varphi.$$

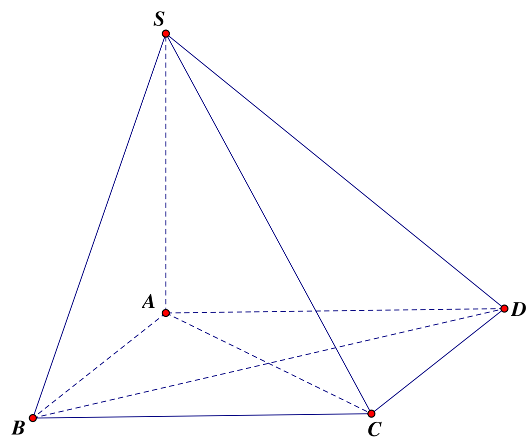
Tam giác SMO vuông tại O nên $\varphi \neq 90^\circ$.

Do đó $(ABCD)$ không vuông góc với mặt phẳng (SAB).

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông. Khẳng định nào sau đây **SAI**?

A. $(SAB) \perp (ABCD)$ **B.** $(SAC) \perp (ABCD)$. **C.** $(SAC) \perp (SBD)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



Ta có

$$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAB) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$$. Suy ra A đúng.

$$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ SA \subset (SAC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$$. Suy ra B đúng.

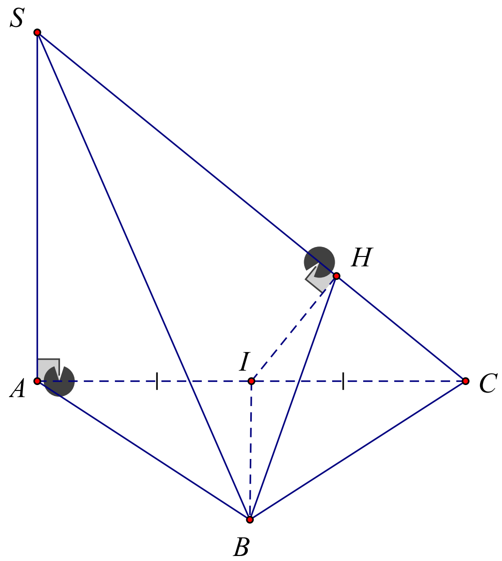
$$\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \\ AC \cap SA = \{A\} \\ AC, SA \subset (SAC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} BD \perp (SAC) \\ BD \subset (SBD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$$. Suy ra C đúng.

$((SAB),(SAC)) = (AD, BD) = 45^\circ$. Suy ra D sai.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B, cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC, H là hình chiếu của I lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(BIH) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SBC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC(\text{gt}) \\ BI \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow SC \perp BI \quad (1)$.

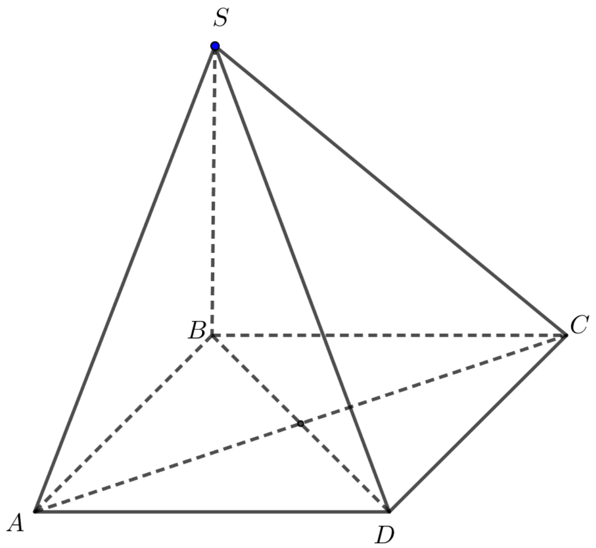
Theo giả thiết: $SC \perp IH \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$. Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD)?

A. (SBC). **B.** (SAD). **C.** (SCD). **D.** (SAC).

Lời giải

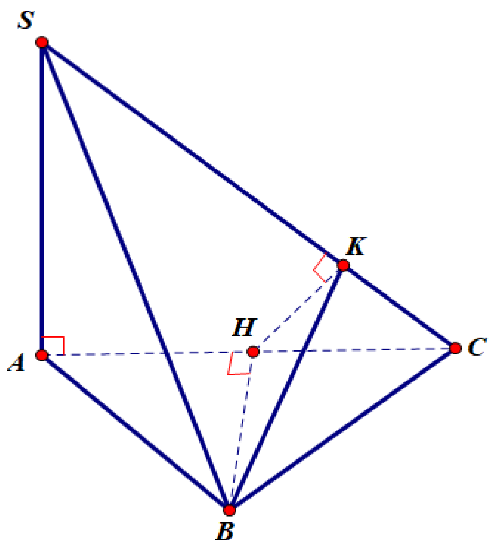


Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều. $SA \perp (ABC)$, H là trung điểm AC, K là hình chiếu vuông góc của H lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(SAC)\perp(SAB)$. **B.** $(BKH)\perp(ABC)$. **C.** $(BKH)\perp(SBC)$. **D.** $(SBC)\perp(SAC)$.

Lời giải



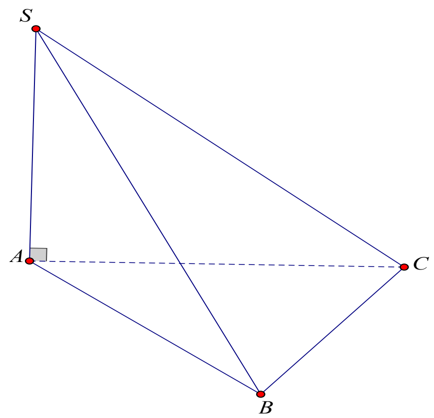
Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BH\\ \Delta ABC \text{ đều } \Rightarrow AC\perp BH\end{array}\right\}\Rightarrow HB\perp SC\\ HK\perp SC\end{array}\right\}\Rightarrow SC\perp(BKH)\Rightarrow(SBC)\perp(BKH)$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $(SBC)\perp(SAB)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(SAC)\perp(SBC)$. **D.** $(ABC)\perp(SBC)$.

Lời giải



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}SA\perp(ABC)\\ AC\subset(ABC)\end{array}\right\}\Rightarrow AC\perp SA.$$

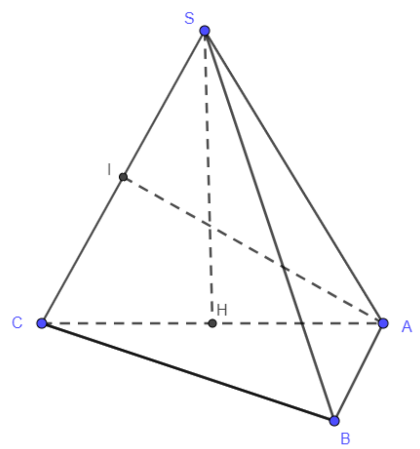
Mà $AC\perp AB$.

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AC\perp(SAB)\\ AC\subset(SAC)\end{array}\right\}\Rightarrow(SAC)\perp(SAB).$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $AI\perp SC$. **B.** $(SBC)\perp(SAC)$. **C.** $AI\perp BC$. **D.** $(ABI)\perp(SBC)$.

Lời giải



Tam giác SAC đều có I là trung điểm của SC nên $AI\perp SC$ (1).

Gọi H là trung điểm AC suy ra $SH\perp AC$.

Mà $(SAC)\perp(ABC)$ theo giao tuyến AC nên $SH\perp(ABC)$ do đó $SH\perp BC$.

Mặt khác, do tam giác ABC vuông tại C nên $BC\perp AC$.

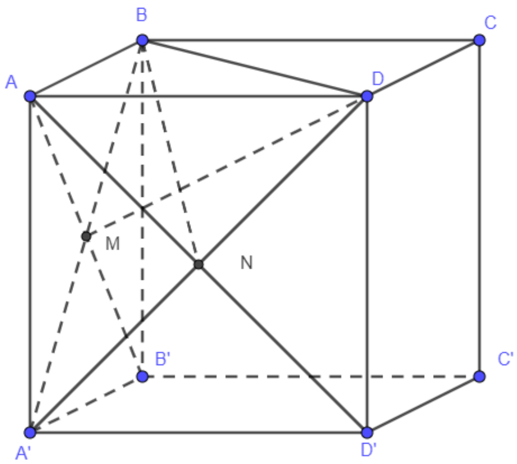
Từ đó suy ra $BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AI$ (2).

Từ $(1),(2)\Rightarrow AI\perp(SBC)\Rightarrow(ABI)\perp(SBC)$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(A'BD)$ không vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(AB'D)$. **B.** $(ACC'A')$. **C.** (ABD'). **D.** $(A'BC')$.

Lời giải

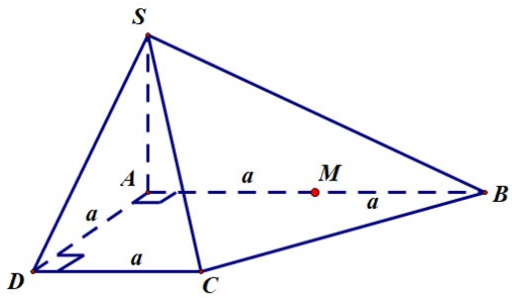


Gọi M, N lần lượt là tâm hình vuông $ABB'A', ADD'A'$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $AD = DC = a$, $AB = 2a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $(SBC) \perp (SAC)$. **B.** $(SAD) \perp (SAB)$. **C.** $(SCD) \perp (SAD)$. **D.** $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải



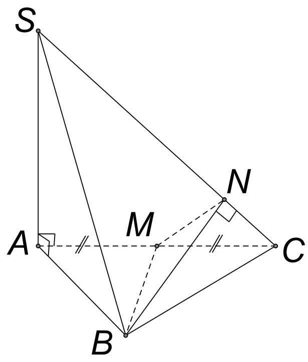
Gọi M là trung điểm AB. Ta có $CM = MA = MB = a$. Suy ra ΔACB vuông tại C.

$\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$. Do đó phương án A đúng.

$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$. Do đó phương án B đúng.

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$. Do đó phương án C đúng.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ΔABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC, N là hình chiếu của B lên SC. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $(BMN)\perp(SBC)$. **B.** $(SAC)\perp(SAB)$. **C.** $(BMN)\perp(ABC)$. **D.** $(SAC)\perp(SBC)$.

Lời giải

Ta có: $SA\perp(ABC)\Rightarrow BM\perp SA$

Mà $BM\perp AC$

$\Rightarrow BM\perp(SAC)\supset SC\Rightarrow SC\perp BM\ (1)$.

Theo giả thiết: $SC\perp BN\ (2)$.

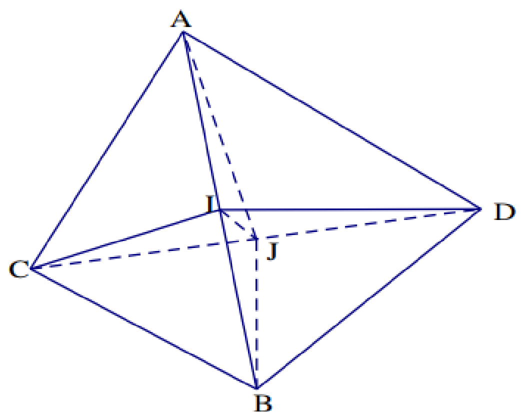
Từ (1) và (2) suy ra: $SC\perp(BMN)$.

Mà $SC\subset(SBC)$ nên $(BMN)\perp(SBC)$.

Câu 16: Cho tam giác ACD và tam giác BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc nhau và $AC=AD=BC=BD=a; CD=2x$. Với giá trị nào của x thì $(ABC)\perp(ABD)$.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I,J lần lượt là trung điểm AB,CD.

Suy ra $CI\perp AB; DI\perp AB$ mà $(ABC)\cap(ABD)=AB$.

Do đó $(ABC)\perp(ABD)\Leftrightarrow\widehat{CID}=90^o\Leftrightarrow IJ=\dfrac{1}{2}CD$.

Ta có

$$\begin{cases}(ACD)\perp(BCD)\\ AJ\perp CD\end{cases}$$
$\Rightarrow AJ\perp(BCD)\Rightarrow AJ\perp JB$.

Mặt khác $JA=JB\left(\Delta ACD=\Delta BCD\right)$ nên tam giác JAB vuông cân tại J.

Do đó $IJ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}JA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{AC^2-JC^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2-x^2}$.

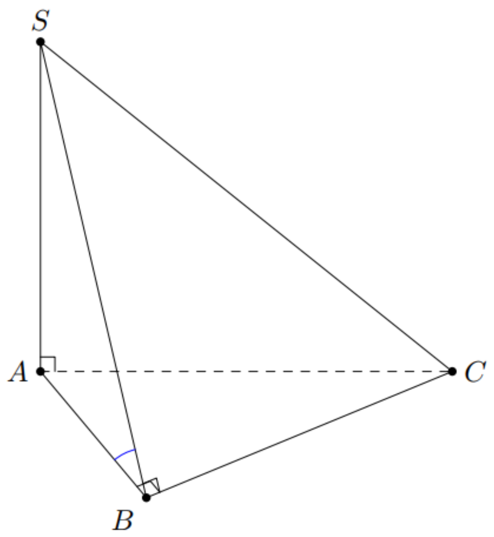
Vậy $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2-x^2}=x\Leftrightarrow a^2=3x^2\Leftrightarrow x=a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, SA vuông góc với đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. $\widehat{SBC}$. **B.** $\widehat{SCA}$. **C.** $\widehat{SAB}$. **D.** $\widehat{SBA}$.

Lời giải

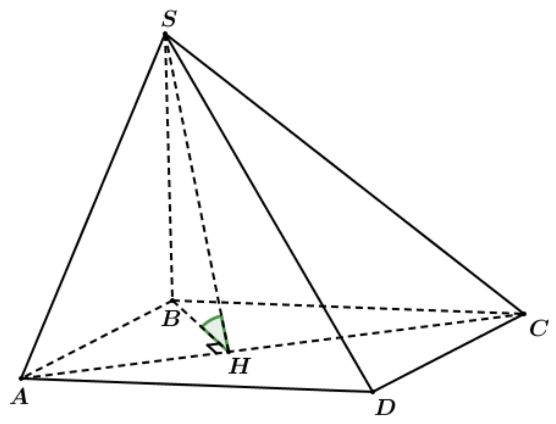


Có $\left(\widehat{(SBC);(ABC)}\right)=\widehat{SBA}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB\perp(ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB=2a, AB=3a, BC=4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải



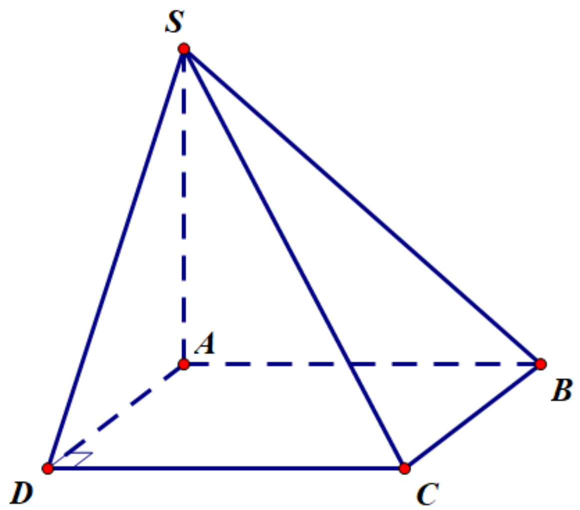
Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow \alpha = \widehat{SHB}$.

Ta có $HB = \dfrac{BA.BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \dfrac{3a.4a}{5a} = \dfrac{12a}{5} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SB}{BH} = \dfrac{2a}{\frac{12a}{5}} = \dfrac{5}{6}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính $\cos\alpha$ với α là góc tạo bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp CD$, cùng với $CD \perp AD$ ta được $CD \perp (SAD)$.

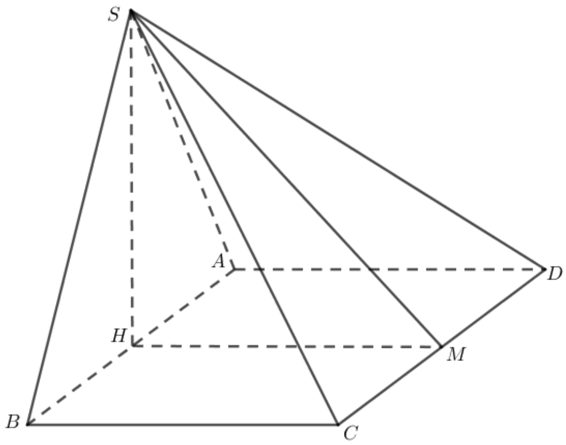
Xét hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ ta có $CD = (SCD) \cap (ABCD)$, đồng thời $CD \perp (SAD)$ do vậy góc tạo bởi hai mặt phẳng trên là $\alpha = \widehat{SDA}$. Độ dài $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{AD}{SD} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 20: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H,M lần lượt là trung điểm của AB,CD.

Ta có: $SH\perp AB$, $(SAB)\perp(ABCD)$, $(SAB)\cap(ABCD)=AB$. Suy ra $SH\perp(ABCD)$.

Do đó: $AB\perp SH,MN$. Suy ra $AB\perp(SHM)$, mà $AB//CD$ nên $(SHM)\perp(SAB),(SCD)$.

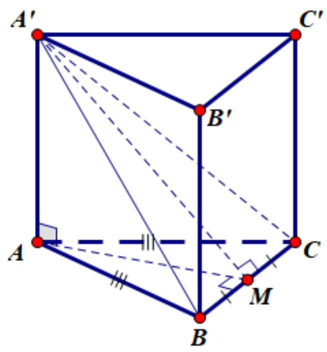
Vậy $\alpha=\widehat{MSH}$.

Xét tam giác SMH vuông tại H có: $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM=a$. Suy ra $\tan\alpha=\dfrac{HM}{HS}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, BC=2a$ và $AA'=a\sqrt{3}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $30°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $BC\Rightarrow AM\perp BC$.

Có $\left.\begin{matrix}BC\perp AM\\BC\perp AA'\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(A'AM)\Rightarrow BC\perp A'M$.

Do đó $\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right)=\widehat{AMA'}$.

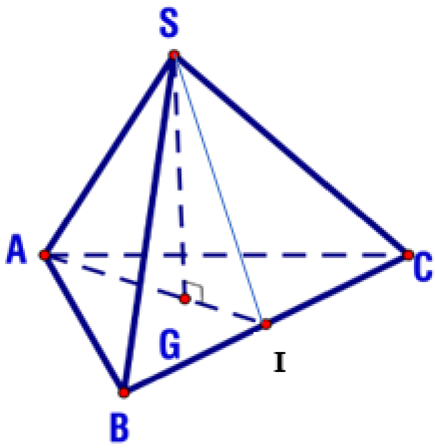
Lại có ΔABC vuông cân tại $A\Rightarrow AM=\dfrac{BC}{2}=a$.

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại A có $\tan\widehat{AMA'} = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AMA'} = 60°$.

Câu 22: Cho hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a. Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Tính tan của góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

A. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SG \perp (ABC)$.

Suy ra $\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{(SA, AG)} = \widehat{SAG} \Rightarrow \widehat{SAG} = 60°$.

Tam giác SAG vuông tại G có $\tan\widehat{SAG} = \dfrac{SA}{AG} \Rightarrow SG = AG.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Gọi I là trung điểm của BC, suy ra $\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{(SI, GI)} = \widehat{SIG}$.

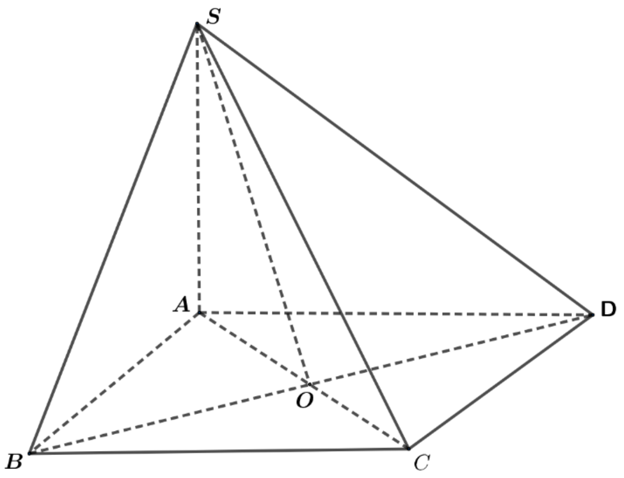
Tam giác SIG vuông tại G có $\tan\widehat{SIG} = \dfrac{SG}{IG} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{3}$.

Suy ra $\tan\widehat{((SBC),(ABC))} = 2\sqrt{3}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{6}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng ?

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải



Gọi O là tâm của $ABCD$.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \\ (SAC) \cap (ABCD) = AC \end{cases}$

Suy ra $\left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SO, AC}\right) = \widehat{SOA}$

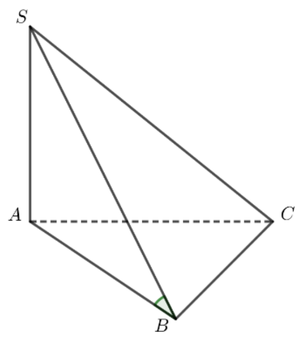
Tam giác SAO vuông tại A: $\tan \widehat{SOA} = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60°.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết rằng $AC = a\sqrt{2}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. 90^0. **B.** 30^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải



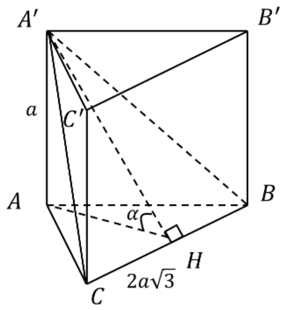
Tam giác ABC vuông cân tại B mà $AC = a\sqrt{2}$ nên $AB = AC = a$.

Ta có $(SBC)\cap(ABC)=BC$ và $BC\perp(SAB)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$. Trong tam giác vuông SBA có $\tan\widehat{SBA}=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{SBA}=30^0$.

Câu 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA'=a$, tam giác ABC vuông cân tại A, $BC=2a\sqrt{3}$. Góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng:

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0 **D.** 90^0

Lời giải



Gọi H là trung điểm của cạnh BC. Tam giác ABC cận tại A nên AH vuông góc với BC.

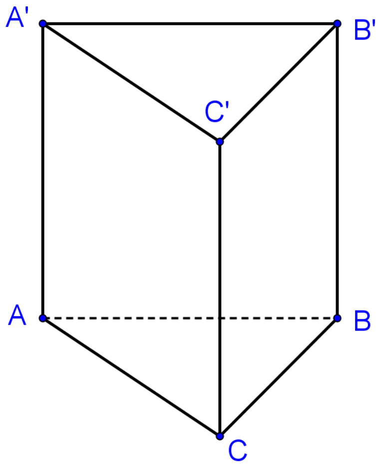
Ta có $\begin{cases}AH\perp BC\\ AA'\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(A'AH)\Rightarrow BC\perp A'H$.

Ta có lại có $\begin{cases}(ABC)\cap(A'BC)=BC\\ AH\subset(ABC)\\ AH\perp BC\\ A'H\subset(A'BC)\\ A'H\perp BC\end{cases}$, nên góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng góc $\widehat{A'HA}=\alpha$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại A có $\tan\alpha=\dfrac{AA'}{AH}=\dfrac{a}{\frac{1}{2}BC}=\dfrac{a}{\frac{1}{2}2\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

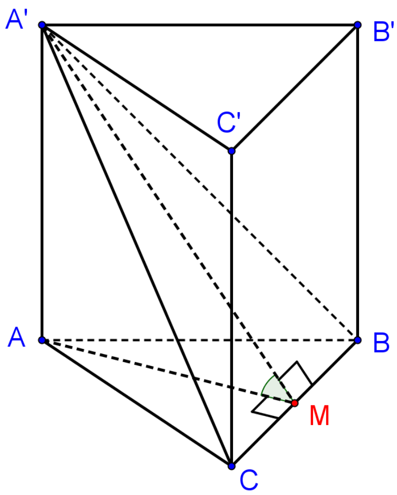
Suy ra góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^0.

Câu 26: Cho lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a, tan của góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



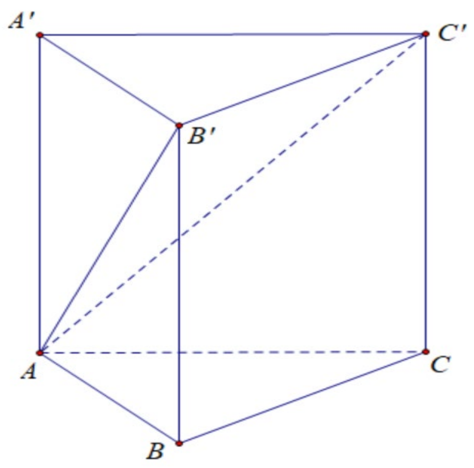
Gọi M là trung điểm của BC, khi đó $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $BC \perp AM$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (A'AM)$. Suy ra $BC \perp A'M$.

Vì $(A'BC) \cap (ABC) = BC$, $A'M \perp BC$, $AM \perp BC$ nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc giữa $A'M$ và AM, nghĩa là là góc $A'MA$.

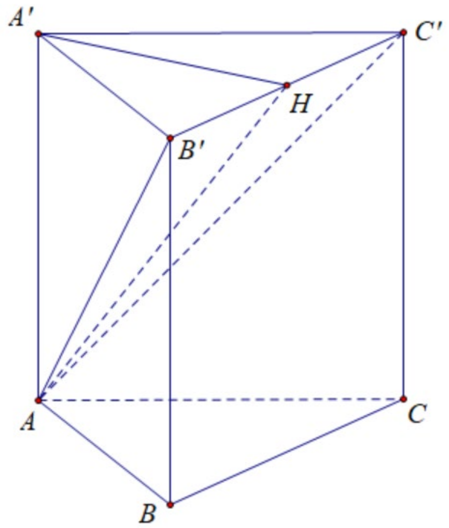
$\Delta A'AM$ vuông ở $A \Rightarrow \tan \widehat{A'MA} = \frac{A'A}{AM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 27: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, chiều cao bằng a. Tính số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (ABC)?



A. 45^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** $26^0 33'$.

Lời giải



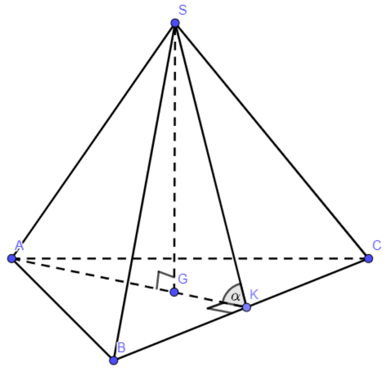
Gọi H là trung điểm của $B'C'$, do các tam giác $\Delta A'B'C'$, $\Delta AB'C'$ lần lượt cân đỉnh A' và A nên $AH \perp B'C'$, $A'H' \perp B'C'$ nên $\widehat{((AB'C'),(ABC))} = \widehat{((AB'C'),(A'B'C'))} = \widehat{(AH, A'H)} = \widehat{AHA'}$

Xét tam giác AHA' có $\widehat{A'} = 90^0$, $A'H = a\sqrt{3}$ và $\tan \widehat{AHA'} = \dfrac{AA'}{A'H} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AHA'} = 30^0$

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều có thể tích bằng $a^3\sqrt{3}$, trọng tâm G của tam giác ABC là chân đường cao của hình chóp và $SG = 3a$. Gọi α là góc hợp bởi mặt bên (SBC) với mặt đáy. Tính $\cot \alpha$

A. $\cot \alpha = \dfrac{9}{2}$. **B.** $\cot \alpha = 3\sqrt{3}$. **C.** $\cot \alpha = \dfrac{2}{9}$. **D.** $\cot \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SG.S_{ABC}\Leftrightarrow a^3\sqrt{3}=\frac{1}{3}.3a.\frac{AB^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow AB=2a$

Gọi K là giao điểm của AG và BC $\Rightarrow GK\perp BC$

Ta có: $\begin{cases}SG\perp BC\\GK\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SGK)\Rightarrow BC\perp SK$

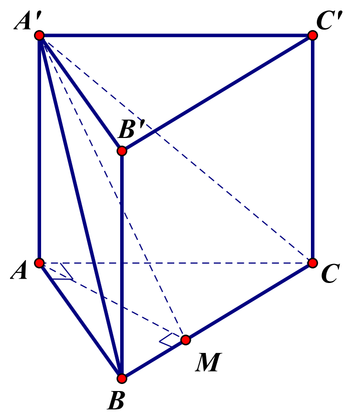
Từ và suy ra $\alpha=((SBC),(ABCD))=(GK,SK)=\widehat{SKG}$

Ta có: $\cot\alpha=\frac{GK}{SG}=\frac{\frac{AK}{3}}{3a}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{3a}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\tan\varphi=\frac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\tan\varphi=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Kẻ $AM\perp BC$ tại M. Lại có $AA'\perp BC$. Suy ra $BC\perp(AMA')\Rightarrow BC\perp A'M$.

Suy ra $((A'BC),(BB'C'C))=(A'M,AM)=\widehat{A'MA}=\varphi$.

Xét ΔABC vuông tại A có AM là đường cao.

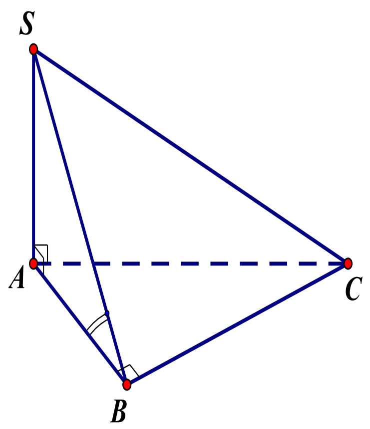
$\Rightarrow \dfrac{1}{AM^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\tan\varphi = \dfrac{A'A}{AM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} == \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là

A. 45°. **B.** 90°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Do $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SB \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases}$ nên góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $(SB, AB) = \widehat{SBA}$.

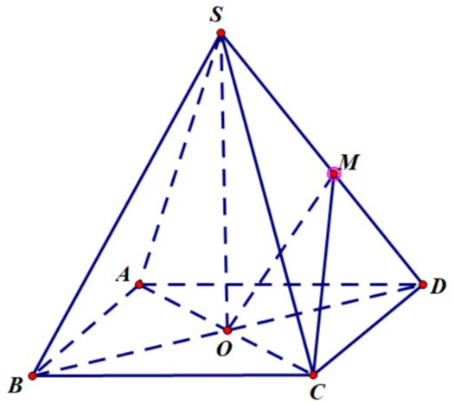
Ta có $\tan\widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $\widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 31: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan\alpha = \sqrt{6}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm của SD. Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a, BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông tại S

Suy ra $SB \perp SD$ mà $OM \parallel SB$ nên $OM \perp SD$.

Ta có:

$$\begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ (SBD) \supset OM \perp SD \\ (SCD) \supset CM \perp SD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBD)(SCD))} = \widehat{OMC}.$$

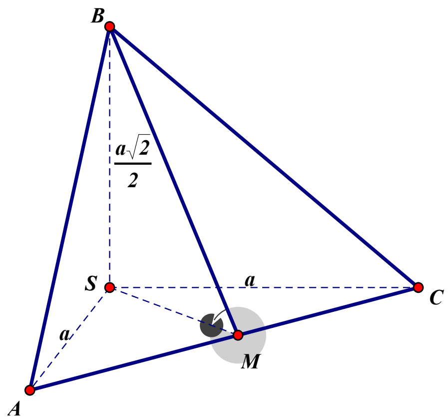
Lại có: $\begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM$.

Xét tam giác vuông MOC, có $\tan \widehat{CMO} = \dfrac{OC}{OM} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{2}{a} = \sqrt{2}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SC = a$, $SB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

A. 30^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



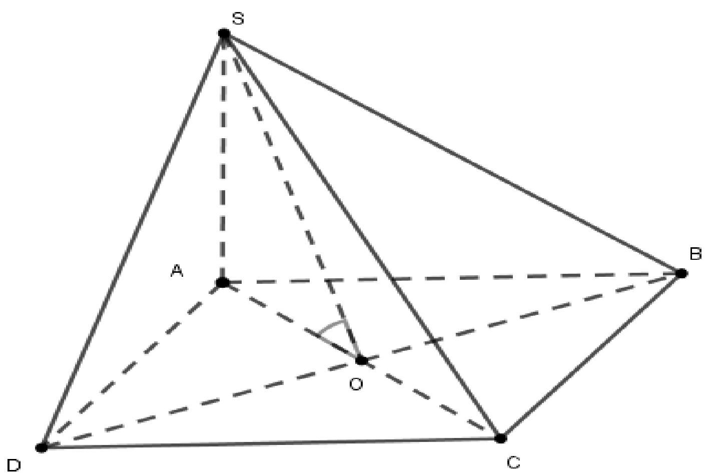
+ Gọi M là trung điểm AC nên $SM \perp AC; BM \perp AC$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng $\left(\widehat{SM; BM}\right)$ bằng $\widehat{SMB}$

+ Tính được $AC = a\sqrt{2}; SM = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác SBM vuông cân tại S nên góc $\widehat{SMB} = 45^0$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy $(ABCD)$ là

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $75°$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $(\mathrm{SBD}) \cap (\mathrm{ABCD}) = \mathrm{BD}$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AO \perp BD$.

Lại có $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SO$. Do đó, ta có $((SBD);(ABCD)) = (SO; AO)$.

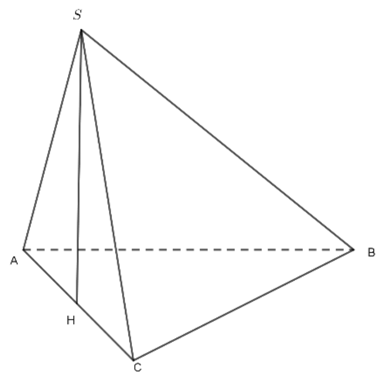
Vì ΔSAO có $\widehat{SAO} = 90°$ nên $\widehat{SOA}$ là góc nhọn và ta có $((SBD);(ABCD)) = \widehat{SOA}$.

Xét ΔSAO ta có $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SOA} = 30°$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và (ABC).

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $60°$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của A **C.**

Ta có: H là trung điểm AC thì $SH \perp AC$

Mà $\begin{cases}(SAC)\perp(ABC)\\(SAC)\cap(ABC)=AC\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC)$

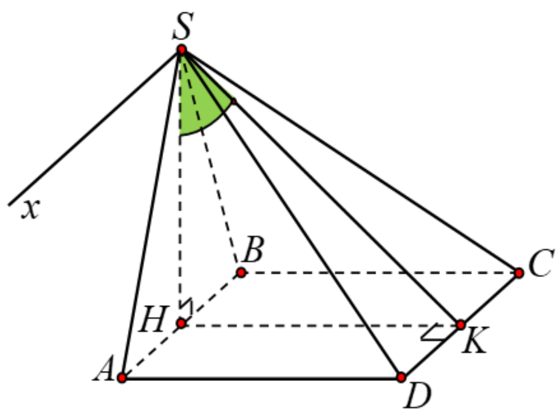
Ta có $\begin{cases}BC \perp AC\\BC \perp SH\left(SH \perp (ABC) \supset BC\right)\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp SC$

Lại có $\begin{cases}(SBC)\cap(ABC)=BC\\(SBC)\supset SC \perp BC\\(ABC)\supset AC \perp BC\end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\widehat{SCA}=60^0$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB

Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$

Mà $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Mặt khác $\begin{cases} AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \mathbin{//} AB \mathbin{//} CD$

Mà $\begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ (SAB) \supset SH \perp Sx \\ (SCD) \supset SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \widehat{HSK}$, với K là trung điểm CD.

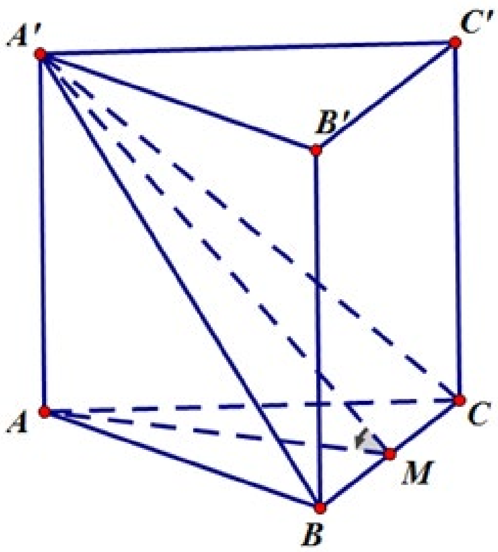
Xét tam giác HSK vuông tại H có: $\tan \widehat{HSK} = \dfrac{HK}{SH} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \tan\left(\widehat{(SAB),(SCD)}\right) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC.

Tam giác ABC đều nên ta có: $AM \perp BC$.

$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp BC$.

Từ và ta suy ra $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Ta lại có $(ABC) \cap (A'BC) = BC$.

$\Rightarrow \left(\widehat{(A'BC);(ABC)}\right) = \left(\widehat{AM;A'M}\right) = \widehat{A'MA} = \varphi$

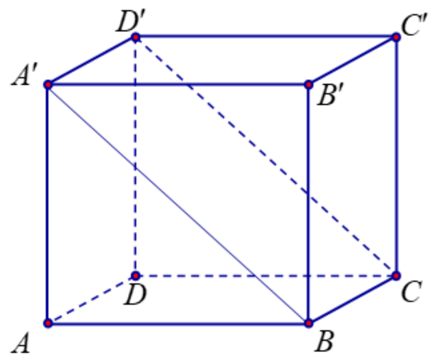
Ta có: $\tan\varphi = \dfrac{AA'}{AM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\varphi = 30°$.

Câu 37: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a$, $AC = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Ta có: $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật

$$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ BA' \perp BC \\ (ABCD) \cap (A'D'CB) = BC \end{cases}$$

$\Rightarrow$ góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABA'}$.

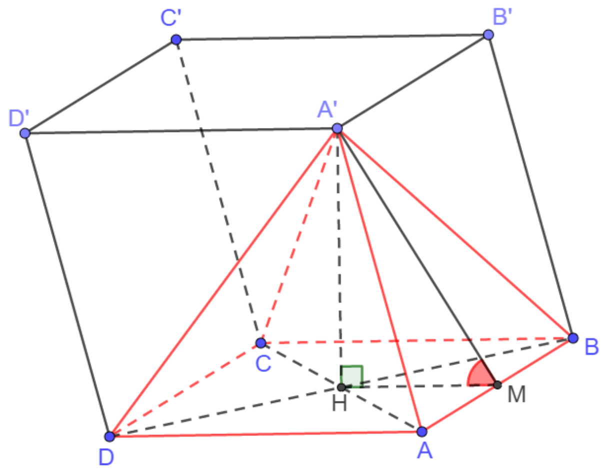
$$\tan\widehat{A'BA} = \frac{A'A}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AC^2 - BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{A'BA} = 45°.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $45°$.

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trùng với giao điểm H của hai đường chéo AC và BD, $A'H = a\sqrt{3}$. Góc giữa mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của hình hộp bằng

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $75°$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB.

Ta có: $(ABB'A') \cap (ABCD) = AB$.

Mặt khác

$HM \perp AB$.

$A'M \perp AB$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy là góc $\widehat{A'MH}$.

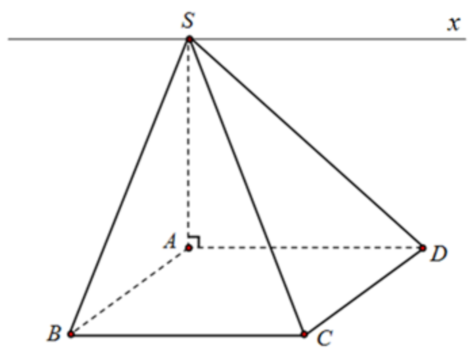
$$\tan \widehat{A'MH} = \frac{A'H}{HM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{A'MH} = 60°.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy bằng $60°$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$

Lời giải



Ta có: $(SBC) \cap (SAD) = Sx \,//\, BC \,//\, AD$

Ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow Sx \perp SB$

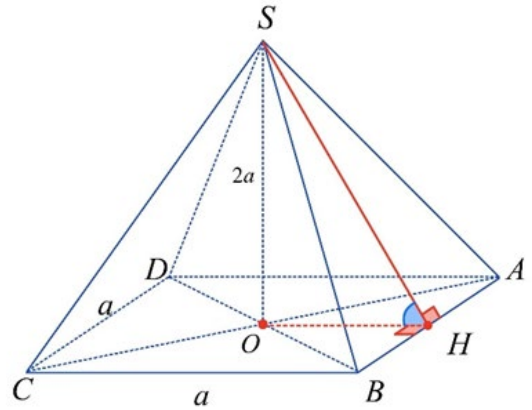
Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow SA \perp Sx$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $\widehat{BSA} = 45°$.

Câu 40: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = \dfrac{1}{4}$. **B.** $\tan\alpha = 1$. **C.** $\tan\alpha = 4$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO$ là đường cao của hình chóp đều $S.ABCD \Rightarrow SO = 2a$

Ta có: $AB = (SAB) \cap (ABCD)$ (1)

Gọi H là trung điểm AB

Mà ΔSAB cân tại $S \Rightarrow$ SH là đường cao ΔSAB

$\Rightarrow SH \perp AB$ (2)

Lại có: OH là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow OH \perp AB$ (3)

Và $OH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}$

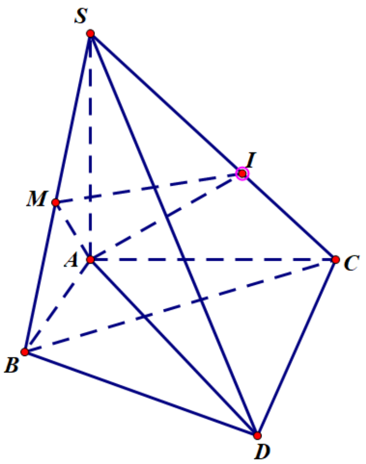
Từ (1),(2),(3), suy ra $\alpha = \widehat{((SAB);(ABCD))} = \widehat{SHO}$

Xét ΔSOH vuông tại $O \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{SO}{OH} = \dfrac{2a}{\frac{a}{2}} = 4$.

Câu 41: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = \dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Đáy ABC có $BC = a$ và $\widehat{BAC} = 150°$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 30^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Gọi điểm $D \in (ABC)$ sao cho $DB \perp AB; DC \perp AC$

Ta chứng minh được $BD \perp (SAB) \Rightarrow AM \perp (SBD) \Rightarrow SD \perp AM$

Tương tự: $SD \perp AN$

Vậy $SD \perp (AMN)$; mà $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (ABC) là góc giữa SA và SD.

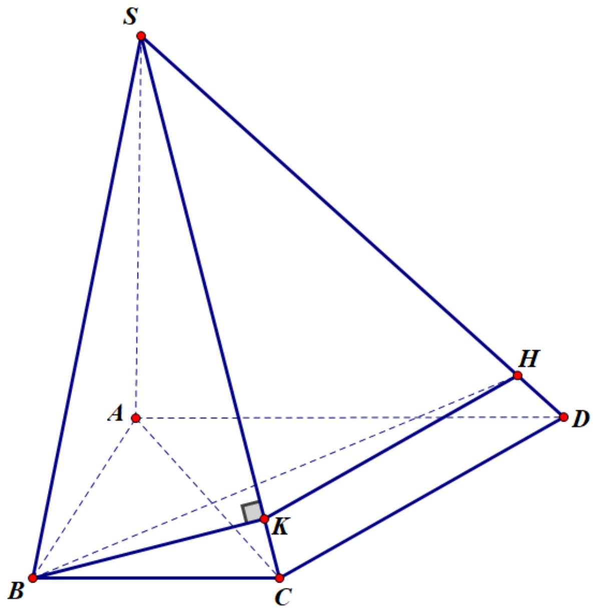
Xét tứ giác $ABDC$ là tứ giác nội tiếp và có $AD = 2R = \dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = 2a$.

Xét tam giác vuông SAD, có $\tan \widehat{ASD} = \dfrac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASD} = 60°$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng

A. 30^0. **B.** 150^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Ta có:

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{5}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{3}; CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C do

$SC^2 + CD^2 = SD^2 \Rightarrow SC \perp CD$

ΔSAB **có** $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$

Ta có $\Delta SBC : SC^2 = SB^2 + BC^2 \Rightarrow \Delta SBC$ vuông

Trong ΔSBC kẻ $BK \perp SC = K$

Ta có $CD \perp (SAC)$ suy ra $CD \perp SC$

Trong ΔSCD có $CD \perp SC$, từ K kẻ $KH // CD$

Góc giữa và là góc giữa BK và KH

Xét ΔSBC có $BK.SC = SB.BC \Rightarrow BK = \dfrac{a\sqrt{2}.a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Xét ΔSBK có $SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Trong ΔSCD có KH song song với CD nên theo định lý Talet

$\dfrac{SH}{SD} = \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{KH}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow KH = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}; SH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$

Xét ΔSBD theo định lý cosin trong tam giác: (ΔSBD có $SB = a\sqrt{2}; SD = BD = a\sqrt{5}$)

$\cos BSD = \dfrac{SB^2 + SD^2 - BD^2}{2.SB.SD} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ mà

$\cos BSH = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{SB^2 + SH^2 - BH^2}{2.SB.SH} \Rightarrow BH = \dfrac{a\sqrt{26}}{3}$

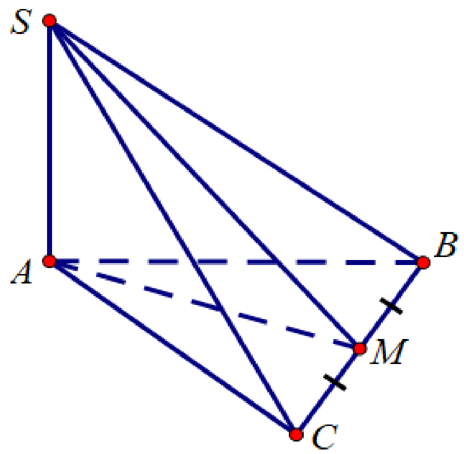
$\cos BKH = \dfrac{KB^2 + KH^2 - BH^2}{2.KB.KH} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

Suy ra góc BKH bằng 150^o do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) bằng 30^0.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, các mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, $SA = \frac{a}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 45^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Do các mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy suy ra $SA \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do tam giác ABC đều, nên ta có $AM \perp BC$. Do đó $BC \perp (SAM)$ suy ra $BC \perp SM$.

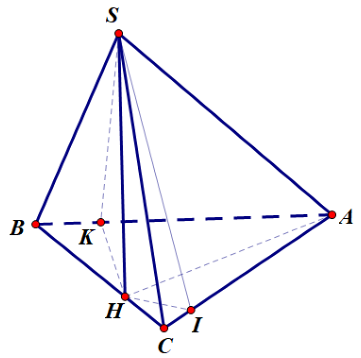
Từ đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SMA}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A, ta có: $\tan \widehat{SMA} = \dfrac{SA}{AM} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{SMA} = 30^0$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 1. Mặt bên SBC là tam giác nhọn và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Các mặt phẳng $(SAB),(SAC)$ lần lượt tạo với đáy các góc 60^o và 30^o. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC). Tính $\sin\varphi$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{61}}{8}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{61}}{28}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{235}}{28}$.

Lời giải



Kẻ $SH \perp BC, HK \perp AB, HI \perp AC$.

Ta có: $\widehat{SKH} = 60^o \Rightarrow HK = SH.\cot 60^o = \dfrac{SH}{\sqrt{3}}$

$\widehat{SIH} = 30^o \Rightarrow HI = SH.\cot 30^0 = SH.\sqrt{3}$

$\Rightarrow HI = 3HK \; hay \; CH = 3BH$

$\Rightarrow HK = BH\sin 60^o = \dfrac{1}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ và $SK = 2HK = \dfrac{\sqrt{3}}{4}; SH = HK\sqrt{3} = \dfrac{3}{8}$

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{8}.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{32}(dvtt)$

Xét $\Delta SHA: SH = \dfrac{3}{8}; HA = \dfrac{\sqrt{13}}{4}$ nên $SA = \dfrac{\sqrt{61}}{8}$

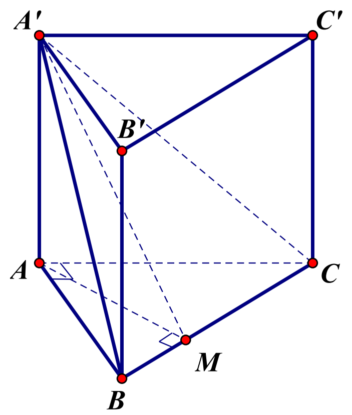
Mặt khác, $V_{SABC} = \dfrac{2S_{SAB}.S_{SAC}.\sin\varphi}{3SA}$ nên thay vào ta tính được

$$\sin\varphi = \dfrac{3.\dfrac{\sqrt{3}}{32}.\dfrac{\sqrt{61}}{8}}{2.\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{61}}{8}$$

Câu 45: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a,\ AC = a\sqrt{3}$. Ký hiệu φ là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$. Tính $\tan\varphi$.

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Kẻ $AM \perp BC$ tại M. Lại có $AA' \perp BC$. Suy ra $BC \perp (AMA') \Rightarrow BC \perp A'M$.

Suy ra $((A'BC),(BB'C'C)) = (A'M, AM) = \widehat{A'MA} = \varphi$.

Xét ΔABC vuông tại A có AM là đường cao.

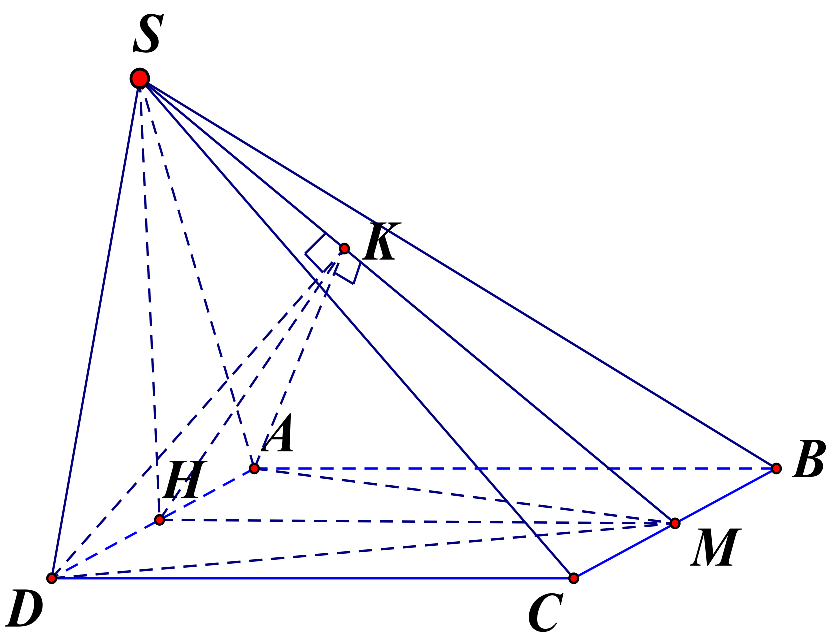
$$\Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\varphi = \frac{A'A}{AM} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} == \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 46: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, tam giác SAD cân tại S nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy và có đường cao $SH = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC. Giá trị tang của góc giữa hai mặt phẳng (SDM) và (SAM) bằng

A. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{4\sqrt{21}}{5}$. **C.** $\frac{4\sqrt{21}}{42}$. **D.** $\frac{7\sqrt{21}}{21}$.

Lời giải



Ta có: Kẻ $DK \perp SM \Rightarrow AK \perp SM$.

Suy ra: $\widehat{((SDM);(SAM))} = \widehat{(DK;AK)} = \widehat{DKA}$

Trong ΔSHM vuông tại H,

+ $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{3a^2 + 4a^2} = a\sqrt{7}$.

+ $HK.SM = SH.HM$

$\Rightarrow HK = \dfrac{SH.HM}{SM} = \dfrac{a\sqrt{3}.2a}{a\sqrt{7}} = \dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

+ ΔDAK cân tại K

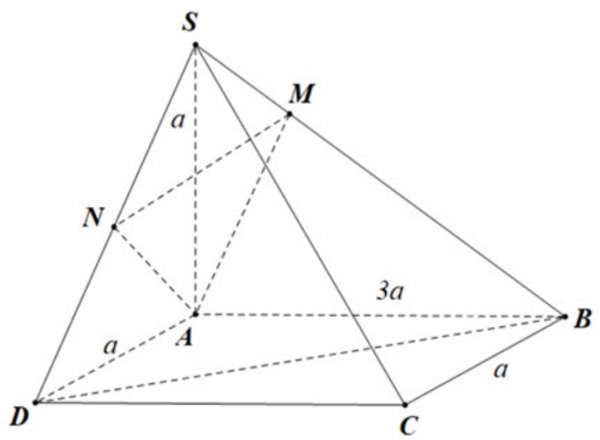
$\tan\widehat{DKH} = \dfrac{DH}{HK} = a\dfrac{7}{2a\sqrt{21}}. = \dfrac{7\sqrt{21}}{42}$.

Vậy $\tan\widehat{DKA} = \dfrac{2\tan\widehat{DKH}}{1-\left(\tan\widehat{DKH}\right)^2} = \dfrac{2.\dfrac{7\sqrt{21}}{42}}{1-\left(\dfrac{7\sqrt{21}}{42}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{21}}{5}$.

Câu 47: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành $AB = 3a$, $AD = a$, $\widehat{BAD} = 120^0$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là điểm trên cạnh SB sao cho $SM = \dfrac{1}{10}SB$, N là trung điểm của SD. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$

A. $\dfrac{\sqrt{165}}{55}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{715}}{55}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

Lời giải



Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{10} \Rightarrow SM = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Lại có: $SB.SM = a^2 = SA^2 \Rightarrow AM \perp SB$. Do $SA = AD = a \Rightarrow AN \perp SD$.

Mặt khác: Xét ΔABD có: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.COS120^0 = 9a^2 + a^2 + 2.3a.a.\frac{1}{2} = 13a^2$

$\Rightarrow BD = a\sqrt{13}$.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD có đường kính AK

$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp BK \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAB) \Rightarrow BK \perp AM$.

Do đó $AM \perp (SBK) \Rightarrow AM \perp SK$.

Lý luận tương tự: $AN \perp SK$. Suy ra $SK \perp (AMN)$.

Theo giả thiết: $SA \perp (ABCD)$, suy ra $\widehat{((AMN)(ABCD))} = \widehat{(SA;SK)} = \widehat{ASK}$.

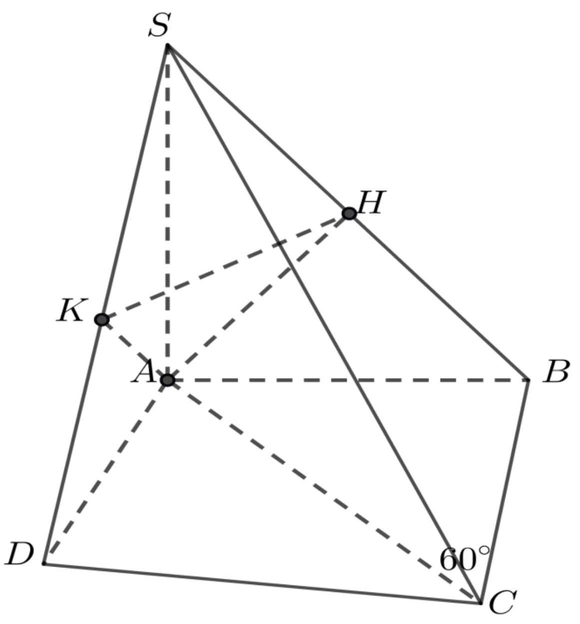
Áp dụng định lý sin vào $\Delta ABD \Rightarrow AK = 2R = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{a\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Xét ΔSAK có: $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \frac{a\sqrt{55}}{\sqrt{3}}$ và $\cos \widehat{ASK} = \frac{SA}{SK} = \frac{\sqrt{165}}{55}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = AB\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính $AC, \widehat{ACB} = 60°$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD. Tính tan của góc hợp bởi mặt phẳng (AHK) và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Từ giả thiết: $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AC nên tam giác ABC vuông tại B và tam giác ADC vuông tại D, do đó $AB \perp BC, AD \perp DC$.

Nhận thấy: $AH \perp SB$, mà $AH \perp BC$

$\Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Lại có: $AK \perp SD$, mà $AK \perp CD$

$\Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$

Từ $(1),(2)$ suy ra $SC \perp (AHK)$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD)$

Ta được góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ là góc giữa hai đường thẳng SA, SC.

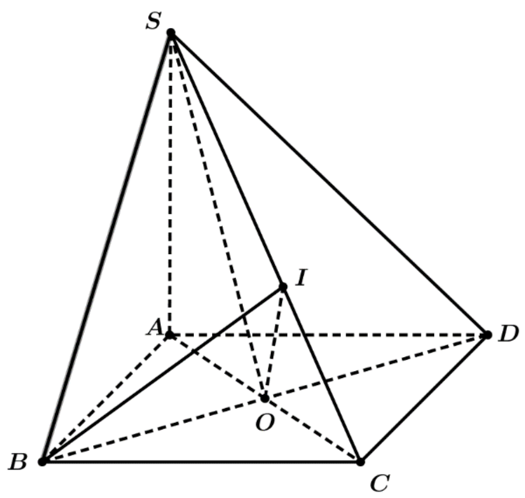
$\Rightarrow ((AHK),(ABCD)) = \widehat{ASC}$

Ta có: $\tan \widehat{ASC} = \dfrac{AC}{AS} = \dfrac{\dfrac{AB}{\sin 60^\circ}}{AB\sqrt{3}} = \dfrac{\dfrac{\frac{AB}{\sqrt{3}}}{2}}{AB\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan\alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa (SAC) và (SBC) bằng

A. 90°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 30°.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD

◎ Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SO$

◎ Do đó: $\begin{cases} (SBD)\cap(ABCD)=BD \\ AC\perp BD, AC\subset(ABCD) \\ SO\perp BD, SO\subset(SBD) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBD),(ABCD)}\right)=\left(\widehat{AO,SO}\right)=\widehat{SOA}=\alpha$

◎ ΔSAO vuông tại A có: $\tan\alpha=\dfrac{SA}{AO}\Rightarrow SA=AO.\tan\alpha=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=a$

◎ Trong ΔSOC kẻ đường cao $OI,(I\in SC)$

◎ Ta có: $\begin{cases} SC\perp OI \\ SC\perp BD,(BD\perp(SAC)) \end{cases} \Rightarrow SC\perp(BIO)\Rightarrow SC\perp BI$

◎ Do đó: $\begin{cases} (SAC)\cap(SBC)=SC \\ OI\perp SC, OI\subset(SAC) \\ BI\perp SC, BI\subset(SBC) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(SAC)}\right)=\left(\widehat{OI,BI}\right)=\widehat{BIO}$

◎ $\Delta ICO\sim\Delta ACS(g-g)\Rightarrow\dfrac{IO}{AS}=\dfrac{CO}{CS}\Rightarrow IO=AS\cdot\dfrac{CO}{\sqrt{AC^2+AS^2}}=a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2.\sqrt{2a^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

◎ $\Delta BOI:\tan BIO=\dfrac{BO}{OI}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{BIO}=60^\circ$

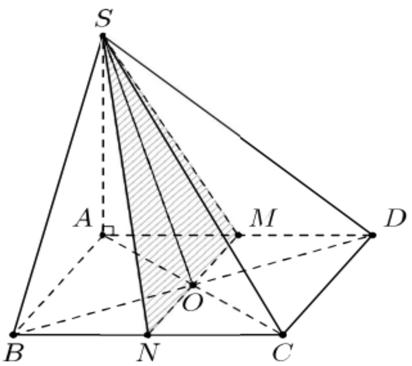
Vậy $\left(\widehat{(SBC),(SAC)}\right)=60^0$

DẠNG 3: DỰNG MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG CHO TRƯỚC. THIẾT DIỆN, DIỆN TÍCH THIẾT DIỆN

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O với $AB=a; AD=2a$. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua SO và vuông góc với (SAD). Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp đã cho

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$. **C.** $S=\dfrac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Lời giải



Gọi $M;N$ lần lượt là trung điểm $AD;BC$. Khi đó MN đi qua O và

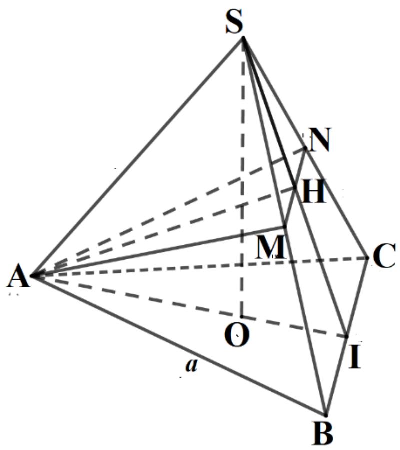
$\begin{cases} MN \perp AD \\ MN \perp SA \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD)$

Từ đó suy ra $(\alpha) \equiv (SMN)$ và thiết diện cần tìm là tam giác SMN .Tam giác SMN vuông tại M nên $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2}SM.MN = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2}.AB = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC. Biết mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC). Tính diện tích tam giác AMN theo a.

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{24}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

Lời giải



Ta thấy do hình chóp $S.ABC$ đỉnh S là chóp tam giác đều nên $AB = BC = AC = a$.

$\Delta SAB = \Delta SAC(c.c.c) \Rightarrow AM = AN.$

Do đó tam giác AMN cân tại A. Gọi H là trung điểm của MN thì $AH \perp MN$ và I là trung điểm của BC.

$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ Trong\,(AMN): AH \perp MN \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SH; AH \perp SI$ Xét tam giác SAI có đường AH vừa là trung tuyến vừa là đường cao nên tam giác SAI cân tại A.

Tam giác ABC đều cạnh $a \Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2} = SA = SB.$

Xét tam giác SBI vuông tại I nên $SI = \sqrt{SB^2 - BI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Ta có: $SH = \frac{1}{2}SI = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Xét tam giác ASH vuông tại H nên $AH=\sqrt{SA^2-SH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{8}}=\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.

Vậy $S_{AMN}=\frac{1}{2}.AH.MN=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}.\frac{a}{2}=\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

I LÝ THUYẾT.

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Định nghĩa

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dại đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a, kí hiệu $d\left(M,a\right)$. Vậy $d\left(M,a\right)=MH$.

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $\left(P\right)$ thì độ dại đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(P\right)$, kí hiệu $d\left(M,\left(P\right)\right)$. Vậy $d\left(M,\left(P\right)\right)=MH$

Chú ý:

Ta quy ước:
- $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a;
- $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P).

Nhận xét:

a) Lấy điểm N tuỳ ý trên đường thẳng a, ta luôn có $d(M, a) \leq MN$.

b) Lấy điểm N tuỳ ý trên mặt phẳng (P), ta luôn có $d(M, (P)) \leq MN$.

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a **và** b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b, kí hiệu $d\left(a,b\right)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng a **và mặt phẳng** $\left(P\right)$ **song song với** a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến $\left(P\right)$, kí hiệu $d\left(a,\left(P\right)\right)$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $\left(P\right)$ **và** $\left(Q\right)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì trên $\left(P\right)$ đến $\left(Q\right)$, kí hiệu $d\left(\left(P\right),\left(Q\right)\right)$.

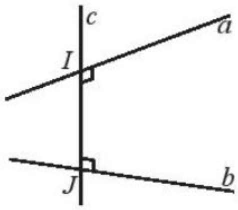
3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định nghĩa

Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là ***đường vuông góc chung*** của a và b.

Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là ***đoạn vuông góc chung*** của a và b.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

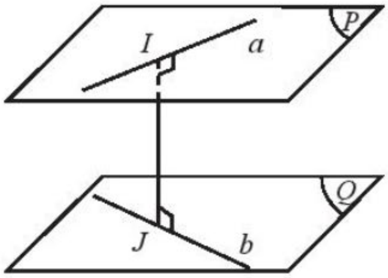


Hình 7

Chú ý:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.

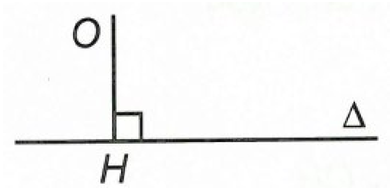
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 8

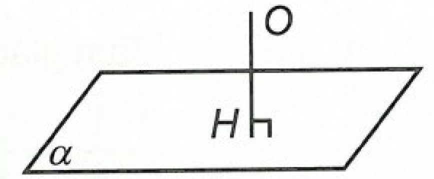
SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng



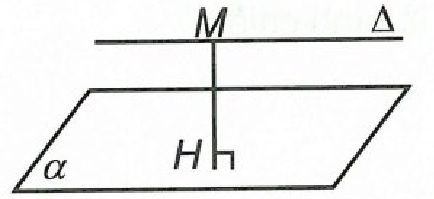
$d(O,\Delta) = OH$

Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng



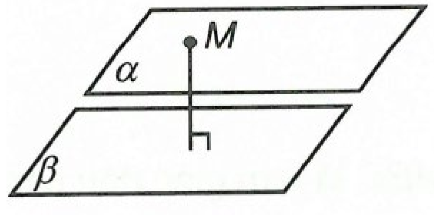
$d(O,(\alpha)) = OH$

Khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng



$d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha))$

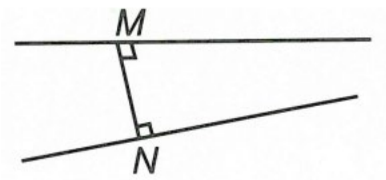
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song



$d((\alpha);(\beta)) = d(M;(\beta))$

$\forall M \in (\alpha)$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



$d(a,b) = MN$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Bài toán: Xác định khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P).

Bước 1. Xác định hình chiếu H của O trên (α).

+) Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α).

+) Tìm giao tuyến (α) của (P) và (α).

+) Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó $d(O;(\alpha)) = OH$.

Bước 2. Tính OH.

Lưu ý: Tính chất của tứ diện vuông.

Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O.

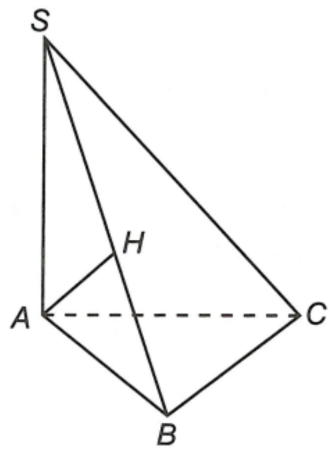
$(OA \perp OB; OB \perp OC; OC \perp OA)$ và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Ví dụ. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a, SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^O. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Hướng dẫn giải

Ta có



$AH \perp SB; AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH = d(A.(SBC))$.

Tam giác SAB vuông tại A nên

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A’ và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ D’ đến mặt phẳng $(A'ACC')$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^o, BA=BC=a; AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và (SAD) bằng 30^o. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA=2a$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $BC=a\sqrt{2}, \widehat{ABC=60^o}$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) bằng

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $BC=2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB=a, BC=2a$. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45^o. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB=a, BC=2a, SA=a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SA**B.** Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAC) bằng

Câu 10: Cho tứ diện đều ABCD, biết khoảng cách A đến mặt phẳng (BCD) bằng $a\sqrt{6}$. Diện tích tam giác ABC bằng

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^o. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông tâm O có cạnh a. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^o. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=120^o$, biết SC hợp với đáy một góc 45^o. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD), SA=a, ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60^o$. Gọi G là trọng tâm tam giác SB**C.** Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD) bằng

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45^o. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABCD là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SB vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SB = 2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng 2a. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = 2a, BB' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh bằng $a, \widehat{BAD} = 60^o, SO \perp (ABCD), SO = a$. Khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC) bằng

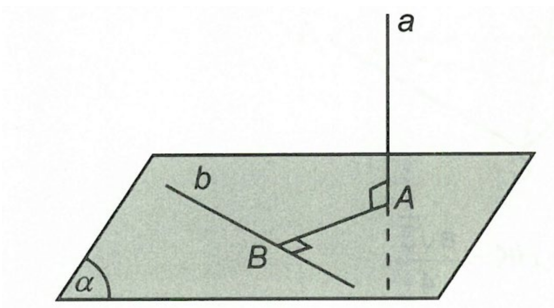
DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

BÀI TOÁN 1. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU a VÀ b TRƯỜNG HỢP $a \perp b$

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựng mặt phẳng (α) chứa b và vuông góc với a tại **A.**

Dựng $AB \perp b$ tại b



AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2 BÀI TẬP.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; cạnh bên SA vuông góc với đáy; SC hợp với đáy góc 45^o. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy.

Tính theo a khoảng cách hai đường thẳng SA, BC.

BÀI TOÁN 2. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU A VÀ B KHÔNG VUÔNG GÓC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1.

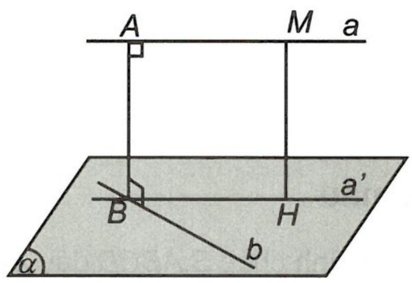
Dựng mặt phẳng (α) chứa b và song song với a.

Chọn điểm M thích hợp trên a, dựng $MH \perp (\alpha)$ tại H.

Qua H, dựng đường thẳng $a'//a$, cắt b tại **B.**

Từ B dựng đường thẳng song song MH, cắt a tại **A.**

AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



Cách 2.

Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a tại M.

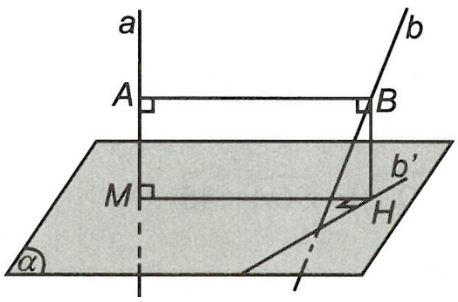
Dựng hình chiếu b’ trên b lên (α).

Dựng hình chiếu vuông góc H của M lên b’.

Từ H, dựng đượng thẳng song song với a, cắt b tại **B.**

Qua B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại **A.**

AB là đoạn vuông góc chung của a và b.



2 BÀI TẬP.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Câu 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, BC = 2a$, mặt bên ACC’A’ là hình vuông. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AC, CC', A'B'$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MP và HN.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy SA vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa SB và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = a, CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 bằng

Câu 29: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = a, CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC_1 bằng

Câu 30: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai dường thẳng SA và BC bằng

Câu 31: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và $D, SA \perp (ABCD), AD = DC = SA = a.$ Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa hai đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a bằng

Câu 34: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại $A, AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình thoi tam O, cạnh a, góc $\widehat{BCD} = 60^o$, có SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

Câu 37: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và $A'B'$ bằng

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

I LÝ THUYẾT.

1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Định nghĩa

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng a thì độ dại đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến đường thẳng a, kí hiệu $d(M,a)$. Vậy $d(M,a)=MH$.

Nếu H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (P) thì độ dại đoạn MH được gọi là khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P), kí hiệu $d(M,(P))$. Vậy $d(M,(P))=MH$

Chú ý:

Ta quy ước:
- $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc a;
- $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi M thuộc (P).

Nhận xét:

a) Lấy điểm N tuỳ ý trên đường thẳng a, ta luôn có $d(M, a) \le MN$.

b) Lấy điểm N tuỳ ý trên mặt phẳng (P), ta luôn có $d(M, (P)) \le MN$.

2. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song a **và** b là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến b, kí hiệu $d(a,b)$.

Khoảng cách giữa đường thẳng a **và mặt phẳng** (P) **song song với** a là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P), kí hiệu $d(a,(P))$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) **và** (Q) là khoảng cách từ một điểm bất kì trên (P) đến (Q), kí hiệu $d((P),(Q))$.

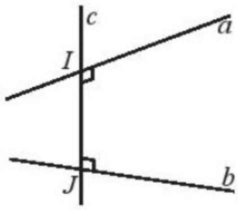
3. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định nghĩa

Đường thẳng c vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b được gọi là ***đường vuông góc chung*** của a và b.

Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b cắt chúng lần lượt tại I và J thì đoạn IJ gọi là ***đoạn vuông góc chung*** của a và b.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

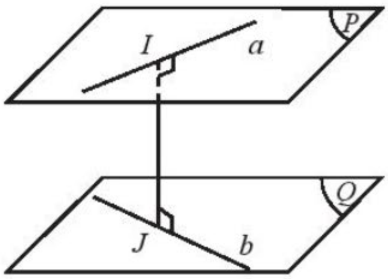


Hình 7

Chú ý:

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.

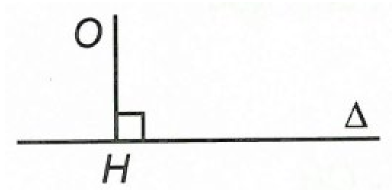
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 8

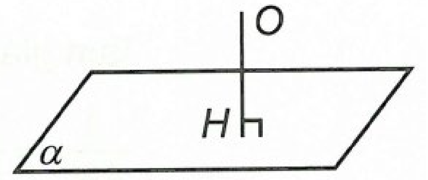
SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng



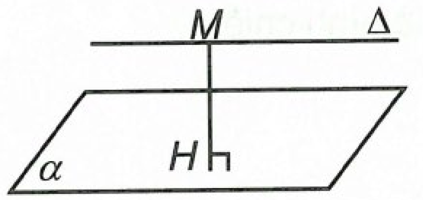
$d\left(O,\Delta\right)=OH$

Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng



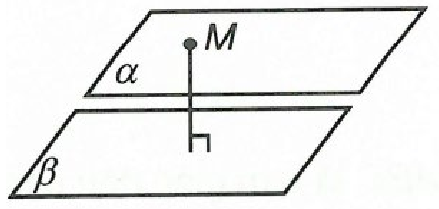
$d\left(O,\left(\alpha\right)\right)=OH$

Khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng



$d\left(\Delta,\left(\alpha\right)\right)=d\left(M,\left(\alpha\right)\right)$

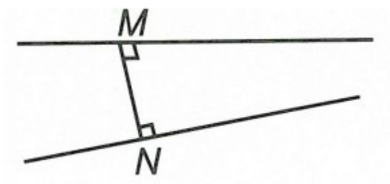
Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song



$d\left(\left(\alpha\right);\left(\beta\right)\right)=d\left(M;\left(\beta\right)\right)$

$\forall M\in\left(\alpha\right)$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



$d\left(a,b\right)=MN$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Bài toán: Xác định khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (P).

Bước 1. Xác định hình chiếu H của O trên (α).

+) Dựng mặt phẳng (P) chứa O và vuông góc với (α).

+) Tìm giao tuyến (α) của (P) và (α).

+) Kẻ $OH \perp \Delta (H \in \Delta)$. Khi đó $d(O;(\alpha)) = OH$.

Bước 2. Tính OH.

Lưu ý: Tính chất của tứ diện vuông.

Giả sử OABC là tứ diện vuông tại O.

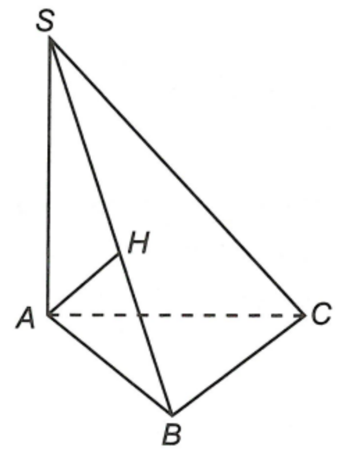
$(OA \perp OB; OB \perp OC; OC \perp OA)$ và H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC).

Khi đó ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Ví dụ. Khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $AB = a, SA \perp (ABC)$. Góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60^O. Tính khoảng cách từ A đến (SBC).

Hướng dẫn giải

Ta có



$AH \perp SB; AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH = d(A.(SBC))$.

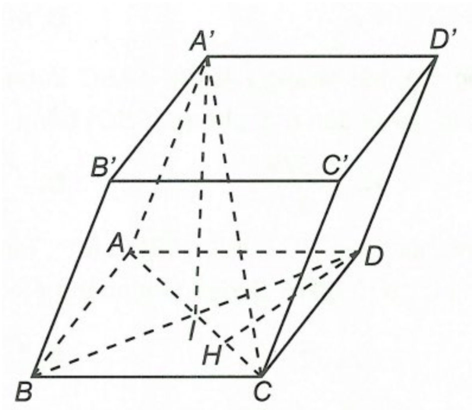
Tam giác SAB vuông tại A nên

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AD = a\sqrt{3}$. Tam giác $A'AC$ vuông cân tại A' và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng $A'A = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ D' đến mặt phẳng $(A'ACC')$

Lời giải



Trong $(A'AC)$, kẻ $A'I \perp AC$.

Vì $(A'AC) \perp (ABCD)$ và $(A'AC) \cap (ABCD) = AC$ nên $A'I \perp (ABCD)$.

Vì $DD' /\!/ AA'$ nên $DD' /\!/ (A'ACC') \Rightarrow d(D',(A'AC)) = d(D,(A'AC))$

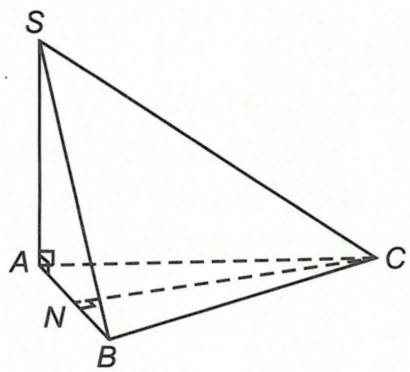
Kẻ $DH \perp AC$.

Ta có $AC = A'A\sqrt{2} = 2a \Rightarrow CD = a$.

Suy ra $d(D,(A'AC)) = DH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

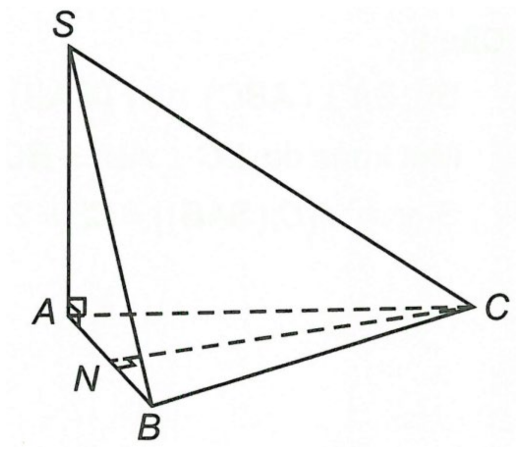
Dựng $CN \perp AB \Rightarrow CN \perp (SAB) \Rightarrow d(C;(SAB)) = CN$.

Do ΔABC đều cạnh a nên $CN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(C;(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



Do $SA\perp(ABC)\Rightarrow(SAB)\perp(ABC)$.

Dựng $CN\perp AB\Rightarrow CN\perp(SAB)\Rightarrow d(C;(SAB))=CN$.

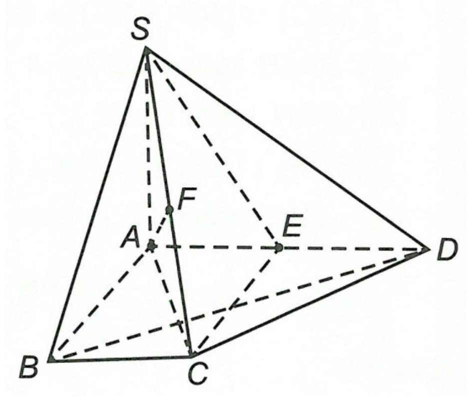
Do ΔABC đều cạnh bằng a nên $CN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do M là trung điểm BC nên

$d(M;(SAB))=\dfrac{1}{2}d(C;(SAB))=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang, $\widehat{ABC}=\widehat{BAD}=90^o, BA=BC=a; AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và (SAD) bằng 30^o. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

Lời giải



Gọi E là trung điểm A**D.**

Khi đó ABCE là hình vuông cạnh a. Suy ra $CE\perp AD$.

Lại có $CE\perp SA$.

Do đó $CE\perp(SAD)\Rightarrow\widehat{CSE}=\widehat{(SC,(SAD))}=30^o$.

Lại có: $SC.\sin 30^o=CE=a\Rightarrow SC=2a$.

ΔABC vuông cân tại B nên $AC=a\sqrt{2}$.

Ta có $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=a\sqrt{2}$.

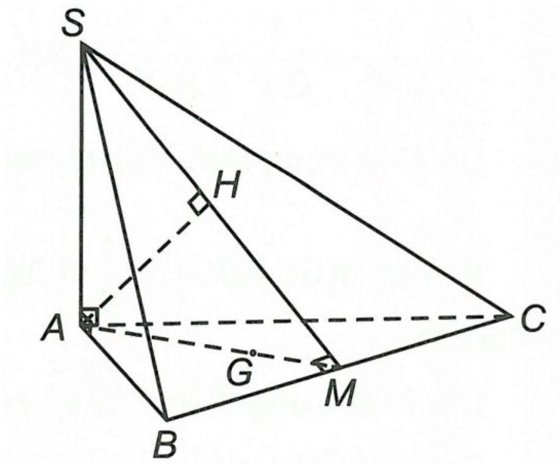
Do $CE = \frac{1}{2}AD$ nên ΔACD vuông tại $C \Rightarrow AC \perp CD.$

Dựng $AF \perp SC.$

Ta có: $d\left(A,\left(SCD\right)\right) = AF = \frac{SA.SC}{SC} = \frac{a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2a} = a.$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABC\right), \Delta ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a, $SA = 2a$. Gọi G là trọng tâm ΔABC. Khoảng cách từ G đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, H là hình chiếu vuông góc của A trêm SM.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAM\right) \Rightarrow \left(SBC\right) \perp \left(SAM\right).$

$\Rightarrow AH \perp \left(SBC\right) \Rightarrow d\left(A;\left(SBC\right)\right) = AH.$

Xét ΔSAM vuông tại A có

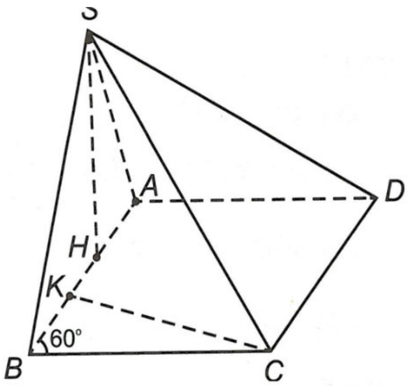
$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{57}}{6}.$

Do G là trọng tâm ΔABC nên $\frac{GM}{MA} = \frac{1}{3}.$

Suy ra $d\left(G;\left(SBC\right)\right) = \frac{1}{3}d\left(A;\left(SBC\right)\right) = \frac{\sqrt{57}a}{18}.$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành với $BC = a\sqrt{2}, \widehat{ABC} = 60^o$. Tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng

Lời giải



Dựng $SH \perp AB$.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

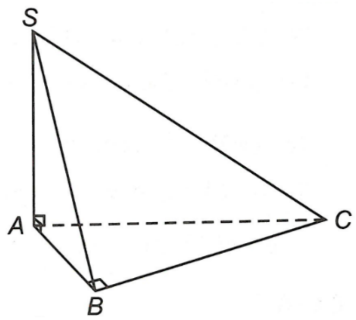
Dựng $CK \perp AB$. Vì $CK \perp SH$ nên $CK \perp (SAB)$.

Do $CD /\!/ AB$ nên $d(D,(SAB)) = d(C,(SAB)) = CK$

$= BC\sin 60^o = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $BC = 2a$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



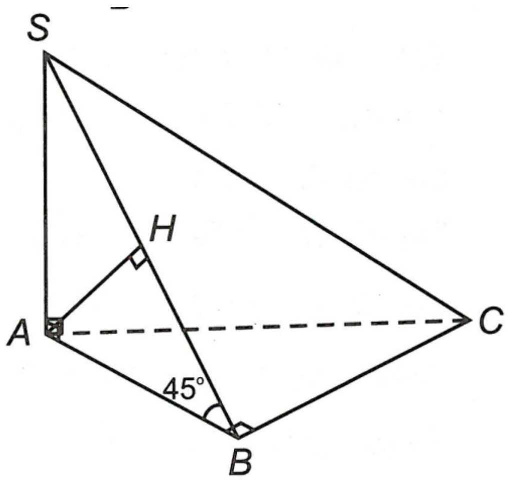
Do $SA \perp (ABC)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

Mặt khác do $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra $d(C;(SAB)) = CB = 2a$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a$. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45^o. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên

$(ABC) \Rightarrow (SB;(ABC)) = \widehat{SBA} = 45^o$.

Vậy ΔSAB vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AB = a$.

Dựng $AH \perp SB$, ta có:

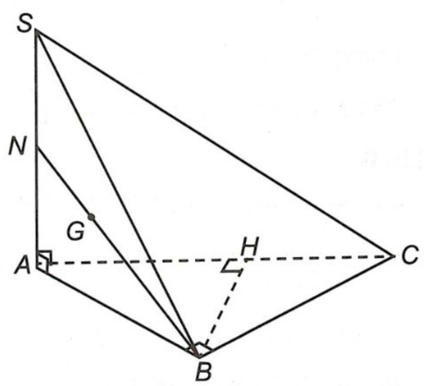
$(SAB) \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH$.

Xét ΔSAB vuông tại A nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABC), \Delta ABC$ là tam giác vuông tại B, $AB = a, BC = 2a, SA = a$. Gọi G là trọng tâm tam giác SA**B.** Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SAC) bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABC)$ nên $(SAC)(ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $BH \perp AC$.

Ta có $BH \perp (SAC)$. Suy ra $d(B;(SAC)) = BH$.

Xét ΔABC vuông tại B nên

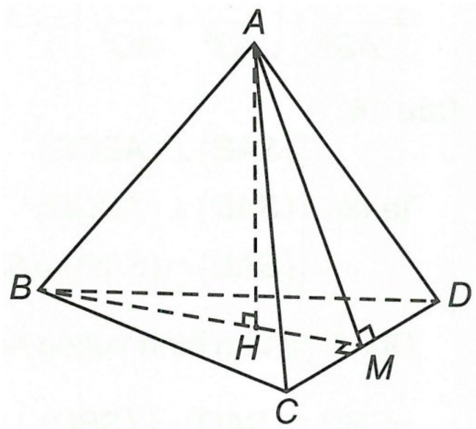
$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC^2} \Rightarrow BH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Do G là trọng tâm ΔSAB nên $\frac{NG}{NB}=\frac{1}{3}$.

Suy ra $d\left(G;\left(SBC\right)\right)=\frac{1}{3}d\left(A;\left(SBC\right)\right)=\frac{2\sqrt{5}a}{15}$.

Câu 10: Cho tứ diện đều ABCD, biết khoảng cách A đến mặt phẳng $\left(BCD\right)$ bằng $a\sqrt{6}$. Diện tích tam giác ABC bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm CD và H là hình chiếu vuông góc của A trên BM.

Áp dụng kết quả **câu 11**, ta có

$d\left(A;\left(BCD\right)\right)=AH$ và H là trọng tâm ΔBCD.

Xét ΔABH vuông tại H: $AH^2=AB^2-BH^2$

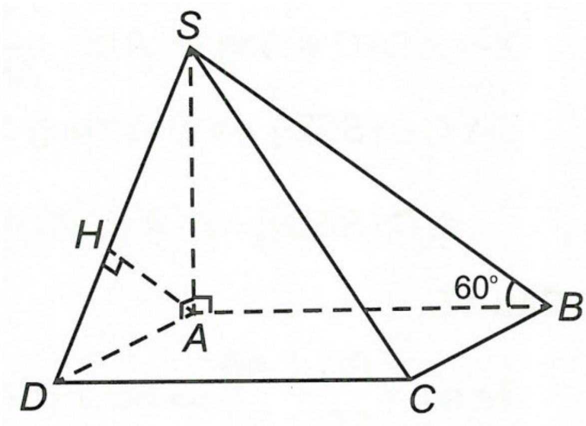
$\Leftrightarrow AH^2=AB^2-\left(\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}AB\right)^2$

$\Leftrightarrow 6a^2=\frac{2}{3}AB^2\Rightarrow AB=3a.$

Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}\left(3a\right)^2}{4}=\frac{9\sqrt{3}a^2}{4}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng 60^o. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng

Lời giải



Do $SA\perp(ABCD)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng

$(ABCD)\Rightarrow\widehat{(SB;(ABCD))}=\widehat{SBA}.$

Ta có: $\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow(SAB)\perp(SBC).$

Xét ΔSAB vuông tại $A: SA=AB\tan\widehat{SBA}=a\sqrt{3}.$

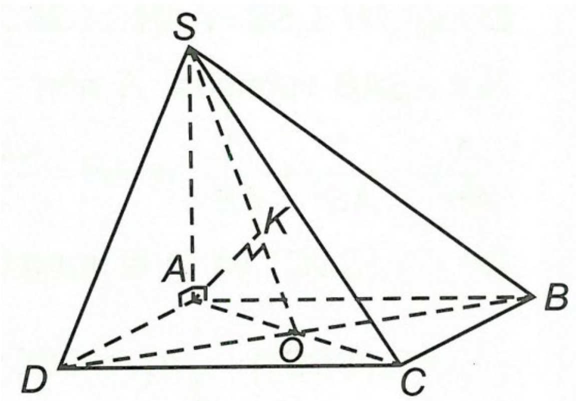
Dựng $AH\perp SD\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow d\left(A;(SCD)\right)=AH.$

Xét ΔSAD vuông tại $A:\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AD^2}\Rightarrow AH\dfrac{\sqrt{3}a}{2}.$

Do $AB/\!/CD$ nên $d\left(B;(SCD)\right)=d\left(A;(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD\Rightarrow\begin{cases}BD\perp OA\\BD\perp SA\end{cases}$

$\Rightarrow BD\perp(SAO)\Rightarrow(SBD)\perp(SAO).$

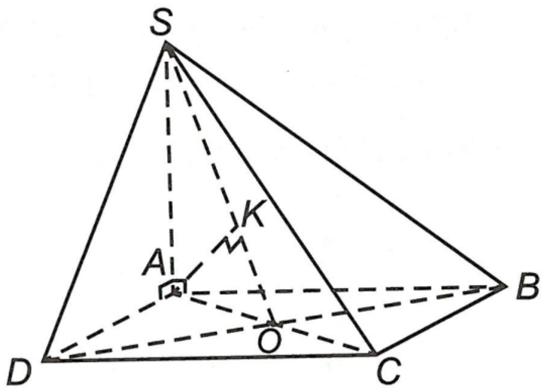
Dựng $AK\perp SO\Rightarrow AK\perp(SBD).$

Suy ra $d\left(A;(SBD)\right)=AK.$

Xét ΔSAO vuông tại $A: \dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AO^2}\Rightarrow AK=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAD)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(SAD)=SA\end{cases}\Rightarrow SA\perp(ABCD)$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD\Rightarrow\begin{cases}BD\perp OA\\BD\perp SA\end{cases}$

$\Rightarrow BD\perp(SAO)\Rightarrow(SBD)\perp(SAO)$.

Dựng $AK\perp SO\Rightarrow AK\perp(SBD)$.

Suy ra $d(A;(SBD))=AK$.

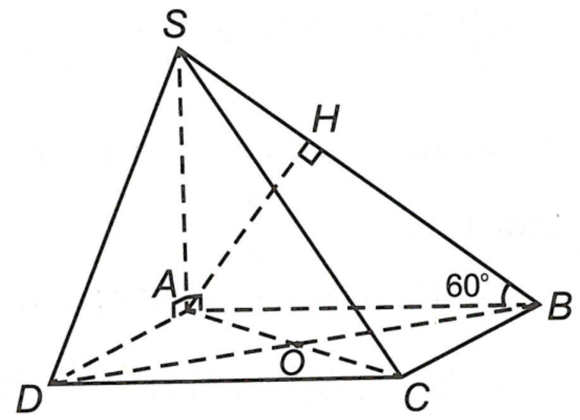
Xét ΔSAO vuông tại A có $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AO^2}\Rightarrow AK=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Do $O\in(SBD)$ và O là trung điểm AC nên

$d(C;(SBD))=d(A;(SBD))=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình vuông tâm O có cạnh a. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^o. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Suy ra $((SBC);(ABCD)) = \widehat{SBA}.$

Xét ΔSAB vuông tại $A: SA = AB \tan \widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$

Vì $BC \perp (SAB)$ nên $(SAB) \perp (SBC).$

Dựng $AH \perp SB \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH.$

Xét ΔSAB vuông tại A nên

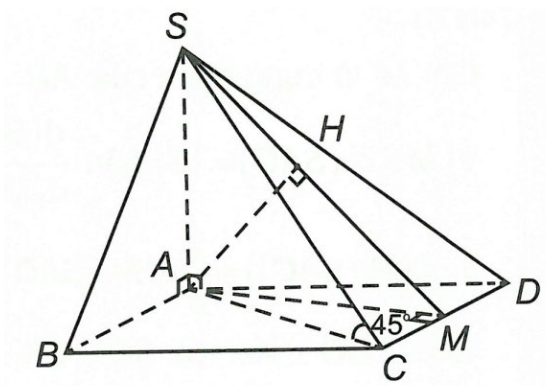
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Do $C \in (SBC)$ và O là trung điểm AC nên

$$d(O;(SBC)) = \frac{1}{2} d(A;(SBC)) = \frac{\sqrt{3}a}{4}.$$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 120^o$, biết SC hợp với đáy một góc 45^o. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD).$

Tam giác ABC cân tại B và $\widehat{BAC} = 60^o$.

Suy ra $\Delta ABC, \Delta ACD$ đều.

Vậy $\widehat{(SC;(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^o \Rightarrow SA = AC = a$.

Gọi M là trung điểm của $CD \Rightarrow \begin{cases} CD \perp AM \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAM)$.

Dựng $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A;(SCD)) = AH$.

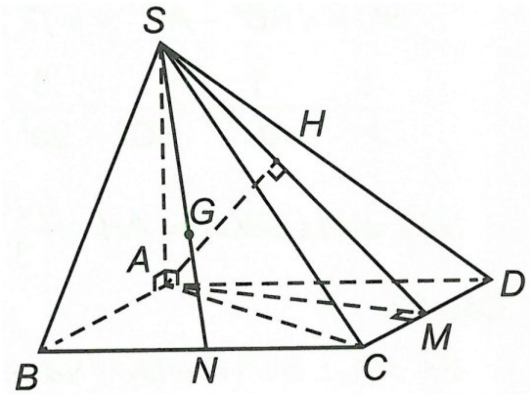
Xét ΔSAM vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Do $AB // (SCD)$ nên $d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD), SA = a, ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60^o$. Gọi G là trọng tâm tam giác SB**C.** Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



ΔABC cân tại B và $\widehat{ABC} = 60^o \Rightarrow \Delta ABC, \Delta ACD$ đều.

Gọi M là trung điểm $CD \Rightarrow CD \perp AM$.

Mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAM)$.

Dựng $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A;(SCD)) = AH$.

Xét ΔSAM vuông tại A:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

Do $AB // (SCD) \Rightarrow d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

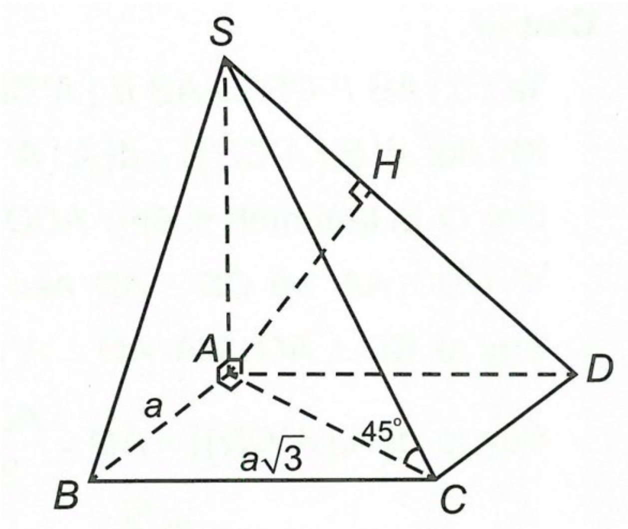
Gọi N là trung điểm BC nên $\frac{GS}{NS} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $d(G;(SCD)) = \frac{2}{3} d(N;(SCD))$

$=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}d\left(B;(SCD)\right)=\frac{1}{3}d\left(A;(SCD)\right)=\frac{\sqrt{21}a}{21}.$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $AB=a, BC=a\sqrt{3}, SA\perp(ABCD)$. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45^o. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



Vì $SA\perp(ABCD)$ nên $\widehat{\left(SC;(ABCD)\right)}=\widehat{SCA}=45^o$.

Kẻ $AH\perp SD\,(H\in SD)\,(1)$.

Ta có: $CD\perp AD$ và $CD\perp SA$.

Suy ra $CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AH\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp(SCD)$.

Do đó $d\left(A,(SCD)\right)=AH$.

Xét ΔABC vuông tại B có:

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a.$

Xét ΔSAC vuông tại A có:

$SA=AC.\tan 45^o=2a.$

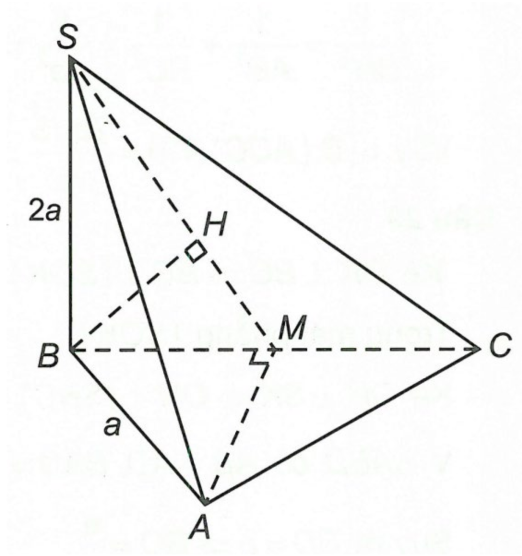
Xét ΔSAD vuông tại A có:

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{7}{12a^2}\Leftrightarrow AH=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$

Vậy $d\left(B,(SCD)\right)=AH=\frac{2a\sqrt{21}}{7}.$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABCD là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SB vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SB=2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAM) bằng

Lời giải



Ta có: $AM \perp BC$ (ΔABC đều); $AM \perp SB\left(do\ SB \perp (ABC)\right)$

Do đó $AM \perp (SBC)$.

Trong mặt phẳng (SBM), kẻ $BH \perp SM$.

Mà $BH \perp AM$ nên $BH \perp (SAM)$.

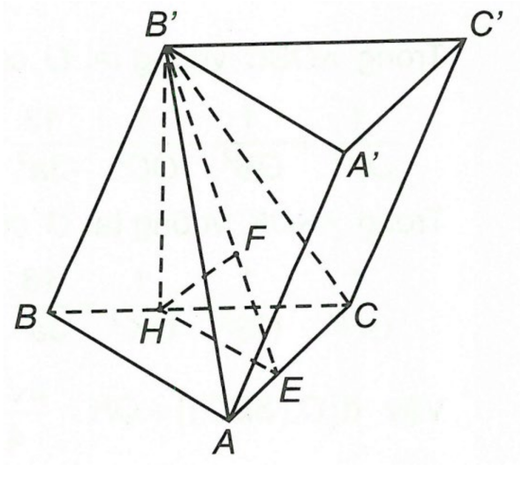
Suy ra $d\left(B,(SAM)\right) = BH$.

Xét ΔSBM vuông tại B có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{17}{4a^2} \Rightarrow BH = \frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

Câu 19: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với $AB = AC = 3a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy là điểm H thuộc BC sao cho $HC = 2HB$. Biết cạnh bên của lăng trụ bằng 2a. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(B'AC)$ bằng

Lời giải



Ta có: $BC = 3a\sqrt{2} \Rightarrow HB = a\sqrt{2}.$

Lại có $B'H = \sqrt{BB'^2 - HB^2} = a\sqrt{2}.$

Dựng $HE \perp AC; HF \perp B'E.$

Suy ra $HF \perp (B'AC) \Rightarrow d\left(H,(B'AC)\right) = HF.$

Ta có $\frac{HE}{AB}=\frac{CH}{BC}=\frac{2}{3}\Rightarrow HE=2a.$

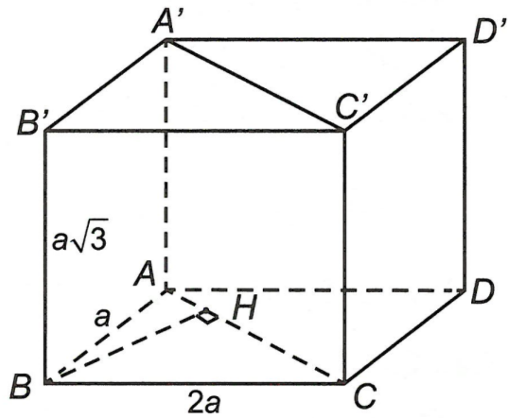
Suy ra $\frac{1}{HF^2}=\frac{1}{HE^2}+\frac{1}{B'H^2}\Rightarrow HF=\frac{HE.B'H}{\sqrt{HE^2+B'H^2}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.$

Mặt khác $\frac{d\left(B,\left(B'AC\right)\right)}{d\left(H,\left(B'AC\right)\right)}=\frac{BC}{HC}=\frac{3}{2}.$

Do đó $d\left(B,\left(B'AC\right)\right)=\frac{3}{2}.HF=a\sqrt{3}.$

Câu 20: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a,BC=2a,BB'=a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ bằng

Lời giải



Kẻ $BH\perp AC\left(H\in AC\right)$.

Lại có $BH\perp AA'\left(\text{do } AA'\perp\left(ABCD\right)\right)$.

Suy ra $BH\perp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right)=BH$.

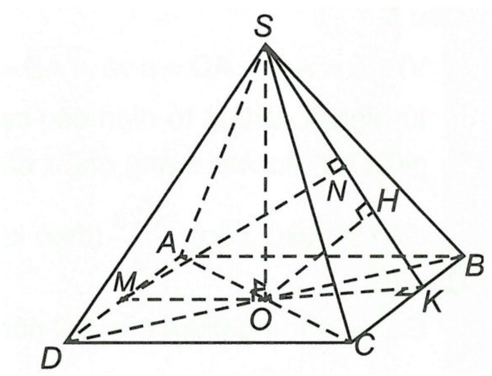
Xét ΔABC vuông tại B có:

$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{5}{4a^2}\Rightarrow BH=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Vậy $d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right)=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh bằng $a,\widehat{BAD}=60^o,SO\perp\left(ABCD\right),SO=a$. Khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

Lời giải



Kẻ $OK \perp BC\left(K \in BC\right), OH \perp SK\left(H \in SK\right)$.

Ta có: $AD /\!/ BC \Rightarrow AD /\!/ \left(SBC\right)$.

Khi đó $d\left(AD,\left(SBC\right)\right) = d\left(M,\left(SBC\right)\right)$ (với M là giao điểm của AD và OK).

Kẻ $MN /\!/ OH\left(N \in SK\right)$.

Ta có $\left(SOK\right) \perp \left(SBC\right)$ theo giao tuyến SK nên $OH \perp \left(SBC\right)$.

Suy ra $MN \perp \left(SBC\right)$.

Suy ra $d\left(AD,\left(SBC\right)\right) = d\left(M,\left(SBC\right)\right) = MN = 2OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

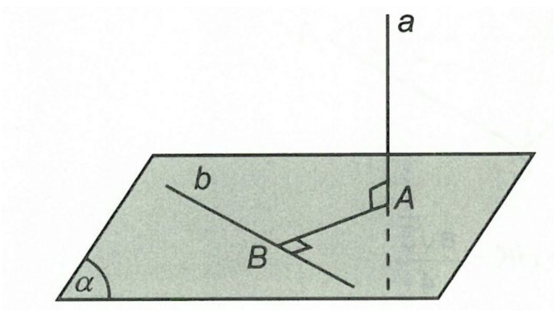
DẠNG 2: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

BÀI TOÁN 1. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU a VÀ b TRƯỜNG HỢP $a \perp b$

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựng mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ chứa b và vuông góc với a tại **A.**

Dựng $AB \perp b$ tại b

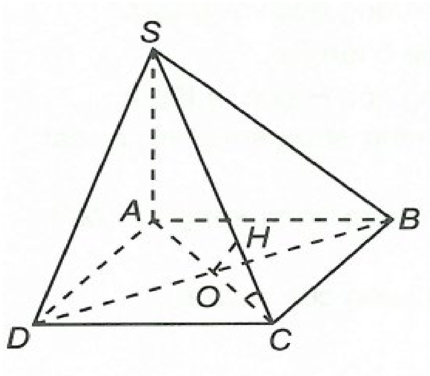


AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2 BÀI TẬP.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a; cạnh bên SA vuông góc với đáy; SC hợp với đáy góc 45^o. Tính khoảng cách giữa hai dường thẳng SC và BD**.**

Lời giải



Ta có: AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$.

Suy ra $\widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCA} = 45^o$.

Lại có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp SC.$

Gọi $\{O\} = AC \cap BD$. Dựng $OH \perp SC$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} OH \perp SC \\ OH \perp BD \end{cases}$. Suy ra OH la đoạn vuông góc chung của BD và SC.

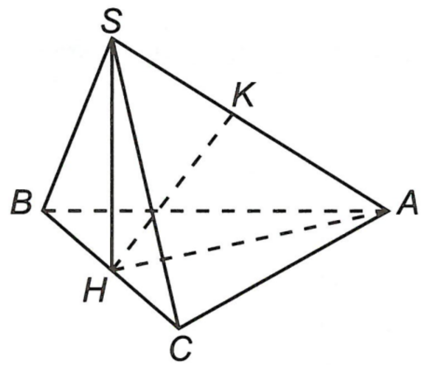
Suy ra $d(BD, SC) = OH$.

Xét tam giác OHC vuông tại H có: $OH = OC\sin 45^o = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy.

Tính theo a khoảng cách hai đường thẳng SA, BC.

Lời giải



Kẻ $AH \perp BC(1)$. Ta có $AH = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vì $SA \perp (ABC), BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SHA)$.

Trong (SAH), kẻ $HK \perp SA(K \in SA)$. Suy ra HK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau SA và BC.

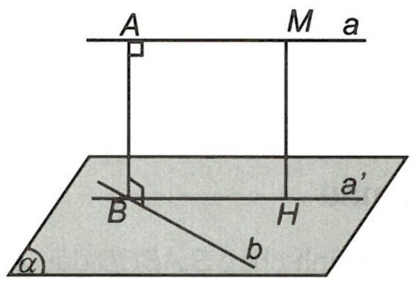
Xét tam giác SHA vuông tại H có $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HA^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(SA, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

BÀI TOÁN 2. TÍNH KHOẢNG CÁCH HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU A VÀ B KHÔNG VUÔNG GÓC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cách 1.



Dựng mặt phẳng (α) chưa b và song song với a.

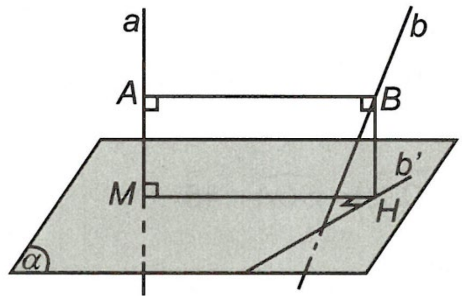
Chọn điểm M thích hợp trên a, dựng $MH \perp (\alpha)$ tại H.

Qua H, dựng đường thẳng $a'//a$, cắt b tại **B.**

Từ B dựng đường thẳng song song MH, cắt a tại **A.**

AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

Cách 2.



Dựng mặt phẳng (α) vuông góc với a tại M.

Dựng hình chiếu b' trên b lên (α).

Dựng hình chiếu vuông góc H của M lên b'.

Từ H, dựng đượng thẳng song song với a, cắt b tại **B.**

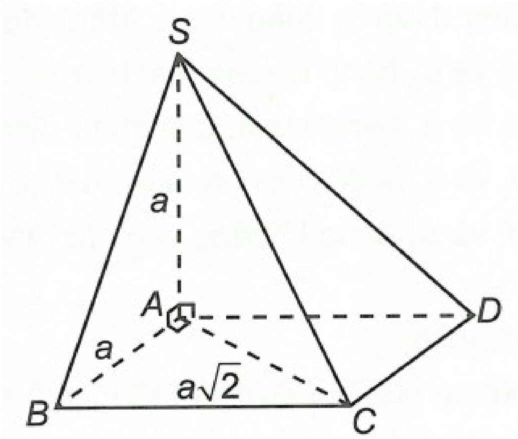
Qua B, dựng đường thẳng song song với MH, cắt a tại **A.**

AB là đoạn vuông góc chung của a và b.

2 BÀI TẬP.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a, BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

Lời giải



Ví $CD /\!/ (SAB)$ nên $d(CD,SB) = d(CD,(SAB))$

$= d(D,(SAB))$.

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA$.

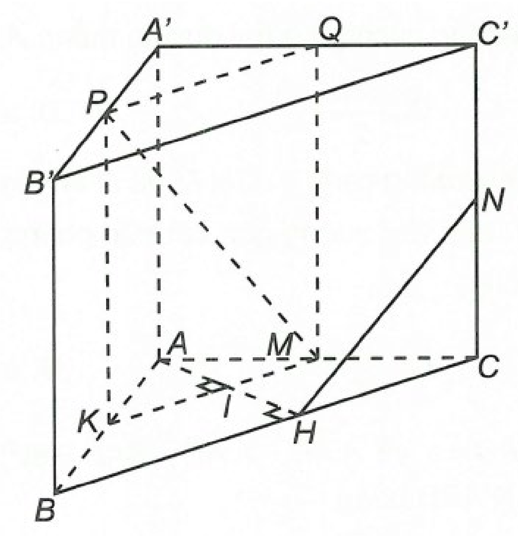
Suy ra $AD \perp (SAB)$.

Khi đó $d(D,(SAB)) = DA = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(CD;SB) = a\sqrt{2}$.

Câu 25: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, BC = 2a,$ mặt bên ACC'A' là hình vuông. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AC, CC', A'B'$ và H là hình chiếu của A lên BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MP và HN.

Lời giải



Ta xét cặp mặt phẳng song song lần lượt chứa MP và NH.

Xét tam giác ABC vuông ta A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2 - AB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Kẻ $MK /\!/ BC\left(K \in AB\right), PQ /\!/ B'C'\left(Q \in A'C'\right)$.

Ta có $PM \subset \left(MKPQ\right)$ và $HN \subset \left(BCC'B'\right)$.

Do $MK /\!/ BC$ và $MQ /\!/ CC'$ nên $\left(MKPQ\right) /\!/ \left(BCC'B'\right)$.

Khi đó $d\left(MP, NH\right) = d\left(\left(MKPQ\right), \left(BCC'B'\right)\right)$.

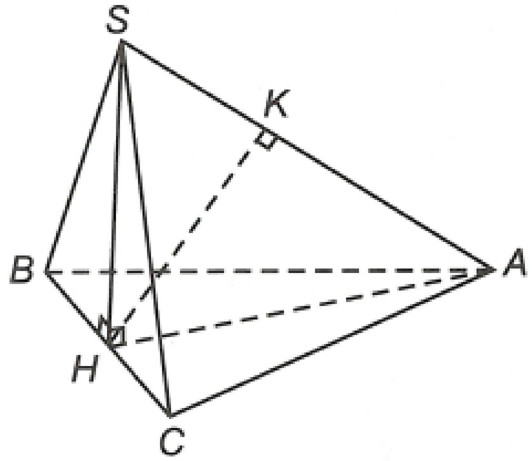
Do $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp CC'\left(CC' \perp \left(ABC\right), AH \subset \left(ABC\right)\right) \end{cases} \Rightarrow AH \perp \left(BCC'B'\right)$.

Suy ra $AH \perp \left(KMQP\right)$ tại $\left\{I\right\} = AH \cap KM$.

Vậy $d\left(MP, NH\right) = d\left(\left(MPKQ\right), \left(BCC'B'\right)\right) = IH = \dfrac{AH}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ vuông góc với mặt đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC nên

$AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a}{2}, SH \perp \left(ABC\right), SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên $SA \Rightarrow HK \perp SA$.

Ta có: $BC \perp \left(SAH\right) \Rightarrow BC \perp HK \Rightarrow d\left(SA; BC\right) = HK$.

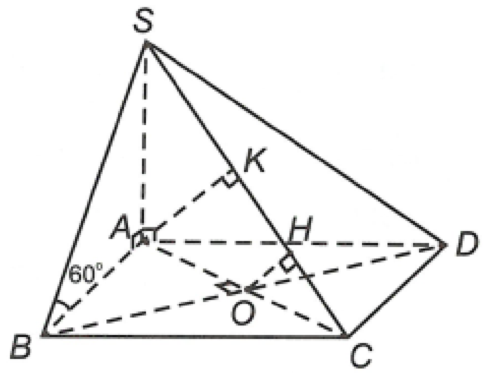
Xét tam giác SHA vuông tại H.

Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d\left(SA; BC\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh đáy SA vuông góc với đáy, ABCD là hình vuông cạnh a. Biết góc giữa SB và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC bằng

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD)$ nên $\widehat{(SB;(ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^o.$

Do tam giác SAC vuông tại A nên

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = a\sqrt{3}.$

Gọi O là tâm hình vuông ABC**D.**

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$

Trong mặt phẳng (SAC), dựng $OH \perp SC.$

Suy ra $d(BD;SC) = OH.$

Dựng $AK /\!/ OH \Rightarrow OH = \dfrac{1}{2}AK.$

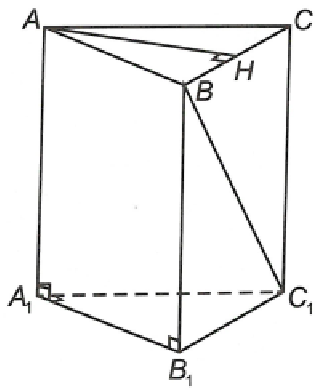
Xét tam giác SAC vuông tại A:

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{5}{6a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{\sqrt{30}a}{5}.$

Vậy $d(BD;SC) = \dfrac{\sqrt{30}a}{10}.$

Câu 28: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = a, CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA_1 và BC_1 bằng

Lời giải



Do $BB_1 // AA_1$ nên $AA_1 // (BCC_1B_1)$.

Suy ra $d(AA_1; BC_1) = d(AA_1; (BCCC_1)) = d(A; (BCCC_1))$.

Do $(BCCC_1) \perp (ABC)$, dựng $AH \perp BC, (H \in BC)$.

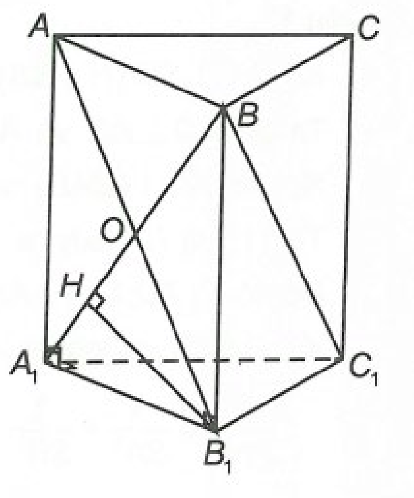
Suy ra $AH \perp (BCC_1B_1)$.

Xét tam giác ABC vuông tại $A: AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(AA_1; BC_1) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tam giác ABC vuông cân tại $A, AB = a, CC' = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BC_1 bằng

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AB_1 và A_1B.

Do $AC // A_1C_1$ nên $AC // (BA_1C_1)$.

Suy ra $d(AC; BC_1) = d(AC; BA_1C_1) = d(A; (BA_1C_1)) = d(B_1; (BA_1C_1))$

(do $O \in (BA_1C_1)$ và O là trung điểm AB_1).

Dựng $B_1H \perp A_1B\,(1)$.

Ta có: $\begin{cases} A_1C_1 \perp A_1B_1 \\ A_1C_1 \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow A_1C_1 \perp (ABB_1A_1)$

$\Rightarrow A_1C_1 \perp B_1H\,(2)$.

Từ (1) và (2) ta có: $B_1H \perp (A_1BC_1) \Rightarrow d(B_1;(A_1BC_1)) = B_1H$.

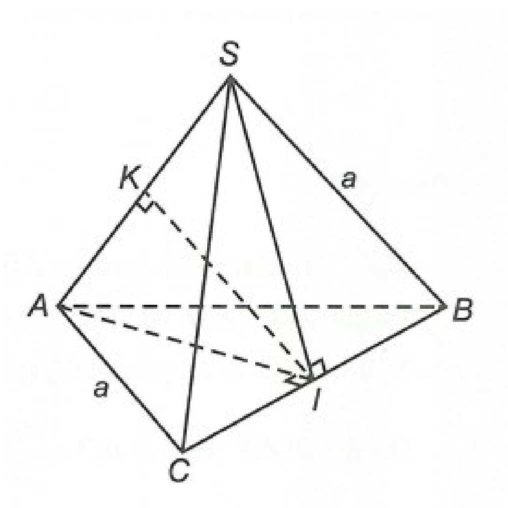
Xét tam giác A_1BB_1 vuông tại B_1 :

$$\frac{1}{B_1H^2} = \frac{1}{(A_1B_1)^2} + \frac{1}{(BB_1)^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow B_1H = \frac{2\sqrt{5}a}{5}.$$

Vậy $d(BC_1;AC) = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 30: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng

Lời giải



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và SA.

Ta có: $BC \perp SI$ (ΔSBC đều) và $BC \perp AI$ (ΔABC đều).

Do đó $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp IK.(1)$

Mặt khác $SI = IA \Rightarrow \Delta SAI$ cân tại I.

Có IK là đường trung tuyến nên $IK \perp AB.(2)$

Từ (1) và (2) suy ra IK là đoạn vuông góc chung của SA và BC.

Do đó $d(SA;BC) = IK$.

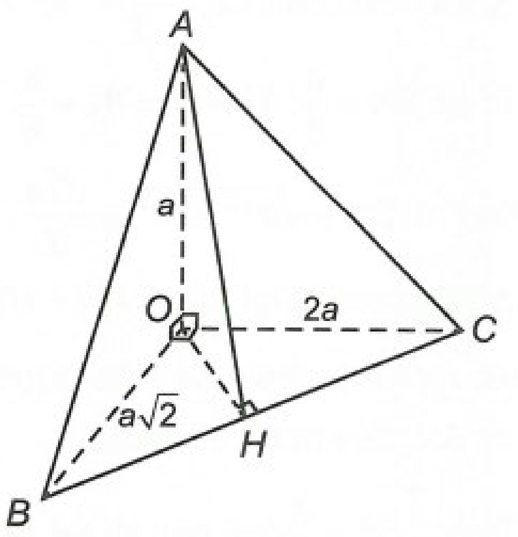
Xét ΔAKI vuông tại K có:

$$IK = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy $d\left(SA;BC\right) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31: Cho tứ diện $OABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC bằng

Lời giải



Kẻ $OH \perp BC\left(H \in BC\right)(1)$.

Ta có: $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$.

Suy ra $OA \perp \left(OBC\right) \Rightarrow OA \perp OH\,(2)$.

Từ (1) và (2) suy ra OH là đoạn vuông góc chung của OA và BC.

Do đó $d\left(OA;BC\right) = OH$.

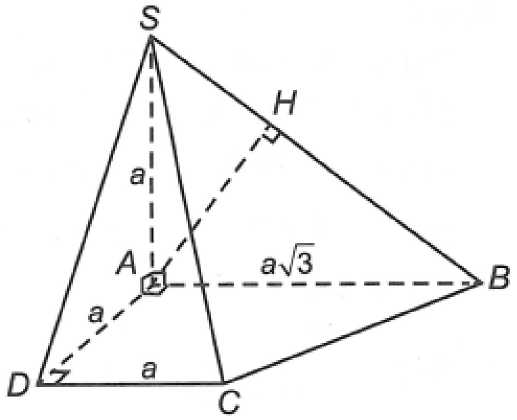
Xét ΔOBC vuông tại O có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{3}{4a^2} \Rightarrow OH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d\left(OA;BC\right) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và $D, SA \perp \left(ABCD\right), AD = DC = SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

Lời giải



Kẻ $AH \perp SB\left(H \in SB\right)(1)$.

Ta có: $AD \perp AB$ và $AD \perp SA\left(do\ SA \perp \left(ABCD\right)\right)$.

Suy ra $AD \perp \left(SAB\right) \Rightarrow AD \perp AH\left(2\right)$.

Từ (1) và (2) suy ra AH là đoạn vuông góc chung của AD và S**B.**

Do đó $d\left(AD;SB\right) = AH$.

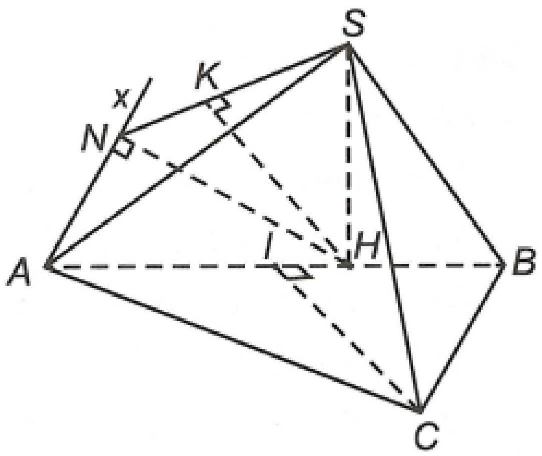
Xét ΔSAB vuông tại A có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d\left(AD;SB\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa hai đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a bằng

Lời giải



Ta có $\widehat{\left(SC,\left(ABC\right)\right)}=\widehat{\left(SC,HC\right)}=\widehat{SCH}=60^o$.

ΔABC đều nên $CI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ với I là trung điểm A**B.**

Ta có $BH=\dfrac{a}{3};BI=\dfrac{a}{2}\Rightarrow IH=\dfrac{a}{6}$.

Suy ra $CH=\sqrt{IH^2+IC^2}=\dfrac{\sqrt{7}a}{3}$.

ΔSCH vuông tại H có $SH=HC.\tan 60^o=\dfrac{\sqrt{21}a}{3}$.

Kẻ $Ax/\!/BC$. Gọi N và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên Ax và SN. Suy ra $BC/\!/\left(SAN\right)$.

Ta có: $BA=\dfrac{3}{2}AH$ nên $d\left(SA,BC\right)=d\left(B,\left(SAN\right)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(H,\left(SAN\right)\right)$.

Ta cũng có $Ax\perp\left(SHN\right)$ nên $Ax\perp HK$. Do đó $HK\perp\left(SAN\right)$.

Suy ra $d\left(H,\left(SAN\right)\right)=HK$.

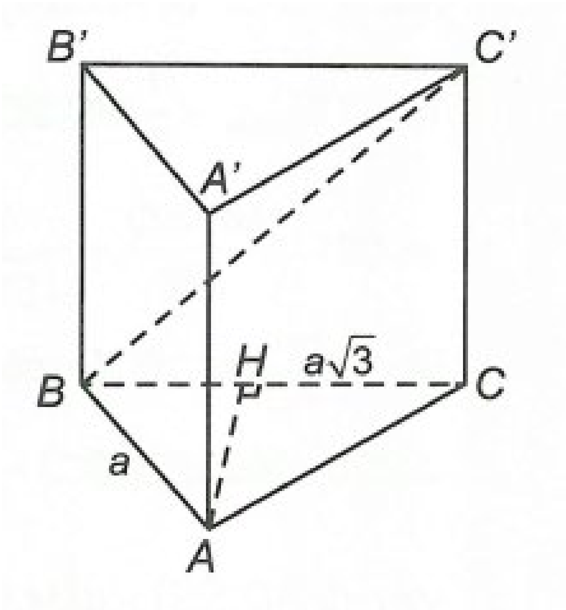
$AH=\dfrac{2a}{3},HN=AH\sin 60^o=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$HK=\dfrac{SH.HN}{\sqrt{SH^2+HN^2}}=\dfrac{a\sqrt{42}}{12}$.

Vậy $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{3}{2}HK=\dfrac{a\sqrt{42}}{8}$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại $A,AB=a,BC=a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng

Lời giải



Vì $AA' /\!/ (BCC'B')$ nên

$d(AA';BC') = d(AA';(BCC'B')) = d(A;(BCC'B'))$.

Kẻ $AH \perp BC (H \in BC)$.

Mà $AH \perp BB'$(do $BB' \perp (ABC)$).

Suy ra $AH \perp (BCC'B')$.

Do đó $d(A;(BCC'B')) = AH$.

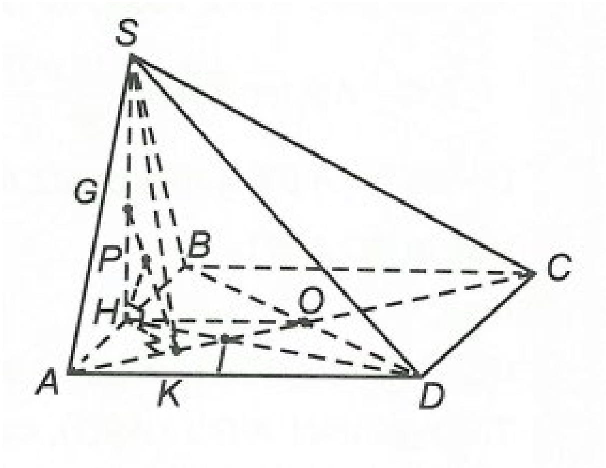
Xét ΔABC vuông tại A có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(AA';BC') = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, BC = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng

Lời giải



Gọi O là tâm hình chữ nhật ABCD, H là trung điểm A**B.**

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ và $SH\perp AB$ nên $SH\perp(ABCD)$.

Gọi I là giao điểm của HD và $AC\Rightarrow ID=2IH$.

Gọi G là trọng tâm ΔSAB.

Suy ra $IG /\!/ SD\Rightarrow SD /\!/ (AGC)$.

$\Rightarrow d(SD;AC)=d(SD;(AGC))=d(D;(AGC))=2d(H;(AGC))$.

Dựng $HK\perp AC\Rightarrow AC\perp(GHK)$.

Dựng $HP\perp GK\Rightarrow HP\perp(GAC)$.

Suy ra $d(H;(GAC))=HP$.

Ta có $AH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2};HO=\dfrac{BC}{2}=a;SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HG=\dfrac{1}{3}SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác GHK vuông tại H:

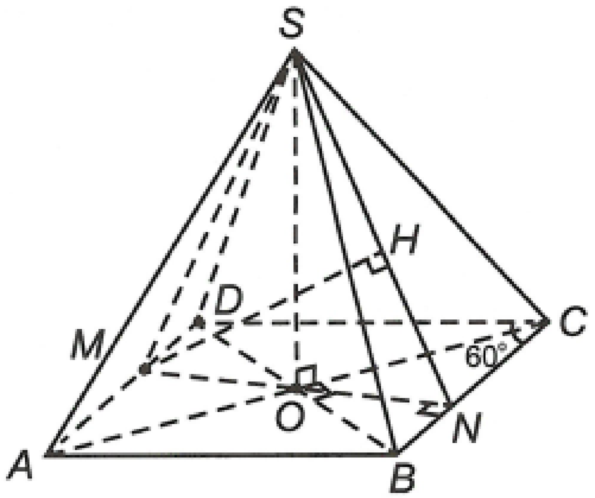
$$\frac{1}{HP^2}=\frac{1}{HK^2}+\frac{1}{HG^2}=\frac{1}{HA^2}+\frac{1}{HO^2}+\frac{1}{HG^2}=\frac{17}{a^2}.$$

Suy ra $HP=\dfrac{\sqrt{17}a}{17}$.

Vậy $d(SD;AC)=\dfrac{\sqrt{17}a}{17}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có ABCD là hình thoi tam O, cạnh a, góc $\widehat{BCD}=60^o$, có SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB bằng

Lời giải



Ta có: $SB \subset (SBC)$ và $AD // (SBC)$.

Do đó $d(AD, SB) = d(AD, (SBC))$.

Qua O kẻ $MN \perp BC (M \in AD, N \in BC)$.

Ta có: $BC \perp MN$ và $BC \perp SO$ (vì $SO \perp (ABCD)$), suy ra $BC \perp (SMN)$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SMN) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SN.

Kẻ $MH \perp SN (H \in SN) \Rightarrow MH \perp (SBC)$.

Khi đó ta có $d(AD, SB) = d(M, (SBC)) = MH$.

Ta có $S_{\Delta SMN} = \frac{1}{2} MN.SO = \frac{1}{2} MH.SN$

$\Rightarrow MH = \frac{MN.SO}{SN} = \frac{MN.SO}{\sqrt{SO^2 + ON^2}}$.

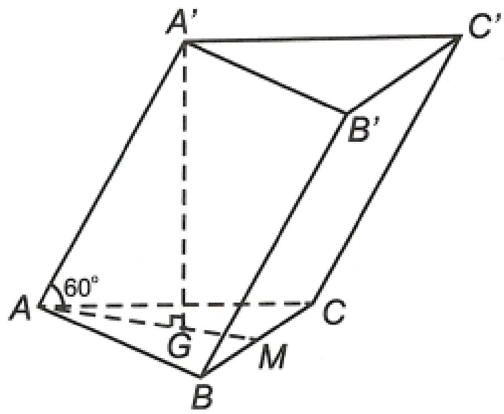
Do tam giác BCD có $CD = CB = a$ và $B\hat{C}D = 60^o$ suy ra tam giác ΔBCD đều

$d(D, BC) = \frac{a\sqrt{3}}{2} = MN$.

Vậy $d(AD, SB) = d(M, (SBC)) = MH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 37: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và $A'B'$ bằng

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, theo giả thiết

$A'G \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{(AA';(ABC))} = \widehat{A'AG} = 60^o.$

Xét tam giác $A'AG$ vuông tại G:

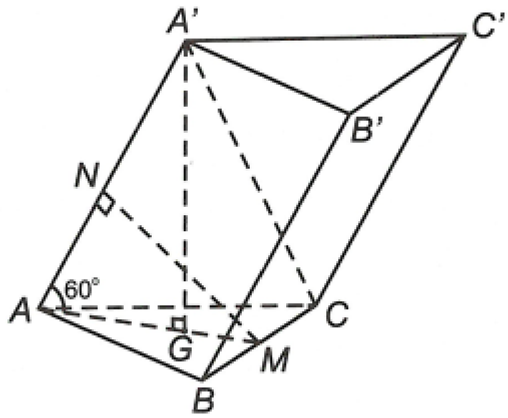
$A'G = AG.\tan\widehat{A'AG} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^o = a.$

Do $BC /\!/ (A'B'C')$ nên $d(BC;A'B') = d(BC;(A'B'C')) = A'G = a.$

Vậy $d(BC;A'B') = a.$

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^o. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Theo giả thiết $A'G \perp (ABC)$, suy ra $\widehat{(AA';(ABC))} = \widehat{A'AG} = 60^o.$

Xét tam giác $A'AG$ vuông tại G:

$A'G = AG.\tan\widehat{A'AG} = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60^o = a.$

Gọi M là trung điểm B**C.**

$$\Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(A'AM\right).$$

Dựng $MN \perp AA' \Rightarrow d\left(BC;AA'\right) = MN$.

Xét tam giác AMN vuông tại N:

$MN = AM.\sin\widehat{NAM} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sin 60^o = \dfrac{3a}{4}$. Vậy $d\left(BC;AA'\right) = \dfrac{3a}{4}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

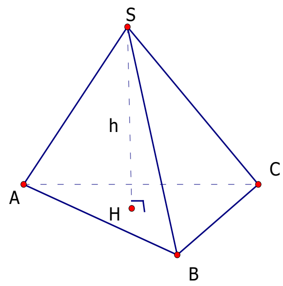
I LÝ THUYẾT.

4. CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH CỦA KHỐI CHÓP, KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI HỘP

4.1. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước a,b,c: $\boxed{V = a.b.c}$

4.2. Thể tích khối lập phương có kích thước a: $\boxed{V = a^3}$

4.3. Thể tích khối chóp



+ Thể tích khối chóp $\boxed{V = \frac{1}{3}.S.h}$

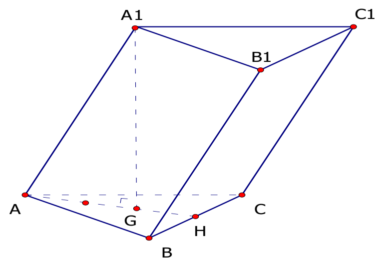
Trong đó: S là diện tích đa giác đáy.
h: là chiều cao của khối chóp.

4.4. Thể tích khối chóp cụt đều

+ Thể tích khối chóp cụt đều $\boxed{V = \frac{1}{3}.h.\left(S + \sqrt{S.S'} + S'\right)}$

Trong đó: S, S' là diện tích hai đáy.
h: là chiều cao của khối chóp.

4.5. Thể tích khối lăng trụ

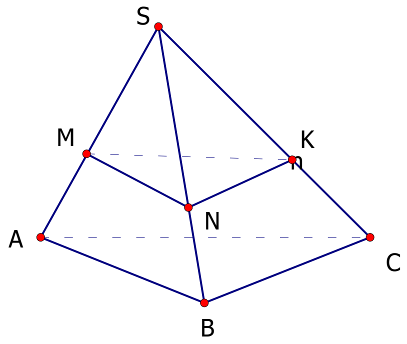


Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V = S.h}$
S là diện tích đa giác đáy.
h: là chiều cao của khối lăng trụ.
Lưu ý: Lăng trụ đứng có chiều cao là độ dài cạnh bên.

5. Tỉ số thể tích.

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm M, N, K khác với S, khi đó ta có:

$$\frac{V_{S.MNK}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SK}{SC}.$$

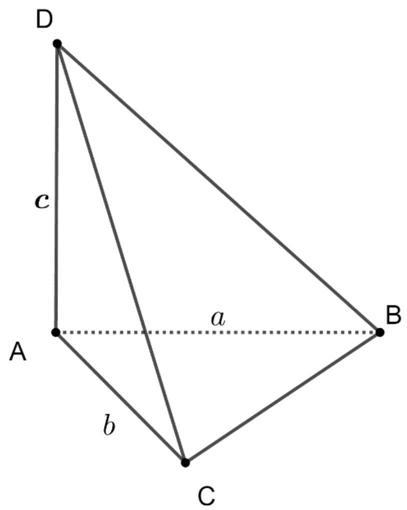


\+ Các công thức tính nhanh (nếu có), có chứng minh các công thức tính nhanh (nếu có thể).

CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT SỬ DỤNG ĐỂ LÀM BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÔNG THỨC 1: Với tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a, AC = b, AD = c$, ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{6}abc$.

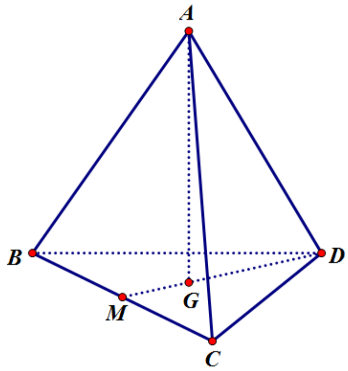
Chứng minh



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}AD.\frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{6}abc$.

CÔNG THỨC 2: Thể tích khối tứ diện đều cạnh a : $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Chứng minh



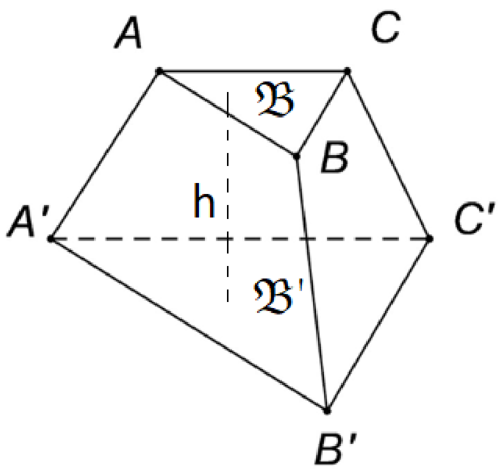
Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.

Ta có $DG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra $AG = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác BCD: $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

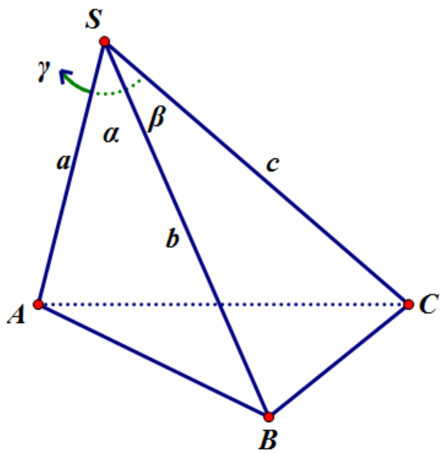
Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là: $V = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

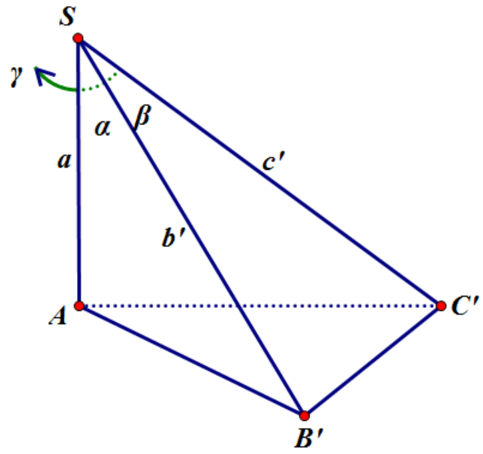
CÔNG THỨC 3: Thể tích của khối chóp cụt $V = \frac{1}{3}h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$ với h là khoảng cách giữa hai đáy, B, B' là diện tích của hai đáy



CÔNG THỨC 4: Thể tích khối tứ diện biết các góc α, β, γ và các cạnh a, b, c tại cùng một đỉnh: $V = \frac{abc}{6}.\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$

Chứng minh





Xét tứ diện $S.ABC$ có các góc α,β,γ và các cạnh a,b,c tại đỉnh S như hình vẽ trên.

Dựng mặt phẳng qua A, vuông góc với SA, cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại B',C'.

Ta có $SB'=\dfrac{SA}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{\cos\alpha}; SC'=\dfrac{SA}{\cos\beta}=\dfrac{a}{\cos\beta}$ và $AB'=a\tan\alpha, AC'=a\tan\beta$.

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Áp dụng định lí cosin trong $\Delta SB'C'$, có

$$2AB'AC'.\cos\widehat{B'AC'}=AB'^2+AC'^2-B'C'^2$$

$$=a^2\tan^2\alpha+a^2\tan^2\beta-a^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\right)=a^2\left(\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha.\cos\beta}-2\right)$$

$$\Rightarrow AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}=a.\frac{\cos\gamma-\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}.$$

Ta có $\left(AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}\right)^2=\left(AB'.AC'\right)^2-\left(AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}\right)^2$

$$=a^4\tan^2\alpha\tan^2\beta-a^4.\frac{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=a^4\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right)-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

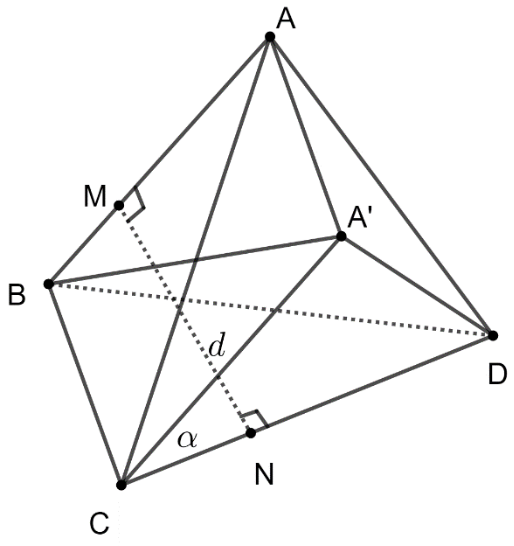
$$=a^4.\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\Rightarrow S_{AB'C'}=\frac{AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}}{2}=\frac{a^2\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Suy ra $V_{S.ABC}=\dfrac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}V_{S.AB'C'}=\dfrac{abc}{6}.\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$.

CÔNG THỨC 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a;CD=b;d\left(AB,CD\right)=d;\left(AB;CD\right)=\alpha$. Khi đó $V_{ABCD}=\frac{1}{6}abd\sin\alpha$

Chứng minh



Trong mặt phẳng $\left(ABC\right)$ vẽ hình bình hành $CBAA'$.

Ta có $AA'\parallel BC$ nên $V_{ABCD}=V_{A'BCD}$.

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD với $M\in AB,N\in CD$.

Vì $BM\parallel CA'$ nên $V_{BA'CD}=V_{MA'CD}$. Ta có $MN\perp AB$ nên $MN\perp CA'$.

Ngoài ra $MN\perp CD$ nên $MN\perp\left(CDA'\right)$.

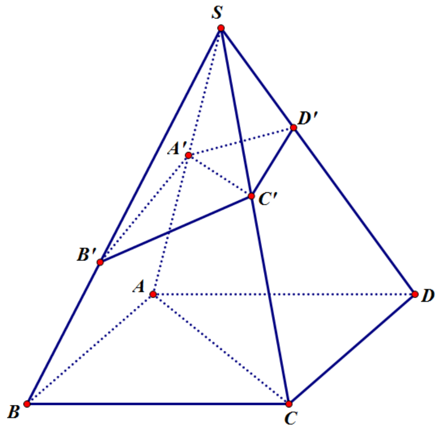
Ta có $\left(AB,CD\right)=\left(A'C,CD\right)=\alpha$.

Do đó $V_{MACD}=\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot MN=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}CA'\cdot CD\cdot\sin\alpha\cdot MN=\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot d\cdot\sin\alpha$.

Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB\cdot CD.d.\sin\alpha$.

CÔNG THỨC 6: Tỉ số thể tích hai hình chóp có đáy hình bình hành. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành; và hình chóp tứ giác $S.A'B'C'D'$ có A',B',C',D' lần lượt nằm trên các cạnh SA,SB,SC,SD; khi đó: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)$.

Chứng minh

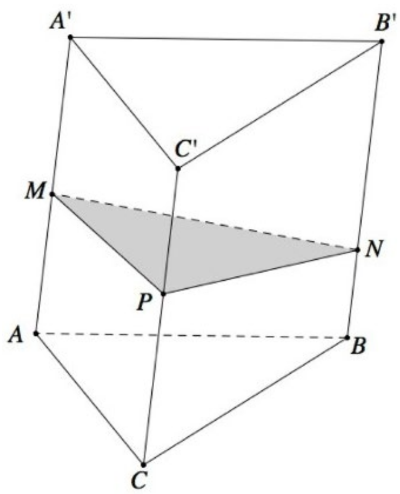


Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{V_{S.A'C'D'}}{2V_{S.ACD}}+\dfrac{V_{S.A'C'B'}}{2V_{S.ACB}}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SB'}{SB}$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\left(\dfrac{SB'}{SB}+\dfrac{SD'}{SD}\right).$

CÔNG THỨC 7: Mặt phẳng (α) cắt các cạnh của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ lần lượt tại M,N,P sao cho $\dfrac{AM}{AA'}=x,\dfrac{BN}{BB'}=y,\dfrac{CP}{CC'}=z$. Khi đó $V_{ABC.MNP}=\dfrac{x+y+z}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Chứng minh



Ta có $V_{ABCMNP}=V_{NACB}+V_{NACPM}$.

$V_{NACB}=\dfrac{BN}{BB'}\cdot V_{B'ACB}=\dfrac{BN}{BB'}\cdot\dfrac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}\quad(1).$

$\dfrac{V_{NACPM}}{V_{B'ACC'A'}}=\dfrac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}}=\dfrac{(CP+AM)\cdot\dfrac{1}{2}}{AA'}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{CP}{CC'}+\dfrac{AM}{AA'}\right)$

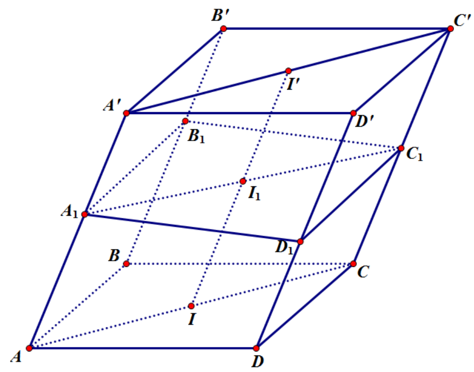
$\Rightarrow V_{NACPM}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{CP}{CC'}+\dfrac{AM}{AA'}\right)\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}\quad(2).$

Từ (1) và (2) suy ra $V_{ABCMNP} = V_{NACB} + V_{NACPM} = \frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB'}+\frac{CP}{CC'}+\frac{AM}{AA'}\right)\cdot V_{ABCA'B'C'}$.

CÔNG THỨC 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, lấy A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt trên các cạnh AA', BB', CC', DD' sao cho bốn điểm ấy đồng phẳng. Ta có tỉ số thể tích hai khối đa diện:

$$\frac{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'}+\frac{CC_1}{CC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'}+\frac{DD_1}{DD'}\right)$$

Chứng minh



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm $AC, A'C'$. Ta chứng minh được ba mặt phẳng $(ACC'A'), (BDD'B'), (A_1B_1C_1D_1)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến đồng quy tại I_1.

Ta có $(ABB'A') \,//\, (CDD'C')$, suy ra $A_1B_1 \,//\, C_1D_1$. Tương tự, ta cũng được $A_1D_1 \,//\, B_1C_1$.

Suy ra $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành, ta có I_1 là trung điểm A_1C_1.

Ta có II_1 là đường trung bình trong các hình thang AA_1C_1C và BB_1D_1D, suy ra $2II_1 = AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

Suy ra: $\frac{AA_1}{AA'}+\frac{CC_1}{CC'} = \frac{BB_1}{BB'}+\frac{DD_1}{DD'}$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích trong khối lăng trụ tam giác, ta có:

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} + V_{ACD.A_1C_1D_1}$$

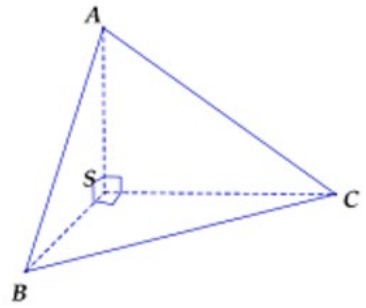
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'}+\frac{BB_1}{BB'}+\frac{CC_1}{CC'}\right).\frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} + \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'}+\frac{DD_1}{DD'}+\frac{CC_1}{CC'}\right).\frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'}+\frac{CC_1}{CC'}\right).V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'}+\frac{DD_1}{DD'}\right).V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

CÔNG THỨC 9: Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3.

Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$.

Chứng minh



Đặt $SA=a,\ SB=b,\ SC=c$.

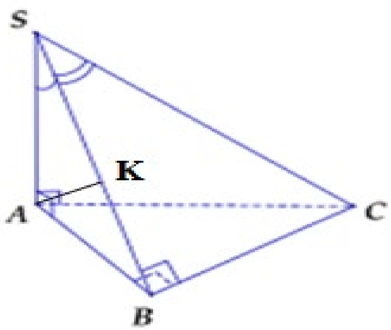
Suy ra $S_1=\dfrac{1}{2}ab; S_2=\dfrac{1}{2}bc; S_3=\dfrac{1}{2}ca$.

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{\sqrt{a^2b^2c^2}}{6}=\frac{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}ab\right)\left(\frac{1}{2}bc\right)\left(\frac{1}{2}ca\right)}}{3}=\frac{\sqrt{2.S_1.S_2.S_3}}{3}.$$

CÔNG THỨC 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC}=\beta; \widehat{ASB}=\alpha$.

Khi đó: $V_{S.ABC}=\dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$

Chứng minh



$SA=SB.\cos\alpha$.

(SAB) và (SBC) vuông góc với nhau.

Nên BC vuông góc (SAB).

Tam giác SBC vuông tại B nên $BC=SB.\tan\beta \Rightarrow S_{\Delta SBC}=\dfrac{1}{2}.SB.BC=\dfrac{1}{2}.SB^2.\tan\beta$

Kẻ AK vuông góc SB. Lúc này AK sẽ là khoảng cách từ A đến SBC. Do AK vuông góc BC và SB.

Ta có $AK = SA.sin\alpha = SB.sin\alpha.cos\alpha$.

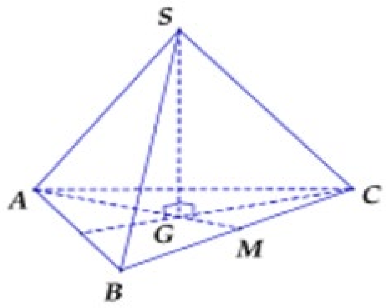
$$AK = \frac{SB\sin 2\alpha}{2}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}.$$

CÔNG THỨC 11: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

Khi đó: $V_{SABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$.

Chứng minh



$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

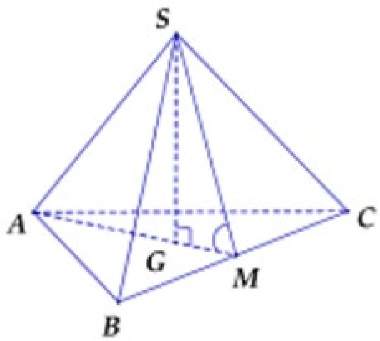
$$SG = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\sqrt{\frac{3b^2-a^2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}.$$

CÔNG THỨC 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\tan\alpha}{24}$.

Chứng minh



$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

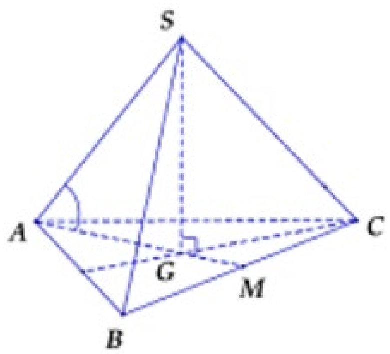
$SG = \frac{\sqrt{3}}{6}a\tan\alpha$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{6}atan\alpha = \frac{a^3tan\alpha}{24}$.

CÔNG THỨC 13: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

Chứng minh



$SG = b\sin\beta$.

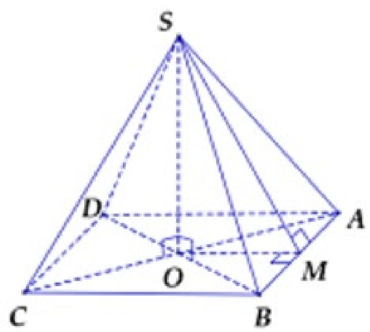
$AM = \frac{3}{2}AG = \frac{3}{2}.b.cos\beta \Rightarrow BC = \sqrt{3}.b.cos\beta$.

$S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos^2\beta \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

CÔNG THỨC 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$.

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$.

Chứng minh



$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

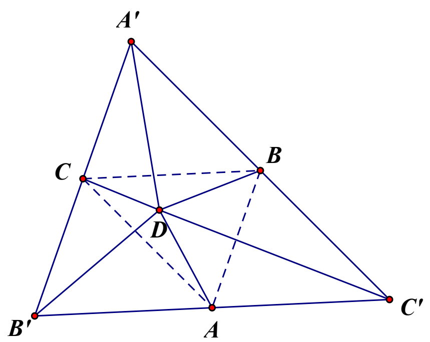
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$.

CÔNG THỨC 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ (tứ diện gần đều).

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Chứng minh

Cách 1:



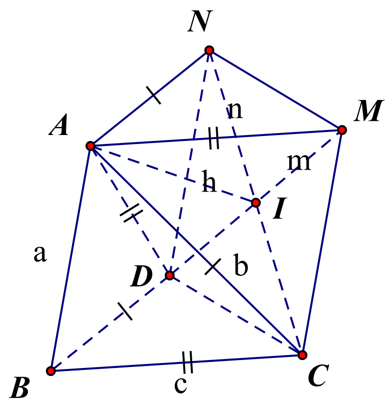
Dựng tứ diện $D.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Khi đó tứ diện $D.A'B'C$ có các cạnh DA', DB', DC' đôi một vuông góc.

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{DA'B'C'} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC'$.

Ta có $\begin{cases} DA'^2 + DC'^2 = 4b^2 \\ DA'^2 + DB'^2 = 4a^2 \\ DB'^2 + DC'^2 = 4c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DA'^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ DB'^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2) \\ DC'^2 = 2(-a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$.

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC' = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Cách 2*:* Dựng lăng trụ $AMNBCD$ như hình bên.



Từ giả thiết ta có: $MNDC$ là hình thoi; các tam giác CAN , DAM là các tam giác cân, suy ra: $AI \perp NC, AI \perp DM \Rightarrow AI \perp (CDMN)$.

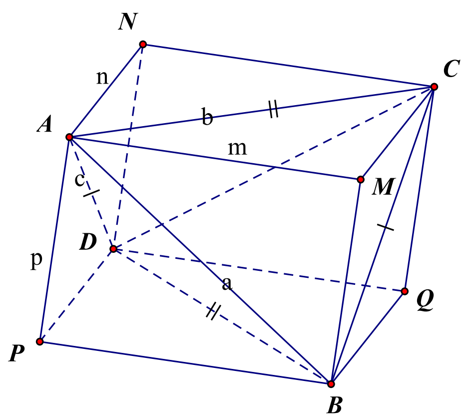
Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{2}V_{A.MNDC} = \frac{1}{2}.4V_{A.IMN} = 2V_{A.IMN} = \frac{1}{3}IA.IM.IN = \frac{1}{3}h.m.n$.

Từ $\begin{cases} h^2 + m^2 = c^2 \\ h^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + n^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ n^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ h^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \end{cases}$.

Suy ra:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Cách 3: Dựng hình hộp chữ nhật $AMCN.PBQD$ như hình bên.



Gọi các kích thước của hình hộp là $m,\ n,\ p$.

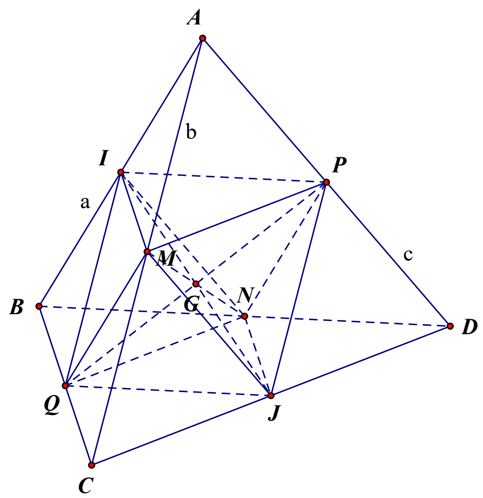
Ta có: $V_{PADB} = V_{MABC} = V_{QBCD} = V_{NACD} = \frac{1}{6}V_{AMCN.PBQD}$. Suy ra:

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}V_{AMCN.PBQD}=\frac{1}{3}m.n.p$.

Ta có: $\begin{cases} m^2+n^2=b^2 \\ m^2+p^2=a^2 \\ p^2+n^2=c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2} \\ n^2=\dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2} \\ p^2=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2} \end{cases}$.

$V_{ABCD}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

Cách 4:



Gọi I, J, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC.

Ta thấy tứ giác $MINJ$ là hình thoi. Ta chứng minh được PQ vuông góc với AD và BC nên PQ vuông góc với $mp(IMJN)$.

Gọi G là giao điểm của các đường IJ, MN, PQ. Ta có

$V_{PMINJQ}=2V_{P.MINJ}=2.\frac{1}{3}PG.\frac{1}{2}IJ.MN=\frac{1}{6}PQ.IJ.MN$.

Vì $V_{AIMP}=V_{BINQ}=V_{CQMJ}=V_{DPNJ}=\frac{1}{8}V_{ABCD}$ nên

$V_{PIMJNQ}=V_{ABCD}-(V_{AIMP}+V_{BINQ}+V_{CQMJ}+V_{DPNJ})=\frac{1}{2}V_{ABCD}$.

Suy ra $V_{ABCD}=2V_{PIMJN}=\frac{1}{3}PQ.IJ.MN$.

Ta tính được:

$$IJ^2 = IC^2 - CJ^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} - \frac{\mathrm{CD}^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Tương tự:

$$PQ^2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2};\ MN^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$$

Từ đó:

$$V_{ABC\mathrm{D}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Kiến thức cần nhớ:

1) Công thức tính: $V=\frac{1}{3}B.h$ (B: diện tích đáy và h là chiều cao của khối chóp).

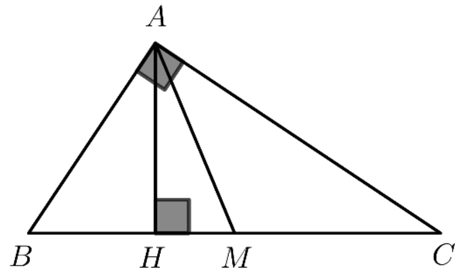
2) Chiều cao của khối chóp thường tính bằng độ dài cạnh vuông góc với đáy

Loại 1: Tính bằng công thức

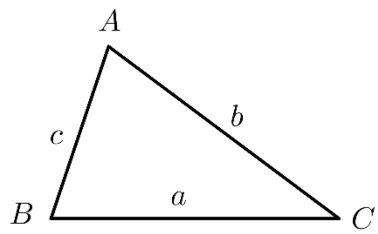
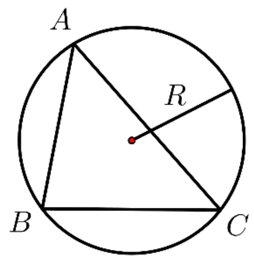
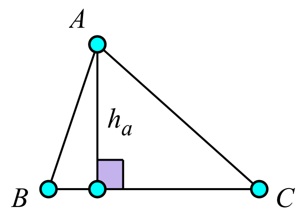
Phương pháp giải (kiến thức cần nhớ):

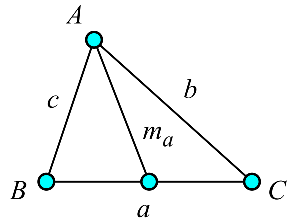
Ở loại toán này trình bày cách tính thể tích khối chóp có một cạnh vuông góc với đáy bằng sử dụng đơn thuần công thức $V=\frac{1}{3}B.h$, trong đó B: diện tích đáy và h là chiều cao của khối chóp. Ta cần nhớ một số kiến thức cơ bản sau:

1. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông

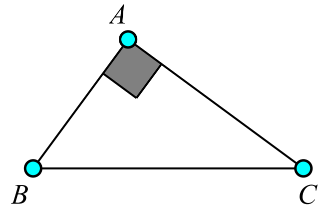
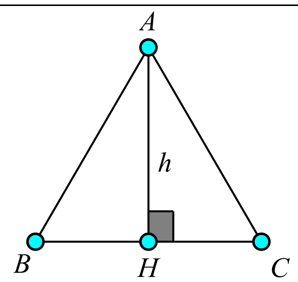
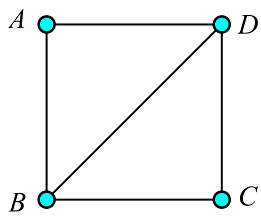
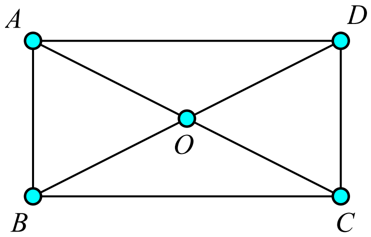
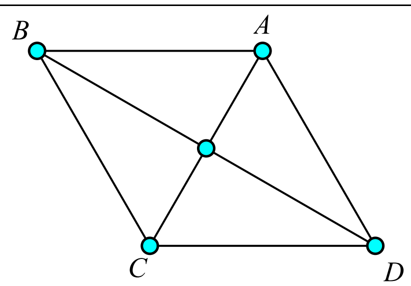
● $BC^2=AB^2+AC^2$ ● $AH.BC=AB.AC$ ● $AB^2=BH.BC$, $AC^2=CH.CB$ ● $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$, $AH^2=BH.CH$	

2. Các hệ thức trong tam giác thường

✓ Định lý hàm cosin: • $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ • $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ • $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$	
✓ Định lý hàm sin: • $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)	
✓ Công thức tính diện tích tam giác: • $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$ • $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$	

• $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}$, $S_{\Delta ABC}=pr$ • $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	Trong đó: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, r bán kính đường tròn nội tiếp
✓ Công thức tính độ dài đường trung tuyến: • $m_a^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, $m_b^2=\dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}$ • $m_c^2=\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$	

3. Diện tích đa giác:

✓ Tam giác vuông • Diện tích: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC$	
✓ Diện tích tam giác đều • Diện tích: $S=\dfrac{AB^2.\sqrt{3}}{4}$. • Đường cao: $h=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.	
✓ Hình vuông: • Diện tích: $S=AB^2$ • Đường chéo: $AC=BD=AB\sqrt{2}$	
✓ Hình chữ nhật: • Diện tích: $S=AB.AD$ • Đường chéo: $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}$	
✓ Hình thoi: • Diện tích: $S=\dfrac{1}{2}AC.BD$ • Đặt biệt: 1 trong các góc trong của hình thoi bằng 60°, khi đó hình thoi được tạo bởi 2 tam giác đều.	

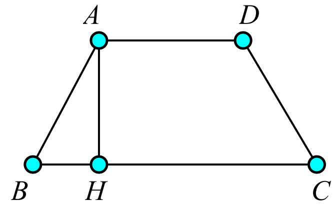
<table>
<tr>
<td>

✓ Hình thang:

• Diện tích: $S=\dfrac{(AD+BC)AH}{2}$

• Đặc biệt: Hình thang vuông, hình thang cân

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, ΔABC vuông cân tại A, $SA=BC=a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB=a\sqrt{5}$.

Câu 4: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc đáy và $SA=2\sqrt{3}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Câu 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=a$, $AB=a$, $AC=2a$ và $\widehat{BAC}=120°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 6: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$, $AB=3a$, $AD=2a$, $SB=5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=a$, $AD=3a$, $BC=a$. Biết $SA=a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD}=60°$, $SA\perp(ABCD)$, $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

LOẠI 2: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA ĐƯỜNG VÀ MẶT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

- Nếu $d\perp(P)$ thì $\widehat{(d,(P))}=90°$.

- Nếu d không vuông góc với (P) thì $\widehat{(d,(P))}=\widehat{(d,d')}$ với d' là hình chiếu của d trên (P)

Chú ý: $0°\le\widehat{(d,(P))}\le 90°$.

Câu 11: Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Câu 12: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy (ABC) và SC hợp với (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Câu 13: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và SA hợp với (SBC) một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

LOẠI 3: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

- Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Từ một điểm I bất kì trên d ta dựng đường thẳng a trong (P) vuông góc với d và dựng đường thẳng b trong (Q) vuông góc với d. Khi đó góc giữa (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

- Diện tích hình chiếu của đa giác: $S' = S.\cos\alpha$

(với S là diện tích đa giác nằm trong (P) và S' là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên (Q), α là góc giữa (P) và (Q))

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

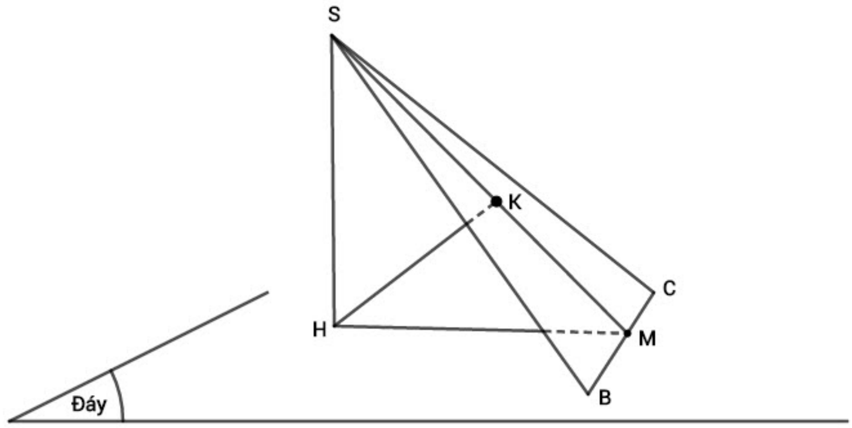
Câu 16: Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA = a$ và diện tích tam giác SBC bằng $3a^2$.

Câu 17: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

LOẠI 4. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

1) Cần nhớ kiến thức cơ bản về xác định khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.



Xét tam giác SHM vuông tại H, HM vuông góc với BC và HK là đường cao

□ Tính khoảng cách từ chân đường cao H đến mặt bên (SBC) ta sử dụng công thức

$$HK = \frac{HM.SH}{\sqrt{HM^2 + SH^2}}$$

□ Tính độ dài cạnh SH ta sử dụng công thức

$$SH = \frac{HM.HK}{\sqrt{HM^2 - HK^2}}$$

2) Trong trường hợp bài toán cho khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đáy đến mặt bên, ta phải dùng tỷ lệ để đưa về khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính $V_{S.ABC}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD, khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

DẠNG 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH LÀ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRÊN MẶT ĐÁY (KHÔNG TRÙNG VỚI CÁC ĐỈNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CƠ BẢN)

+ Tóm tắt ngắn gọn kiến thức cơ bản cần nắm.

Công thức tính thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3}.B.h$. (Trong đó: B là diện tích đáy, h là chiều cao)

- Để tính thể tích của khối chóp, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định đường cao. Tính đường cao.

Bước 2: Nhận dạng đáy. Tính diện tích của đáy.

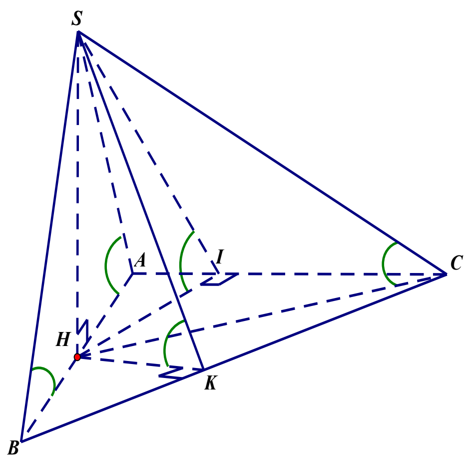
Bước 3: Tính thể tích theo công thức.

Chú ý:

1. Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

2. Nếu $(SAB) \perp (ABC)$ **thì đường cao** SH **của tam giác** SAB chính là đường cao của khối chóp $S.ABC$

3. Góc giữa cạnh bên và đáy



$\widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH}$, $\widehat{(SB,(ABC))} = \widehat{SBH}$, $\widehat{(SC,(ABC))} = \widehat{SCH}$.

Tóm lại, $\widehat{(SM,(ABC))} = \widehat{SMH}$, $\forall M \in (ABC)$.

4. Góc giữa mặt bên và đáy:

$\widehat{((SBC),(ABC))} = \widehat{SKH}$, $\widehat{((SAC),(ABC))} = \widehat{SIH}$.

Chú ý: $HK = AA'.\frac{BH}{AB}$, $HI = BB'.\frac{AH}{AB}$ (với AA', BB' là các đường cao của tam giác ABC)

TRƯỜNG HỢP 1: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM TRÊN CẠNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY (MỘT MẶT BÊN CỦA HÌNH CHÓP VUÔNG GÓC VỚI MẶT ĐÁY).

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 24: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác BCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết AD hợp với (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. SC tạo với (SAB) một góc $45°$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

TRƯỜNG HỢP 2: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN TRONG CỦA ĐA GIÁC ĐÁY

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{3}a$ tâm O, SO vuông góc với $(ABCD)$, $SO=a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Câu 28: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$, khoảng cách giữa SA và BC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,SD. Biết cosin góc giữa hai đường thẳng CN và SM bằng $\frac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

TRƯỜNG HỢP 3: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN NGOÀI CỦA ĐA GIÁC ĐÁY

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, biết $AB = AC = a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với A qua BC. Góc giữa SA và đáy bằng 45°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với A qua BC. Biết $SA = 2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

DẠNG 3: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ)

1) Hình chóp đều: Là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
2) Tính chất: Trong hình chóp đều ta có:
- Chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

3) Tứ diện đều: Hình hình chóp có bốn mặt là tam giác đều.
Đường cao là đường kẻ từ đỉnh qua tâm của đáy.

Câu 33: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao của hình chóp bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 34: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC, $AH = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 35: Thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $3a$.

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 20, cạnh bên bằng 30. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

Câu 37: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 38: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 39: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng chứa đa giác đáy bằng $60°$?

Câu 40: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng $2a$, $\widehat{SBA} = 45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy bằng 30°. Khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Câu 42: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài đường cao bằng a, diện tích mặt bên bằng $\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng.

Câu 43: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 44: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60^0?

Câu 45: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh AB bằng a. Các cạnh bên SA, SB, SC cùng tạo với mặt đáy một góc 60°. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCD$?

Câu 46: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAC đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết $(AMN)\perp(SBC)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

I LÝ THUYẾT.

4. CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH CỦA KHỐI CHÓP, KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI HỘP

4.1. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước a,b,c: $\boxed{V=a.b.c}$

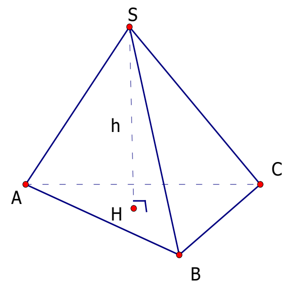
4.2. Thể tích khối lập phương có kích thước a: $\boxed{V=a^3}$

4.3. Thể tích khối chóp

+ Thể tích khối chóp $\boxed{V=\frac{1}{3}.S.h}$

Trong đó: S là diện tích đa giác đáy.

h: là chiều cao của khối chóp.



4.4. Thể tích khối chóp cụt đều

+ Thể tích khối chóp cụt đều $\boxed{V=\frac{1}{3}.h.\left(S+\sqrt{S.S'}+S'\right)}$

Trong đó: S,S' là diện tích hai đáy.

h: là chiều cao của khối chóp.

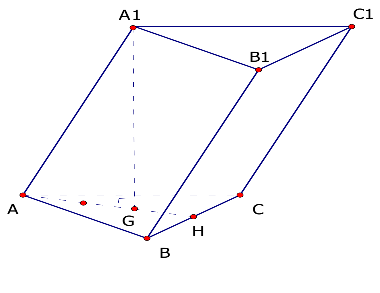
4.5. Thể tích khối lăng trụ

Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V=S.h}$

S là diện tích đa giác đáy.

h: là chiều cao của khối lăng trụ.

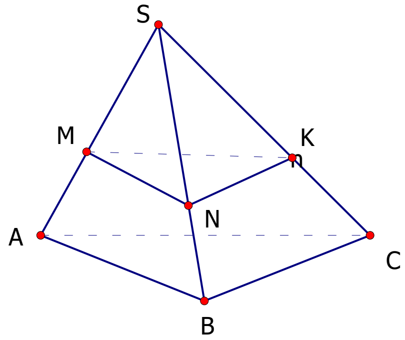
Lưu ý: Lăng trụ đứng có chiều cao là độ dài cạnh bên.



4.6. Tỉ số thể tích.

Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm M, N, K khác với S, khi đó ta có:

$\dfrac{V_{S.MNK}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SA} \cdot \dfrac{SN}{SB} \cdot \dfrac{SK}{SC}$.

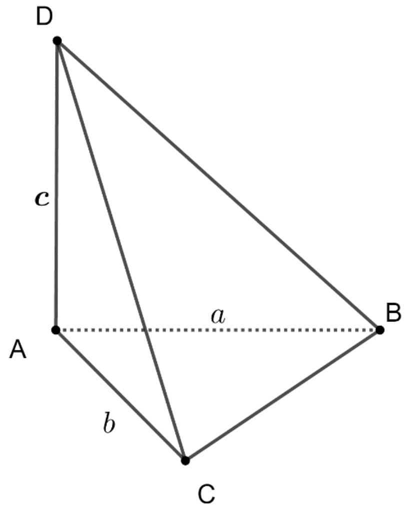


+ Các công thức tính nhanh (nếu có), có chứng minh các công thức tính nhanh (nếu có thể).

CÁC CÔNG THỨC ĐẶC BIỆT SỬ DỤNG ĐỂ LÀM BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

CÔNG THỨC 1: Với tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = a, AC = b, AD = c$, ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}abc$.

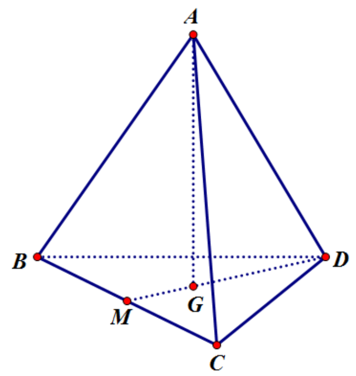
Chứng minh



Ta có $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}AD.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}AD.\dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{6}abc$.

CÔNG THỨC 2: Thể tích khối tứ diện đều cạnh a : $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Chứng minh



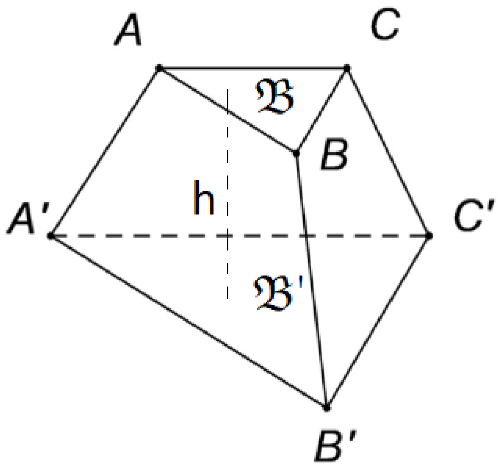
Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD.

Ta có $DG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra $AG = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Diện tích tam giác BCD: $S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

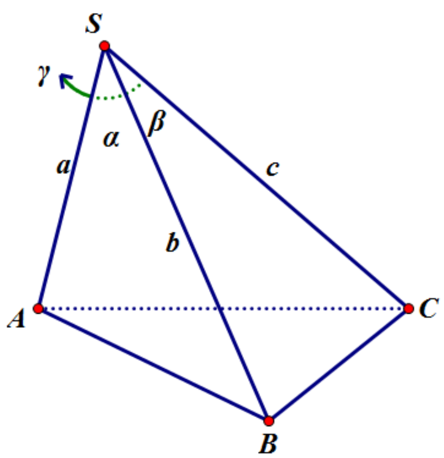
Thể tích khối tứ diện đều cạnh a là: $V = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

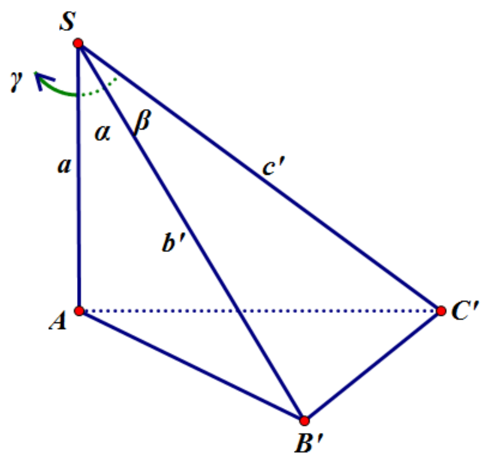
CÔNG THỨC 3: Thể tích của khối chóp cụt $V = \frac{1}{3}h\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right)$ với h là khoảng cách giữa hai đáy, B, B' là diện tích của hai đáy



CÔNG THỨC 4: Thể tích khối tứ diện biết các góc α, β, γ và các cạnh a, b, c tại cùng một đỉnh: $V = \frac{abc}{6}.\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$

Chứng minh





Xét tứ diện $S.ABC$ có các góc α,β,γ và các cạnh a,b,c tại đỉnh S như hình vẽ trên.

Dựng mặt phẳng qua A, vuông góc với SA, cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại B',C'.

Ta có $SB'=\dfrac{SA}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{\cos\alpha};SC'=\dfrac{SA}{\cos\beta}=\dfrac{a}{\cos\beta}$ và $AB'=a\tan\alpha, AC'=a\tan\beta$.

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.AB'C'}}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Áp dụng định lí cosin trong $\Delta SB'C'$, có

$$2AB'AC'.\cos\widehat{B'AC'}=AB'^2+AC'^2-B'C'^2$$

$$=a^2\tan^2\alpha+a^2\tan^2\beta-a^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}\right)=a^2\left(\frac{2\cos\gamma}{\cos\alpha.\cos\beta}-2\right)$$

$$\Rightarrow AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}=a.\frac{\cos\gamma-\cos\alpha.\cos\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}.$$

Ta có $\left(AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}\right)^2=\left(AB'.AC'\right)^2-\left(AB'.AC'.\cos\widehat{B'AC'}\right)^2$

$$=a^4\tan^2\alpha\tan^2\beta-a^4.\frac{\cos^2\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$=a^4\frac{\left(1-\cos^2\alpha\right)\left(1-\cos^2\beta\right)-\cos^2\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

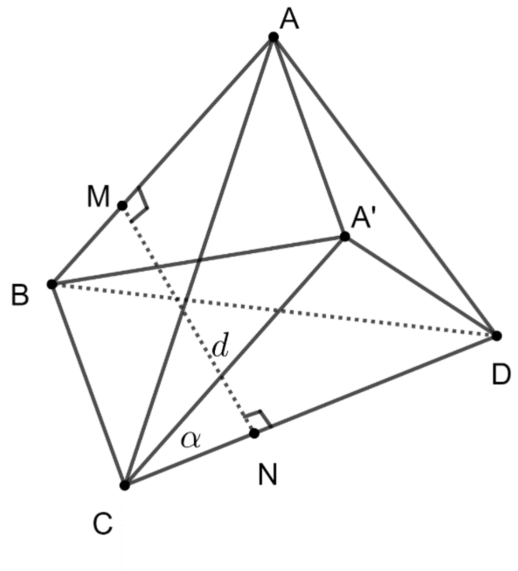
$$=a^4.\frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\Rightarrow S_{AB'C'}=\frac{AB'.AC'.\sin\widehat{B'AC'}}{2}=\frac{a^2\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{2\cos\alpha\cos\beta}.$$

Suy ra $V_{S.ABC}=\dfrac{bc}{a^2\cos\alpha\cos\beta}V_{S.AB'C'}=\dfrac{abc}{6}.\sqrt{1+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma}$.

CÔNG THỨC 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a;CD=b;d\left(AB,CD\right)=d;\left(AB;CD\right)=\alpha$. Khi đó $V_{ABCD}=\frac{1}{6}abd\sin\alpha$

Chứng minh



Trong mặt phẳng $\left(ABC\right)$ vẽ hình bình hành $CBAA'$.

Ta có $AA'\parallel BC$ nên $V_{ABCD}=V_{A'BCD}$.

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của AB và CD với $M\in AB,N\in CD$.

Vì $BM\parallel CA'$ nên $V_{BA'CD}=V_{MA'CD}$. Ta có $MN\perp AB$ nên $MN\perp CA'$.

Ngoài ra $MN\perp CD$ nên $MN\perp\left(CDA'\right)$.

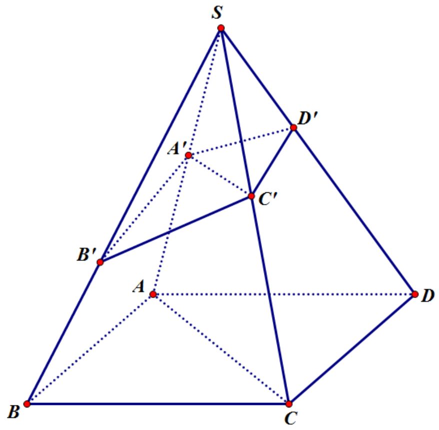
Ta có $\left(AB,CD\right)=\left(A'C,CD\right)=\alpha$.

Do đó $V_{MACD}=\frac{1}{3}S_{ACD}\cdot MN=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}CA'\cdot CD\cdot\sin\alpha\cdot MN=\frac{1}{6}AB\cdot CD\cdot d\cdot\sin\alpha$.

Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB\cdot CD.d.\sin\alpha$.

CÔNG THỨC 6: Tỉ số thể tích hai hình chóp có đáy hình bình hành. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành; và hình chóp tứ giác $S.A'B'C'D'$ có A',B',C',D' lần lượt nằm trên các cạnh SA,SB,SC,SD; khi đó: $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{2}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}\left(\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}\right)$.

Chứng minh

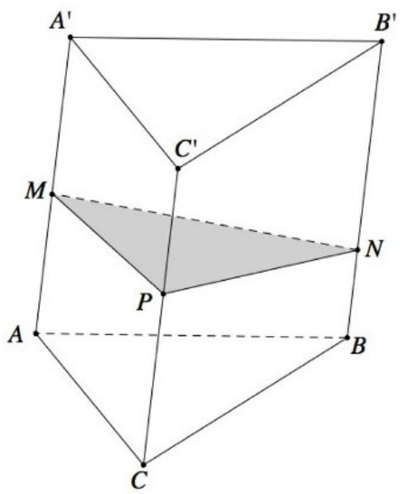


Ta có $\dfrac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{V_{S.A'C'D'}}{2V_{S.ACD}}+\dfrac{V_{S.A'C'B'}}{2V_{S.ACB}}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SD'}{SD}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\dfrac{SB'}{SB}$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{SA'}{SA}.\dfrac{SC'}{SC}.\left(\dfrac{SB'}{SB}+\dfrac{SD'}{SD}\right)$.

CÔNG THỨC 7: Mặt phẳng (α) cắt các cạnh của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ lần lượt tại M,N,P sao cho $\dfrac{AM}{AA'}=x,\dfrac{BN}{BB'}=y,\dfrac{CP}{CC'}=z$. Khi đó $V_{ABC.MNP}=\dfrac{x+y+z}{3}V_{ABC.A'B'C'}$.

Chứng minh



Ta có $V_{ABCMNP} = V_{NACB} + V_{NACPM}$.

$V_{NACB}=\dfrac{BN}{BB'}\cdot V_{B'ACB}=\dfrac{BN}{BB'}\cdot\dfrac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}\quad (1)$.

$\dfrac{V_{NACPM}}{V_{B'ACC'A'}}=\dfrac{S_{ACPM}}{S_{ACC'A'}}=\dfrac{(CP+AM)\cdot\dfrac{1}{2}}{AA'}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{CP}{CC'}+\dfrac{AM}{AA'}\right)$

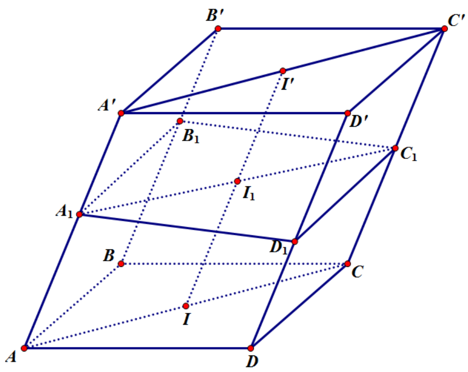
$\Rightarrow V_{NACPM}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{CP}{CC'}+\dfrac{AM}{AA'}\right)\cdot\dfrac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}\quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $V_{ABCMNP} = V_{NACB} + V_{NACPM} = \frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB'} + \frac{CP}{CC'} + \frac{AM}{AA'}\right) \cdot V_{ABCA'B'C'}$.

CÔNG THỨC 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, lấy A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt trên các cạnh AA', BB', CC', DD' sao cho bốn điểm ấy đồng phẳng. Ta có tỉ số thể tích hai khối đa diện:

$$\frac{V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}\right)$$

Chứng minh



Gọi I, I' lần lượt là trung điểm $AC, A'C'$. Ta chứng minh được ba mặt phẳng $(ACC'A'), (BDD'B'), (A_1B_1C_1D_1)$ đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến đồng quy tại I_1.

Ta có $(ABB'A') \mathbin{//} (CDD'C')$, suy ra $A_1B_1 \mathbin{//} C_1D_1$. Tương tự, ta cũng được $A_1D_1 \mathbin{//} B_1C_1$.

Suy ra $A_1B_1C_1D_1$ là hình bình hành, ta có I_1 là trung điểm A_1C_1.

Ta có II_1 là đường trung bình trong các hình thang AA_1C_1C và BB_1D_1D, suy ra $2II_1 = AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1$.

Suy ra: $\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'} = \frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}$.

Áp dụng công thức tỉ số thể tích trong khối lăng trụ tam giác, ta có:

$$V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} + V_{ACD.A_1C_1D_1}$$

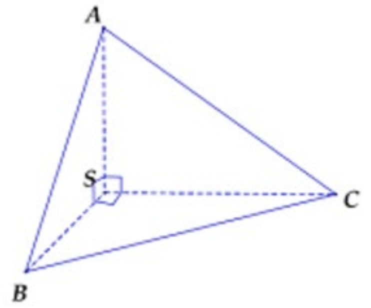
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{BB_1}{BB'} + \frac{CC_1}{CC'}\right).\frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'} + \frac{1}{3}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{DD_1}{DD'} + \frac{CC_1}{CC'}\right).\frac{1}{2}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{AA_1}{AA'} + \frac{CC_1}{CC'}\right).V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{2}\left(\frac{BB_1}{BB'} + \frac{DD_1}{DD'}\right).V_{ABCD.A'B'C'D'}.$$

CÔNG THỨC 9: Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác SAB, SBC, SAC lần lượt là S_1, S_2, S_3.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{\sqrt{2S_1S_2S_3}}{3}$.

Chứng minh



Đặt $SA = a,\ SB = b,\ SC = c$.

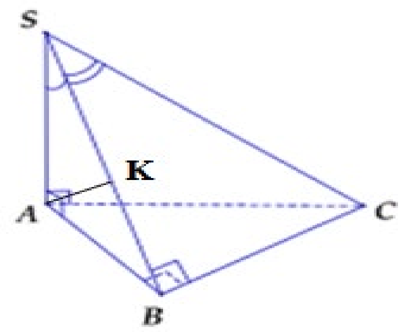
Suy ra $S_1 = \dfrac{1}{2}ab; S_2 = \dfrac{1}{2}bc; S_3 = \dfrac{1}{2}ca$.

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{\sqrt{a^2b^2c^2}}{6} = \frac{\sqrt{2\left(\frac{1}{2}ab\right)\left(\frac{1}{2}bc\right)\left(\frac{1}{2}ca\right)}}{3} = \frac{\sqrt{2.S_1.S_2.S_3}}{3}.$$

CÔNG THỨC 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $\widehat{BSC} = \beta; \widehat{ASB} = \alpha$.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$

Chứng minh



$SA = SB.\cos\alpha$.

(SAB) và (SBC) vuông góc với nhau.

Nên BC vuông góc (SAB).

Tam giác SBC vuông tại B nên $BC = SB.\tan\beta \Rightarrow S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}.SB.BC = \dfrac{1}{2}.SB^2.\tan\beta$

Kẻ AK vuông góc SB. Lúc này AK sẽ là khoảng cách từ A đến SBC. Do AK vuông góc BC và SB.

Ta có $AK = SA.sin\alpha = SB.sin\alpha.cos\alpha$.

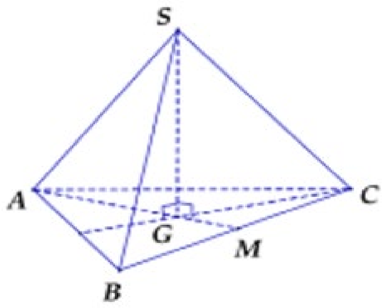
$$AK = \frac{SB\sin 2\alpha}{2}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}.$$

CÔNG THỨC 11: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, cạnh bên bằng b.

Khi đó: $V_{SABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$.

Chứng minh



$$AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

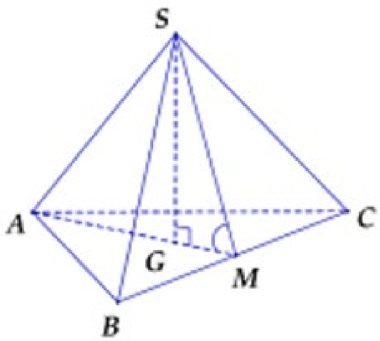
$$SG = \sqrt{b^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}}.$$

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\sqrt{\frac{3b^2 - a^2}{3}} = \frac{a^2\sqrt{3b^2 - a^2}}{12}.$$

CÔNG THỨC 12: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc α.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \dfrac{a^3\tan\alpha}{24}$.

Chứng minh



$GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

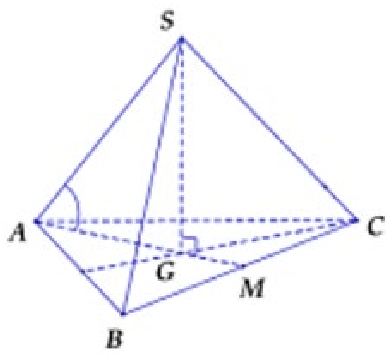
$SG = \frac{\sqrt{3}}{6}a\tan\alpha$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.\frac{\sqrt{3}}{6}atan\alpha = \frac{a^3tan\alpha}{24}$.

CÔNG THỨC 13: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có các cạnh bên bằng b và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy góc β.

Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

Chứng minh



$SG = b\sin\beta$.

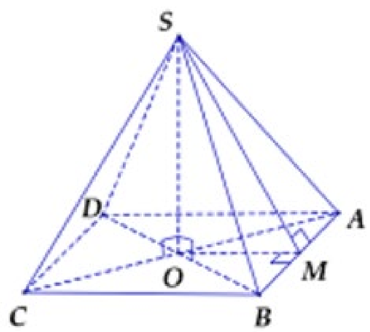
$AM = \frac{3}{2}AG = \frac{3}{2}.b.cos\beta \Rightarrow BC = \sqrt{3}.b.cos\beta$.

$S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}b^2\cos^2\beta \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}b^3.\sin\beta.cos^2\beta}{4}$.

CÔNG THỨC 14: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, và $SA = SB = SC = SD = b$.

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{4b^2-2a^2}}{6}$.

Chứng minh



$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

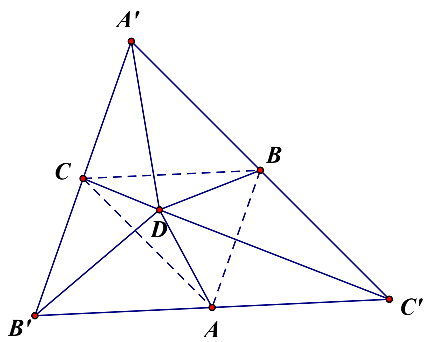
$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.a^2.\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}$.

CÔNG THỨC 15: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c$ (tứ diện gần đều).

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Chứng minh

Cách 1:



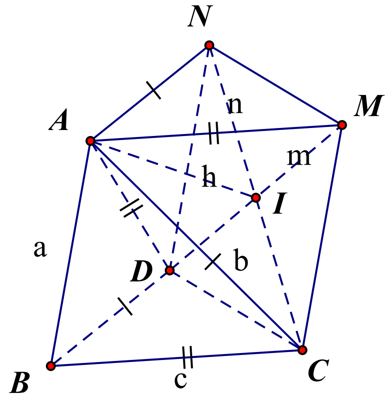
Dựng tứ diện $D.A'B'C'$ sao cho A, B, C lần lượt là trung điểm của $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$. Khi đó tứ diện $D.A'B'C$ có các cạnh DA', DB', DC' đôi một vuông góc.

Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{DA'B'C'} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC'$.

Ta có $\begin{cases} DA'^2 + DC'^2 = 4b^2 \\ DA'^2 + DB'^2 = 4a^2 \\ DB'^2 + DC'^2 = 4c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DA'^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2) \\ DB'^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2) \\ DC'^2 = 2(-a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$.

Khi đó: $V_{ABCD} = \frac{1}{24}DA'.DB'.DC' = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Cách 2*:* Dựng lăng trụ $AMNBCD$ như hình bên.



Từ giả thiết ta có: $MNDC$ là hình thoi; các tam giác CAN , DAM là các tam giác cân, suy ra: $AI \perp NC, AI \perp DM \Rightarrow AI \perp (CDMN)$.

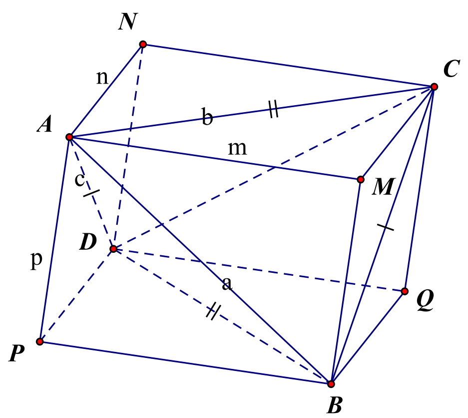
Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{2}V_{A.MNDC} = \frac{1}{2}.4V_{A.IMN} = 2V_{A.IMN} = \frac{1}{3}IA.IM.IN = \frac{1}{3}h.m.n$.

Từ $\begin{cases} h^2 + m^2 = c^2 \\ h^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + n^2 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ n^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ h^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \end{cases}$.

Suy ra:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Cách 3: Dựng hình hộp chữ nhật $AMCN.PBQD$ như hình bên.



Gọi các kích thước của hình hộp là $m,\ n,\ p$.

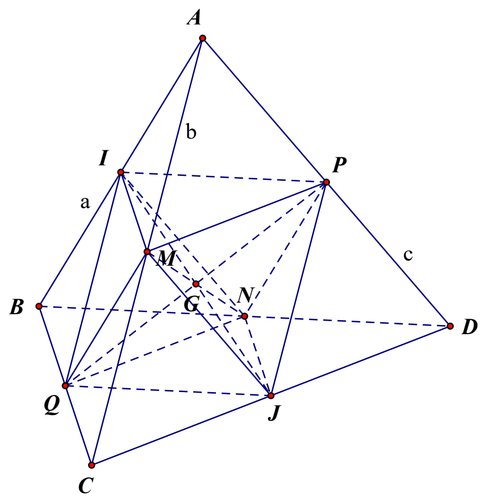
Ta có: $V_{PADB} = V_{MABC} = V_{QBCD} = V_{NACD} = \frac{1}{6}V_{AMCN.PBQD}$. Suy ra:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{AMCN.PBQD} = \frac{1}{3} m.n.p$.

Ta có: $\begin{cases} m^2 + n^2 = b^2 \\ m^2 + p^2 = a^2 \\ p^2 + n^2 = c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \\ n^2 = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2} \\ p^2 = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2} \end{cases}$.

$V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}$.

Cách 4:



Gọi I, J, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC, BD, AD, BC.

Ta thấy tứ giác $MINJ$ là hình thoi. Ta chứng minh được PQ vuông góc với AD và BC nên PQ vuông góc với $mp(IMJN)$.

Gọi G là giao điểm của các đường IJ, MN, PQ. Ta có

$V_{PMINJQ} = 2V_{P.MINJ} = 2.\frac{1}{3} PG.\frac{1}{2} IJ.MN = \frac{1}{6} PQ.IJ.MN$.

Vì $V_{AIMP} = V_{BINQ} = V_{CQMJ} = V_{DPNJ} = \frac{1}{8} V_{ABCD}$ nên

$V_{PIMJNQ} = V_{ABCD} - (V_{AIMP} + V_{BINQ} + V_{CQMJ} + V_{DPNJ}) = \frac{1}{2} V_{ABCD}$.

Suy ra $V_{ABCD} = 2V_{PIMJN} = \frac{1}{3} PQ.IJ.MN$.

Ta tính được:

$$IJ^2 = IC^2 - CJ^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} - \frac{\mathrm{CD}^2}{4} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Tương tự:

$$PQ^2 = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2}; \ MN^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}$$

Từ đó:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)}.$$

II. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Kiến thức cần nhớ:

1) Công thức tính: $V=\frac{1}{3}B.h$ (B: diện tích đáy và h là chiều cao của khối chóp).

2) Chiều cao của khối chóp thường tính bằng độ dài cạnh vuông góc với đáy

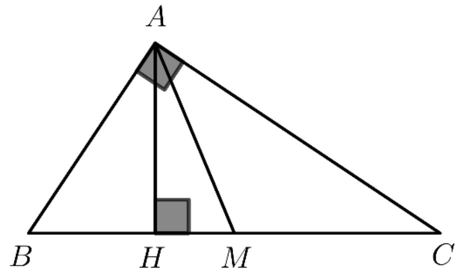
Loại 1: Tính bằng công thức

Phương pháp giải (kiến thức cần nhớ):

Ở loại toán này trình bày cách tính thể tích khối chóp có một cạnh vuông góc với đáy bằng sử dụng đơn thuần công thức $V=\frac{1}{3}B.h$, trong đó B: diện tích đáy và h là chiều cao của khối chóp. Ta cần nhớ một số kiến thức cơ bản sau:

1. Các hệ thức lượng trong tam giác vuông

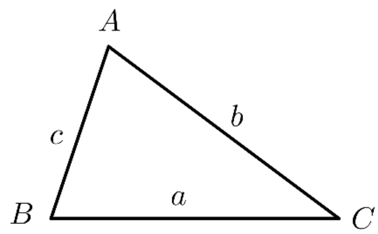
- $BC^2=AB^2+AC^2$
- $AH.BC=AB.AC$
- $AB^2=BH.BC$, $AC^2=CH.CB$
- $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$, $AH^2=BH.CH$



2. Các hệ thức trong tam giác thường

✓ Định lý hàm cosin:

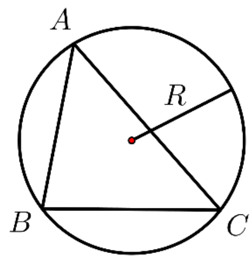
- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



✓ Định lý hàm sin:

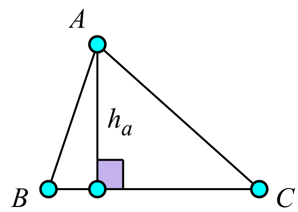
- $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

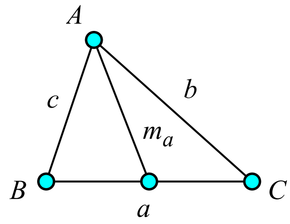
(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)



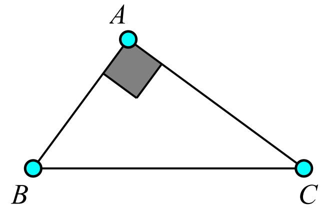
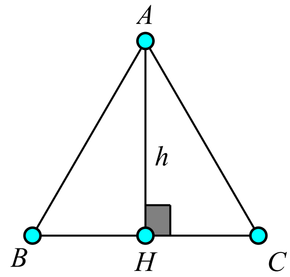
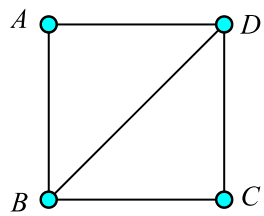
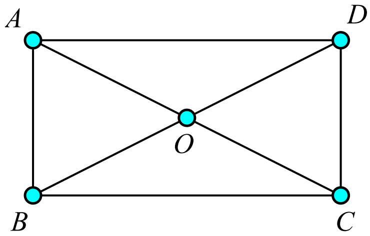
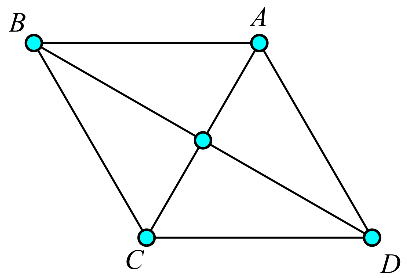
✓ Công thức tính diện tích tam giác:

- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
- $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$



• $S_{\Delta ABC}=\dfrac{abc}{4R}$, $S_{\Delta ABC}=pr$ • $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$	Trong đó: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, r bán kính đường tròn nội tiếp
✓ Công thức tính độ dài đường trung tuyến: • $m_a^2=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$, $m_b^2=\dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}$ • $m_c^2=\dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$	

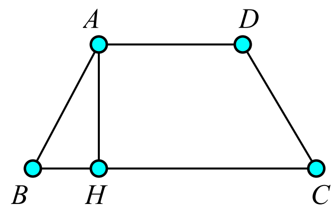
3. Diện tích đa giác:

✓ Tam giác vuông • Diện tích: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC$	
✓ Diện tích tam giác đều • Diện tích: $S=\dfrac{AB^2.\sqrt{3}}{4}$. • Đường cao: $h=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$.	
✓ Hình vuông: • Diện tích: $S=AB^2$ • Đường chéo: $AC=BD=AB\sqrt{2}$	
✓ Hình chữ nhật: • Diện tích: $S=AB.AD$ • Đường chéo: $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}$	
✓ Hình thoi: • Diện tích: $S=\dfrac{1}{2}AC.BD$ • Đặt biệt: 1 trong các góc trong của hình thoi bằng $60°$, khi đó hình thoi được tạo bởi 2 tam giác đều.	

✓ Hình thang:

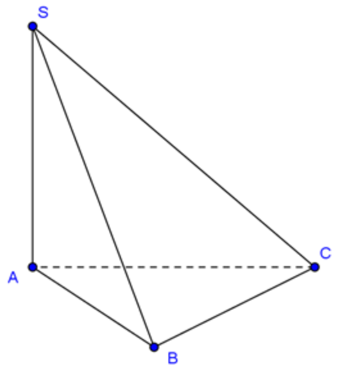
• Diện tích: $S = \dfrac{(AD+BC)AH}{2}$

• Đặc biệt: Hình thang vuông, hình thang cân



Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



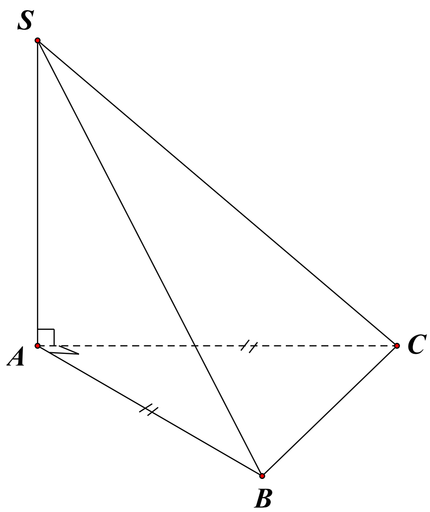
Đường cao: $SA = 2a$.

Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.AC}{2} = a^2$.

$\Rightarrow$ Thể tích: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{2a^3}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, ΔABC vuông cân tại A, $SA = BC = a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$

Lời giải.



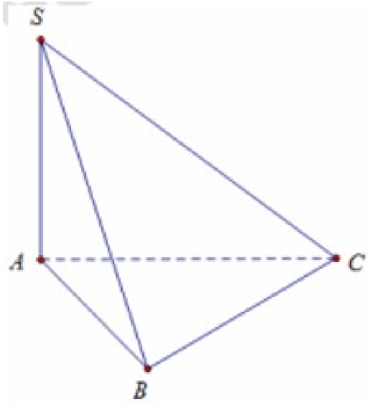
.

Ta có $AB = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ nên $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^3}{12}$.

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$, biết rằng $SB = a\sqrt{5}$.

Lời giải

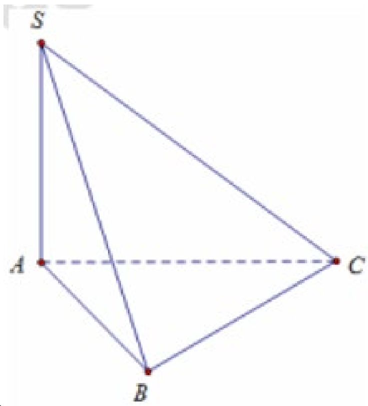


Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 2a; BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$

$S_{ABC} = \dfrac{AB.BC}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc đáy và $SA = 2\sqrt{3}a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

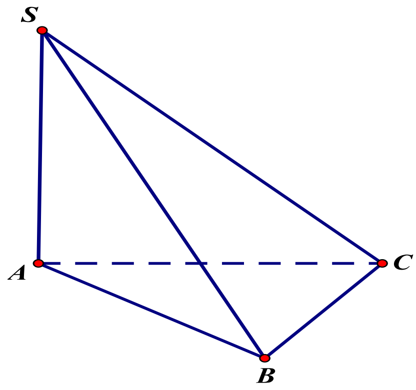
Lời giải



Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $h = SA = 2\sqrt{3}a \Rightarrow V = \dfrac{a^3}{2}$.

Câu 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $AB = a$, $AC = 2a$ và $\widehat{BAC} = 120°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

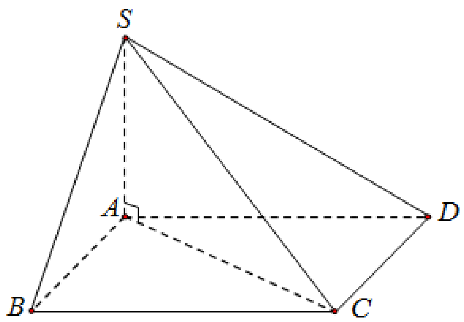


Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt).

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 6: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$, $AC=a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải

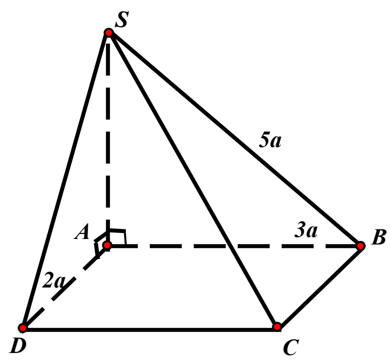


Ta có $ABCD$ là hình vuông có $AC=a\sqrt{2}$ suy ra $AB=a$.

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.a^2=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SA\perp(ABCD)$, $AB=3a$, $AD=2a$, $SB=5a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Lời giải



Ta có: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD}$.

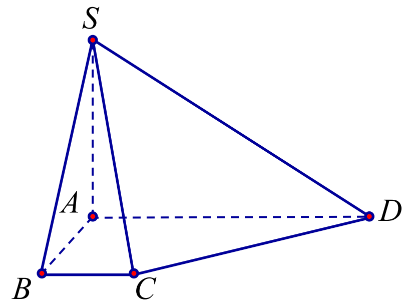
Xét tam giác vuông SAB có: $SA=\sqrt{SB^2-AB^2}=4a$.

Và $S_{ABCD}=AB.AD=6a^2$.

Nên $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.4a.6a^2=8a^3$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=a$, $AD=3a$, $BC=a$. Biết $SA=a\sqrt{3}$, tính thể tích khối chóp $S.BCD$ theo a.

Lời giải



Ta có $V_{S.BCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{BCD}$.

Lại có $S_{BCD}=S_{ABCD}-S_{ABD}=\dfrac{1}{2}AB.(AD+BC)-\dfrac{1}{2}AB.AD=\dfrac{1}{2}AB.BC=\dfrac{1}{2}a^2$.

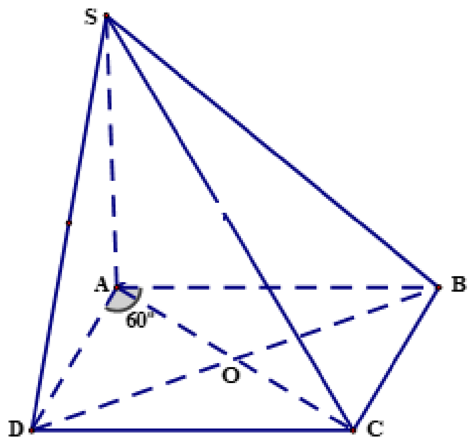
Mà $SA=a\sqrt{3}\Rightarrow V_{S.BCD}=\dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Nhận xét: Nếu đề bài bỏ giả thiết $AD=3a$ thì sẽ giải như sau:

Ta có $V_{S.BCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{BCD}=\dfrac{1}{3}SA.\dfrac{1}{2}d(D,BC).BC=\dfrac{1}{6}SA.AB.BC=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD}=60^\circ$, $SA\perp(ABCD)$, $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



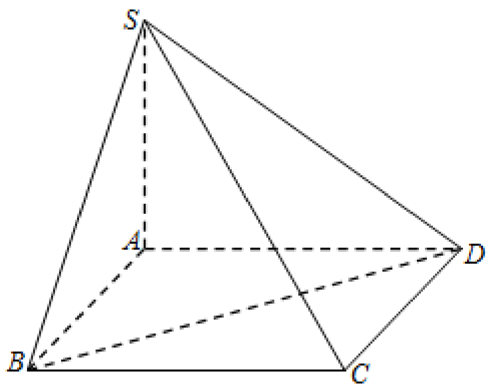
Tam giác ABD đều, có cạnh bằng a.

Suy ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác SBD là tam giác đều. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải



Đặt $AB = x$, ΔABD vuông cân tại $A \Rightarrow BD = x\sqrt{2}.$

Do ΔSBD là tam giác đều $\Rightarrow SB = SD = BD = x\sqrt{2}.$

Lại có ΔSAB vuông tại A

$\Rightarrow SA^2 + AB^2 = SB^2 \Leftrightarrow \left(a\sqrt{2}\right)^2 + x^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

LOẠI 2: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA ĐƯỜNG VÀ MẶT

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

Cách xác định góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

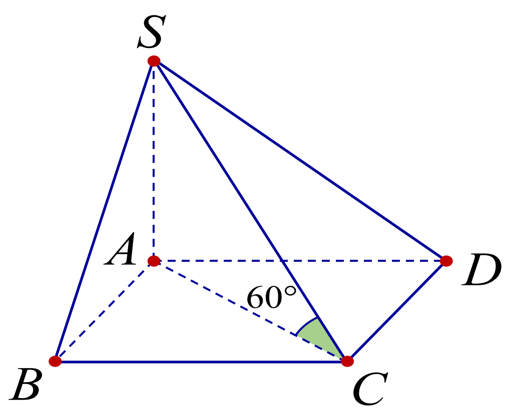
- Nếu $d \perp (P)$ thì $\widehat{(d,(P))} = 90°$.

- Nếu d không vuông góc với (P) thì $\widehat{(d,(P))} = \widehat{(d,d')}$ với d' là hình chiếu của d trên (P)

Chú ý: $0° \le \widehat{(d,(P))} \le 90°$.

Câu 11: Cho hình chóp $SABCD$, $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là $60°$. Tính thể tích khối chóp $SABCD$.

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$

$\Rightarrow \widehat{SCA} = 60°$.

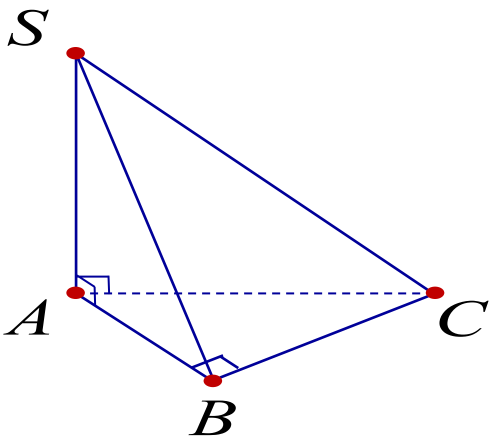
$ABCD$ là hình vuông nên $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

$SA = AC.\tan 60° = 2a\sqrt{6}$

Thể tích khối chóp $SABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}.4a^2.2a\sqrt{6} = \dfrac{8}{3}a^3\sqrt{6}$.

Câu 12: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $AC = a$ biết SA vuông góc với đáy (ABC) và SC hợp với (SAB) một góc $30°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ SB là hình chiếu của SC trên (SAB)

$\Rightarrow$ $\widehat{BSC} = 30°$

ABC là tam giác vuông cân nên $AB = BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

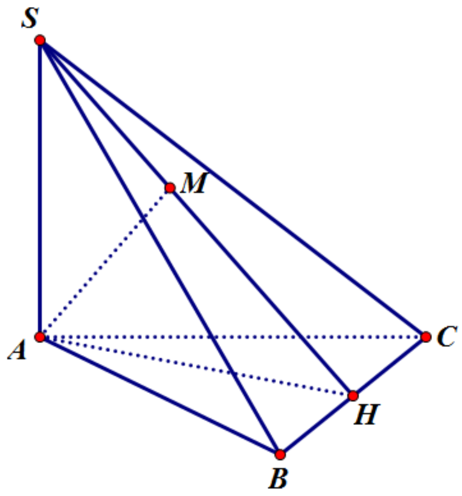
Xét ΔSBC vuông tại B, $SB = \dfrac{BC}{\tan 30°} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét ΔSAB vuông tại A, $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = a$

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3}{12}$.

Câu 13: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a biết SA vuông góc với đáy ABC và SA hợp với (SBC) một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $SABC$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC, dựng $AM \perp SH$

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AH$

$\Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp AM$.

$\Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow SM$ là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (SBC)

$\Rightarrow \widehat{ASH} = 45°$.

$\Rightarrow \Delta SAH$ là tam giác vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$.

LOẠI 3: TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC ĐÁY KHI BIẾT GÓC GIỮA HAI MẶT PHẲNG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

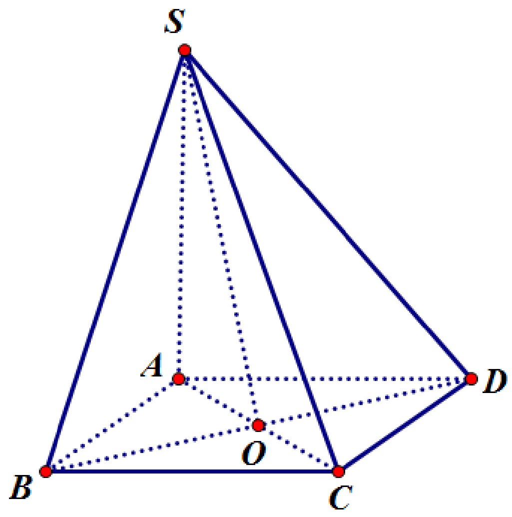
- Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau: Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến d. Từ một điểm I bất kì trên d ta dựng đường thẳng a trong (P) vuông góc với d và dựng đường thẳng b trong (Q) vuông góc với d. Khi đó góc giữa (P) và (Q) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

- Diện tích hình chiếu của đa giác: $S' = S.\cos\alpha$

(với S là diện tích đa giác nằm trong (P) và S' là diện tích hình chiếu vuông góc của đa giác đó trên (Q), α là góc giữa (P) và (Q))

Câu 14: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là $30°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow \begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SO \end{cases}$.

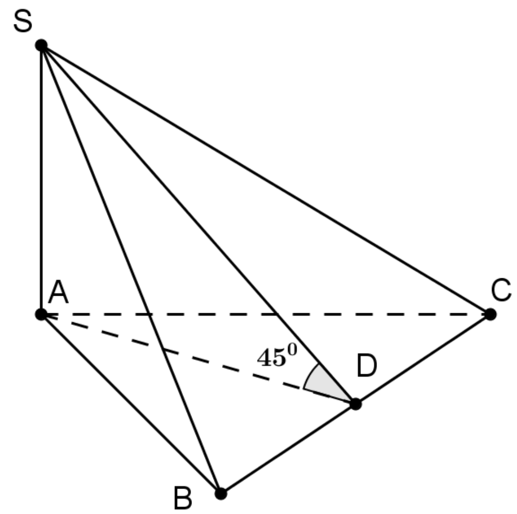
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$ hay $\widehat{SOA} = 30^0$.

Xét tam giác vuông SAO, cạnh $SA = AO.\tan\widehat{SOA} = \frac{1}{2}AC.\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Suy ra: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{6}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{6}}{18}$.

Câu 15: Cho khối chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC. Khi đó $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAD) \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp SD \end{cases}$.

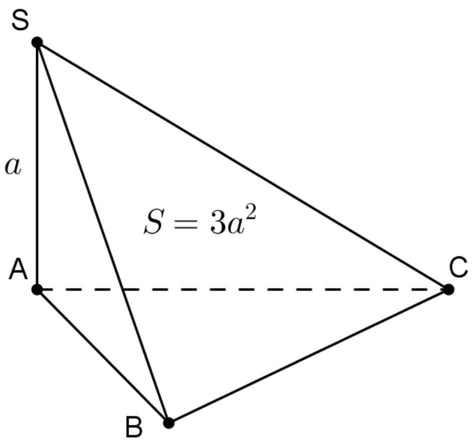
Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SDA}$ hay $\widehat{SDA}=45^0$.

Tam giác SAD là tam giác vuông cân tại A nên $SA=AD=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (tam giác ABC vuông cân tại A).

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{2}$ nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 16: Cho khối chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SA=a$ và diện tích tam giác SBC bằng $3a^2$.

Lời giải



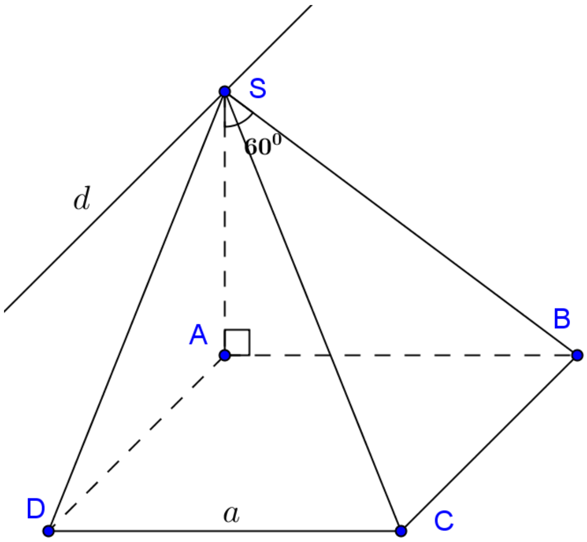
Do $SA\perp(ABC)$ nên ΔABC là hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC).

Suy ra $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta SBC}.\cos 60^0=3a^2.\cos 60^0=\frac{3a^2}{2}$.

Do đó $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{3a^2}{2}=\frac{a^3}{2}$.

Câu 17: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$.

Qua S kẻ đường thẳng d song song với AD. Khi đó d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Mặt khác $d \perp (SAB) \Rightarrow \begin{cases} d \perp SA \\ d \perp SB \end{cases}$ nên góc $\widehat{ASB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) hay $\widehat{ASB} = 60°$.

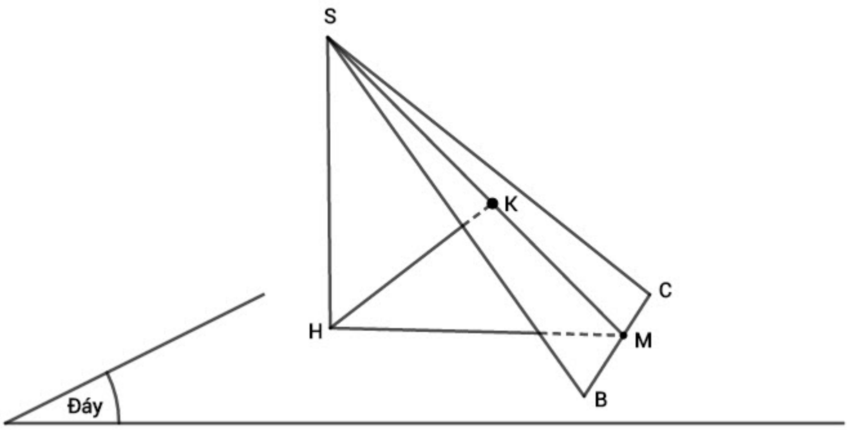
Xét tam giác vuông SAB, cạnh $SA = \dfrac{AB}{\tan \widehat{ASB}} = \dfrac{a}{\tan 60^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

LOẠI 4. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY KHI BIẾT KHOẢNG CÁCH TỪ 1 ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ):

1) Cần nhớ kiến thức cơ bản về xác định khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.



Xét tam giác SHM vuông tại H, HM vuông góc với BC và HK là đường cao

 Tính khoảng cách từ chân đường cao H đến mặt bên (SBC) ta sử dụng công thức

$$HK = \frac{HM.SH}{\sqrt{HM^2 + SH^2}}$$

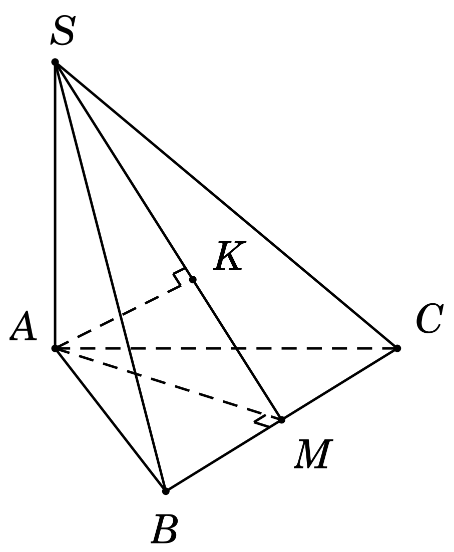
 Tính độ dài cạnh SH ta sử dụng công thức

$$SH = \frac{HM.HK}{\sqrt{HM^2 - HK^2}}$$

2) Trong trường hợp bài toán cho khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đáy đến mặt bên, ta phải dùng tỷ lệ để đưa về khoảng cách từ chân đường cao đến mặt bên.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. Tính $V_{S.ABC}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SM, suy ra $AK \perp SM$. (1)

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AK.$ (2)

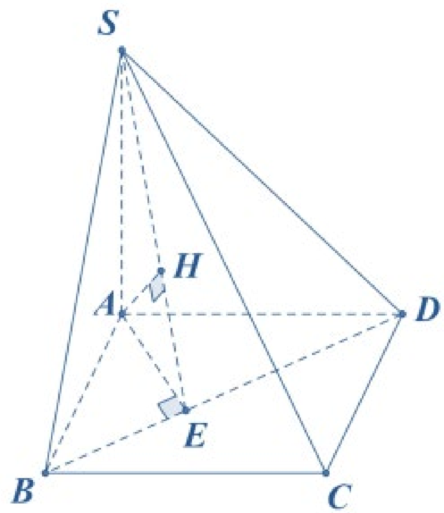
Từ (1) và (2), suy ra $AK \perp (SBC)$ nên $d\left[A,(SBC)\right] = AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Trong ΔSAM, có $SA = \frac{AK.AM}{\sqrt{AM^2 - AK^2}} = a\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$; cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{2a}{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Trong $(ABCD)$, kẻ $AE \perp BD, (E \in BD)$.

Trong $(ABCD)$, kẻ $AH \perp SE, (H \in SE)$ (1)

Vì $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AE \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAE) \Rightarrow BD \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2)

$\Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow d(A,(SBD)) = AH$.

Xét ΔABD vuông tại A có đường cao AE, ta có:

$$AE = \frac{AB.AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$$

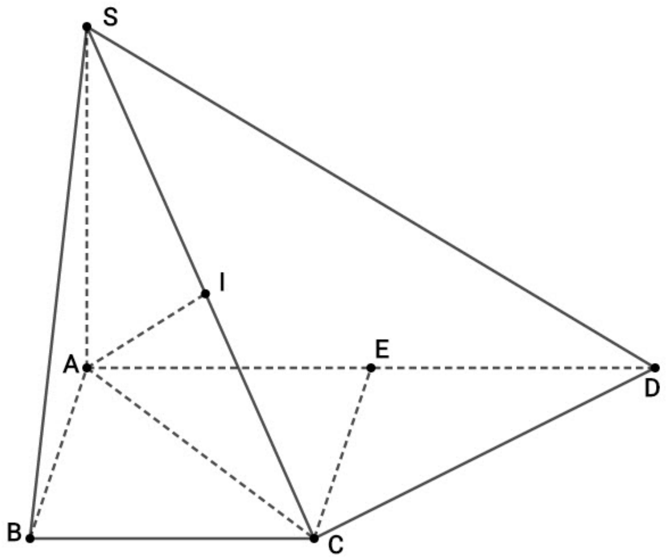
Xét ΔSAE vuông tại A có đường cao AH, ta có:

$$SA = \frac{AH.AE}{\sqrt{AE^2 - AH^2}} = \frac{\frac{2a}{3}.\frac{2a}{\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{4a^2}{5} - \frac{4a^2}{9}}} = a$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}AB.AD.SA = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi E là trung điểm của cạnh AD, khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

Lời giải



Ta có diện tích hình thang $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\left(AD+BC\right)AB=\frac{1}{2}\left(2a\sqrt{3}+a\sqrt{3}\right).a\sqrt{3}=\frac{9a^2}{2}$.

Ta có $d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2d\left(E,\left(SCD\right)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dễ thấy AC vuông góc CD do vậy kẻ AI vuông góc với SC thì $AI=d\left(A,\left(SCD\right)\right)$.

Xét tam giác vuông SAC có AI là đường cao, khi đó

$$SA=\frac{AC.AI}{\sqrt{AC^2-AI^2}}=\frac{a\sqrt{3}.\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{6}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{9a^2}{2}.\frac{a\sqrt{42}}{7}=\frac{3a^3\sqrt{42}}{14}$.

DẠNG 2: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP CÓ HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH LÀ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT TRÊN MẶT ĐÁY (KHÔNG TRÙNG VỚI CÁC ĐỈNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY)

PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CƠ BẢN)

+ Tóm tắt ngắn gọn kiến thức cơ bản cần nắm.

Công thức tính thể tích khối chóp: $V=\frac{1}{3}.B.h$. (Trong đó: B là diện tích đáy, h là chiều cao)

- Để tính thể tích của khối chóp, ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Xác định đường cao. Tính đường cao.

Bước 2: Nhận dạng đáy. Tính diện tích của đáy.

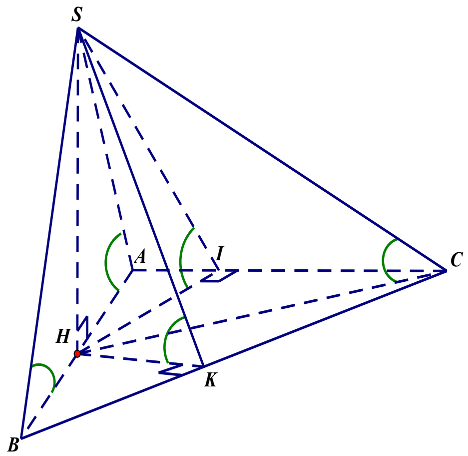
Bước 3: Tính thể tích theo công thức.

Chú ý:

1. Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau thì chân đường cao trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

2. Nếu $(SAB)\perp(ABC)$ **thì đường cao** SH **của tam giác** SAB chính là đường cao của khối chóp $S.ABC$

3. Góc giữa cạnh bên và đáy



$\widehat{\left(SA,(ABC)\right)}=\widehat{SAH}$, $\widehat{\left(SB,(ABC)\right)}=\widehat{SBH}$, $\widehat{\left(SC,(ABC)\right)}=\widehat{SCH}$.

Tóm lại, $\widehat{\left(SM,(ABC)\right)}=\widehat{SMH}$, $\forall M\in(ABC)$.

4. Góc giữa mặt bên và đáy:

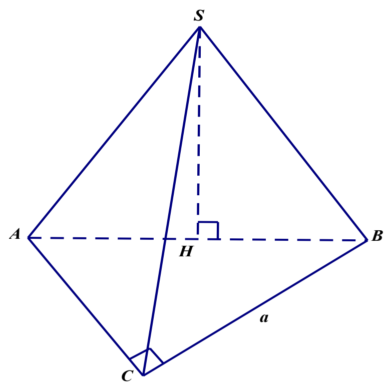
$\widehat{\left((SBC),(ABC)\right)}=\widehat{SKH}$, $\widehat{\left((SAC),(ABC)\right)}=\widehat{SIH}$.

Chú ý: $HK=AA'.\dfrac{BH}{AB}$, $HI=BB'.\dfrac{AH}{AB}$ (với AA', BB' là các đường cao của tam giác ABC)

TRƯỜNG HỢP 1: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM TRÊN CẠNH CỦA ĐA GIÁC ĐÁY (MỘT MẶT BÊN CỦA HÌNH CHÓP VUÔNG GÓC VỚI MẶT ĐÁY).

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C, tam giác SAB đều cạnh a nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích của khối chóp.

Lời giải

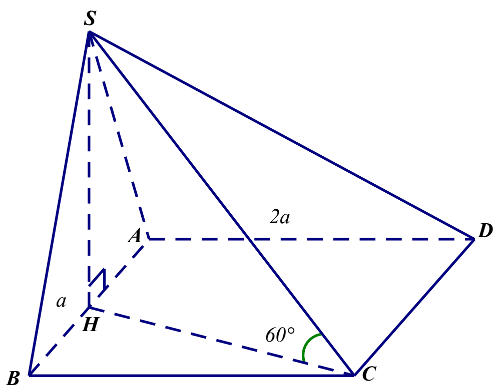


ΔSAB đều cạnh $a \Rightarrow$ đường cao $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$; $(SAB) \perp (ABC)$ nên SH cũng là đường cao của hình chóp $S.ABC$. ΔABC vuông cân tại C nên $AC = BC = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BC = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{24}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Đường thẳng SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



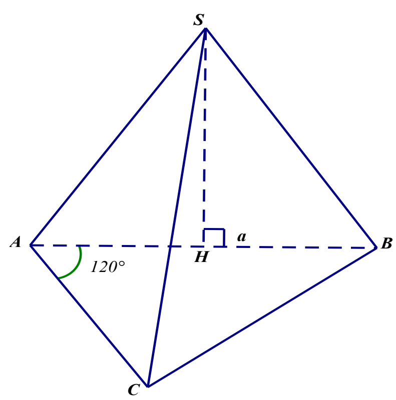
ΔSAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy nên hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB.

$CH = \sqrt{BC^2 + BH^2} = \dfrac{\sqrt{17}a}{2}$. Do $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \widehat{SCH} = 60°$ nên $SH = CH.\tan 60° = \dfrac{\sqrt{51}a}{2}$.

$S_{ABCD} = AB.CD = 2a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{51}a^3}{3}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân đỉnh A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

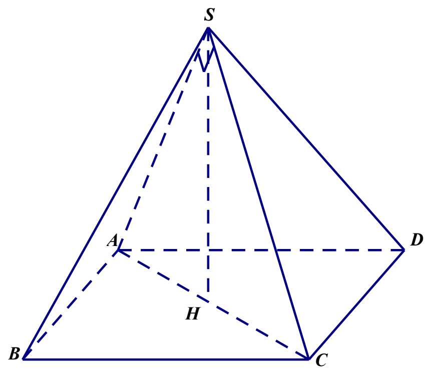


Gọi H là trung điểm của AB, ΔSAB đều cạnh a và vuông góc với đáy nên đường cao của hình chóp là $SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}a^2\sin 120° = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3}{8}.$$

Câu 24: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Do $(SAC)\perp(ABCD)$ nên đường cao SH của tam giác SAC là đường cao của khối chóp $S.ABCD$

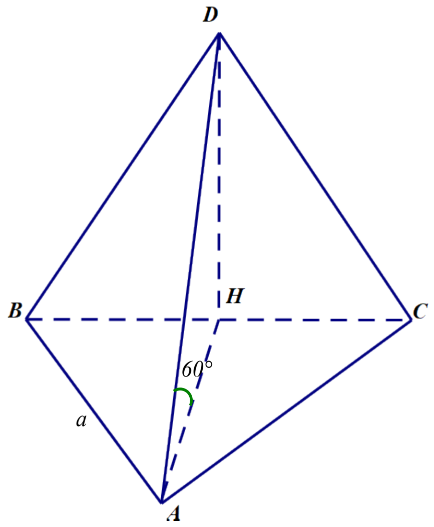
Tam giác SAC vuông tại S và $\widehat{(SA,(ABCD))} = \widehat{SAH} = 60° \Rightarrow SA = AC.\cos 60° = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$

$$\Rightarrow SH = SA.\sin 60° = \frac{\sqrt{6}a}{4}$$

$$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}.$$

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác BCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết AD hợp với (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích của khối tứ diện đã cho.

Lời giải



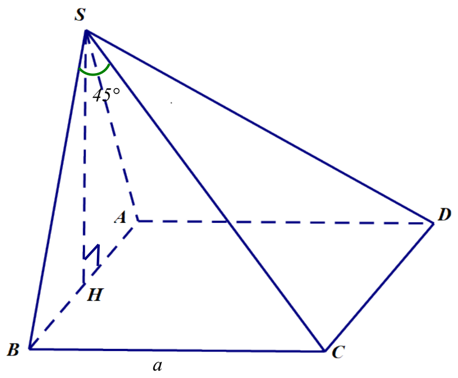
Do ΔBCD cân tại D và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) nên hình chiếu vuông góc của D trên (ABC) là trung điểm H của $BC \Rightarrow DH \perp (ABC)$

$$\widehat{(AD,(ABC))} = \widehat{DAH} = 60^\circ \Rightarrow DH = AH.\tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \Rightarrow V = \frac{1}{3}DH.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}a^3}{8}.$$

Câu 26: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. SC tạo với (SAB) một góc 45°. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

Lời giải



Do ΔSAB cân tại S và $(SAB) \perp (ABCD)$ nên hình chiếu

vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB $\Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$$BC \perp AB, BC \perp SH \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{BSC} = 45^\circ \Rightarrow SB = BC = a$$

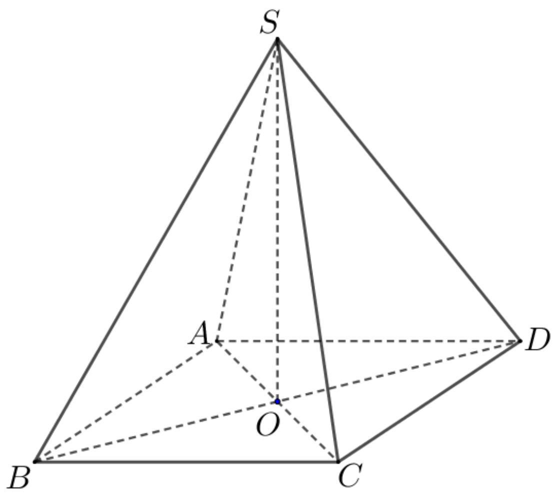
$\Rightarrow \Delta SAB$ đều cạnh a $\Rightarrow SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

TRƯỜNG HỢP 2: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN TRONG CỦA ĐA GIÁC ĐÁY

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $\sqrt{3}a$ tâm O, SO vuông góc với $(ABCD)$, $SO = a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải

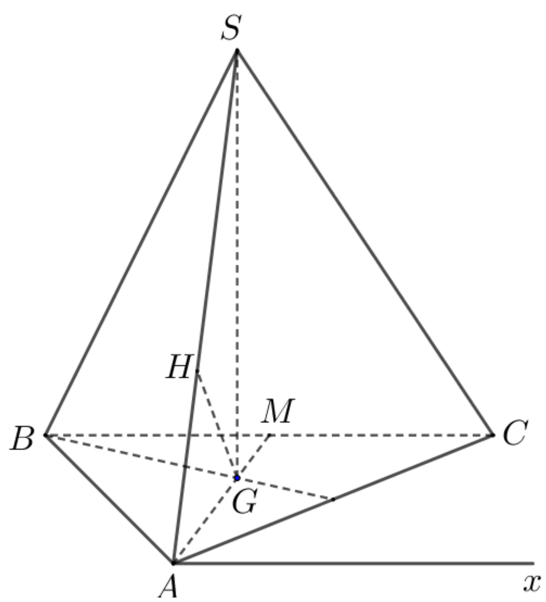


Diện tích mặt đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 3a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a.3a^2 = a^3$.

Câu 28: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh $2a$, khoảng cách giữa SA và BC bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC suy ra G là chân đường cao kẻ từ S xuống mặt đáy

$\Rightarrow SG \perp (ABC)$

Kẻ $Ax // BC \Rightarrow BC // (SA, Ax)$

Nên $d(SA, BC) = d(BC, (SA, Ax)) = d(M, (SA, Ax)) = \frac{3}{2} d(G, (SA, Ax))$ vì $MA = \frac{3}{2} GA$.

Kẻ $GH \perp SA$.

Ta có $\begin{cases} Ax \perp GA \\ Ax \perp SG \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (SAG) \Rightarrow Ax \perp GH$.

Khi đó $\begin{cases} GH \perp Ax \\ GH \perp SA \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SA, Ax) \Rightarrow d(G, (SA, Ax)) = GH$.

Do đó $d(SA, BC) = \frac{3}{2} GH \Rightarrow GH = a$.

Ta lại có $AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

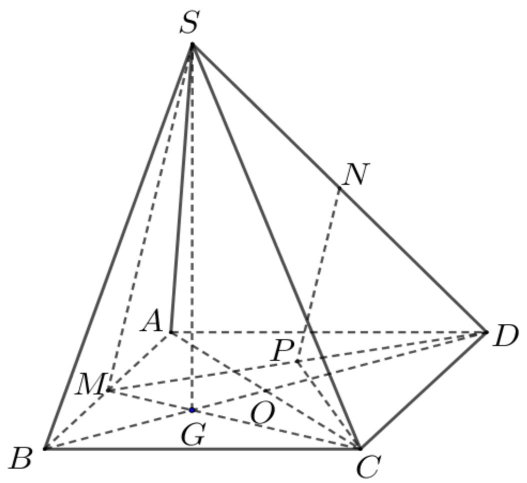
Nên $\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{SG^2} + \frac{1}{AG^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SG^2} = \frac{1}{GH^2} - \frac{1}{AG^2} = \frac{1}{4a^2} \Rightarrow SG = 2a$.

Mà $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$.

Vậy $V = \frac{1}{3} S_{ABC}.SG = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SD. Biết cosin góc giữa hai đường thẳng CN và SM bằng $\frac{2\sqrt{26}}{13}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ΔABC ta có $SG \perp (ABCD)$.

Đặt $SG = h$. Gọi P là trung điểm của DM .

$$NP // SM \Rightarrow \left(\widehat{SM, CN}\right) = \left(\widehat{NP, NC}\right) \Rightarrow \cos\widehat{CNP} = \pm\frac{2\sqrt{26}}{13}.$$

Vì đây là hình thoi và $\widehat{ABC} = 60°$ nên $\Delta ABC, \Delta ADC$ là các tam giác đều cạnh a .

Khi đó:

$$\widehat{MCD} = 90^0 \Rightarrow CP = \frac{DM}{2} = \frac{\sqrt{CM^2 + CD^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2}}{2} = \frac{\sqrt{7}a}{4}.$$

$$NP = \frac{SM}{2} = \frac{\sqrt{SG^2 + GM^2}}{2} = \frac{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}}{2}.$$

$$CN = \sqrt{\frac{2\left(CS^2 + CD^2\right) - SD^2}{4}} = \sqrt{\frac{2\left(CG^2 + SG^2 + CD^2\right) - \left(SG^2 + GD^2\right)}{4}}.$$

$$= \sqrt{\frac{2\left(\frac{a^2}{3} + h^2 + a^2\right) - \left(h^2 + \frac{4}{3}a^2\right)}{4}} = \sqrt{\frac{3h^2 + 4a^2}{12}}.$$

Ta có: $\cos\widehat{CNP} = \dfrac{NP^2 + CN^2 - CP^2}{2NP.CN} = \dfrac{\frac{1}{4}\left(h^2 + \frac{a^2}{12}\right) + \frac{3h^2 + 4a^2}{12} - \frac{7a^2}{16}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{12}}.\sqrt{\frac{3h^2 + 4a^2}{12}}}$

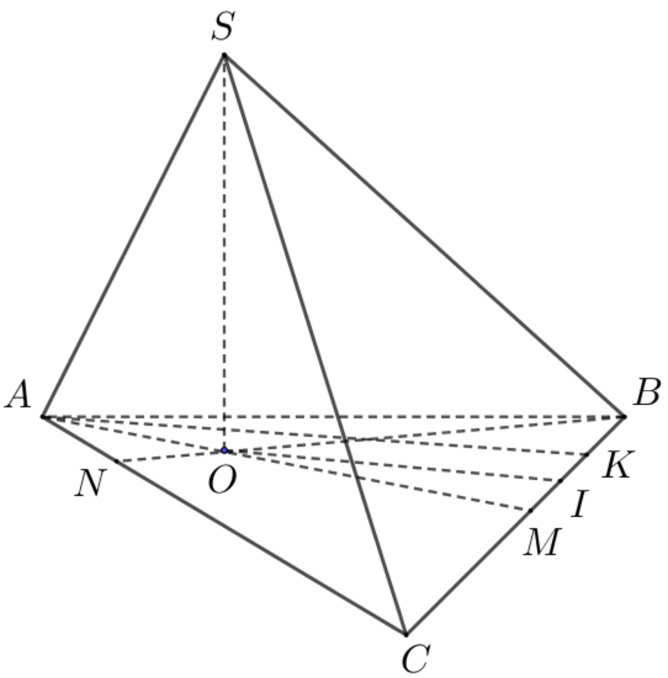
$$= \frac{6h^2 - a^2}{\sqrt{12h^2 + a^2}.\sqrt{3h^2 + 4a^2}}.$$

Do đó: $\dfrac{6h^2 - a^2}{\sqrt{12h^2 + a^2}\sqrt{3h^2 + 4a^2}} = \pm\dfrac{2\sqrt{26}}{13} \Leftrightarrow h = \sqrt{\dfrac{19}{6}}a$.

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.h=\frac{1}{3}.2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\right).\sqrt{\frac{19}{6}}a=\frac{\sqrt{38}a^3}{12}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi O là chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC).

Đặt $d(O,BC)=a$, $d(O,AC)=b$, $d(O,AB)=c$, $SO=h$.

Ta có $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OAC}+S_{\Delta OAB}\Rightarrow a+b+c=\frac{\sqrt{3}}{2}(1)$ (vì ΔABC đều cạnh bằng 1).

Mặt khác $\frac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\frac{OM}{AM}=\frac{OI}{AK}=\frac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SBC))=\frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Suy ra $\frac{2}{a^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{a^2}\Rightarrow a=h$.

Tương tự $\frac{d(O,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{d(O,AC)}{d(B,AC)}=\frac{2b}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SAC))=\frac{2b}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{15}}{10}=\frac{b}{\sqrt{5}}$.

Suy ra $\frac{5}{b^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{b^2}\Rightarrow b=2h$.

Tương tự $\frac{d(O,(SAB))}{d(C,(SAB))}=\frac{d(O,AB)}{d(C,AB)}=\frac{2c}{\sqrt{3}}\Rightarrow d(O,(SAC))=\frac{2c}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{30}}{20}=\frac{c}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $\frac{10}{c^2}=\frac{1}{h^2}+\frac{1}{c^2}\Rightarrow c=3h$.

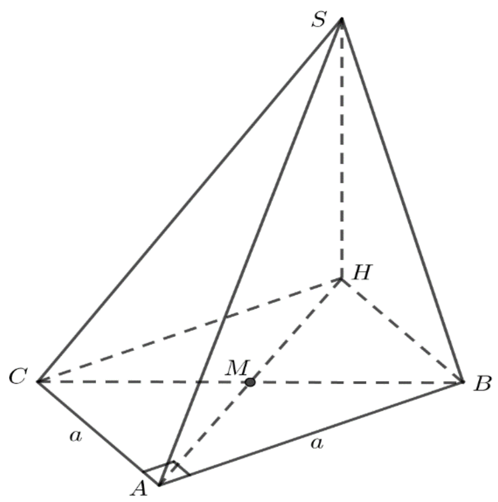
$(1)\Rightarrow h+2h+3h=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{12}\Rightarrow V=\frac{1}{3}.SO.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{48}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{1}{48}$.

TRƯỜNG HỢP 3: HÌNH CHIẾU CỦA ĐỈNH TRÊN MẶT ĐÁY NẰM Ở MIỀN NGOÀI CỦA ĐA GIÁC ĐÁY

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, biết $AB=AC=a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với A qua BC. Góc giữa SA và đáy bằng 45°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Lời giải



Vì H đối xứng với A qua BC và ΔABC vuông cân tại A nên $ABHC$ là hình vuông.

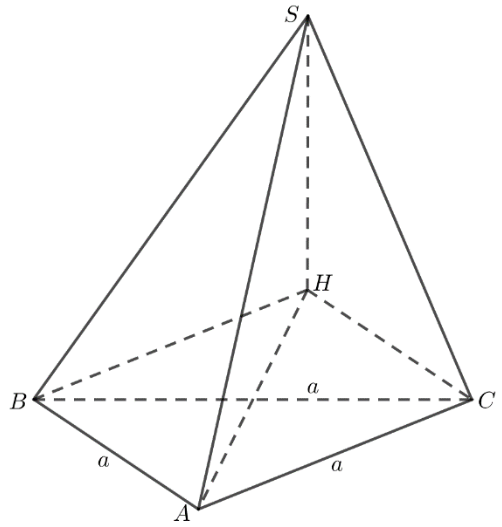
Do $SH\perp(ABC)$ nên góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SAH}=45^{o}$.

Suy ra $SH=AH=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H đối xứng với A qua BC. Biết $SA=2a$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a.

Lời giải



Vì H đối xứng với A qua BC và ΔABC đều nên $AH = 2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do $SH \perp (ABC)$ nên tam giác SAH vuông tại H, do đó $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

DẠNG 3: THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU

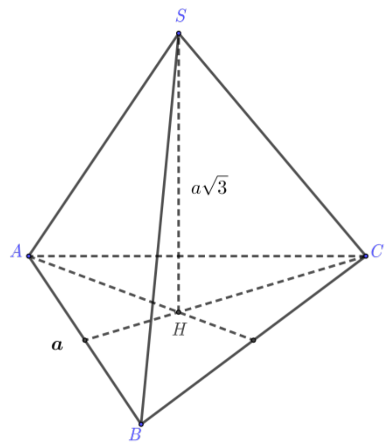
PHƯƠNG PHÁP GIẢI (KIẾN THỨC CẦN NHỚ)

1) Hình chóp đều: Là hình chóp có đáy là một đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.
2) Tính chất: Trong hình chóp đều ta có:
- Chân đường cao là tâm đường tròn ngoại tiếp đáy.
- Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau.
- Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.

3) Tứ diện đều: Hình hình chóp có bốn mặt là tam giác đều.
Đường cao là đường kẻ từ đỉnh qua tâm của đáy.

Câu 33: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, đường cao của hình chóp bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



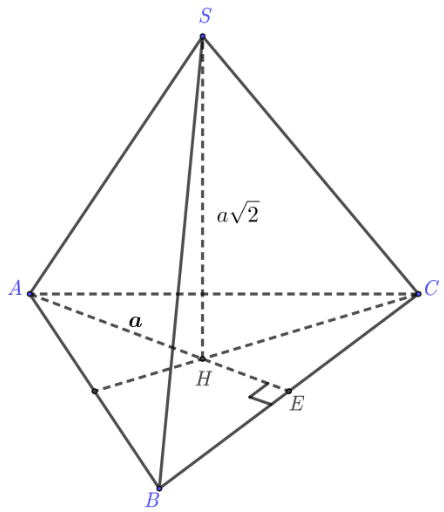
Gọi H là trọng tâm tam giác đều ABC. Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{4}$.

Câu 34: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đường cao bằng $a\sqrt{2}$. Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC, $AH = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó $AE \perp BC$ tại E.

Do H là trọng tâm của tam giác đều ABC nên $AE = \dfrac{3}{2}AH = \dfrac{3a}{2}$.

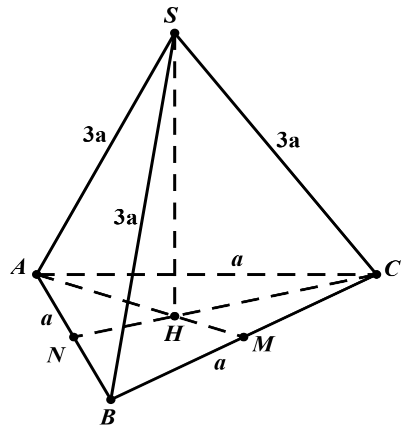
Xét tam giác ABE vuông tại E: $AB = \dfrac{AE}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\frac{3a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}.BC.AE=\frac{1}{2}.a\sqrt{3}.\frac{3}{2}a=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.AH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 35: Thể tích khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $3a$.

Lời giải



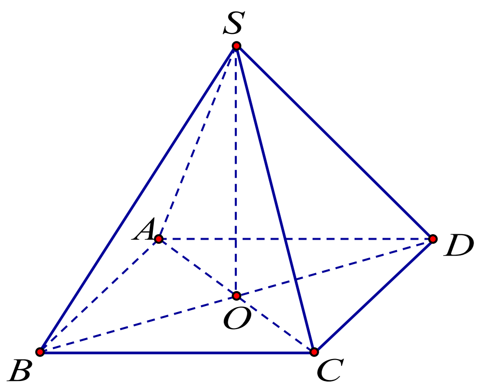
Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow SH\perp(ABC)$. Khi đó $V=\frac{1}{3}SH.\,S_{\Delta ABC}$ (do khối chóp $S.ABC$ đều).

Ta có $AH=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$; $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

Suy ra $V=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{26}}{\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{26}}{12}$ (đvtt).

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 20, cạnh bên bằng 30. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

Lời giải



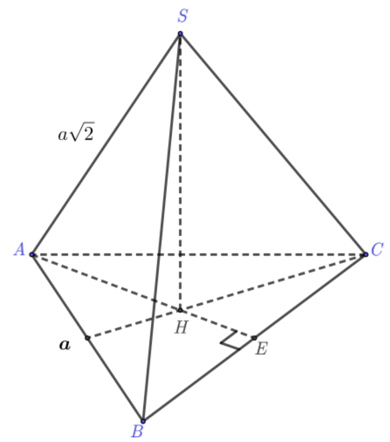
Trong mặt phẳng $ABCD$, gọi $O=AC\cap BD$, do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$. Đáy là hình vuông cạnh 20 $\Rightarrow AO=\frac{AC}{2}=10\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông SAO có $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=10\sqrt{7}$.

Thể tích V của khối chóp trên là $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}10\sqrt{7}.400=\frac{4000\sqrt{7}}{3}$.

Câu 37: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC (1) và H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SH\perp(ABC)$ tại H. Do (1) nên $AE\perp BC$ tại E.

Xét tam giác ABE vuông tại E:

$AE=AB.\sin\widehat{ABE}=a.\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AH=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

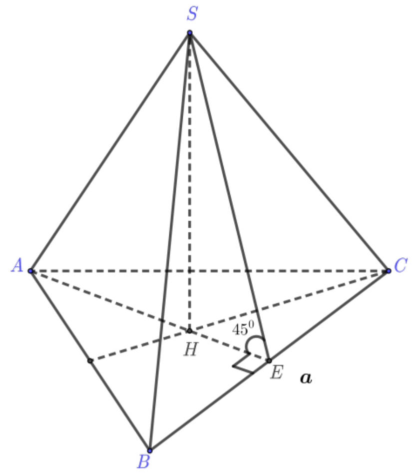
Xét tam giác SAH vuông tại H: $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{15}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{5}}{12}$.

Câu 38: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm của BC và H là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H và $AE \perp BC$ tại E.

Ta có $SE \perp BC$ tại E (do tam giác SBC cân tại S).

Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SE \perp BC,\ SE \subset (SBC) \\ AE \perp BC,\ AE \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = (SE, AE) = \widehat{SEA} = 45^\circ$.

Xét tam giác ABE vuông tại E: $AE = AB.\sin\widehat{ABE} = a.\sin 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HE = \dfrac{1}{3}.AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

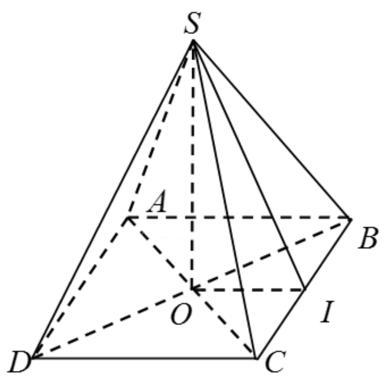
Xét tam giác SHE vuông tại H: $SH = HE.\tan\widehat{SEA} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\tan 45° = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{24}$.

Câu 39: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa mặt bên và mặt phẳng chứa đa giác đáy bằng $60°$?

Lời giải



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông, gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì ta có SO là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a.a = a^2$.

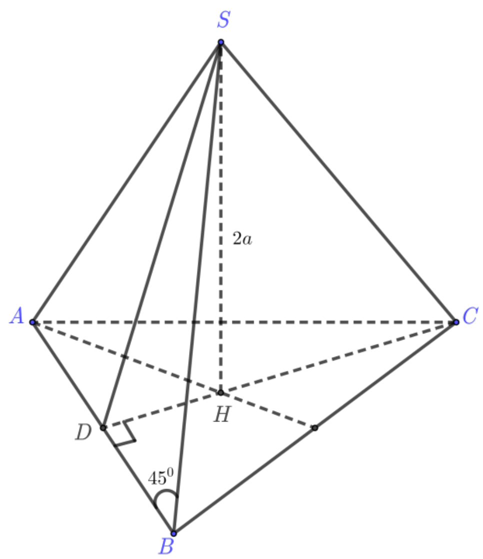
Gọi I là trung điểm của BC thì ta có $OI \perp BC$ và $SI \perp BC$ nên góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{SIO} = 60°$.

Từ đó: $SO = OI.\tan\widehat{SIO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 40: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có chiều cao bằng $2a$, $\widehat{SBA} = 45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm cạnh AB. Khi đó $SH \perp (ABC)$ tại H. Tam giác ABC đều nên $CD \perp AB$ tại D, tam giác SAB cân tại S nên $SD \perp AB$ tại D.

Xét tam giác SBD vuông tại D: $SD = BD.\tan\widehat{SBD} = BD.\tan 45^\circ = BD$.

Xét tam giác CDB vuông tại D:

$$CD = BD.\tan\widehat{CBD} = BD.\tan 60^\circ = BD\sqrt{3} \Rightarrow DH = \frac{1}{3}CD = \frac{BD\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác SDH vuông tại H:

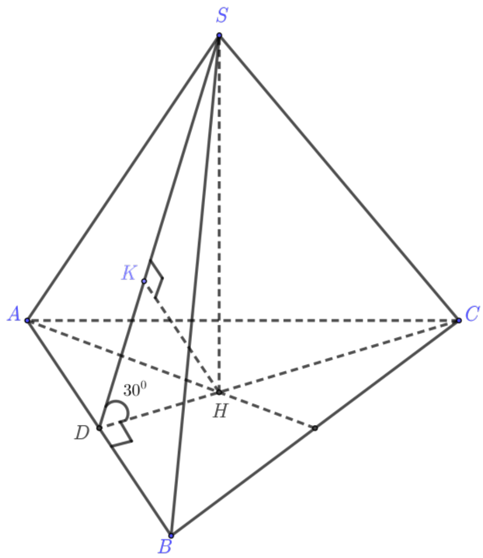
$$SH^2 + DH^2 = SD^2 \Leftrightarrow 4a^2 + \frac{BD^2}{3} = BD^2 \Rightarrow BD = a\sqrt{6} \Rightarrow AB = 2BD = 2a\sqrt{6}.$$

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC}=\frac{1}{2}.2a\sqrt{6}.2a\sqrt{6}.\sin 60^{\circ}=6\sqrt{3}a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}=\frac{1}{3}.2a.6\sqrt{3}a^2=4\sqrt{3}a^3$.

Câu 41: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt đáy bằng 30°. Khoảng cách từ chân đường cao của hình chóp đến mặt phẳng (SAB) bằng a. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC và D là trung điểm của cạnh AB. Khi đó $SH\perp(ABC)$ tại H. Do tam giác ABC đều nên $CD\perp AB$ tại D, tam giác SAB cân tại S nên $SD\perp AB$ tại D. Ta có $\begin{cases}(SAB)\cap(ABC)=AB\\ SD\perp AB, SD\subset(SAB)\\ CD\perp AB, CD\subset(ABC)\end{cases}\Rightarrow((SAB),(ABC))=(SD,CD)=\widehat{SDC}=30^{\circ}$.

Trong tam giác SDH, dựng $HK\perp SD$ tại K.

Ta có $\begin{cases}AB\perp SD\\ AB\perp DC\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SCD)$ mà $HK\subset(SCD)$ nên $HK\perp AB$.

Ta có $\begin{cases}HK\perp SD,\ HK\perp AB\\ SD\cap AB=D\\ SD, AB\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow HK\perp(SAB)$ tại K $\Rightarrow d(H,(SAB))=HK=a$.

Xét tam giác DHK vuông tại K: $DH=\frac{HK}{\sin\widehat{SDC}}=\frac{HK}{\sin 30^{\circ}}=2a\Rightarrow DC=3DH=6a$.

Xét tam giác BCD vuông tại D: $BC=\frac{DC}{\sin\widehat{ABC}}=\frac{6a}{\sin 60^{\circ}}=4a\sqrt{3}$.

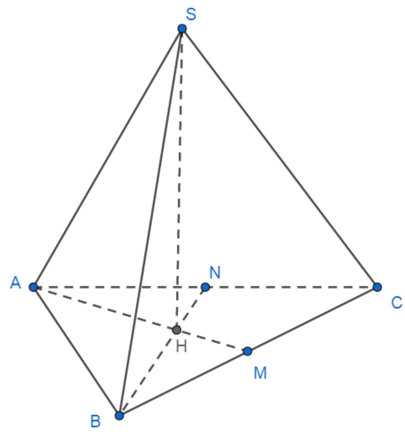
Xét tam giác SDH vuông tại H : $SH = DH.\tan\widehat{SDC} = 2a.\tan 30^\circ = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.4a\sqrt{3}.4a\sqrt{3}.\sin 60^\circ = 12a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{2a}{\sqrt{3}}.12a^2\sqrt{3} = 8a^3$.

Câu 42: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài đường cao bằng a, diện tích mặt bên bằng $\frac{a^2\sqrt{39}}{12}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng.

Lời giải



Gọi H là tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SH \perp (ABC)$, $SH = a$.

Đặt $BC = x$.Khi đó $HM = \frac{1}{3}AM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$

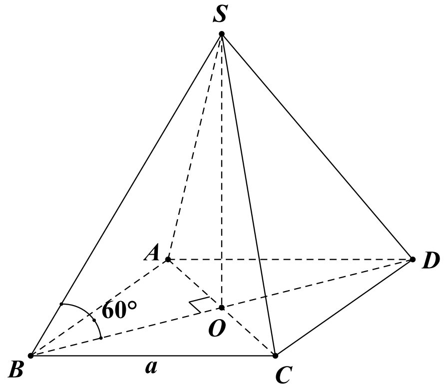
Xét ΔSHM vuông tại H. Có $SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2}$.

$$S_{\Delta SBC} = \frac{a^2\sqrt{39}}{12} = \frac{1}{2}BC.SM = \frac{1}{2}.x.\sqrt{a^2 + \left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2} \Rightarrow x = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 43: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



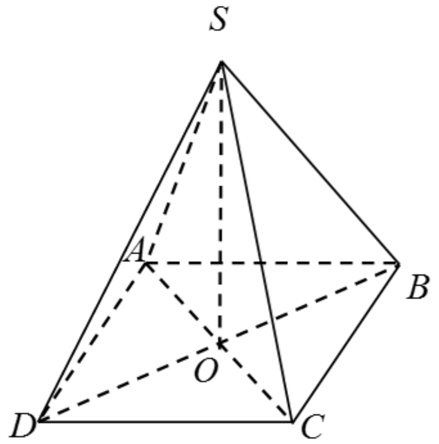
Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ và $\widehat{SBO} = 60°$.

Đường cao $SO = OB.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 44: Tính thể tích khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và góc ở đỉnh của mặt bên bằng 60^0?

Lời giải



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông, gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì ta có SO là đường cao của hình chóp $S.ABCD$.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$

Vì $\widehat{BSC} = 60^0$ nên tam giác SBC đều $SB = a$ vậy cạnh bên của hình chóp là a

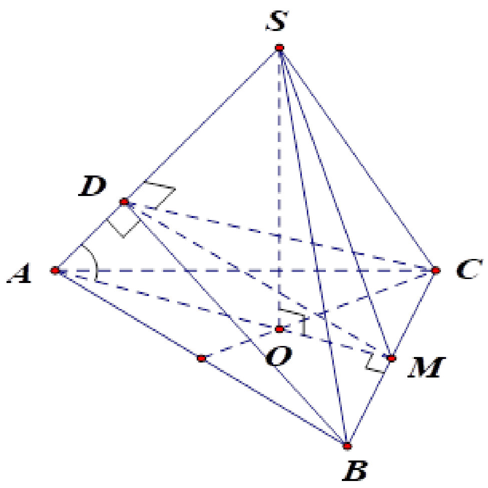
Ta có: $BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD là tam giác vuông cân đỉnh S.

Đường cao $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 45: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh AB bằng a. Các cạnh bên SA, SB, SC cùng tạo với mặt đáy một góc 60°. Gọi D là giao điểm của SA với mặt phẳng qua BC và vuông góc với SA. Tính thể tích V của khối chóp $S.BCD$?

Lời giải



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và M là trung điểm BC.

Vì $S.ABC$ là chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

Kẻ $BD \perp SA$ tại D. Ta có $\begin{cases} BC \perp SM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SA$.

+) $\begin{cases} SA \perp BD \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BCD)$.

+) Trong ΔSAO: $\tan \widehat{SAO} = \tan 60^\circ = \dfrac{SO}{AO} \Rightarrow SO = AO \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$

+) Trong ΔSAO: $\cos \widehat{SAO} = \cos 60^\circ = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

+) Trong ΔSAC: $\cos \widehat{ASC} = \dfrac{SA^2 + SC^2 - AC^2}{2SA \cdot SC} = \dfrac{5}{8}$.

+) Trong ΔSDC: $SD = SC \cdot \cos \widehat{ASC} = \dfrac{5a}{4\sqrt{3}}$.

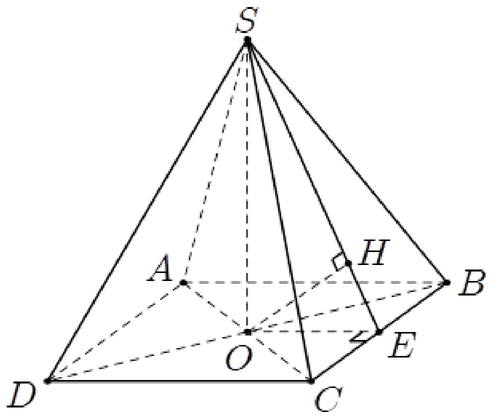
+) $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3} a \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

+) $\dfrac{V_{S.BCD}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SD}{SA} = \dfrac{\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}}{\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow V_{S,BCD} = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12} = \dfrac{5a^3\sqrt{3}}{96}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.BCD$ là $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{96}$.

Câu 46: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác SAC đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{9}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $\dfrac{d(G,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{2}{3}$. Suy ra $d(O,(SBC)) = \dfrac{3}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{9} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Gọi E là trung điểm của cạnh BC $\Rightarrow OE \perp BC$.

Kẻ $OH \perp SE, (H \in SE)\,(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp OE \\ BC \perp SO \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SOE) \Rightarrow BC \perp OH\,(2).$$

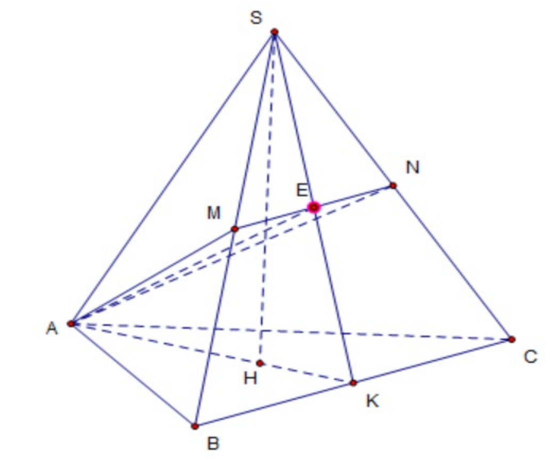
Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (SBC) \Rightarrow OH = d(O,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OE^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 47: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Biết $(AMN) \perp (SBC)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm MN, K là trung điểm BC, H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: S,E,K thẳng hàng và A,H,K thẳng hàng.

Ta có: $\Delta SAB=\Delta SAC \Rightarrow AM=AN \Rightarrow$ tam giác AMN cân tại $A \Rightarrow AE\perp MN$

Ta có: $\begin{cases}(AMN)\perp(SBC)\\(AMN)\cap(SBC)=MN\\AE\perp MN\\AE\subset(AMN)\end{cases}\Rightarrow AE\perp(SBC)$

$\Rightarrow AE\perp SK$

Ta có: $\dfrac{SE}{SK}=\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow E$ là trung điểm $SK \Rightarrow$ tam giác SAK cân tại A

$\Rightarrow AS=AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{3a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{15}}{6}$, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Suy ra: $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

DẠNG 4: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG – ĐỀU

Câu 48: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BA=BC=a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Câu 49: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3$, $AC=5$, $AA'=8$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

Câu 50: Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đoạn $A'C=a$. Thể tích khối đó là

Câu 51: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $AB=a$, $BC=2a$, $AA'=a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

Câu 52: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=4a$ và $AA'=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 53: Thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=a\sqrt{3}$ bằng

Câu 54: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

Câu 55: Cho khối lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Câu 56: Cho hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng

Câu 57: Cho lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Câu 58: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $C'A=a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C}=45°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Câu 59: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy bằng 45^o. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 60: Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120^o$, đường thẳng AC_1 tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^o. Tính thể tích khối hộp đã cho

Câu 61: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, $A'M=a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 62: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$, biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 45^o. Thể tích lăng trụ là:

Câu 63: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $A'BCD'$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a.

Câu 64: Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a, AB = a$. Mặt bên $BB'C'C$ là hình vuông. Khi đó thể tích lăng trụ là

Câu 65: Thể tích của khối lăng trụ lục giác đều có tất cả các cạnh bằng a

Câu 66: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60°$. Cho biết góc giữa đường chéo BD' và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối hộp đã cho là

Câu 67: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C)$ bằng 30^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

Câu 68: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 69: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Đường thẳng $A'B$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

Câu 70: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 71: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = a$, $AB' = a\sqrt{7}$. Thể tích V của khối lăng trụ là

Câu 72: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$. Đáy ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Câu 73: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 74: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.

Câu 75: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ đều và có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 76: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa mặt phẳng $(D'AB)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là 30^0. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Câu 77: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Câu 78: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu 79: Cho khối hộp hình chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy hình vuông, $AC = 2\sqrt{3}a$, $((C'BD),(ABCD)) = 60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

Câu 80: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng a. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

Câu 81: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BD bằng $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

DẠNG 5: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 82: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Câu 83: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng 4 a. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC}=30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ bằng

Câu 84: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$, góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Câu 85: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 86: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của B' lên $mp(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD, biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Câu 87: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=3a, AC=5a$, hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC. Biết mặt bên $ACC'A'$ hợp với mặt đáy $A'B'C'$ một góc 60^0, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

Câu 88: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120°$. Hình chiếu vuông góc của D' lên $(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD, góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(A'B'C'D')$ bằng $45°$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

Câu 89: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác đáy ABC vuông đỉnh A, $AB=a, AC=\sqrt{3}a$, $A'A=A'B=A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt đáy (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích V của lăng trụ đã cho.

Câu 90: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại A, $AB=a, BC=2a$, biết hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Khi đó thể tích của hình trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

Câu 91: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD}=120^0$. Biết $A'A=A'B=A'C$ và góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Câu 92: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của $B'C'$. Biết rằng góc giữa AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Câu 93: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1;2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

CHƯƠNG VIII

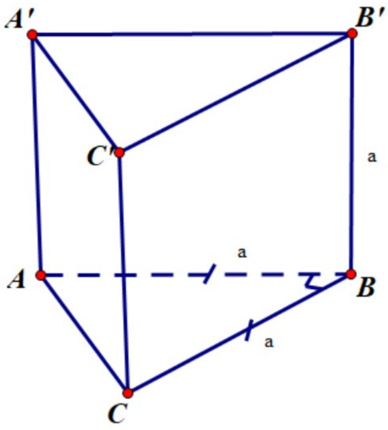
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

DẠNG 4: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG – ĐỀU

Câu 48: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $BA=BC=a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

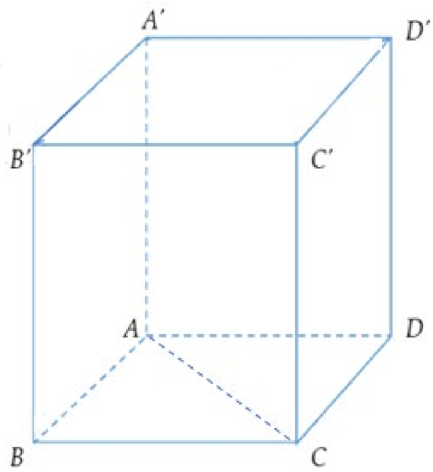
Lời giải



$$V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.BB' \ =\frac{1}{2}BA.BC.BB' \ =\frac{1}{2}.a.a.a=\frac{a^3}{2}.$$

Câu 49: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3$, $AC=5$, $AA'=8$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

Lời giải

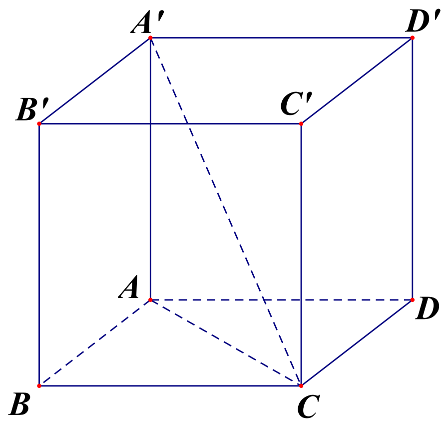


Ta có: $AD = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 4$.

Thể tích khối hộp chữ nhật đã cho là: $V = AB.AD.AA' = 3.4.8 = 96$.

Câu 50: Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài đoạn $A'C = a$. Thể tích khối đó là

Lời giải



Ta có: $A'C^2 = AA'^2 + AC^2 = AA'^2 + AB^2 + BC^2 = 3AB^2$.

Suy ra: $AB = \dfrac{A'C}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Do đó: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 51: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, cạnh $AB = a$, $BC = 2a$, $AA' = a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

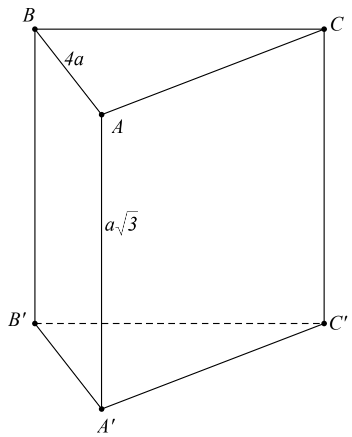
Lời giải

Ta có ΔABC vuông tại B nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.BC = \dfrac{1}{2}.a.2a = a^2$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = a^2.a = a^3$.

Câu 52: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 4a$ và $AA' = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

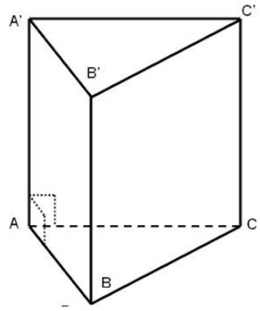
Lời giải



Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{1}{2}AB^2.AA' = 8a^3\sqrt{3}$.

Câu 53: Thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = a\sqrt{3}$ bằng

Lời giải



Đáy là tam giác đều cạnh a, suy ra diện tích đáy $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$ABC.A'B'C'$ là khối lăng trụ đứng nên có chiều cao $h = AA' = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 54: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

Lời giải

Theo tính chất lăng trụ tam giác đều, đáy là tam giác đều ABC và cạnh bên vuông góc với đáy.

Do đó áp dụng công thức $V = S_{\Delta ABC}.h = (2a)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}$.

Câu 55: Cho khối lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, chiều cao bằng $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải

Ta có: $V = B.h = a^2.2a = 2a^3$.

Câu 56: Cho hình lăng trụ tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$, cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng

Lời giải

Lăng trụ đã cho là lăng trụ tứ giác đều nên đáy là hình vuông cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Cạnh bên vuông góc với mặt đáy.

$\Rightarrow$ Diện tích đáy của hình lăng trụ là $B = \left(a\sqrt{2}\right)^2 = 2a^2$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V = B.h = 2a^2.a\sqrt{5} = 2a^3\sqrt{5}$.

Câu 57: Cho lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng $3a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải

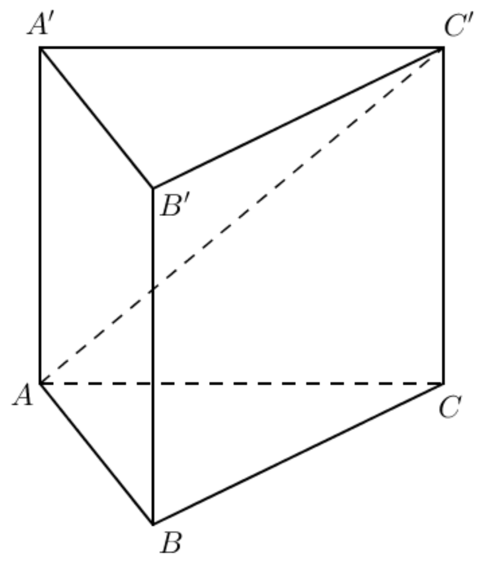
Diện tích đáy của hình lăng trụ là: $B=(3a)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao của hình lăng trụ là: $h=3a$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V=B.h=\dfrac{9a^2\sqrt{3}}{4}.3a=\dfrac{27a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 58: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B. Biết $C'A=a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C}=45°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải



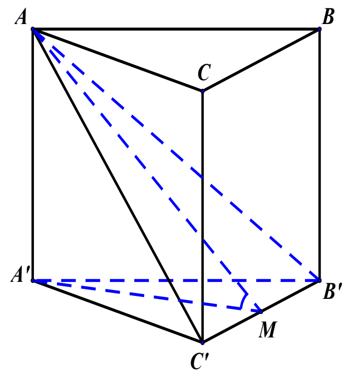
Trong $\Delta ACC'$ có $AC=AC'.\sin\widehat{AC'C}=a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a$; $CC'=AC'.\cos\widehat{AC'C}=a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a$.

Trong ΔBAC có $AC^2=BA^2+BC^2 \Leftrightarrow AC^2=2BA^2 \Rightarrow BA=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=CC'.S_{\Delta ABC}=CC'.\dfrac{1}{2}.BA^2=a.\dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 59: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với mặt đáy bằng 45^o. Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



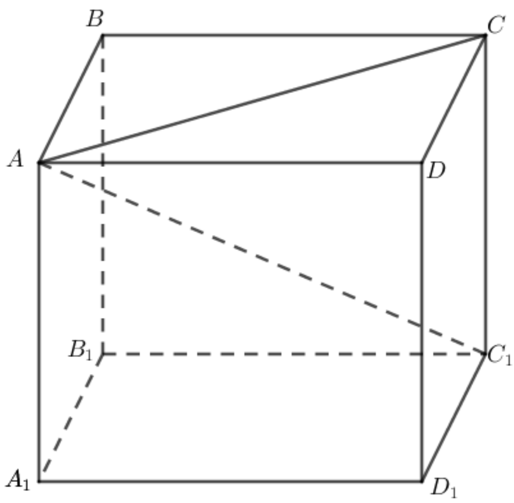
Xét $(AB'C')$ và $(A'B'C')$: Gọi M là trung điểm của $B'C'$, vì tam giác $A'B'C'$ đều nên $A'M \perp B'C'$, mặt khác lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp B'C'$. Do đó $(AA'M) \perp B'C'$. Vậy $\widehat{((AB'C'),(A'B'C'))} = \widehat{AMA'} = 45^o$.

Tam giác $AA'M$ vuông tại A' và có $\widehat{AMA'} = 45^o$ nên vuông cân tại A' do đó $AA' = A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$; $S_{A'B'C'} = \dfrac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{A'B'C'} = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$.

Câu 60: Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 120^o$, đường thẳng AC_1 tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60^o. Tính thể tích khối hộp đã cho

Lời giải



Ta có $CC_1 \perp (ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{AC_1,(ABCD)}\right) = \widehat{C_1AC} = 60^o$;

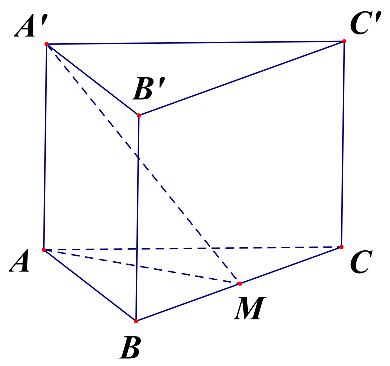
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.cos\widehat{ABC} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông ACC_1, có: $CC_1 = AC.\tan\widehat{C_1AC} = 3a$.

Vậy $V_{ABCD.A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}.CC_1 = BA.BC.\sin 120^o.CC_1 = \dfrac{3a^3.\sqrt{3}}{2}$.

Câu 61: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của BC, $A'M = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải

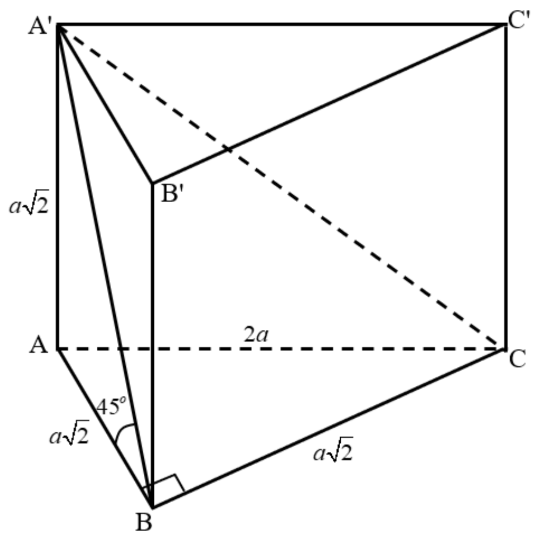


$$AA' = \sqrt{A'M^2 - AM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{8}.$$

Câu 62: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = 2a$, biết rằng $(A'BC)$ hợp với đáy (ABC) một góc 45^o. Thể tích lăng trụ là:

Lời giải



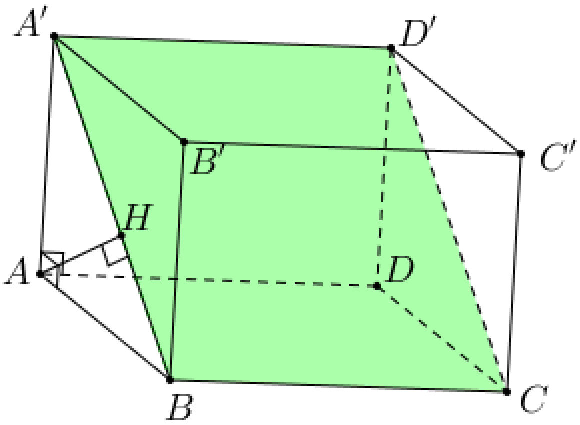
Do tam giác ABC vuông cân tại B, độ dài cạnh huyền $AC = 2a$ nên ta có : $BA = BC = a\sqrt{2}$

Góc tạo bởi mặt phẳng $(A'BC)$ và đáy (ABC) là góc $\widehat{A'BA} = 45^o$ do đó: $AA' = AB = a\sqrt{2}$

Vậy thể tích lăng trụ là: $V = B.h = \dfrac{a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}.$

Câu 63: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $A'BCD'$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính thể tích hình hộp theo a.

Lời giải



Ta có: $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp BB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow \left(A'BCD'\right) \perp \left(AA'B'B\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'B$, suy ra $\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ AH \perp A'B \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (A'BCD')$.

Như vậy AH là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BCD')$ $\Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác $AA'B$, ta có $\dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{AH^2} - \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{4}{3a^2} - \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{3a^2}$ do vậy $AA' = a\sqrt{3}$

Khi đó thể tích hình hộp là: $V = S_{ABCD}.AA' = a^2.a\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$.

Câu 64: Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a, AB = a$. Mặt bên $BB'C'C$ là hình vuông. Khi đó thể tích lăng trụ là

Lời giải

Áp dụng định lý Pitago ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

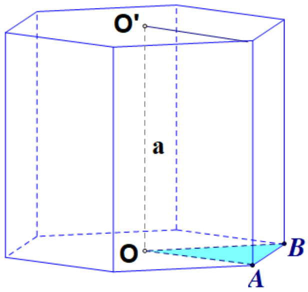
Vì $BB'C'C$ là hình vuông nên $BB' = BC = 2a$.

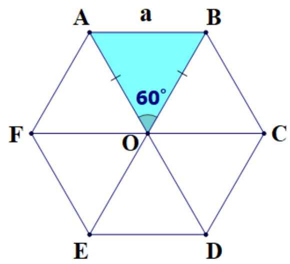
Vậy thể tích lăng trụ là $V = S_{ABC}.BB' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}2a = a^3\sqrt{3}$.

Câu 65: Thể tích của khối lăng trụ lục giác đều có tất cả các cạnh bằng a

Lời giải

Thể tích của khối lăng trụ là $V = B.h$ $V = B.h$



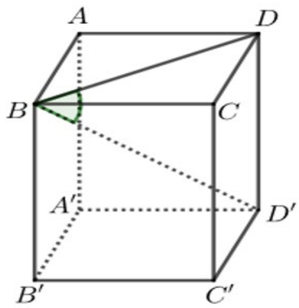


Với $h=a$, $B=6\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Vậy $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^2.a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$.

Câu 66: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60°$. Cho biết góc giữa đường chéo BD' và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối hộp đã cho là

Lời giải



Ta có : ΔABD đều cạnh $a \Rightarrow BD=a$

Ta có: $D'D\perp(ABCD)\Rightarrow BD$ là hình chiếu của BD' lên mặt phẳng $(ABCD)$.

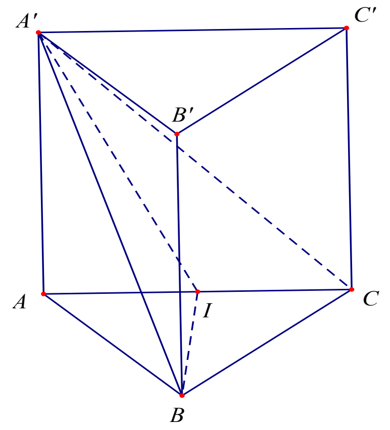
Do đó: $\widehat{(BD',(ABCD))}=\widehat{(BD',BD)}=\widehat{D'BD}=60°$.

Ta có: $\Delta D'BD$ vuông tại $D\Rightarrow DD'=BD.\tan 60°=a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=DD'.S_{ABCD}=DD'.2S_{ABD}=a\sqrt{3}.2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 67: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C)$ bằng 30^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

Lời giải



Gọi I là trung điểm của cạnh AC. Khi đó, $BI \perp AC$.

Lại có, $\begin{cases} (AA'C'C) \perp (ABC) \text{ (tính chất hình lăng trụ đều)} \\ (AA'C'C) \cap (ABC) = AC \\ BI \subset (ABC) \end{cases}$

nên $BI \perp (AA'C'C) \Rightarrow BI \perp (AA'C)$. Do đó, góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(AA'C)$ chính là góc $\widehat{BA'I} = 30^0$.

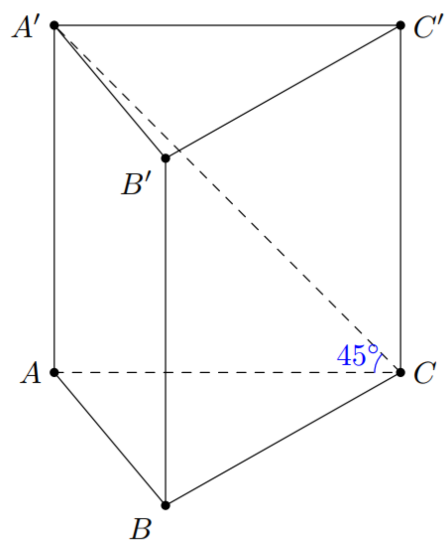
Xét tam giác $A'BI$ vuông tại I, ta có: $\sin \widehat{BA'I} = \dfrac{BI}{A'B} \Rightarrow A'B = \dfrac{BI}{\sin \widehat{BA'I}} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sin 30^0} = a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}.$

Ta có: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 68: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải

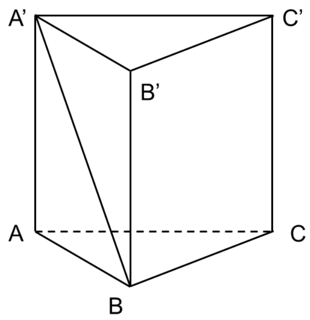


Ta có $\left(\widehat{A'C,(ABC)}\right)=\widehat{A'CA}=45^\circ$ nên $\triangle AA'C$ vuông cân tại A suy ra $AA'=AC=a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=Sh=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 69: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Đường thẳng $A'B$ tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích của khối lăng trụ đó.

Lời giải



Đáy tam giác đều nên $S_{ABC}=\dfrac{(2a)^2.\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

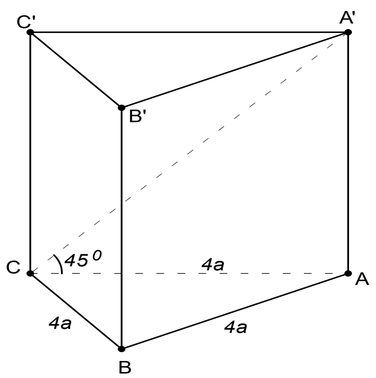
$$\begin{array}{l} A'B\cap(ABC)=\{B\} \\ AA'\perp(ABC) \end{array} \Rightarrow \left(A'B,(ABC)\right)=\widehat{A'BA}$$

Khi đó: $\tan 60^\circ=\dfrac{AA'}{AB}\Rightarrow AA'=AB.\tan 60^\circ=2a\sqrt{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.AA'=a^2\sqrt{3}.2a\sqrt{3}=6a^3$.

Câu 70: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.

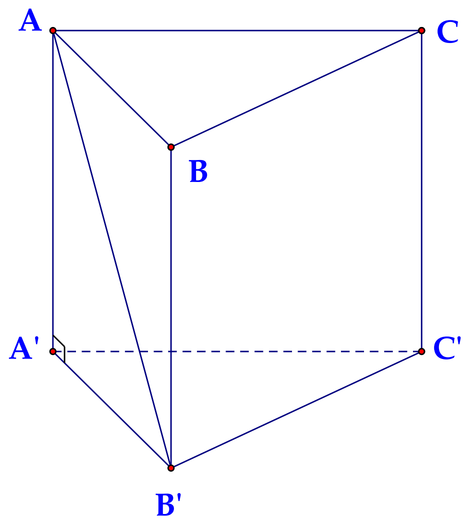
Ta có:

$A'A\perp(ABC)\Rightarrow\left(\widehat{A'C,(ABC)}\right)=\widehat{A'CA}=45^\circ\Rightarrow\Delta A'AC$ vuông cân tại $A\Rightarrow A'A=AC=4a$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=4a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=4a.4a^2\sqrt{3}=16a^3\sqrt{3}$.

Câu 71: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB=a$, $AB'=a\sqrt{7}$. Thể tích V của khối lăng trụ là

Lời giải



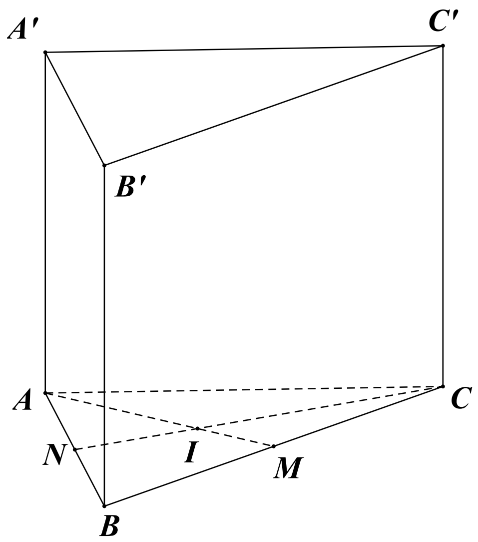
Ta có $AA'=\sqrt{(AB')^2-(A'B')^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{7}\right)^2-a^2}=a\sqrt{6}$.

Diện tích đáy ABC là $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{6}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 72: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$. Đáy ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R=a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, N là trung điểm của AB và $I = AM \cap CN$. Đặt $AB = x$.

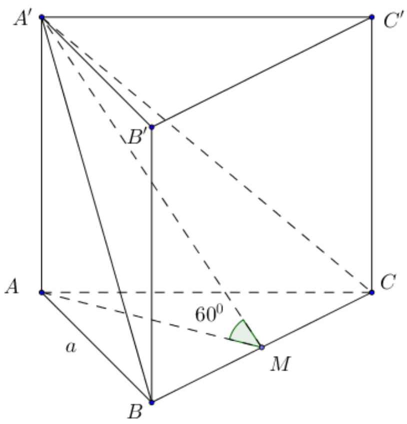
Đáy ABC là tam giác đều và nội tiếp đường tròn bán kính $R = a$ nên $AI = a$, suy ra $AM = \frac{3}{2}AI = \frac{3}{2}a.$

Khi đó, $AM^2 = AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow x^2 = 3a^2 \Rightarrow x = \sqrt{3}a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{2}AM.BC.AA' = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}a.\sqrt{3}a.2a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3.$

Câu 73: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác đều cạnh a góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, ta có $AM \perp BC$

Mặt khác $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều nên $AA' \perp BC$

Suy ra $A'M \perp BC$, góc giữa hai hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $\widehat{A'MA} = 60°$

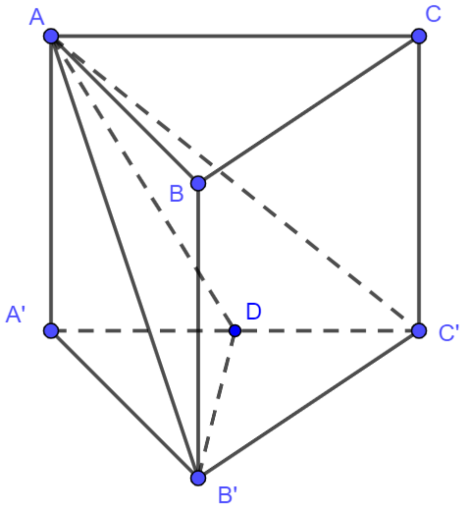
Tam giác ABC đều cạnh a, ta có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác $A'AM$ vuông tại A, ta có $AA' = AM.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3a}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 74: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$.

Lời giải



Gọi D là trung điểm $A'C'$ thì ta có: $B'D \perp (ACC')$. Khi đó: $S_{ADC'} = S_{AB'C'}.\cos 60°$.

Đặt $AA' = x$ $(x > 0)$. Do các tam giác $A'B'C'$ và $AA'B'$ vuông nên:

$A'C' = a\sqrt{2};\ AB' = \sqrt{a^2 + x^2}$

Do $B'C' \perp (ABB'A')$ nên: $S_{AB'C'} = \dfrac{1}{2}AB'.B'C' = \dfrac{1}{2}a\sqrt{a^2 + x^2}$

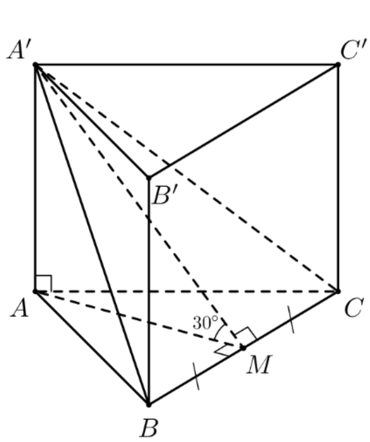
Do $AA' \perp DC$ nên: $S_{ADC'} = \dfrac{1}{2}AA'.DC' = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.x$

Nên: $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}x = \dfrac{a\sqrt{a^2 + x^2}}{4} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x = a$.

Vậy $V_{B'.ACC'A'} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}.a^2.a = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 75: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ đều và có diện tích bằng $\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



+ Đặt $BC = x \Rightarrow S_{\triangle A'BC} = x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2$.

+ Gọi M là trung điểm của BC suy ra $BC \perp A'M$. Khi đó ta có:

$\begin{cases} BC \perp A'M \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp AM$.

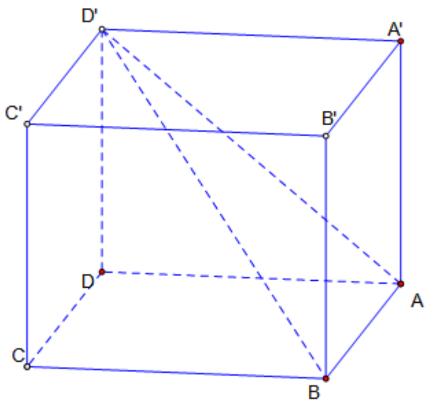
+ Vậy $\left((A'BC);(ABC)\right) = (A'M;AM) = \widehat{A'MA} = 30^\circ \Rightarrow AA' = A'M.\sin 30^\circ = \sqrt{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

+ Áp dụng CT: $S' = S.\cos\varphi \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'BC}.\cos 30^o = \dfrac{3}{2}$.

Suy ra thể tích của lăng trụ là: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 76: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a, góc giữa mặt phẳng $(D'AB)$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là 30^0. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Lời giải



Ta có $AB \perp (ADD'A') \Rightarrow AB \perp D'A$

Lại có $AB \perp AD$

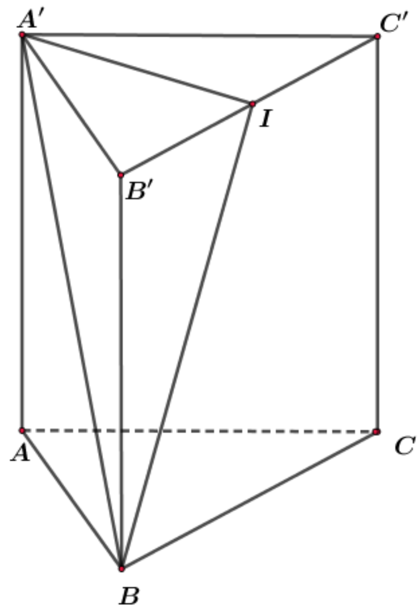
Suy ra $\widehat{\left((D'AB);(ABCD)\right)} = \widehat{(D'A, AD)} = \widehat{D'AD} = 30^0$.

Xét $\Delta D'DA$ vuông tại D; $AD = a$; $\widehat{D'AD} = 30^0 \Rightarrow DD' = \tan 30^0.AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = DD'.S_{ABCD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 77: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 30°. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C' \Rightarrow A'I \perp B'C'$. Khi đó

$$\begin{cases} A'I \perp B'C' \\ A'I \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'I \perp (BB'C'C)$$

$$\Rightarrow (A'B,(BB'C'C)) = (A'B, BI) = \widehat{A'BI} = 30°$$

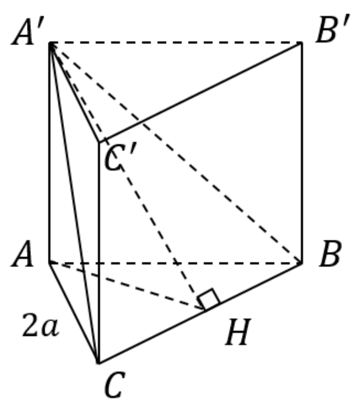
Đặt $h = BB'$

Ta có $\tan 30° = \dfrac{A'I}{BI} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2.\sqrt{h^2 + \dfrac{a^2}{4}}} \Leftrightarrow h = a\sqrt{2}$

Suy ra thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 78: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $2a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $S_{ABC}.AA'$.

Vì tam giác ABC đều nên có diện tích bằng $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=a^2\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm cạnh BC. Tam giác $A'BC$ cân tại A' nên $S_{A'BC}=\dfrac{1}{2}.BC.A'H=2a^2\sqrt{3}$.

Với $BC=2a\Rightarrow A'H=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{\dfrac{1}{2}.2a}=2a\sqrt{3}$.

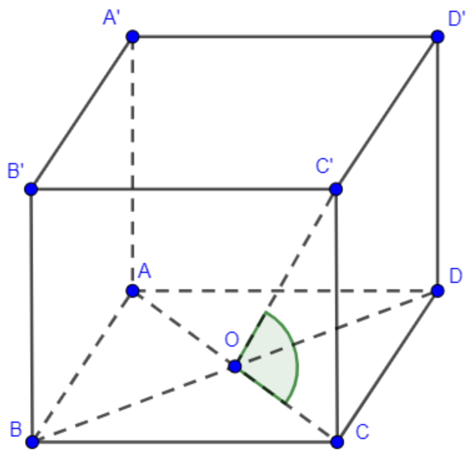
Xét tam giác $A'AH$ vuông tại A có cạnh $AH=\dfrac{(2a)\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$ và $A'H=2a\sqrt{3}$, suy ra

$AA'=\sqrt{A'H^2-AH^2}=\sqrt{\left(2a\sqrt{3}\right)^2-\left(a\sqrt{3}\right)^2}=3a.$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng: $a^2\sqrt{3}.3a=3a^3\sqrt{3}$

Câu 79: Cho khối hộp hình chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy hình vuông, $AC=2\sqrt{3}a$, $\left((C'BD),(ABCD)\right)=60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow OC=\dfrac{AC}{2}=a\sqrt{3}$, $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=a\sqrt{6}$

Ta có: $\begin{cases} BD=(C'BD)\cap(ABCD) \\ BD\perp(ACC'A') \\ OC'=(ACC'A')\cap(ABCD) \\ OC=(ACC'A')\cap(C'BD) \end{cases}$

$\Rightarrow\left((C'BD),(ABCD)\right)=(OC',OC)=\widehat{COC'}=60°\left(\widehat{COC'}<90°\right)$.

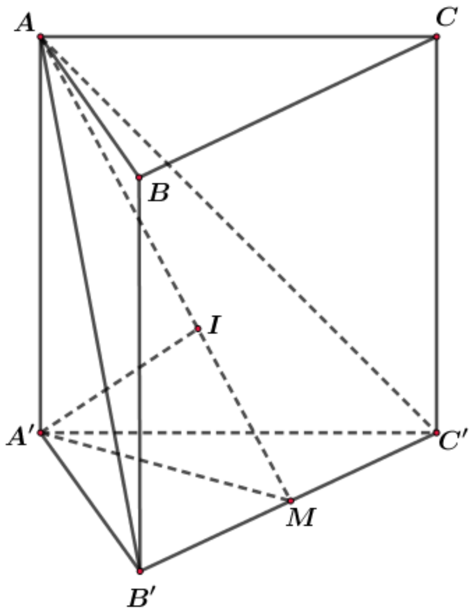
Xét tam giác COC' vuông tại C:

Ta có: $\tan\widehat{COC'} = \dfrac{CC'}{OC} \Leftrightarrow CC' = OC\tan\widehat{COC'} = a\sqrt{3}\tan 60° = 3a$

Ta có: $V_{ABCDA'B'C'D'} = S_{ABCD}CC' = \left(a\sqrt{6}\right)^2 3a = 18a^3$.

Câu 80: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng a. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và I là hình chiếu của A' lên AM. Khi đó ta có

$$\begin{cases} B'C' \perp A'M \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'MA) \Rightarrow B'C' \perp A'I$$

Mà $AM \perp A'I$ (2)

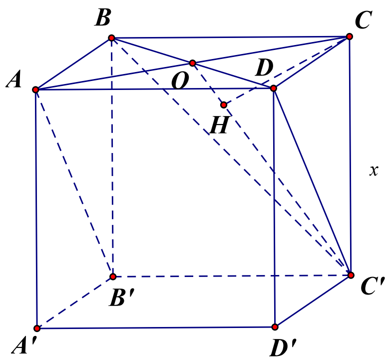
Từ và suy ra $A'I \perp (AB'C')$ $\Rightarrow d\left(A',(AB'C')\right) = A'I = a$.

Xét tam giác vuông $AA'M$: $\dfrac{1}{A'I^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{A'M^2} \Rightarrow AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}a^3}{2}$.

Câu 81: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BD bằng $\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

Lời giải



Gọi O là giao điểm của BD và AC.

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp CC' \\ AC \cap CC' = C \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A')$.

Trong $(ACC'A')$: Từ C hạ $CH \perp C'O$ tại H

Khi đó ta có: $\begin{cases} CH \perp BD \\ CH \perp C'O \\ C'O \cap BD = O \end{cases} \Rightarrow CH \perp (BDC')$

Ta lại có: $AB' // DC' \subset (BDC')$ và $AB' \not\subset (BDC') \Rightarrow AB' // (BDC')$

$\Rightarrow d(AB';BD) = d(AB';(BDC')) = d(A;(BDC')) = d(C,(BDC')) = CH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Đặt cạnh hình lập phương là $x \Rightarrow \begin{cases} CC' = x \\ CO = \dfrac{x\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

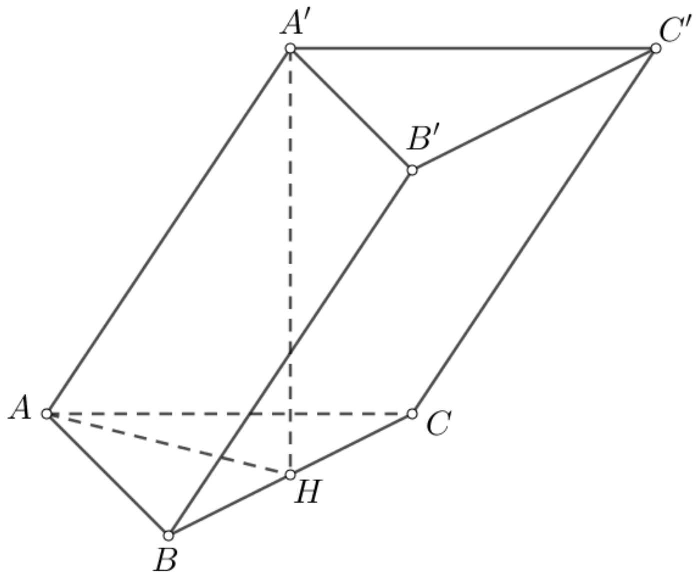
Khi đó $\dfrac{1}{CH^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{CO^2} \Leftrightarrow \dfrac{3}{4a^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{3}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Leftrightarrow x = 2a$.

Do đó thể tích của khối lập phương là $(2a)^3 = 8a^3$.

DẠNG 5: THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 82: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC.

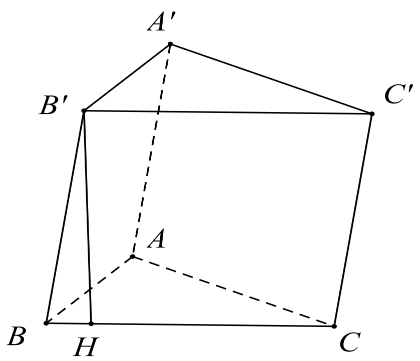
Khi đó $\widehat{\left(AA',(ABC)\right)} = \widehat{\left(AA',BH\right)} = \widehat{A'AH} = 30^\circ$.

Suy ra $A'H = AH.\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $V = \dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 83: Cho khối lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng 4 a. Mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ bằng

Lời giải



Ta có $\left(BCC'B'\right) \perp \left(ABC\right)$.

Hạ $B'H \perp BC \Rightarrow B'H \perp \left(ABC\right)$ và $\widehat{B'BH} = \widehat{B'BC} = 30°$.

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $h = B'H = BB'.\sin 30° = 2a$.

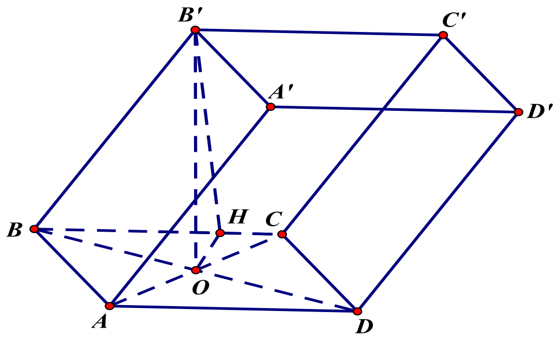
Do đáy là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow$ Diện tích đáy là $S_{đáy} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

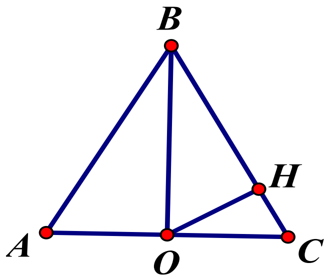
Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{LT} = S_{đáy}.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là $V = \dfrac{1}{3}V_{LT} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 84: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$, góc giữa mặt phẳng $\left(BB'C'C\right)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải





$ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$. Lại có $\widehat{ABC} = 60°$ nên ΔABC là tam giác đều cạnh a.

Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $OH \perp BC \Rightarrow$ Góc giữa mặt phẳng $\left(BB'C'C\right)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO} = 60°$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \dfrac{1}{\frac{a^2}{4}} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{16}{3a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

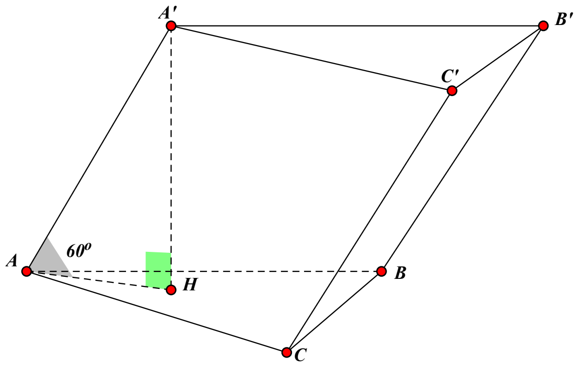
Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

$B'O = OH.\tan\widehat{B'HO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\tan 60° = \dfrac{3a}{4}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.B'O = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{3a}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 85: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



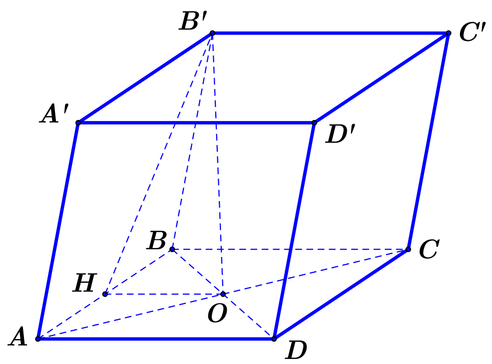
Kẻ $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (A'A,(ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.

Xét $\Delta AHA'$: $\sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA'.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C' : V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 86: Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hình chiếu của B' lên $mp(ABCD)$ trùng với giao điểm của AC và BD, biết góc giữa hai mặt phẳng (ABA') và $(ABCD)$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $OH \perp AB$.

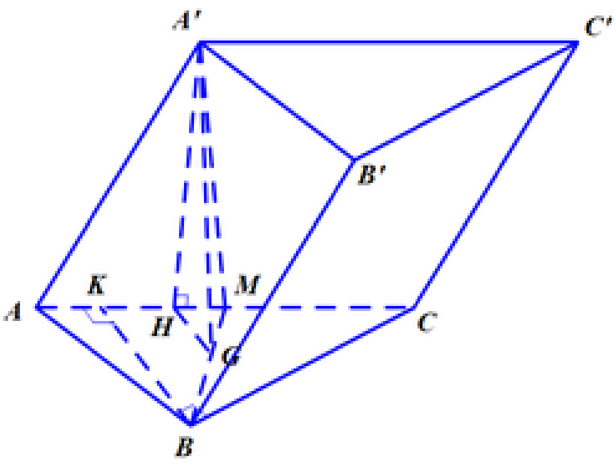
Theo giả thiết suy ra $\widehat{B'HO} = 60°$.

Ta có $B'O = OH.\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$

Câu 87: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 3a, AC = 5a$, hình chiếu của A' xuống mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC. Biết mặt bên $ACC'A'$ hợp với mặt đáy $A'B'C'$ một góc 60^0, thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

Lời giải



$\left(\left(ACC'A'\right),\left(A'B'C'\right)\right)=\left(\left(ACC'A'\right),\left(ABC\right)\right)$

Kẻ $GH\perp AC$, $A'G\perp AC\Rightarrow AC\perp\left(A'GH\right)\Rightarrow AC\perp A'H$

Ta có: $\begin{cases}\left(ACC'A'\right)\cap\left(ABC\right)=AC\\ AC\perp A'H\\ AC\perp GH\end{cases}\Rightarrow\left(\left(ACC'A'\right),\left(ABC\right)\right)=\widehat{\left(A'H,GH\right)}=\widehat{A'HG}=60^0$.

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{25a^2-9a^2}=4a$.

Kẻ $BK\perp AC\Rightarrow\dfrac{1}{BK^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{9a^2}+\dfrac{1}{16a^2}=\dfrac{25}{144a^2}\Leftrightarrow BK=\dfrac{12a}{5}$.

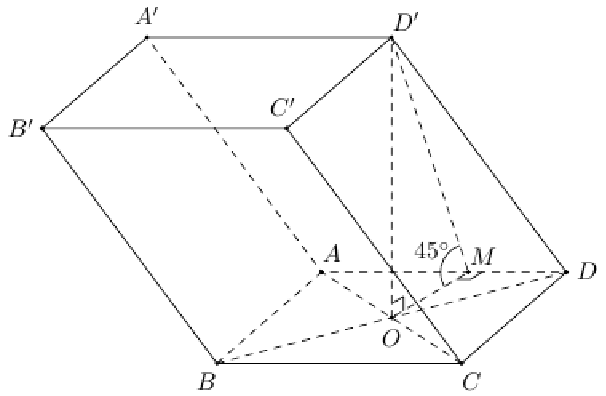
Có $BK//GH\Rightarrow\dfrac{GH}{BK}=\dfrac{MG}{MB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow GH=\dfrac{1}{3}BK=\dfrac{1}{3}.\dfrac{12a}{5}=\dfrac{4a}{5}$.

Tam giác $A'HG$ vuông tại G có: $\tan\widehat{A'HG}=\dfrac{A'G}{GH}\Rightarrow A'G=\dfrac{4a}{5}\tan 60^0=\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'G.S_{ABC}=\dfrac{1}{2}3a.4a.\dfrac{4a\sqrt{3}}{5}=\dfrac{24a^3\sqrt{3}}{5}$.

Câu 88: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC}=120°$. Hình chiếu vuông góc của D' lên $\left(ABCD\right)$ trùng với giao điểm của AC và BD, góc giữa hai mặt phẳng $\left(ADD'A'\right)$ và $\left(A'B'C'D'\right)$ bằng $45°$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $D'O \perp (ABCD)$ và $(ADD'A') \cap (ABCD) = AD$. Dựng $OM \perp AD$ tại M. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(ADD'A')$ và $(ABCD)$ là $\widehat{D'MO}$.

Vì $(A'B'C'D')$ song song với $(ABCD)$ nên $\widehat{D'MO} = 45°$.

Do $\widehat{ABC} = 120°$ nên $\widehat{BAC} = 60°$ và do đó tam giác ABD đều.

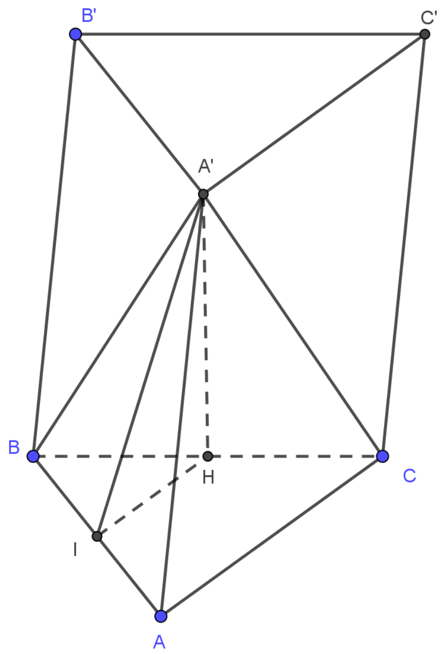
Ta tính được $OM = OD.\sin 60° = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $OD' = OM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = a.a.\sin 120° = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối hộp đã cho là $V = S_{ABCD}.OD' = \frac{3a^3}{8}$.

Câu 89: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác đáy ABC vuông đỉnh A, $AB = a, AC = \sqrt{3}a$, $A'A = A'B = A'C$ và mặt phẳng $(ABB'A')$ tạo với mặt đáy (ABC) một góc $60°$. Tính thể tích V của lăng trụ đã cho.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC.

Xét ba tam giác $A'HB, A'HA, A'HC$ có: $A'H$ chung, $A'A = A'B = A'C$ và $HA = HB = HC$

$\Rightarrow \Delta A'HA = \Delta A'HB = \Delta A'HC$ mà $\Delta A'HB$ vuông tại $H \Rightarrow \widehat{A'HA} = \widehat{A'HB} = \widehat{A'HC} = 90°$

$\Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

Tam giác $A'AB$ cân tại A' có: I là trung điểm của AB nên $A'I \perp AB$.

Ta có $\begin{cases} A'I \perp AB \\ A'H \perp AB \left(\text{do } A'H \perp (ABC)\right) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (A'HI) \Rightarrow HI \perp AB$.

Do đó, $\left((ABB'A'),(ABC)\right) = \widehat{A'IH} = 60°$.

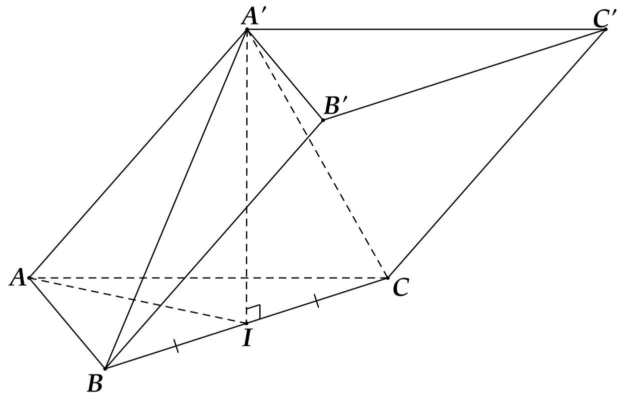
Tam giác ABC có: H, I lần lượt là trung điểm của BC, AB nên $HI = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $A'HI$ vuông tại H có: $\tan\widehat{A'IH} = \frac{A'H}{IH} \Rightarrow \tan 60° = \frac{A'H}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Thể tích lăng trụ là: $V = \frac{1}{3}.A'H.S_{ABC} = \frac{1}{6}.A'H.AB.AC = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2}.a.a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 90: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, BC = 2a$, biết hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của cạnh BC. Góc giữa AA' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Khi đó thể tích của hình trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC, theo giả thiết ta có $AI \perp (ABC)$.

Hình chiếu của AA' lên mặt phẳng đáy (ABC) là AI.

Suy ra $(AA';(ABC)) = (AA';AI) = \widehat{A'AI} = 60^\circ$.

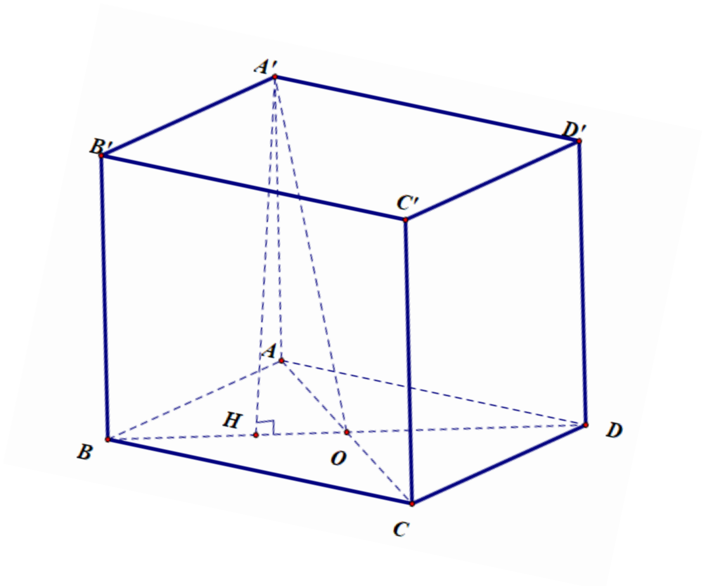
Ta có $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3}$; Do đó $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Mặt khác, $AI = \frac{1}{2}BC = a$ nên $A'I = AI.\tan\widehat{A'AI} = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'I = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 91: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Biết $A'A = A'B = A'C$ và góc giữa hai mặt phẳng $(A'AC)$ và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

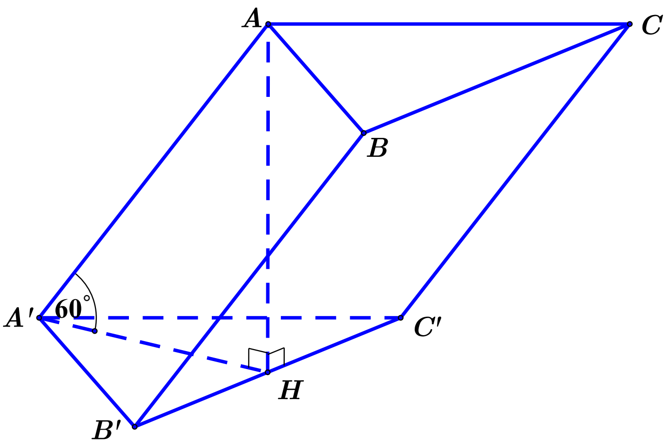
Lời giải



Từ giả thiết suy ra $A'.ABC$ là chóp đều nên nếu H là trọng tâm ΔABC, O là tâm hình thoi $ABCD$ thì $A'H \perp (ABC)$ và $\widehat{A'OB} = 60^0$. Ta có $OH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow A'H = a$. Vậy $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 92: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của $B'C'$. Biết rằng góc giữa AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Vì hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của $B'C'$ nên $AH \perp (A'B'C')$. Khi đó, góc giữa AA' và mặt phẳng $(A'B'C')$ là $\widehat{AA'H} = 60°$.

Vì $\Delta A'B'C'$ là tam giác đều cạnh a và H là trung điểm của $B'C'$ nên độ dài đường cao $A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét trong tam giác AHA' vuông tại H có $\tan\widehat{AA'H} = \dfrac{AH}{A'H}$ nên

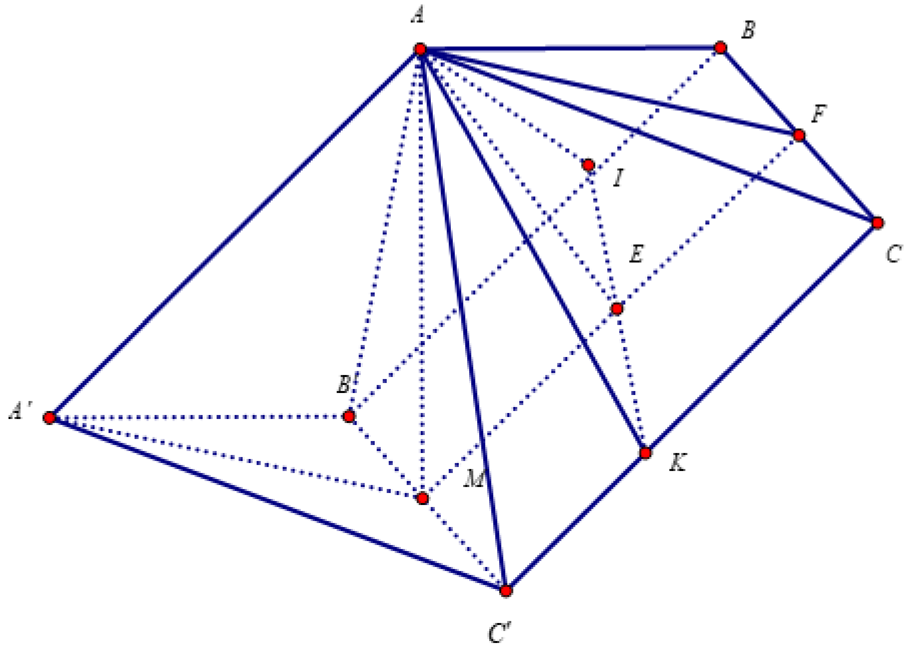
$AH = A'H.\tan\widehat{AA'H} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\tan 60° = \dfrac{3}{2}a$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = AH.S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{3}{2}a.\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Câu 93: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1;2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng.

Lời giải



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$.

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2 $\Rightarrow AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của $BC \Rightarrow AF = A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left.\begin{matrix} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC//BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow IK^2 = AI^2 + AK^2 \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của $IK \Rightarrow EF//BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó $((ABC),(AIK)) = (EF; AM) = \widehat{AME} = \widehat{FAE}$

Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30°$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có: $S_{AIK} = S_{ABC}\cos\widehat{EAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}$.

Xét ΔAMF vuông tại A: $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

CHƯƠNG VIII

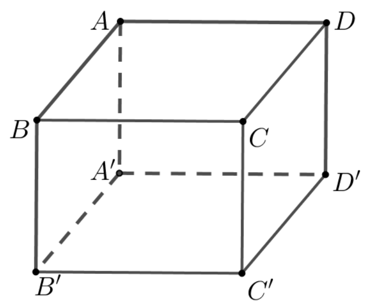
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT CỦA BỘ GD&ĐT

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$ và $AA' = 3a$ (tham khảo hình vẽ)



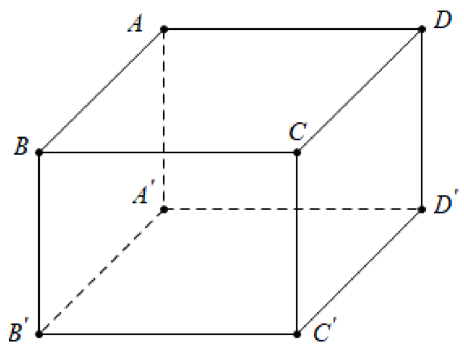
Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $2a$. **D.** $3a$.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = 2a$ và $AA' = 3a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. $2a$.. **B.** $\sqrt{2}a$.. **C.** $3a$. **D.** a.

Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3 (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

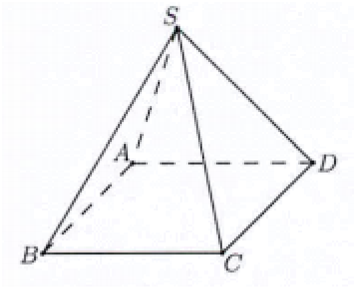


A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 4: **(MĐ 104-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 5: **(ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2020-2021)** Cho hình chóp tức giác đều $S.ABCD$ có độ tài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\sqrt{7}$. **B.** 1.
C. 7. **D.** $\sqrt{11}$.

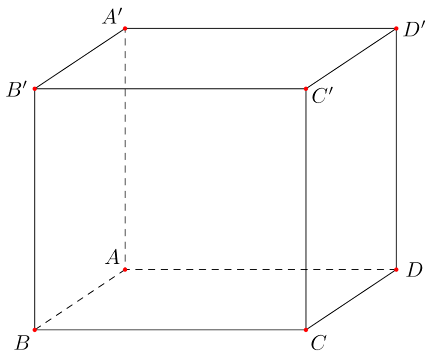
Câu 6: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{3}{2}a$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $3a$. **D.** $3\sqrt{2}a$.

Câu 7: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 4a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

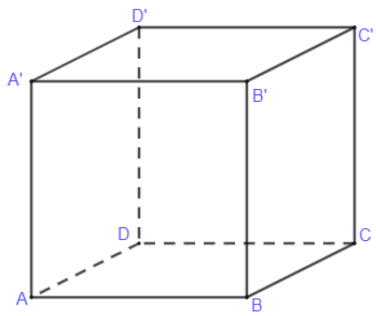
A. $4a$. **B.** $4\sqrt{2}a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $2a$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



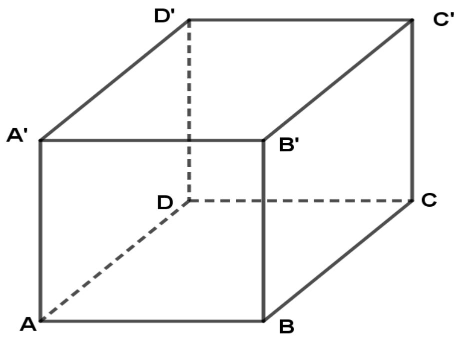
A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $2\sqrt{3}a$.
C. $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(BDB'D')$ bằng



A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $\frac{3}{2}a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

Câu 10: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

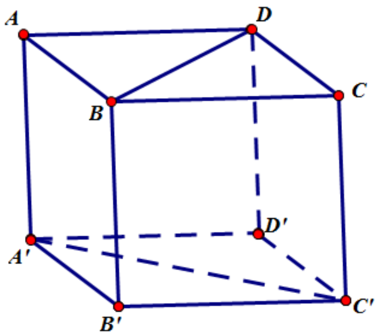


A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Câu 11: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $2\sqrt{3}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Câu 12: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\sqrt{3}a$ **B.** a **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ **D.** $\sqrt{2}a$

Câu 13: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$

Câu 14: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là ình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$ **B.** $\frac{2a}{3}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Câu 15: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 16: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD, SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$ **B.** $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$ **C.** $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$ **D.** $\frac{a\sqrt{30}}{12}$

Câu 17: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^0, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $2\sqrt{2}a$.

Câu 19: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}a}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$

Câu 20: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?.

A. 3 **B.** Vô số **C.** 0 **D.** 6

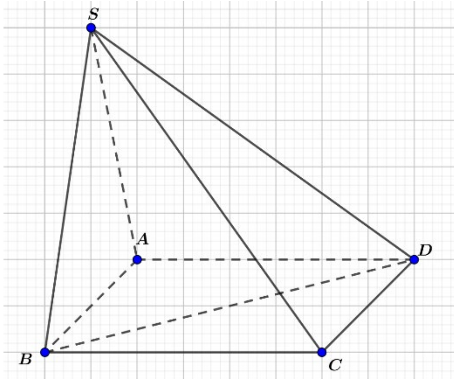
Câu 21: **(MÃ ĐỀ 104 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}a}{3}$

Câu 22: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

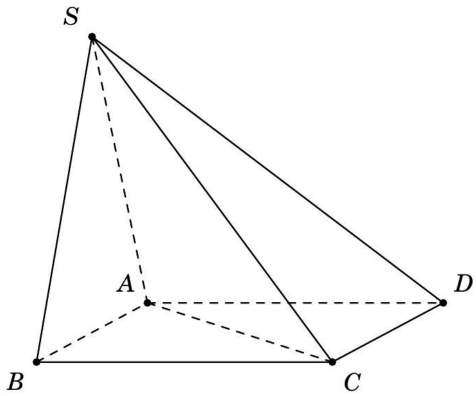
Câu 23: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\frac{\sqrt{21}a}{28}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{14}$.

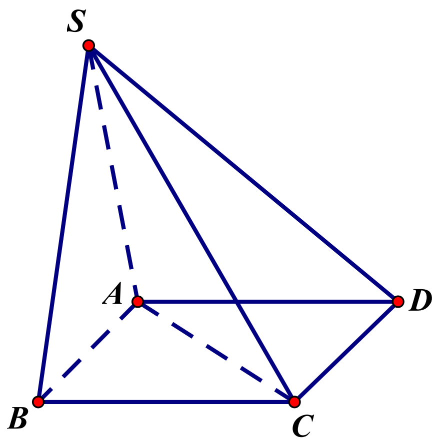
C. $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.

Câu 24: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng



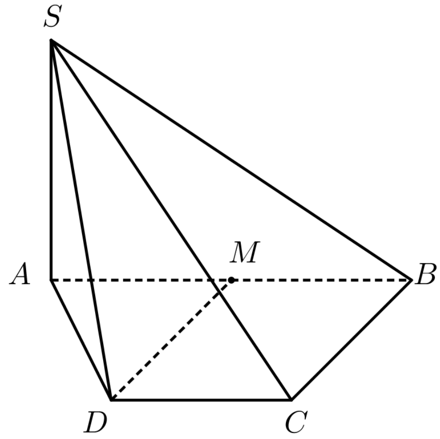
A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 25: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

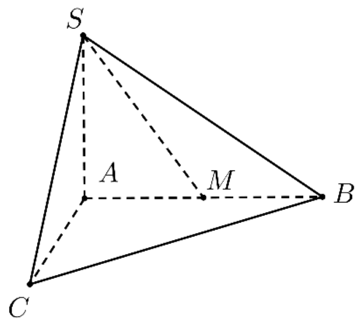
Câu 26: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 01)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, SA vuông góc mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $AD = DC = CB = a$. SA vuông góc với đáy và $SA = 3a$ (minh họa hình dưới đây).



Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng

A. $\frac{3}{4}a$. **B.** $\frac{3}{2}a$. **C.** $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}a$

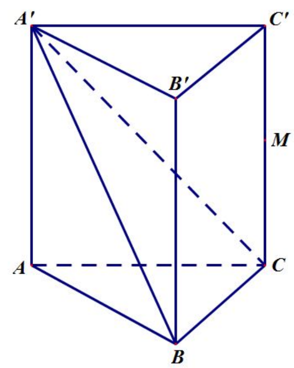
Câu 27: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 02)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (minh họa như hình vẽ). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng



SS

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

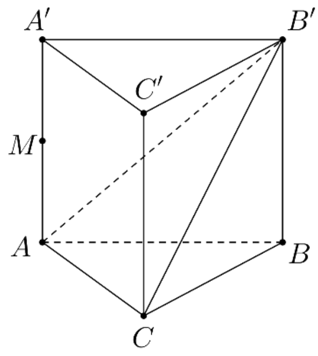
Câu 28: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$. Gọi M là trung điểm của CC'. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$. **D.** $\frac{\sqrt{57}a}{19}$

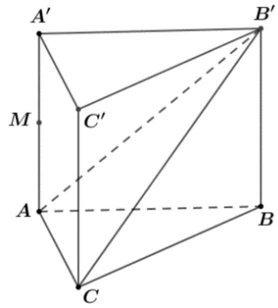
Câu 29: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = 2a$. Gọi M là trung điểm của $A'A$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

C. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$.

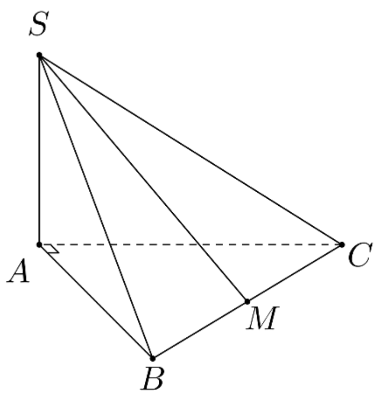
Câu 30: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA'.



Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Câu 31: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

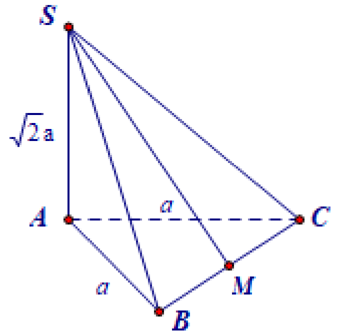


A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{17}a}{17}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Câu 32: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 33: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng



A. $\frac{\sqrt{10}a}{5}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.

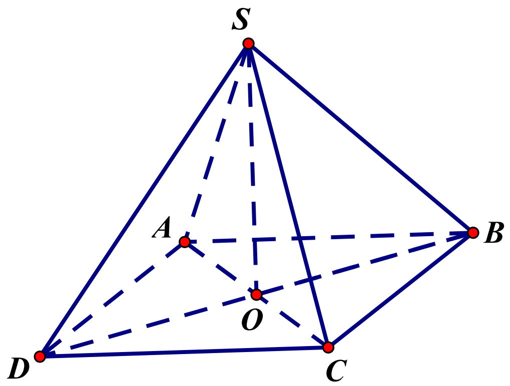
Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Câu 35: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

A. $2a$. **B.** $2\sqrt{2}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết $SO = a$, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. a. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

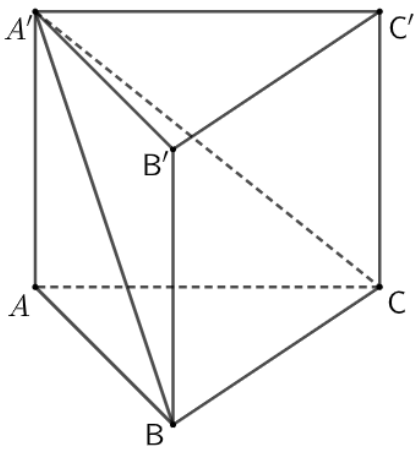
Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $SA \perp (ABC)$. Tính khoảng cách từ C đến (SAB).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** a.

Câu 41: Một hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AA' = 2a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $2a\sqrt{5}$.

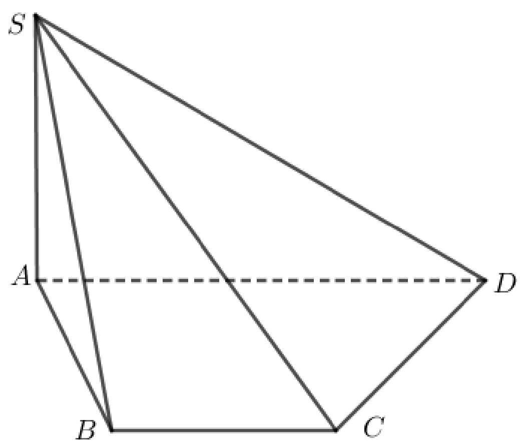
C. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AD = 2a, SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$.

Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $2a$.

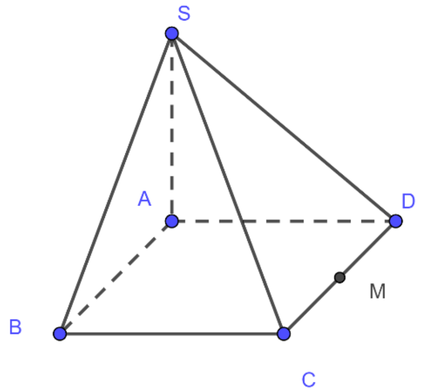
Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Câu 47: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

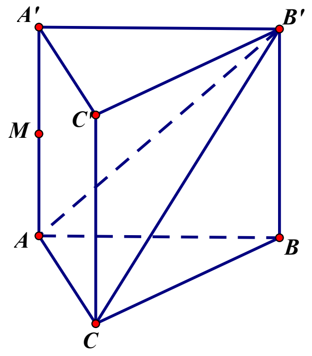
Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCD).

A. $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{6}$. **C.** $\frac{3a\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{16}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.\,ABC$ có SA, SB và SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA=SB=SC=3$. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.

Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA'



Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(AB'C)$ bằng.

A. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 51: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = AA' = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

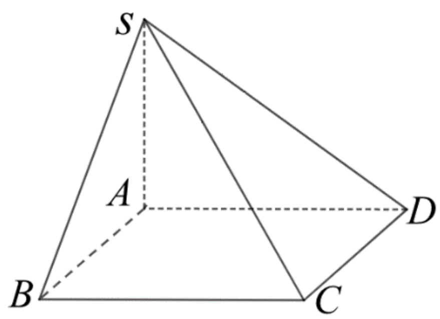
Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $3\sqrt{2}a$. **B.** a. **C.** $\frac{3}{2}a$. **D.** $3a$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

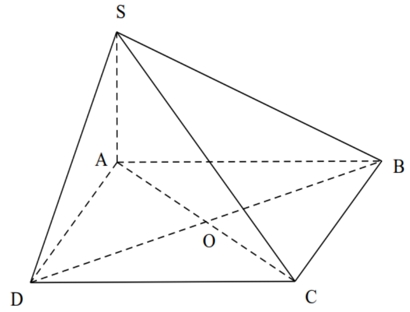
Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$.



Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{3a}{\sqrt{7}}$.

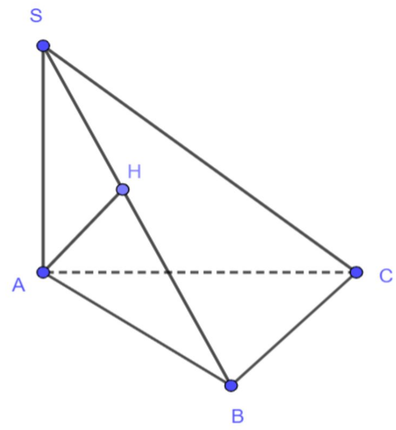
Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$



Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{4a}{9}$.

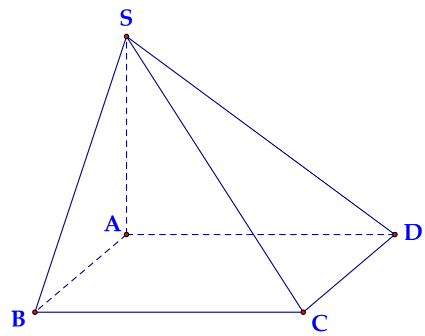
Câu 56: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu?



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Câu 59: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\angle BAC = 60^\circ$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABA'B')$ bằng

A. $2a$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 61: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A. $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $d = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a và $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}$ .Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{3a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A có $AB = a$, $AC = 2a$, mặt phẳng $(SBC) \perp (ABC)$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 66: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

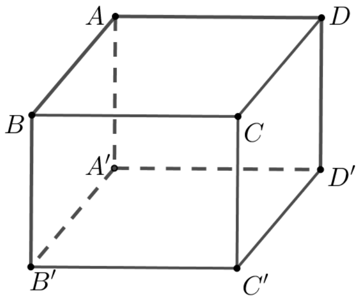
CHƯƠNG VIII QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THPT CỦA BỘ GD&ĐT

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = 2a$ và $AA' = 3a$ (tham khảo hình vẽ)

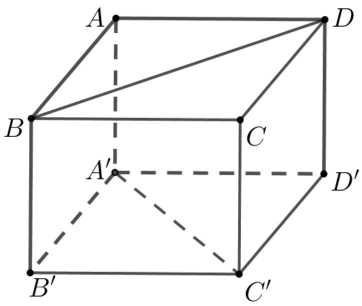


Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. a. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $2a$. **D.** $3a$.

Lời giải

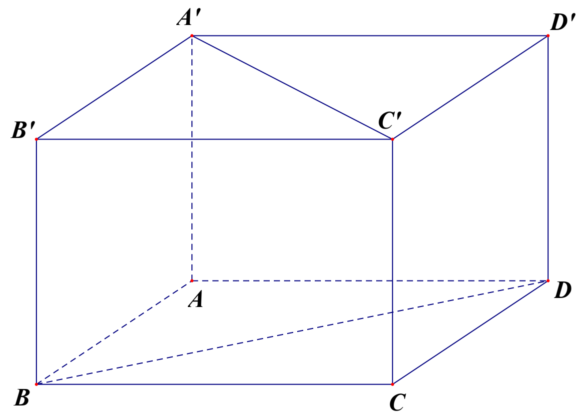
Chọn D



Ta có, đường thẳng BD và $A'C'$ lần lượt nằm trong hai mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$. Do đó $d_{(BD,\, A'C')} = d_{((ABCD),\,(A'B'C'D'))} = AA' = 3a$.

Câu 2: **(MĐ 102-2022)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, BC = 2a$ và $AA' = 3a$ (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

A. $2a$.. **B.** $\sqrt{2}a$.. **C.** $3a$. **D.** a.

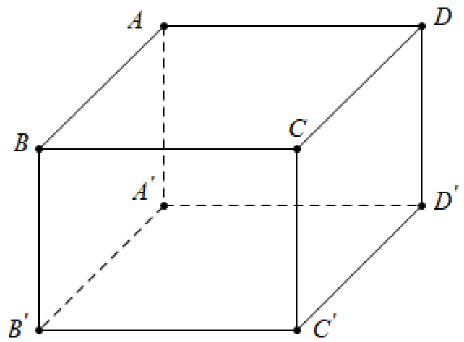


Lời giải

Chọn C

Ta có $d\left(BD, A'C'\right) = d\left(\left(ABCD\right), \left(A'B'C'D'\right)\right) = AA' = 3a$.

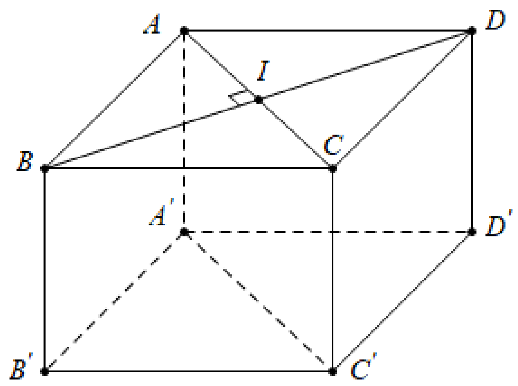
Câu 3: **(MĐ 103-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3(tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ bằng



A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.　　**B.** $\dfrac{3}{2}$.　　**C.** $3\sqrt{2}$.　　**D.** 3 .

Lời giải

Chọn A



Gọi $I = AC \cap BD$.

Ta có $BI \perp \left(ACC'A'\right) \Rightarrow d\left(B;\left(ACC'A'\right)\right) = BI = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 4: **(MĐ 104-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Kẻ $BH \perp AC$

$BH \perp AA'$ (vì $AA' \perp (ABCD)$)

Nên $BH \perp (ACC'A')$

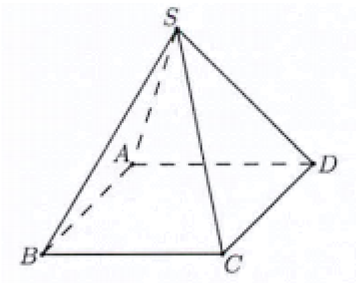
$\Rightarrow d(B;(ACCC'A')) = BH$

Xét tam giác vuông ABD có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$BH = \frac{1}{2}BD = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 5: **(ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2020-2021)** Cho hình chóp tức giác đều $S.ABCD$ có độ tài cạnh đáy bằng 2 và độ dài cạnh bên bằng 3 (tham khảo hình bên). Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\sqrt{7}$. **B.** 1. **C.** 7. **D.** $\sqrt{11}$.

Lời giải

Gọi O là tâm của đáy thì $d[S,(ABCD)] = SO$. Ta có $OA = \frac{AC}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ và $SA = 3$ nên $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{3^2 - 2} = \sqrt{7}$.

Câu 6: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

A. $\frac{3}{2}a$. **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $3a$. **D.** $3\sqrt{2}a$.

Lời giải

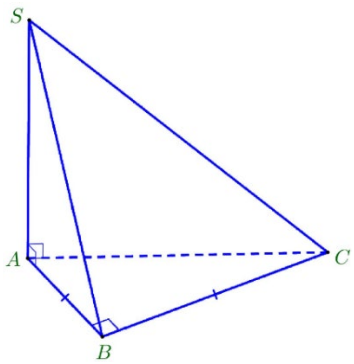
$$\left.\begin{array}{ll} BC \perp AC & (\Delta ABC \text{ vuông cân } C) \\ BC \perp SA & (SA \perp (ABC)) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAC).$$

$\Rightarrow d\left[B,(SAC)\right] = BC = 3a$

Câu 7: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 4a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $4a$. **B.** $4\sqrt{2}a$. **C.** $2\sqrt{2}a$. **D.** $2a$.

Lời giải



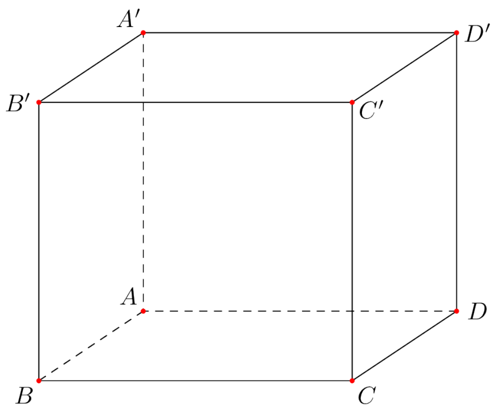
Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \ (\text{gt}) \\ BC \perp SA \ (\text{do } SA \perp (ABC)) \\ AB \subset (SAB) \\ SA \subset (SAB) \\ AB \cap SA = A \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ tại B.

Suy ra $d\left(C,(SAB)\right) = CB$.

Xét ΔABC vuông cân tại B có: $BC = AB = 4a$.

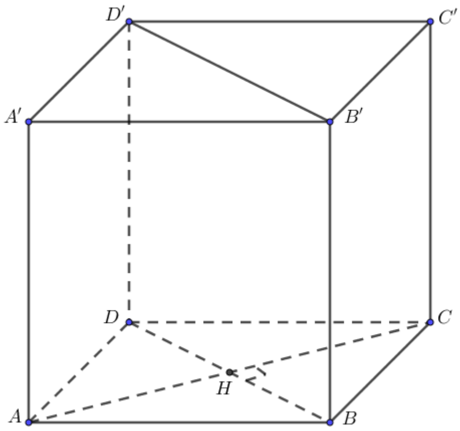
Vậy $d\left(C,(SAB)\right) = 4a$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $2a$ (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $2\sqrt{3}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Lời giải



Gọi $H = AC \cap BD$, khi đó ta có $CH \perp BD$ (do tứ giác $ABCD$ là hình vuông).

Lại có $CH \perp DD'$ (do $DD' \perp (ABCD)$ và $CH \subset (ABCD)$).

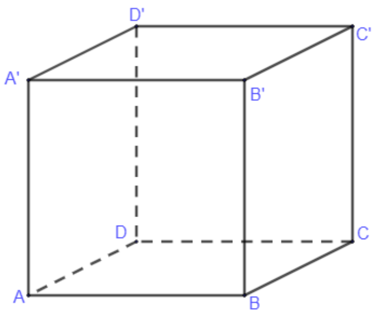
Suy ra $CH \perp (BDD'B')$, do đó $CH = d\left(C,(BDD'B')\right)$.

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$ nên $AC = 2a\sqrt{2}$.

Suy ra $CH = \dfrac{1}{2}AC = a\sqrt{2}$.

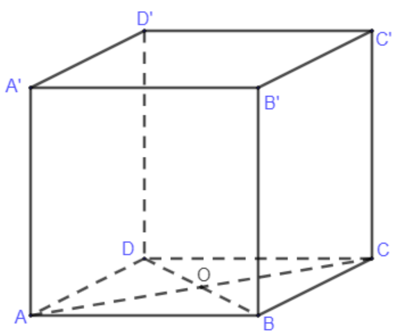
Vậy khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng $a\sqrt{2}$.

Câu 9: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng $(BDB'D')$ bằng



A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $\dfrac{3}{2}a$. **D.** $\sqrt{2}a$.

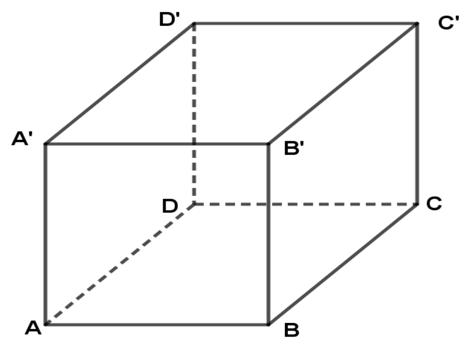
Lời giải



Gọi $\{O\} = AD \cap BC$. Ta có $\begin{cases} CO \perp BD \\ CO \perp BB' \end{cases} \Rightarrow CO \perp (BDB'D') \Rightarrow d(C;(BDB'D')) = CO$.

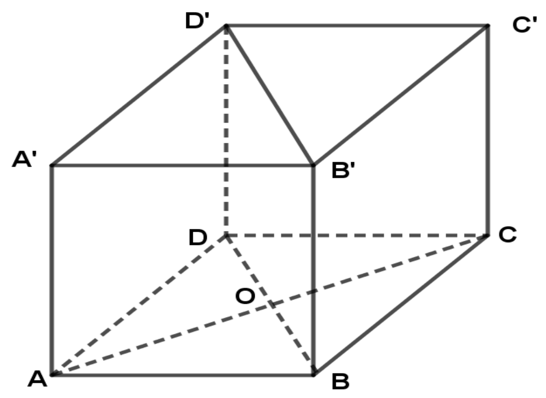
Ta có: $CO = \frac{1}{2}CA = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Câu 10: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a$. **C.** $\sqrt{3}a$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Lời giải

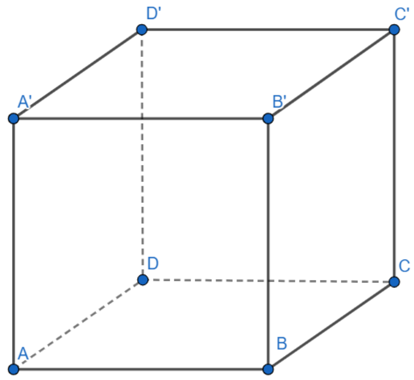


Gọi $AC \cap BD = \{O\}$. Khi đó $AO \perp BD$, mặt khác $AO \perp BB'$. Suy ra $AO \perp (BDB'D')$ hay AO là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$.

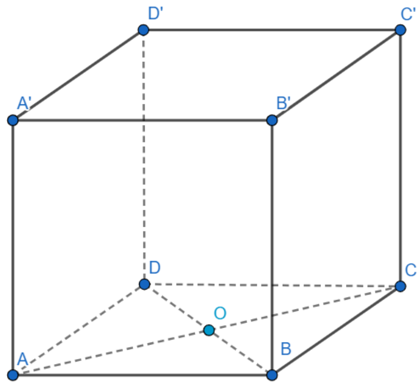
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$, $AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 11: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

A. $2\sqrt{2}a$. **B.** $2\sqrt{3}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.



Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

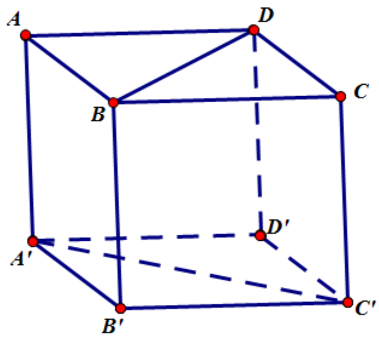
Ta có: AC cắt BD tại O hay $AO \perp BD$. (1)

Lại có: $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương cạnh $2a$ nên ta có:

$BB' \perp (ABCD) \Rightarrow AO \perp BB'$. (2)

Từ (1) và (2) ta có: $AO \perp (BDD'B') \Leftrightarrow d(A,(BDD'B')) = AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}2\sqrt{2}a = \sqrt{2}a$.

Câu 12: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng



A. $\sqrt{3}a$ **B.** a **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ **D.** $\sqrt{2}a$

Lời giải

Chọn B

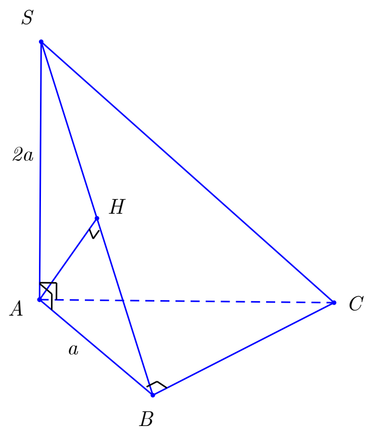
Ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và $A'C'$ bằng khoảng cách giữa mặt phẳng song song $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ thứ tự chứa BD và $A'C'$. Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng a.

Câu 13: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{2}a}{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$. Khi đó $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

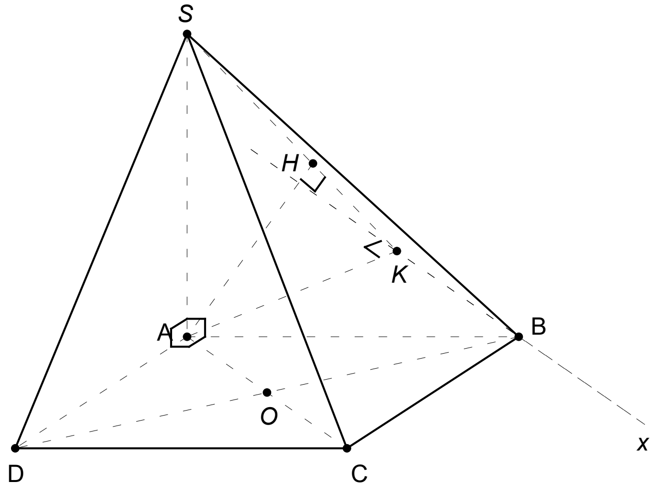
Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AH = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 14: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là ình chữ nhật, $AB = a, BC = 2a,$ SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a.$ Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{\sqrt{6}a}{2}$ **B.** $\frac{2a}{3}$ **C.** $\frac{a}{2}$ **D.** $\frac{a}{3}$

Lời giải

Chọn B



Từ B kẻ $Bx//AC \Rightarrow AC//\left(SB,Bx\right)$

Suy ra $d\left(AC,SB\right)=d\left(AC,\left(SB,Bx\right)\right)=d\left(A,\left(SB,Bx\right)\right)$

Từ A kẻ $AK\perp Bx\left(K\in Bx\right)$ và $AH\perp SK$

Do $\begin{cases} AK\perp Bx \\ SA\perp Bx \end{cases} \Rightarrow Bx\perp\left(SAK\right)\Rightarrow Bx\perp AH$

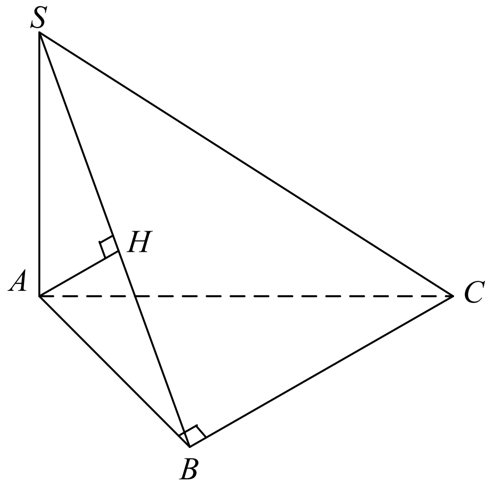
Nên $AH\perp\left(SB,Bx\right)\Rightarrow d\left(A,\left(SB,Bx\right)\right)=AH$

Câu 15: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông đỉnh B, $AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

A. $\frac{a}{2}$ **B.** a **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn D



Kẻ $AH\perp SB$ trong mặt phẳng $\left(SBC\right)$

Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp\left(SAB\right) \Rightarrow BC\perp AH$

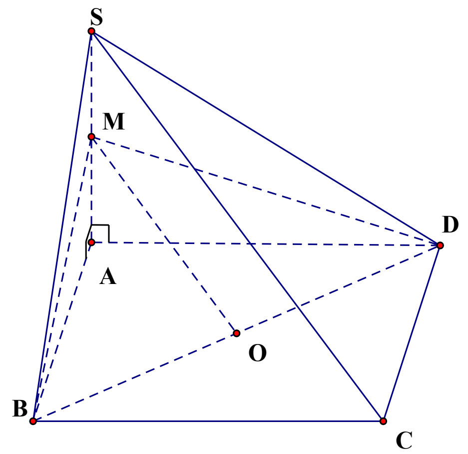
Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AH = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD, SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{30}}{6}$ **B.** $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$ **C.** $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$ **D.** $\frac{a\sqrt{30}}{12}$

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm hình chữ nhật và M là trung điểm SA, ta có: $SC // (BMD)$.

Do đó $d(SC, BD) = d\left(SC, (BMD)\right) = d\left(S, (BMD)\right) = d\left(A, (BMD)\right) = h$

Ta có: AM, AB, AD đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2}$$

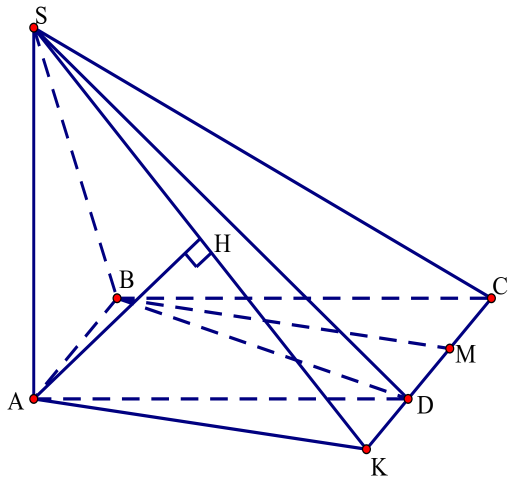
Suy ra: $h = \frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

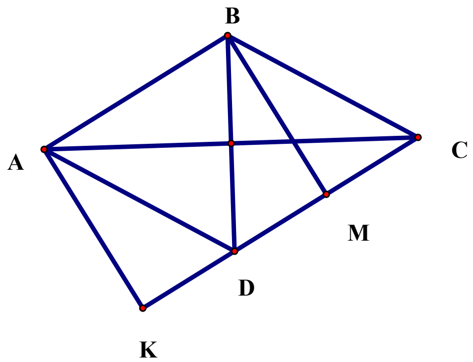
Câu 17: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $a, \widehat{BAD} = 60^0, SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải

Chọn A





Ta có: $AB//CD \Rightarrow AB//(SCD)$. Do đó: $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Vì $\widehat{BAD} = 60°$ nên $\widehat{BCD} = 60°$.

Mặt khác tứ giác $ABCD$ là hình thoi cạnh a nên ΔBCD là tam giác đều cạnh a.

Gọi M là trung điểm của CD, suy ra $BM \perp CD$.

Kẻ $AK//BM$, $K \in CD$, thì $AK \perp CD$.

Kẻ $AH \perp SK$ tại H.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp AK \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAK) \Rightarrow CD \perp AH$, mà $SK \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD)$.

Do đó $d(A,(SCD)) = AH$.

Ta có, tứ giác $ABMK$ là hình chữ nhật nên $AK = BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$AH.SK = SA.AK \Rightarrow AH = \dfrac{SA.AK}{SK}$,

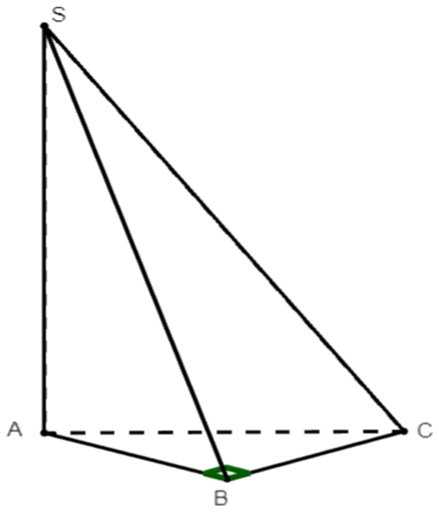
$SA = a$, $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $2\sqrt{2}a$.

Lời giải



$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CB$.

Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.

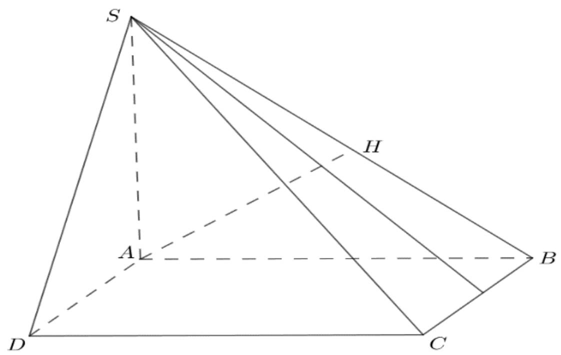
Do đó $d(C,(SAB)) = CB = AB = 2a$.

Câu 19: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{5}a}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}a}{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}a}{3}$

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAB): Kẻ $AH \perp SB \Rightarrow AH = d(A;(SBC))$

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2}$.

$\Rightarrow d(A;(SBC)) = AH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. **Chọn B**

Câu 20: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?.

A. 3 **B.** Vô số **C.** 0 **D.** 6

Lời giải.

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-3m\}$; $y'=\dfrac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y'<0 \\ (6;+\infty)\subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1<0 \\ -3m\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{1}{3} \\ m\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m<\dfrac{1}{3}.$$

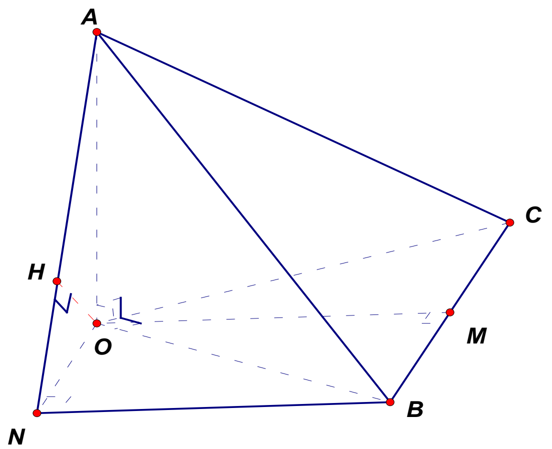
Vì $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 21: **(MÃ ĐỀ 104 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho tứ diện $O.ABC$ có OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau, $OA=a$ và $OB=OC=2a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$ **B.** a **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a}{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có ΔOBC vuông cân tại O, M là trung điểm của BC

$\Rightarrow OM\perp BC$

Dựng hình chữ nhật $OMBN$, ta có $\begin{cases} OM//BN \\ BN\subset(ABN) \end{cases} \Rightarrow OM//(ABN)$

$\Rightarrow d(AB,OM)=d(OM,(ABN))=d(O,(ABN))$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AN ta có:

$$\begin{cases} BN \perp ON \\ BN \perp OA \end{cases} \Rightarrow BN \perp (OAN) \Rightarrow OH \perp BN \text{ mà } OH \perp AN$$

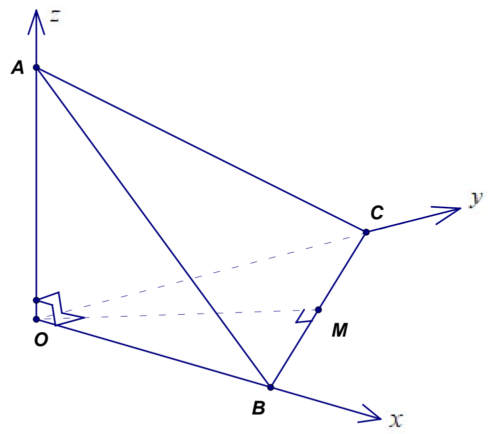
$$\Rightarrow OH \perp (ABN) \Rightarrow d(O,(ABN)) = OH$$

ΔOAN vuông tại O, đường cao OH

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{BC^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{4}{OB^2 + OC^2}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{4}{4a^2 + 4a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow OH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(AB, OM) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Nhận xét:



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó $O(0;0;0)$, $B(2a;0;0)$, $C(0;2a;0)$, $A(0;0;a)$

M là trung điểm của $BC \Rightarrow M(a;a;0)$

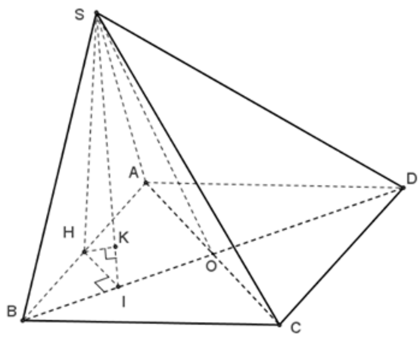
Ta có $\overrightarrow{OM} = (a;a;0)$; $\overrightarrow{OB} = (0;2a;0)$; $\overrightarrow{AB} = (2a;0;-a)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}\right] = (-a^2; a^2; -2a^2) \Rightarrow d(AB, OM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}\right].\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}\right]\right|} = \frac{2a^3}{\sqrt{a^4 + a^4 + 4a^4}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 22: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Ta có $\dfrac{d(H,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD))$.

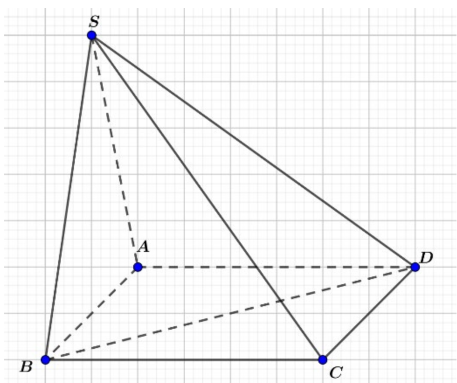
Gọi I là trung điểm OB, suy ra $HI \parallel OA$.

Suy ra $HI = \dfrac{1}{2}OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$. Lại có $\begin{cases} BD \perp HI \\ BD \perp SH \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SHI)$.

Vẽ $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SBD)$. Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HI^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra $d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD)) = 2HK = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

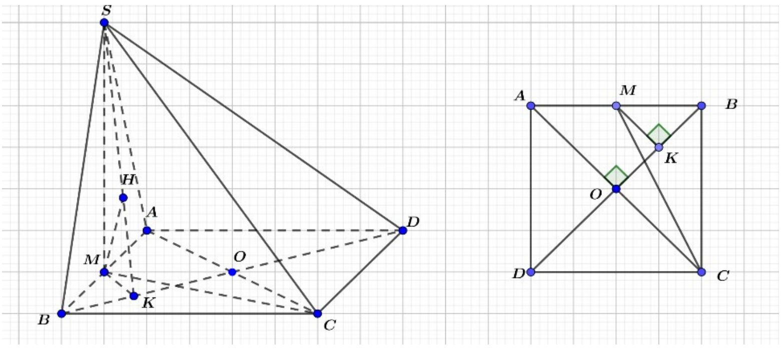
Câu 23: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng



A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow SM \perp (ABCD)$. Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} AC \cap (SBD) = O \\ AO = OC \end{cases} \Rightarrow d(C,(SBD)) = d(A,(SBD))$.

Lại có $\begin{cases} AM \cap (SBD) = B \\ AB = 2MB \end{cases} \Rightarrow d(A,(SBD)) = 2d(M,(SBD))$.

Vậy $\dfrac{d(C;(SBD))}{d(M;(SBD))} = 2$

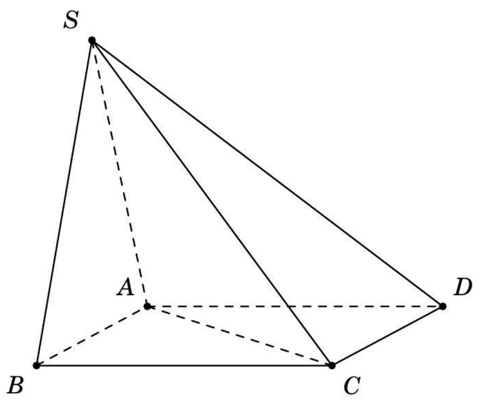
Kẻ $MK \perp BD$ $(K \in BD)$, kẻ $MH \perp SK$ tại $H \Rightarrow MH = d(M;(SBD))$.

Xét tam giác SMK, ta có

$MK = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $SM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{MK^2} = \dfrac{28}{3a^2} \Rightarrow MH = \dfrac{a\sqrt{21}}{14} \Rightarrow d(C;(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

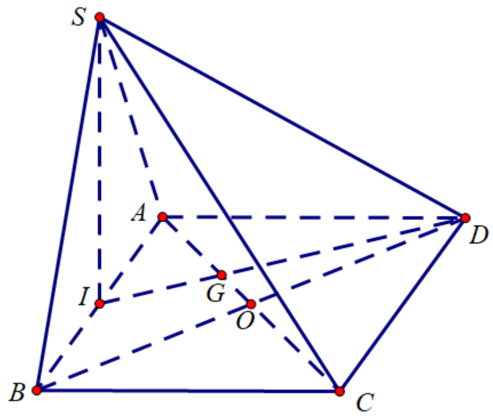
Câu 24: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng

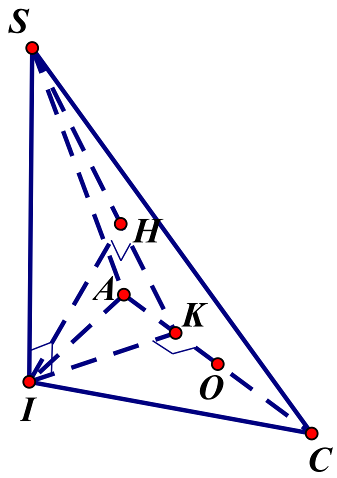


A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải

Chọn D





* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB ta có $SI \perp (ABCD)$ và $\frac{d(D;(SAC))}{d(I;(SAC))} = \frac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC))$.

* Gọi K là trung điểm của AO, H là hình chiếu của I lên SK ta có $IK \perp AC$; $IH \perp (SAC)$

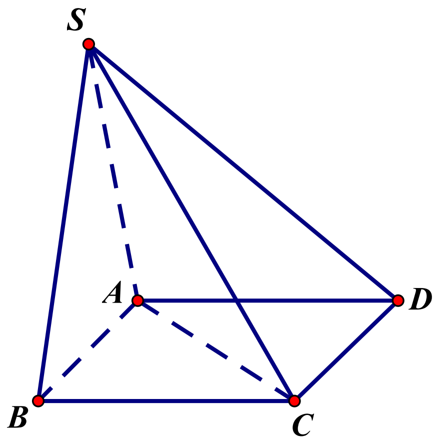
$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH$

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có: $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $IK = \frac{BO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

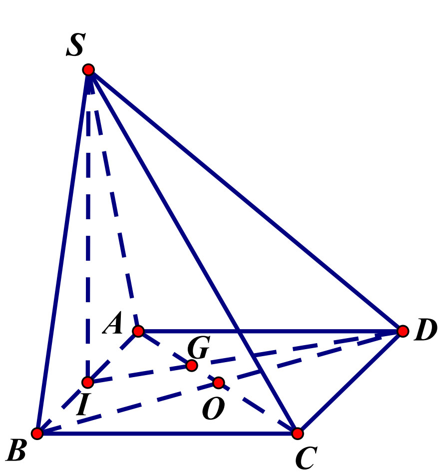
Câu 25: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy (minh họa như hình vẽ bên). Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng

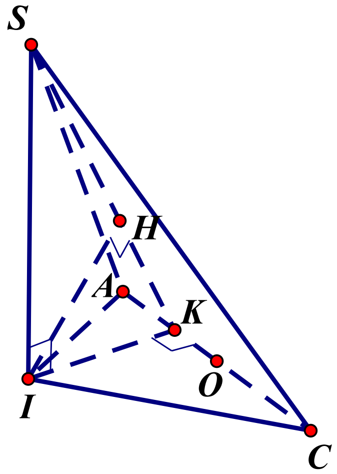


A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{28}$. **C.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải

Chọn C





* Gọi $O = AC \cap BD$ và G là trọng tâm tam giác ABD, I là trung điểm của AB ta có $SI \perp (ABCD)$ và $\dfrac{d(D;(SAC))}{d(I;(SAC))} = \dfrac{DG}{IG} = 2 \Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC))$.

* Gọi K là trung điểm của AO, H là hình chiếu của I lên SK ta có $IK \perp AC;\ IH \perp (SAC)$

$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH$

* Xét tam giác SIK vuông tại I ta có: $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2};\ IK = \dfrac{BO}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

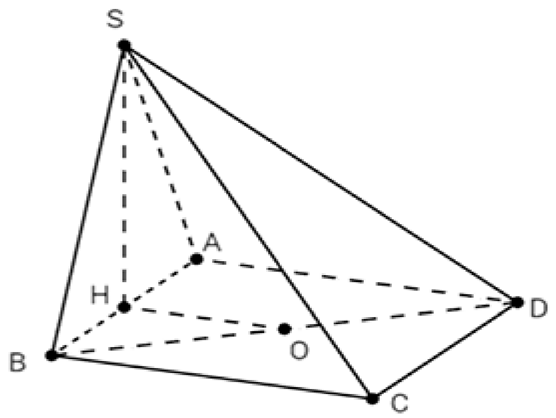
$$\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{IK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{16}{2a^2} = \frac{28}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$\Rightarrow d(D;(SAC)) = 2.d(I;(SAC)) = 2.IH = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

* Do O trung điểm của BD nên ta có:

$\dfrac{d(B;(SAC))}{d(D;(SAC))} = BO = 1 \Rightarrow d(B;(SAC)) = d(D;(SAC)) = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2.



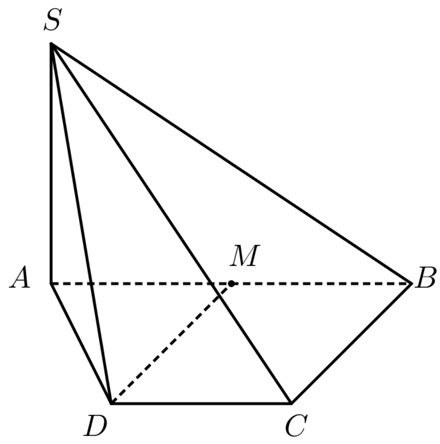
Do H là trung điểm AB $\Rightarrow d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD))$

Ta có tứ diện vuông $HSOB$ vuông tại H nên:

$$\frac{1}{\left(d_{(H,(SBD))}\right)^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HO^2}+\frac{1}{HB^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{4}{a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{28}{3a^2}$$

$$d_{(H,(SBD))}=\frac{a\sqrt{21}}{14}\Rightarrow d_{(A,(SBD))}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 26: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 01)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, SA vuông góc mặt phẳng đáy, $AB=2a$, $AD=DC=CB=a$. SA vuông góc với đáy và $SA=3a$ (minh họa hình dưới đây).

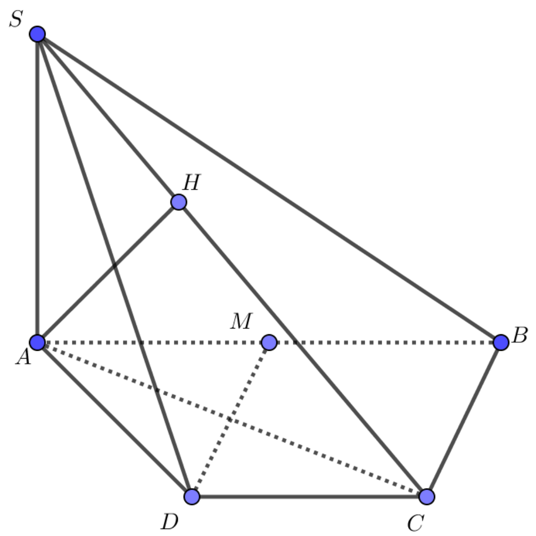


Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và DM bằng

A. $\frac{3}{4}a$. **B.** $\frac{3}{2}a$. **C.** $\frac{3\sqrt{13}a}{13}$. **D.** $\frac{6\sqrt{13}}{13}a$

Lời giải

Chọn A



Ta có M là trung điểm của AB.

Theo giả thiết suy ra $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{ACB}=90°;\widehat{ABC}=60°\\ AC=a\sqrt{3}\end{cases}$$

Vì $DM // BC \Rightarrow DM // (SBC)$

Do đó $d(DM,SB) = d(DM,(SBC)) = d(M,(SBC)) = \frac{1}{2}d(A,(SBC))$ (vì $MB = \frac{1}{2}AB$)

Kẻ $AH \perp SC$.

Ta lại có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow AH \perp BC$.

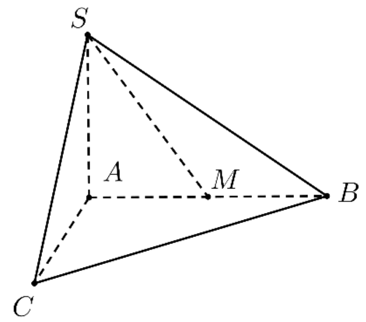
Khi đó $\begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

Xét tam giác SAC vuông tại A, ta có

$$AH^2 = \frac{AC^2.SA^2}{AC^2 + SA^2} = \frac{(a\sqrt{3})^2.(3a)^2}{(a\sqrt{3})^2 + (3a)^2} = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}a.$$

Vậy $d(DM,SB) = \frac{1}{2}d(A,(SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{3a}{4}$.

Câu 27: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 02)** Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = 2a, AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$ (minh họa như hình vẽ). Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

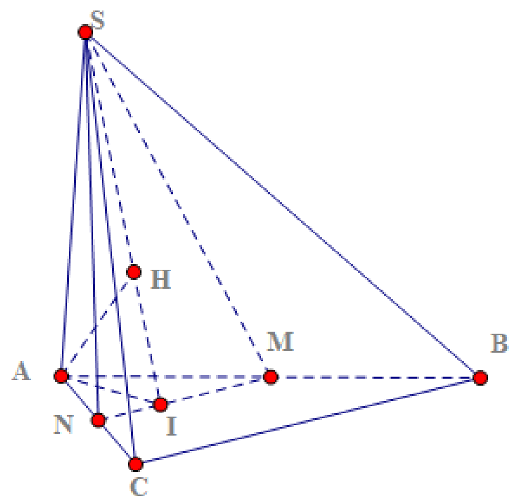


SS

A. $\frac{2a}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là trung điểm cạnh AC, khi đó mặt phẳng $(SMN)//BC$.

Ta có $d(SM,BC)=d(BC,(SMN))=d(B,(SMN))=d(A,(SMN))$.

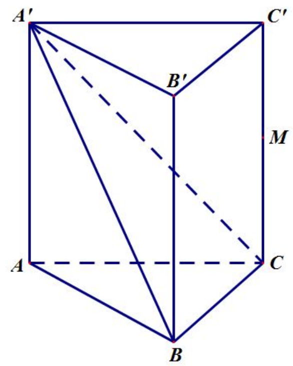
Gọi AI là đường cao trong tam giác vuông AMN, ta có $AI=\dfrac{AM.AN}{\sqrt{AM^2+AN^2}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Lại có $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp MN$, suy ra $(SAI)\perp(SMN)$.

Kẻ $AH\perp SI\Rightarrow AH\perp(SMN)\Rightarrow d(A,(SMN))=AH=\dfrac{AI.SA}{\sqrt{AI^2+SA^2}}=\dfrac{2a}{3}$.

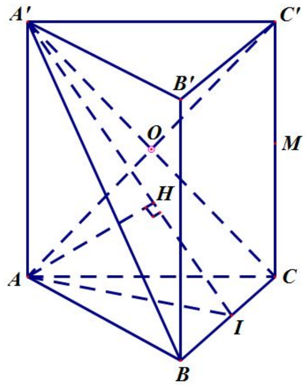
Vậy $d(SM,BC)=\dfrac{2a}{3}$.

Câu 28: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $AA'=2a$. Gọi M là trung điểm của CC'. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{57}a}{19}$

Lời giải

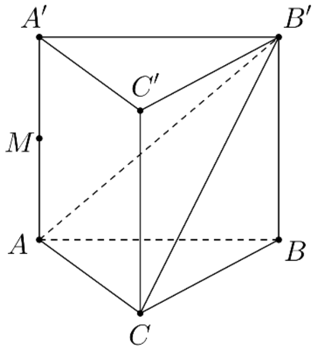


Ta có : $d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C';\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(A;\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}.AH=\frac{1}{2}.\frac{AA'.AI}{\sqrt{AA'^2+AI^2}}(*)$.

Tam giác ABC đều cạnh a có AI là độ dài đường trung tuyến nên $AI=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có : $(*)\Rightarrow d\left(M,\left(A'BC\right)\right)=\frac{1}{2}.\frac{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4+\frac{3}{4}}}.a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}a=\frac{a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 29: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A=2a$. Gọi M là trung điểm của $A'A$. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ bằng

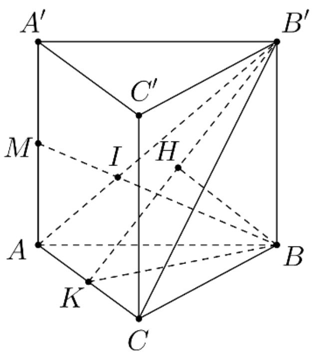


A. $\frac{\sqrt{57}a}{19}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

C. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Lời giải

Chọn A



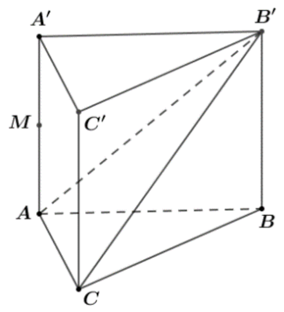
Gọi $I=BM\cap AB'$ và K là trung điểm AC.

Ta có $\frac{d\left(M,\left(AB'C\right)\right)}{d\left(B,\left(AB'C\right)\right)}=\frac{MI}{BI}=\frac{MA}{BB'}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(B,\left(AB'C\right)\right)=\frac{BH}{2}$.

Xét tam giác $BB'K$ có $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{B'B^2}+\frac{1}{BK^2}=\frac{1}{(2a)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}\Rightarrow BH=\frac{2\sqrt{57}a}{19}$.

Vậy $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{BH}{2}=\frac{\sqrt{57}a}{19}$

Câu 30: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA'.

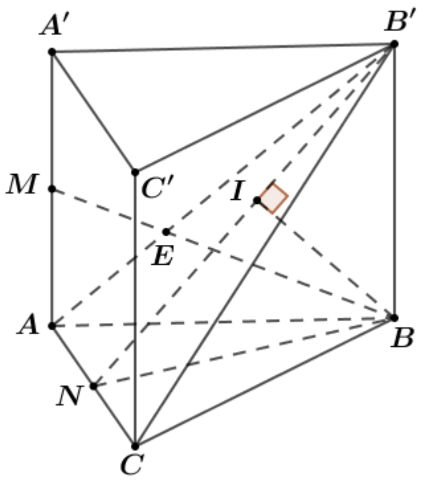


Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải

Chọn D



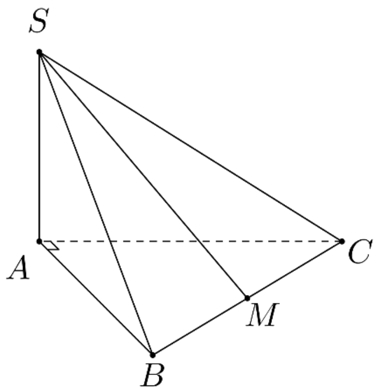
Trong $\left(ABB'A'\right)$, gọi E là giao điểm của BM và AB'. Khi đó hai tam giác EAM và $EB'B$ đồng dạng. Do đó $\frac{d\left(M,\left(AB'C\right)\right)}{d\left(B,\left(AB'C\right)\right)}=\frac{EM}{EB}=\frac{MA}{BB'}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot d\left(B,\left(AB'C\right)\right)$.

Từ B kẻ $BN\perp AC$ thì N là trung điểm của AC và $BN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BB'=a$.

Kẻ $BI\perp B'N$ thì $d\left(B,\left(AB'C\right)\right)=BI=\frac{BB'\cdot BN}{\sqrt{BB'^2+BN^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot d\left(B,\left(AB'C\right)\right)=\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

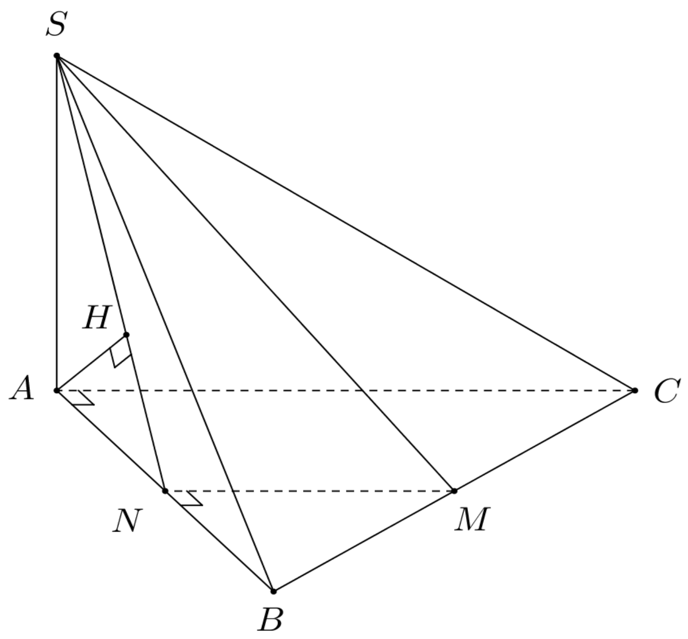
Câu 31: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng



A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{17}a}{17}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi N là trung điểm AB $\Rightarrow AC//NM$

$\Rightarrow AC//\left(SNM\right)$

$\Rightarrow d\left(AC,SM\right)=d\left(AC,\left(SNM\right)\right)=d\left(A,\left(SNM\right)\right)$

Kẻ $AH\perp SN\left(1\right)$

Do $MN//AC\Rightarrow MN\perp AB$ Mà $MN\perp SA$

$\Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp AH\,(2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AH \perp (SMN)$

$\Rightarrow d(A,(SMN)) = AH$

Xét ΔSAN vuông tại A có $AH = \dfrac{SA.AN}{SN} = \dfrac{SA.AN}{\sqrt{SA^2 + AN^2}} = \dfrac{2a.\dfrac{a}{2}}{\sqrt{4a^2 + \dfrac{a^2}{4}}} = \dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$

$\Rightarrow d(AC,SM) = AH = \dfrac{2a\sqrt{17}}{17}$

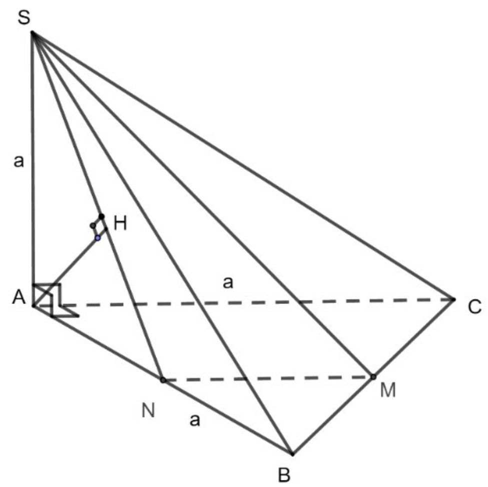
Câu 32: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Gọi N là trung điểm AB, ta có $AC // MN$

Suy ra $AC // (AMN) \Rightarrow d(AC,SM) = d(AC,(SMN))$

$= d(A,(SMN))$.

Ta có $\left.\begin{array}{l}(SAB) \perp (SMN)\,(MN \perp (SAB))\\ (SAB) \cap (SMN) = SN\\ AH \perp SN\end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SMN)$

Suy ra $AH = d\left(A,(SMN)\right)$.

$$AH = \frac{AS.AN}{\sqrt{AS^2 + AN^2}} = \frac{a.\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{5}a}{5}.$$

Cách 2:

Chọn hệ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A$, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt đi qua B, C, S.

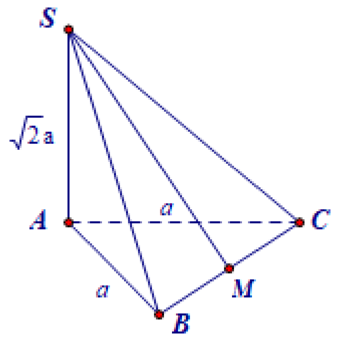
Chọn $a = 2$, ta có $A(0;0;0)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$, $S(0;0;2)$. Suy ra $M(1;1;0)$.

Ta có $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC} = (0;2;0)\\ \overrightarrow{SM} = (1;1;-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right] = (-4;0;-2)$

$\overrightarrow{AM} = (1;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{AM} = (-4).1 + 0.1 + (-2).0 = -4$.

Vậy $d(AC, SM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SM}\right]\right|} = \dfrac{|-4|}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}a}{5}$.

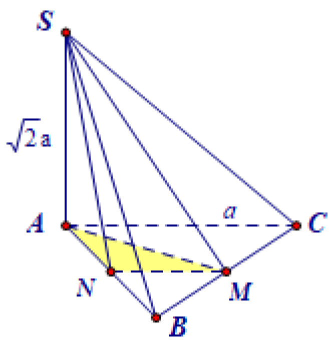
Câu 33: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SM bằng



A. $\dfrac{\sqrt{10}a}{5}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi N là trung điểm AB.

Suy ra: $AC//(SMN)$ nên $d(AC,SM)=d(AC,(SMN))=d(A,(SMN))=\frac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta SMN}}$.

Dễ thấy: $S_{\Delta AMN}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}=\frac{a^2}{8}\Rightarrow V_{S.AMN}=\frac{1}{3}S_{\Delta AMN}.SA=\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

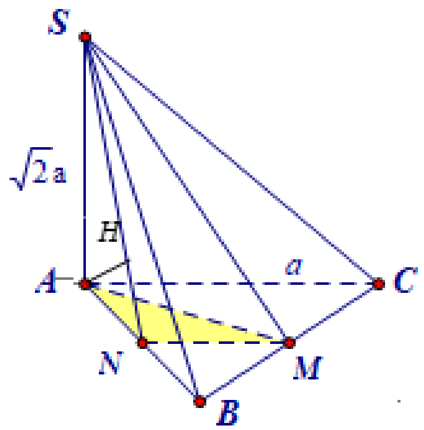
Ta có: $SN=\sqrt{SA^2+AN^2}=\frac{3a}{2}$, $MN=\frac{AC}{2}=\frac{a}{2}$ và $SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\frac{\sqrt{10}a}{2}$.

Suy ra: $p=\frac{1}{2}(SM+SN+MN)=\frac{a}{4}\left(4+\sqrt{10}\right)$

Và $S_{\Delta SMN}=\sqrt{p(p-SM)(p-SN)(p-MN)}=\frac{3a}{8}$.

Vậy $d(A,(SMN))=\frac{3V_{S.AMN}}{S_{\Delta SMN}}=\frac{\sqrt{2}a}{3}$.

<u>Cách 2:</u> Gọi N là trung điểm AB.



Suy ra: $AC//(SMN)$ nên $d(AC,SM)=d(AC,(SMN))=d(A,(SMN))$

Kẻ $AH\perp SN$ tại H.

Vì $MN\parallel AC, AC\perp AB\Rightarrow MN\perp AB$, mà $MN\perp SA\Rightarrow MN\perp(SAN)\Rightarrow MN\perp AH$

Ta có: $\begin{cases}AH\perp SN\\AH\perp MN\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SMN)\Rightarrow AH=d(A,(SMN))$

Xét tam giác vuông SAN vuông tại A ta có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=\frac{9}{2a^2}$

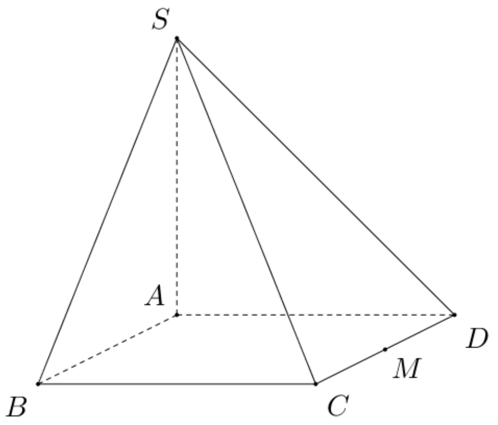
$\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{2}}{3}\Rightarrow d(AC,SM)=\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

DẠNG 1: KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến (SAB) nhận giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a.

Lời giải



Ta có $CD // AB$, mà $AB \subset (SAB)$ nên $CD // (SAB)$.

Từ đó suy ra $d(M;(SAB)) = d(D;(SAB))$

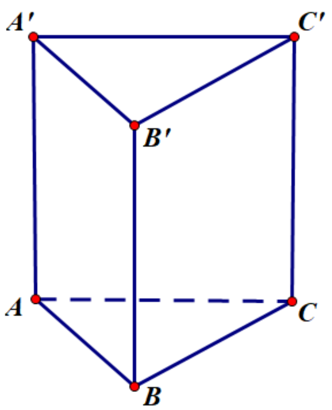
Ta có $AD \perp AB$, $AD \perp SA$ suy ra $AD \perp (SAB)$

Suy ra $d(D;(SAB)) = AD = a$. Vậy $d(M;(SAB)) = a$.

Câu 35: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

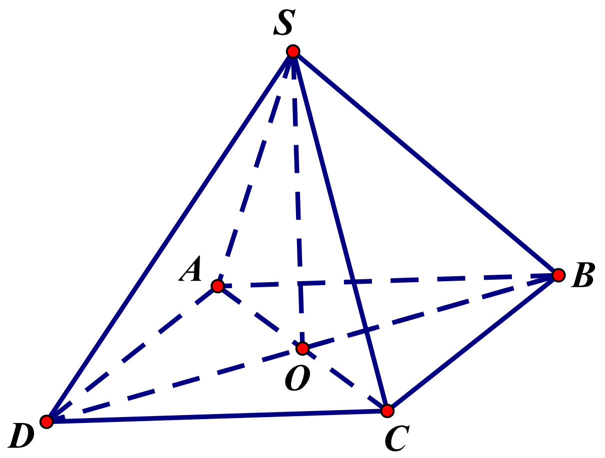
A. $2a$. **B.** $2\sqrt{2}a$. **C.** $\sqrt{2}a$. **D.** $\sqrt{3}a$.

Lời giải



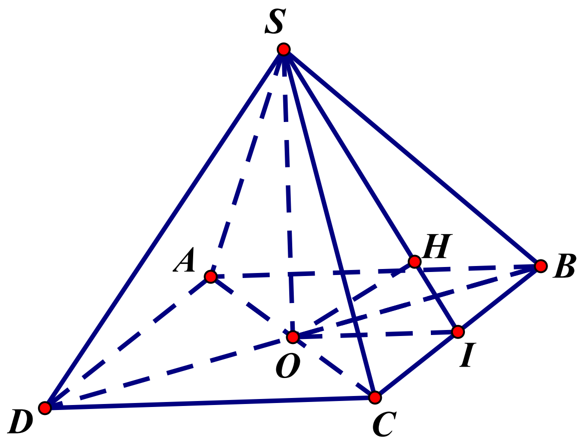
Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow d[B,(ACC'A')] = BH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 36: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Biết $SO = a$, khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC và H là hình chiếu của O trên SI.

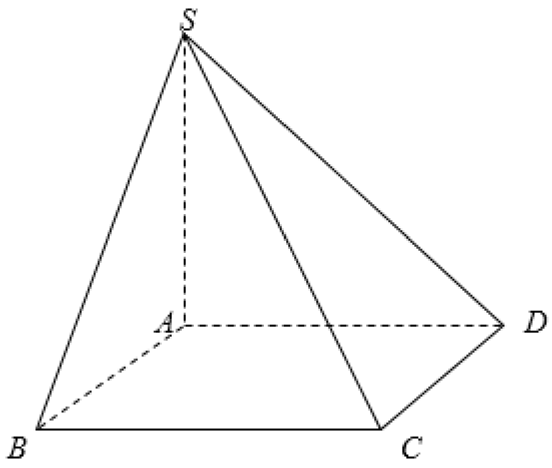
Khi đó $\left.\begin{matrix} BC \perp OI \\ BC \perp SI \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$

Nên $OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O;(SBC)) = OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$ Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

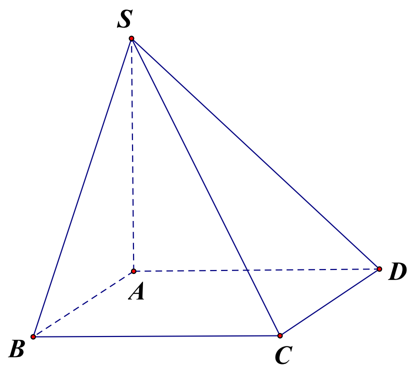


Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $d(S,(ABCD)) = SA = a$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

A. a. **B.** $2a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải



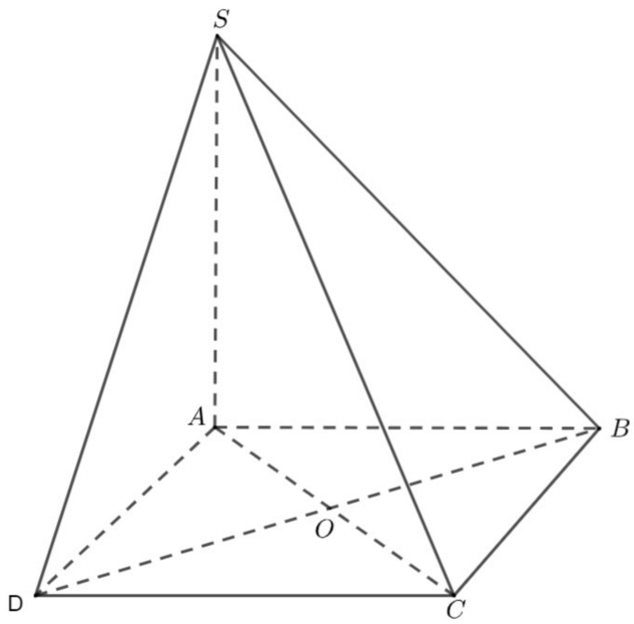
Vì:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$. Suy ra $d(C;(SAB)) = CB = a$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC).

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Gọi $AC \cap BD = \{O\}$

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$

Ta có:

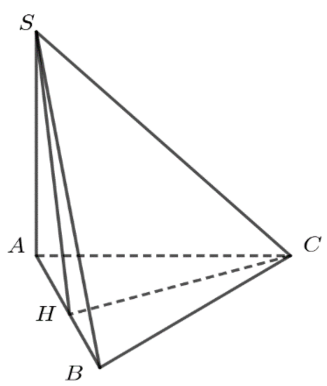
$$\left.\begin{array}{l} BO \perp SA, BO \perp AC \\ SA \subset (SAC), AC \subset (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow BO \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow d\left(B,(SAC)\right) = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $SA \perp (ABC)$. Tính khoảng cách từ C đến (SAB).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** a.

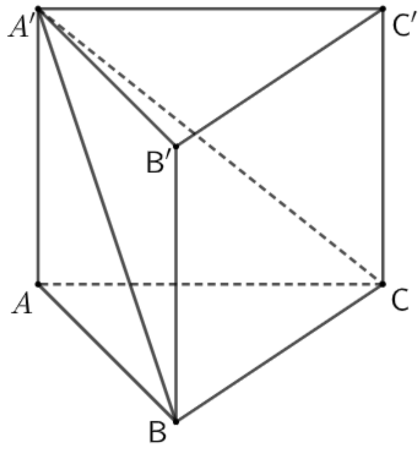
Lời giải



Gọi H là trung điểm của cạnh AB, ta có $\begin{cases} CH \perp AB \\ CH \perp SA \end{cases} \Rightarrow CH \perp (SAB)$

nên $d\left(C,\left(SAB\right)\right)=CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

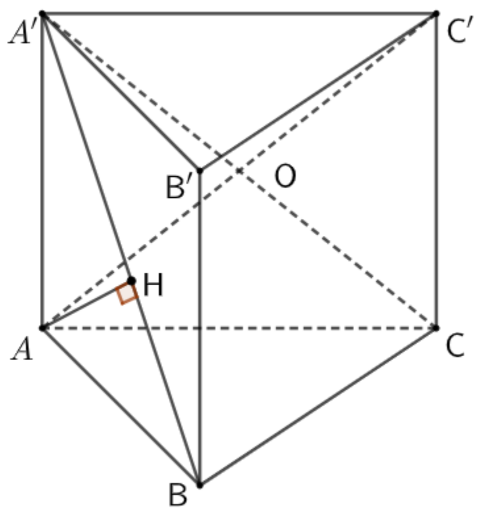
Câu 41: Một hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, AA'=2a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng



A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $2a\sqrt{5}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{3a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $A'C'CA$ là hình chữ nhật.

Gọi $O=AC'\cap A'C$, khi đó $AO=C'O$.

Mà $AC'\cap\left(A'BC\right)\equiv O$ nên khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$.

Ta có $\begin{cases}AA'\perp BC\\ AB\perp BC\end{cases}\Rightarrow BC\perp\left(A'AB\right)$.

Từ A hạ đường cao AH xuống $A'B$.

Khi đó ta có $AH\perp A'B$ mà $BC\perp AH$ vì $\begin{cases}AH\subset\left(A'AB\right)\\ BC\perp\left(A'AB\right)\end{cases}$.

$\Rightarrow AH\perp\left(A'BC\right)$ nên khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ bằng AH.

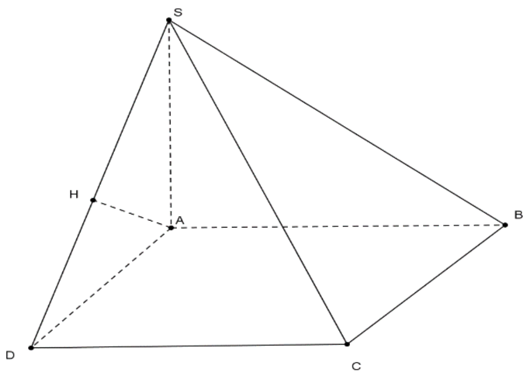
Xét $\Delta A'AB$ vuông tại A, đường cao AH có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{A'A^2}\Rightarrow\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{4a^2}$

$\Rightarrow AH=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết $AD = 2a, SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:

A. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$. **B.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

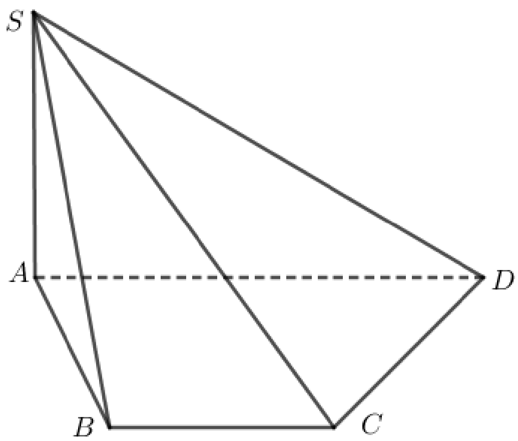


Gọi H là hình chiếu của A lên cạnh SD. Ta có: $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

Suy ra: $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Khoảng cách từ A đến đến (SCD) bằng AH.

Ta có: $AH = \frac{AS.AD}{\sqrt{AS^2 + AD^2}} = \frac{a.2a}{\sqrt{a^2 + (2a)^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

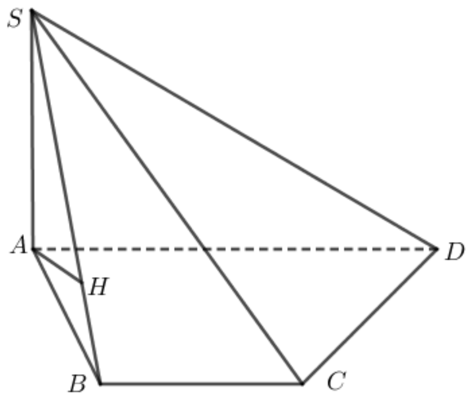
Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$.



Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $2a$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên SB (1).

Ta có: $BC \perp AB, SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ $(1),(2)$ ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

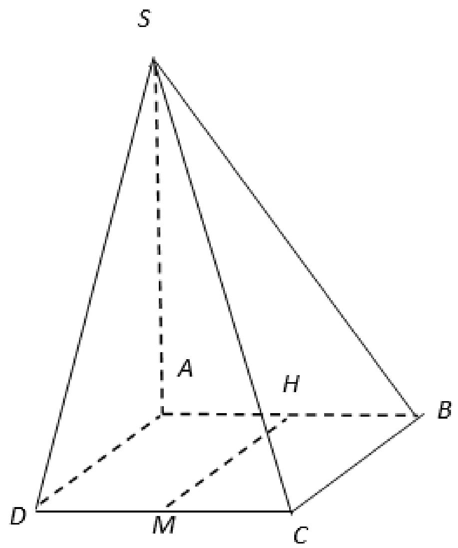
Xét tam giác vuông SAB, ta có: $AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow HM \perp AB.$

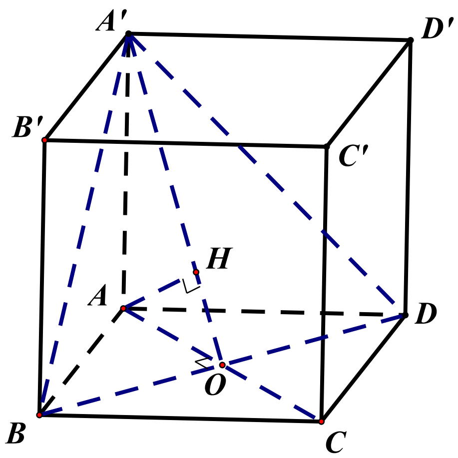
Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MH$.

$\Rightarrow MH \perp (SAB) \Rightarrow d(M,(SAB)) = MH = a$.

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của $BD \Rightarrow AO \perp BD$.

Do $AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD$ suy ra $BD \perp (AA'O)$.

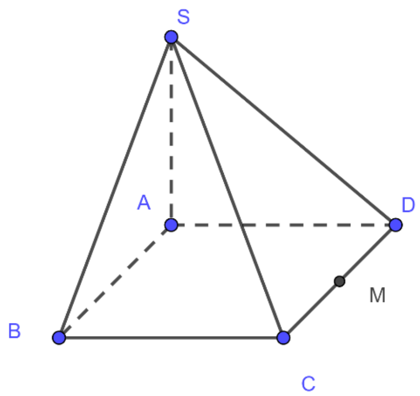
Kẻ $AH \perp A'O \Rightarrow AH \perp BD$. Do đó $AH \perp (A'BD)$ hay $d(A;(A'BD)) = AH$.

Ta có $AO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Suy ra $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AA'^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

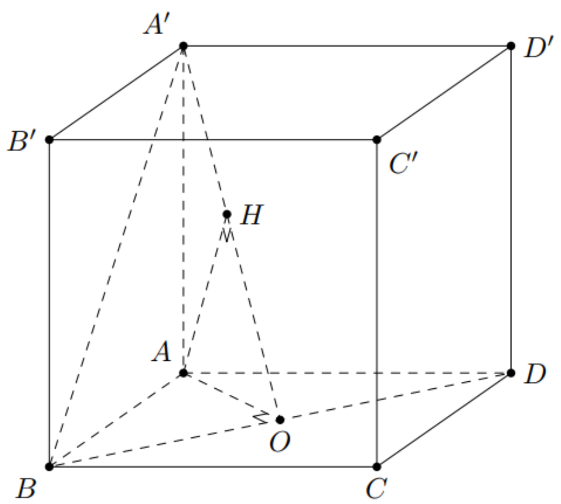
Lời giải

$d(M,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DA = a$.

Câu 47: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



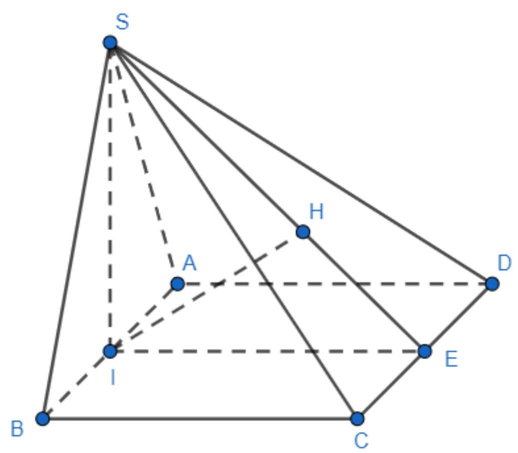
Có $OA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{OA^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\text{d}\left(A;\left(A'BD\right)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, biết SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCD).

A. $\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{6}$. **C.** $\dfrac{3a\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{16}$.

Lời giải



Ta có $d\left(A;\left(SCD\right)\right)=d\left(I;\left(SCD\right)\right)$

Gọi E là trung điểm CD.

Dựng $IH\perp SE$ thì ta có $d\left(I;\left(SCD\right)\right)=IH=\dfrac{IE.IS}{\sqrt{IE^2+IS^2}}=\dfrac{2a.a\sqrt{3}}{\sqrt{\left(2a\right)^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}}=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA,SB và SC đôi một vuông góc với nhau. Biết $SA=SB=SC=3$. Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 1.

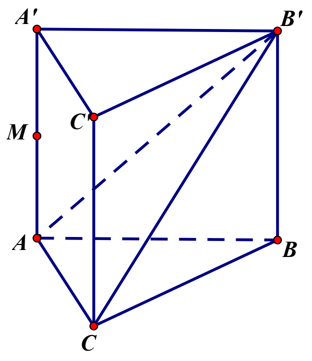
Lời giải

Gọi $d\left(S;\left(ABC\right)\right)=h$

Ta có: $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{SB^2}+\dfrac{1}{SC^2}=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra $h^2=3\Leftrightarrow h=\sqrt{3}$

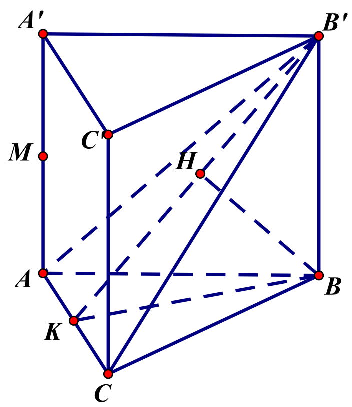
Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của AA'



Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(AB'C\right)$ bằng.

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của AC, dựng $BH\perp B'K$ tại H

Ta có: $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(B,\left(AB'C\right)\right)$.

$\begin{cases} BH \perp B'K \\ BH \perp AC \ \left(AC \perp \left(BB'K\right) \supset BH\right) \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp \left(AB'C\right)$.

$\Rightarrow d\left(B,\left(AB'C\right)\right)=BH$

Xét tam giác vuông $BB'K$ ta có:

$$\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BB'^2}+\frac{1}{BK^2}$$

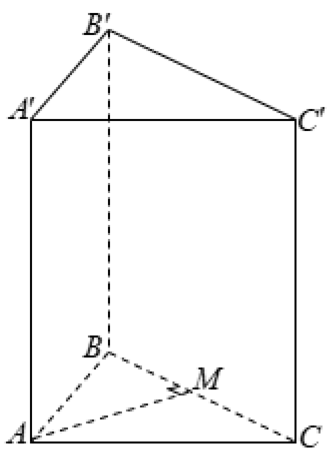
$$\Leftrightarrow BH=\frac{BB'.BK}{\sqrt{BB'^2+BK^2}}=\frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d\left(M,\left(AB'C\right)\right)=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{21}}{7}=\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Câu 51: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB=AA'=a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ bằng

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** a.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $AM \perp BC$

Mặt khác: $AM \perp BB'$

Suy ra $AM \perp \left(BCC'B'\right) \Rightarrow d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)=AM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$ bằng

A. $3\sqrt{2}a$. **B.** a. **C.** $\frac{3}{2}a$. **D.** $3a$.

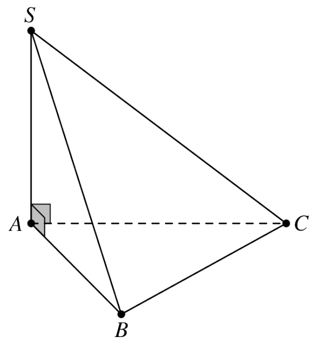
Lời giải

Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(ABC) \perp (SAC)$.

Hạ $BH \perp AC$, khi đó $BH \perp (SAC)$, suy ra $\mathrm{d}(B,(SAC)) = BH$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại B, $AB = a\sqrt{2}$ nên $AC = 2a$, suy ra $BH = \frac{AC}{2} = a$.

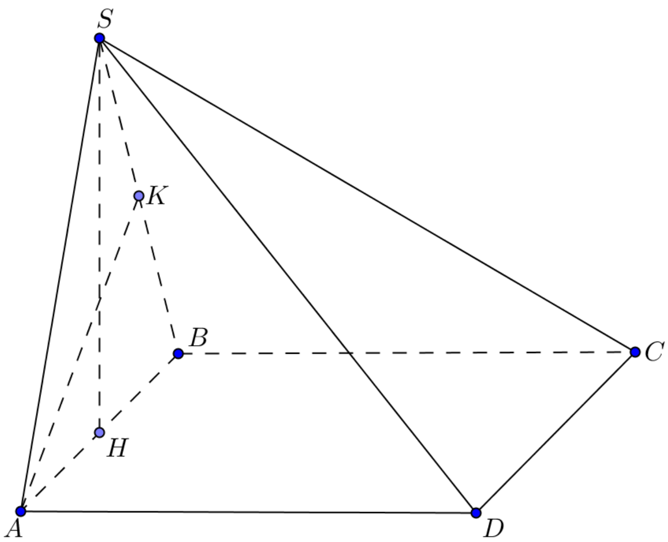
Vậy $\mathrm{d}(B,(SAC)) = a$.



Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB. Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

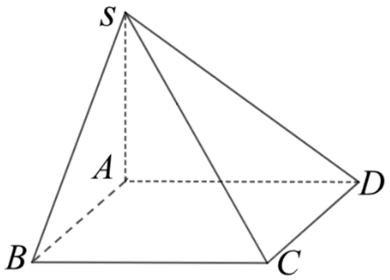
Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases}$

Dễ thấy $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Kẻ $AK \perp SB \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$AD // (SBC) \Rightarrow d\left(D,(SBC)\right) = d\left(\mathrm{A},(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

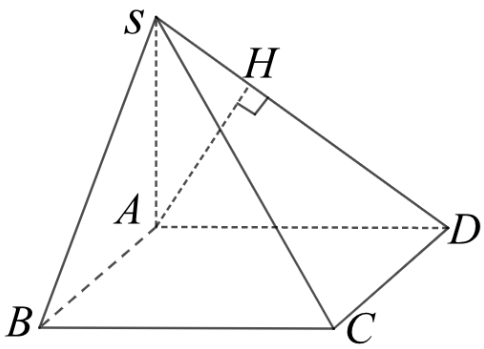
Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a$, $SA = a$.



Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng

A. $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$. **D.** $\dfrac{3a}{\sqrt{7}}$.

Lời giải



Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD,\ SA \perp CD$.

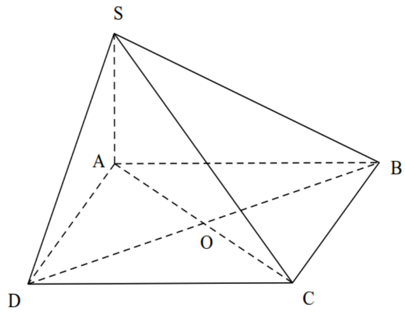
Dựng $AH \perp SD$ $(H \in SD)$.

Có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.

Vậy $AH \perp (SCD) \Rightarrow$ khoảng cách từ A đến (SCD) bằng độ dài đoạn

$AH = \dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

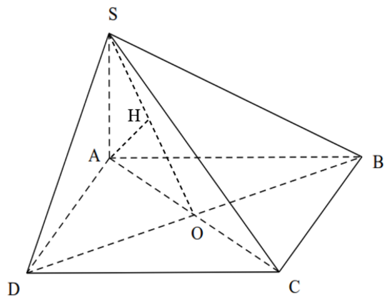
Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$



Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{4a}{9}$.

Lời giải

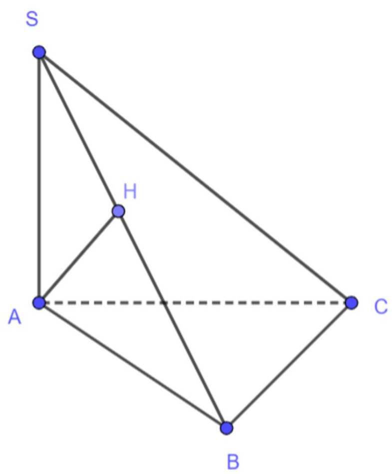


Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, dựng $AH \perp SO$. Khi đó, $d\left(A,(SBD)\right) = AH$.

Trong tam giác SAO vuông tại O có AH là chiều cao nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AO^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{3}.$$

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a\sqrt{2}$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng



A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Trong mặt phẳng (SAB), kẻ $AH \perp SB$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB \cap SA = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Mà $AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

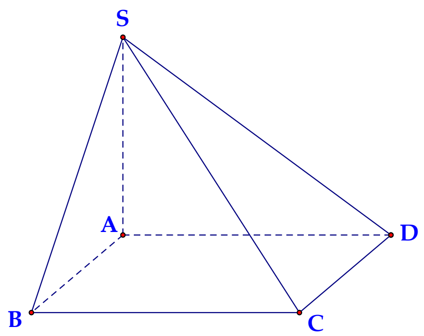
Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AH \perp SB \\ AH \perp BC\left(BC \perp (SAB)\right) \\ SB \cap BC = \{B\} \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right) = AH$

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

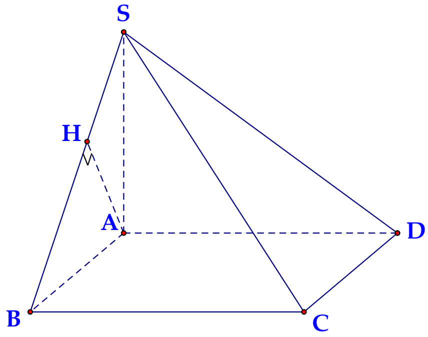
Câu 57: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng bao nhiêu?



A. $\dfrac{a}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Trong (SAB) vẽ $AH \perp SB$ tại H



Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

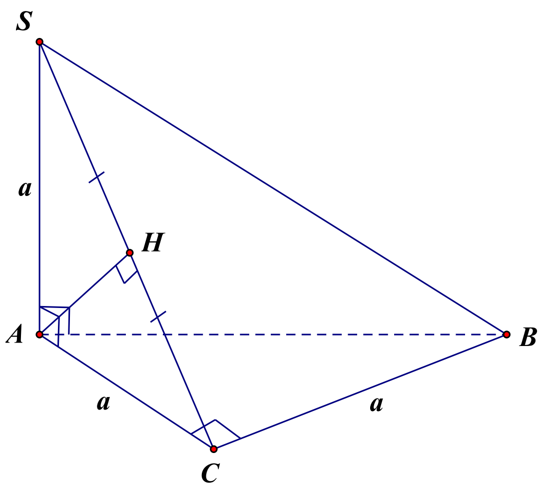
Khi đó $\begin{cases} (SAB) \perp (SBC) \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \\ \text{Trong } (SAB), AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$ hay $AH = d\left(A,(SBC)\right)$.

Ta có $AH = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{a.a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $d\left(A,(SBC)\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, $BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\sqrt{2}a$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$.

Lời giải



Vì $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC)$

Khi đó $(SBC) \perp (SAC)$ theo giao tuyến SC

Trong (SAC), kẻ $AH \perp SC$ tại H suy ra $AH \perp (SBC)$ tại H

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng AH

Ta có: $AC = BC = a$, $SA = a$ nên tam giác SAC vuông cân tại A

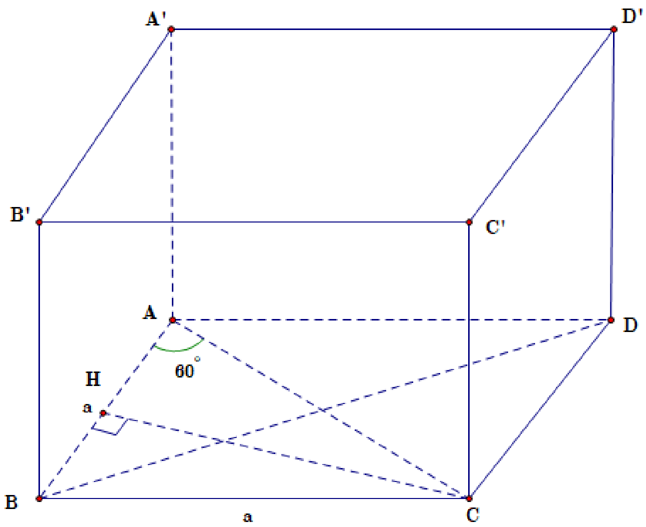
Theo Py-ta-go: $SC = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

Suy ra $AH = \dfrac{1}{2}SC = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Câu 59: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $\angle BAC = 60°$. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $(ABA'B')$ bằng

A. $2a$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** a.

Lời giải



Ta có $\angle BAC = 60° \Rightarrow \angle ABC = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều.

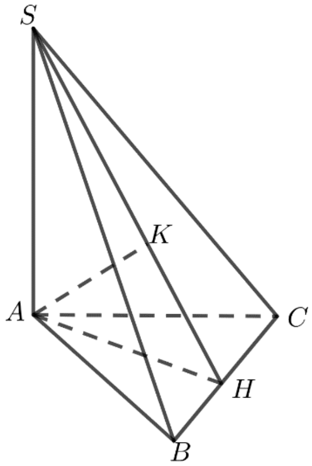
Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp (ABA'B')$.

Ta có $d(C,(ABA'B')) = CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 60: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vẽ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Vẽ $AK \perp SH$ tại K mà $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (SBC)$ tại K.

Do đó $AK = d\left(A,(SBC)\right)$.

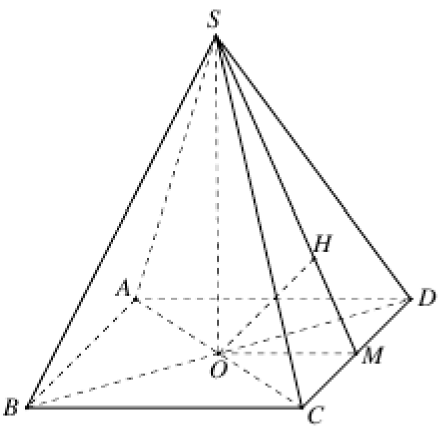
H là trung điểm của BC nên $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $AK = \dfrac{SA.AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 61: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách d từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên theo a.

A. $d = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{5}}{3}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải



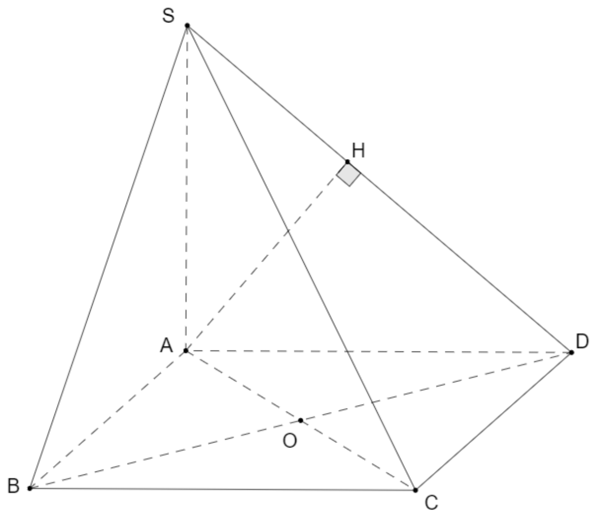
Gọi M là hình chiếu của O lên CD, H là hình chiếu của O lên SM. Suy ra đoạn OH là khoảng cách từ O đến $mp(SCD)$

Vậy $d = OH = \dfrac{OM.OS}{\sqrt{OM^2 + OS^2}} = \dfrac{\dfrac{a}{2}.a\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + 2a^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a và $SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{3}$ .Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) là

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải



Kẻ đường cao AH của tam giác SAD.

Ta có:

$AC \cap (SCD) = C$

Mà O là trung điểm của AC.

nên $\dfrac{d(O,(SCD))}{d(A,(SCD))} = \dfrac{CO}{CA} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $d(O,(SCD)) = \dfrac{1}{2} d(A,(SCD))$

Ta có: $AH \perp SD$, $AH \perp CD$ $(CD \perp (SAD))$ và $SD \cap CD = D \in (SCD)$

Nên $AH \perp (SCD)$.

Suy ra $d(A,(SCD)) = AH$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có đường cao AH:

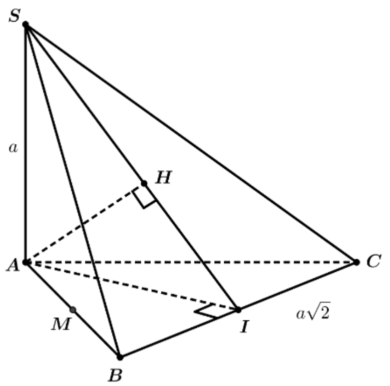
$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{3a^2} + \dfrac{3}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AH^2 = \dfrac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Nên $d\left(O,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp\left(ABC\right)$, $SA=a$. Tam giác ABC vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI\perp BC$.

Theo giả thiết $SA\perp\left(ABC\right)\Rightarrow BC\perp SA$. Do đó $BC\perp\left(SAI\right)$.

Trong mặt phẳng $\left(SAI\right)$, kẻ $AH\perp SI$. Mà $BC\perp\left(SAI\right)\Rightarrow BC\perp AH$.

Từ và suy ra $AH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow d\left(A,(SBC)\right)=AH$.

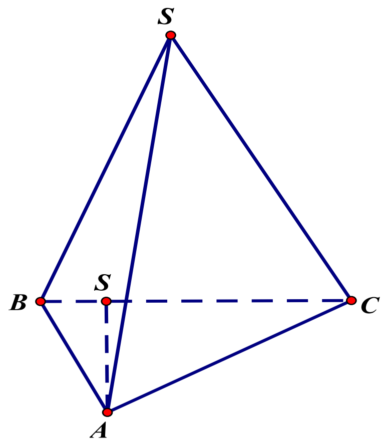
Ta có $AI=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $AH=\dfrac{AI.AS}{\sqrt{AI^2+AS^2}}=\dfrac{a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì M là trung điểm của BC nên $d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,(SBC)\right)=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A có $AB=a$, $AC=2a$, mặt phẳng $\left(SBC\right)\perp\left(ABC\right)$. Khoảng cách từ A đến $\left(SBC\right)$ bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{5}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

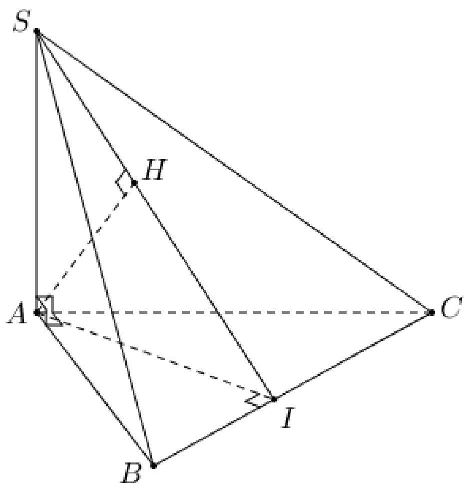


Trong mặt phẳng (ABC) dựng $AH \perp BC$. Do $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow AH \perp (SBC)$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $AH = \dfrac{AB.AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 65: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu của A trên BC, H là hình chiếu của A trên SI.

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ AI \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH \\ \\ SI \perp AH \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

Do đó: $d(A,(SBC)) = AH$

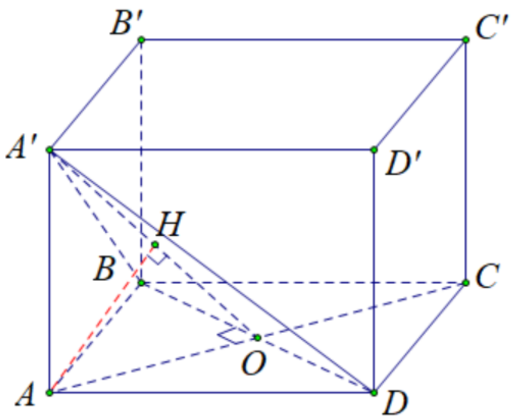
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Vậy $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 66: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'O$ thì $AH \perp A'O$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp \left(AA'O\right) \Rightarrow BD \perp AH$

Vậy $AH \perp \left(A'BD\right) \Rightarrow d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=AH$

Xét tam giác $AA'O$ vuông tại A có đường cao AH, ta có

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AO^2}+\frac{1}{AA'^2}=\frac{3}{a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 67: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, A'B = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của BC. Biết $SA = SB = SM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh S đến (ABC)

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

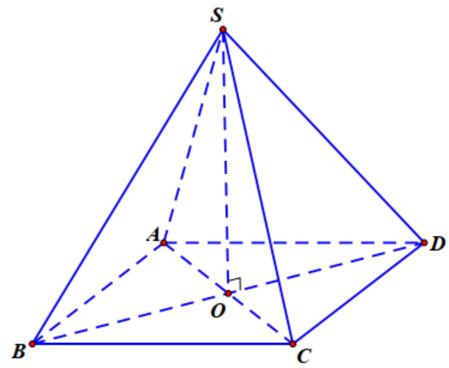
Câu 69: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 70: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. a. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 71: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$.   **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

C. $a\sqrt{14}$.   **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 72: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $S.ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$, đường thẳng SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.   **B.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$.   **C.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.   **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A, B. $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$, $AB = BC = a, AD = 2a.$ Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

A. $d(B,(SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.   **B.** $d(B,(SCD)) = \frac{a}{2}$.

C. $d(B,(SCD)) = a$.   **D.** $d(B,(SCD)) = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

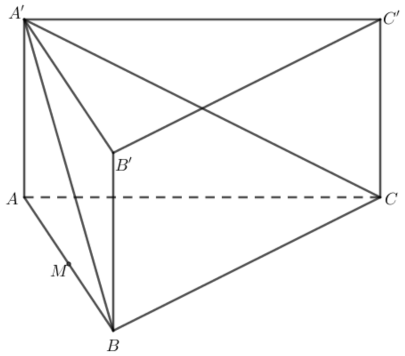
Câu 74: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

A. $\frac{2a\sqrt{13}}{13}$.   **B.** $\frac{a}{4}$.   **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{7}$.   **D.** $\frac{a}{2}$.

Câu 75: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $SA = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\frac{\sqrt{13}}{13}a$.   **B.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}a$.   **C.** $\frac{9\sqrt{13}}{13}a$.   **D.** $\frac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Câu 76: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$?



A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{3a}{2}$.

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=2a,\ AC=a,\ \widehat{SBA}=\widehat{SCA}=90^0$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC).

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{30}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}a}{28}$.

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC)

A. $d=\frac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 80: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $45°$, M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng các từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 81: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D=3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Câu 82: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Tính khoảng cách giữa AA' và BD'

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 83: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD=\sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

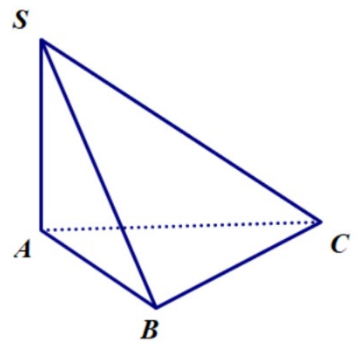
A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $2a$. **D.** a.

Câu 84: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C=3$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và

CD' bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 85: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 86: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 87: Cho hình chóp $S.ABCD$, có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $AD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Câu 88: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABCD)$, khoảng cách giữa AD và SC bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** a. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 89: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AB = 6a, AC = 4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

A. $\frac{7a}{6}$. **B.** $\frac{6a}{7}$. **C.** $\frac{12a}{\sqrt{13}}$. **D.** $2a$.

Câu 90: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 91: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = AC = b$ và có cạnh bên bằng b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng

A. $\frac{b\sqrt{2}}{2}$. **B.** b. **C.** $\frac{b\sqrt{3}}{3}$. **D.** $b\sqrt{3}$.

Câu 92: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $\frac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\frac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\frac{a\sqrt{11}}{2}$.

Câu 93: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AB và CC'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 94: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) thỏa mãn $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120°$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 95: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh $BA' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\frac{a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Câu 96: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 97: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của đoạn AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d = 4a$. **B.** $d = 2a$. **C.** $d = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **D.** $d = \frac{4a\sqrt{22}}{11}$.

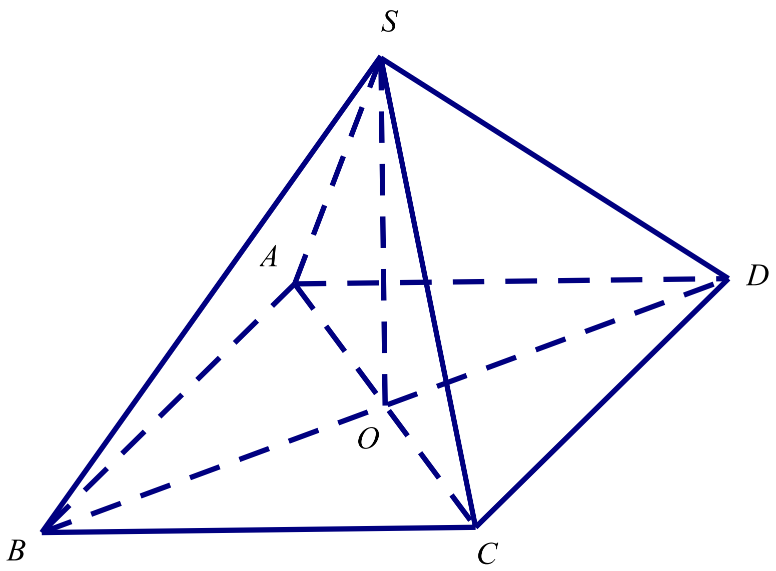
Câu 98: Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \frac{2a\sqrt{30}}{5}$.

Câu 99: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a, AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 100: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = a$.



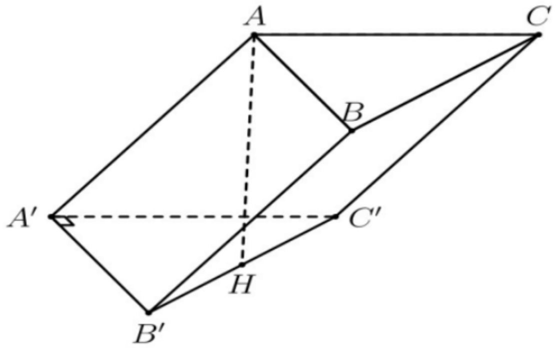
Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{15}$.

Câu 101: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 102: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}, AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của đoạn $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu 103: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 104: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^o. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{a}{16}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Câu 105: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $45°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a.

A. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

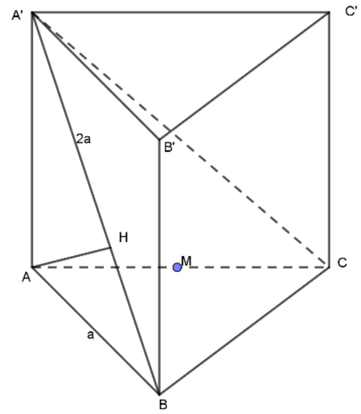
BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 67: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, A'B = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ là:

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{3a}{2}$. **D.** $\frac{3a}{4}$.

Lời giải



+ $d(M,(A'BC)) = \frac{1}{2}d(A,(A'BC))$.

Kẻ $AH \perp A'B$ (1).

Ta có: $A'A \perp (ABC) \Rightarrow A'A \perp BC$.

Mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (A'ABB')$.

Có:

$$\left.\begin{matrix} BC \perp (A'ABB') \\ AH \subset (A'ABB') \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp BC \ (2).$$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH$.

Ta có: $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

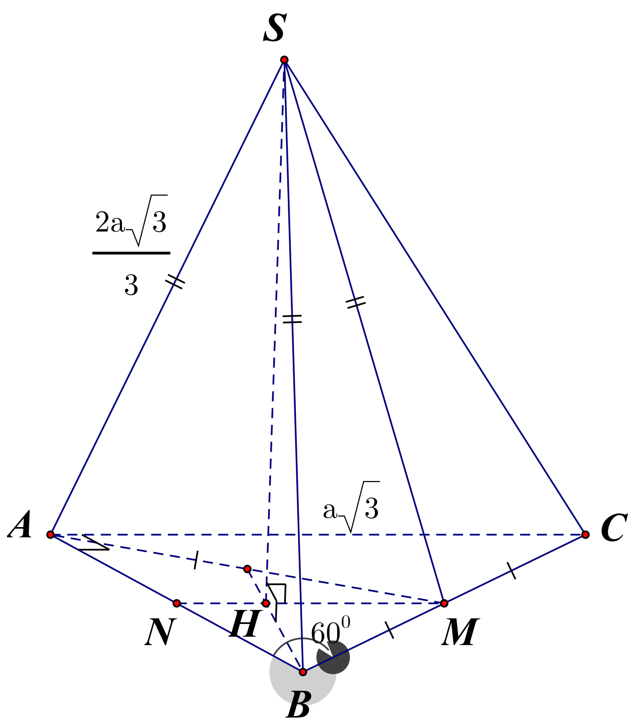
$S_{\Delta A'AB} = \frac{1}{2}AH.A'B = \frac{1}{2}AA'.AB \Rightarrow AH = \frac{AA'.AB}{A'B} = \frac{a\sqrt{3}.a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$d(M,(A'BC)) = \frac{1}{2}d(A,(A'BC)) = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AC = a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 60^0$. Gọi M là trung điểm của BC. Biết $SA = SB = SM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh S đến (ABC)

A. $d = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d = a$. **C.** $d = 2a$. **D.** $d = a\sqrt{3}$.

Lời giải



Vì ΔABC vuông tại A, M là trung điểm của BC và $\widehat{ABC} = 60^0$ suy ra ΔABM đều.

$SA = SB = SM = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Suy ra, hình chóp $S.ABM$ đều.

Xét ΔABC: $\sin 60^0 = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{BC} \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow AM = AB = BM = a$.

Gọi H là trọng tâm ΔABC nên H là chân đường cao kẻ từ S xuống (ABC).

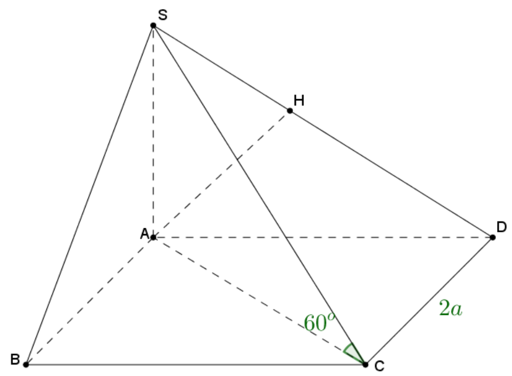
ΔABC đều cạnh a nên $MH = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Xét ΔSHM vuông tại H: $d\left(S,(ABC)\right) = SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = a$.

Câu 69: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên $\left(\widehat{SC,(BCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA} = 60°$.

Khi đó $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow SA = AC.\tan 60° = 2a\sqrt{6}$.

Mà $AB // CD \Rightarrow AB // (SCD) \Rightarrow d(B,(SCD)) = d(A,(SCD))$.

Kẻ $AH \perp SD \Rightarrow AH \perp (SCD)$

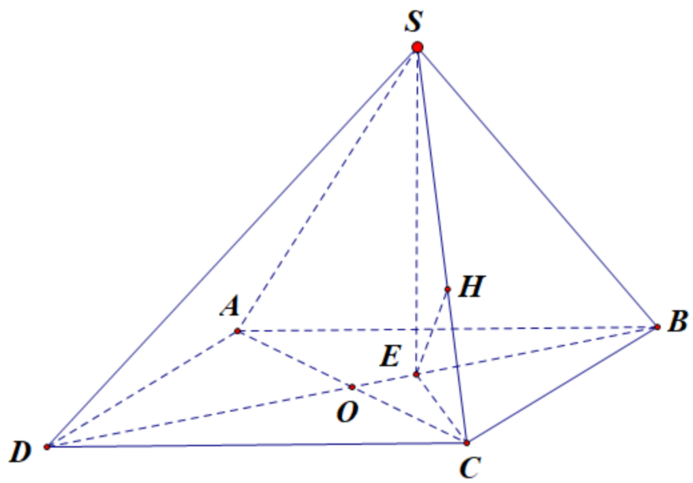
Khi đó $d(B,(SCD)) = d(A,(SCD)) = AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}}$

$\Rightarrow d(B,(SCD)) = \frac{2a\sqrt{2}.2a}{\sqrt{(2a\sqrt{2})^2 + (2a)^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Câu 70: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC là tam giác đều, hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm tam giác ABC. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $30°$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) theo a

A. a. **B.** $\frac{2a\sqrt{21}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ và E là trọng tâm của tam giác ABC.

$$\begin{cases} SD \cap (ABCD) = D \\ SE \perp (ABCD) \text{ tại E} \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{SD,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SD,ED}\right) = \widehat{SDE} = 30^\circ$$

Do tam giác ABC đều nên $\begin{cases} BD = 2BO = a\sqrt{3} \Rightarrow DE = \dfrac{2}{3}BD = a\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \\ CE = \dfrac{2}{3}BO = a\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$

Khi đó $\tan\widehat{SDO} = \dfrac{SE}{DE} \Rightarrow SE = \dfrac{2a}{3}$

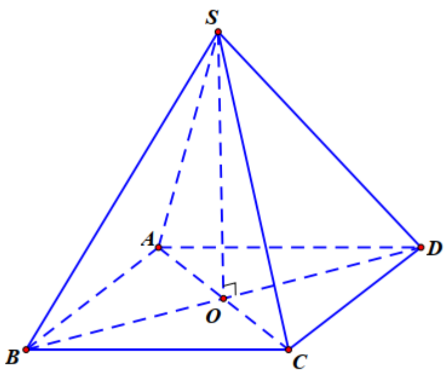
Vì tam giác ABC đều nên $CE \perp AB \Rightarrow CE \perp CD$ mà $CD \perp SE$ nên $CD \perp (SEC)$

Kẻ $EH \perp SC\,(H \in SC)$ khi đó $EH \perp (SCD)$ tại H nên $d(E,(SCD)) = EH$

$$\frac{1}{EH^2} = \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{EC^2} = \frac{1}{\left(\frac{2a}{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(a\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow EH = a\frac{2\sqrt{21}}{21}$$

Do $BE \cap (SCD) = D$ nên $\dfrac{d(B,(SCD))}{d(E,(SCD))} = \dfrac{BD}{ED} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow d(B,(SCD)) = \dfrac{3}{2}d(E,(SCD)) = a\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 71: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{14}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$. **C.** $a\sqrt{14}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$.

Lời giải

Gọi $O = AC \cap DB$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$ và đáy $ABCD$ là hình vuông.

Ta có: $\dfrac{d(A,(SCD))}{d(O,(SCD))} = \dfrac{AC}{OC} = 2 \Rightarrow d(A,(SCD)) = 2d(O,(SCD))$.

Tam giác ΔACD vuông tại D có: $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=2a\sqrt{2}\Rightarrow OD=OC=a\sqrt{2}$.

Tam giác ΔSCO vuông tại O có: $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=a\sqrt{7}$.

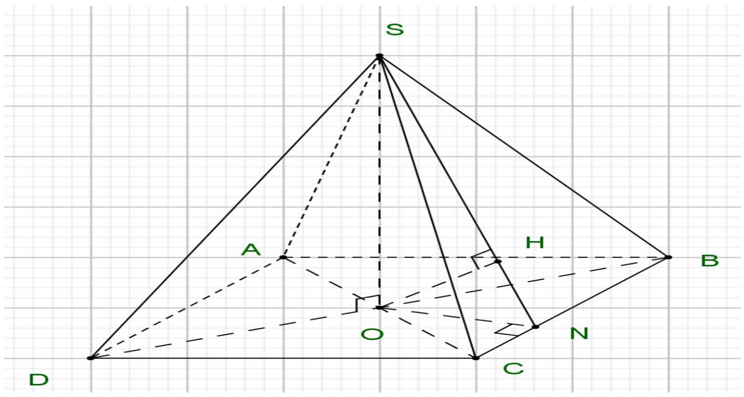
Do SO,OC,OD đôi một vuông góc nên gọi $h=d\left(O,\left(SCD\right)\right)$ thì $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OD^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{8}{7a^2}\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(SCD\right)$ bằng $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 72: Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy $S.ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh a, góc $\widehat{BAD}=60^\circ$, đường thẳng SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO=a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

A. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

Lời giải



Gọi N, H lần lượt là hình chiếu của O lên BC, SN.

Ta có $AC=2OC\Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right)=2d\left(O,\left(SBC\right)\right)=2OH\ (1)$.

Vì $\begin{cases} OH\perp SN \\ OH\perp BC,\left(BC\perp ON, BC\perp SO,\left(SO\perp\left(ABCD\right)\right), BC\subset\left(ABCD\right)\right)\end{cases}\Rightarrow OH\perp\left(SBC\right)$

Do góc $\widehat{BAD}=60^\circ$ nên tam giác BAD đều $OB=\frac{a}{2}, OA=\frac{a\sqrt{3}}{2}=OC$.

Tam giác OBC vuông tại O nên ta có $\frac{1}{ON^2}=\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{16}{3a^2}$.

Tam giác SON vuông tại O nên ta có

$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{ON^2}+\frac{1}{OS^2}=\frac{16}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{19}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{57}}{19}\ (2)$.

Từ và $\Rightarrow d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{2\sqrt{57}}{19}$.

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A,B. $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{2}$, $AB=BC=a, AD=2a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD).

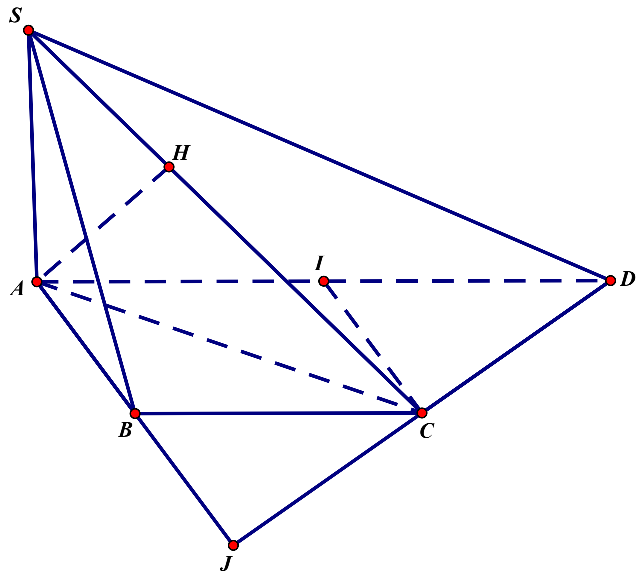
A. $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a}{2}$.

C. $d\left(B,(SCD)\right)=a$.

D. $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



+ Gọi J là giao điểm của AB với CD; I là trung điểm của AD; H là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Ta có: $ABCI$ là hình vuông cạnh a.

+ Ta có: $\dfrac{d\left(B,(SCD)\right)}{d\left(A,(SCD)\right)}=\dfrac{BJ}{AJ}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{AH}{2}$.

Mà $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{2a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow AH=a$

+ Vậy $d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{a}{2}$.

Câu 74: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30^0. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng

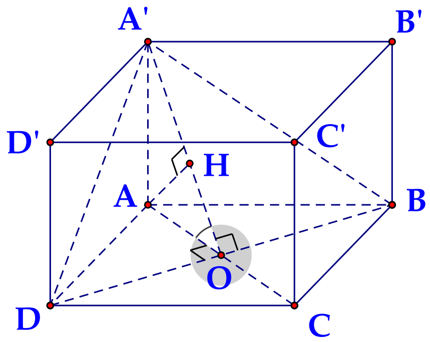
A. $\dfrac{2a\sqrt{13}}{13}$.

B. $\dfrac{a}{4}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{14}}{7}$.

D. $\dfrac{a}{2}$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AOA') \Rightarrow A'O \perp BD$.

Khi đó $((A'BD),(ABCD)) = (A'O, AO) = \widehat{A'OA} = 30°$.

Vẽ $AH \perp A'O$ tại H.

Ta có $BD \perp (AOA') \Rightarrow (A'BD) \perp (AOA')$.

Khi đó $\begin{cases} (AOA') \perp (A'BD) \\ (AOA') \cap (A'BD) = A'O \\ \text{Trong } (AOA'): AH \perp A'O \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BD) \Rightarrow d(A,(A'BD)) = AH$.

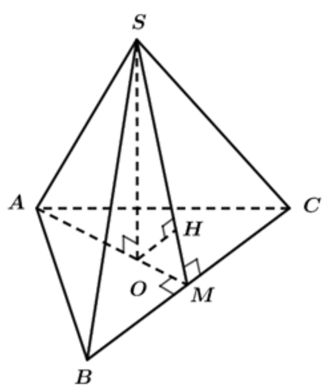
$AC = BD = 2a \Rightarrow AO = a$, $AH = AO.\sin\widehat{AOA'} = a.\sin 30° = \dfrac{a}{2}$.

Vậy $d(A,(A'BD)) = \dfrac{a}{2}$.

Câu 75: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và $SA = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC)

A. $\dfrac{\sqrt{13}}{13}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}a$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{13}}{13}a$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}a$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, O là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$

Ta có $\begin{cases} OM \perp BC \\ SO \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SOM) \perp BC$

Trong (SOM) kẻ $OH \perp SM\,(H \in SM)$ mà $OH \perp BC$ do $BC \perp (SOM)$

$\Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

Ta có $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a; OM = \frac{1}{2}AO = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông SAO

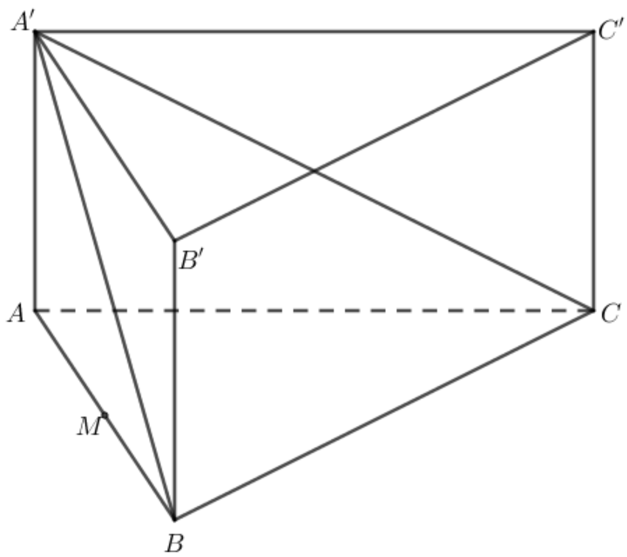
$$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = a$$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SOM có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow OH = \frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{a.\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}a$$

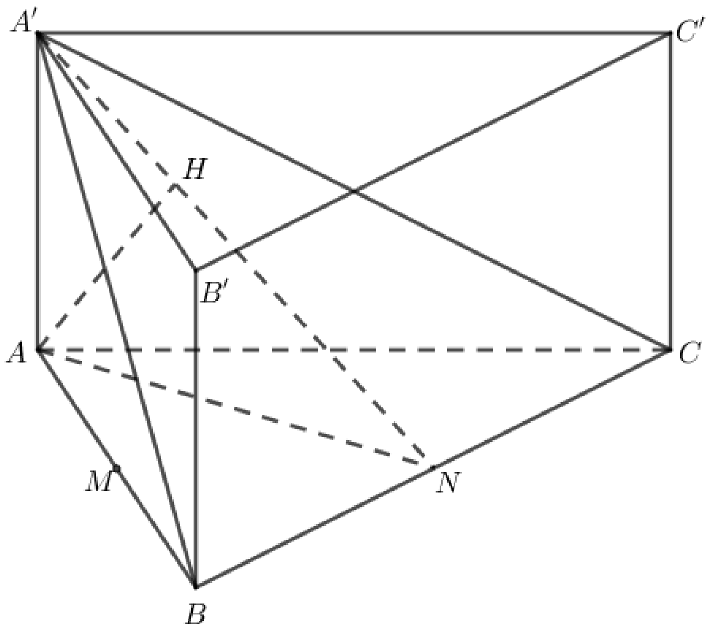
Ta có $\frac{d(A,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{AM}{OM} = 3 \Rightarrow d(A,(SBC)) = 3.d(O,(SBC)) = 3.OH = \frac{3\sqrt{13}}{13}a.$

Câu 76: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $4a$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^o. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$?



A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3a$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của BC.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $BC \perp AN, AA'$ và $AN = 2a\sqrt{3}$. Suy ra $BC \perp (A'AN)$. Từ đó ta có: $\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right) = \widehat{A'NA} = 30^o$.

Gọi H là hình chiếu của A trên $A'N$, do $BC \perp (A'AN)$ nên: $AH \perp AN, BC \Rightarrow AH \perp (A'BC)$ $\Rightarrow d(A,(A'BC)) = AH$.

Xét tam giác AHN vuông tại H có: $AH = AN \sin \widehat{ANA'} = a\sqrt{3}$. Suy ra $d(A,(A'BC)) = a\sqrt{3}$.

Mặt khác, M là trung điểm của cạnh AB nên $d(M,(A'BC)) = \dfrac{1}{2} d(A,(A'BC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2a$, $AC = a$, $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^0$, góc giữa SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45^0. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC).

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{6}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{30}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

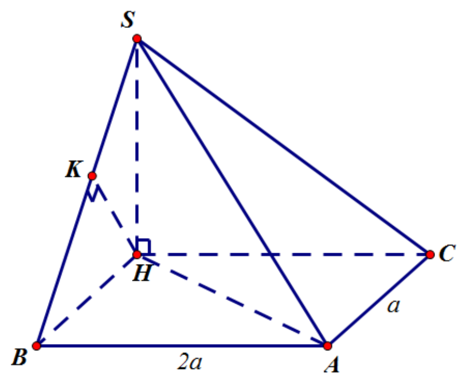
Lời giải

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC).

$\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp SB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HB$ mà $AB \perp AC$ nên suy ra $HB // AC\ (1)$

Mặt khác $\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp SC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHC) \Rightarrow AC \perp HC$ mà $AC \perp AB$ nên suy ra $HC // AB (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $ABHC$ là hình bình hành mà $\widehat{A} = 90^0$ nên $ABHC$ là hình chữ nhật.



và $(SA,(ABC)) = \widehat{SAH} = 45^0$, $SH = AH = a\sqrt{5}$.

$HC // (SAB) \Rightarrow d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))}$

Gọi K là hình chiếu của H lên SB. Kẻ $HK \perp SB$

Mà $AB \perp (SHB) \Rightarrow AB \perp HK$

Suy ra $HK \perp (SAB)$.

$d_{(C;(SAB))} = d_{(H;(SAB))} = HK$.

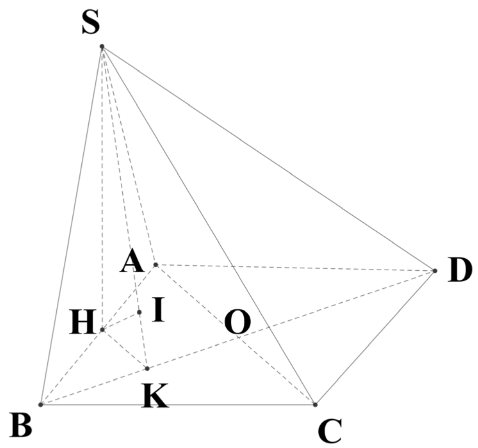
ΔSHB vuông tại H. Ta có $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HB^2} = \dfrac{1}{5a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{6}{5a^2}$.

Vậy $HK = \dfrac{a\sqrt{30}}{6}$..

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{21}a}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{21}a}{28}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó, $SH \perp (ABCD)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra $AC \perp BD$. Kẻ $HK \perp BD$ tại K (K là trung điểm BO).

Kẻ $HI \perp SH$ tại I. Khi đó: $d(A,(SBD)) = 2d(H,(SBD)) = 2HI$.

Xét tam giác SHK, có: $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $HK=\dfrac{1}{2}AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

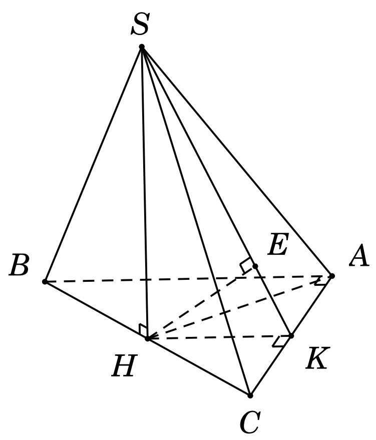
Khi đó: $\dfrac{1}{HI^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{28}{3a^2}\Rightarrow HI=\dfrac{a\sqrt{21}}{14}$.

Suy ra: $d\left(A,\left(SBD\right)\right)=2HI=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a,\ AC=a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng $\left(SAC\right)$

A. $d=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. **B.** $d=a$. **C.** $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $d=\dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC, suy ra $SH\perp BC$.

Mà $\left(SAB\right)\perp\left(ABC\right)$ theo giao tuyến BC.

Do đó $SH\perp\left(ABC\right)\Rightarrow SH\perp AC$

Gọi K là trung điểm AC, suy ra $HK\perp AC$.

Ta được $\left(SHK\right)\perp AC\Rightarrow\left(SHK\right)\perp\left(SAC\right)$ theo giao tuyến SK

Trong $\left(SHK\right)$: kẻ $HE\perp SK\ \left(E\in SK\right)$.

Suy ra $HE\perp\left(SAC\right)\Rightarrow d\left(H;\left(SAC\right)\right)=HE$.

Ta có $HK=\dfrac{a}{2}$, $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2a\Rightarrow SH=\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SHK vuông tại H, $\Rightarrow SH\perp\left(ABC\right)$ là đường cao nên

$\frac{1}{HE^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{13}{3a^2}$.

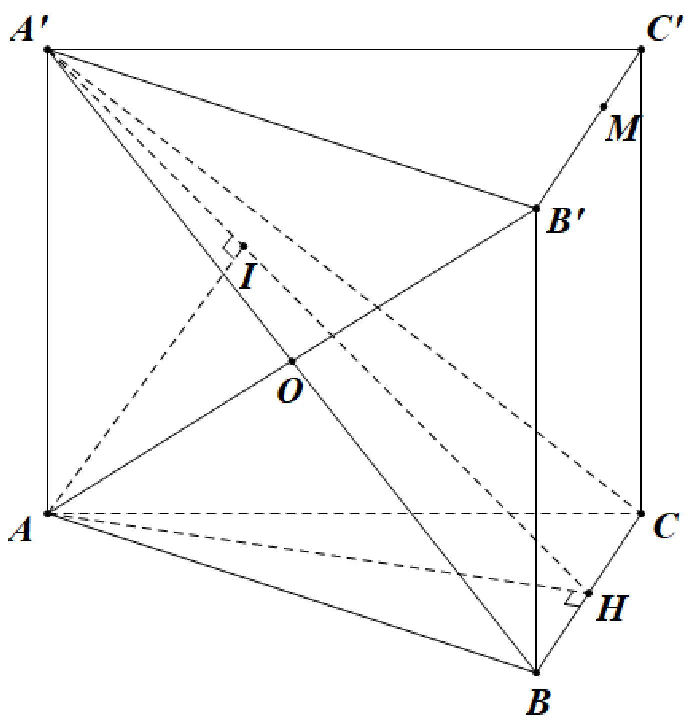
Ta được $HE=\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Khi đó $d\left(B,(SAC)\right)=2d\left(H,(SAC)\right)=2HE=2.\frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=\frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Câu 80: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $45°$, M là điểm tùy ý thuộc cạnh $B'C'$. Khoảng các từ điểm M đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy ABC là tam giác đều.

Ta có $B'C' \parallel (A'BC)$ nên $\mathrm{d}\left(M,(A'BC)\right)=\mathrm{d}\left(B',(A'BC)\right)$.

Mà $AB'\cap(A'BC)=O$ với O là trung điểm AB' nên $\mathrm{d}\left(B',(A'BC)\right)=\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên BC, I là hình chiếu của A lên $A'H$, ta chứng minh được $AI\perp(A'BC)$, suy ra $\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right)=AI$.

Mà $\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right)=\widehat{A'HA}=45°$ nên tam giác $A'AH$ vuông cân tại A, do đó

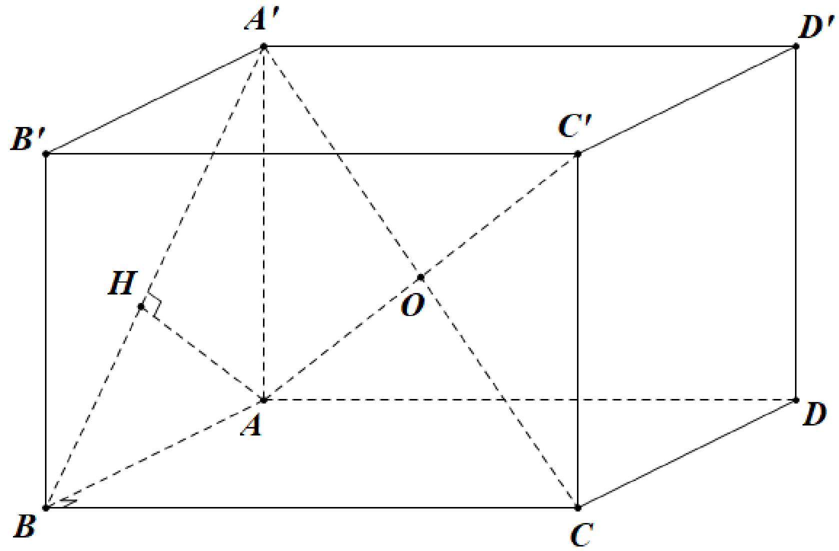
$A'H=AH\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Mặt khác, AI là đường cao của tam giác $A'AH$ nên $AI=\dfrac{A'H}{2}=\dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 81: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng $2a$, $B'D=3a$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{5}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nên là lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh $2a$, suy ra $BD=2a\sqrt{2}$.

Mà $B'D=3a\Rightarrow B'B=\sqrt{B'D^2-BD^2}=\sqrt{9a^2-8a^2}=a$.

Ta có $AC'\cap(A'BC)=O$.

Suy ra $\mathrm{d}\left(C',(A'BC)\right)=\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right)$.

Gọi H là hình chiếu của A lên $A'B$, ta chứng minh được $AH\perp(A'BC)$.

Suy ra $AH=\mathrm{d}\left(A,(A'BC)\right)$.

Tam giác $A'AB$ vuông tại A và có AH là đường cao nên

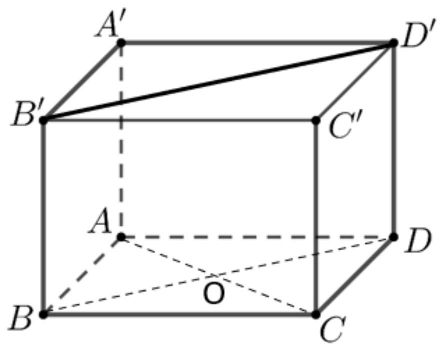
$$AH=\frac{AA'\cdot AB}{\sqrt{AA'^2+AB^2}}=\frac{a\cdot 2a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}=\frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

DẠNG 4: KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Câu 82: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a. Tính khoảng cách giữa AA' và BD'

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

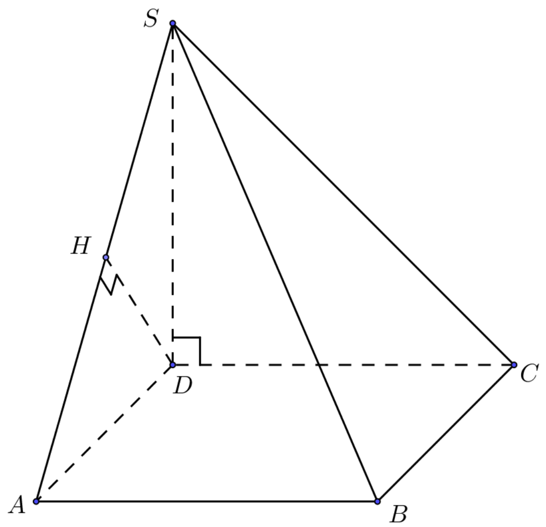
Ta có $AO \perp (BDD'B')$ tại O.

$$\Rightarrow d\left(AA', BD'\right) = d\left(AA', \left(BDD'B'\right)\right) = d\left(A, \left(BDD'B'\right)\right) = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 83: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $2a$. **D.** a.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp AD \\ SD \cap AD = D \text{ trong } (SAD) \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (SAD)$

Vẽ $DH \perp SA$ tại H trong mặt phẳng (SAD)

Ta có $\begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SA \\ AB \cap SA = A \text{ trong } (SAB) \end{cases}$

$\Rightarrow DH \perp (SAB)$

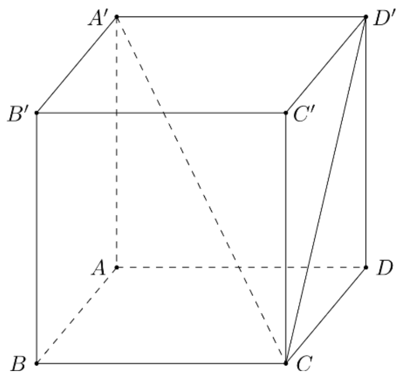
Vì $CD \parallel (SAB)$ nên $d(SB;CD) = d((SAB);CD) = d((SAB);D) = DH$.

$\triangle SAD$ vuông tại D với đường cao DH có $DH = \dfrac{SD.DA}{\sqrt{SD^2 + DA^2}} = \dfrac{3\sqrt{2}a^2}{3a} = a\sqrt{2}$

Câu 84: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C = 3$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD' bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải



Ta có $AB \parallel CD$.

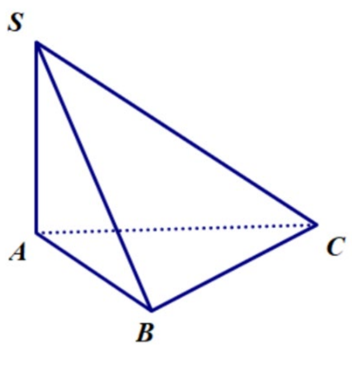
Mà $CD \subset (CC'D'D)$ suy ra $AB \parallel (CC'D'D)$

Suy ra $\mathrm{d}(AB;CD') = \mathrm{d}(AB;(CC'D'D)) = \mathrm{d}(A;(CC'D'D)) = AD$.

Theo đề $A'C = AD\sqrt{3} = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$.

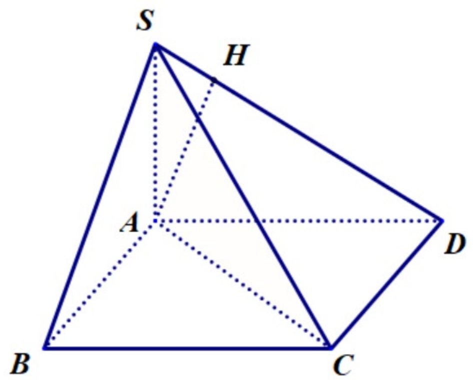
Vậy $\mathrm{d}(AB;CD') = \sqrt{3}$.

Câu 85: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** a. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Dựng điểm D sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật. Ta có $AB // CD$ nên $AB // (SCD)$.

Khi đó $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Trong (SCD), dựng $AH \perp SD$ ($H \in SD$).

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$.

Có $\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Do đó $d(A, (SCD)) = AH$.

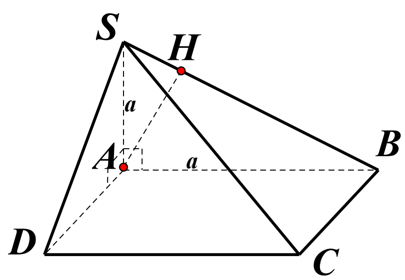
Ta có $AD = BC = a\sqrt{2}$.

$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{a^2} \Rightarrow AH = a$. Vậy $d(AB, SC) = AH = a$.

Câu 86: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng và $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AD bằng

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Ta có $AD // BC \Rightarrow AD // mp(SBC)$

Kẻ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp mp(SBC)$ hay $AH = d(A; mp(SBC))$.

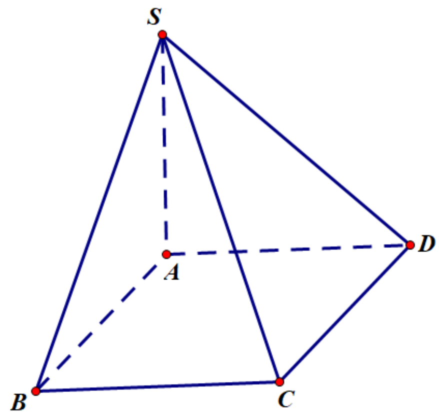
Suy ra $d(AD; SC) = d(AD; mp(SBC)) = d(A; mp(SBC)) = AH$.

Trong tam giác SAB, $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 87: Cho hình chóp $S.ABCD$, có $SA\perp(ABCD)$, đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AC=a\sqrt{5}$ và $AD=a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC.

A. $a\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải



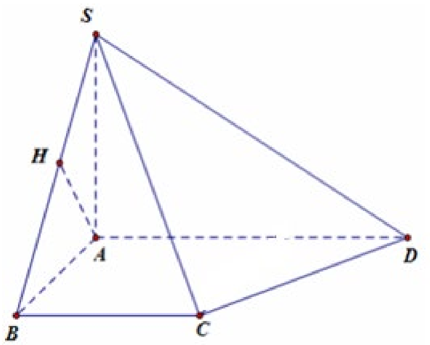
$BA=\sqrt{AC^2-AD^2}=a\sqrt{3}$

Vì $BC\parallel AD$ suy ra $d(BC;SD)=d(\text{BC};(SAD))=d(B;(SAD))=BA=a\sqrt{3}$

Câu 88: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B có $AB=a,\ SA=a\sqrt{2}$. Biết $SA\perp(ABCD)$, khoảng cách giữa AD và SC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Do $AD//BC\Rightarrow d(AD,SC)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$.

Kẻ $AH\perp SB$. Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

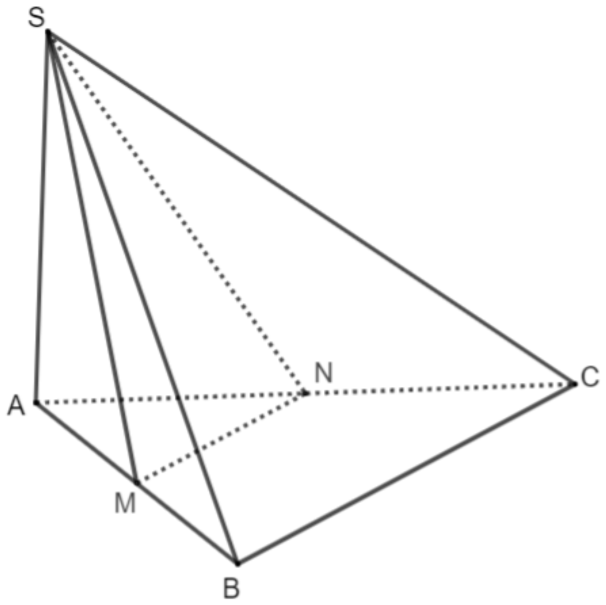
Mà $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH=d(A,(SBC))$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AS^2}=\dfrac{3}{2a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d\left(AD,SC\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 89: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AB=6a, AC=4a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BC bằng

A. $\dfrac{7a}{6}$. **B.** $\dfrac{6a}{7}$. **C.** $\dfrac{12a}{\sqrt{13}}$. **D.** $2a$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AC, ta có: $MN//BC$ nên ta được $BC//\left(SMN\right)$.

Do đó $d\left(BC,SM\right)=d\left(BC,\left(SMN\right)\right)=d\left(B,\left(SMN\right)\right)=d\left(A,\left(SMN\right)\right)=h$.

Tứ diện $A.SMN$ vuông tại A nên ta có:

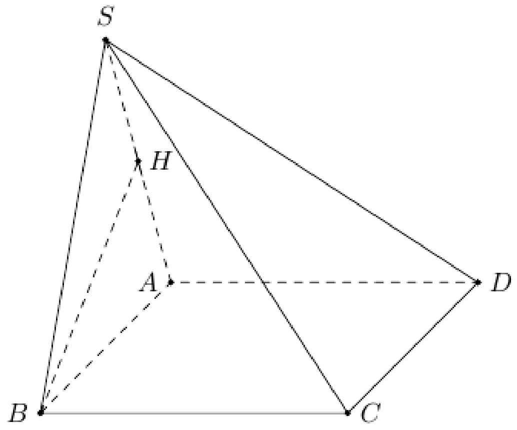
$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9a^2}+\frac{1}{4a^2}=\frac{49}{36a^2}\Rightarrow h=\frac{6a}{7}.$$

Vậy $d\left(BC,SM\right)=\dfrac{6a}{7}$.

Câu 90: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=2a, BC=a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}a$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC // AD \\ AD \subset (SAD) \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC // (SAD)$, do đó $d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD))$.

Tam giác SAB đều, gọi H là trung điểm SA thì $BH \perp SA$.

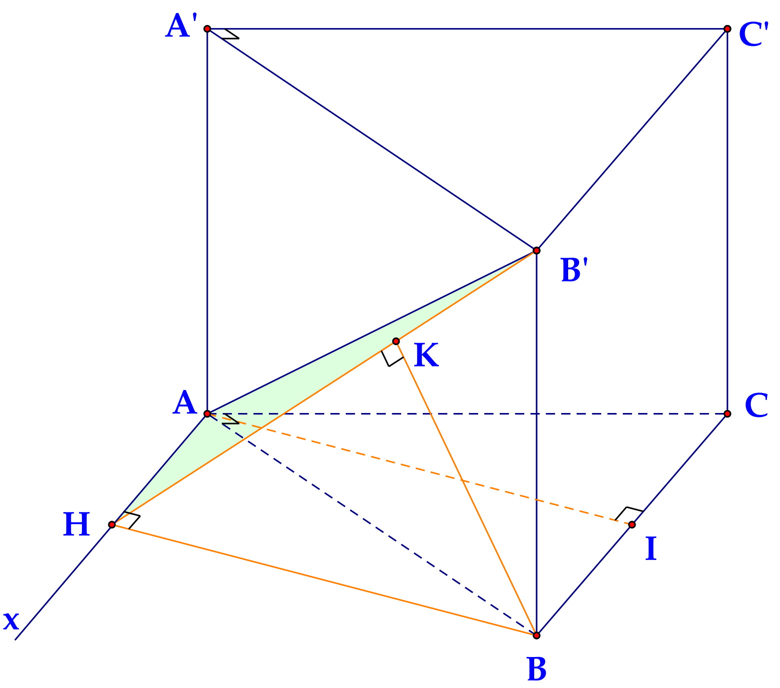
Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD)$.

Từ và suy ra $BH \perp (SAD)$, do đó $d(B, (SAD)) = BH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 91: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = AC = b$ và có cạnh bên bằng b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB' và BC bằng

A. $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$. **B.** b. **C.** $\dfrac{b\sqrt{3}}{3}$. **D.** $b\sqrt{3}$.

Lời giải



Kẻ $Ax \,//\, BC \Rightarrow BC \,//\, (B';Ax)$ suy ra $d(BC, AB') = d(B,(B;Ax))$.

Kẻ $BH \perp Ax$ tại H và $BK \perp AB'$ tại K.

Ta có $\begin{cases} AH \perp BH \\ AH \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BHB')$ nên $AH \perp BK$.

Từ đó suy ra $BK \perp (AHB')$ hay $d(B;(AHB')) = BK$.

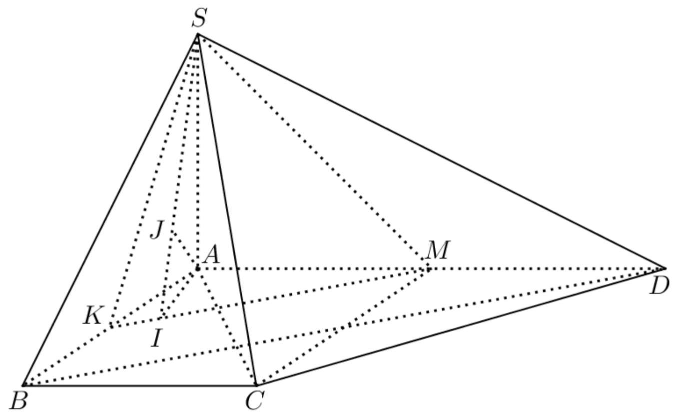
Dễ dàng thấy $BH = AI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ suy ra $BK = \dfrac{BH.B'B}{\sqrt{BH^2 + B'B^2}} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(AB';BC) = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$.

Câu 92: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$; $AD = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45°. Gọi M là trung điểm của cạnh AD. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SM và BD là:

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{11}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{22}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{11}}{2}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{\left(SC,\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{SCA}=45^0\Rightarrow SA=AC=a\sqrt{2}$

Gọi K là trung điểm của AB, khi đó AB song song với $\left(SMK\right)$.

Do đó $d\left(BD,SM\right)=d\left(BD,\left(SMK\right)\right)=d\left(B,\left(SMK\right)\right)=d\left(A,\left(SMK\right)\right)$.

Gọi I,J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên MK và SI.

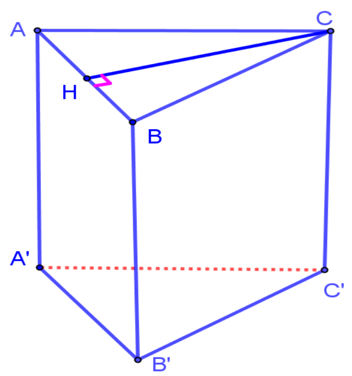
Khi đó $MK\perp AI,MK\perp SA\Rightarrow MK\perp AJ$. Do $AJ\perp MK$ và $AJ\perp SI$ nên $AJ\perp\left(SMK\right)$ hay $d\left(A,\left(AMK\right)\right)=AJ$.

Ta có $\dfrac{1}{AJ^2}=\dfrac{1}{AM^2}+\dfrac{1}{AI^2}+\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{11}{2a^2}\Rightarrow AJ=\dfrac{a\sqrt{22}}{11}$

Câu 93: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa AB và CC'.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AB\Rightarrow CH\perp AB$.

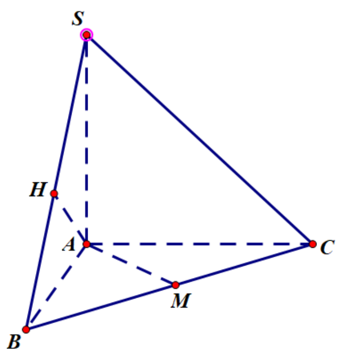
Mặt khác $CC'\perp CH$

Từ và suy ra $d\left(AB;CC'\right)=CH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 94: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy (ABC) thỏa mãn $AB = a, AC = 2a, \widehat{BAC} = 120°$; SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của BC, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AM.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 7a^2 \Rightarrow BM^2 = \dfrac{7a^2}{4}$

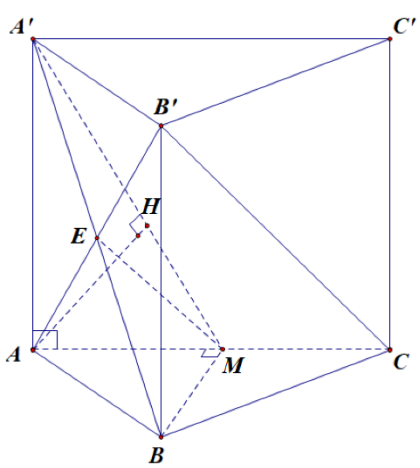
$AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$; $AB^2 + AM^2 = BM^2 \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại A

Ta có $\begin{cases} AM \perp AB \\ AM \perp SA \\ SA \cap AB \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SAB)$. Trong mp$(SAB)$, kẻ $AH \perp SB$, vậy AH là đoạn vuông góc chung của AM và SB. Do $\triangle SAB$ vuông cân đỉnh S nên $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 95: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh $BA' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là:

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{a}{3}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2a}{3}$.

Lời giải



$AA'=a\sqrt{2}$

Gọi M là trung điểm AC, $E=AB'\cap A'B\Rightarrow E$ là trung điểm của AB'

Khi đó $B'C//ME\Rightarrow B'C//(A'BM)$

$\Rightarrow d(B'C,A'B)=d(B'C,(A'BM))=d(C,(A'BM))=d(A,(A'BM))$

Trong mặt phẳng $(A'AM)$:kẻ $AH\perp A'M$

Do ΔABC đều $\Rightarrow BM\perp AC$

$ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng $\Rightarrow AA'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\perp BM$

Nên $BM\perp(A'AM)\Rightarrow BM\perp AH$

Từ và $\Rightarrow AH\perp(A'BM)\Rightarrow d(A,(A'BM))=AH$

Trong tam giác $A'AM$ vuông tại A, AH là đường cao:

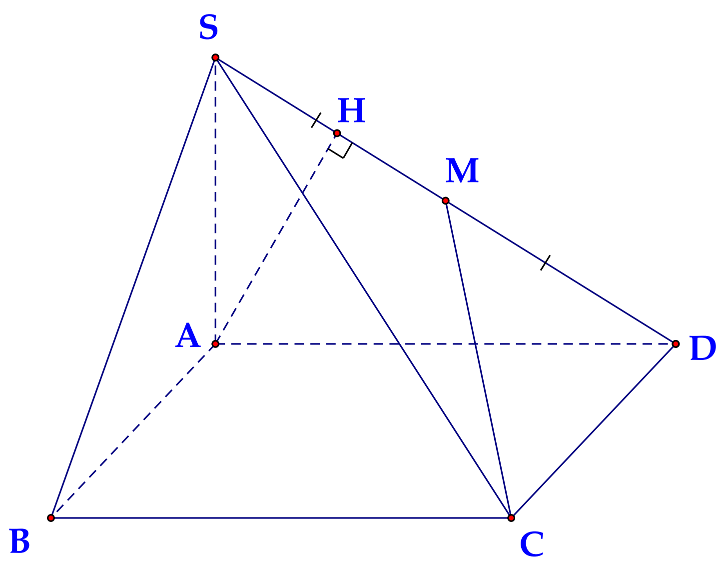
$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{A'A^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{2a^2}+\frac{4}{a^2}=\frac{9}{2a^2}\Rightarrow AH=\frac{a\sqrt{2}}{3}$$

Từ,, $\Rightarrow d(A'B,B'C)=\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 96: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm SD. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Ta có $AB//CD$ nên $AB//(SCD)$.

Khi đó $d\left(AB,CM\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)$.

Ta có $\begin{cases} CD\perp AD \\ CD\perp SA \end{cases} \Rightarrow CD\perp\left(SAD\right)\Rightarrow\left(SCD\right)\perp\left(SAD\right)$.

Trong mặt phẳng $\left(SAD\right)$ vẽ $AH\perp SD$ tại H.

Khi đó $\begin{cases} \left(SAD\right)\perp\left(SCD\right) \\ \left(SAD\right)\cap\left(SCD\right)=SD \\ \text{Trong}\left(SAD\right): AH\perp SD \end{cases} \Rightarrow AH\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(A;\left(SCD\right)\right)=AH$.

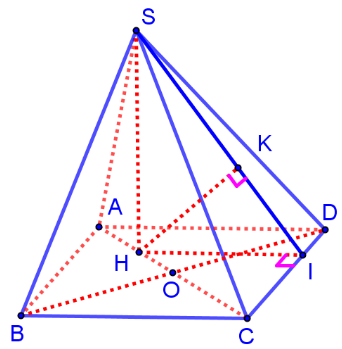
Ta có $AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}.a}{\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(AB,CM\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 97: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA=2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là trung điểm H của đoạn AO. Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB.

A. $d=4a$. **B.** $d=2a$. **C.** $d=\dfrac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. **D.** $d=\dfrac{4a\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu của H trên $CD\Rightarrow HI\perp CD$. Gọi K là hình chiếu của H trên $SI\Rightarrow HK\perp SI$.

Ta có $\begin{cases} CD\perp HI \\ CD\perp SH\ \left(SH\perp\left(ABCD\right)\right) \end{cases} \Rightarrow CD\perp\left(SHI\right)\Rightarrow CD\perp HK$.

Ta có $\begin{cases} HK\perp CD \\ HK\perp SI \end{cases} \Rightarrow HK\perp\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(H;\left(SCD\right)\right)=HK$.

Ta có $HI=\dfrac{3}{4}AD=3a;\ AC=4\sqrt{2}a\Rightarrow AH=\sqrt{2}a$.

Xét ΔSHA có $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=a\sqrt{3}$.

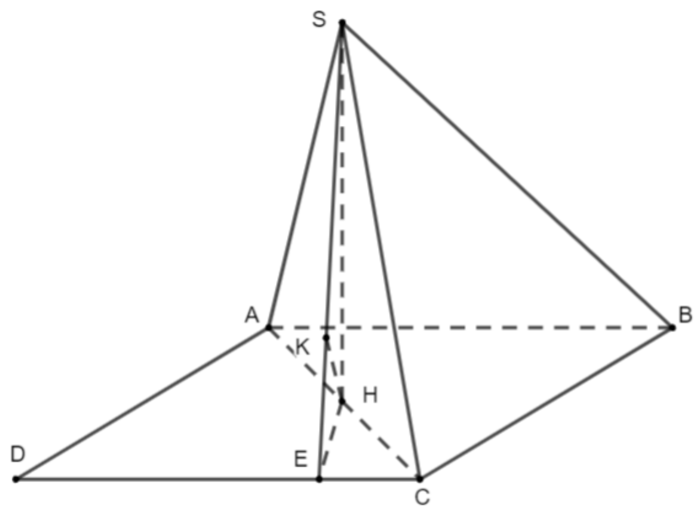
Xét ΔSHI có $HK=\dfrac{HI.SH}{\sqrt{SH^2+HI^2}}=\dfrac{3}{2}a$.

Ta có $AB//(SCD) \Rightarrow d\left(AB;(SCD)\right) = d\left(A;(SCD)\right) = \frac{4}{3}d\left(H;(SCD)\right) = \frac{4}{3}HK = 2a$.

Câu 98: Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAC vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa SC và AB.

A. $d = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. **B.** $d = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $d = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$. **D.** $d = \frac{2a\sqrt{30}}{5}$.

Lời giải



Do $(SAC) \perp (ABCD), SH \perp AC$ thì $SH \perp (ABCD)$.

Kẻ $CD // AB, (CD = AB)$, ta có $d(SC, AB) = d\left(AB,(SCD)\right) = d\left(A,(SCD)\right) = 2d\left(H,(SCD)\right)$.

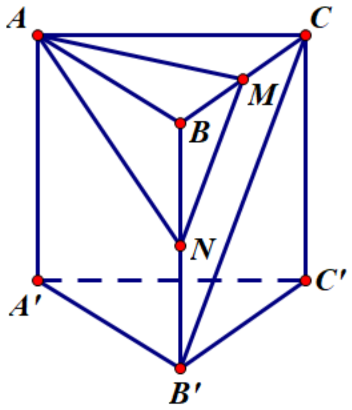
Kẻ $HE \perp DC$, mà $SH \perp DC \Rightarrow DC \perp (SHE)$, kẻ $HK \perp SE, HK \perp DC\left(DC \perp (SHE)\right)$ suy ra $HK \perp (SCD)$ hay $d\left(H,(SCD)\right) = HK$.

Ta có tam giác SAC vuông cân tại S nên $SH = \frac{1}{2}AC = a$, $HE = HC.\sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $HK = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$ suy ra $d(SC, AB) = \frac{2\sqrt{21}}{7}a$.

Câu 99: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = a, AA' = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$.

A. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm BB'.

Ta có $MN // B'C$.

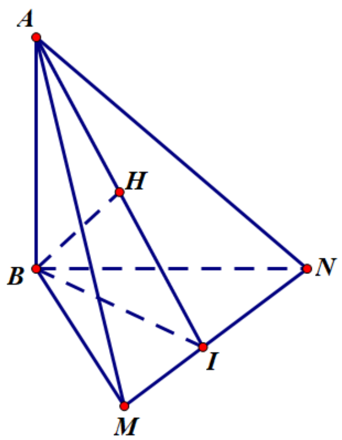
Mà $MN \subset (AMN) \Rightarrow B'C // (AMN)$.

$\Rightarrow d(B'C, AM) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Lại do M là trung điểm của BC nên $d(C, (AMN)) = d(B, (AMN))$.

Trong mặt phẳng (BMN), dựng $BI \perp MN, I \in MN$.

Trong mặt phẳng (ABI), dựng $BH \perp AI, H \in AI$.



Ta có $AB \perp BM$, $AB \perp BN$

$\Rightarrow AB \perp (BMN)$.

$\Rightarrow AB \perp MN$, mà $MN \perp BI \Rightarrow MN \perp (ABI)$.

$\Rightarrow MN \perp BH$, mà $BH \perp AI \Rightarrow BH \perp (AMN)$.

$\Rightarrow d(B, (AMN)) = BH$.

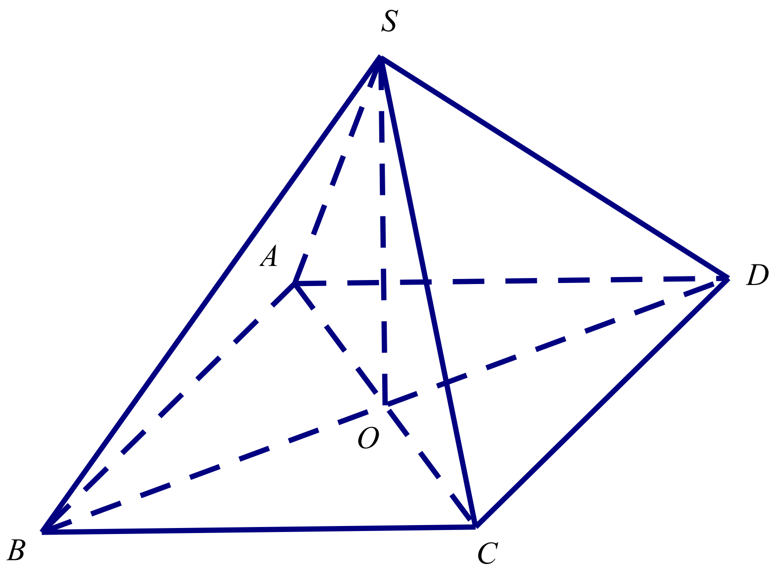
Ta có $AB = a, BM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}, BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác BMN vuông tại B, đường cao BI nên $BI=\sqrt{\dfrac{BM^2.BN^2}{BM^2+BN^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Tam giác ABI vuông tại B, đường cao BH nên $BH=\sqrt{\dfrac{AB^2.BI^2}{AB^2+BI^2}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

Vậy $d\left(AM,B'C\right)=d\left(B,\left(AMN\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{7}}{7}$.

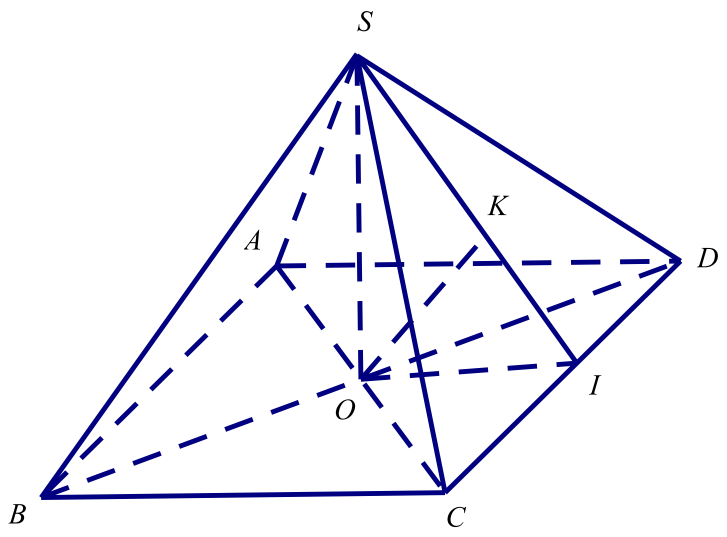
Câu 100: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ và $SO=a$.



Khoảng cách giữa SC và AB bằng

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

Lời giải



Ta có: $AB // CD$. Khi đó: $d\left(SC, AB\right) = d\left(AB, \left(SCD\right)\right) = d\left(A, \left(SCD\right)\right) = 2d\left(O, \left(SCD\right)\right)$.

Gọi I là trung điểm của CD. Ta có: $OI \perp CD$.

Theo bài ra, $SO \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SO \perp CD$.

Do đó, $CD \perp \left(SOI\right)$.

Trong tam giác SOI kẻ $OK \perp SI$ $\left(K \in SI\right)$. Khi đó: $OK \perp \left(SCD\right)$ $\Rightarrow OK = d\left(O, \left(SCD\right)\right)$.

Xét tam giác SOI vuông tại O có: $SO = a$; $OI = \dfrac{a}{2}$

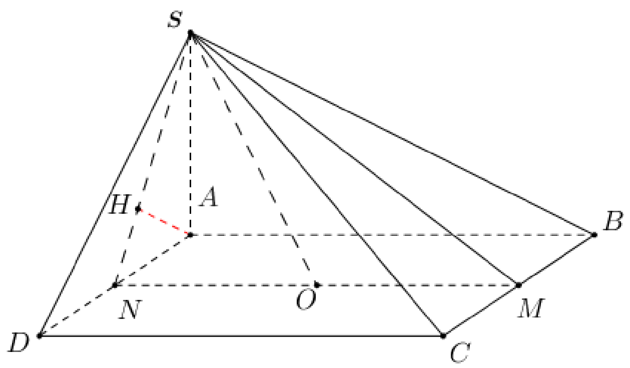
$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OK^2 = \frac{a^2}{5} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy: $d\left(SC, AB\right) = 2d\left(O, \left(SCD\right)\right) = 2OK = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Câu 101: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60°$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Dựng $AH \perp SN$

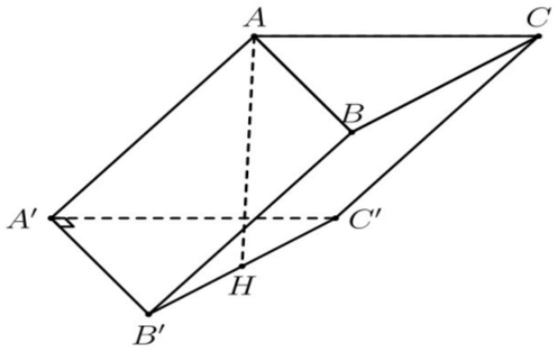
Khi đó $d\left(AB; SO\right) = d\left(AB, \left(SMN\right)\right) = d\left(A, \left(SMN\right)\right) = AH$

Do tam giác SBD có $\widehat{SBD} = 60°$ và $SB = SD$ nên SBD là tam giác đều

Suy ra $SD = BD = a\sqrt{2}$, do đó $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a$.

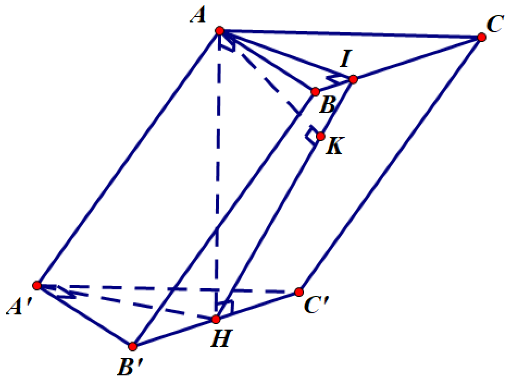
Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} = d\left(AB, SO\right)$.

Câu 102: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}, AA' = 2a$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ trùng với trung điểm H của đoạn $B'C'$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC' bằng



A. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{15}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải



Kẻ $AI \perp BC, AK \perp HI$.

Do $AH \perp (A'B'C') \Rightarrow AH \perp B'C' \Rightarrow AH \perp BC$ mà $AI \perp BC$ nên $BC \perp (AHI) \Rightarrow BC \perp AK$.

Vì $AK \perp BC, AK \perp HI \Rightarrow AK \perp (BB'C'C)$.

Vì $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C) \Rightarrow d(AA', BC') = d(AA', (BB'C'C)) = d(A, (BB'C'C)) = AK$.

Xét tam giác ABC có đường cao AI nên

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3}a}{2};\ BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a.$$

Xét tam giác $A'B'C'$ có đường trung tuyến AH nên $A'H = \frac{1}{2}B'C' = \frac{1}{2}BC = a$.

Xét tam giác $AA'H$ vuông tại H nên

$$AH = \sqrt{AA'^2 - A'H^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$

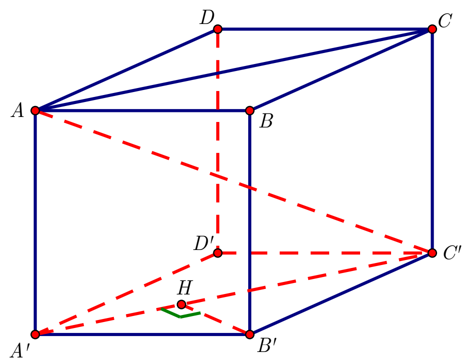
Xét tam giác AHI vuông tại A có đường cao AK

nên $\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{AI^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow AK=\frac{\sqrt{15}a}{5}\Rightarrow d\left(AA',BC'\right)=\frac{\sqrt{15}a}{5}$.

Câu 103: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Ta có: $A'C'=\sqrt{\left(A'B'\right)^2+\left(B'C'\right)^2}=2a.$

Kẻ $B'H\perp A'C'$.

Ta có : $\begin{cases}B'H\perp A'C'\\ B'H\perp AA'\end{cases}\Rightarrow B'H\perp(ACC'A')$.

Vì $BB'//\left(ACC'A'\right)$ nên $d\left(BB',AC'\right)=d\left(BB',\left(ACC'A'\right)\right)=d\left(B',\left(ACC'A'\right)\right)=B'H$.

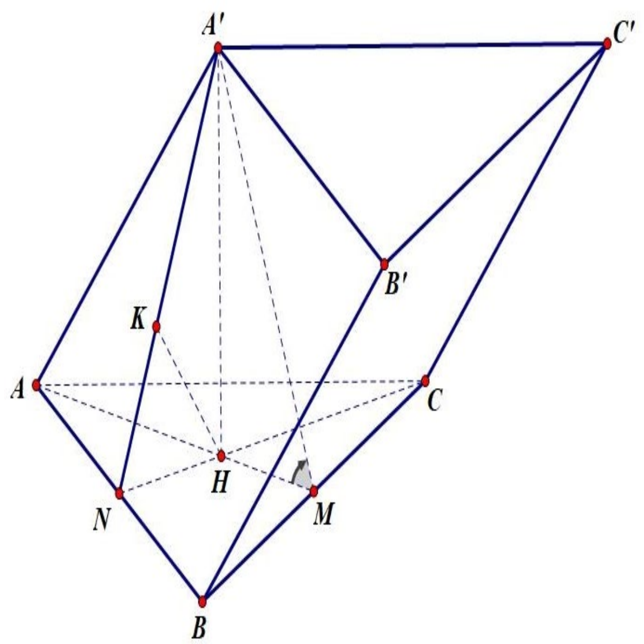
Xét tam giác $A'B'C'$. Ta được: $B'H=\frac{A'B'.B'C'}{B'C'}=\frac{a.a\sqrt{3}}{2a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(BB',AC'\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 104: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 60^o. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $\frac{a}{16}$. **D.** $\frac{a}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC). Vì ΔABC đều nên H là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và AC.

Do $A'A//B'B \Rightarrow BB'//(A'AC)$

$\Rightarrow d(A'C,B'B) = d(B'B,(A'AC)) = d(B,(A'AC)) = 3d(H,(A'AC))$

Gọi K là hình chiếu của H trên $A'N$.

Ta có $\begin{cases} HK \perp A'N \\ HK \perp AC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (A'AC)$

$\Rightarrow d(H,(A'AC)) = HK$

Ta có:

$((A'BC);(ABC)) = \widehat{A'MH} = 60^0$,

$NH = HM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow A'H = HM.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3} = \dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HN^2} + \dfrac{1}{A'H^2} \Leftrightarrow HK^2 = \dfrac{HN^2.A'H^2}{HN^2 + A'H^2} = \dfrac{a^2}{16}$.

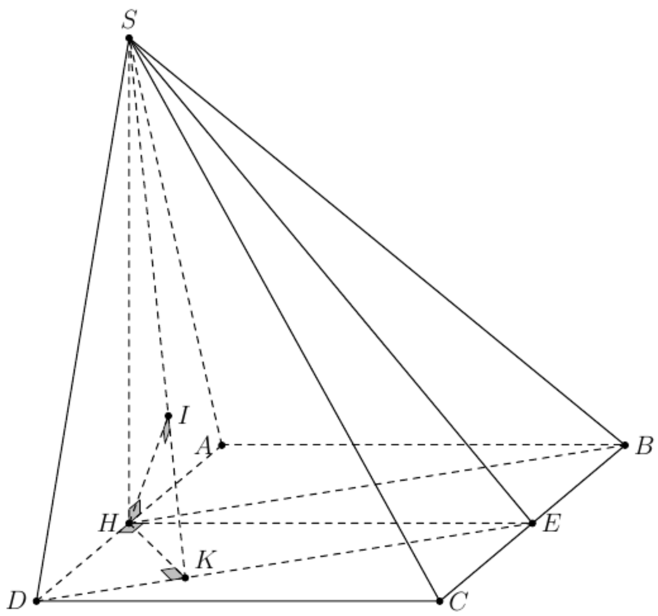
$\Rightarrow HK = \dfrac{a}{4}$.

$\Rightarrow d(A'C,B'B) = 3d(H,(A'AC)) = 3HK = \dfrac{3a}{4}$.

Câu 105: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a,\ AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD, góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $45°$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a.

A. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$. **B.** $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Lời giải



Ta có $SH \perp (ABCD) \Rightarrow$ góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SBH} = 45°$.

Suy ra ΔSBH vuông cân tại $H \Rightarrow SH = BH = \sqrt{HA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$.

Gọi E là trung điểm CB. Ta có $BH // DE \Rightarrow \mathrm{d}(BH, SD) = \mathrm{d}(BH, (SDE)) = \mathrm{d}(H, (SDE))$.

Kẻ $HK \perp DE$, $HI \perp SK$.

Ta có $DE \perp (SHK) \Rightarrow DE \perp HI$. Suy ra $HI \perp (SDE)$.

Vậy $\mathrm{d}(BH, SD) = \mathrm{d}(H, (SDE)) = HI$.

Trong ΔDHE vuông tại H ta có $HK.DE = DH.HE \Leftrightarrow HK = \frac{DH.HE}{DE} = \frac{a.a}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔSHK vuông tại H ta có

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Leftrightarrow HI = \frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Vậy $\mathrm{d}(SD, BH) = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. a^3. **B.** $6a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** $2a^3$.

Câu 2: **(MĐ 101-2022)** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

Câu 3: **(MĐ 102-2022)** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 15. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 30.

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 5: **(MĐ 103-2022)** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 11. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 30.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 30. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 11.

Câu 7: **(MĐ 103-2022)** Cho khối chóp và khối lăng trụ có diện tích đáy, chiều cao tương ứng bằng nhau và có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 8: **(MĐ 104-2022)** Cho khối chóp và khối lăng trụ có diện tích đáy, chiều cao tương ứng bằng nhau và có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 9: **(MĐ 101-2022)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $12\sqrt{2}a^3$. **D.** $4\sqrt{2}a^3$.

Câu 10: **(MĐ 102-2022)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{1}{8}a^3$. **B.** $\frac{3}{8}a^3$. **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 11: **(MĐ 103-2022)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^0. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $24a^3$. **B.** $\frac{8}{3}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\frac{8}{9}a^3$.

Câu 12: **(MĐ 104-2022)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{8}{9}a^3$. **B.** $8a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $24a^3$.

Câu 13: **(TK 2020-2021)** Một khối chóp có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 5. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. 10. **B.** 30. **C.** 90. **D.** 15.

Câu 14: **(TK 2020-2021)** Thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước $2;3;7$ bằng

A. 14. **B.** 42. **C.** 126. **D.** 12.

Câu 15: **(TK 2020-2021)** Công thức tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h là:

A. $V = \pi rh.$ **B.** $V = \pi r^2 h.$ **C.** $V = \frac{1}{3}\pi rh.$ **D.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

Câu 16: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 5a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{5}{6}a^3$. **B.** $\frac{5}{2}a^3$. **C.** $5a^3$. **D.** $\frac{5}{3}a^3$.

Câu 17: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{3}{2}a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{1}{3}a^3$. **D.** a^3.

Câu 18: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Thể tích khối lập phương cạnh $4a$ bằng

A. $64a^3$. **B.** $32a^3$. **C.** $16a^3$. **D.** $8a^3$.

Câu 19: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=7a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{7}{6}a^3$. **B.** $\frac{7}{2}a^3$. **C.** $\frac{7}{3}a^3$ **D.** $7a^3$.

Câu 20: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Thể tích khối lập phương cạnh $3a$ bằng

A. $27a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** a^3.

Câu 21: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $4a^3$.

Câu 22: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=8a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $8a^3$. **B.** $\frac{4}{3}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{8}{3}a^3$.

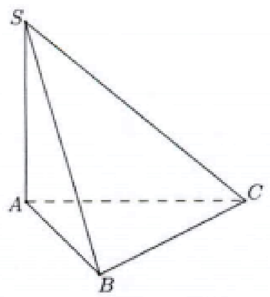
Câu 23: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối trụ có diện tích đáy $B=2a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $\frac{2}{3}a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{1}{3}a^3$. **D.** $2a^3$.

Câu 24: **(MĐ 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=4a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2}{3}a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** $2a^3$.

Câu 25: **(TK 2020-2021)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° (tham khảo hình bên). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 26: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng 30°. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 27: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa 2 mặt phẳng $(A'BD),(ABCD)$ bằng $30°$. Thể tích của khối hộpchữ nhật đã cho bằng:

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $48\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Câu 28: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $6\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 29: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Câu 30: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^0. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $64\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $\frac{64\sqrt{3}}{27}a^3$. **D.** $\frac{64\sqrt{3}}{9}a^3$.

Câu 31: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3$. **D.** $8\sqrt{3}a^3$.

Câu 32: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{64\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $\frac{64\sqrt{3}}{27}a^3$. **C.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $64\sqrt{3}a^3$.

Câu 33: **(TK 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Câu 34: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 12.

Câu 35: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=2$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 36: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=6a^2$ và chiều cao $h=2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $12a^3$.

Câu 37: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $V=\sqrt{2}a^3$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 38: **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=4$, $AB=6$, $BC=10$ và $CA=8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=32$ **B.** $V=192$ **C.** $V=40$ **D.** $V=24$

Câu 39: **(Mã 104 2017)** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$

Câu 40: **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{8\sqrt{2}a^3}{3}$ **D.** $\dfrac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 41: **(Mã 123 2017)** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Câu 42: **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

Câu 43: **(Mã 110 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=3a^3$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V=a^3$ **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$

Câu 44: **(Mã 123 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{2a^3}{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Câu 45: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h=\frac{3}{4}a$ **B.** $h=\frac{2}{3}a$ **C.** $h=\frac{4}{3}a$ **D.** $h=\frac{8}{3}a$

Câu 46: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=7a^3$ **B.** $V=14a^3$ **C.** $V=\frac{28}{3}a^3$ **D.** $V=\frac{7}{2}a^3$

Câu 47: **(Mã 101 - 2019)** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

A. Bh. **B.** $\frac{4}{3}Bh$. **C.** $\frac{1}{3}Bh$. **D.** $3Bh$.

Câu 48: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 216. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 72.

Câu 49: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Thể tích khối lập phương cạnh 2 bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 50: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3;4;5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

A. 10. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 60.

Câu 51: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp hình chữ nhật có ba kích thước $2;\ 4;\ 6$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 48. **D.** 8.

Câu 52: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=3$ và chiều cao $h=2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

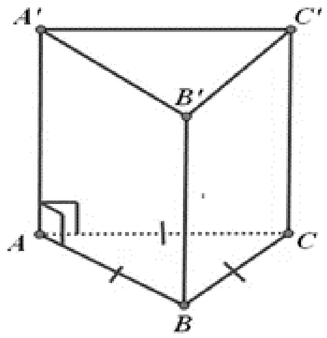
Câu 53: **(Mã 103 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $16a^3$ **B.** $4a^3$ **C.** $\frac{16}{3}a^3$ **D.** $\frac{4}{3}a^3$

Câu 54: **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2}{3}a^3$ **B.** $\frac{4}{3}a^3$ **C.** $2a^3$ **D.** $4a^3$

Câu 55: **(Mã 102 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

C. $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

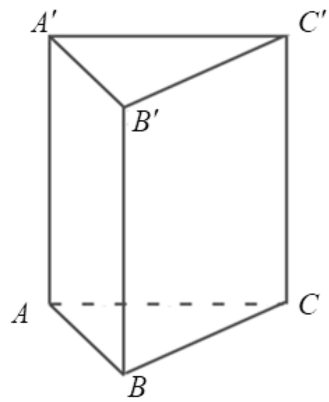
Câu 56: **(Đề Minh Họa 2017)** Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $V = a^3$ **B.** $V = \dfrac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V = \dfrac{1}{3}a^3$

Câu 57: **(Đề Tham Khảo 2019)** Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. $8a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** a^3 **D.** $6a^3$

Câu 58: **(Mã 104 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$.

C. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

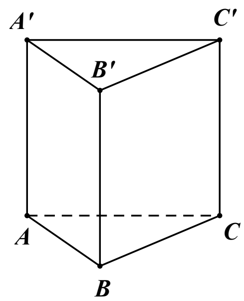
Câu 59: **(Đề Tham Khảo 2017)** Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 60: **(Mã 110 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$ **B.** $V = \dfrac{a^3}{2}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$

Câu 61: **(Mã 103 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA' = 3a$ (minh họa như hình vẽ bên).

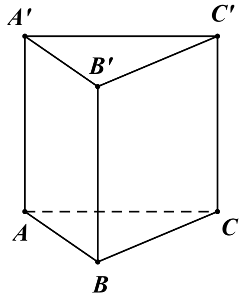


Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$.

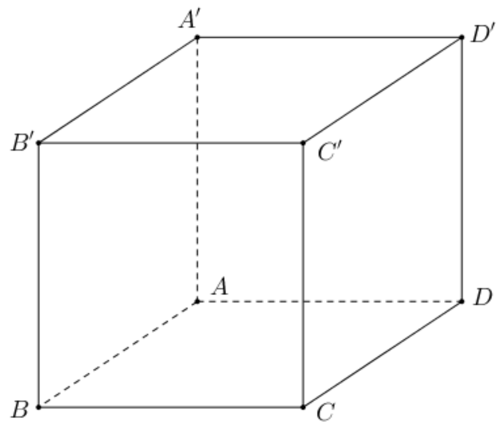
C. $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 62: **(Mã 101 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=\sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng.



A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

Câu 63: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD=a\sqrt{3}$ và $AA'=4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$.

C. $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 64: **(Mã 104 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $V=\dfrac{9a^3}{8}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{8}$ **D.** $V=\dfrac{3a^3}{4}$

Câu 65: **(Mã 101 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Câu 66: **(Mã 103 -2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 2

Câu 67: **(Mã 102 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Câu 68: **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$

Câu 69: **(Đề tham khảo 2017)** Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\dfrac{V'}{V}$.

A. $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{5}{8}$.

Câu 70: **(Đề minh họa lần 1 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB = 6a$, $AC = 7a$ và $AD = 4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V = \dfrac{7}{2}a^3$ **B.** $V = 14a^3$ **C.** $V = \dfrac{28}{3}a^3$ **D.** $V = 7a^3$

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **(MĐ 101-2022)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. a^3. **B.** $6a^3$. **C.** $3a^3$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = B.h = 3a^2.2a = 6a^3$.

Câu 2: **(MĐ 101-2022)** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 2. **B.** 15. **C.** 10. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 3 = 10$.

Câu 3: **(MĐ 102-2022)** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 3, đáy ABC có diện tích bằng 10. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 15. **B.** 10. **C.** 2. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC}.h = \frac{1}{3}.10.3 = 10$.

Câu 4: **(MĐ 102-2022)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $3a^2$ và chiều cao $2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $3a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Chọn B

$V_{KLT} = B.h = 3a^2.2a = 6a^3$.

Câu 5: **(MĐ 103-2022)** Cho khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 11. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Ta có thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V=\frac{1}{3}.5.6=10$.

Câu 6: **(MĐ 104-2022)** Khối chóp $S.ABC$ có chiều cao bằng 5, đáy ABC có diện tích bằng 6. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. 30. **B.** 10. **C.** 15. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối chóp $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.h=\frac{1}{3}.6.5=10$.

Tam giác $B'BC$ vuông cân tại B' nên $\widehat{B'BC}=45^\circ$.

Câu 7: **(MĐ 103-2022)** Cho khối chóp và khối lăng trụ có diện tích đáy, chiều cao tương ứng bằng nhau và có thể tích lần lượt là V_1, V_2. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 3. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}B.h}{B.h}=\frac{1}{3}$.

Câu 8: **(MĐ 104-2022)** Cho khối chóp và khối lăng trụ có diện tích đáy, chiều cao tương ứng bằng nhau và có thể tích lần lượt là V_1, V_2.Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

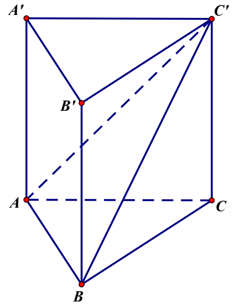
Ta có: $V_1=\frac{1}{3}Bh$ và $V_2=Bh$. Suy ra $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$.

Câu 9: **(MĐ 101-2022)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=2a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30°. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $12\sqrt{2}a^3$. **D.** $4\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\left.\begin{matrix} AB \perp AC \\ AB \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \perp (ACC'A')$

Suy ra góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng góc giữa đường thẳng BC' và đường thẳng $AC' \Rightarrow \widehat{AC'B} = 30°$.

Ta có $AC' = \dfrac{AB}{\tan 30°} = 2\sqrt{3}a \Rightarrow AA' = \sqrt{12a^2 - 4a^2} = 2\sqrt{2}a$

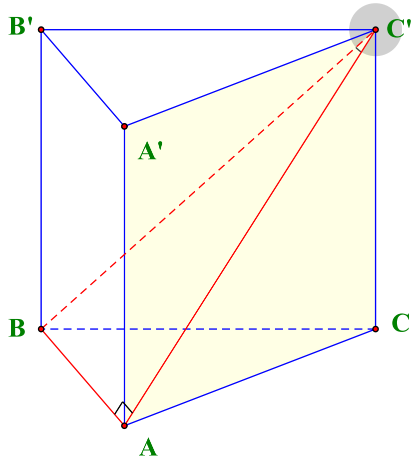
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \dfrac{1}{2}.2a.2a.2\sqrt{2}a = 4\sqrt{2}a^3$

Câu 10: **(MĐ 102-2022)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$. Góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng $30°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{8}a^3$. **B.** $\dfrac{3}{8}a^3$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a^3$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AA' \end{cases}$ nên $BA \perp (ACC'A')$ suy ra $(BC',(ACC'A')) = \widehat{BC'A} = 30°$.

Khi đó $AC' = \dfrac{BA}{\tan \widehat{BC'A}} = \dfrac{a}{\tan 30°} = a\sqrt{3}$ suy ra $AA' = \sqrt{AC'^2 - A'C'^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

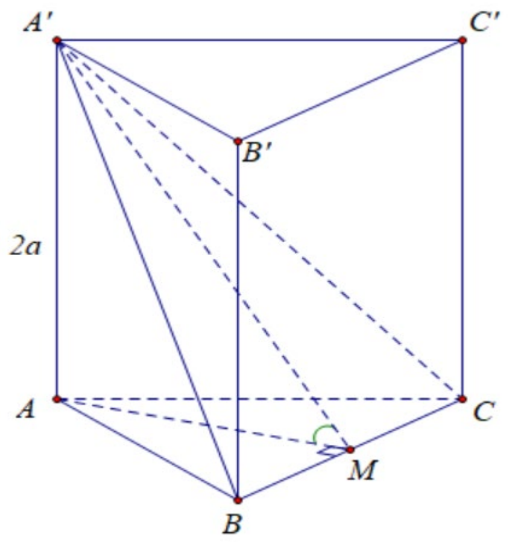
Thể tích khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2}.\dfrac{1}{2}a^2 = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^3}$.

Câu 11: **(MĐ 103-2022)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh bên $AA'=2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 30^0. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $24a^3$. **B.** $\frac{8}{3}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\frac{8}{9}a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó, $AM \perp BC$ mà $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (A'AM)$.

Do đó, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{A'MA}$ nên $\widehat{A'MA}=30^0$.

Ta có: $AM = \frac{A'A}{\tan 30^0} = 2a\sqrt{3}$; $BC = 2AM = 4a\sqrt{3}$ suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = 12a^2$.

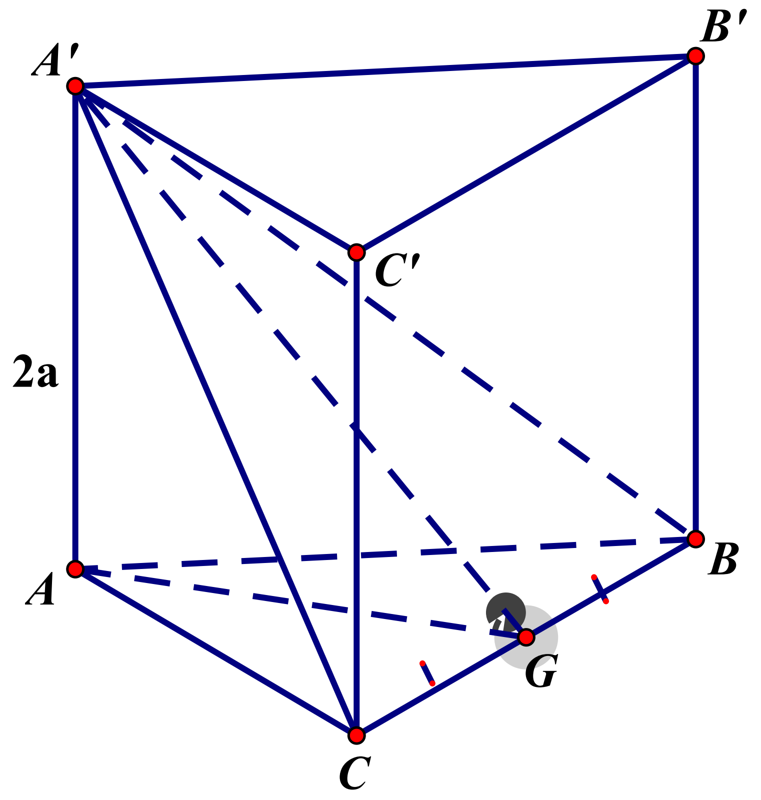
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 24a^3$.

Câu 12: **(MĐ 104-2022)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A, cạnh bên $AA' = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{8}{9}a^3$. **B.** $8a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $24a^3$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $AB = AC = 2x, x > 0$. Gọi G là trung điểm cạnh BC

Ta có ΔABC vuông cân tại A nên $BC = 2x\sqrt{2}$ và $AG = x\sqrt{2}$ và $AG \perp BC$

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC)$

Suy ra AG là hình chiếu của $A'G$ lên mặt phẳng (ABC)

Suy ra $A'G \perp BC$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $(AG, A'G) = \angle A'GA = 60^0$

Xét ΔABC vuông tại A ta có: $AG = A'A.\cot 60^0 \Leftrightarrow x\sqrt{2} = 2a\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V = \dfrac{1}{2}AB.AC.AA' = \dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}\right)^2.2a = \dfrac{8a^3}{3}$.

Câu 13: **(TK 2020-2021)** Một khối chóp có diện tích đáy bằng 6 và chiều cao bằng 5. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. 10. **B.** 30. **C.** 90. **D.** 15.

Lời giải

Thể tích khối chóp là: $\dfrac{1}{3}S \times h$ với $S =$ diện tích đáy, $h =$ chiều cao nên $V = \dfrac{6 \times 5}{3} = 10$.

Câu 14: **(TK 2020-2021)** Thể tích của khối hộp chữ nhật có ba kích thước $2; 3; 7$ bằng

A. 14. **B.** 42. **C.** 126. **D.** 12.

Lời giải

Thể tích cần tìm là $V = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Câu 15: **(TK 2020-2021)** Công thức tính thể tích V của khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h là:

A. $V = \pi rh.$ **B.** $V = \pi r^2 h.$ **C.** $V = \frac{1}{3}\pi rh.$ **D.** $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

Lời giải

Ta có: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$

Câu 16: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 5a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{5}{6}a^3$. **B.** $\frac{5}{2}a^3$. **C.** $5a^3$. **D.** $\frac{5}{3}a^3$.

Lời giải

Ta có thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{5}{3}a^3$.

Câu 17: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{3}{2}a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{1}{3}a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

$V = \frac{1}{3}B.h = a^3$.

Câu 18: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Thể tích khối lập phương cạnh $4a$ bằng

A. $64a^3$. **B.** $32a^3$. **C.** $16a^3$. **D.** $8a^3$.

Lời giải

Ta có: $V = (4a)^3 = 64a^3$.

Câu 19: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 7a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{7}{6}a^3$. **B.** $\frac{7}{2}a^3$. **C.** $\frac{7}{3}a^3$ **D.** $7a^3$.

Lời giải

Ta có thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.7a^2.a = \frac{7}{3}a^3$.

Câu 20: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Thể tích khối lập phương cạnh $3a$ bằng

A. $27a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $9a^3$. **D.** a^3.

Lời giải

Thể tích khối lập phương cạnh $3a$ là: $V = (3a)^3 = 27a^3$

Câu 21: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

A. a^3. **B.** $2a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải

Ta có $V=(2a)^3=8a^3$.

Câu 22: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B=8a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $8a^3$. **B.** $\frac{4}{3}a^3$. **C.** $4a^3$. **D.** $\frac{8}{3}a^3$.

Lời giải

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy $B=8a^2$ và chiều cao $h=a$ là:

$V=\frac{1}{3}B.h=\frac{1}{3}.8a^2.a=\frac{8}{3}a^3$

Câu 23: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối trụ có diện tích đáy $B=2a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối trụ đã cho bằng

A. $\frac{2}{3}a^3$. **B.** a^3. **C.** $\frac{1}{3}a^3$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Thể tích khối trụ là $V=B.h=2a^2.a=2a^3$.

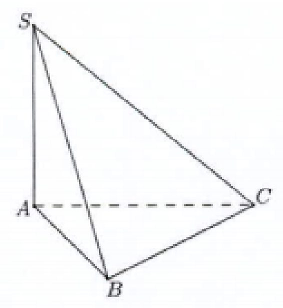
Câu 24: **(MĐ 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B=4a^2$ và chiều cao $h=a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{2}{3}a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $\frac{4}{3}a^3$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $V=B.h=4a^2.a=4a^3$.

Câu 25: **(TK 2020-2021)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° (tham khảo hình bên). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng



A. $\frac{a^3}{8}$. **B.** $\frac{3a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

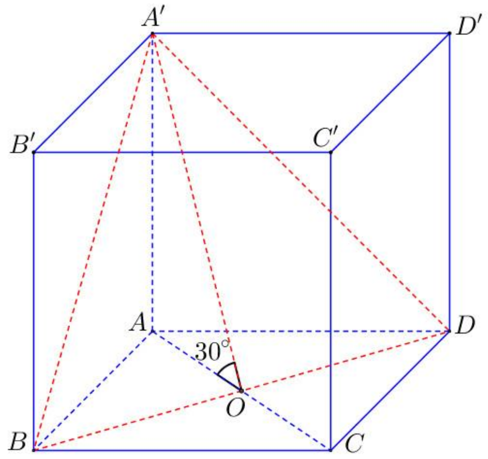
Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ và $SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$. Từ đây dễ thấy góc cần tìm là $\alpha = \widehat{ASM} = 45°$. Do đó, SAM vuông cân ở A và $SA = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{8}$.

Câu 26: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 30°. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải



Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BD\right)$ và $\left(ABCD\right)$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ AA' \perp BD \end{cases} \Rightarrow A'O \perp BD \Rightarrow \varphi = \left(AO; A'O\right) = \widehat{AOA'} = 30^\circ$.

Ta có đáy $ABCD$ là hình vuông có $BD = 2a \Rightarrow AB = AD = a\sqrt{2}$.

Ta có $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{1}{2}BD = a$.

Trong $\Delta AOA'$ có $AA' = AO.\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

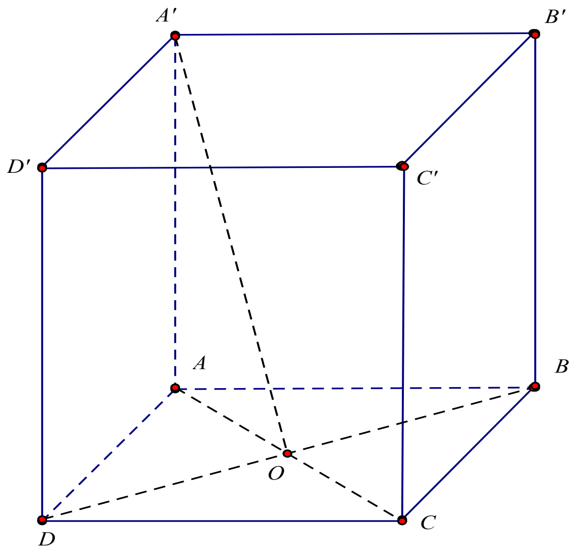
Vậy thể tích khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là:

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.2a^2 = \dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 27: **(MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa 2 mặt phẳng $(A'BD),(ABCD)$ bằng $30°$. Thể tích của khối hộpchữ nhật đã cho bằng:

A. $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $48\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, từ giả thiết ta có

$$AC = 4a, AB = \frac{4a}{\sqrt{2}} = 2a\sqrt{2} \Rightarrow AO = 2a, S_{ABCD} = \left(2a\sqrt{2}\right)^2 = 8a^2$$

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AO \perp BD$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AO \perp BD \\ AA' \perp BD(gt) \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (A'AO) \Rightarrow BD \perp A'O \Rightarrow ((A'BD),(ABCD)) = \widehat{A'OA}$$

(tam giác $A'OA$ vuông tại A)

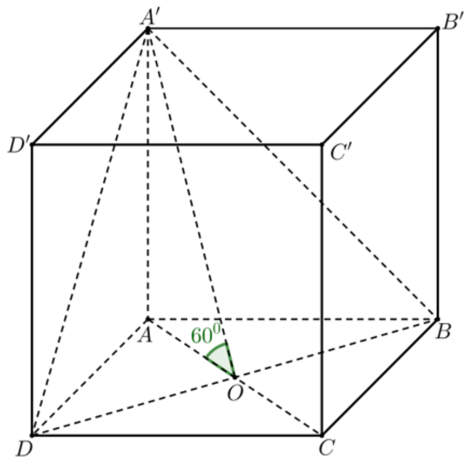
Từ giả thiết $\Rightarrow \widehat{A'OA} = 30° \Rightarrow \tan 30° = \frac{A'A}{AO} \Rightarrow A'A = \frac{\sqrt{3}}{3}.2a = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = A'A.S_{ABCD} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.8a^2 = \frac{16\sqrt{3}a^3}{3}.$$

Câu 28: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $6\sqrt{3}a^3$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Ta có $BD = \sqrt{2}AD \Rightarrow AD = \sqrt{2}a$, nên $S_{ABCD} = (\sqrt{2}a)^2 = 2a^2$ và $OA = \frac{1}{2}BD = a$.

Gọi O là trung điểm của DB

Khi đó, ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ A'O \perp BD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((A'BD);(ABCD))} = \widehat{(A'O;AO)} = \widehat{A'OA} \Rightarrow \widehat{A'OA} = 60^0$

(Vì tam giác $A'AO$ vuông tại A nên $\widehat{A'OA}$ là góc nhọn)

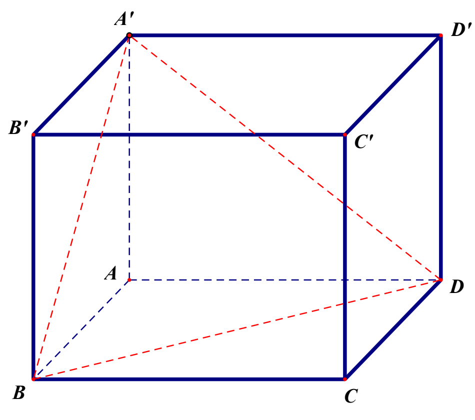
Xét tam giác $A'AO$ có $\tan\widehat{A'OA} = \frac{AA'}{AO} \Rightarrow AA' = AO.\tan\widehat{A'OA} = a.\tan 60^0 = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AA'.S_{ABCD} = a\sqrt{3}.2a^2 = 2\sqrt{3}a^3$.

Câu 29: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, $BD = 4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(ABCD)$ bằng $60°$. Thể tích của khối hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $48\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Đặt $x = AA', AB = AD = a\sqrt{8}$

Ta có: $\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(\left(A'BD\right),\left(ABD\right)\right)=\frac{d\left(A,\left(A'BD\right)\right)}{d\left(A,BD\right)}\Rightarrow d\left(A,\left(A'BD\right)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.2a=a\sqrt{3}$

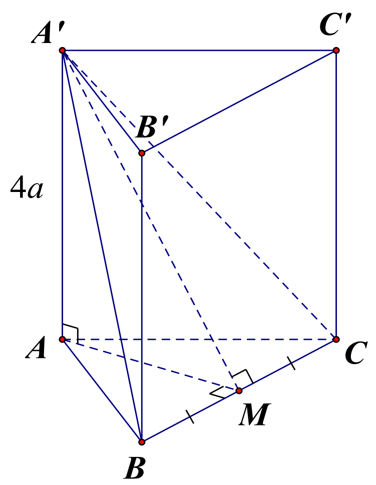
Vì $ABDA'$ là tam diện vuông tại A nên ta có: $\frac{1}{3a^2}=\frac{1}{8a^2}+\frac{1}{8a^2}+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x=a\sqrt{12}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=a\sqrt{12}.a\sqrt{8}.a\sqrt{8}=16\sqrt{3}a^3$

Câu 30: **(MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng 30^0. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $64\sqrt{3}a^3$. **B.** $\frac{64\sqrt{3}}{3}a^3$. **C.** $\frac{64\sqrt{3}}{27}a^3$. **D.** $\frac{64\sqrt{3}}{9}a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC. Khi đó $\left(\left(A'BC\right);\left(ABC\right)\right)=\widehat{A'MA}=30^0$.

Trong tam giác vuông $A'MA$ có:

$$\tan\widehat{A'MA}=\frac{A'A}{AM}\Leftrightarrow AM=\frac{4a}{\tan 30^0}\Leftrightarrow AM=4\sqrt{3}a$$

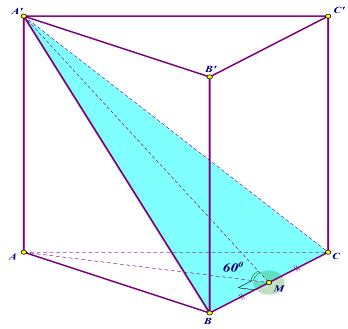
Tam giác ABC đều nên: $AM=\frac{AB\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow AB=8a$

Vậy thể tích khối lăng trụ: $V=S_{\Delta ABC}.A'A=\frac{\left(8a\right)^2\sqrt{3}}{4}.4a=64\sqrt{3}a^3$.

Câu 31: **(MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng $60°$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{8\sqrt{3}}{3}a^3$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}a^3$. **C.** $\frac{8\sqrt{3}}{27}a^3$. **D.** $8\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'M \\ (A'BC) \cap (ABC) = BC \end{cases} \Rightarrow ((A'BC),(ABC)) = \widehat{A'MA} = 60°$.

Đặt $AB = x\,(x > 0) \Rightarrow AM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác $A'AM$ vuông tại $A \Rightarrow \tan \widehat{A'MA} = \dfrac{A'A}{AM}$

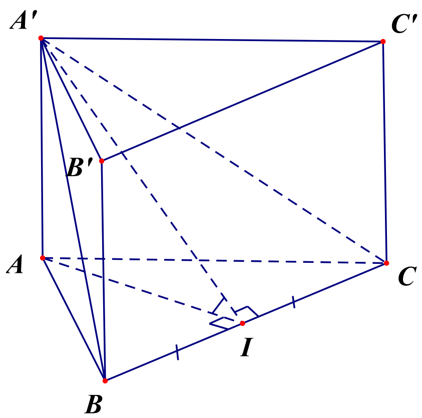
$\Leftrightarrow AM.\tan 60° = A'A \Leftrightarrow \dfrac{3x}{2} = 2a \Leftrightarrow x = \dfrac{4a}{3} \Rightarrow S_{ABC} = \left(\dfrac{4a}{3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là $V_{ABC.A'B'C} = AA'.S_{ABC} = 2a.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9} = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 32: **(MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2)** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng $4a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{64\sqrt{3}}{9}a^3$. **B.** $\dfrac{64\sqrt{3}}{27}a^3$. **C.** $\dfrac{64\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $64\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



+ Gọi $x\ (x > 0)$ là độ dài cạnh tam giác đều ABC và I là trung điểm của BC.

Suy ra: $BC \perp AI$ và $BC \perp A'I$.

$\Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là góc $\widehat{AIA'} = 60°$.

+ Xét $\Delta A'AI$ vuông tại A có: $AI = AA'.\cot 60° \Leftrightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} = 4a.\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8a}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \left(\frac{8a}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}.4a = \frac{64\sqrt{3}}{9}a^3$.

Câu 33: **(TK 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 4$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có công thức thể tích khối chóp $V = \frac{1}{3}.B.h = \frac{1}{3}.3.4 = 4$.

Câu 34: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 6$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng:

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối chóp $V = \frac{1}{3}Bh = 4$

Câu 35: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 6. **B.** 12. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Thể tích khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.3.2 = 2$.

Câu 36: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 6a^2$ và chiều cao $h = 2a$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

A. $2a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $6a^3$. **D.** $12a^3$.

Lời giải

Chọn B

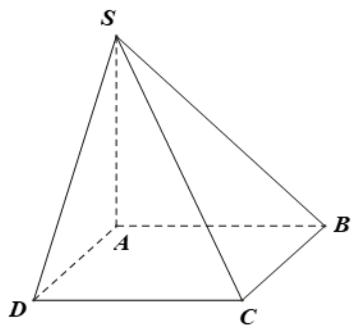
$$V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}6a^2.2a = 4a^3$$

Câu 37: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $V=\sqrt{2}a^3$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Ta có $SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA$ là đường cao của hình chóp

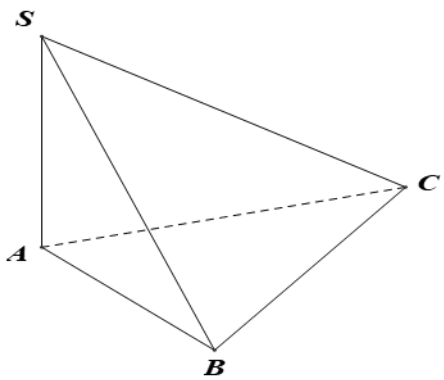
Thể tích khối chóp $S.ABCD$**:** $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 38: **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA=4$, $AB=6$, $BC=10$ và $CA=8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=32$ **B.** $V=192$ **C.** $V=40$ **D.** $V=24$

Lời giải

Chọn A



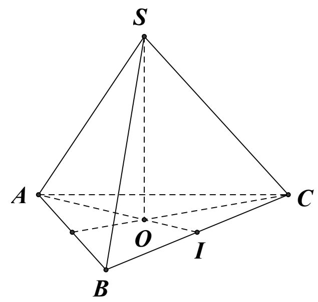
Ta có $BC^2=AB^2+AC^2$ suy ra ΔABC vuông tại A. $S_{ABC}=24$, $V=\dfrac{1}{3}S_{ABC}.SA=32$

Câu 39: **(Mã 104 2017)** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$

Lời giải

Chọn D



Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC, khi đó AI là đường cao của tam giác đáy. Theo định lý Pitago ta có $AI=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AO=\frac{2}{3}AI=\frac{2a\sqrt{3}}{3.2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $SO=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$.

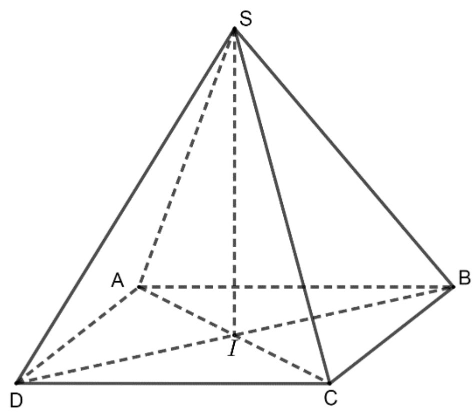
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$.

Câu 40: **(Dề Tham Khảo 2019)** Cho khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ **B.** $\frac{8a^3}{3}$ **C.** $\frac{8\sqrt{2}a^3}{3}$ **D.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng $2a$ là $S.ABCD$ và I tâm của đáy ta có:

$SA=SC=BA=BC=DA=DC\Rightarrow \Delta SAC=\Delta BAC=\Delta DBC \Rightarrow \Delta SAC;\Delta BAC;\Delta DAC$ lần lượt vuông tại S,B,D.

I là trung điểm của AC suy ra $SI=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}2a.\sqrt{2}=a\sqrt{2}$

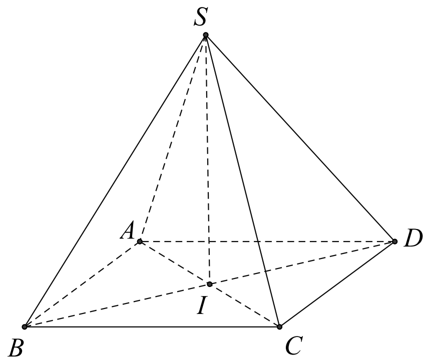
$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SI=\frac{1}{3}(2a)^2.a\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$$

Câu 41: **(Mã 123 2017)** Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Lời giải

Chọn D



Chiều cao của khối chóp: $SI=\sqrt{SA^2-AI^2}=\sqrt{4a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{2}$

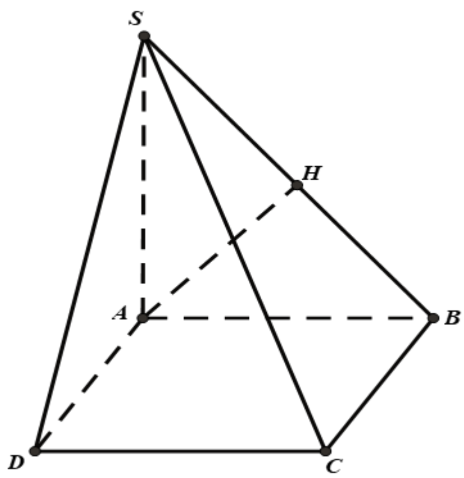
Thể tích khối chóp: $V=\dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{14}}{2}a^2=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$

Câu 42: **(Mã 105 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $\dfrac{a^3}{3}$ **B.** a^3 **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3}{2}$

Lời giải

Chọn A



Ta có $BC\perp AB, BC\perp SA\Rightarrow BC\perp AH$. Kẻ $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp(SBC)$.

Suy ra $d\left(A;\left(SBC\right)\right)=AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}\Rightarrow SA=a$.

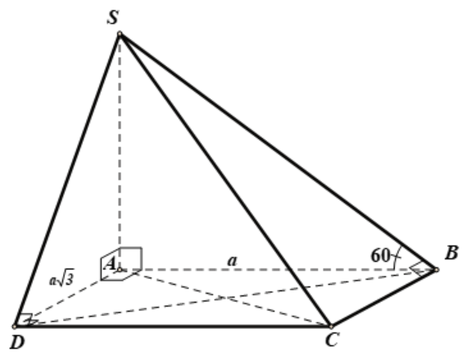
Vậy $V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 43: **(Mã 110 2017)** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ tạo với đáy một góc 60^o. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=3a^3$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$ **C.** $V=a^3$ **D.** $V=\dfrac{a^3}{3}$

Lời giải

Chọn.C



Ta có $S_{ABCD}=\sqrt{3}a^2$.

Vì $\begin{cases}\left(SBC\right)\cap\left(ABCD\right)=BC\\ BC\perp SB\subset\left(SBC\right)\\ BC\perp AB\subset\left(ABCD\right)\end{cases}\Rightarrow \widehat{\left(\left(SBC\right),\left(ABCD\right)\right)}=\widehat{\left(SB;AB\right)}=\widehat{SBA}$.

Vậy $\widehat{SBA}=60^o$

Xét tam giác vuông SAB có: $\tan 60^o=\dfrac{SA}{AB}\Rightarrow SA=AB.\tan 60^o=a\sqrt{3}$

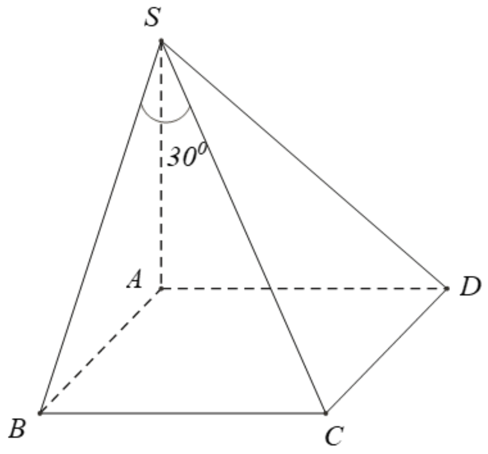
Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\dfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}.a\sqrt{3}=a^3$.

Câu 44: **(Mã 123 2017)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, SC tạo với mặt phẳng $\left(SAB\right)$ một góc 30^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{2a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$ **D.** $\sqrt{2}a^3$

Lời giải

Chọn B



+) Do ABCD là hình vuông cạnh a nên: $S_{ABCD}=a^2$

+) Chứng minh được $BC\perp(SAB)\Rightarrow$ góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB}=30^0$.

+) Đặt $SA=x\Rightarrow SB=\sqrt{x^2+a^2}$. Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan\widehat{CSA}=\tan 30^0=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{BC}{SB}$

Ta được: $SB=BC\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow x=a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{SABCD}=\frac{1}{3}.SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.a^2=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$ (Đvtt)

Câu 45: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD)

A. $h=\frac{3}{4}a$ **B.** $h=\frac{2}{3}a$ **C.** $h=\frac{4}{3}a$ **D.** $h=\frac{8}{3}a$

Lời giải

Chọn C

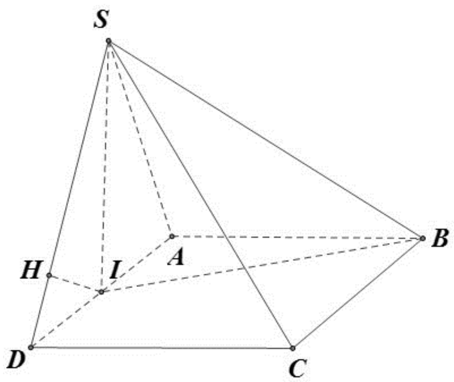
Gọi I là trung điểm của AD. Tam giác SAD cân tại S

$\Rightarrow SI\perp AD$

Ta có $\begin{cases}SI\perp AD\\(SAD)\perp(ABCD)\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SI$ là đường cao của hình chóp.

Theo giả thiết



$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SI.S_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{4}{3}a^3=\frac{1}{3}SI.2a^2\Leftrightarrow SI=2a$

Vì AB song song với (SCD)

$\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)=2d\left(I,(SCD)\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SD.

Mặt khác $\begin{cases}SI\perp DC\\ ID\perp DC\end{cases}\Rightarrow IH\perp DC$. Ta có $\begin{cases}IH\perp SD\\ IH\perp DC\end{cases}\Rightarrow IH\perp(SCD)\Rightarrow d\left(I,(SCD)\right)=IH$

Xét tam giác SID vuông tại I: $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{ID^2}=\frac{1}{4a^2}+\frac{4}{2a^2}\Rightarrow IH=\frac{2a}{3}$

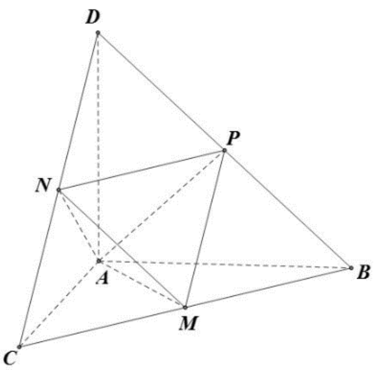
$\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)=2d\left(I,(SCD)\right)=\frac{4}{3}a$.

Câu 46: **(Đề Minh Họa 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=7a^3$ **B.** $V=14a^3$ **C.** $V=\frac{28}{3}a^3$ **D.** $V=\frac{7}{2}a^3$

Lời giải

Chọn A



Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}AD.AC=\frac{1}{6}6a.7a.4a=28a^3$

Ta nhận thấy $S_{MNP}=\frac{1}{2}S_{MNPD}=\frac{1}{4}S_{BCD}\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$.

Câu 47: **(Mã 101 - 2019)** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

A. Bh. **B.** $\frac{4}{3}Bh$. **C.** $\frac{1}{3}Bh$. **D.** $3Bh$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là: $V=B.h$.

Câu 48: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 216. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 72.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lập phương có cạnh bằng 6 là $V = 6^3 = 216$.

Câu 49: **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Thể tích khối lập phương cạnh 2 bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Thể tích khối lập phương cạnh a là $V = a^3$.

Vậy thể tích khối lập phương cạnh 2 là: $V = 2^3 = 8$.

Câu 50: **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3;4;5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

A. 10. **B.** 20. **C.** 12. **D.** 60.

Lời giải

Chọn D

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $V = 3.4.5 = 60$

Câu 51: **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho khối hộp hình chữ nhật có ba kích thước $2;\ 4;\ 6$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng

A. 16. **B.** 12. **C.** 48. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối hộp đã cho bằng $2.4.6 = 48$.

Câu 52: **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

◆ Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = 3.2 = 6$.

Câu 53: **(Mã 103 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $4a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $16a^3$ **B.** $4a^3$ **C.** $\frac{16}{3}a^3$ **D.** $\frac{4}{3}a^3$

Lời giải

Chọn B

$V = S_{day}.h = a^2.4a = 4a^3$.

Câu 54: **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

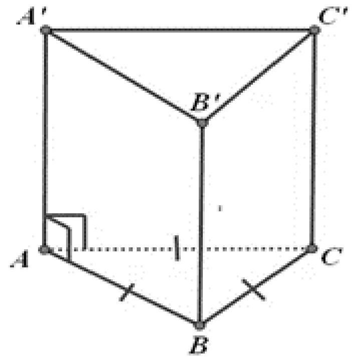
A. $\frac{2}{3}a^3$ **B.** $\frac{4}{3}a^3$ **C.** $2a^3$ **D.** $4a^3$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $V_{langtru} = S_{day}.h = a^2.2a = 2a^3$.

Câu 55: **(Mã 102 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = 2a$ (minh họa như hình vẽ bên).

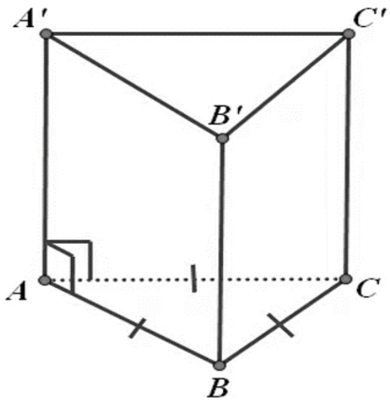


Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **C.** $\sqrt{3}a^3$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên đường cao của lăng trụ là $AA' = 2a$

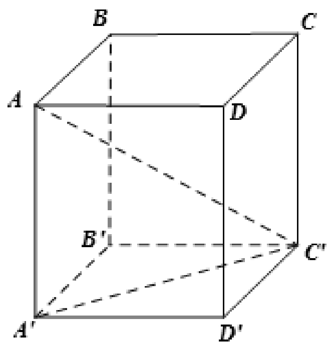
Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{\Delta ABC} = 2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 56: **(Đề Minh Họa 2017)** Tính thể tích V của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AC' = a\sqrt{3}$.

A. $V = a^3$ **B.** $V = \frac{3\sqrt{6}a^3}{4}$ **C.** $V = 3\sqrt{3}a^3$ **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$

Lời giải

Chọn A



Giả sử khối lập phương có cạnh bằng $x;(x>0)$

Xét tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' ta có:

$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow A'C' = x\sqrt{2}$

Xét tam giác $A'AC'$ vuông tại A' ta có

$AC'^2 = A'A^2 + A'C'^2 \Leftrightarrow 3a^2 = x^2 + 2x^2 \Leftrightarrow x = a$

Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = a^3$.

Câu 57: **(Đề Tham Khảo 2019)** Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng

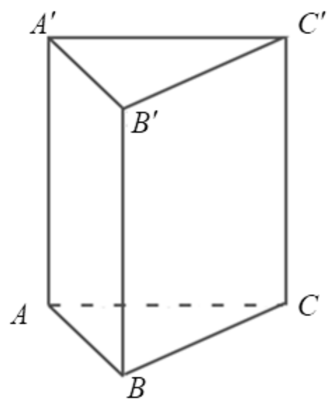
A. $8a^3$ **B.** $2a^3$ **C.** a^3 **D.** $6a^3$

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối lập phương cạnh $2a$ bằng: $V = (2a)^3 = 8a^3$

Câu 58: **(Mã 104 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \sqrt{2}a$ (minh họa như hình vẽ bên dưới).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{6}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đã cho là

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}.$$

Câu 59: **(Đề Tham Khảo 2017)** Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Lời giải

Chọn C

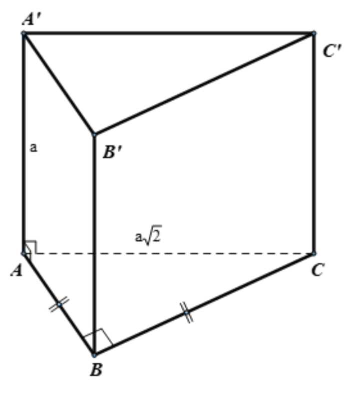
$$\begin{cases} h = a \\ S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow V = h.S = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 60: **(Mã 110 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$ **B.** $V = \dfrac{a^3}{2}$ **C.** $V = a^3$ **D.** $V = \dfrac{a^3}{6}$

Lời giải

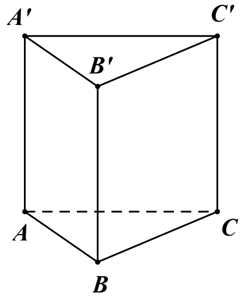
Chọn B



Tam giác ABC vuông cân tại B $\Rightarrow AB = BC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = a$. Suy ra: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a^2$.

Khi đó: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.BB' = \dfrac{1}{2}a^2.a = \dfrac{a^3}{2}$

Câu 61: **(Mã 103 2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$ và $AA'=3a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

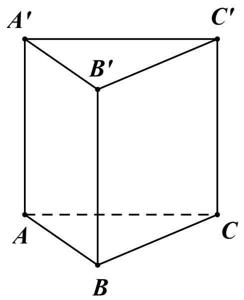
A. $6\sqrt{3}a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** $2\sqrt{3}a^3$. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

Chọn B

Khối lăng trụ đã cho có đáy là tam giác đều có diện tích là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $AA'=3a$ (do là lăng trụ đứng) nên có thể tích là $\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}.3a=3\sqrt{3}a^3$

Câu 62: **(Mã 101 -2019)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA'=\sqrt{3}a$ (minh họa hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng.



A. $\dfrac{a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

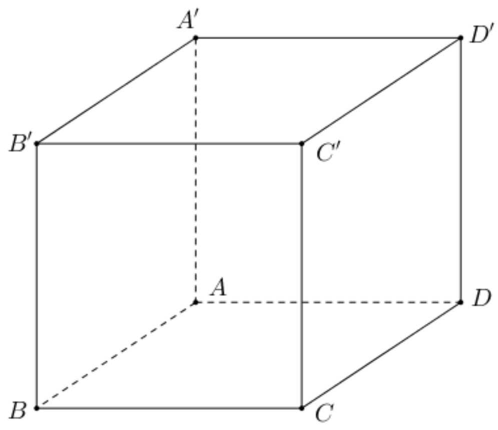
Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $AA'=a\sqrt{3}$.

Từ đó suy ra $V=a\sqrt{3}.a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3a^3}{4}$.

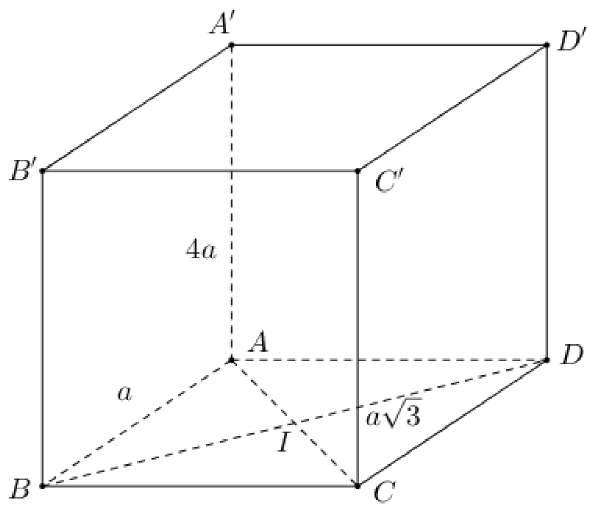
Câu 63: **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD=a\sqrt{3}$ và $AA'=4a$ (minh họa như hình bên). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $I = AC \cap BD$. Ta có: $AC \perp BD, BI = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác vuông BAI vuông tại I :

$$AI^2 = BA^2 - BI^2 = a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow AI = \dfrac{a}{2} \Rightarrow AC = a.$$

Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = 2.\dfrac{1}{2}BI.AC = 2.\dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

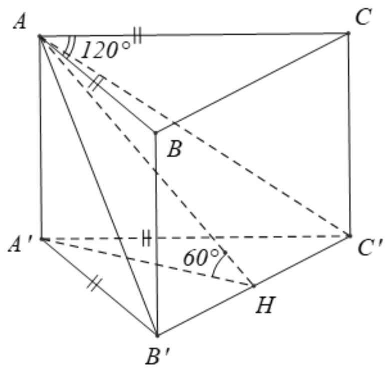
Vậy: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.4a = 2\sqrt{3}a^3$.

Câu 64: **(Mã 104 2017)** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Mặt phẳng $(AB'C')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{3a^3}{8}$ **B.** $V = \dfrac{9a^3}{8}$ **C.** $V = \dfrac{a^3}{8}$ **D.** $V = \dfrac{3a^3}{4}$

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của $B'C'$, khi đó góc giữa mp $\left(AB'C'\right)$ và đáy là góc $\widehat{AHA'} = 60°$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC.AB.\sin 120° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$B'C' = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120°} = \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\frac{-1}{2}} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A'H = \frac{2S_{\Delta ABC}}{B'C'} = \frac{a}{2} \Rightarrow AA' = A'H.\tan 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

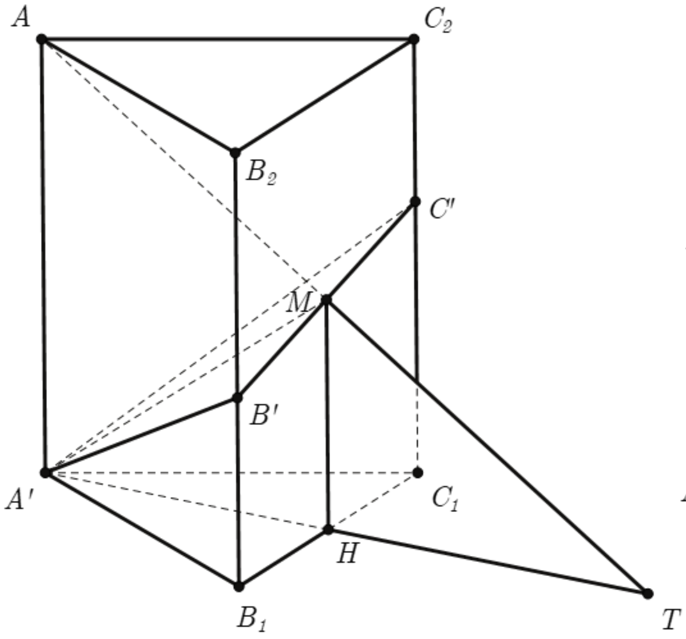
Vậy $V = S_{\Delta ACB}.AA' = \dfrac{3a^3}{8}$.

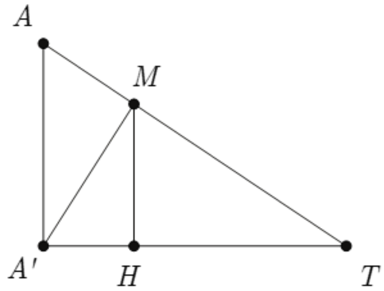
Câu 65: **(Mã 101 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn A





Cắt lăng trụ bởi một mặt phẳng qua A' và vuông góc với AA' ta được thiết diện là tam giác $A'B_1C_1$ có các cạnh $A'B_1 = 1$; $A'C_1 = \sqrt{3}$; $B_1C_1 = 2$.

Suy ra tam giác $A'B_1C_1$ vuông tại A' và trung tuyến $A'H$ của tam giác đó bằng 1.

Gọi giao điểm của AM và $A'H$ là T.

Ta có: $A'M = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $A'H = 1 \Rightarrow MH = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\widehat{MA'H} = 30°$.

Do đó $\widehat{MA'A} = 60° \Rightarrow AA' = \dfrac{A'M}{\cos\widehat{MA'A}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng thể tích khối lăng trụ $A'B_1C_1.AB_2C_2$ và bằng

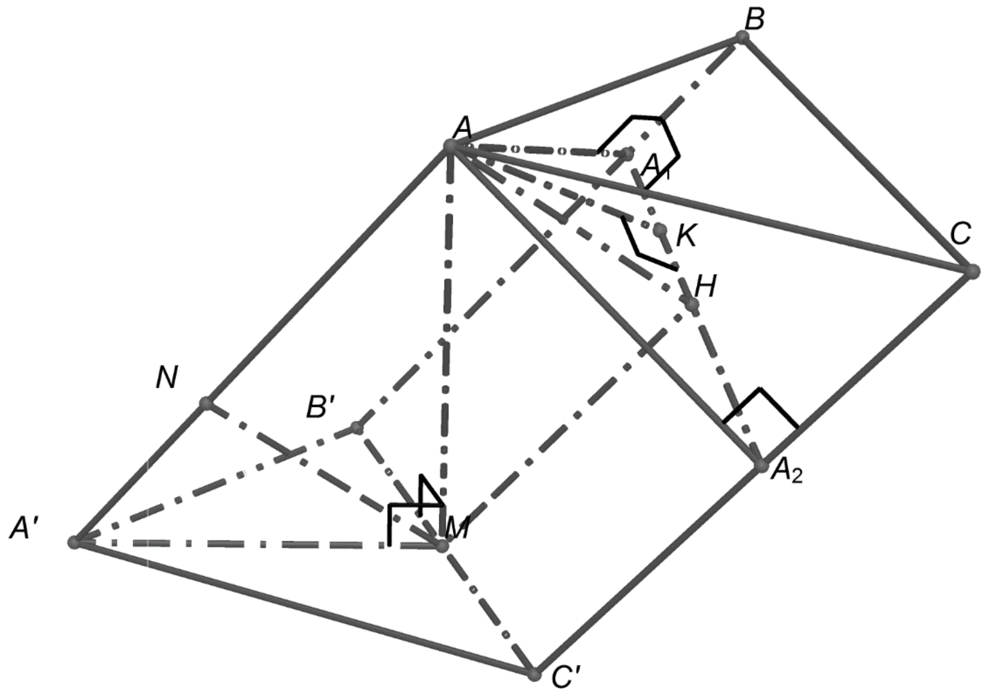
$V = AA'.S_{A'B_1C_1} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$.

Câu 66: **(Mã 103 -2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** 2

Lời giải

Chọn D



Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A trên BB', CC'. Theo đề ra $AA_1 = 1; AA_2 = \sqrt{3}; A_1A_2 = 2.$

Do $AA_1^{\,2} + AA_2^{\,2} = A_1A_2^{\,2}$ nên tam giác AA_1A_2 vuông tại A.

Gọi H là trung điểm A_1A_2 thì $AH = \dfrac{A_1A_2}{2} = 1$.

Lại có $MH \parallel BB' \Rightarrow MH \perp (AA_1A_2) \Rightarrow MH \perp AH$ suy ra $MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{3}$.

nên $\cos((ABC),(AA_1A_2)) = \cos(MH, AM) = \cos HMA = \dfrac{MH}{AM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $S_{ABC} = \dfrac{S_{AA_1A_2}}{\cos((ABC),(AA_1A_2))} = 1$. Thể tích lăng trụ là $V = AM \cdot S_{ABC} = 2$.

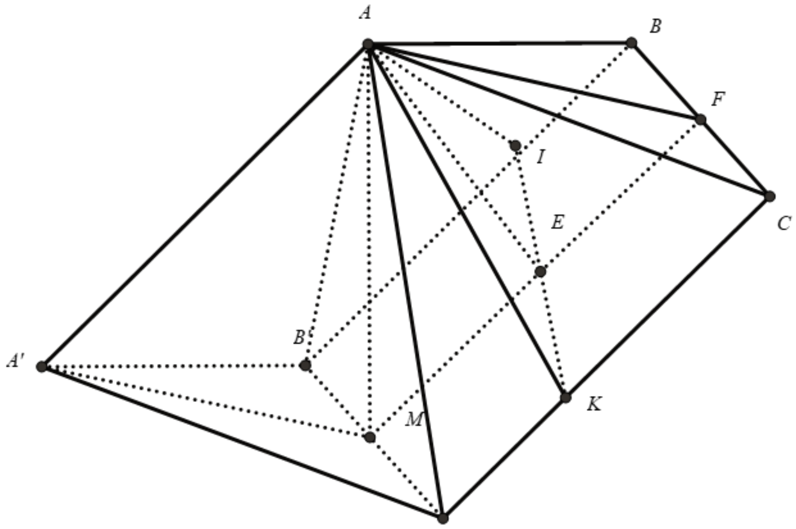
Nhận xét. Ý tưởng câu này là dùng diện tích hình chiếu $S' = S\cos\alpha$.

Câu 67: **(Mã 102 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến BB' là $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là $1; 2$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $A'B'C'$ là trung điểm M của $B'C'$, $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $AI \perp BB'$, $AK \perp CC'$ (hình vẽ).

Khoảng cách từ A đến BB' và CC' lần lượt là 1; 2 $\Rightarrow AI = 1$, $AK = 2$.

Gọi F là trung điểm của BC. $A'M = \dfrac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow AF = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

Ta có $\left.\begin{matrix} AI \perp BB' \\ BB' \perp AK \end{matrix}\right\} \Rightarrow BB' \perp (AIK) \Rightarrow BB' \perp IK$.

Vì $CC' \| BB' \Rightarrow d(C, BB') = d(K, BB') = IK = \sqrt{5} \Rightarrow \Delta AIK$ vuông tại A.

Gọi E là trung điểm của IK $\Rightarrow EF \| BB' \Rightarrow EF \perp (AIK) \Rightarrow EF \perp AE$.

Lại có $AM \perp (ABC)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AIK) là góc giữa EF và AM bằng góc $\widehat{AME} = \widehat{FAE}$. Ta có $\cos\widehat{FAE} = \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{FAE} = 30°$.

Hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (AIK) là ΔAIK nên ta có: $S_{AIK} = S_{ABC}\cos\widehat{EAF} \Rightarrow 1 = S_{ABC}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{2}{\sqrt{3}} = S_{ABC}$.

Xét ΔAMF vuông tại A: $\tan\widehat{AMF} = \dfrac{AF}{AM} \Rightarrow AM = \dfrac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow AM = \sqrt{5}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \sqrt{5}.\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

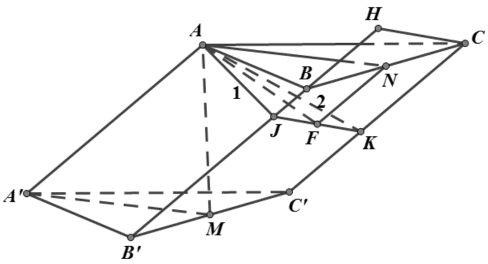
Câu 68: **(Mã 104 2018)** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Khoảng cách từ C đến đường thẳng BB'

bằng $\sqrt{5}$, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và 2, hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M=\sqrt{5}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\sqrt{5}$ **B.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$ **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ **D.** $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BB' và CC', H là hình chiếu vuông góc của C lên BB'

Ta có $AJ\perp BB'$ (1).

$AK\perp CC'\Rightarrow AK\perp BB'$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BB'\perp(AJK)\Rightarrow BB'\perp JK\Rightarrow JK//CH\Rightarrow JK=CH=\sqrt{5}$.

Xét ΔAJK có $JK^2=AJ^2+AK^2=5$ suy ra ΔAJK vuông tại A.

Gọi F là trung điểm JK khi đó ta có $AF=JF=FK=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Gọi N là trung điểm BC, xét tam giác vuông ANF ta có:

$\cos\widehat{NAF}=\frac{AF}{AN}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{NAF}=60^\circ$. ($AN=AM=\sqrt{5}$ vì $AN//AM$ và $AN=AM$).

Vậy ta có $S_{\Delta AJK}=\frac{1}{2}AJ.AK=\frac{1}{2}.1.2=1\Rightarrow S_{\Delta AJK}=S_{\Delta ABC}.\cos 60^\circ\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{S_{\Delta AJK}}{\cos 60^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

Xét tam giác AMA' vuông tại M ta có $\widehat{MAA'}=\widehat{AMF}=30^\circ$ hay $AM=A'M.\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V=AM.S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{15}}{3}.2=\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

Câu 69: **(Đề tham khảo 2017)** Cho khối tứ diện có thể tích bằng V. Gọi V' là thể tích của khối đa diện có các đỉnh là các trung điểm của các cạnh của khối tứ diện đã cho, tính tỉ số $\frac{V'}{V}$.

A. $\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{V'}{V}=\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{V'}{V}=\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{V'}{V}=\frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. Đặc biệt hóa tứ diện cho là tứ diện đều cạnh a. Hình đa diện cần tính có được bằng cách cắt 4 góc của tứ diện, mỗi góc cũng là một tứ diện đều có cạnh bằng $\frac{a}{2}$.

Do đó thể tích phần cắt bỏ là $V''=4.\frac{V}{8}=\frac{V}{2}$.

(Vì với tứ diện cạnh giảm nửa thì thể tích giảm $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$)

Vậy $V'=\frac{V}{2}\Leftrightarrow\frac{V'}{V}=\frac{1}{2}$.

Cách 2. Khối đa diện là hai khối chóp tứ giác (giống nhau) có cùng đáy là hình bình hành úp lại. Suy ra: $V'=2V_{N.MEPF}=4.V_{N.MEP}=4.V_{P.MNE}=4.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}V=\frac{1}{2}V$

(Do chiều cao giảm một nửa, cạnh đáy giảm một nửa nên diện tích giảm 4)

Cách 3. Ta có $\frac{V'}{V}=\frac{V-V_{A.QEP}-V_{B.QMF}-V_{C.MNE}-V_{D.NPF}}{V}$

$$=1-\frac{V_{A.QEP}}{V}-\frac{V_{B.QMF}}{V}-\frac{V_{C.MNE}}{V}-\frac{V_{D.NPF}}{V}=1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Câu 70: **(Đề minh họa lần 1 2017)** Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau; $AB=6a$, $AC=7a$ và $AD=4a$. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CD, DB. Tính thể tích V của tứ diện $AMNP$.

A. $V=\frac{7}{2}a^3$ **B.** $V=14a^3$ **C.** $V=\frac{28}{3}a^3$ **D.** $V=7a^3$

Lời giải

Chọn D

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}AB.\frac{1}{2}AD.AC=\frac{1}{6}6a.7a.4a=28a^3$

Ta nhận thấy $S_{MNP}=\frac{1}{2}S_{MNPD}=\frac{1}{4}S_{BCD}\Rightarrow V_{AMNP}=\frac{1}{4}V_{ABCD}=7a^3$

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

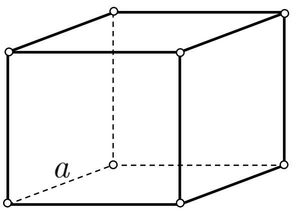
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

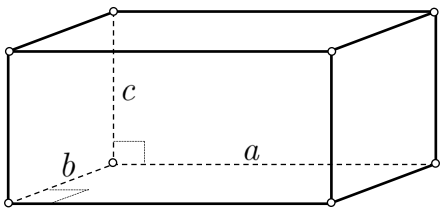
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

1. Thể tích khối chóp $\boxed{V_{\text{chóp}}=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}\cdot \text{chiều cao}}=\boxed{\frac{1}{3}\cdot S_{\text{đáy}}\cdot d\left(\text{đỉnh; mặt phẳng đáy}\right)}$

2. Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}}=S_{\text{đáy}}\cdot \text{chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V=a^3}$ • Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V=abc}$

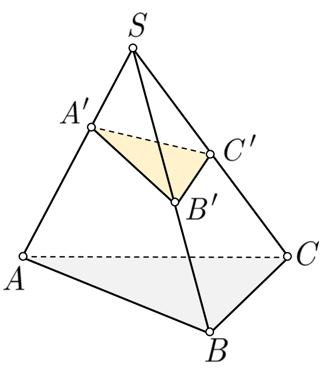




3. Tỉ số thể tích

- Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng $SA,\ SB,\ SC$ lần lượt
lấy các điểm $A',\ B',\ C'$ khác S. Khi đó ta luôn có tỉ số thể tích:

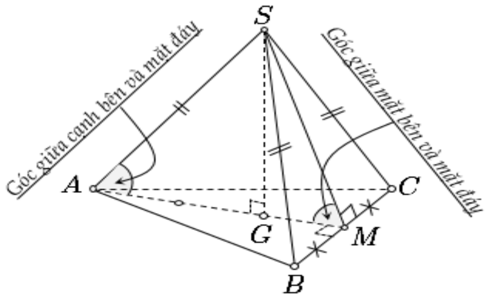
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}.$$

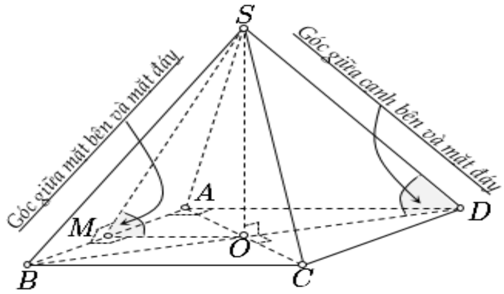


- Ngoài những cách tính thể tích trên, ta còn phương pháp chia nhỏ khối đa diện thành những đa diện nhỏ mà dễ dàng tính toán. Sau đó cộng lại.
- Ta thường dùng tỉ số thể tích khi điểm chia đoạn theo tỉ lệ.

4. Tính chất của hình chóp đều

- ***Đáy là đa giác đều*** (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).
- ***Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy***
- ***Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.***
- ***Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.***
- ***Góc giữa các mặt bên*** và ***mặt đáy đều bằng nhau.***

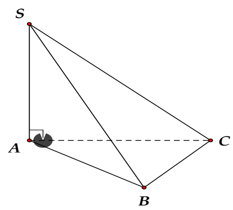
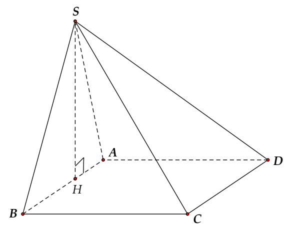
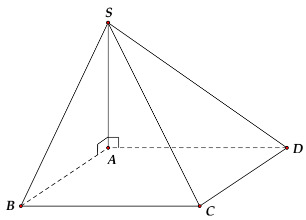
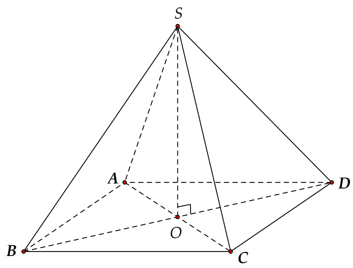




Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

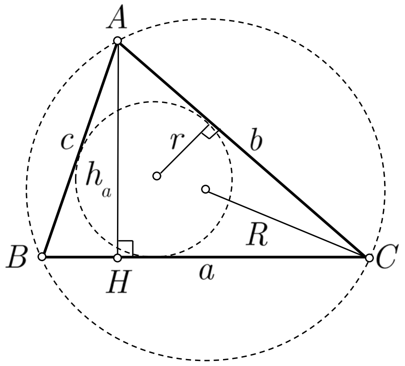
XÁC ĐỊNH CHIỀU CAO THƯỜNG GẶP

a) Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy: Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tức $SA \perp (ABC)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.	
b) Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy: Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SH là chiều cao của ΔSAB.	
c) **Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy**: Chiều cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.	**Ví dụ**: Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.	
d) **Hình chóp đều:** Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy. Đối với hình chóp đều đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm G của tam giác đều.	**Ví dụ**: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tâm đa giác đáy là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$ thì có đường cao là SO.	

DIỆN TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

 Diện tích tam giác thường: Cho tam giác ABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi. Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó:

- $S_{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \\ = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B \\ = \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{(Héron)} \end{vmatrix}$



- $S_{\text{tam giác vuông}} = \dfrac{1}{2}\cdot$(tích hai cạnh góc vuông).
- $S_{\text{tam giác vuông cân}} = \dfrac{(\text{cạnh huyền})^2}{4}\cdot$
- $S_{\text{tam giác đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh}.\sqrt{3}}{2}\cdot$

- $S_{\text{hình chữ nhật}} =$ dài $\times$ rộng và $S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$.
- $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé})\cdot(\text{chiều cao})}{2}\cdot$
- $S_{\text{Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc}} = \dfrac{\text{Tích hai đường chéo}}{2} \Rightarrow S_{\text{hình thoi}} = \dfrac{\text{Tích 2 đường chéo}}{2}\cdot$

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

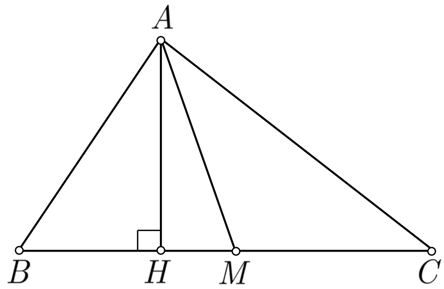
$*$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pitago), $AH.BC = AB.AC$.

$*$ $AB^2 = BH\cdot BC$ và $AC^2 = CH\cdot CB$.

$*$ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB\cdot HC$.

$*$ $BC = 2AM$.

$*$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC$.

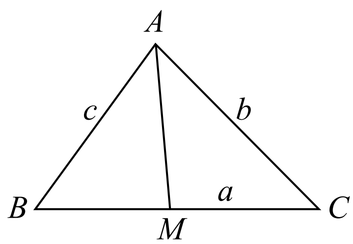


2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Cho ΔABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi). Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Khi đó:

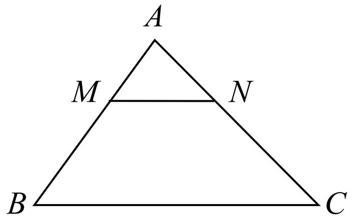
$*$ **Định lý hàm sin**: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

$*$ **Định lý hàm cos**: $\begin{cases} \bullet\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \bullet\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot \\ \bullet\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$



$*$ **Công thức trung tuyến**: $\begin{cases} \bullet\ AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ \bullet\ BN^2 = \dfrac{BA^2 + BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \\ \bullet\ CK^2 = \dfrac{CA^2 + CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}$.

$*$ **Định lý Thales**: $\begin{cases} \bullet\ MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = k \\ \bullet\ \dfrac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \end{cases}$.



DẠNG 1. CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $\sqrt{2}a^3$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\dfrac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3}{4}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SC = a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD = 10$, $AB = 10$, $BC = 24$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

A. $V = 1200$ **B.** $V = 960$ **C.** $V = 400$ **D.** $V = \dfrac{1300}{3}$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$
.

A. $V = \dfrac{a^3}{6}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{2}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V = 2a^3$.

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AC = 2a, SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 3a$ và $AD = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $12\sqrt{2}a^3$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 9: Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và chiều cao bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ là

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** 1.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, độ dài cạnh $AB = BC = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{3}$. **B.** $V = \frac{a^3}{2}$. **C.** $V = a^3$. **D.** $V = \frac{a^3}{6}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $SA = AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Câu 12: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Khi đó thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy là $a^2\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \sqrt{2}a^3$. **B.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA \perp (ABC)$, $SA = 3a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $V = a^3$. **B.** $V = 3a^3$. **C.** $V = \frac{1}{3}a^3$. **D.** $V = 2a^3$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp S.$ABCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA=AB=2a$, $BC=3a$. Tính thể tích của $S.ABC$ là

A. $3a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB=4a$, $BC=a$, cạnh bên $SD=2a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $6a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $\frac{2}{3}a^3$.

Câu 19: Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ có SA là đường cao, đáy là tam giác BAC vuông cân tại A ; $SA=AB=a$

A. $V=\frac{a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{2a^3}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3}{9}$.

DẠNG 2. MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 21: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $4a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 23: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA=2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=2a^3$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp. Biết rằng $AB=a\sqrt{3};AC=a$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

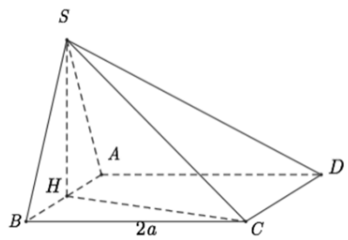
Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **B.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tich V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{8}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và mặt đáy, tính $\tan\alpha$.



A. $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\tan\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

DẠNG 3. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU

Câu 30: Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31: Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp đó là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 32: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $4\sqrt{5}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A. $V=9a^3$ **B.** $V=2a^3$ **C.** $V=3a^3$ **D.** $V=6a^3$

Câu 34: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 35: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$ và độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{10a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{10a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\dfrac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 36: Xét khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2 lần chiều cao tam giác đáy. Tính thể tích khối chóp.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 37: Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3.

A. $\dfrac{9\sqrt{2}}{4}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 38: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{6}$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Câu 39: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối $SBCD$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 40: Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Tính thể tích khối chóp đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 41: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $\widehat{ASC} = 90^\circ$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Câu 42: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 43: Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy góc 45°. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 44: Cho khối chóp có đáy hình thoi cạnh a $(a > 0)$ các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với đáy góc 45°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}a^3$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3$.

Câu 45: Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

A. a^3. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\dfrac{1}{12}a^3$. **D.** $6a^3$.

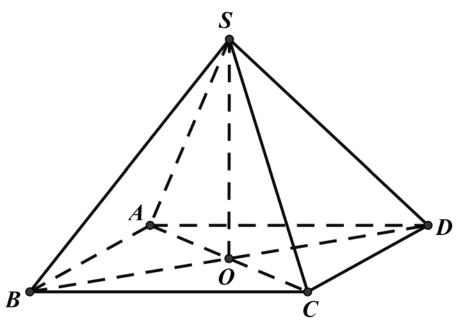
Câu 46: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích khối chóp là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 47: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc 60°. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.



A. $V = 4\sqrt{7}a^3$. **B.** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **C.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

Câu 49: Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là $147\,\text{m}$, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là

A. 2592100 m^3. **B.** 2952100 m^3. **C.** 2529100 m^3. **D.** 2591200 m^3.

DẠNG 4. CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB=4\text{a}, SB=6\text{a}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\dfrac{a^3}{3V}$ là

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{80}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{40}$ **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{20}$ **D.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{80}$

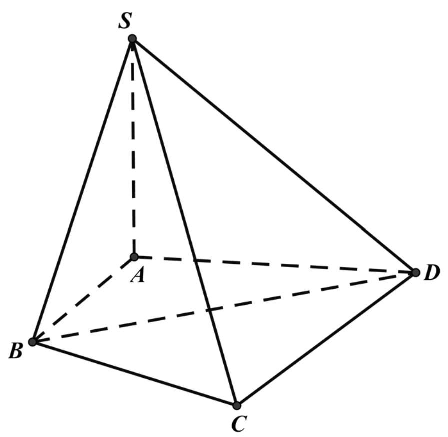
Câu 51: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $\widehat{ACB}=60°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V=\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=a$ và $AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V=\dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB=5\sqrt{3}, BC=3\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=90°$, $SA=9$ và SA vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy.



A. $\dfrac{20\sqrt{273}}{819}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{91}}{9}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{273}}{20}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{91}}{9}$

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{8a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{4a^3}{9}$.

Câu 55: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SC=a\sqrt{3}$.

A. $V_{S.ABCD}=a^3$. **B.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $AC=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 57: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC=2a$, $\widehat{BAC}=120°$, biết $SA\perp(ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc $45°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a.

A. $\dfrac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Câu 59: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Câu 60: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Câu 61: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\sqrt{3}a^3$. **B.** $V=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, góc BAD bằng 120^0, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích V của chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{13}}{12}$.

DẠNG 5. MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\dfrac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Câu 65: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\dfrac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \dfrac{4}{3}a$ **B.** $h = \dfrac{3}{2}a$ **C.** $h = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$ **D.** $h = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

Câu 66: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{21}$. Hãy cho biết cạnh đáy bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{21}$ **B.** 21 **C.** $7\sqrt{3}$ **D.** 7

Câu 67: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC = \dfrac{1}{2}AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a.

A. $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB = a; AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC).

A. $d = \dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $d = \dfrac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $d = \dfrac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $d = \dfrac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 69: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 70: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA=3HD$. Biết rằng $SA=2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng $30°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=8\sqrt{6}a^3$. **B.** $V=\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V=8\sqrt{2}a^3$. **D.** $V=\frac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

Câu 71: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB=AD=a$, $CD=2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích tứ diện $SBCD$ bằng $\frac{a^3}{\sqrt{6}}$. Khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) là?

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

Câu 72: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH=\frac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $V=\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 74: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 75: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\frac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a

A. $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 76: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{8}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3}{2}$. **D.** $V=2a^3$.

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là 30°. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB}=30^0$, $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{a^3}{9}$. **D.** $V=\frac{a^3}{3}$.

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=a, BC=a\sqrt{3}, \widehat{ABC}=60^0$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là 45^0. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

DẠNG 6. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU

Câu 80: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Câu 81: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$

Câu 82: Nếu một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2 và có diện tích xung quanh bằng $4\sqrt{3}$ thì có thể tích bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 83: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = a$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, biết BD vuông góc với AE.

A. $\frac{a^3\sqrt{21}}{54}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{7}}{27}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Câu 84: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 85: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ độ dài cạnh đáy là a. Biết rằng mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, cắt cạnh SB tại B' với $\frac{SB'}{SB} = \frac{2}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

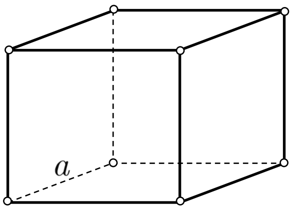
PHƯƠNG PHÁP CHUNG

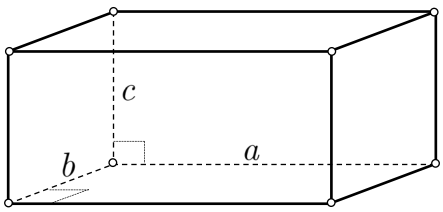
THỂ TÍCH KHỐI CHÓP – KHỐI LĂNG TRỤ

1. Thể tích khối chóp $\boxed{V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot \text{chiều cao}} = \boxed{\frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot d\left(\text{đỉnh; mặt phẳng đáy}\right)}$

2. Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}} \cdot \text{chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$ • Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$

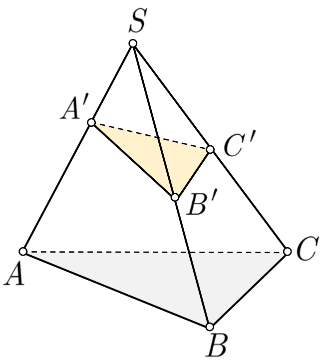




3. Tỉ số thể tích

- Cho khối chóp $S.ABC$, trên các đoạn thẳng $SA,\ SB,\ SC$ lần lượt
lấy các điểm $A',\ B',\ C'$ khác S. Khi đó ta luôn có tỉ số thể tích:

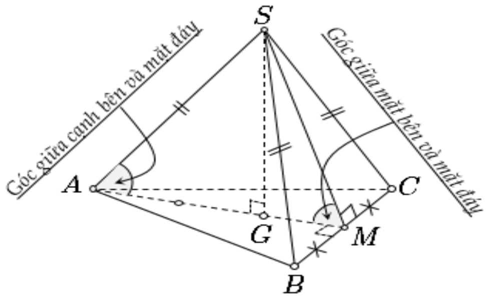
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}.$$

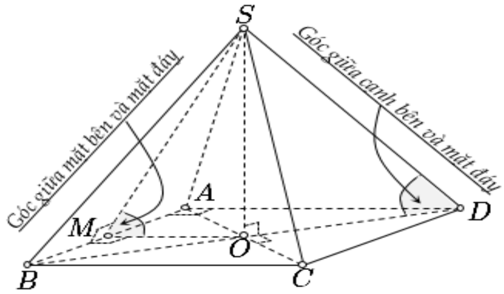


- Ngoài những cách tính thể tích trên, ta còn phương pháp chia nhỏ khối đa diện thành những đa diện nhỏ mà dễ dàng tính toán. Sau đó cộng lại.
- Ta thường dùng tỉ số thể tích khi điểm chia đoạn theo tỉ lệ.

4. Tính chất của hình chóp đều

- ***Đáy là đa giác đều*** (hình chóp tam giác đều có đáy là tam giác đều, hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông).
- ***Chân đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy***
- ***Các mặt bên là những tam giác cân và bằng nhau.***
- ***Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau.***
- ***Góc giữa các mặt bên*** và ***mặt đáy đều bằng nhau.***

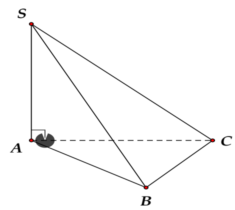
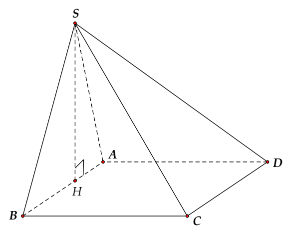
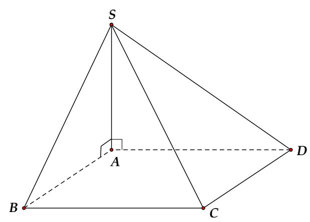
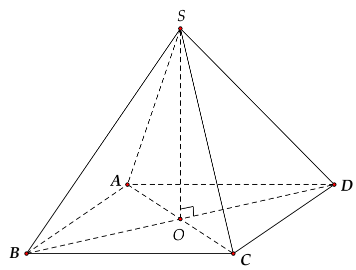




<u>Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều</u>:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

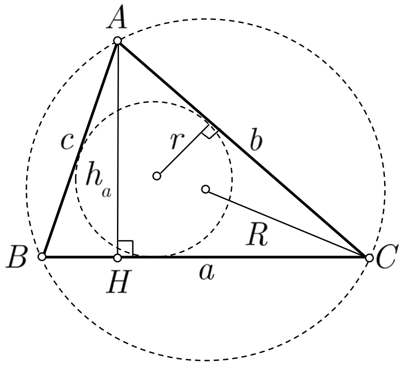
XÁC ĐỊNH CHIỀU CAO THƯỜNG GẶP

a) **Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy**: Chiều cao của hình chóp là độ dài cạnh bên vuông góc với đáy.	**<u>Ví dụ</u>**: Hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tức $SA \perp (ABC)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.	
b) **Hình chóp có 1 mặt bên vuông góc với mặt đáy**: Chiều cao của hình chóp là chiều cao của tam giác chứa trong mặt bên vuông góc với đáy.	**<u>Ví dụ</u>**: Hình chóp $S.ABCD$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SH là chiều cao của ΔSAB.	
c) **Hình chóp có 2 mặt bên vuông góc với mặt đáy**: Chiều cao của hình chóp là giao tuyến của hai mặt bên cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.	**<u>Ví dụ</u>**: Hình chóp $S.ABCD$ có hai mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ thì chiều cao của hình chóp là SA.	
d) **Hình chóp đều:** Chiều cao của hình chóp là đoạn thẳng nối đỉnh và tâm của đáy. Đối với hình chóp đều đáy là tam giác thì tâm là trọng tâm G của tam giác đều.	**<u>Ví dụ</u>**: Hình chóp đều $S.ABCD$ có tâm đa giác đáy là giao điểm của hai đường chéo hình vuông $ABCD$ thì có đường cao là SO.	

DIỆN TÍCH CỦA MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

□ **Diện tích tam giác thường**: Cho tam giác ABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$ và $p = \dfrac{a+b+c}{2}$: nửa chu vi. Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Khi đó:

- $S_{\Delta ABC} = \begin{vmatrix} = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \\ = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ac\sin B \\ = \dfrac{abc}{4R} = p.r \\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ \text{(Héron)} \end{matrix}$



- $S_{\text{tam giác vuông}} = \dfrac{1}{2}\cdot$(tích hai cạnh góc vuông).
- $S_{\text{tam giác vuông cân}} = \dfrac{(\text{cạnh huyền})^2}{4}\cdot$
- $S_{\text{tam giác đều}} = \dfrac{(\text{cạnh})^2.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ Chiều cao tam giác đều $= \dfrac{\text{cạnh}.\sqrt{3}}{2}\cdot$

□ $S_{\text{hình chữ nhật}} =$ dài $\times$ rộng và $S_{\text{hình vuông}} = (\text{cạnh})^2$.

□ $S_{\text{hình thang}} = \dfrac{(\text{đáy lớn} + \text{đáy bé})\cdot(\text{chiều cao})}{2}\cdot$

□ $S_{\text{Tứ giác có 2 đường chéo vuông góc}} = \dfrac{\text{Tích hai đường chéo}}{2} \Rightarrow S_{\text{hình thoi}} = \dfrac{\text{Tích 2 đường chéo}}{2}\cdot$

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Cho ΔABC vuông tại A, có AH là đường cao, AM là trung tuyến. Khi đó:

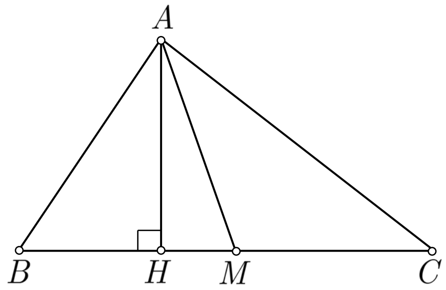
$*$ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pitago), $AH.BC = AB.AC$.

$*$ $AB^2 = BH\cdot BC$ và $AC^2 = CH\cdot CB$.

$*$ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ và $AH^2 = HB\cdot HC$.

$*$ $BC = 2AM$.

$*$ $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC$.

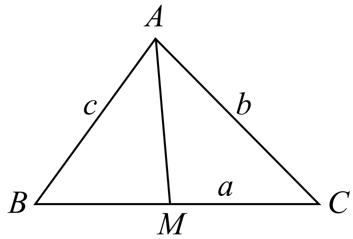


2. Hệ thức lượng trong tam giác thường

Cho ΔABC và đặt $AB = c,\ BC = a,\ CA = b,\ p = \dfrac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi). Gọi $R,\ r$ lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Khi đó:

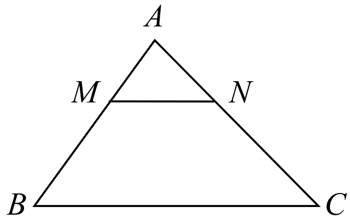
$*$ **Định lý hàm sin**: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R.$

$*$ **Định lý hàm cos**: $\begin{cases} \bullet\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A} \Rightarrow \cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \bullet\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B} \Rightarrow \cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \bullet\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C} \Rightarrow \cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}\cdot$



$*$ **Công thức trung tuyến**: $\begin{cases} \bullet\ AM^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} \\ \bullet\ BN^2 = \dfrac{BA^2 + BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \\ \bullet\ CK^2 = \dfrac{CA^2 + CB^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} \end{cases}$.

$*$ **Định lý Thales**: $\begin{cases} \bullet\ MN \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC} = k \\ \bullet\ \dfrac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\dfrac{AM}{AB}\right)^2 = k^2 \end{cases}$.

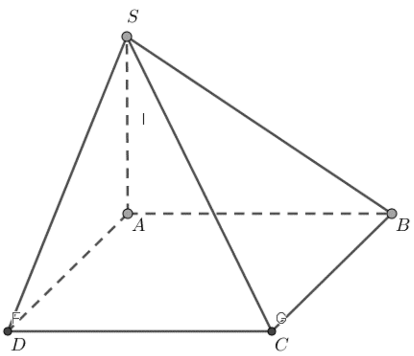


DẠNG 1. CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$ **C.** $\sqrt{2}a^3$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$

Lời giải

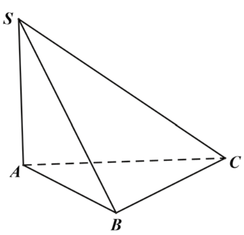


Ta có $S_{ABCD} = a^2$. $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy và thể tích của khối chóp đó bằng $\dfrac{a^3}{4}$. Tính cạnh bên SA.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $a\sqrt{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải

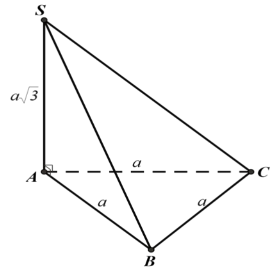


$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA\Rightarrow SA=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3.\frac{a^3}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}=a\sqrt{3}.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Biết $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\frac{a}{4}$ **B.** $\frac{a^3}{2}$ **C.** $\frac{a^3}{4}$ **D.** $\frac{3a^3}{4}$

Lời giải



Ta có SA là đường cao hình chóp

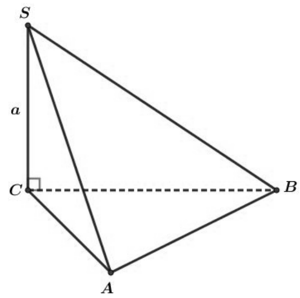
Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy thể tích cần tìm là: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3}=\frac{a^3}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên SC vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SC=a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải

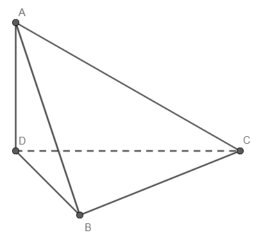


$$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) biết đáy ABC là tam giác vuông tại B và $AD=10$, $AB=10$, $BC=24$. Tính thể tích của tứ diện $ABCD$.

A. $V=1200$ **B.** $V=960$ **C.** $V=400$ **D.** $V=\frac{1300}{3}$

Lời giải



Ta có $V_{ABCD} = \frac{1}{3}AD.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{6}10.10.24 = 400$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{a^3}{2}$. **<u>C</u>.** $V = \frac{2a^3}{3}$. **D.** $V = 2a^3$.

Lời giải

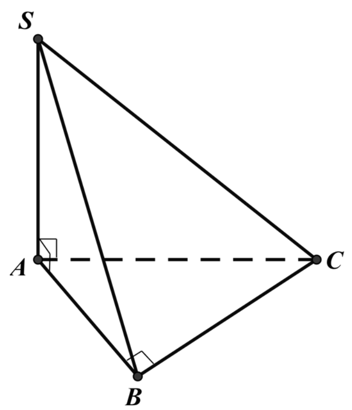
Diện tích tam giác ABC vuông cân tại A là: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}2a.2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.a.2a^2 = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a, AC = 2a, SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **<u>B</u>.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải



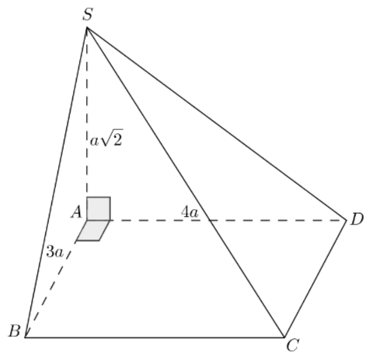
Ta có $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}AB.BC.SA = \frac{1}{6}.a.a\sqrt{3}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=3a$ và $AD=4a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $12\sqrt{2}a^3$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải



Diện tích đáy hình chữ nhật là $S=AB\cdot AD=3a\cdot 4a=12a^2$ (đvdt)

Thể tích của hình chóp có đáy hình chữ nhật là $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\cdot 12a^2\cdot a\sqrt{2}=4\sqrt{2}a^3$.

Câu 9: Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và chiều cao bằng $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ là

A. $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** 1.

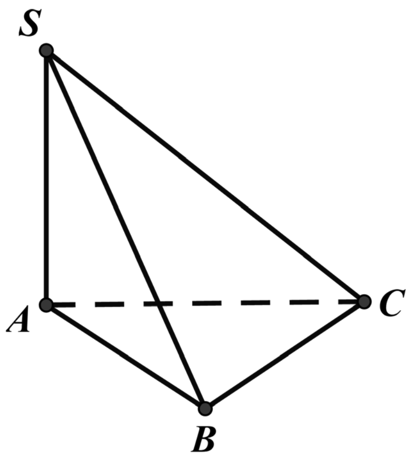
Lời giải

Thể tich khối chóp là $V=\frac{1}{3}$. chiều cao. diện tích đáy$=\frac{1}{3}$.

Câu 10: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, độ dài cạnh $AB=BC=a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{3}$. **B.** $V=\frac{a^3}{2}$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

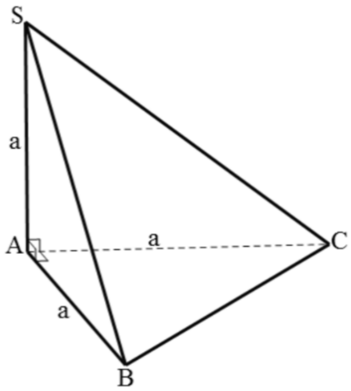


Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot 2a\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2=\frac{a^3}{3}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $SA=AB=a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{3a^3}{2}$.

Lời giải

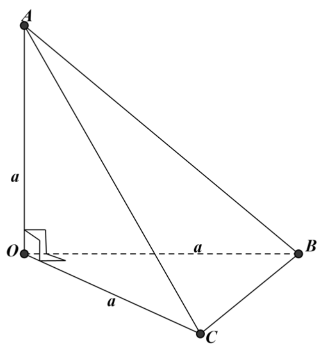


Thể tích của khối chóp $S.ABC$: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 12: Cho tứ diện $OABC$ có $OA,\ OB,\ OC$ đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$. Khi đó thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{a^3}{12}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải



Ta có: $V=\frac{1}{3}S_{OBC}.OA=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}.OB.OC.OA=\frac{a^3}{6}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy là $a^2\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA=a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a.

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

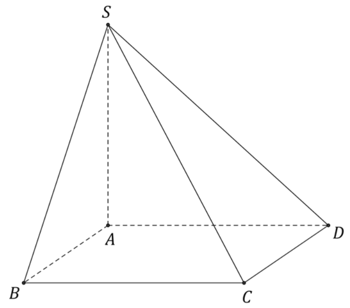
Lời giải

Áp dụng công thức $V=\frac{1}{3}Bh$ ta có $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V=\sqrt{2}a^3$. **B.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$. **C.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Lời giải

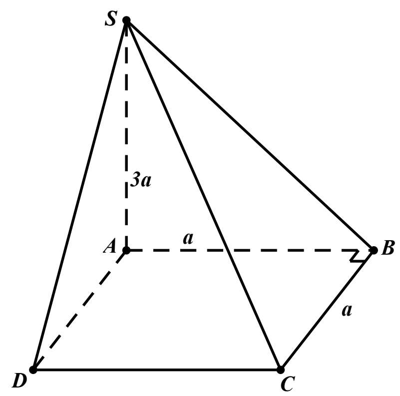


$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}.a^2=\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 15: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, $SA\perp(ABC)$, $SA=3a$. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $V=a^3$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=\frac{1}{3}a^3$. **D.** $V=2a^3$.

Lời giải



Diện tích đáy $ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

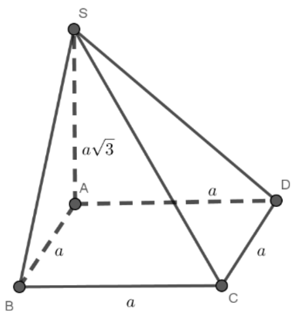
Vì $SA\perp(ABC)$ nên chiều cao của khối chóp là $SA=3a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}.a^2.3a=a^3$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp S.$ABCD$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải



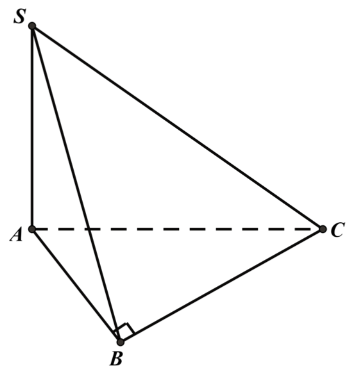
Khối chóp $S.ABCD$ có chiều cao $h = a\sqrt{3}$ và diện tích đáy $B = a^2$.

Nên có thể tích $V = \dfrac{1}{3}.a^2.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết $SA = AB = 2a$, $BC = 3a$. Tính thể tích của $S.ABC$ là

A. $3a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



$V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}AB.BC.SA = 2a^3$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình chữ nhật với $AB = 4a$, $BC = a$, cạnh bên $SD = 2a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $6a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $\dfrac{8}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{2}{3}a^3$.

Lời giải

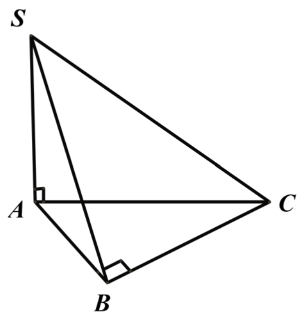
Theo đề, ta có thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SD$.

$ABCD$ là hình chữ nhật nên $S_{ABCD} = AB.BC = 4a^2$. Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.4a^2.2a = \dfrac{8}{3}a^3$

Câu 19: Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ có SA là đường cao, đáy là tam giác BAC vuông cân tại A ; $SA = AB = a$

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3}{6}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{9}$.

Lời giải



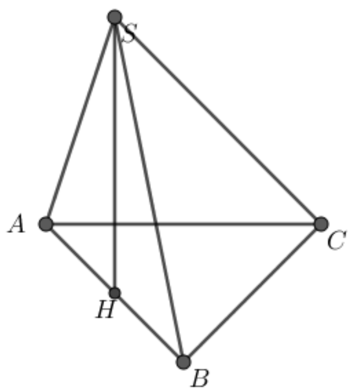
Ta có: $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}.AB.BC=\frac{1}{6}.a.a.a=\frac{a^3}{6}$.

DẠNG 2. MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AB=2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH=a\sqrt{3}$

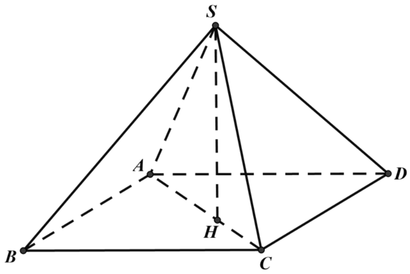
$AB=2a\Rightarrow BC=2a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}(2a)^2=2a^2$

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SH=\frac{1}{3}2a^2a\sqrt{3}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$

Câu 21: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, cạnh bên SA tạo với đáy góc 60°. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải



Kẻ $SH \perp AC$, $H \in AC$ H suy ra $SH \perp (ABCD)$.

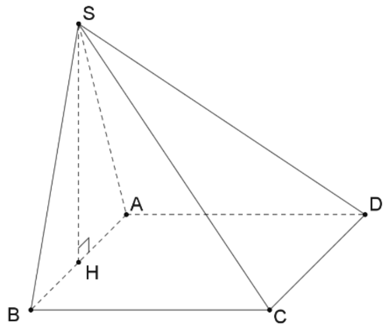
$AC = 2a$, tam giác SAC vuông ở S, góc $SAC = 60^\circ$ nên $SA = a, SC = a\sqrt{3}, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích hình chóp là $V = \dfrac{1}{3}\left(a\sqrt{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $4a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



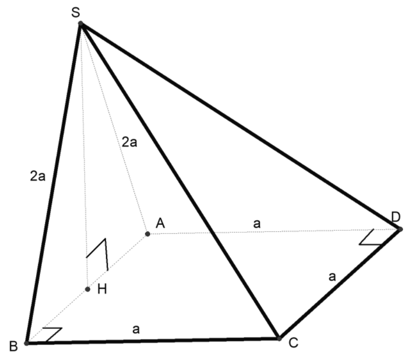
Gọi H là trung điểm của AB, ta có $SH \perp AB$.
Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến là đường thẳng AB nên $SH \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.(2a)^2.\dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 23: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA = 2a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 2a^3$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB.

Theo đề, tam giác SAB cân tại S nên suy ra $SH \perp AB$.

Mặt khác, tam giác SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SHA vuông tại H.

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

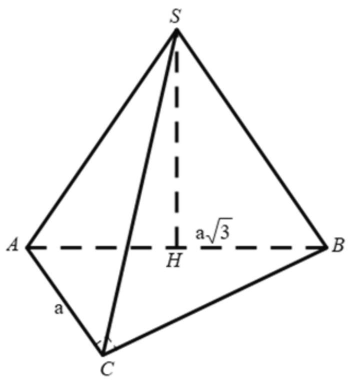
Diện tích hình vuông là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}.SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp. Biết rằng $AB = a\sqrt{3}; AC = a$.

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAB).Gọi H là trung điểm của AB.

ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB.$

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SH \perp AB \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ (SAB) \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

ΔSAB đều $AB = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2}$.

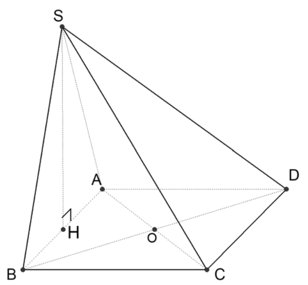
ΔABC là tam giác vuông cân tại $C \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\dfrac{3a}{2}\dfrac{1}{2}a\sqrt{2}.a = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 25: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là một tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{a^3}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ và $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Suy ra SH là đường cao của hình chóp.

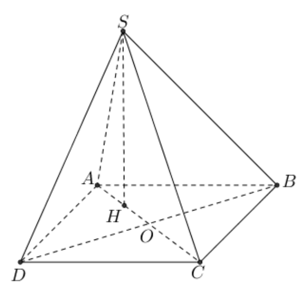
Diện tích đáy $S_{ABCD} = a^2$

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, tam giác SAC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{12}$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{4}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên AC.

Ta có $SO=\frac{1}{2}AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra ΔSAO là tam giác đều.

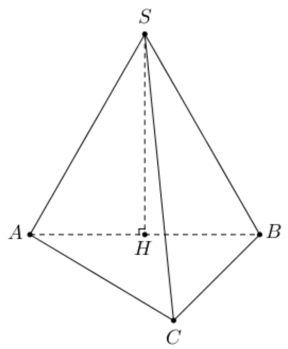
$\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Vậy $V=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{4}.a^2=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB=AC=a$, $\widehat{BAC}=120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tich V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=a^3$. **D.** $V=\frac{a^3}{8}$.

Lời giải



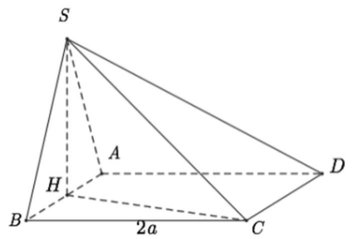
Gọi H là trung điểm AB, ta có $SH\perp AB$ và $SH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó $\begin{cases}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SH\perp AB\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABC)$.

Thể tích khối chóp $V=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.a^2.\sin 120°=\frac{a^3}{8}$.

Vậy $V=\frac{a^3}{8}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4a^3}{3}$. Gọi α là góc giữa SC và mặt đáy, tính $\tan\alpha$.



A. $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Dựng $SH \perp AB$, do $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow \alpha = \widehat{SCH}$.

Ta có $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} \Rightarrow \dfrac{1}{3}SH.4a^2 = \dfrac{4a^3}{3} \Rightarrow SH = a$.

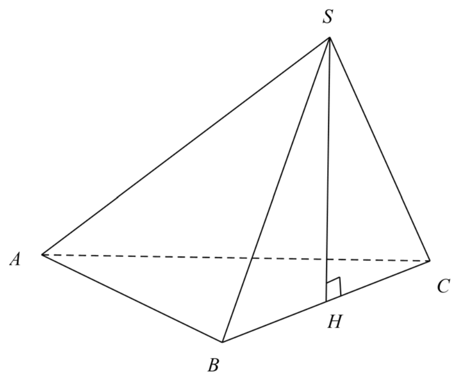
Do $\triangle SAB$ cân tại S nên H là trung điểm của $AB \Rightarrow HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} = \dfrac{a}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2} = 2a$.

H là trung điểm của BC nên $BH = a$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có: $SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2} = a$.

Diện tích đáy ABC là: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

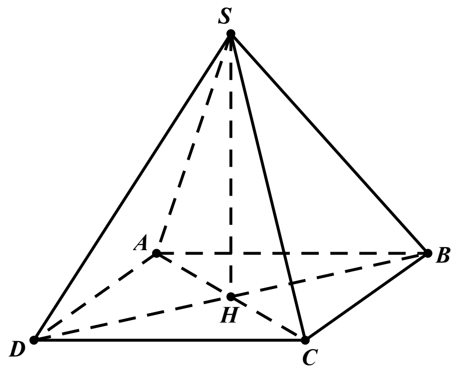
Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}.a^2\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

DẠNG 3. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU

Câu 30: Thể tích của khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** a^3. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Giả sử khối chóp tứ giác đều đã cho là $S.ABCD$. Khi đó $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA = SB = SC = SD = a$.

Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$ thì $SH \perp (ABCD)$ nên SH là chiều cao của khối chóp $S.ABCD$. Tính SH:

Xét tam giác ABC vuông tại B ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Nhận thấy $AC^2 = SA^2 + SC^2$ nên tam giác SAC vuông tại S. Suy ra $SH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

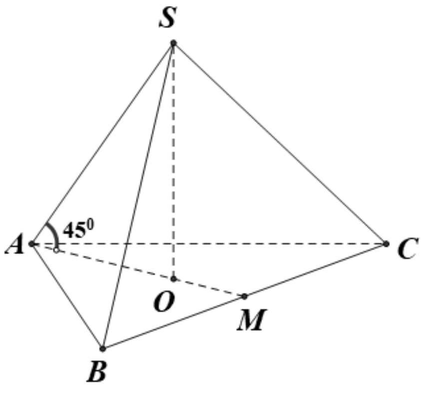
Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 31: Cho một hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp đó là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3}{36}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải



+ $(SA;(ABC)) = \widehat{SAO} = 45°$

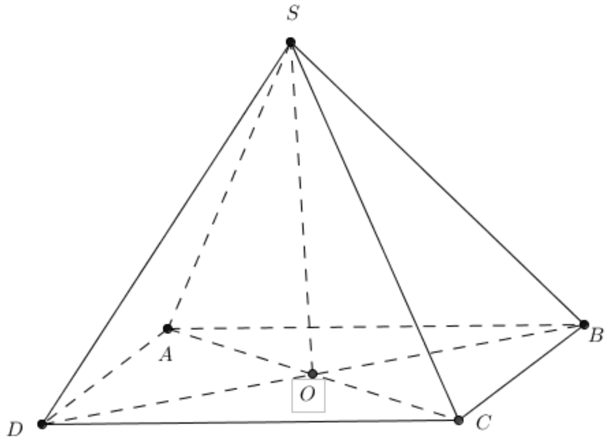
+ $SO = AO.\tan 45° = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

+ $V = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3}{12}$

Câu 32: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $2a$ cạnh bên bằng $a\sqrt{5}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $4\sqrt{5}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{5}a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



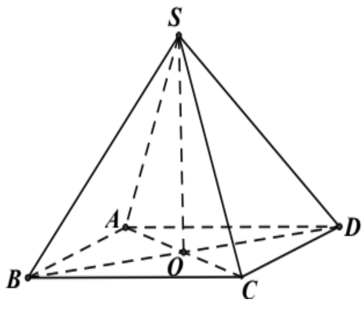
Ta có $S_{ABCD}=4a^2$; $SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{5a^2-2a^2}=a\sqrt{3}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{a\sqrt{3}.4a^2}{3}=\dfrac{4\sqrt{3}a^3}{3}$

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{6}$, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$?

A. $V=9a^3$ **B.** $V=2a^3$ **C.** $V=3a^3$ **D.** $V=6a^3$

Lời giải



Diện tích đáy là: $S_{ABCD}=AB^2=\left(a\sqrt{6}\right)^2=6a^2$.

Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy $(ABCD)$ là $\widehat{SD,(ABCD)}=\widehat{SDO}\Rightarrow\widehat{SDO}=60^0$

$ABCD$ là hình vuông suy ra $DO=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}AB\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}a\sqrt{6}.\sqrt{2}=a\sqrt{3}.$

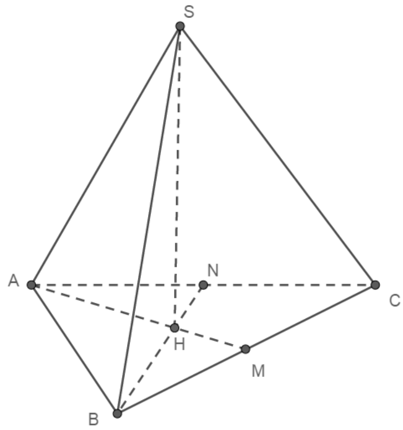
Xét tam giác vuông $SOD: SO=DO.\tan\widehat{SDO}=a\sqrt{3}.\tan 60^0=3a.$

Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.3a.6a^2=6a^3$.

Câu 34: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a, góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy bằng 60°. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Gọi H là tâm của tam giác đều ABC.

Khi đó $SH\perp(ABC)$, $BH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Theo đề bài ta có: $\widehat{(SB,(ABC))}=\widehat{SBH}=60^\circ$.

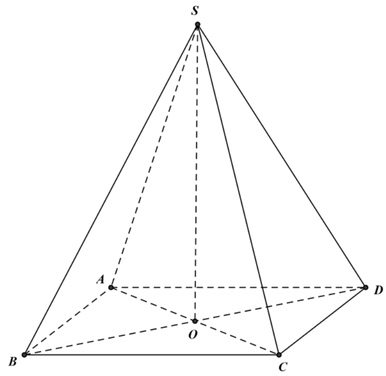
Xét ΔSBH vuông tại H. Có $SH=BH.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3}=a$.

Thể tích $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 35: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $a\sqrt{2}$ và độ dài cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\frac{10a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{10a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD$ thì $SO=a\sqrt{2}$.

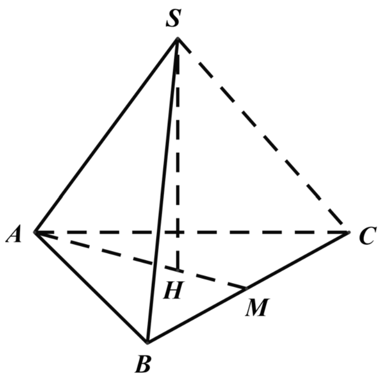
Tam giác SOA vuông tại O và $SA=a\sqrt{6}$ nên $OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=2a\Rightarrow AC=BD=4a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V=\frac{1}{3}.SO.\frac{AC.BD}{2}=\frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{4a.4a}{2}=\frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 36: Xét khối chóp tam giác đều cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng 2 lần chiều cao tam giác đáy. Tính thể tích khối chóp.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi M là trung điểm của cạnh $BC \Rightarrow AM \perp BC, AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$.

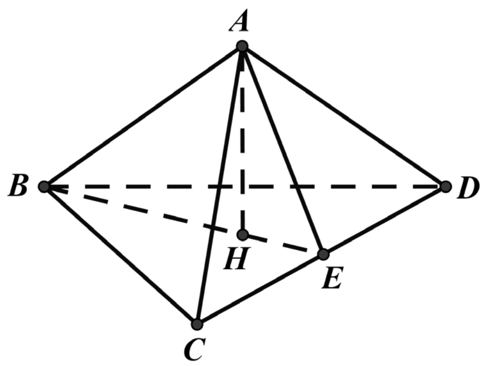
Xét tam giác SAH vuông tại $H \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{2a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 37: Thể tích khối tứ diện đều có cạnh bằng 3.

A. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải



Có ΔBCD đều cạnh 3 $\Rightarrow BE = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \sqrt{3}$.

ΔABH vuông tại $H \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.

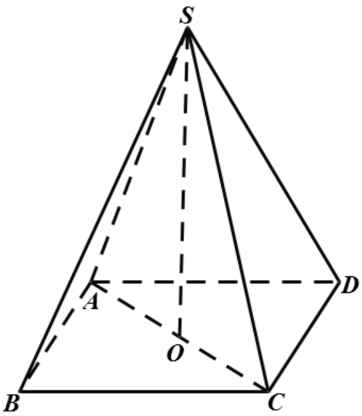
$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}.BE.CD = \frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{3}}{2}.3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$.

$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}.AH.S_{\Delta BCD} = \frac{1}{3}.\sqrt{6}.\frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Câu 38: Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên gấp hai lần cạnh đáy. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{6}$. **B.** $V = \frac{\sqrt{14}a^3}{2}$. **C.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, ta có: $SO \perp (ABCD)$.

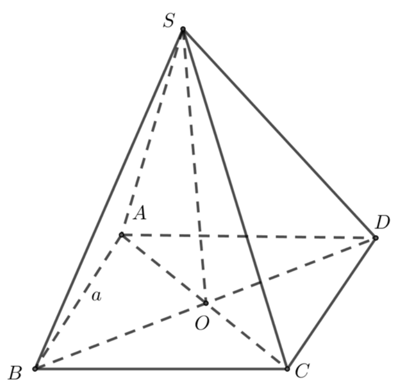
Trong tam giác SOC vuông tại O có: $SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{14}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$.

Câu 39: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên SA tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối $SBCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$ suy ra OA là hình chiếu vuông góc của SA trên mp$(ABCD) \Rightarrow (SA,(ABCD)) = (SA,OA) = \widehat{SAO} = 60^0$.

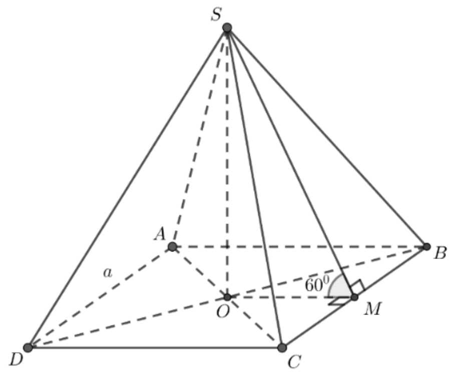
Ta có $SO = AO.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; $S_{BCD} = \dfrac{a^2}{2}$.

Từ đó, $V_{SBCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{BCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 40: Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a, các mặt bên tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp đó.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC, Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{SMO} = 60°$.

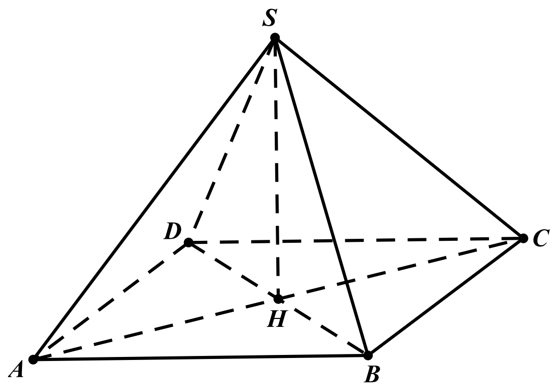
Xét ΔSOM có $OM = \dfrac{a}{2}$, $\widehat{SMO} = 60°$ thì $SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \dfrac{a}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đvtt). Đáp án được chọn là **C.**

Câu 41: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a. Biết $\widehat{ASC} = 90°$, tính thể tích V của khối chóp đó.

A. $V = \dfrac{a^3}{3}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Lời giải



Ta có: $S_{ABCD} = a^2$.

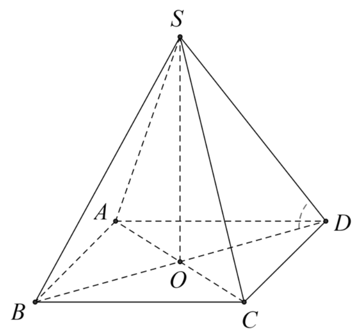
Gọi H là tâm của hình vuông $ABCD$. Tam giác ASC là tam giác vuông, H là trung điểm của AC nên $SH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 42: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy thì $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $\widehat{SDB} = 60°$.

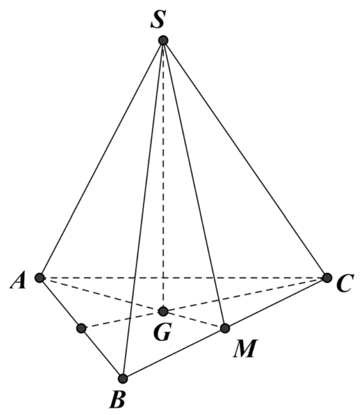
ΔSDB đều nên $SO = \dfrac{DB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 43: Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy là a và mặt bên tạo với đáy góc $45°$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{8}$. **B.** $\dfrac{a^3}{24}$. **C.** $\dfrac{a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi G là tâm của tam giác đều ABC và M là trung điểm BC.

Theo giả thiết góc giữa mặt bên và đáy bằng $45°$ suy ra $\widehat{SMG} = 45°$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ và $GM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Xét tam giác SGM có $\tan\widehat{SMG} = \dfrac{SG}{GM} \Rightarrow \tan 45° = \dfrac{SG}{GM} \Rightarrow SG = GM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

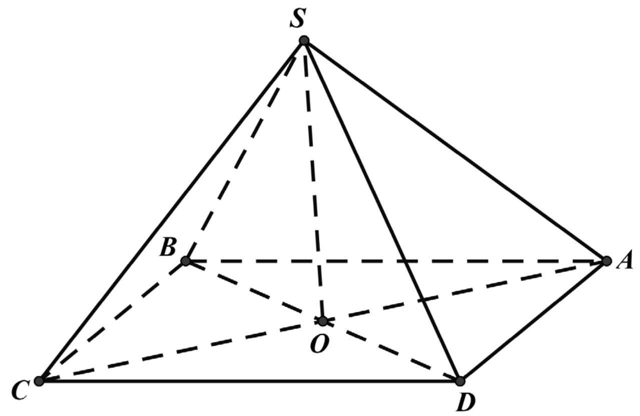
Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2.\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = \dfrac{a^3}{24}$

Câu 44: Cho khối chóp có đáy hình thoi cạnh a $(a > 0)$ các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với đáy góc $45°$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}a^3$. **B.** $\sqrt{2}a^3$. **C.** $\dfrac{3a^3}{\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}a^3$.

Lời giải

Ta có hình vẽ dưới đây.



Xét khối chóp trên ta thấy hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng đáy trùng với tâm của hình thoi $ABCD$.

Mặt khác $SA = SB = SC = SD$ và góc hợp bởi các cạnh bên bằng $45°$ nên ta có các tam giác vuông cân tại O bằng nhau: $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC = \Delta SOD$.

Suy ra hình thoi $ABCD$ là một hình vuông diện tích đáy bằng $S_{ABCD} = a^2$.

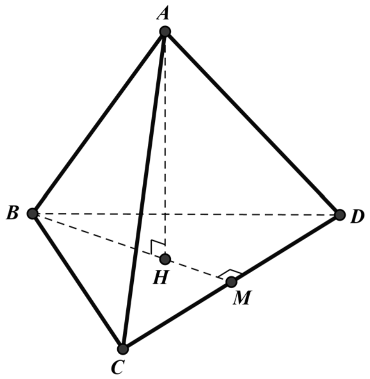
Chiều cao của hình chóp trên là: $SO = OD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra thể tích khối chóp bằng $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a^2 = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

Câu 45: Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

A. a^3. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. **C.** $\frac{1}{12}a^3$. **D.** $6a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD. Ta có $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

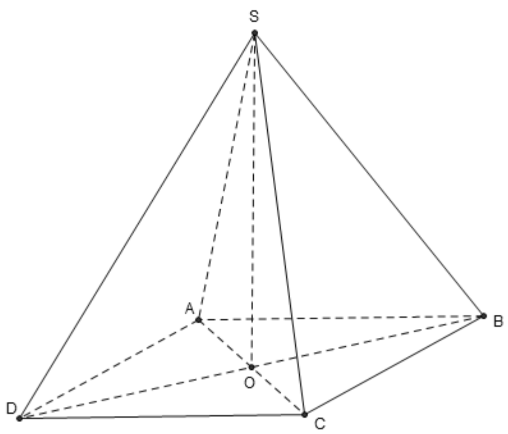
Do đáy BCD là tam giác đều cạnh a $\Rightarrow S_{BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích tứ diện đều là $V_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Câu 46: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Giả sử hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của BD và AC.

Ta có $SO \perp (ABCD)$, $\widehat{SAO} = 60°$, $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

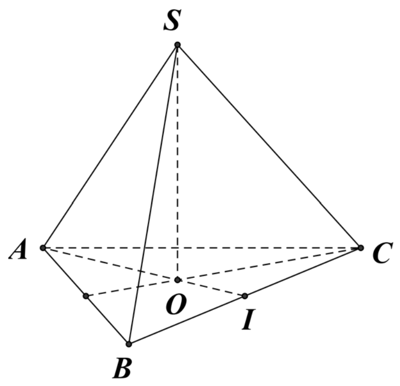
Khi đó $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, $S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 47: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên tạo với đáy một góc $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



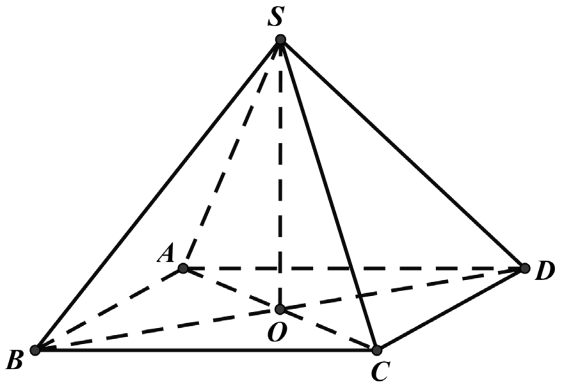
□ Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC thì $SO \perp (ABC)$. Suy ra $\widehat{SAO} = 60°$.

□ $AO = \dfrac{2}{3}.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $SH = AO.\tan 60° = 2a$.

□ Diện tích ΔABC là $S_{ABC} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

□ Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SO = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.



A. $V = 4\sqrt{7}a^3$. **B.** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{9}$. **C.** $V = \dfrac{4a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{4\sqrt{7}a^3}{3}$.

Lời giải

Diện tích đáy $S_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$.

$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$.

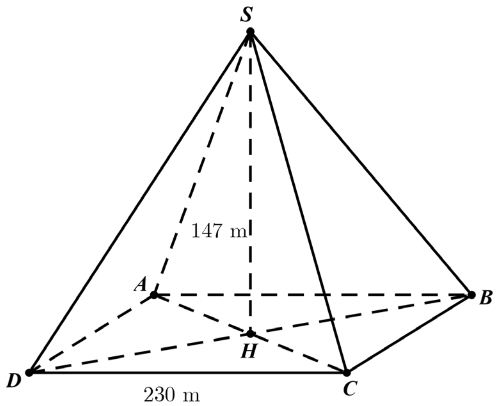
$h = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9a^2 - 2a^2} = a\sqrt{7}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{4a^3\sqrt{7}}{3}$.

Câu 49: Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là $147\,\text{m}$, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là

A. 2592100 m^3. **B.** 2952100 m^3. **C.** 2529100 m^3. **D.** 2591200 m^3.

Lời giải



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 230 m; chiều cao $SH = 147\text{ m}$.

Thể tích của nó là: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \dfrac{1}{3}.(230^2).147 = 2592100$.

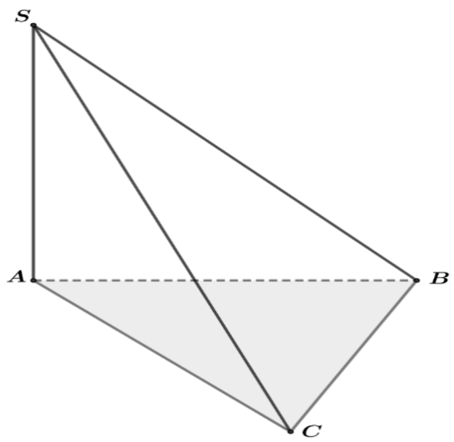
Vậy thể tích Kim tự tháp là 2592100 m^3.

DẠNG 4. CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 50: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, biết $AB = 4a, SB = 6a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là V. Tỷ số $\frac{a^3}{3V}$ là

A. $\frac{\sqrt{5}}{80}$ **B.** $\frac{\sqrt{5}}{40}$ **C.** $\frac{\sqrt{5}}{20}$ **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{80}$

Lời giải



Ta có:

+ ΔABC vuông cân tại $C, AB = 4a$ suy ra

$AC = BC = 2a\sqrt{2}$.

Do đó: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC = 4a^2$.

+ $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(6a)^2 - (4a)^2} = 2a\sqrt{5}$.

+ Khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

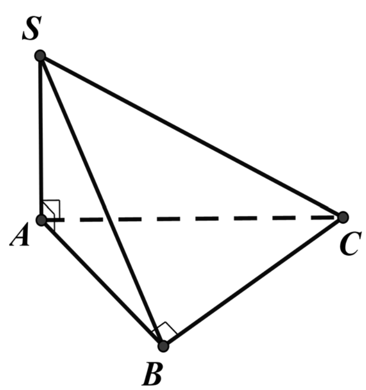
$\Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}4a^2.2a\sqrt{5} = \frac{8a^3\sqrt{5}}{3}$

Vậy tỷ số: $\frac{a^3}{3V} = \frac{a^3}{\frac{3.8a^3\sqrt{5}}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{40}$.

Câu 51: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60°$, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và SB hợp với mặt đáy một góc $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Lời giải



ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60° \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\tan 60^0} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

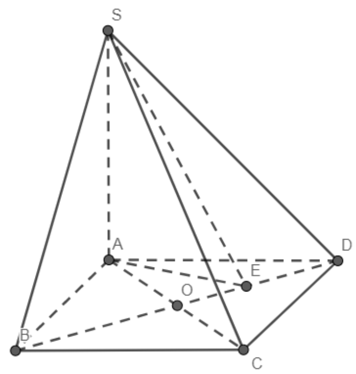
$\widehat{\left(SB,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{\left(SB, AB\right)} = 45^0$ nên tam giác SAB vuông cân tại S $\Rightarrow SA = AB = a$

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BA.BC.SA = \dfrac{1}{6}a.a\dfrac{\sqrt{3}}{3}a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$ và $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng 60^0.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{15}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $V = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Lời giải



Kẻ $AE \perp BD$

$\widehat{\left(\left(SBD\right),\left(ABCD\right)\right)} = \widehat{SEA} = 60^0$

Xét ΔABD vuông tại A

$AE = \dfrac{AD.AB}{\sqrt{AD^2 + AB^2}} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$

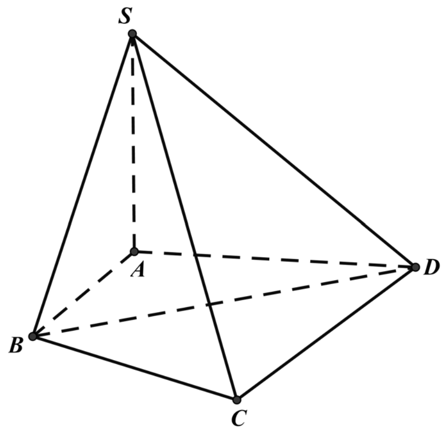
Xét ΔSAE vuông tại A

$SA = AE.\tan 60^0 = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.\sqrt{3} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$

Khi đó thể tích $S.ABCD$

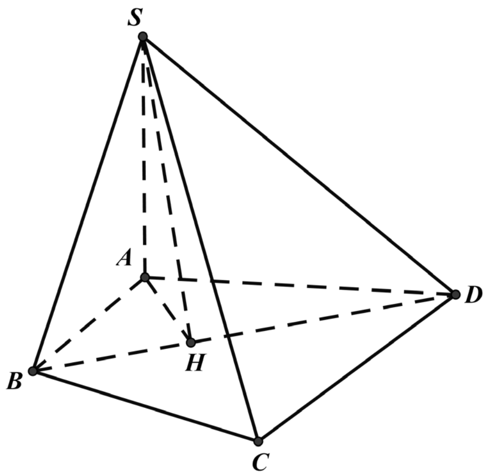
$V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2 = \dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB = 5\sqrt{3}, BC = 3\sqrt{3}$, góc $\widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 90°$, $SA = 9$ và SA vuông góc với đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $66\sqrt{3}$, tính cotang của góc giữa mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và mặt đáy.



A. $\dfrac{20\sqrt{273}}{819}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{91}}{9}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{273}}{20}$. **D.** $\dfrac{9\sqrt{91}}{9}$

Lời giải



Có: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SA.S_{ABCD} \Leftrightarrow 66\sqrt{3} = \dfrac{1}{3}.9.S_{ABCD} \Rightarrow S_{ABCD} = 44\sqrt{3}$

Suy ra $\dfrac{1}{2}AB.AD + \dfrac{1}{2}BC.CD = 44\sqrt{3} \Leftrightarrow 5AD + 3CD = 44$. (1)

Áp dụng định lí Pitago trong 2 tam giác vuông $ABD; BCD$, ta có:

$AB^2 + AD^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2 \Leftrightarrow CD^2 - AD^2 = 48$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left[\begin{array}{l} AD = 4 \\ AD = \dfrac{47}{2} \end{array}\right.$

$AD = \dfrac{47}{2}$ không thỏa mãn do từ (1) ta có: $AD < \dfrac{44}{5} \Rightarrow AD = 4$.

Trong tam giác ABD, dựng $AH \perp BD$ lại có $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp SH$.

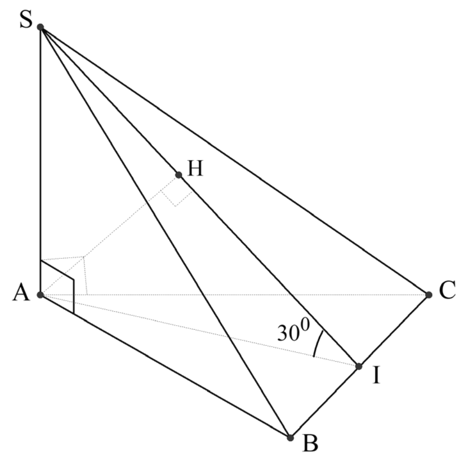
Vậy góc giữa (SBD) và đáy là góc $\widehat{SHA}$.

Dễ tính $BD=\sqrt{91}, AH=\dfrac{AB.AD}{BD}=\dfrac{20\sqrt{273}}{91}$, $\cot\widehat{SHA}=\dfrac{AH}{SA}=\dfrac{20\sqrt{273}}{819}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, $SA\perp(ABC)$. Mặt phẳng (SBC) cách A một khoảng bằng a và hợp với mặt phẳng (ABC) góc 30^0. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{8a^3}{9}$. **B.** $\dfrac{8a^3}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{12}$. **D.** $\dfrac{4a^3}{9}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm sủa BC suy ra góc giữa mp(SBC) và mp(ABC) là $\widehat{SIA}=30^0$.

H là hình chiếu vuông góc của A trên SI suy ra $d(A,(SBC))=AH=a$.

Xét tam giác AHI vuông tại H suy ra $AI=\dfrac{AH}{\sin 30^0}=2a$.

Giả sử tam giác đều ABC có cạnh bằng x, mà AI là đường cao suy ra $2a=x\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Diện tích tam giác đều ABC là $S_{ABC}=\left(\dfrac{4a}{\sqrt{3}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

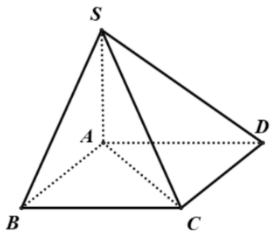
Xét tam giác SAI vuông tại A suy ra $SA=AI.\tan 30^0=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{3}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}}=\dfrac{8a^3}{9}$.

Câu 55: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SC=a\sqrt{3}$.

A. $V_{S.ABCD}=a^3$. **B.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $V_{S.ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Mà $(SAB)\cap(SAD)=SA$ nên $SA\perp(ABCD)$.

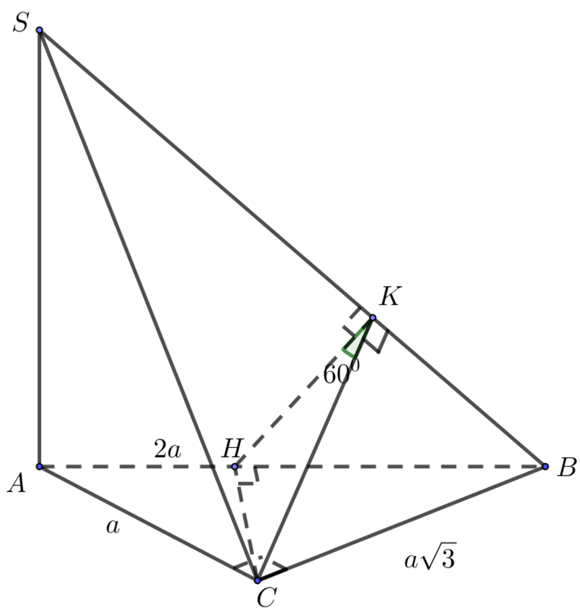
Ta có: $AC=a\sqrt{2}$; $SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}a.a^2=\dfrac{a^3}{3}$.

Câu 56: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại C, $AB=2a$, $AC=a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Trong ΔABC kẻ $CH\perp AB\Rightarrow CH\perp(SAB)\Rightarrow CH\perp SB(1)$.

$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=a\sqrt{3}$,

$BH.BA=BC^2$,

$\Rightarrow BH=\dfrac{3a}{2}$, $CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSAB kẻ $HK\perp SB\Rightarrow CK\perp SB(2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow HK\perp SB$.

Góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là $\widehat{CKH}=60^\circ$.

Trong vuông ΔCKH có $HK=CH.\cot 60^\circ=\dfrac{a}{2}$, $BK=\sqrt{BH^2-HK^2}=a\sqrt{2}$.

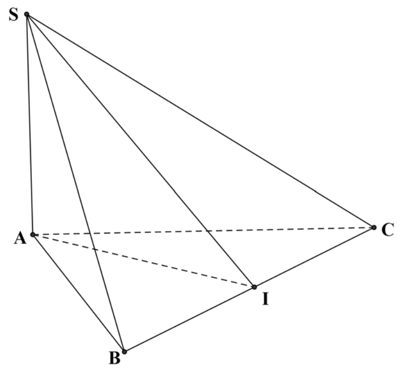
$\Delta SAB \backsim \Delta HKB(g.g)$ nên $\dfrac{SA}{HK}=\dfrac{AB}{BK}=\dfrac{2a}{a\sqrt{2}}\Rightarrow SA=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Thể tích hình chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{3}\dfrac{a}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{2}.a.\sqrt{3}.a=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 57: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC=2a$, $\widehat{BAC}=120^\circ$, biết $SA\perp(ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45°. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $\dfrac{a^3}{2}$. **B.** $a^3\sqrt{2}$. **<u>C</u>.** $\dfrac{a^3}{9}$. **D.** $\dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải



➢ Gọi I là trung điểm BC.

+ Do ΔABC cân tại A nên $BC\perp AI$

+ Mặt khác do $SA\perp(ABC)\Rightarrow BC\perp SA$

Suy ra $BC\perp SI$.

Do đó góc giữa (SBC) và đáy chính là góc $\widehat{SIA}=45^\circ$.

➢ Xét ΔAIB vuông tại I có $IB=a$, $\widehat{IAB}=60^\circ$, suy ra $IA=\dfrac{IB}{\tan 60^\circ}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

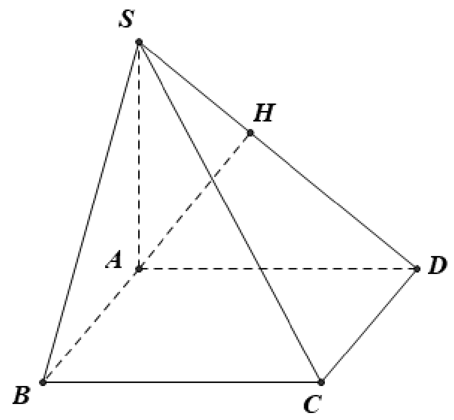
ΔSAI vuông tại A có $IA=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\widehat{SIA}=45^\circ$ nên ΔSAI vuông cân tại A, do đó $SA=IA=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

➢ Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}BC.AI.SA=\dfrac{a^3}{9}$.

Câu 58: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a$, $AD=2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\dfrac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a.

<u>A</u>. $\dfrac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. **B.** $\dfrac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng SD. Ta có

$\begin{cases} AH \perp SD \\ AH \perp CD \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d\left(A,(SCD)\right)$. Suy ra $AH = \frac{a}{2}$.

ΔSAD vuông tại A có đường cao AH nên

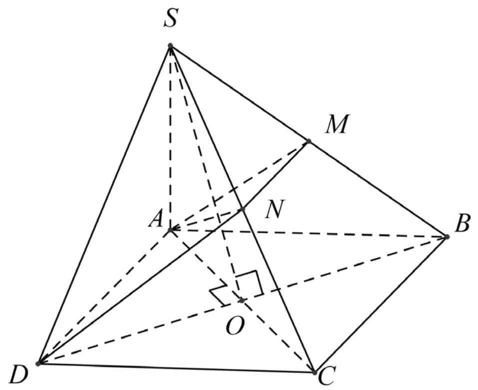
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AD^2} = \frac{15}{4a^2} \Rightarrow SA = \frac{2a\sqrt{15}}{15}.$$

Vậy $V = \frac{1}{3}AB.AD.SA = \frac{1}{3}a.2a.\frac{2a\sqrt{15}}{15} = \frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$.

Câu 59: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy $ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $ABCD$ bằng 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ADNM$.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{16}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{16}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$.

$AO \perp BD \Rightarrow SO \perp BD$. Nên góc của (SBD) và $ABCD$ là góc $\widehat{SOA} = 60^0$.

$V_{S.ADN} = \frac{1}{2}.V_{S.ADC} = \frac{1}{4}.V_{S.ABCD}$ và $V_{S.AMN} = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{8}V_{S.ABCD}$.

$\Rightarrow V_{S.ADMN} = V_{S.ADN} + V_{S.AMN} = \dfrac{3}{8} V_{S.ABCD}$.

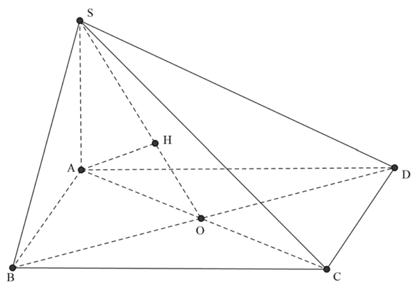
$SA = AO.\tan\widehat{SOA} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

$\Rightarrow V_{S.ADMN} = \dfrac{3}{8}.\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{16}$.

Câu 60: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích V của khối chóp đã cho.

A. $V = \dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, gọi H là hình chiếu của A lên SO.

Vì O là trung điểm của AC nên $d\left(C,(SBD)\right) = d\left(A,(SBD)\right)$

Ta có: $BD \perp AC; BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$;

$SO = (SAC) \cap (SBD)$

$$AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d\left(A,(SBD)\right) = d\left(C,(SBD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có: $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

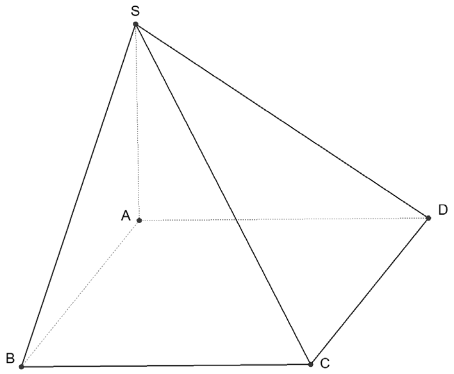
Trong tam giác SAO: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2} \Rightarrow SA = a$.

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SA = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 61: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt đáy, SD tạo với mặt phẳng (SAB) một góc bằng $30°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \sqrt{3}a^3$. **B.** $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{18}$. **D.** $V = \dfrac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Lời giải



Ta có hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh, SA vuông góc với mặt đáy nên $DA \perp AB$ và $DA \perp SA$. Suy ra $DA \perp (SAB)$. Vậy góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{DSA} = 30°$.

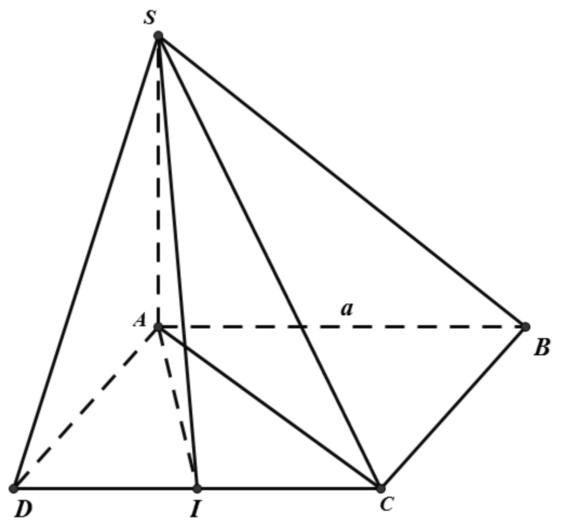
Ta có $SA = AD.\cot 30° = a\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 62: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, góc BAD bằng 120^0, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là 60^0. Tính thể tích V của chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{2a^3\sqrt{15}}{15}$. **B.** $V = \frac{a^3}{12}$. **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{13}}{12}$.

Lời giải



Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy nên $SA \perp mp(ABCD)$.

Ta có tam giác ABC đều cạnh a, gọi I là trung điểm của BC khi đó: $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Và góc giữa (SBC) và mặt phẳng đáy là $\widehat{SIA} = 60^0$.

Xét tam giác SAI ta có: $\dfrac{SA}{AI} = \tan\left(\widehat{SIA}\right) \Rightarrow SA = AI\tan\left(60^0\right) \Rightarrow SA = \dfrac{3a}{2}$.

Ta có diện tích đáy $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2\left(\dfrac{1}{2}AI.BC\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

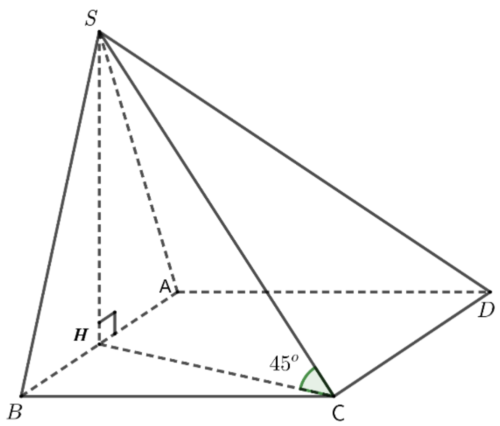
Thể tích của chóp $S.ABCD$ là: $V = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

DẠNG 5. MẶT BÊN VUÔNG GÓC VỚI ĐÁY

Câu 63: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng đáy bằng 45^o. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB, ΔSAB cân tại $S \Rightarrow SH \perp AB$

$$\left.\begin{array}{l}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\subset(SAB);SH\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$$

$\widehat{\left(SC;(ABCD)\right)} = \widehat{SCH} = 45^o \Rightarrow \Delta SHC$ vuông cân tại H

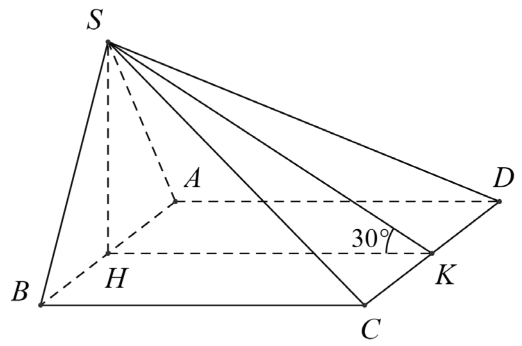
$$\Rightarrow SH = HC = \sqrt{BC^2+BH^2} = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2};\ S_{ABCD} = AB^2 = a^2$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a^3\sqrt{5}}{6}$$

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SCD) tạo với đáy góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD.

Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right) = \widehat{SKH} = 30°$.

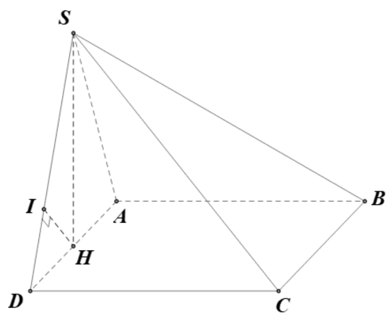
Xét ΔSHK vuông tại H, có $HK = \frac{SH}{\tan 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a.\frac{3a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 65: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $\sqrt{2}a$. Tam giác SAD cân tại S và mặt bên (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{4}{3}a^3$. Tính khoảng cách h từ B đến mặt phẳng (SCD).

A. $h = \frac{4}{3}a$ **B.** $h = \frac{3}{2}a$ **C.** $h = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$ **D.** $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AD. Nên $SH \perp AD$

$$\begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SH \perp (ABCD) \\ AD \perp SH \end{cases}$$

Ta có: $S_{ABCD} = 2a^2$

$$\Rightarrow SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{3.4a^3/3}{2a^2} = 2a$$

Gọi I là hình chiếu của H lên SD

$d(B;(SCD)) = d(A;(SCD)) = 2d(H;(SCD)) = 2IH$

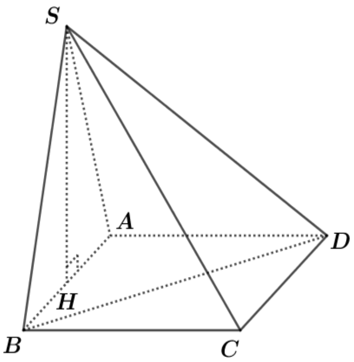
Mà $IH = \dfrac{SH.HD}{SD} = \dfrac{SH.HD}{\sqrt{SH^2 + HD^2}} = \dfrac{2a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(2a)^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{2}{3}a$

Vậy $d\left(B;(SCD)\right) = \dfrac{4}{3}a$

Câu 66: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD bằng $\sqrt{21}$. Hãy cho biết cạnh đáy bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{21}$ **B.** 21 **C.** $7\sqrt{3}$ **D.** 7

Lời giải



Giả sử $AB = a$. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BA} = \dfrac{1}{2}a^2$

$\Leftrightarrow a^2\sqrt{2}.cos\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{1}{2}a^2 \Leftrightarrow cos\left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BD}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \sin(SA, BD) = \sqrt{\dfrac{7}{8}}$

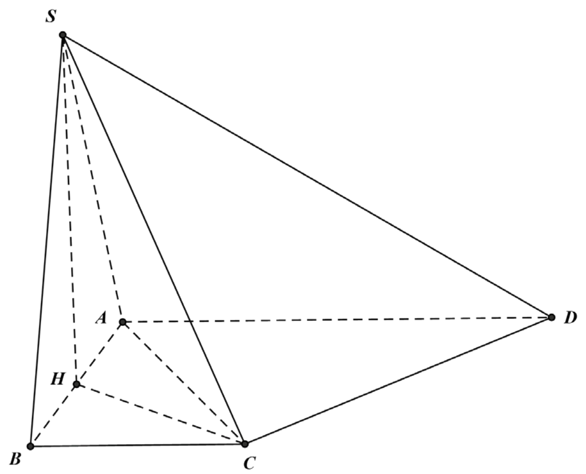
$V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SH.AB.AD = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3 \Rightarrow V_{SABD} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{6}SA.BD.d_{(SA,BD)}.\sin(SA, BD) = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{6}a.a\sqrt{2}.\sqrt{21}.\sqrt{\dfrac{7}{8}} = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^3 \Leftrightarrow a = 7$

Câu 67: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC = \dfrac{1}{2}AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a.

A. $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB, từ giả thiết ta có: $SH \perp (ABCD)$, $(SC,(ABCD)) = \widehat{SCH} = \alpha$.

Đặt $AB = x$, ta có: $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}$, $SH = HC.\tan\alpha = \sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}.\frac{\sqrt{15}}{5}$.

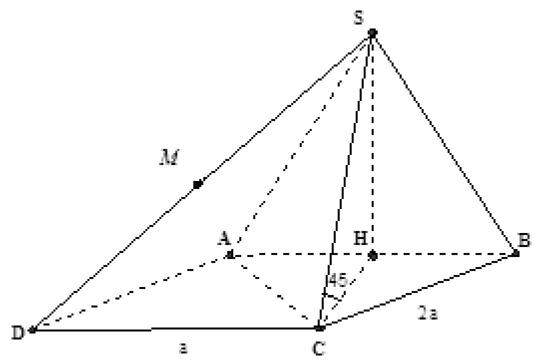
Mặt khác $SH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Vậy ta có: $\sqrt{\frac{x^2}{4} + a^2}.\frac{\sqrt{15}}{5} = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = a$.

$S_{ABCD} = \frac{(AD+BC).AB}{2} = \frac{3a^2}{2}$; $S_{ACD} = \frac{2}{3}S_{ABCD} = a^2$; $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SH.S_{ACD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 68: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật; $AB = a; AD = 2a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mp$(ABCD)$ bằng $45°$. Gọi M là trung điểm của SD. Tính theo a khoảng cách d từ điểm M đến (SAC).

A. $d = \frac{a\sqrt{1513}}{89}$. **B.** $d = \frac{2a\sqrt{1315}}{89}$. **C.** $d = \frac{a\sqrt{1315}}{89}$. **D.** $d = \frac{2a\sqrt{1513}}{89}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

Xét $\triangle BCH$ vuông tại B, có: $CH = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{17}}{2}$.

Xét $\triangle SHC$ vuông cân tại H, có: $SH=\dfrac{a\sqrt{17}}{2};SC=\dfrac{a\sqrt{34}}{2}$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H, có: $SA=\sqrt{\dfrac{17a^2}{4}+\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B, có: $AC=\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$.

$\Rightarrow S_{\triangle SAC}=\dfrac{\sqrt{89}}{4}a^2$.

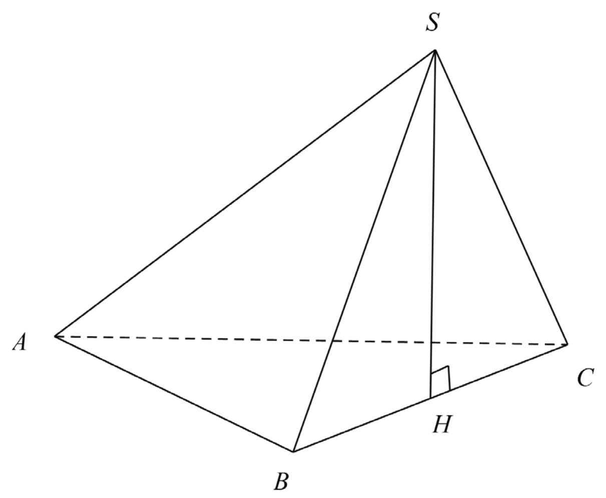
Ta có: $V_{S.ABCD}=V=\dfrac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\dfrac{a^3\sqrt{17}}{3}$; $V_{S.ACD}=\dfrac{1}{2}V=\dfrac{a^3\sqrt{17}}{6}$.

$V_{S.ACM}=\dfrac{1}{2}V_{S.ACD}=\dfrac{a^3\sqrt{17}}{12}$. Mà $V_{S.MAC}=\dfrac{1}{3}.d.S_{\triangle SAC}=\dfrac{\sqrt{89}}{12}a^2.d\Rightarrow d=\dfrac{a\sqrt{1513}}{89}$.

Câu 69: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, $SB=a\sqrt{2}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A có: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{3}\right)^2}=2a$.

H là trung điểm của BC nên $BH=a$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có: $SH=\sqrt{SB^2-HB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2-a^2}=a$.

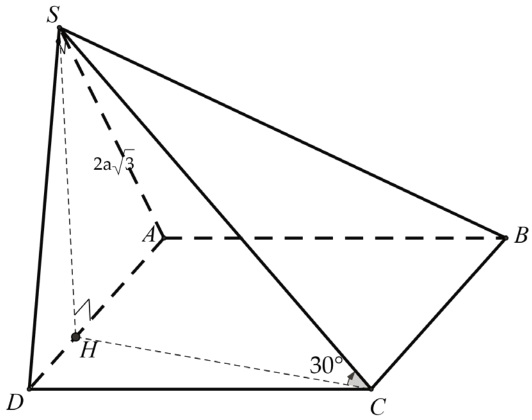
Diện tích đáy ABC là: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{1}{2}a^2\sqrt{3}$.

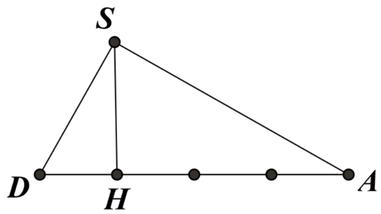
Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là: $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a.\dfrac{1}{2}.a^2\sqrt{3}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 70: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là điểm H thuộc cạnh AD sao cho $HA = 3HD$. Biết rằng $SA = 2a\sqrt{3}$ và SC tạo với đáy một góc bằng $30°$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = 8\sqrt{6}a^3$. **B.** $V = \dfrac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $V = 8\sqrt{2}a^3$. **D.** $V = \dfrac{8\sqrt{6}a^3}{9}$.

Lời giải





$SH^2 = HD.HA = 3HD^2 \Rightarrow SH = \sqrt{3}HD$

Có: $\begin{cases} \tan\widehat{SDH} = \dfrac{SH}{DH} = \sqrt{3} \\ \tan\widehat{SDH} = \dfrac{SA}{SD} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{SA}{SD} = \sqrt{3} \Rightarrow SD = \dfrac{SA}{\sqrt{3}} = 2a \Rightarrow DA = \sqrt{SD^2 + SA^2} = 4a$.

$DH = \dfrac{1}{4}DA = a$.

Tam giác SHC có $\tan\widehat{SCH} = \dfrac{SH}{HC} \Rightarrow \tan 30° = \dfrac{SH}{HC} \Rightarrow HC = \dfrac{SH}{\tan 30°} = 3a$.

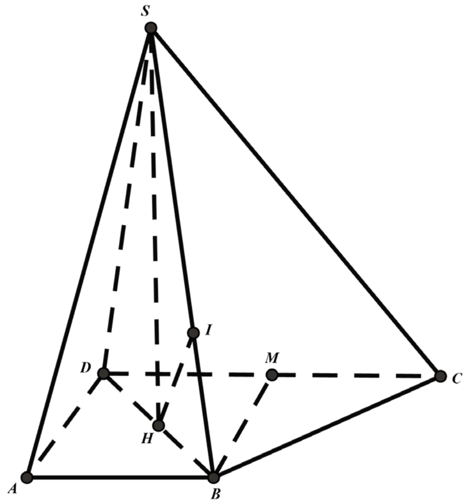
Tam giác DHC có $DC = \sqrt{DH^2 + HC^2} = 2\sqrt{2}a$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SH.AD.DC = \dfrac{1}{3}.\sqrt{3}a.4a.2\sqrt{2}a = \dfrac{8\sqrt{6}a^3}{3}$

Câu 71: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, $AB = AD = a$, $CD = 2a$. Hình chiếu của đỉnh S lên mặt $(ABCD)$ trùng với trung điểm của BD. Biết thể tích tứ diện $SBCD$ bằng $\dfrac{a^3}{\sqrt{6}}$. Khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) là?

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{6}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD thì ta có $ABMD$ là hình vuông cạnh a do đó $BC = BD = a\sqrt{2}$
$\Rightarrow CD^2 = 4a^2 = BC^2 + BD^2$ do đó tam giác BCD vuông cân tại B.

Gọi H là trung điểm của BD thì $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $V_{S.BCD} = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}BD.BC \Rightarrow SH = \frac{6.\frac{a^3}{\sqrt{6}}}{2a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Hạ $HI \perp SB$.

Vì $ABMD$ là hình vuông nên H là trung điểm của AM và ta có $AMCB$ là hình bình hành do đó $AH // BC \Rightarrow d\left(A;(SBC)\right) = d\left(H;(SBC)\right) = HI$.

Khi đó $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{4}{6a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{8}{3a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ hay $d\left(A;(SBC)\right) = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 72: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên đáy là điểm H trên cạnh AC sao cho $AH = \frac{2}{3}AC$; mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60^o. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là?

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Lời giải

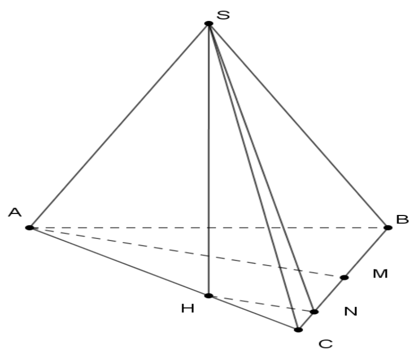
Gọi M là trung điểm của BC.

$N \in CM : \frac{CN}{CM} = \frac{CH}{CA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HN // AM$. Mà

ΔABC đều nên $AM \perp BC \Rightarrow HN \perp BC \Rightarrow BC \perp (SHN)$.

Nên $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SN;HN} = \widehat{SNH} = 60^o$.

Do ΔABC đều nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow HN = \frac{1}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.



ΔSHN vuông tại H có $SH = HN.\sin\widehat{SNH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sin 60^o = \dfrac{a}{4}$.

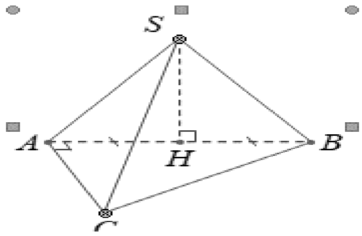
$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{4}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

Câu 73: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **<u>B</u>.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh AB. Do ΔSAB đều nên $SH \perp AB$



$$\left.\begin{array}{l}(SAB)\perp(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)=AB\\SH\subset(SAB),SH\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow SH\perp(ABC)$$

Vậy SH là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

ΔABC vuông tại A, ta có: $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2 - a^2} = a\sqrt{2}$

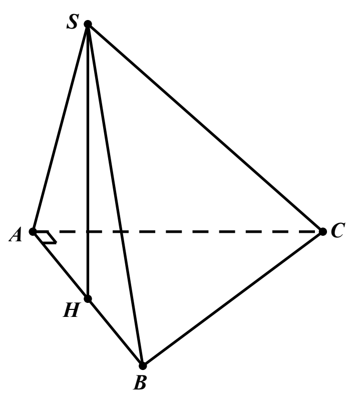
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$, $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 74: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và có $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$.

<u>A</u>. $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2-a^2}=a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là trung điểm đoạn AB thì $SH\perp AB$. Vì $(SAB)\perp(ABC)$ và $(SAB)\cap(ABC)=AB$ nên $SH\perp(ABC)$. Suy ra SH là chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

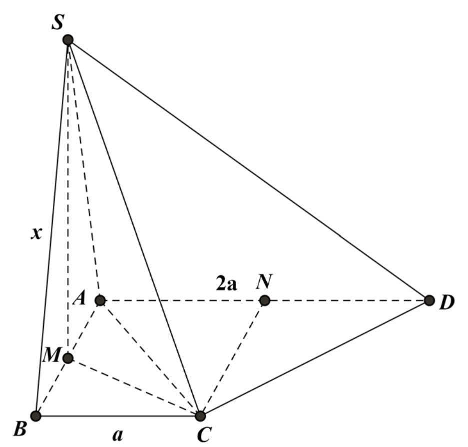
Tam giác SAH vuông tại H nên $SH=SA.\sin\widehat{SAH}=a.\sin 60^\circ=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SH=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 75: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $BC=\frac{1}{2}AD=a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy; góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$. Tính thể tích khối chóp $S.ACD$ theo a

A. $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{2}$. **B.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3}{3}$. **C.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **D.** $V_{S.ACD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Đặt $AB=x>0$, gọi M,N lần lượt là trung điểm AB, AD.

Tam giác SAB đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên SM chính là đường cao của hình chóp $S.ABCD$ và $BM=\frac{x}{2}, SM=\frac{x\sqrt{3}}{2}\Rightarrow CM=\sqrt{a^2+\frac{x^2}{4}}$

Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng α sao cho $\tan\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$ suy ra

$$\frac{SM}{CM}=\frac{\sqrt{15}}{5}\Rightarrow SM^2=\frac{3}{5}CM^2\Rightarrow\frac{3}{4}x^2=\frac{3}{5}\left(a^2+\frac{x^2}{4}\right)\Rightarrow x=a$$

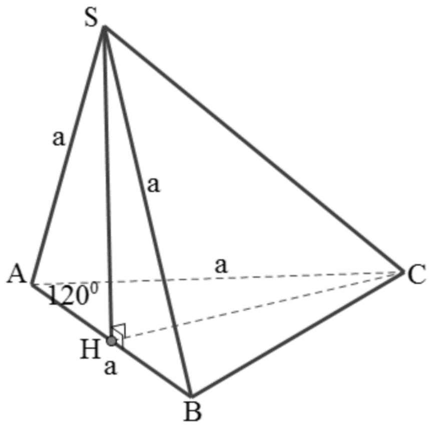
Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $CN = a \Rightarrow S_{ACD} = \frac{1}{2}AD.CN = a^2$

Vậy $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}SM.S_{\Delta ACD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 76: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A, $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = \frac{a^3}{8}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{a^3}{2}$. **D.** $V = 2a^3$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm đoạn $AB \Rightarrow SH \perp AB$ (vì tam giác SAB là tam giác đều).

$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \subset (SAB); SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

Nhận thấy ΔSAB là tam giác đều cạnh $a \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

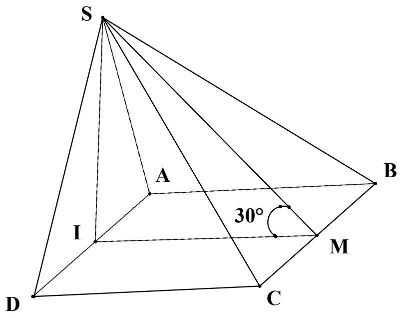
$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$.

Câu 77: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt bên SAD là tam giác đều cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ là $30°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



+ Trong tam giác đều SAD gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow SI \perp AD \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

+ Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow BC \perp IM$ (1).

Mặt khác do $SI \perp (ABCD) \Rightarrow BC \perp SI$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $BC \perp SM$.

+ Vậy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{SMI} = 30°$.

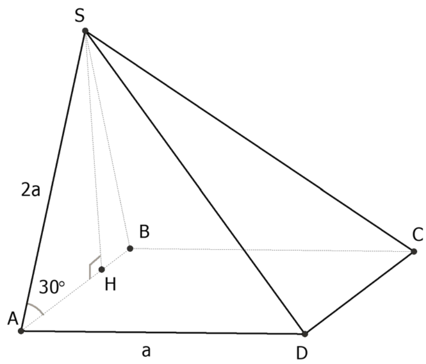
+ Xét tam giác vuông SIM có $IM = \dfrac{SI}{\tan 30°} = 3a$ (vì tam giác SAD là tam giác đều cạnh $2a$ nên $SI = a\sqrt{3}$).

Vậy, thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SI = \dfrac{1}{3}AD.\mathrm{BC}.SI = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 78: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, $\widehat{SAB} = 30^0$, $SA = 2a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{6}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \dfrac{a^3}{9}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên cạnh AB.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAB) \cap (ABCD) = AB$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Xét tam giác SAH vuông tại H ta có: $\sin \widehat{SAB} = \dfrac{SH}{SA} \Rightarrow SH = \sin 30^0.SA = a$.

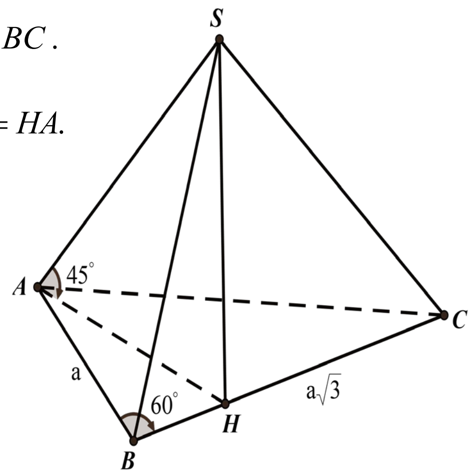
Mặt khác: $S_{ABCD} = AD^2 = a^2$.

Nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD}.a = \frac{1}{3} \cdot a^2.a = \frac{a^3}{3}$.

Câu 79: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, BC = a\sqrt{3}, \widehat{ABC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là một điểm thuộc cạnh BC. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) là 45^0. Giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



+Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABC), H \in BC$.

$+\left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \widehat{SAH} = 45^0 \Rightarrow \Delta SHA$ vuông cân $\Rightarrow SH = HA.$

$+V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.AH.\frac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC}$

$= \frac{1}{6}.AH.a.a\sqrt{3}.\sin 60^0 = AH.\frac{a^2}{4}$.

$+ V_{min} \Leftrightarrow AH_{min} \Leftrightarrow AH \perp BC$ tại H.

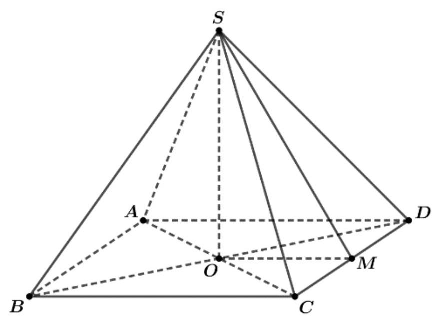
$+\sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = a.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{\min} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

DẠNG 6. THỂ TÍCH KHỐI CHÓP ĐỀU

Câu 80: Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Thể tích V của khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ **C.** $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Lời giải



Gọi O là tâm của đáy, gọi M là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} SO \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases}$ nên $(SOM) \perp BC$, suy ra $[(SCD),(ABCD)] = (SM, OM) = \widehat{SMO} = 60^0$.

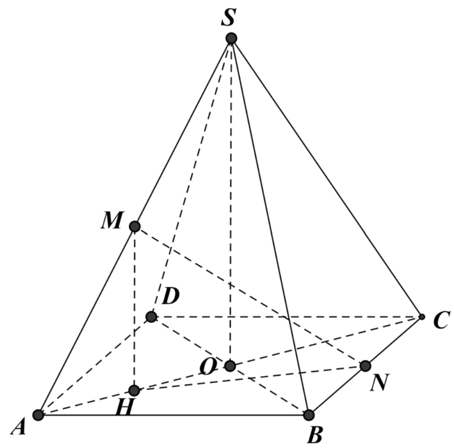
Có $OM = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$, $SO = OM \tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 81: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm của đáy là O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{2}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{3}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm AO. Khi đó góc giữa MN và $(ABCD)$ là $\widehat{MNH}$.

Ta có $HN = \sqrt{CN^2 + CH^2 - 2CN.CH.\cos 45^0} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Suy ra $MH = HN.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{10}}{4}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{30}}{4}$.

Do đó $SO = 2MH = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

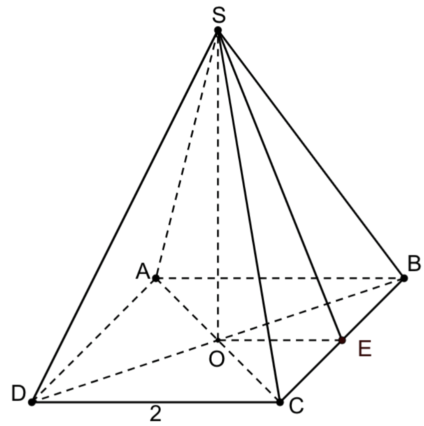
Câu 82: Nếu một hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2 và có diện tích xung quanh bằng $4\sqrt{3}$ thì có thể tích bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Xét hình chóp đều $S.ABCD$ như hình vẽ

Kẻ $OE \perp BC \Rightarrow E$ là trung điểm BC và $BC \perp (SOE)$



Do đó $BC \perp SE$

Xét ΔSOE vuông tại O, ta có

$SE^2 = SO^2 + OE^2$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SO^2 + 1}$

Mặt khác

$S_{xq} = 4S_{\Delta SBC}$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3} = 4.\dfrac{1}{2}.SE.BC$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3} = 2.\sqrt{SO^2 + 1}.2$

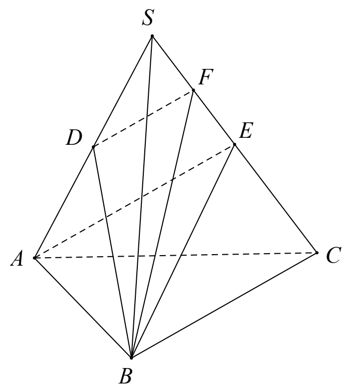
$\Leftrightarrow SO = \sqrt{2}\,(x > 0)$

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\sqrt{2}.2^2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ (đvtt)

Câu 83: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $SA = a$. Gọi D, E lần lượt là trung điểm của SA, SC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a, biết BD vuông góc với AE.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{54}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{27}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{21}}{27}$.

Lời giải



Gọi F là trung điểm $SE \Rightarrow BD \perp DF$; gọi $AB = x$

Ta có $BE^2 = BD^2 = AE^2 = \dfrac{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}{4} = \dfrac{2a^2 + 2x^2 - a^2}{4} = \dfrac{a^2 + 2x^2}{4}$

$$BF^2=\frac{2BS^2+2BE^2-SE^2}{4}=\frac{2a^2+\frac{a^2+2x^2}{2}-\frac{a^2}{4}}{4}=\frac{9a^2+4x^2}{16}$$

$$BF^2=BD^2+DF^2\Leftrightarrow BF^2=\frac{5BD^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{9a^2+4x^2}{16}=\frac{5}{4}.\frac{a^2+2x^2}{4}\Leftrightarrow 9a^2+4x^2=5a^2+10x^2\Leftrightarrow 4a^2=6x^2\Rightarrow x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Gọi H là hình chiếu của S lên (ABC) khi đó H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$$\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$$

Tam giác ABC đều có cạnh là $x\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{7}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{6}=\frac{a^3\sqrt{21}}{54}$

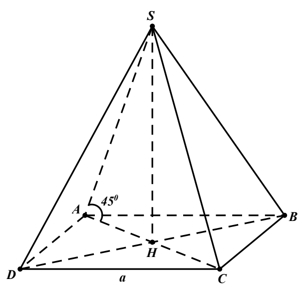
Hoặc sử dụng công thức tính thể tích chóp tam giác ABC đều có cạnh bên bằng a, cạnh đáy bằng x

$$V_{S.ABC}=\frac{x^2.\sqrt{3a^2-x^2}}{12}=\frac{\frac{2a^2}{3}\sqrt{3a^2-\frac{2a^2}{3}}}{12}=\frac{a^3\sqrt{21}}{54}$$

Câu 84: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB=a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên đáy $ABCD$ là hình vuông và chân đường cao H trùng với tâm của hình vuông $ABCD$.

Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ là $S_{ABCD}=a^2$.

Nhận thấy HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (ABC). Vì thế $(SA,(ABC))=(SA,HA)$ $=\widehat{SAH}$. Suy ra $\widehat{SAH}=45°$.

Xét tam giác ABC vuông tại B, ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$. Suy ra $HA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

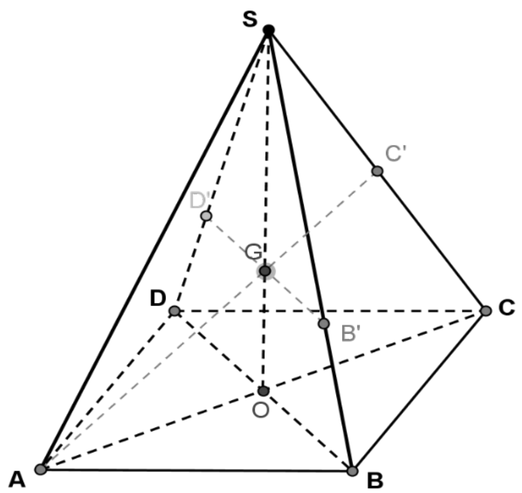
Tam giác SHA vuông tại H và có $\widehat{SAH}=45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại H. Suy ra SH $=HA=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V=\dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SH=\dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Câu 85: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ độ dài cạnh đáy là a. Biết rằng mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC, cắt cạnh SB tại B' với $\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{2}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có: $\left.\begin{array}{l}BD\perp AC\\BD\perp SO\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$

Mà $(P)\perp SC\Rightarrow(P)//BD$

Trong (SAC), gọi $\{G\}=AC'\cap SO\Rightarrow GB'//BD\Rightarrow\dfrac{SG}{SO}=\dfrac{SB'}{SB}=\dfrac{2}{3}$

Suy ra G là trọng tâm $\Delta SAC\Rightarrow C'$ là trung điểm SC

Nên ΔSAC là tam giác đều cạnh $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow SO=a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow V_{SABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\dfrac{1}{3}a^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$

CHƯƠNG **VIII**

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

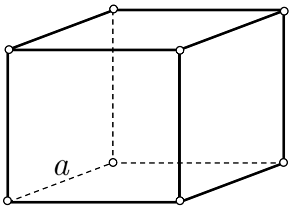
BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

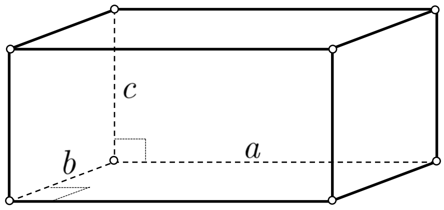
III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\text{ chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$ • Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$





Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.

- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Câu 1: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ

A. $V = 3a^3\sqrt{2}$ **B.** $V = a^3\sqrt{2}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$

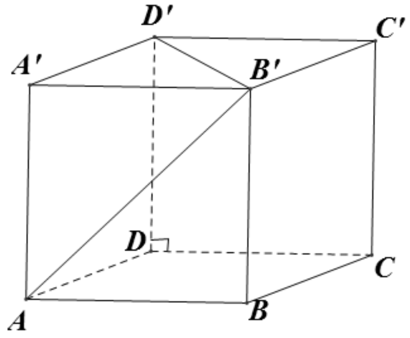
Câu 2: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'C = 3a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 2a^3$. **B.** $V = \sqrt{2}a^3$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{5}a^3$. **D.** $2\sqrt{2}a^3$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$ (tham khảo hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



A. $V = a^3\sqrt{2}$. **B.** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{10}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 5: Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3}{2}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{3a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2CD, AD = CD = a\sqrt{2}, AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $12a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Câu 9: Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết $AA' = 2a; AB = 3a; AC = 4a$ và $AB \perp AC$.

A. $12a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $24a^3$. **D.** $8a^3$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA' = 4a$, $AC = 2a$, $BD = a$. Thể tích V của khối lăng trụ là

A. $V = 8a^3$. **B.** $V = 2a^3$. **C.** $V = \dfrac{8}{3}a^3$. **D.** $V = 4a^3$.

Câu 11: Cho hình hộp đứng có một mặt là hình vuông cạnh a và một mặt có diện tích là $3a^2$. Thể tích khối hộp là

A. a^3. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Câu 12: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB = a; BC = 2a; AC' = a\sqrt{21}$. Tính thể tích V của khối hộp đó?

A. $4a^3$. **B.** $16a^3$. **C.** $\dfrac{8}{3}a^3$. **D.** $8a^3$.

Câu 13: Hình lập phương có độ dài đường chéo bằng 6 thì có thể tích là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $54\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** 8.

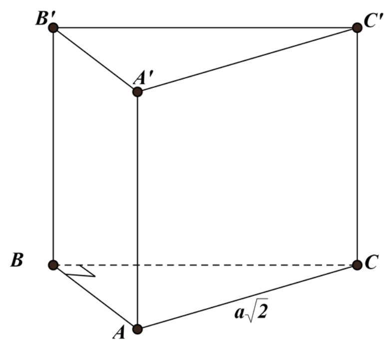
Câu 14: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a, AB = 3a, AC = 5a$. Thể tích của khối hộp đã cho là

A. $5a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $15a^3$.

Câu 15: Cho hình hộp đứng có cạnh bên độ dài $3a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc $60°$. Khi đó thể tích khối hộp là

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ



A. $\dfrac{a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{a^3}{6}$.

C. a^3. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh $AC' = 2a\sqrt{3}$ .Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $4a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Câu 18: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a$ và mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{8}a^3$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **C.** $\dfrac{1}{4}a^3$. **D.** $\dfrac{1}{12}a^3$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích khối lăng trụ đó bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** a^3.

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều *ABC. A'B'C'* có $AB = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ *ABC. A'B'C'*.

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC = AB = 2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA = BC = a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB} = 30°$, biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = a^3\sqrt{6}$. **B.** $V = \frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{3}$. **D.** $V = 2a^3\sqrt{3}$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 27: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $16a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 28: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là $30°$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Câu 29: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Câu 30: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC'. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $V = a^3\sqrt{6}$. **D.** $V = \frac{7a^3}{8}$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $(A'BC)$ hợp với mặt đáy ABC một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 32: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ đứng, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a\sqrt{2}$, góc giữa mp $(AB'C')$ và mp(ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** a^3. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Câu 34: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABC') bằng a, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và $(BCC'B')$ bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 35: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B=a\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{4}$.

Câu 36: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{2}$

Câu 37: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng $60°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, cạnh $AB=a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **B.** $V=\dfrac{3}{4}a^3$. **C.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. **D.** $V=\sqrt{3}a^3$.

Câu 39: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Câu 40: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. $V = \frac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \frac{9a^3}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 41: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

DẠNG 2. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\frac{3a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$

Câu 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $\frac{3a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3}{4}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC = 2\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60^0 và $AC' = 4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{8}{3}$ **B.** $V = \frac{16}{3}$ **C.** $V = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $8\sqrt{3}$

Câu 46: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

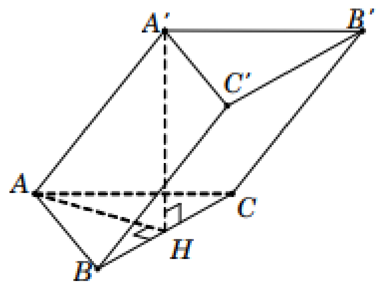
Câu 47: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

A. $\frac{9}{4}$ **B.** $\frac{27}{4}$ **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

Câu 48: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD}=60^\circ$, $\widehat{A'AB}=\widehat{A'AD}=120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Câu 49: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Góc tạo bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng 45^0 (hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



A. $V=\frac{\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V=1$. **C.** $V=\frac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V=3$.

Câu 50: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60°, thể tích khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 51: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC}=30°$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 52: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC=2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V=\frac{8}{3}$ **B.** $V=\frac{16}{3}$ **C.** $V=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V=\frac{16\sqrt{3}}{3}$

Câu 53: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $8a$ và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB',CC' lần lượt bằng $2a$ và $4a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{16}{3}\sqrt{3}a^3$. **B.** $8\sqrt{3}a^3$. **C.** $24\sqrt{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Câu 54: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 55: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 9.

Câu 56: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 57: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 58: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đường cao BH. Biết $A'H \perp (ABC)$ và $AB = 1, AC = 2, AA' = \sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{21}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Câu 59: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Câu 60: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng:

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3}{4}$

Câu 61: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 62: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=2a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC}=60°$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\dfrac{9a^3}{208}$. **B.** $\dfrac{3a^3}{26}$. **C.** $\dfrac{9a^3}{26}$. **D.** $\dfrac{27a^3}{208}$.

Câu 63: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng vào trọng tâm G của tam giác ABC. Biết tam giác $A'BB'$ có diện tích bằng $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{6a^3\sqrt{2}}{7}$ **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{7}}{8}$ **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{5}}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 64: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA'=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=2a^2\sqrt{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Câu 65: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA'=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $2a^3\sqrt{6}$.

Câu 66: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

A. $V=a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **B.** $V=\dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V=a^3$.

Câu 67: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB=a$, $AA'=2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 68: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $\dfrac{2a}{3}$, hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Câu 69: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3.\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3.\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 70: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 71: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ACBD$ là hình thoi cạnh a, biết $A'.ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với mặt đáy một góc $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là :

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 72: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 73: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 74: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC}=120°$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{3a^3}{2}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Câu 75: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM=2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V=a^3$. **C.** $V=\frac{3a^3}{2}$. **D.** $V=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

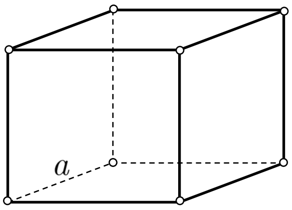
BÀI 4: KHOẢNG CÁCH

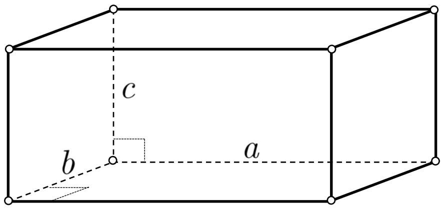
III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ ĐỨNG

Thể tích khối lăng trụ $\boxed{V_{\text{lăng trụ}} = S_{\text{đáy}}.\text{ chiều cao}}$

- Thể tích khối lập phương $\boxed{V = a^3}$ • Thể tích khối hộp chữ nhật $\boxed{V = abc}$





Hình lăng trụ đứng và hình lăng trụ đều:

- **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy. Do đó các mặt bên của hình lăng trụ đứng là các hình chữ nhật và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy.
- **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Câu 1: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng $a^2\sqrt{3}$, khoảng cách giữa hai đáy của lăng trụ bằng $a\sqrt{6}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ

A. $V = 3a^3\sqrt{2}$ **B.** $V = a^3\sqrt{2}$ **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$ **D.** $V = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$

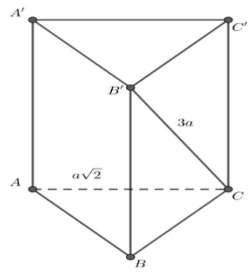
Lời giải

Thể tích khối lăng trụ là $V = B.h = a^2\sqrt{3}.a\sqrt{6} = 3a^3\sqrt{2}$

Câu 2: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'C = 3a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$.

A. $V = 2a^3$. **B.** $V = \sqrt{2}a^3$. **C.** $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $V = \dfrac{a^3}{6\sqrt{2}}$.

Lời giải



Đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = AC = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a$.

$\Delta BB'C$ vuông tại $B \Rightarrow BB' = \sqrt{(B'C)^2 - BC^2} = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

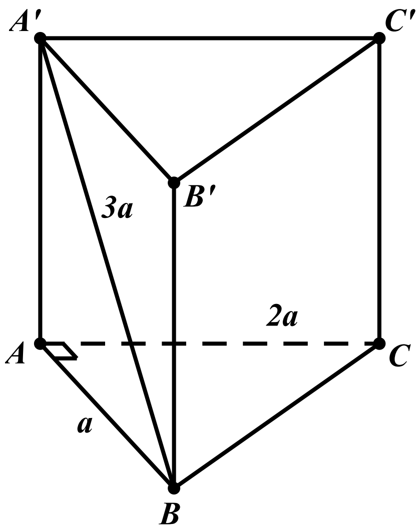
$V = \dfrac{1}{3} \cdot BB' \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} 2a\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a^2 = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ là $V = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}a^3}{3}$. **C.** $\sqrt{5}a^3$. **D.** $2\sqrt{2}a^3$.

Lời giải

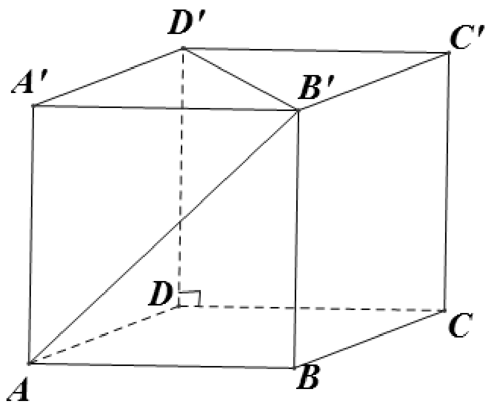


+ Diện tích đáy là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB.AC = \dfrac{1}{2}.a.2a = a^2$.

+ Tam giác ABA' vuông tại A nên có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

+ Thể tích cần tính là: $V = S_{ABC}.AA' = a^2.2a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$ (tham khảo hình vẽ). Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



A. $V = a^3\sqrt{2}$. **B.** $V = 2a^3\sqrt{2}$. **C.** $V = a^3\sqrt{10}$. **D.** $V = \dfrac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

$S_{ABCD} = AB.AD = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Trong tam giác ABB', $BB' = \sqrt{AB'^2 - AB^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = 2a$.

Vậy $V = BB'.S_{ABCD} = 2a.a^2\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 5: Lăng trụ tam giác đều có độ dài tất cả các cạnh bằng 3. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng:

A. $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Đáy hình lăng trụ là tam giác đều cạnh bằng 3 nên $S = \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$.

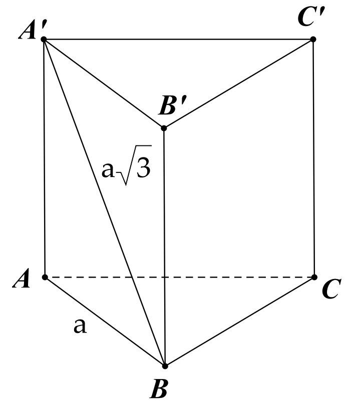
Chiều cao của hình lăng trụ bằng $h = 3$

Thể tích $V = S.h = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}.3 = \dfrac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$ và $A'B = a\sqrt{3}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3}{2}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Lời giải



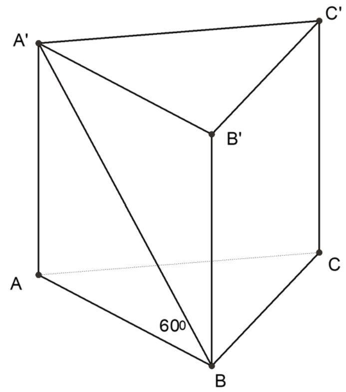
Ta có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $A'B$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60°. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{3a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{8}$.

Lời giải



Đáy là tam giác đều cạnh a, có diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì $AA' \perp (ABC) \Rightarrow \widehat{A'BA} = (A'B,(ABC)) = 60^\circ$, suy ra: $AA' = AB\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

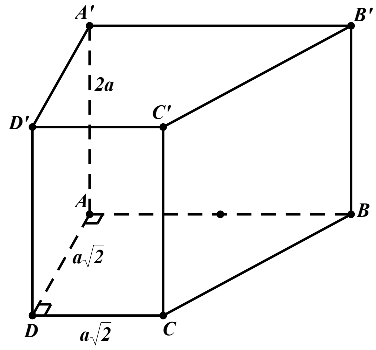
Vậy thể tích khối lăng trụ:

$$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{3} = \frac{3a^3}{4}.$$

Câu 8: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là hình thang vuông tại A và D, có $AB = 2CD, AD = CD = a\sqrt{2}, AA' = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $12a^3$. **B.** $6a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải



Diện tích hình thang $ABCD$ là:

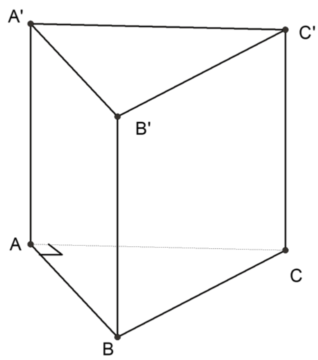
$$S_{ABCD}=\frac{(AB+CD).AD}{2}=\frac{(2CD+CD).AD}{2}=\frac{3CD.AD}{2}=\frac{3.a\sqrt{2}.a\sqrt{2}}{2}=3a^2.$$

Thể tích khối lăng trụ đã cho: $V=S_{ABCD}.AA'=3a^2.2a=6a^3$.

Câu 9: Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết $AA'=2a; AB=3a; AC=4a$ và $AB\perp AC$.

A. $12a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $24a^3$. **D.** $8a^3$.

Lời giải



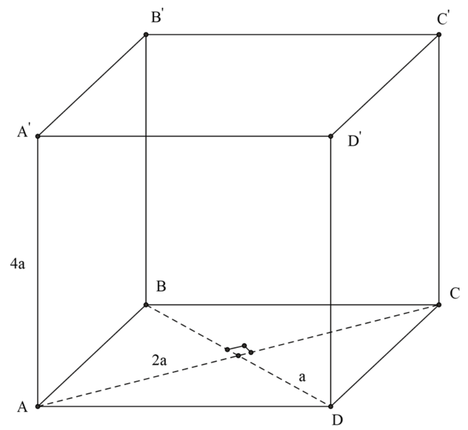
Ta có: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}3a.4a=6a^2$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=12a^3$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, biết $AA'=4a, AC=2a, BD=a$. Thể tích V của khối lăng trụ là

A. $V=8a^3$. **B.** $V=2a^3$. **C.** $V=\frac{8}{3}a^3$. **D.** $V=4a^3$.

Lời giải

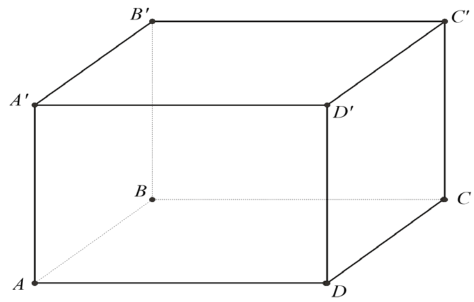


Thể tích V của khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD}.AA' = \frac{1}{2}.AC.BD.AA' = \frac{1}{2}.2a.a.4a = 4a^3$.

Câu 11: Cho hình hộp đứng có một mặt là hình vuông cạnh a và một mặt có diện tích là $3a^2$. Thể tích khối hộp là

A. a^3. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** $4a^3$.

Lời giải



Giả sử mặt $ABB'A'$ là hình vuông cạnh bằng a, mặt $ABCD$ có diện tích bằng $3a^2$.

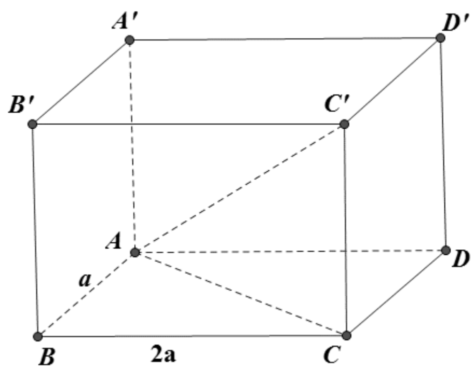
Do đó chiều cao $h = AA' = a$, diện tích đáy là $B = S_{ABCD} = 3a^2$.

Suy ra thể tích của khối hộp đó là $V = 3a^2a = 3a^3$.

Câu 12: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết $AB = a; BC = 2a; AC' = a\sqrt{21}$. Tính thể tích V của khối hộp đó?

A. $4a^3$. **B.** $16a^3$. **C.** $\frac{8}{3}a^3$. **D.** $8a^3$.

Lời giải



Xét tam giác vuông ABC, ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{5}$.

Xét tam giác vuông ACC', ta có: $CC'=\sqrt{AC'^2-AC^2}=4a$.

Vậy thể tích của khối hộp hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ là: $V=a.2a.4a=8a^3$.

Câu 13: Hình lập phương có độ dài đường chéo bằng 6 thì có thể tích là

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $54\sqrt{2}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Gọi cạnh của hình lập phương là $a\,(a>0)$.

$\Rightarrow$ đường chéo của hình lập phương là $a\sqrt{3}$.

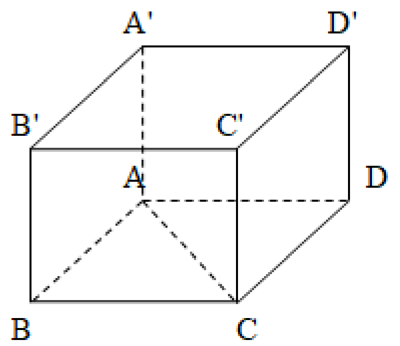
Theo bài ra ta có: $a\sqrt{3}=6\Rightarrow a=2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối lập phương là: $V=\left(2\sqrt{3}\right)^3=24\sqrt{3}$.

Câu 14: Cho khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA'=a, AB=3a, AC=5a$. Thể tích của khối hộp đã cho là

A. $5a^3$. **B.** $4a^3$. **C.** $12a^3$. **D.** $15a^3$.

Lời giải



Xét ΔABC vuông tại B, ta có: $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{(5a)^2-(3a)^2}=4a$.

$S_{ABCD}=AB.BC=3a.4a=12a^2$

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.AA'=12a^2.a=12a^3$.

Câu 15: Cho hình hộp đứng có cạnh bên độ dài $3a$, đáy là hình thoi cạnh a và có một góc $60°$. Khi đó thể tích khối hộp là

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

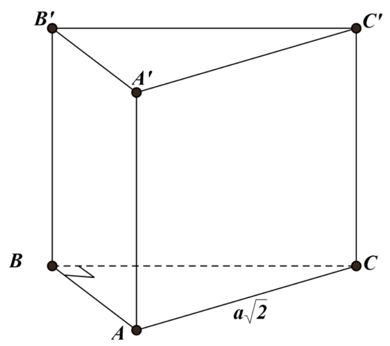
Lời giải

Ta có chiều cao $h=3a$.

Hình thoi cạnh a và có một góc $60°$ có diện tích $S=2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Thể tích khối hộp là $V=S.h=\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB'=a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$. Tính thể tích lăng trụ



A. $\frac{a^3}{3}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** a^3. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải

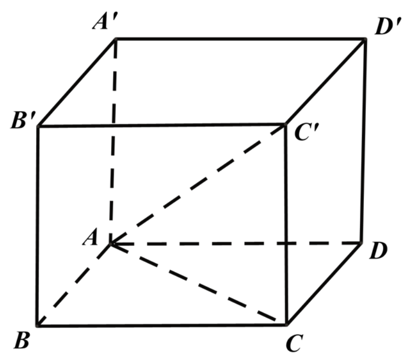
Trong $\Delta ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow AB = BC = a.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.BB' = \frac{1}{2}AB.BC.BB' = \frac{a^3}{2}.$

Câu 17: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, có $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh $AC' = 2a\sqrt{3}$ .Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $4a^3$. **B.** $3a^3$. **C.** $2a^3$. **D.** a^3.

Lời giải



Ta có: $AC'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2 \Rightarrow AA'^2 = 4a^2 \Rightarrow AA' = 2a$.

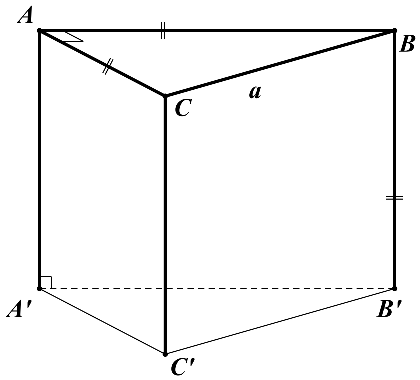
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}.AB.AD.AA' = \frac{1}{2}.2a.2a.2a = 4a^3$.

Câu 18: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A với $BC = a$ và mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{8}a^3$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. **C.** $\frac{1}{4}a^3$. **D.** $\frac{1}{12}a^3$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = \frac{BC\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 = \frac{a^2}{4}$.

Mặt bên $AA'B'B$ là hình vuông $\Rightarrow AA' = AB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C''} = AA'.S_{ABC} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 19: Cho khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh bằng a. Thể tích khối lăng trụ đó bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

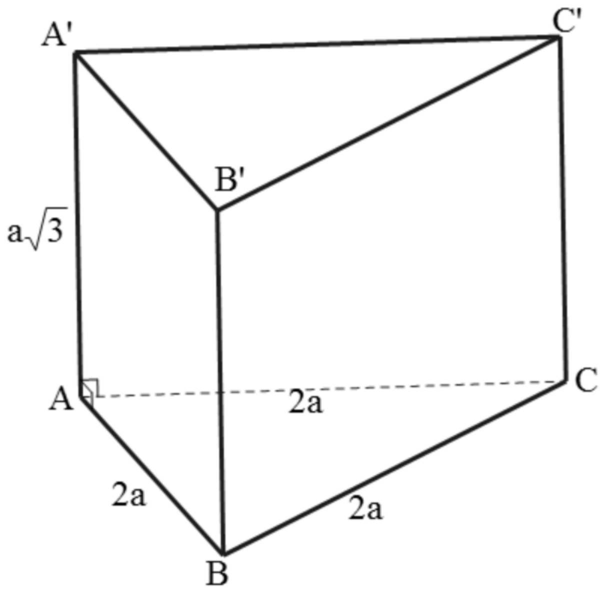
Lời giải

Diện tích đáy $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, chiều cao $h = a$. Khi đó $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $3a^3$. **B.** $\frac{a^3}{4}$. **C.** $\frac{3a^3}{4}$. **D.** a^3.

Lời giải

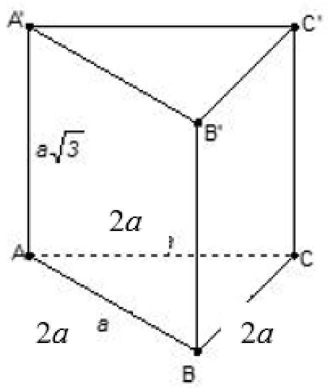


Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{3}.\dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = 3a^3$.

Câu 21: Cho hình lăng trụ tam giác đều *ABC. A'B'C'* có $AB = 2a, AA' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ *ABC. A'B'C'*.

A. $3a^3$. **B.** a^3. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải



Lăng trụ *ABC. A'B'C'* là lăng trụ đều nên ΔABC là tam giác đều và $AA' \perp (ABC)$.

- $AA' \perp (ABC) \Rightarrow$ chiều cao của lăng trụ là: $h = AA' = a\sqrt{3}$.
- ΔABC là tam giác đều có $AB = 2a \Rightarrow \Delta ABC$ diện tích là:

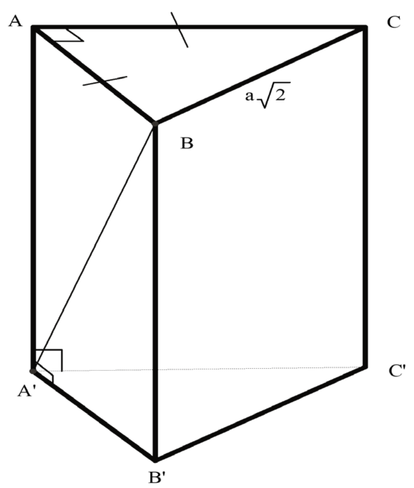
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ Thể tích khối lăng trụ là: $V_{S.ABC} = h.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3}.a^2\sqrt{3} = 3a^3$.

Câu 22: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = a\sqrt{2}$, $A'B$ tạo với đáy một góc bằng 60^0. Thể tích của khối lăng trụ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{2}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2}$.

Lời giải



ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=a\sqrt{2}\Rightarrow AB=AC=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.a=\frac{1}{2}a^2$.

$A'B$ tạo với đáy một góc bằng $60^0\Rightarrow \widehat{BA'B'}=60^0$.

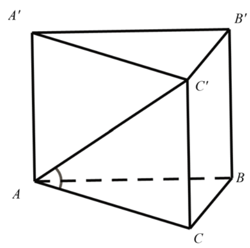
$\Delta_v BA'B'$: $\tan\widehat{BA'B'}=\frac{BB'}{A'B'}=\sqrt{3}\Rightarrow BB'=\sqrt{3}A'B'=a\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'}=BB'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$.

Câu 23: Cho khối lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông tại A. Cho $AC=AB=2a$, góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) bằng $30°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=2a^2$.

Hình chiếu vuông góc của AC' lên (ABC) là AC.

$\Rightarrow$ Góc giữa AC' và mặt phẳng (ABC) là góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và AC hay $\widehat{C'AC}$

Theo bài ra có $\widehat{C'AC}=30°$.

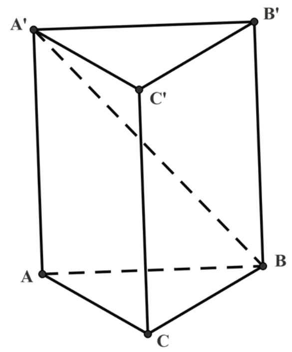
Xét tam giác $C'CA$ vuông tại C có $CC'=AC.\tan 30°=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=CC'.S_{ABC}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.2a^2=\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 24: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=a$, biết $A'B$ tạo với mặt phẳng (ABC) một góc 60^0. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. $2a^3$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{2}$.

Lời giải



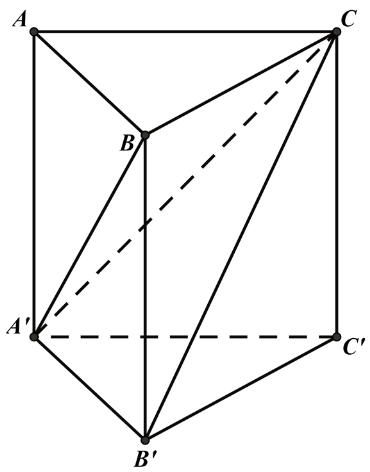
Góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{A'BA}=60^0 \Rightarrow A'A=AB.\tan 60^0=a\sqrt{3}$.

Có $S_{ABC}=\frac{1}{2}BA.BC=\frac{a^2}{2}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.A'A=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 25: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ACB}=30°$, biết góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{2\sqrt{5}}$. Cho khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và CC' bằng $a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=a^3\sqrt{6}$. **B.** $V=\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=a^3\sqrt{3}$. **D.** $V=2a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



* Ta có: $CC'//AA'\Rightarrow CC'//(AA'B'B)$

Mà $A'B\subset(AA'B'B)$, nên

$d(CC';A'B)=d(CC';(AA'B'B))=C'A'=a\sqrt{3}$

* Ta có: $AC=A'C'=a\sqrt{3}; AB=A'B'=a;$

Diện tích đáy là $B=dt(ABC)=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

* Dễ thấy $A'B'\perp(ACC'A')$

Góc giữa $B'C$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ là $\widehat{B'CA'}=\alpha$

$\sin\alpha = \dfrac{A'B'}{B'C} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow B'C = 2a\sqrt{5}$

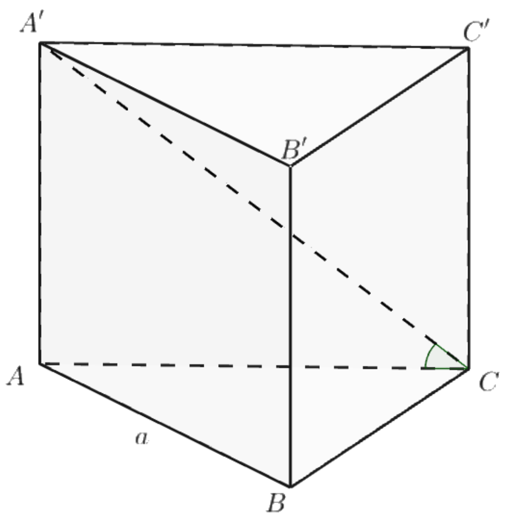
$CC' = \sqrt{B'C^2 - B'C'^2} = \sqrt{20a^2 - 4a^2} = 4a$

* Thể tích lăng trụ là $V = B.h$ với $h = CC'$ $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.4a = 2a^3\sqrt{3}.$

Câu 26: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Có: $\widehat{\left(A'C,(ABC)\right)} = \widehat{A'CA} = 45°$.

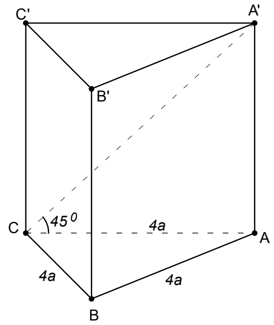
Xét tam giác $A'AC$ vuông tại A, ta có: $\tan\widehat{A'CA} = \dfrac{AA'}{AC} \Rightarrow AA' = a.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}.$

Câu 27: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 4a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $16a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và đáy là tam giác đều.

Ta có:

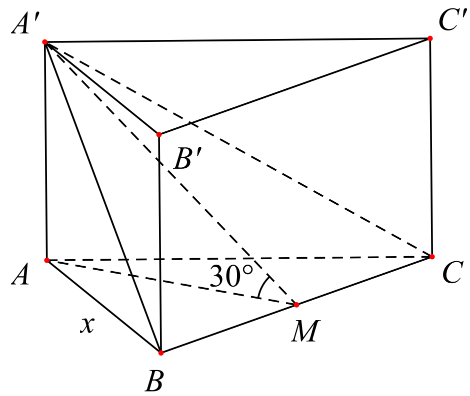
$A'A\perp(ABC)\Rightarrow\left(\widehat{A'C,(ABC)}\right)=\widehat{A'CA}=45^{\circ}\Rightarrow\Delta A'AC$ vuông cân tại $A\Rightarrow A'A=AC=4a$.

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{(4a)^2\sqrt{3}}{4}=4a^2\sqrt{3}\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=4a.4a^2\sqrt{3}=16a^3\sqrt{3}$.

Câu 28: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30°, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $8\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $8\sqrt{2}$.

Lời giải



Đặt $AB=x,(x>0)$, gọi M là trung điểm BC.

Ta có $\begin{cases}(A'BC)\cap(ABC)=BC\\ AM\perp BC\\ A'M\perp BC\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(A'BC),(ABC)}\right)=\widehat{A'MA}=30^{\circ}$.

Xét $\Delta A'AM$, có $A'M=\dfrac{AM}{\cos 30^{\circ}}=\dfrac{x\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2}{\sqrt{3}}=x$.

$S_{A'BC}=8\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}A'M.BC=8\Leftrightarrow x^2=16\Rightarrow x=4$

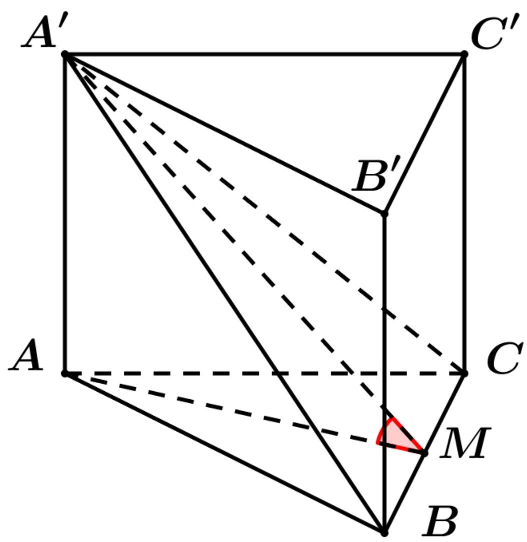
Suy ra $A'A=AM.\tan 30^{\circ}=\dfrac{4.\sqrt{3}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}}=2$; $S_{ABC}=\dfrac{16.\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'A.S_{ABC} = 2.4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

Câu 29: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có diện tích đáy bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{5a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$

Lời giải



Vì đáy ABC là tam giác đều có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$ cạnh đáy bằng a.

Gọi M trung điểm BC, ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$

Từ đó ta có $\widehat{((A'BC),(ABC))} = \widehat{(A'M, AM)} = \widehat{A'MA} = 60^0$.

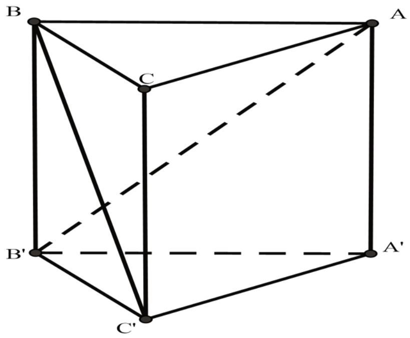
Xét $\Delta A'AM$ ta có $AA' = AM.\tan 60^0 = \frac{3a}{2}$

Thể tích lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 30: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và AB' vuông góc với BC'. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **B.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $V = a^3\sqrt{6}$. **D.** $V = \frac{7a^3}{8}$.

Lời giải



Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{y}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{z}=\overrightarrow{BB'}$, theo giả thiết $AB'\perp BC'$ nên

$$\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}=0\Leftrightarrow\left(\vec{z}-\vec{x}\right)\left(\vec{y}+\vec{z}\right)=0\Leftrightarrow\vec{z}.\vec{y}+\left|\vec{z}\right|^2-\vec{x}.\vec{y}-\vec{x}.\vec{z}=0\Leftrightarrow\left|\vec{z}\right|^2=\vec{x}.\vec{y}$$

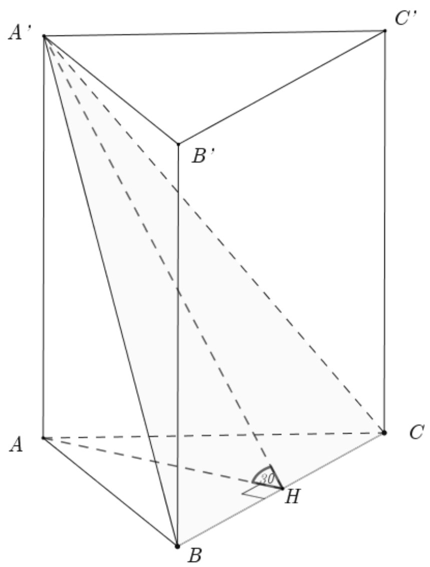
$$\Leftrightarrow\left|\vec{z}\right|^2=\left|\vec{x}\right|\left|\vec{y}\right|\cos60^o=\frac{a^2}{2}\Rightarrow\left|\vec{z}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin60^o.BB'=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{8}$

Câu 31: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $\left(A'BC\right)$ hợp với mặt đáy ABC một góc $30°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3}{8}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC. Suy ra $AH\perp BC$.

$A'H\perp BC$.

Mà $\left(ABC\right)\cap\left(A'BC\right)=BC$

$\Rightarrow$ Góc giữa $\left(A'BC\right)$ và $\left(ABC\right)$ bằng góc $\left(AH;A'H\right)=\widehat{AHA'}=30°$.

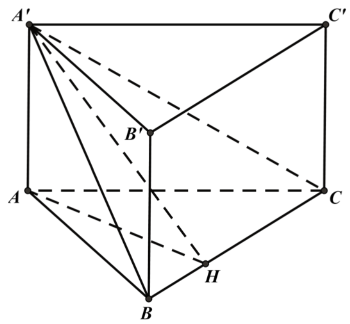
Ta có: ABC là tam giác đều cạnh bằng a nên $AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $A'A=AH.\tan 30^\circ=\dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=A'A.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 32: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A và $AB=a$, $AC=a\sqrt{3}$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 30°. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải



* Xác định góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng đáy:

Trong mặt phẳng (ABC), dựng $AH\perp BC$ với H nằm trên cạnh BC. Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $A'H\perp BC$. Vậy $\widehat{((A'BC);(ABC))}=\widehat{A'HA}=30^\circ$

* Xét tam giác ABC có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{3a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

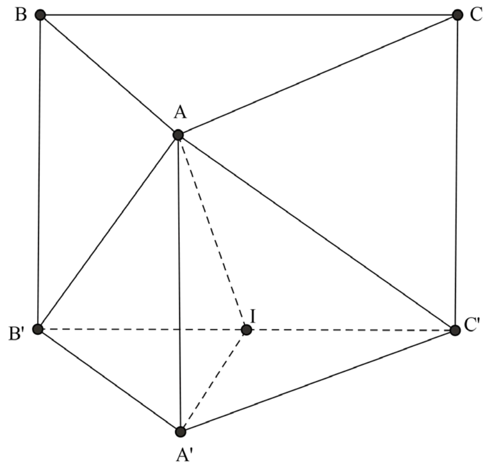
Diện tích B của tam giác ABC là: $B=\dfrac{AB.AC}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

* Xét tam giác $A'HA$ vuông tại A, ta có: $A'A=AH.\tan 30^\circ=\dfrac{a}{2}$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng $V=B.h=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}a^3}{4}$.

Câu 33: Cho hình lăng trụ đứng, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a\sqrt{2}$, góc giữa mp $(AB'C')$ và mp(ABC) bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ bằng

A. $3a^3$. **B.** $3\sqrt{3}a^3$. **C.** a^3. **D.** $\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của cạnh $B'C'$.

Ta có góc giữa mp$\left(AB'C'\right)$ và mp$\left(ABC\right)$ bằng góc giữa mp$\left(AB'C'\right)$ và mp$\left(A'B'C'\right)$

Ta có $B'C'=\left(AB'C'\right)\cap\left(A'B'C'\right)$

Vì ABC là tam giác vuông cân tại A nên hai mặt bên $ABB'A'$ và $ACC'A'$ là hai hình chữ nhật bằng nhau, do đó $AC'=AB'\Rightarrow \Delta AB'C'$ là tam giác cân tại A $\Rightarrow AI\perp B'C'$

Vì $\Delta A'B'C'$ là tam giác vuông cân tại A' nên $A'I\perp B'C'$. Như vậy góc giữa mp$\left(AB'C'\right)$ và mp$\left(ABC\right)$ bằng $\widehat{AIA'}=60^0$

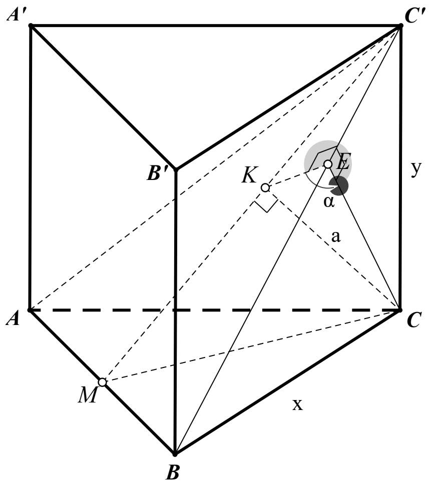
Ta có $A'I=\dfrac{1}{2}BC=a\Rightarrow AA'=A'I.\tan 60^0=a\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{ABC}=a\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^3\sqrt{3}$

Câu 34: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$. Biết khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng $\left(ABC'\right)$ bằng a, góc giữa hai mặt phẳng $\left(ABC'\right)$ và $\left(BCC'B'\right)$ bằng α với $\cos\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $V=\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Lời giải



Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và BC

Do $\begin{cases} AB \perp CC' \\ AB \perp CM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MCC') \Rightarrow (ABC') \perp (MCC')$.

Kẻ CK vuông góc với CM tại K thì ta được $CK \perp (ABC')$, do đó $CK = d(C;(ABC')) = a$.

Đặt $BC = x, CC' = y, (x > 0, y > 0)$, ta được: $CM = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{1}{CM^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{CK^2} \Leftrightarrow \frac{4}{3x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}\ (1).$$

Kẻ $CE \perp BC'$ tại E, ta được $\widehat{KEC} = \alpha$, $EC = \dfrac{KC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sqrt{1-\dfrac{1}{12}}} = a\sqrt{\dfrac{12}{11}}$.

Lại có $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{CE^2} = \dfrac{11}{12a^2}\ (2)$.

Giải $(1),(2)$ ta được $x = 2a, y = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

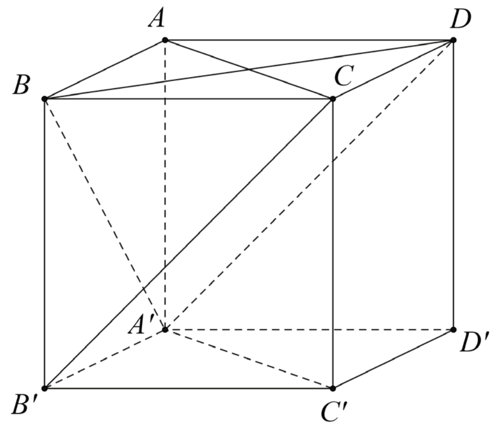
Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V = y.\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{4a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{2}$$

Câu 35: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'B = a\sqrt{6}$, đường thẳng $A'B$ vuông góc với đường thẳng $B'C$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$. **B.** $a^3\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{3a^3}{4}$. **D.** $\dfrac{9a^3}{4}$.

Lời giải



Dựng hình hộp $ABCD.ABCD$ khi đó tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

Đặt $AB = x \Rightarrow AD = x$

Tam giác ABD có góc $\widehat{BAD} = 120°$ áp dụng định lý côsin ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD.\cos BAD = x^2 + x^2 - 2x.x.\cos 120 = 3x^2$

Ta có: $A'B = a\sqrt{6} \Rightarrow A'D = a\sqrt{6}$

Ta có: $A'D // B'C \Rightarrow A'B \perp A'D \Rightarrow \Delta A'BD$ vuông tại A'

$\Rightarrow BD^2 = A'B^2 + A'D^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 12a^2 \Leftrightarrow x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = 2a$

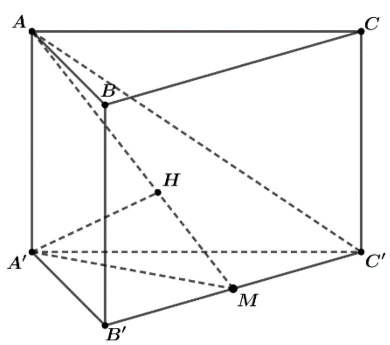
Chiều cao hình trụ $AA'^2 = A'B^2 - AB^2 = 6a^2 - 4a^2 = 2a^2 \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}AA'.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\frac{1}{2}.2a.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 36: Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{3a^3}{2}$

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M) \Rightarrow (AB'C') \perp (AA'M)$ theo giao tuyến AM.

Kẻ $A'H \perp AM$ trong mặt phẳng $(AA'M)$, suy ra $\Rightarrow A'H \perp (AB'C')$.

Vậy khoảng cách từ A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ là $A'H = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

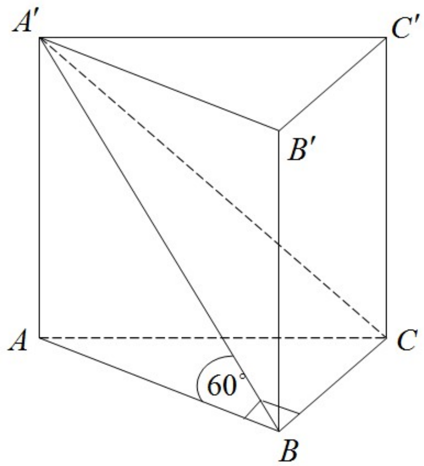
Ta có $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{A'M^2} \Rightarrow \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{1}{A'H^2} - \dfrac{1}{A'M^2} = \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow A'A = 2a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{A'B'C'} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 37: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60°. Tính thể tích V của khối lăng trụ.

A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = BC = a$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2}{2}$.

Góc giữa $(A'BC)$ và đáy là góc $\widehat{A'BA} = 60^\circ$.

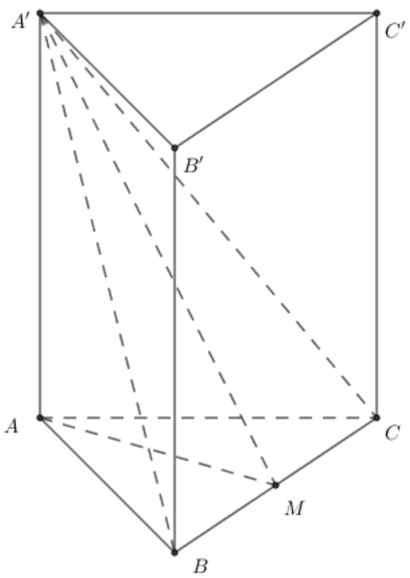
$A'A = AB.\tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'A = \dfrac{a^2}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$, cạnh $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^3$. **B.** $V=\dfrac{3}{4}a^3$. **C.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3$. **D.** $V=\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC suy ra $AM \perp BC$ (1)

Ta có $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$ (2)

Mặt khác $(ABC) \cap (A'BC) = BC$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\left(\widehat{(ABC);(A'BC)}\right) = \widehat{A'MA} = 60°$.

Vì tam giác ABC đều nên $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

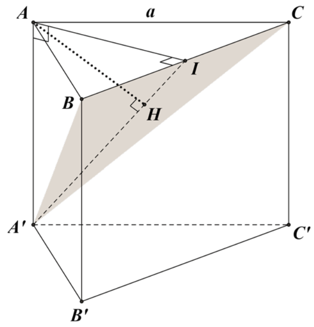
Ta có $AA' = AM.\tan 60° = \dfrac{3a}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 39: Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng:

A. $\dfrac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{16}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'I$. Khi đó ta có:

$d\left(A,\left(A'BC\right)\right) = AH = \dfrac{a}{2}$.

Trong tam giác vuông $AA'I$ ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4}{a^2} - \frac{4}{3a^2} = \frac{8}{3a^2}$$

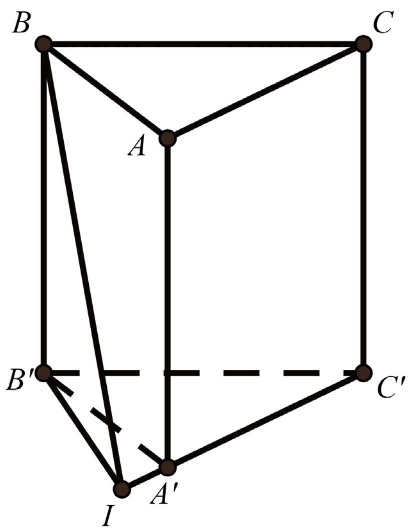
Suy ra: $AA' = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{a\sqrt{6}}{4} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Câu 40: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, mặt phẳng $(A'BC')$ tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho

A. $V = \dfrac{3a^3}{8}$. **B.** $V = \dfrac{9a^3}{8}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $V = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Lời giải



Hạ $B'I \perp A'C'$. Khi đó ta có $\left(\widehat{(A'BC'),(ABC)}\right) = \widehat{B'IB} = 60°$

Vì $\widehat{B'A'C'} = 120° \Rightarrow \widehat{B'A'I} = 60°$. Do đó $\sin 60° = \dfrac{B'I}{B'A} \Leftrightarrow B'I = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\tan\widehat{B'IB} = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow \tan 60° = \dfrac{BB'}{B'I} \Leftrightarrow BB' = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$

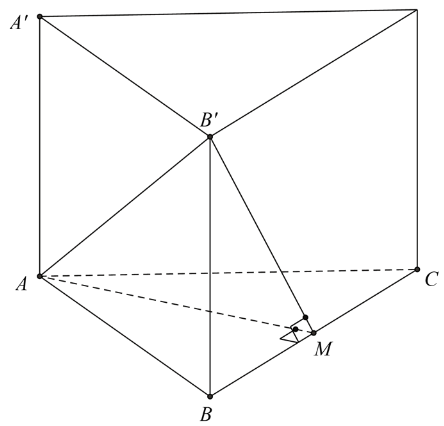
Mặt khác $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}.AI.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích khối chóp là $V = B.h = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a3}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 41: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Đường thẳng AB' tạo với mặt phẳng $(BCC'B')$ một góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ theo a.

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Do $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ tam giác đều nên ta có $AM \perp (BCC'B') \Rightarrow (AB',(BCC'B')) = \widehat{AB'M} = 30°$.

Xét tam giác vuông $AB'M$ ta có $\tan 30° = \dfrac{AM}{AB'} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{AM}{\tan 30°} \Leftrightarrow AB' = \dfrac{3a}{2}$.

Xét tam giác vuông $B'BM$ ta có $BB' = \sqrt{B'M^2 - BM^2} = \sqrt{\dfrac{9a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin 60°.BB' = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 42: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\dfrac{a}{6}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

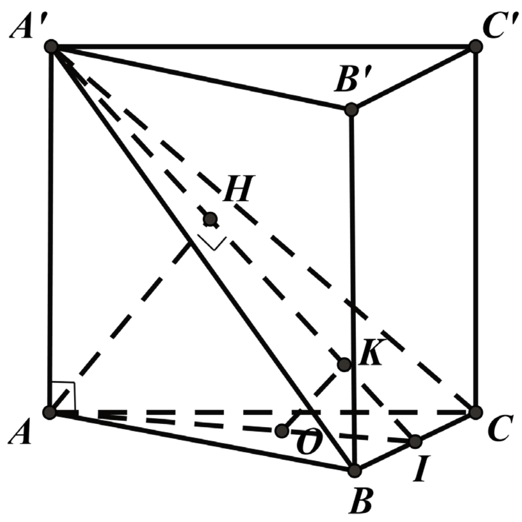
A. $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

Lời giải

Diện tích đáy là $B = S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Chiều cao là $h = d\left(\left(ABC\right);\left(A'B'C'\right)\right) = AA'$.

Do tam giác ABC là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu vuông góc của A lên $A'I$ ta có
$AH \perp \left(A'BC\right) \Rightarrow d\left(A;\left(A'BC\right)\right) = AH$



$$\frac{d\left(O;\left(A'BC\right)\right)}{d\left(A;\left(A'BC\right)\right)} = \frac{IO}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow d\left(O;\left(A'BC\right)\right) = \frac{d\left(A;\left(A'BC\right)\right)}{3} = \frac{AH}{3} = \frac{a}{6} \Rightarrow AH = \frac{a}{2}$$

Xét tam giác $A'AI$ vuông tại A ta có:

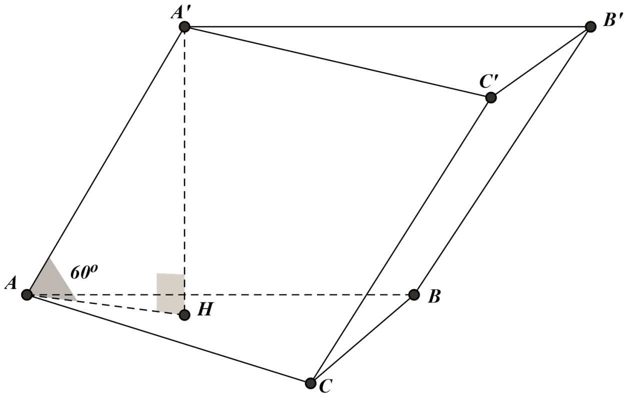
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow \frac{1}{AA'^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{16}.$$

DẠNG 2. THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 43: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a, các cạnh bên tạo với đáy góc $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **B.** $\dfrac{3a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\dfrac{a^3}{8}$

Lời giải



Kẻ $AH' \perp (ABC) \Rightarrow (A'A,(ABC)) = \widehat{A'AH} = 60°$.

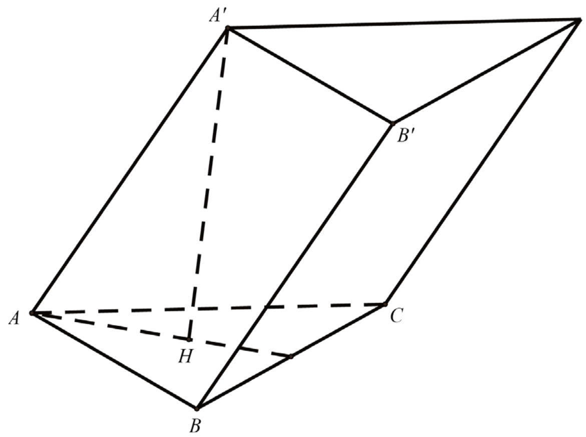
Xét $\Delta AHA'$: $\sin 60° = \dfrac{A'H}{AA'} \Leftrightarrow A'H = AA'.\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C' : V = S_{\Delta ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

Câu 44: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, biết $A'A = A'B = A'C = a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$?

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm tam giác ABC. Theo giả thiết ta có ABC là tam giác đều cạnh bằng a và $A'A = A'B = A'C = a$ nên $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh $a \Rightarrow A'H \perp (ABC)$ hay $A'H$ là đường cao của khối chóp $A'.ABC$.

Xét tam giác vuông $A'HA$ ta có $A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

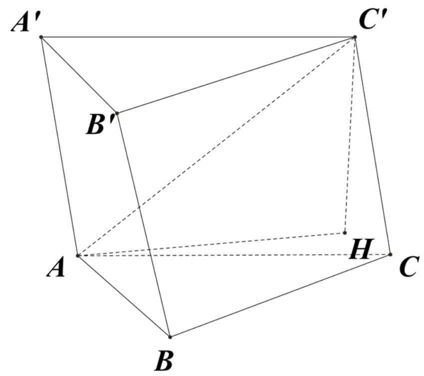
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.a.\sin 60° = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{a\sqrt{6}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

Câu 45: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC=2\sqrt{2}$, biết góc giữa AC' và (ABC) bằng 60^0 và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{8}{3}$ **B.** $V=\frac{16}{3}$ **C.** $V=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $8\sqrt{3}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của C' lên mặt phẳng (ABC), khi đó $C'H$ là đường cao

$\Rightarrow \widehat{AC',(ABC)}=\widehat{C'AH}=60^0$

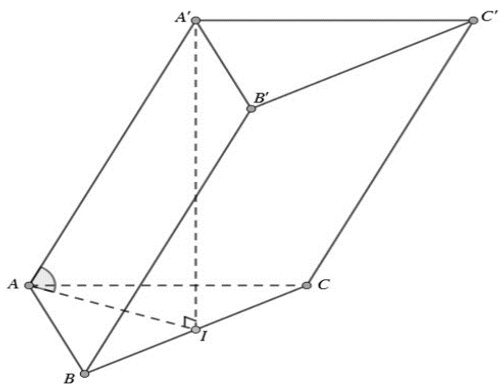
Xét tam giác vuông $AC'H$ ta có $C'H=C'A.\sin 60^0=2\sqrt{3}$

Khi đó $V_{ABC.A'B'C}=S_d.C'H=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\right)^2.2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

Câu 46: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Tính thể tích khối lăng trụ

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Lời giải



Ta có $A'I\perp(ABC)\Rightarrow AI$ là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC)

Nên $\left(\widehat{AA',(ABC)}\right)=\left(\widehat{AA',AI}\right)=\widehat{A'AI}=30^0$

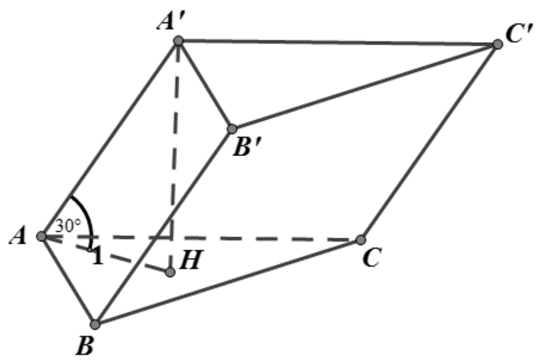
Ta có $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'I = AI\tan 30^0 = \dfrac{a}{2}, S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 47: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $30°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là:

A. $\dfrac{9}{4}$ **B.** $\dfrac{27}{4}$ **C.** $\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A' lên mặt đáy. Suy ra góc $\widehat{A'AH} = 30°$

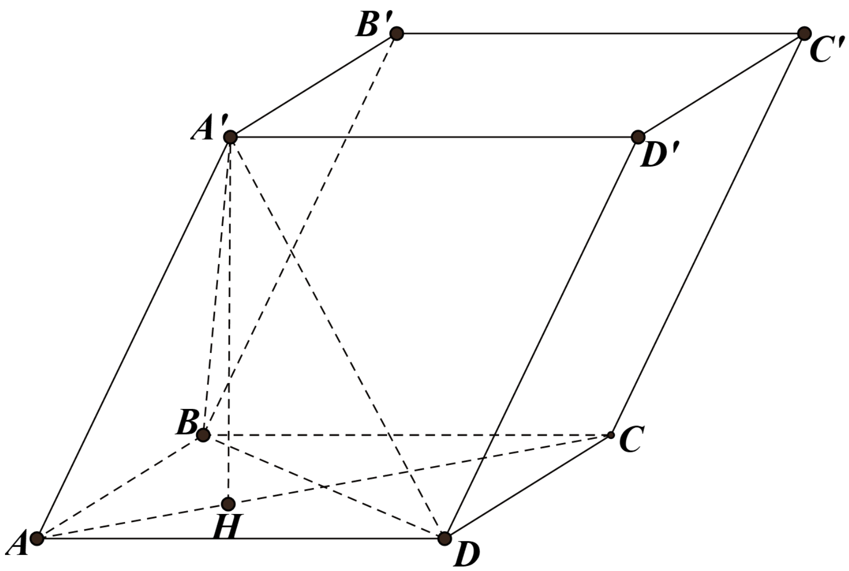
$\sin 30° = \dfrac{A'H}{A'A} \Rightarrow A'H = A'A.\sin 30° = 2\sqrt{3}.\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$

Khi đó: $V_{ABC.A'B'C} = 3^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{3} = \dfrac{27}{4}$.

Câu 48: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng $2a$. Biết $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = 120^\circ$. Tính thể tích V của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

A. $4\sqrt{2}a^3$. **B.** $2\sqrt{2}a^3$. **C.** $8a^3$. **D.** $\sqrt{2}a^3$.

Lời giải



Từ giả thuyết ta có các tam giác ΔABD, $\Delta A'AD$ và $A'AB$ là các tam giác đều.

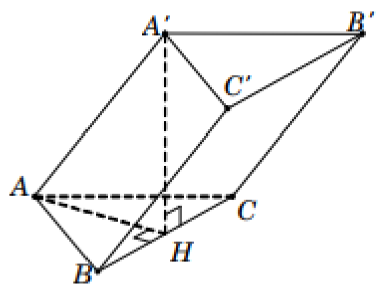
$\Rightarrow A'A = A'B = A'D$ nên hình chiếu H của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABD.

$\Rightarrow AH = \frac{2}{3}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$: $V = A'H.S_{ABCD} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a.2.\frac{4a^2.\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{2}a^3$.

Câu 49: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 2. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Góc tạo bởi cạnh bên $A'A$ với đáy bằng 45^0 (hình vẽ bên). Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



A. $V = \frac{\sqrt{6}}{24}$. **B.** $V = 1$. **C.** $V = \frac{\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = 3$.

Lời giải

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H$

Ta có

$S_{ABC} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

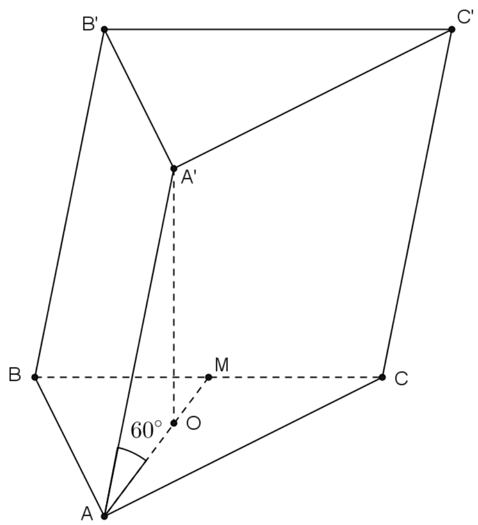
$$\begin{cases} AH = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ \tan 45^0 = \frac{A'H}{AH} \Rightarrow A'H = AH = \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \sqrt{3}.\sqrt{3} = 3$

Câu 50: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu của A' xuống (ABC) là tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Biết AA' hợp với đáy (ABC) một góc 60°, thể tích khối lăng trụ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm cạnh BC. Khi đó $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AO = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do $A'O \perp (ABC)$ tại điểm O nên AO là hình chiếu vuông góc của AA' xuống (ABC). Suy ra góc giữa đường thẳng AA' và (ABC) là góc $\widehat{A'AO}$, suy ra $\widehat{A'AO} = 60^\circ$.

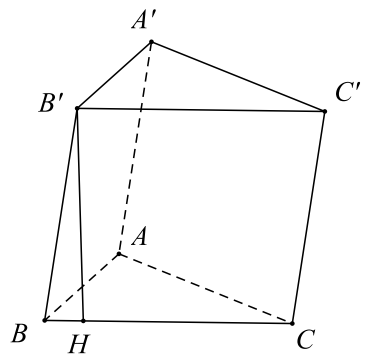
Xét $\Delta A'AO$ vuông tại O ta có $A'O = AO.\tan 60 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = A'O \cdot S_{\Delta ABC} = a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 51: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với đáy và $\widehat{B'BC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải



Ta có $(BCC'B')\perp(ABC)$ (gt).

Hạ $B'H\perp BC\Rightarrow B'H\perp(ABC)$ và $\widehat{B'BH}=\widehat{B'BC}=30°$

Suy ra chiều cao của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $h=B'H=BB'.\sin 30°=2a$.

Diện tích đáy là $S_{đáy}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

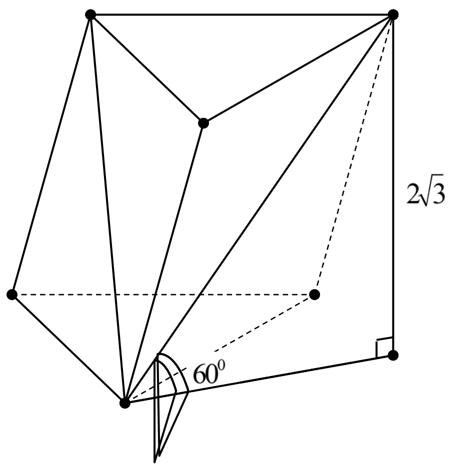
Thể tích của khối lăng trụ là: $V_{LT}=S_{đáy}.h=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp $A.CC'B'$ là: $V=\dfrac{1}{3}V_{LT}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 52: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $AC=2\sqrt{2}$. Biết AC' tạo với mặt phẳng (ABC) một góc $60°$ và $AC'=4$. Tính thể tích V của khối đa diện $ABCB'C'$.

A. $V=\dfrac{8}{3}$ **B.** $V=\dfrac{16}{3}$ **C.** $V=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Phân tích: Tính thể tích của khối đa diện $ABCB'C'$ bằng thể tích khối của lăng trụ $ABC.A'B'C'$ trừ đi thể tích của khối chóp $A.A'B'C'$.

Giả sử đường cao của lăng trụ là $C'H$. Khi đó góc giữa AC' mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{C'AH}=60°$.

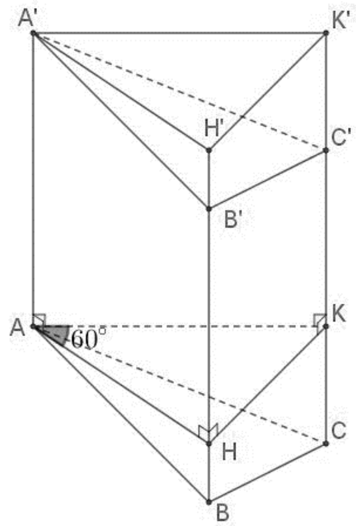
Ta có: $\sin 60° = \frac{C'H}{AC'} \Rightarrow C'H = 2\sqrt{3}; S_{\Delta ABC}=4$; $V_{ABC.A'B'C'} = C'H.S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3}.\frac{1}{2}.\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8\sqrt{3}$.

$V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3}C'H.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.V_{ABC.A'B'C'} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$; $V_{ABB'C'C} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = 8\sqrt{3} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Câu 53: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $8a$ và khoảng cách từ điểm A đến các đường thẳng BB', CC' lần lượt bằng $2a$ và $4a$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(ACC'A')$ bằng $60°$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{16}{3}\sqrt{3}a^3$. **B.** $8\sqrt{3}a^3$. **C.** $24\sqrt{3}a^3$. **D.** $16\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên BB', CC'.

Ta có $HA \perp BB'$, $KA \perp CC' \Rightarrow A'A \perp (AHK)$ do đó $\angle AHK = 60°$.

Khi đó $HK^2 = AK^2 + AH^2 - 2AK.AH.\cos 60° = 12a^2 \Rightarrow AK^2 = HK^2 + AH^2$. Suy ra tam giác AHK vuông tại H.

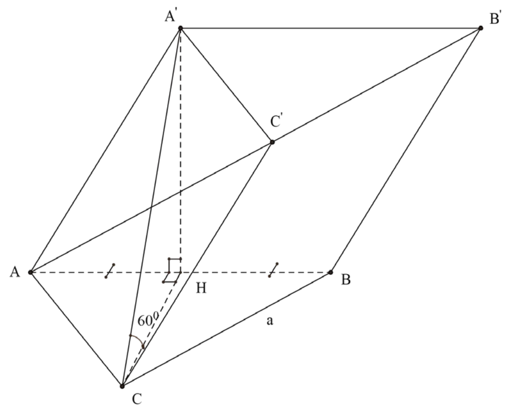
Gọi H', K' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' trên BB', CC'. Ta có $V_{A.BCKH} = V_{A.B'C'K'H'}$

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = V_{AHK.A'H'K'} = AA'.S_{AHK} = 16\sqrt{3}a^3$.

Câu 54: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm cạnh AB, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$. **D.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $A'H \perp (ABC) \Rightarrow HC$ là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \widehat{(A'C,(ABC))} = \widehat{(A'C,HC)} = \widehat{A'CH} = 60^0$.

$CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

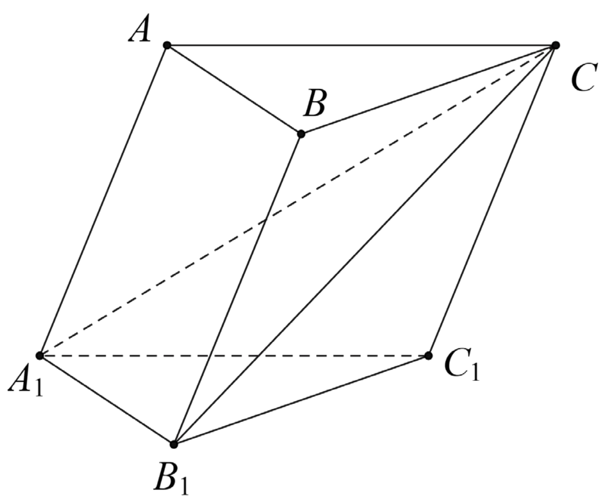
Xét tam giác vuông $A'HC$, ta có: $A'H = CH.\tan 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3} = \dfrac{3a}{2}$, $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Câu 55: Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có diện tích mặt bên (ABB_1A_1) bằng 4, khoảng cách giữa cạnh CC_1 đến mặt phẳng (ABB_1A_1) bằng 6. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 24. **D.** 9.

Lời giải



Ta có: $V_{C.ABB_1A_1} = \dfrac{1}{3}d\left(C,(ABB_1A_1)\right).S_{ABB_1A_1} = \dfrac{1}{3}.4.6 = 8$ (đvtt)

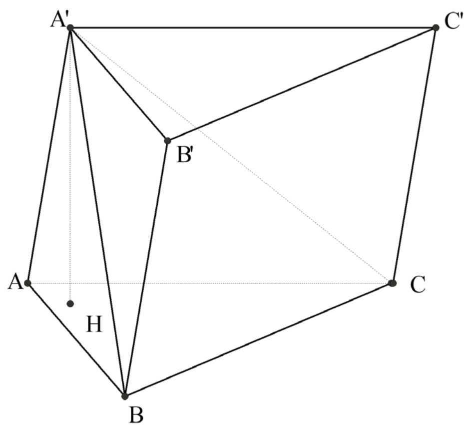
$V_{C.ABB_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - V_{C.C_1B_1A_1} = V_{ABC.A_1B_1C_1} - \dfrac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = \dfrac{2}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1}$

$\Rightarrow V_{ABC.A_1B_1C_1} = \frac{3}{2}.V_{C.ABB_1A_1} = \frac{3}{2}.8 = 12$ (đvtt)

Câu 56: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 1 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng 2. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên mp(ABC) suy ra $A'H$ là chiều cao của lăng trụ.

Xét khối chóp $A.A'BC$ có diện tích đáy $B = S_{A'BC} = 1$, chiều cao $h = d(A,(A'BC)) = 2$ suy ra thể

tích của khối chóp $A.A'BC$ là $V_{A.A'BC} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.1.2 = \frac{2}{3}$.

Mặt khác $\begin{cases} V_{A.A'BC} = V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.A'H = \frac{2}{3} \\ V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.A'H \end{cases} \Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3.\frac{2}{3} = 2$.

*** Cách khác.**

Ta thấy lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối chóp có thể thích bằng nhau là

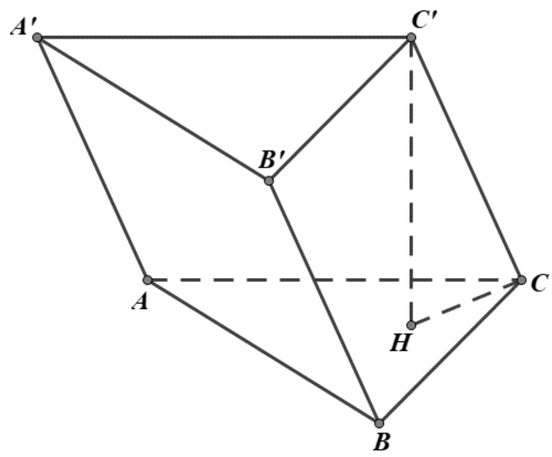
$A'.ABC,\ A'.BCB',\ A'.B'C'C$.

Mà $V_{A'.ABC} = V_{A.A'BC} = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}.1.2 = \frac{2}{3}$ suy ra $V_{ABC.A'B'C'} = 3V_{A.A'BC} = 3.\frac{2}{3} = 2$.

Câu 57: Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ và tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là?

A. $\frac{27}{4}$. **B.** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của C' xuống $mp(ABC)$, khi đó góc hợp bởi CC' và $mp(ABC)$ là $\widehat{C'CH}$. Theo đề bài: $\widehat{C'CH}=60°\Rightarrow C'H=C'C.\sin 60°=2\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

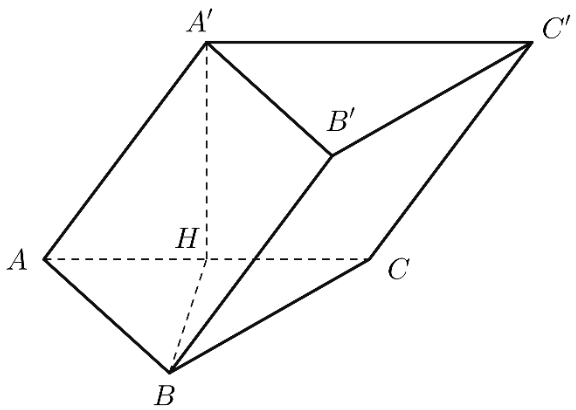
Lại có ΔABC đều cạnh bằng 3 nên $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}.3^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Do đó $V_{ABC.A'B'C'}=S_{ABC}.C'H=\frac{9\sqrt{3}}{4}.3=\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

Câu 58: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đường cao BH. Biết $A'H\perp(ABC)$ và $AB=1, AC=2, AA'=\sqrt{2}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

A. $\frac{\sqrt{21}}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{4}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông tại B có $AB=1; AC=2$ nên $BC=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$.

Độ dài của đường cao BH : $BH=\frac{AB.BC}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}:\sqrt{3}=\frac{1}{2}$.

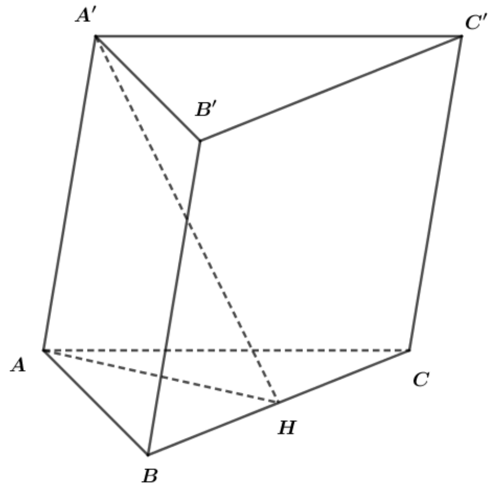
Khi đó độ dài đường cao $A'H$ của hình lăng trụ bằng : $A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{2-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng : $V=\frac{1}{2}AB.BC.A'H=\frac{1}{2}.1.\sqrt{3}\frac{\sqrt{7}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{4}$.

Câu 59: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu của A' xuống (ABC) là trung điểm BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3}{8}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC suy ra $A'H \perp (ABC)$

Ta có $(A'A,(ABC)) = (A'A, AH) = \widehat{A'AH} = 30^0$

Ta có $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

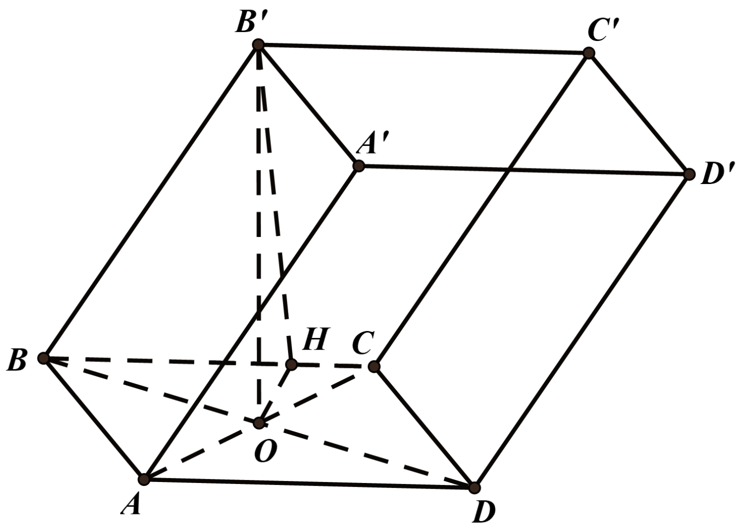
Ta có $A'H = AH.\tan 30^0 = \dfrac{a}{2}$ và $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

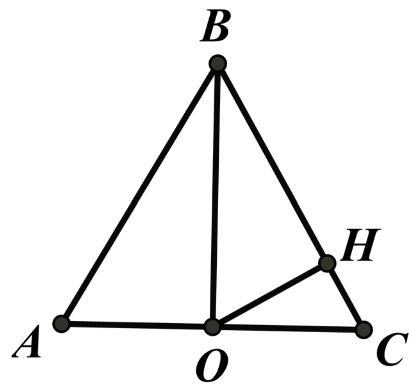
Vậy $V = A'H.S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 60: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{ABC} = 60°$. Chân đường cao hạ từ B' trùng với tâm O của đáy $ABCD$; góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy bằng $60°$. Thể tích lăng trụ bằng:

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$ **B.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\dfrac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ **D.** $\dfrac{3a^3}{4}$

Lời giải





$ABCD$ là hình thoi nên $AB = BC$. Lại có $\widehat{ABC} = 60°$ nên ΔABC là tam giác đều. $OH \perp BC$.
Góc giữa mặt phẳng $(BB'C'C)$ với đáy khi đó là $\widehat{B'HO} = 60°$.

Ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2}. \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Theo giả thiết, $B'O$ là đường cao lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

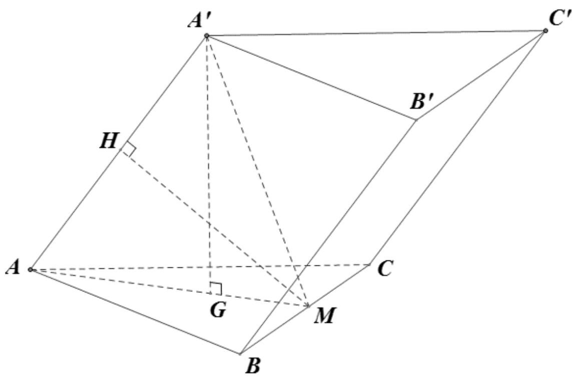
$B'O = OH.\tan\widehat{B'HO} = \frac{a\sqrt{3}}{4}\tan 60° = \frac{3a}{4}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{day}.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Câu 61: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Lời giải



Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AM \\ BC \perp A'G \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp AA'$

Kẻ $MH \perp AA'$ tại H, suy ra MH là đoạn vuông góc chung của giữa hai đường thẳng AA' và BC

Tam giác MHA vuông tại H có $AH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \frac{3}{4}a$

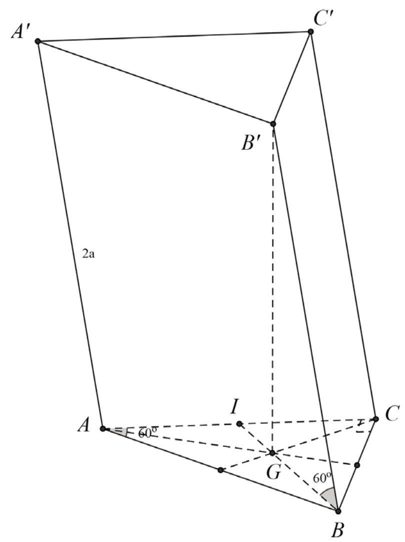
Tam giác $A'GA$ đồng dạng tam giác MHA nên $\frac{A'G}{MH} = \frac{GA}{HA} \Rightarrow A'G = \frac{MH.GA}{HA} = \frac{a}{3}$

Thể tích khối lăng trụ là $V = S_{ABC}.A'G = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 62: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 2a$, tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60°$, góc giữa cạnh bên BB' và mặt đáy (ABC) bằng $60°$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\frac{9a^3}{208}$. **B.** $\frac{3a^3}{26}$. **C.** $\frac{9a^3}{26}$. **D.** $\frac{27a^3}{208}$.

Lời giải



Ta có

$$B'G = BB'\sin 60° = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$BG = BB'\cos 60° = 2a.\frac{1}{2} = a \Rightarrow BI = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{2}.$$

Đặt $AC = 2x\ (x > 0) \Rightarrow CI = x; BC = AC.\tan 60° = 2x\sqrt{3}$.

Khi đó

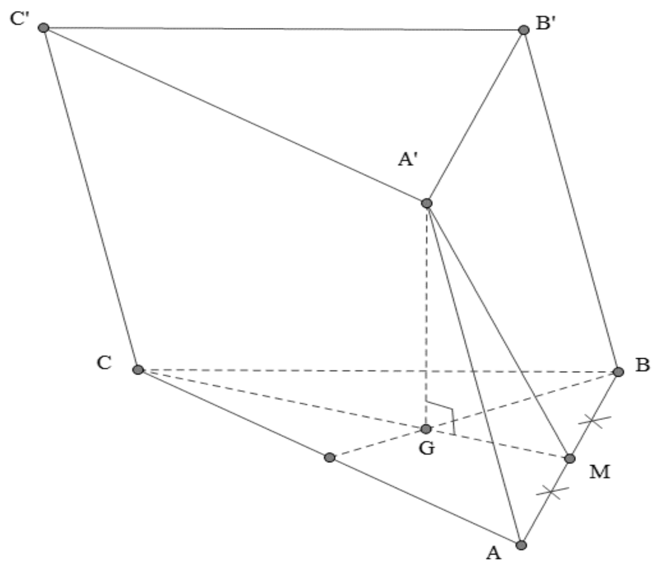
$x^2+\left(2x\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{3a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x=\frac{3a\sqrt{13}}{26} \Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}.2.\frac{3a\sqrt{13}}{26}.2.\frac{3a\sqrt{13}}{26}.\sqrt{3}=\frac{9a^2\sqrt{3}}{26}.$

Vậy $V_{A'.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{9a^2\sqrt{3}}{26}.a\sqrt{3}=\frac{9a^3}{26}$

Câu 63: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu của điểm A' trên mặt phẳng (ABC) trùng vào trọng tâm G của tam giác ABC. Biết tam giác $A'BB'$ có diện tích bằng $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{6a^3\sqrt{2}}{7}$ **B.** $\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{5}}{8}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$

Lời giải



+ Ta có $\begin{cases} AB\perp CM \\ AB\perp A'M \end{cases} \Rightarrow AB\perp\left(A'CM\right)\Rightarrow AB\perp A'M$

Nên $S_{\Delta A'AB}=\frac{1}{2}A'M.AB=\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow A'M=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

Do ΔABC đều cạnh bằng a nên $GM=\frac{1}{3}CM=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

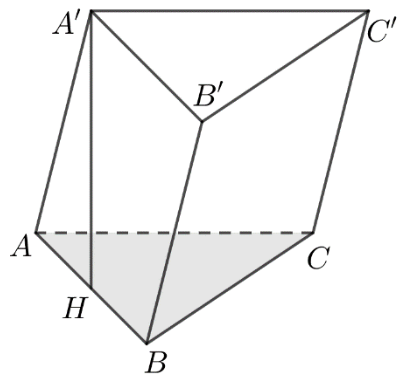
+ Trong $\Delta A'GM$ vuông tại G ta có $A'G=\sqrt{A'M^2-GM^2}=\frac{a\sqrt{21}}{2}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'}=A'G.\mathrm{dt}\left(\Delta ABC\right)=\frac{a\sqrt{21}}{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3\sqrt{7}}{8}$

Câu 64: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AB và $AA'=a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$. **B.** $V=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$. **C.** $V=2a^2\sqrt{2}$. **D.** $V=a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại B cạnh $AC=2a$ nên suy ra $AB=a\sqrt{2}$, có diện tích đáy

$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2=\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2=a^2$.

H là hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) nên $A'H$ là chiều cao của khối lăng trụ. Thể tích là $V=A'H.S_{\Delta ABC}$.

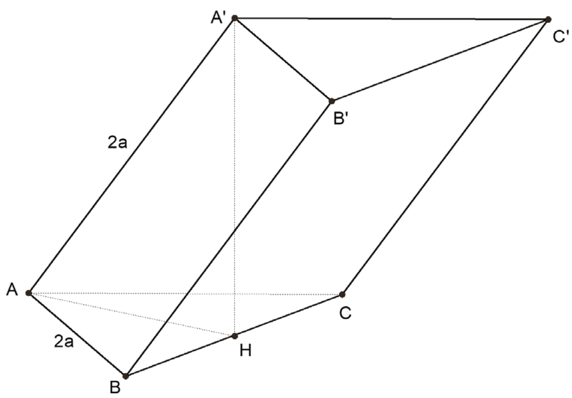
H là trung điểm của cạnh $AB\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow A'H=\sqrt{AA'^2-AH^2}=\sqrt{2a^2-\dfrac{2a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Suy ra $V=A'H.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.a^2=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 65: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên $AA'=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

A. $a^3\sqrt{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$. **C.** $3a^3\sqrt{2}$. **D.** $2a^3\sqrt{6}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC), suy ra H là trung điểm của BC.

Tam giác ABC đều cạnh $2a$, suy ra $AH=a\sqrt{3}$.

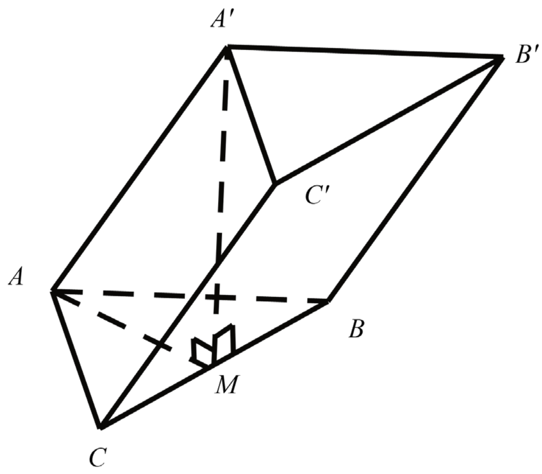
Đường cao hình lăng trụ: $h = A'H = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Vậy thể tích lăng trụ: $V = S_{\Delta ABC}.h = \dfrac{1}{2}AH.BC.A'H = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}.2a.a = a^3\sqrt{3}$.

Câu 66: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính thể tích V của khối lăng trụ đó theo a.

A. $V = a^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. **B.** $V = \dfrac{2a^3}{3}$. **C.** $V = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$. **D.** $V = a^3$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC.

Theo bài ra ABC là tam giác đều cạnh a nên: $AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm M của cạnh BC nên có: $A'M \perp (ABC)$; $A'M \perp BC$.

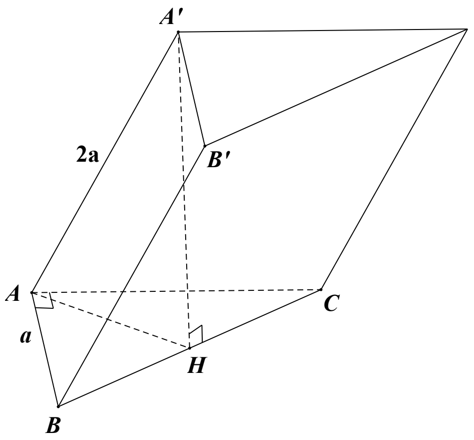
Xét tam giác $A'MA$ vuông tại M: $A'M = \sqrt{AA'^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là: $V_{ABC.A'B'C'} = A'M.S_{ABC} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{4\sqrt{2}}$.

Câu 67: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh A, $AB = a$, $AA' = 2a$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{14}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow BC = a\sqrt{2}; AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$A'H \perp (ABC) \Rightarrow A'H \perp AH$

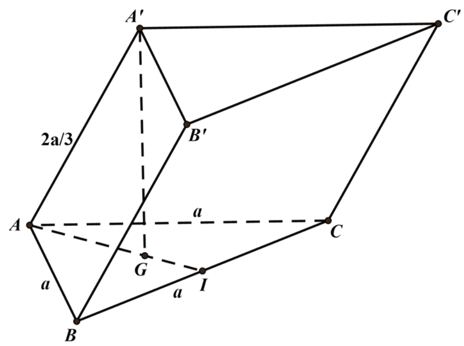
Trong tam giác $AA'H$ vuông tại H ta có: $A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{2a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = a\frac{\sqrt{14}}{2}.\frac{1}{2}.a.a = \frac{a^3\sqrt{14}}{4}$.

Câu 68: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, độ dài cạnh bên bằng $\frac{2a}{3}$, hình chiếu của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có:

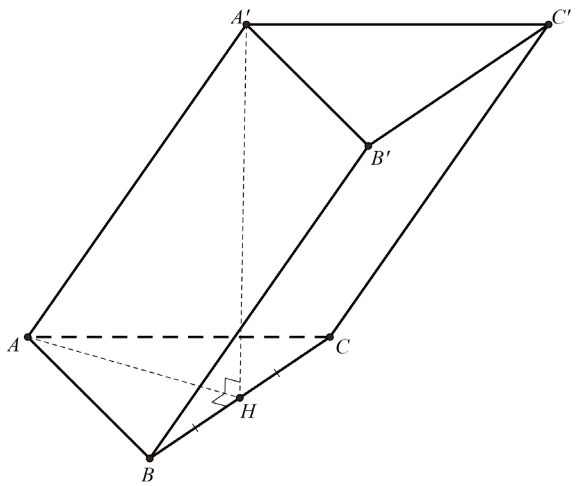
$AG = \frac{2}{3}AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $A'G^2 = A'A^2 - AG^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9} \Rightarrow A'G = \frac{a}{3}$.

$V = B.h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 69: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA'=\frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3.\sqrt{2}}{8}$. **B.** $\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$. **C.** $\frac{a^3.\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC, vì tam giác ABC đều nên ta có $AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{a^2.\sqrt{3}}{4}$.

Theo đề: $A'H\perp(ABC)\Rightarrow A'H\perp AH$. Trong tam giác vuông $A'AH$ có

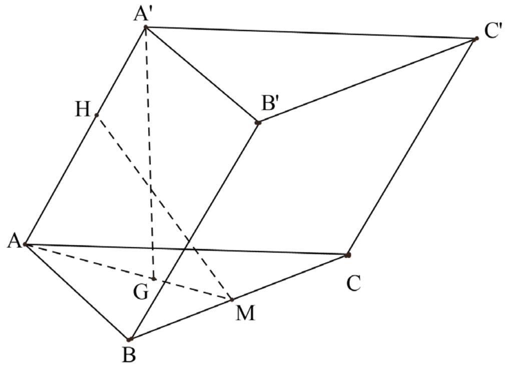
$$A'H=\sqrt{A'A^2-AH^2}=\sqrt{\frac{9a^2}{4}-\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $V_{ABC.A'B'C'}=B.h=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3a^3.\sqrt{2}}{8}$.

Câu 70: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa BC và AA' bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $B'.ABC$ bằng:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, $MH \perp AA'$ tại H.

Ta có $BC \perp (AA'M) \Rightarrow BC \perp HM$. Do đó $HM = d(AA', BC)$.

$AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},\ AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin\widehat{HAM} = \dfrac{HM}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{HAM} = 30^0.$

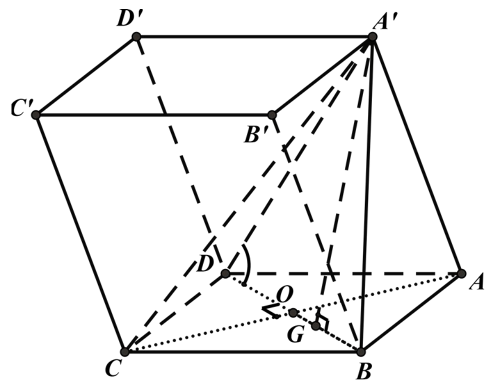
$A'G = AG.\tan 30^0 = \dfrac{a}{3},\ S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AM.BC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

$V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}A'G.S_{ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}.$

Câu 71: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ACBD$ là hình thoi cạnh a, biết $A'.ABC$ là hình chóp đều và $A'D$ hợp với mặt đáy một góc $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là :

A. a^3. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **C.** $a^3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $\widehat{(A'D,(ABCD))} = \widehat{A'DG} = 45°$.

Ta giác ABC đều cạnh a nên $BG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $DB = a\sqrt{3}$, $DG = 2BG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

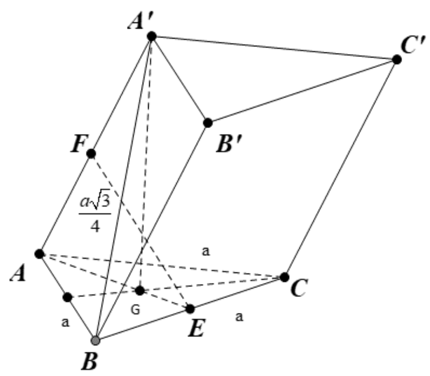
Tam giác $A'DG$ vuông cân tại G nên $A'G = DG = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.AG = \dfrac{1}{2}a.a\sqrt{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = a^3$.

Câu 72: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Vì $A'G\perp(ABC)$ và tam giác ABC đều nên $A'ABC$ là hình chóp đều. Kẻ $EF\perp AA'$ và $BC\perp(AA'E)$ nên $d(AA',BC)=EF=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Đặt $A'G=h$

Ta có $A'A=\sqrt{h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}$.

Tam giác $A'AG$ đồng dạng với tam giác EAF nên

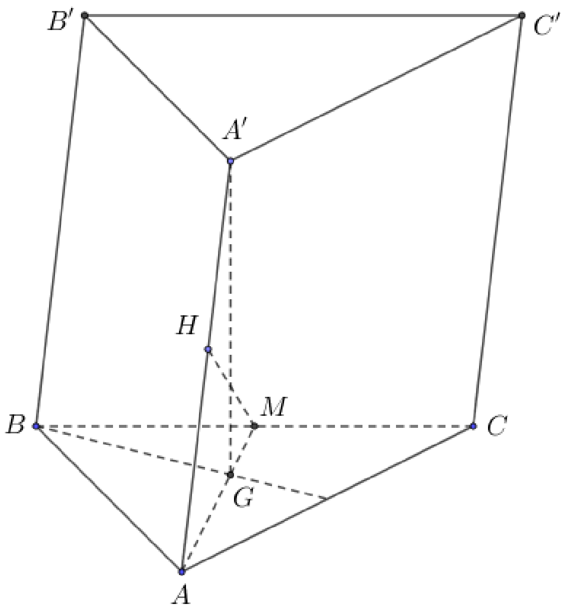
$$\frac{A'A}{EA}=\frac{AG}{FA}=\frac{A'G}{FE}\Rightarrow A'G.EA=A'A.FE\Leftrightarrow h.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\sqrt{h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}.\frac{a\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow h=\frac{a}{3}.$$

Thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V=AG.S_{ABC}=\frac{a}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 73: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC. Vẽ $MH \perp AA'$ $\left(H \in BC\right)$.

Ta có $AM \perp BC$, $A'G \perp BC$ $\Rightarrow BC \perp \left(A'AG\right) \Rightarrow BC \perp MH \Rightarrow d\left(AA', BC\right) = MH$.

$$AH = \sqrt{AM^2 - MH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{16}} = \frac{3a}{4}.$$

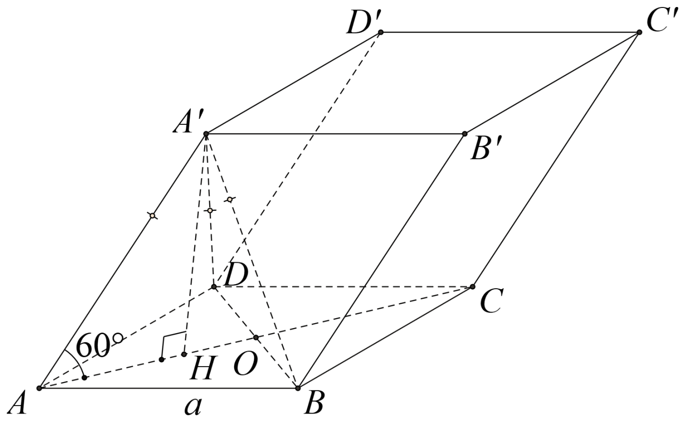
Ta có $\dfrac{MH}{AH} = \dfrac{A'G}{AG} = \tan\widehat{GAH} \Rightarrow A'G = \dfrac{MH.AG}{AH} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3a}{4}} = \dfrac{a}{3}$.

Vậy $V = S_{ABC}.A'G = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 74: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, tâm O và $\widehat{ABC} = 120°$. Góc giữa cạnh bên AA' và mặt đáy bằng $60°$. Đỉnh A' cách đều các điểm A, B, D. Tính theo a thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \dfrac{3a^3}{2}$. **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **C.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $V = a^3\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có tam giác ABD cân tại A và $\widehat{BAD} = 60°$ nên ABD là tam giác đều.

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD. Vì A' cách đều A, B, D nên $A'H$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Do đó $A'H \perp (ABD)$.

Suy ra góc giữa $A'A$ và đáy $(ABCD)$ là góc $\widehat{A'AH} = 60°$.

Ta có $AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó $A'H = AH.\tan 60° = \frac{3a}{2}$.

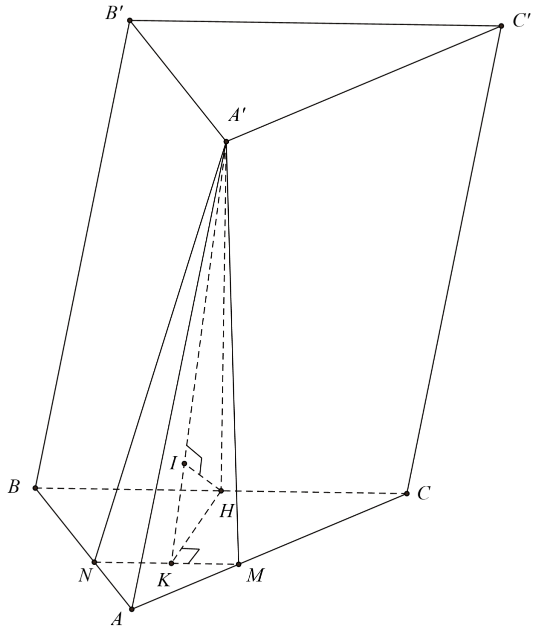
Ngoài ra $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

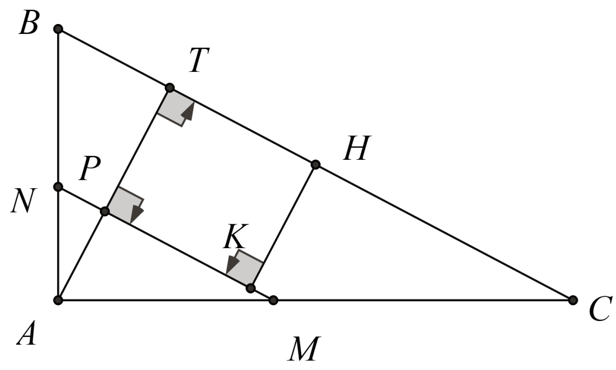
Thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = S_{ABCD}.A'H = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 75: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên (ABC) trùng với tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $CM = 2MA$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'M$ và BC bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{3a^3}{2}$. **D.** $V = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải





Kẻ $MN // BC$, $N \in AB$. $HK \perp MN$, $HI \perp A'K$.

$d\left(A'M;BC\right) = d\left(BC;\left(A'MN\right)\right) = d\left(H;\left(A'MN\right)\right) = HI \Rightarrow HI = \dfrac{a}{2}$.

Kẻ $AT // HK$, $AT \cap MN = P \Rightarrow HK = PT = \dfrac{2}{3}AT$

Tam giác ABC vuông tại $A \Rightarrow \dfrac{1}{AT^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{2}{3}AT = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác $A'HK$ vuông tại $H \Rightarrow \dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{HI^2} - \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{4}{a^2} - \dfrac{3}{a^2} = \dfrac{1}{a^2} \Rightarrow A'H = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V = A'H.S_{ABC} = a.\dfrac{1}{2}.a.a\sqrt{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 5: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

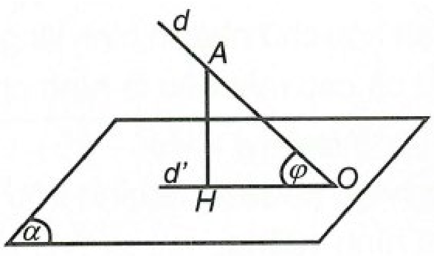
I. LÝ THUYẾT.

2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).

• Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90°$.

• Nếu a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a với hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



• Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu $(a,(P))$

• Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$.

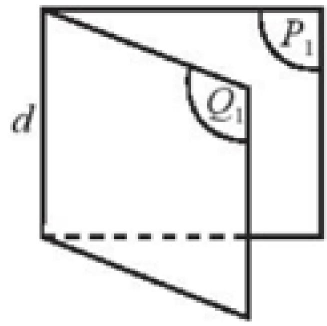
• Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P) thì $(a,(P)) = 0°$.

2. GÓC NHỊ DIỆN VÀ GÓC PHẲNG NHỊ DIỆN

Góc nhị diện

Định nghĩa:

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.



Hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1) gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện

Chú ý:

Hình 5

a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1).

Góc phẳng nhị diện

Định nghĩa

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt (P_1), (Q_1) của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi (P_1), (Q_1).

c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.

e) Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180°.

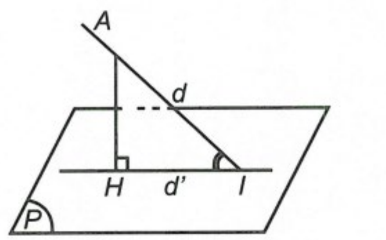
II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Trường hợp 1. $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90^o$.

Trường hợp 2. d không vuông góc với (P). Khi đó ta làm như sau:



Bước 1. Tìm $d \cap (P) = \{I\}$.

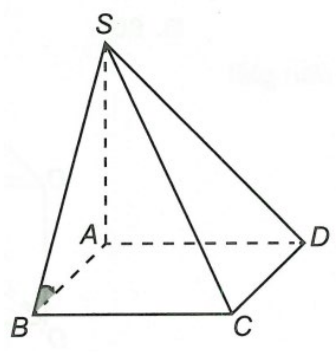
Bước 2. Trên *d* lấy điểm *A* khác *I*. Tìm hình chiếu *H* của *A* lên (*P*). Thông thường ta chọn điểm *A* trên *d* thỏa mãn *A* thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (*P*). (Khi đó hình chiếu của *A* là giao điểm của Δ và (*P*)).

Bước 3. Suy ra $\widehat{(d,(P))} = \widehat{(AI, \mathrm{HI})} = \widehat{AIH}$.

Tính $\widehat{AIH}$ (nếu đề bài yêu cầu tính góc).

Ví dụ. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh 2*a*, cạnh bên *SA* vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi *SB* và mặt phẳng (*ABCD*). Xác định cotφ?.

Lời giải



Ta có $SB \cap (ABCD) = \{B\}$.

Trên *SB* chọn điểm *S*. Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên *A* là hình chiếu của *S* lên (*ABCD*).

Suy ra $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{(SB, BA)} = \widehat{SBA}$.

Vậy $\cot\varphi = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{2a}{a} = 2$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC).

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

Câu 3: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{ABC}=60^o$ và $AA'=a$. Góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC đều cạnh $a, AA'=\sqrt{3}a$. Góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng

Câu 5: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD=4a, AC=2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO\perp(ABCD)$. Biết $\tan\widehat{SBO}=\frac{1}{2}$. Số đo góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông tại $B, AC=2a, BC=a$, $SB=2a\sqrt{3}$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC), SA=2a\sqrt{3}, AB=2a$, tam giác ABC vuông cân tại B. Gọi M là trung điểm của SB. Góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) bằng

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2a$. Goi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC).

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và tam giác ABD đều. SO vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO=2a$. M là trung điểm của SD. Tang góc giữa CM và $(ABCD)$ là:

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA=SB=SD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{BAD}=60°$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA=AB=a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tang của góc tạo bởi đường thẳng DM với mặt phẳng (SAB).

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đa giác đáy. Biết cạnh bên bằng $2a$ và $SO=a\sqrt{3}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$, $\widehat{ASB}=90°$, $\widehat{BSC}=60°$, $\widehat{ASC}=120°$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$, $SA\perp AB$, $SC\perp BC$, $SB=2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và α là góc giữa MN và (ABC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA=SB=SD=a$, $\widehat{BAD}=60°$. Góc giữa đường thẳng SA và mp(SCD) bằng

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SA và (SBC). Khi đó

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; $AB=BC=a$, $AD=2a$. Cạnh bên $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) có số đo bằng

Câu 19: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA'=a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và tam giác ABC vuông tại C. Biết $AB=2a$, $SA=a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC}=30^0$. Tính góc giữa SC và (SAB).

Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC$ và đôi một vuông góc. Tang của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, $SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SB và $mp(SAC)$ bằng

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SC,BC. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB=a$, đáy ABC là tam giác vuông tai A có $BC=a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính góc giữa SA và (ABC).

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2a, AB=BC=a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC).

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$?

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB=BC=a, AD=2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SB,CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA=a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB, SD. Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=a$ và $AD=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng

Câu 30: Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và mặt phẳng (BCD) bằng

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA\perp(ABC)$, $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng:

Câu 32: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC=a\sqrt{2}$, $BC=a$, $\widehat{ACB}=135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB. Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SD. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

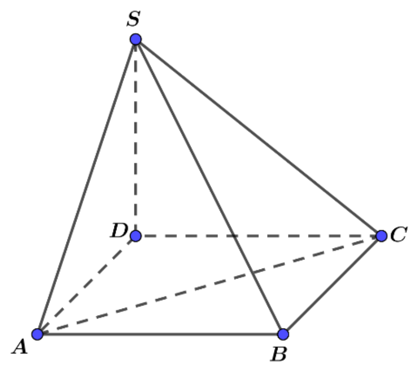
Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB=2a$, $\widehat{BAC}=60^\circ$ và $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB. Tính $\tan$ góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có $AB=BC=a$, $AD=2a$, có SA vuông góc với đáy và $SA=a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC=a\sqrt{2}$, $BC=a$, $\widehat{ACB}=135^\circ$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB. Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$?

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bính hành, $AB=2a, BC=a, \widehat{ABC}=120^0$. Cạnh bên $SD=a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).



CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 5: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

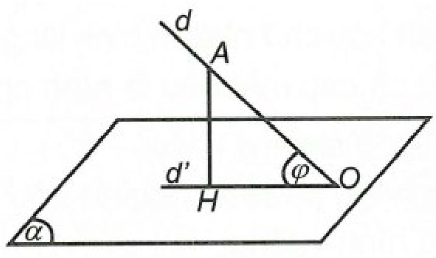
I. LÝ THUYẾT.

2. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P).

• Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng $90°$.

• Nếu a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a với hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



• Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu $(a,(P))$

• Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$.

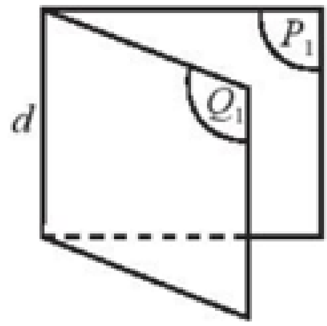
• Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P) thì $(a,(P)) = 0°$.

2. GÓC NHỊ DIỆN VÀ GÓC PHẲNG NHỊ DIỆN

Góc nhị diện

Định nghĩa:

Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d. Hình tạo bởi (P_1), (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1), kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.



Hai nửa mặt phẳng (P_1), (Q_1) gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện

Hình 5

Chú ý:

a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$.

Góc phẳng nhị diện

Định nghĩa

Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

Chú ý:

a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt $(P_1), (Q_1)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P_1), (Q_1)$.

c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.

e) Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180°.

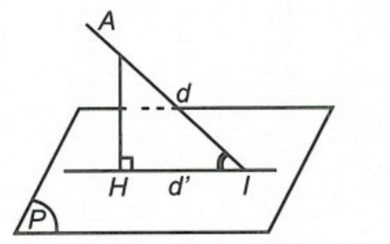
II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 3. XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Trường hợp 1. $d \perp (P) \Rightarrow \widehat{(d,(P))} = 90^o$.

Trường hợp 2. d không vuông góc với (P). Khi đó ta làm như sau:



Bước 1. Tìm $d \cap (P) = \{I\}$.

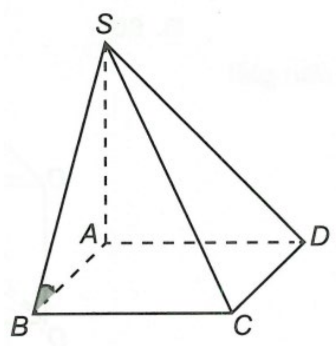
Bước 2. Trên *d* lấy điểm *A* khác *I*. Tìm hình chiếu *H* của *A* lên (*P*). Thông thường ta chọn điểm *A* trên *d* thỏa mãn *A* thuộc đường thẳng Δ vuông góc với (*P*). (Khi đó hình chiếu của *A* là giao điểm của Δ và (*P*)).

Bước 3. Suy ra $\widehat{(d,(P))} = \widehat{(AI,\text{HI})} = \widehat{AIH}$.

Tính $\widehat{AIH}$ (nếu đề bài yêu cầu tính góc).

Ví dụ. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình vuông cạnh 2*a*, cạnh bên *SA* vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi *SB* và mặt phẳng (*ABCD*). Xác định cotφ?.

Lời giải



Ta có $SB \cap (ABCD) = \{B\}$.

Trên *SB* chọn điểm *S*. Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên *A* là hình chiếu của *S* lên (*ABCD*).

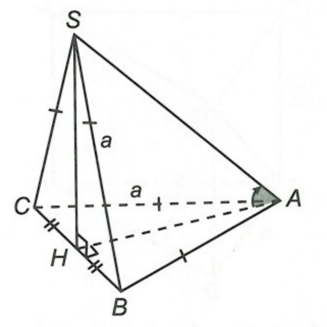
Suy ra $\widehat{(SB,(ABCD))} = \widehat{(SB,BA)} = \widehat{SBA}$.

Vậy $\cot\varphi = \dfrac{AB}{SA} = \dfrac{2a}{a} = 2$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết tam giác SBC là tam giác đều. Số đo của góc giữa SA và (ABC).

Lời giải



Ta có $SH \perp (ABC)$.

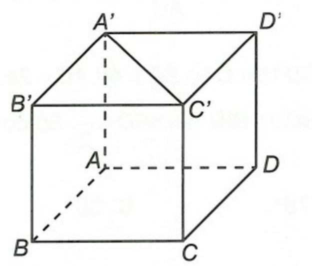
$\Rightarrow \widehat{(SA,(ABC))} = \widehat{SAH} = \alpha$

ΔABC và ΔSBC là hai tam giác đều cạnh a nên $AH = SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra ΔSHA vuông cân tại $H \Rightarrow \alpha = 45^o$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

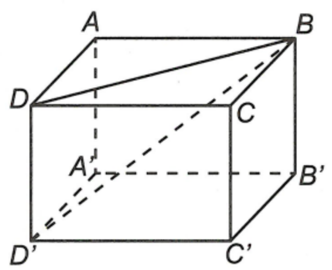
Lời giải



Dễ dàng thấy góc giữa $A'C'$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{A'C'B'} = 45^o$.

Câu 3: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a, \widehat{ABC} = 60^o$ và $AA' = a$. Góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Lời giải

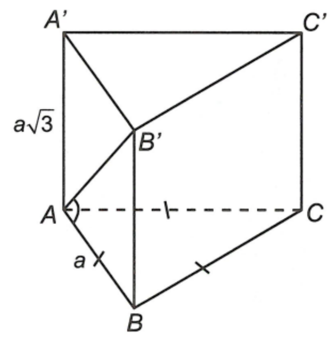


Do $DD' \perp (ABCD)$ nên góc hợp bởi đường thẳng BD' và mặt phẳng (ABCD) là $\widehat{D'BD}$.

$\tan \widehat{D'BD} = \dfrac{DD'}{BD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{D'BD} = 30^o.$

Câu 4: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ΔABC đều cạnh $a, AA' = \sqrt{3}a$. Góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng

Lời giải



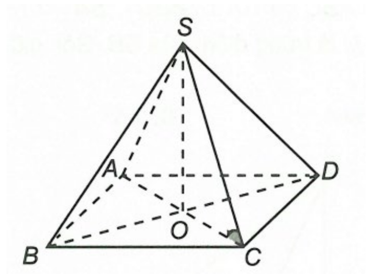
$ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC).

Suy ra góc giữa đường thẳng AB' và (ABC) bằng $\widehat{B'AB}$.

$\Delta B'AB$ vuông tại B nên $\tan \widehat{B'AB} = \dfrac{BB'}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{B'AB} = 60^o.$

Câu 5: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a, AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \dfrac{1}{2}$. Số đo góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng

Lời giải



Góc giữa SC và (ABCD) là góc $\widehat{SCO}$.

$BD = 4a \Rightarrow BO = 2a;$

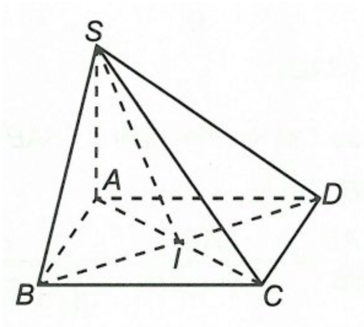
$SO = BO.\tan \widehat{SBO} = 2a.\dfrac{1}{2} = a;$

$AC = 2a \Rightarrow OC = a.$

Vậy $\widehat{SCO} = 45^o.$

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là

Lời giải



Gọi I là tâm của hình vuông của $ABCD$.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.

Mặt khác vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

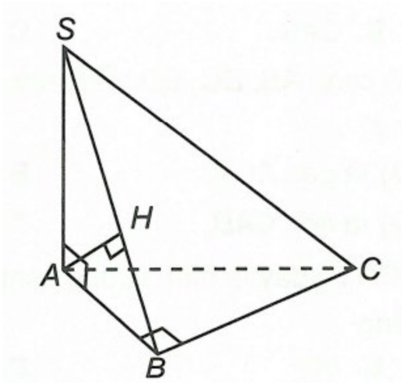
Suy ra $BD \perp (SAC)$ do đó góc giữa đường thẳng SB và (SAC) là góc $\widehat{BSI}$.

Ta có $SB = a\sqrt{2}; BI = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sin\widehat{BSI} = \dfrac{BI}{SB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BSI} = 30^o$.

Câu 7: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại $B, AC = 2a, BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng

Lời giải



Kẻ $AH \perp SB\,(H \in SB)$ $\quad (1)$.

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng góc giữa SA và SH bằng $\widehat{ASH}$.

Ta có $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$.

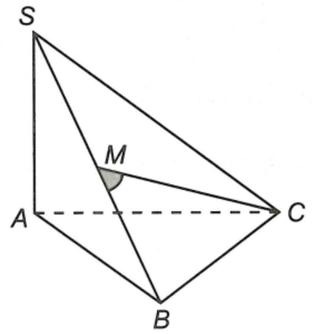
Trong ΔSAB ta có $\sin\widehat{ASB} = \dfrac{AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $\widehat{ASB} = \widehat{ASH} = 30^o$.

Do đó góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng $30°$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = 2a\sqrt{3}, AB = 2a,$ tam giác ABC vuông cân tại ***B***. Gọi M là trung điểm của ***SB***. Góc giữa đường thẳng CM và mặt phẳng (SAB) bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Do đó BM là hình chiếu của CM lên mặt phẳng (SAB).

Suy ra $\widehat{(CM,(SAB))} = \widehat{CMB}.$

Ta có: $\tan \widehat{CMB} = \dfrac{BC}{MB} = \dfrac{2AB}{SB} = \dfrac{2AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2.2a}{\sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a)^2}} = 1.$

Suy ra $\widehat{CMB} = 45^o.$

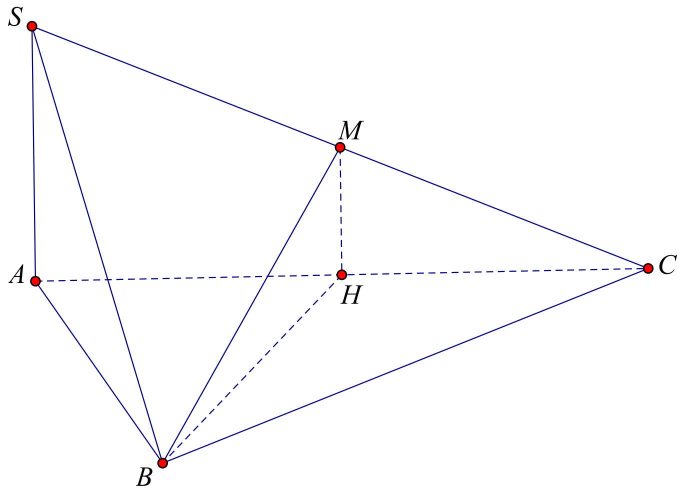
Vậy $\widehat{(CM,(SAB))} = 45^o.$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Goi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc α là góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC).

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tính cosin của góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
2. Hướng giải: Xác định góc theo định nghĩa và tính cosin của góc theo hệ thức lượng trong tam giác.
B1: Xác định hình chiếu của đường thẳng BM trên mặt phẳng (ABC); Từ đó xác định góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC).

B2: Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính cosin của góc nói trên.
Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Gọi H là trung điểm cạnh AC.

Ta có MH là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow MH // SA$ và $MH = \dfrac{1}{2}SA = a$.

Mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow MH \perp (ABC) \Rightarrow BH$ là hình chiếu của BM trên mặt phẳng (ABC).

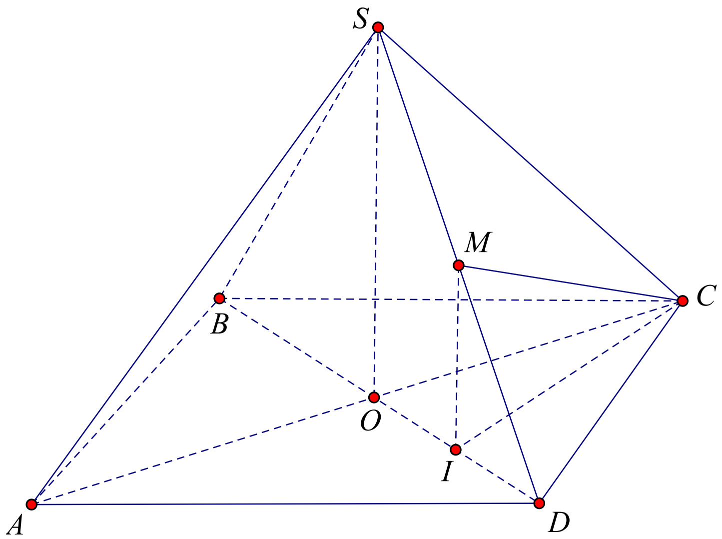
Suy ra góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC) là góc giữa hai đường thẳng BM và BH và bằng góc $\widehat{MBH}$. Vậy $\alpha = \widehat{MBH}$.

Ta có $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{MH^2 + BH^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $\cos\alpha = \dfrac{BH}{BM} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a và tam giác ABD đều. SO vuông góc mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = 2a$. M là trung điểm của SD. Tang góc giữa CM và $(ABCD)$ là:

Lời giải



Gọi I là trung điểm $OD \Rightarrow MI$ là đường trung bình tam giác $SOD \Rightarrow MI = \dfrac{SO}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$ và $MI \,//\, SO \Rightarrow MI \perp (ABCD)$.

IC là hình chiếu của MC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Góc giữa MC với $(ABCD)$ là $\widehat{MCI}$.

Tam giác ABD đều $\Rightarrow BD = a \Rightarrow OI = \dfrac{1}{4}BD = \dfrac{a}{4}$.

$OC = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác OCI vuông tại O:

$$CI = \sqrt{CO^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Xét tam giác CMI vuông tại I:

$$\tan\widehat{MCI} = \frac{MI}{CI} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{1}}{4}} = \frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $\widehat{BAD} = 60°$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

Lời giải

1. Dạng toán: Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng trong không gian

2. Hướng giải:

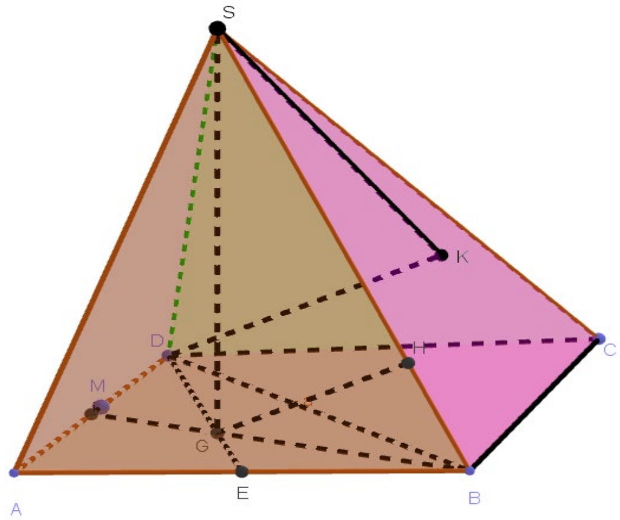
B1: Gọi G là trọng tâm của ΔABD, tính $d\left(G;(SBC)\right) = GH$.

B2: Tính $d\left(M;(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}.d\left(G;(SBC)\right) = \dfrac{3}{2}GH = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

B3: Vì $MD//(SBC) \Rightarrow d\left(M;(SBC)\right) = d\left(D;(SBC)\right) = DK = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

Gọi K là hình chiếu của D lên (SBC). Khi đó góc giữa SD và mặt phẳng (SBC) là $\widehat{DSK}$

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Dễ thấy hình chóp $S.ABD$ đều. Gọi G là trọng tâm của ΔABD. Khi đó $SG \perp (ABCD)$.

Do ΔABD đều nên $\begin{cases} GB \perp AD \\ AD//BC \end{cases} \Rightarrow GB \perp BC \Rightarrow BC \perp (SBG)$. Kẻ $GH \perp SB$, $(H \in SB)$.

Khi đó: $GH \perp (SBC) \Rightarrow d(G;(SBC)) = GH$.

Ta có: $GB = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SG = \sqrt{SB^2 - BG^2} = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Xét ΔSGB vuông tại G: $GH.SB = SG.GB \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{15}}{9}$.

Mà $d(M;(SBC)) = \frac{3}{2}.d(G;(SBC)) = \frac{3}{2}GH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Gọi K là hình chiếu của D lên (SBC). Khi đó góc giữa SD và mặt phẳng (SBC) là $\widehat{DSK}$.

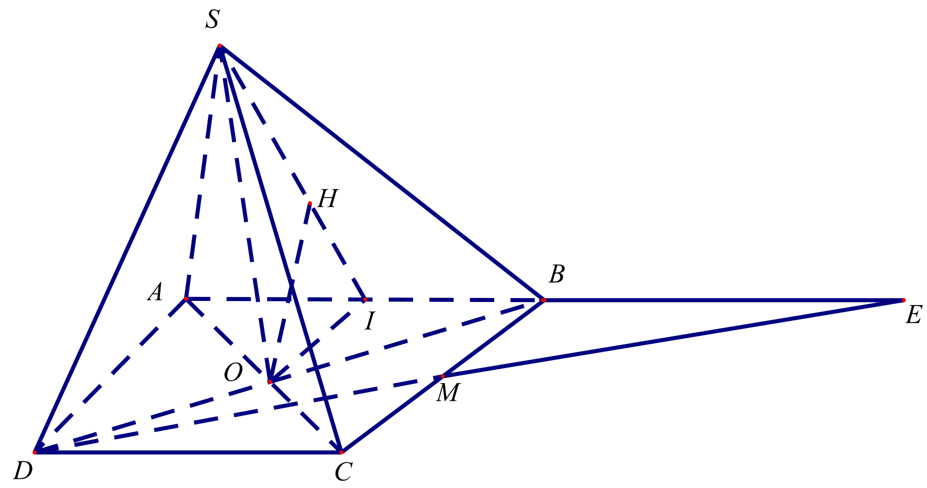
Vì $MD//(SBC) \Rightarrow d(M;(SBC)) = d(D;(SBC)) = DK = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

Xét ΔDSK vuông tại K thì: $\sin\alpha = \sin\widehat{DSK} = \frac{DK}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

$\longrightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính tang của góc tạo bởi đường thẳng DM với mặt phẳng (SAB).

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và $BD \Rightarrow O$ là trung điểm của AC và BD.

Do hình chóp $S.ABCD$ đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

Hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a \Rightarrow AC = BD = a\sqrt{2}$.

$SA = AB = a \Rightarrow \Delta SAC$ vuông cân tại $S \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Kẻ DM cắt AB tại $E \Rightarrow DM \cap (SAB) = \{E\}$.

Gọi góc tạo bởi DM và (SAB) là $\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{d(D;(SAB))}{DE}$.

Ta có $DM = \sqrt{MC^2 + DC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \Rightarrow DE = 2DM = a\sqrt{5}$.

Kẻ $OI \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOI)$

Kẻ $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SAB)$.

$\dfrac{d(D;(SAB))}{d(O;(SAB))} = \dfrac{DB}{OB} = 2 \Rightarrow d(D;(SAB)) = 2d(O;(SAB)) = 2OH$.

Xét ΔSOI vuông tại O, OH là đường cao, ta có:

$\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{6}{a^2} \Rightarrow OH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

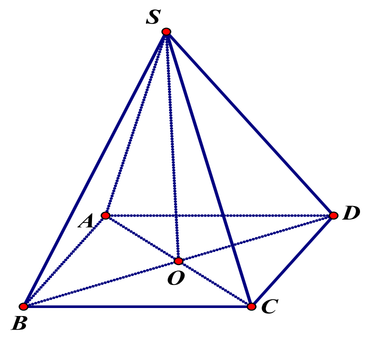
Do đó: $\sin\alpha = \dfrac{d(D;(SAB))}{DE} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{195}}{15}$ vì $\alpha \in [0°;90°]$.

Vậy $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{26}}{13}$.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm của đa giác đáy. Biết cạnh bên bằng $2a$ và $SO = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

Lời giải



Theo tính chất hình chóp tứ giác đều nên O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Cạnh bên SC có hình chiếu trên $(ABCD)$ là OC.

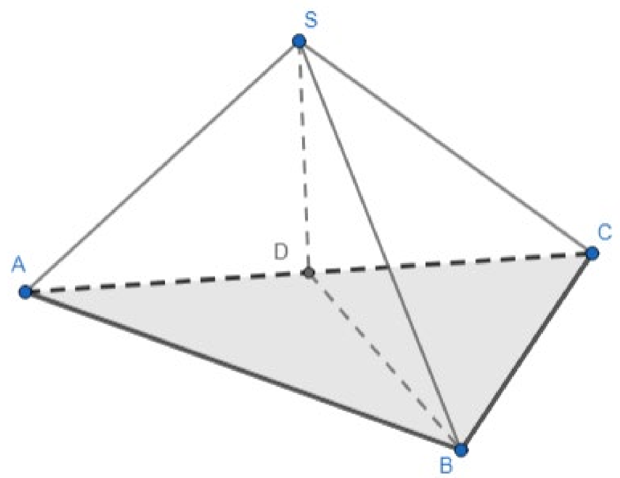
Do đó $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC;OC}\right)$.

Vì ΔSOC vuông tại O nên $\left(\widehat{SC;OC}\right) = \widehat{SCO}$.

$\sin\widehat{SCO} = \dfrac{SO}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SCO} = 60^\circ$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC).

Lời giải



+) Vì $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = 90°$, $\widehat{BSC} = 60°$ nên ΔSBC đều và ΔSBA vuông cân tại S. Giả sử $SA = a$ ta có: $SA = SB = SC = BC = a$ và $AB = a\sqrt{2}$.

+) Xét ΔSAC cân tại S ta có: $AC = \sqrt{a^2 + a^2 - 2.a.a.\cos 120°} = a\sqrt{3}$.

+) Xét ΔABC có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3a^2$, do đó ΔABC vuông tại B.

+) Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), vì $SA = SB = SC$ nên $DA = DB = DC$, do đó D là trung điểm của AC và $SD = \sqrt{SC^2 - DC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$.

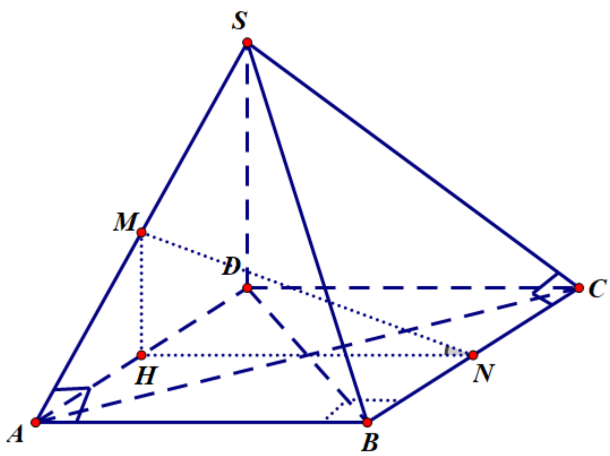
+) Ta có $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB, DB}\right) = \widehat{SBD}$.

+) Xét ΔSBD, vuông tại D; $\sin \widehat{SBD} = \frac{SD}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SBD} = 30°$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $30°$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AB = a$, $SA \perp AB$, $SC \perp BC$, $SB = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và α là góc giữa MN và (ABC). Giá trị $\cos\alpha$ bằng

Lời giải



Vẽ $SD \perp (ABC)$

Khi đó ta có $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp AD$

$\begin{cases} BC \perp SC \\ BC \perp SD \end{cases} \Rightarrow BC \perp CD$

Suy ra $ABCD$ là hình vuông

Gọi H là trung điểm của AD khi đó $MH \parallel SD \Rightarrow MH \perp (ABC)$

$\Rightarrow \alpha = \widehat{MNH}$ (α là góc giữa MN và (ABC)).

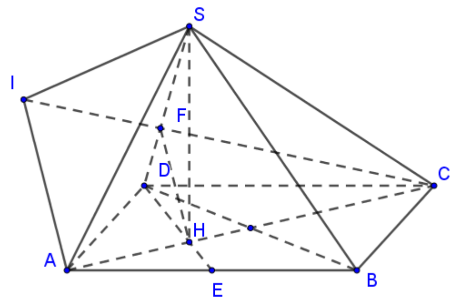
$SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{(2a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{2}$.

$MH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $HN = a$, $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\cos\alpha = \frac{HN}{MN} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SD = a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Góc giữa đường thẳng SA và $\mathrm{mp}(SCD)$ bằng

Lời giải



Do $ABCD$ là hình thoi và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên ABD là tam giác đều cạnh a

Gọi H là trọng tâm tam giác ABD. Ta có $DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vì $SA = SB = SD = a$ nên $SH \perp (ABCD)$. $SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H lên SD khi đó ta có $HF \perp \mathrm{mp}(SCD)$. Tính được $FH = \frac{SH.DH}{SD} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

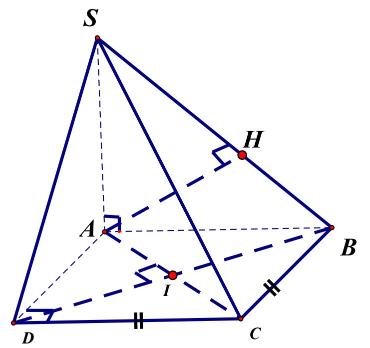
Gọi I là hình chiếu của A lên (SCD) khi đó FH song song với AI. Ta có $\frac{FH}{AI} = \frac{CH}{CA} = \frac{2}{3}$

Nên $AI = \frac{3}{2}HF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Góc giữa đường thẳng SA và $\mathrm{mp}(SCD)$ là góc $\widehat{ASI}$. $\sin\widehat{ASI} = \frac{AI}{SA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{ASI} = 45^\circ$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi α là góc giữa SA và (SBC). Khi đó

Lời giải

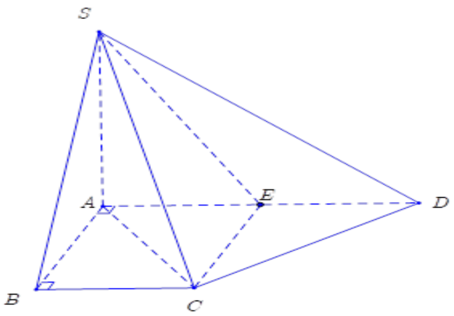


Kẻ $AH \perp SB$, chứng minh được $AH \perp (SBC)$, Khi đógóc giữa SA và (SBC) là góc $\widehat{ASH}$ hay $\widehat{ASB}$ và ta có $SB = a\sqrt{5}$.

$$\cos\alpha = \frac{SA}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) có số đo bằng

Lời giải



Gọi E là trung điểm của AD, ta có $\begin{cases} AE // BC \\ AE = AC = AB = a \end{cases}$ suy ra tứ giác $ABCE$ là hình thoi, mà $\widehat{A} = 90^o$ nên tứ giác $ABCE$ là hình vuông.

* Ta có $\begin{cases} CE \perp AD \\ CE \perp SA \end{cases} \Rightarrow CE \perp (SAD)$ nên SE là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAD).

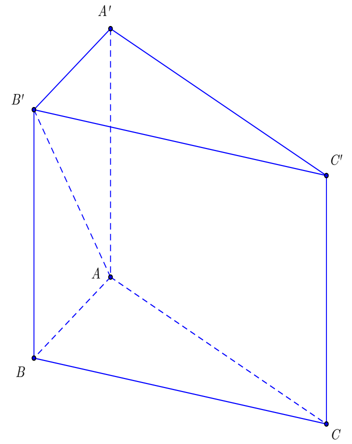
* $\left(\widehat{SC,(SAD)}\right) = \left(\widehat{SC,SE}\right) = \widehat{CSE}$.

*Tính được $CE = AB = a; AC = a\sqrt{2}; SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$.

Do đó $\sin\widehat{CSE} = \frac{CE}{SC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{CSE} = 30^o$.

Câu 19: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là

Lời giải



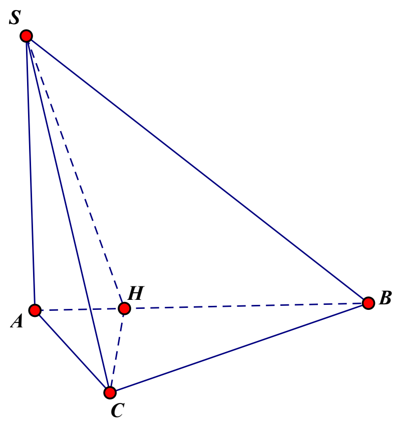
*Vì $BB'\perp(ABC)$ nên AB là hình chiếu vuông góc của AB' trên (ABC).

*Ta có $\left(\widehat{AB',(ABC)}\right)=(AB',AB)=\widehat{B'AB}$.

* Tam giác ABB' vuông tại B nên $\tan\widehat{BAB'}=\dfrac{BB'}{AB}=\dfrac{AA'}{AB}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{BAB'}=60^0$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và tam giác ABC vuông tại C. Biết $AB=2a$, $SA=a\sqrt{2}$, $\widehat{ABC}=30^0$. Tính góc giữa SC và (SAB).

Lời giải



Kẻ $CH\perp AB$, theo giả thiết thì $CH\perp SA$ nên $CH\perp(SAB)$.

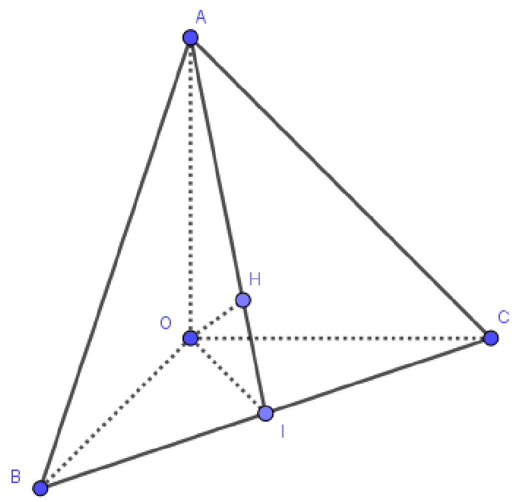
Vậy thì $\left(\widehat{SC;(SAB)}\right)=\widehat{CSH}$ và chú ý tam giác SHC vuông tại H. Ta có $\sin\widehat{CSH}=\dfrac{HC}{SC}$.

Tính toán $AC=AB.\sin30^0=a$; $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=a\sqrt{3}$; $HC=AC.\sin\widehat{CAH}=a.\sin60^0$ $=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy nên $\sin\widehat{CSH}=\dfrac{1}{2}$ tức là $\sin\widehat{CSH}=30^0$.

Câu 21: Cho tứ diện $OABC$ có $OA=OB=OC$ và đôi một vuông góc. Tang của góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) bằng

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow OI \perp BC$, kẻ $OH \perp AI$ ($H \in AI$) $\Rightarrow OH \perp (ABC)$.

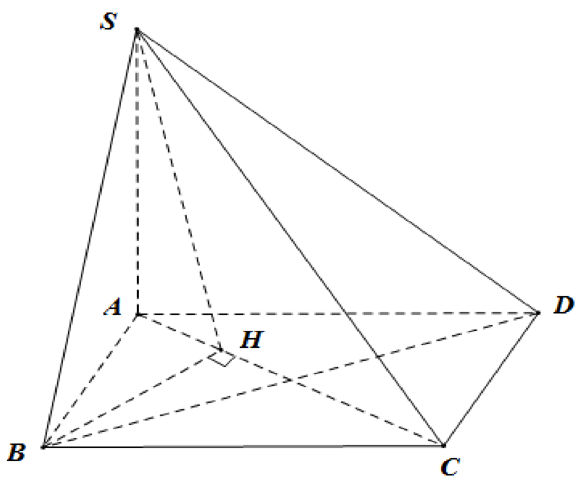
Ta được góc giữa đường thẳng OA và mặt phẳng (ABC) chính là góc giữa hai đường thẳng OA , AH và bằng $\widehat{OAH} = \widehat{OAI}$.

Giả sử $OA = OB = OC = a$, ta có $OI = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác OAI vuông tại O có $\tan\widehat{OAI} = \dfrac{OI}{OA} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng SB và $mp(SAC)$ bằng

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC$, mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

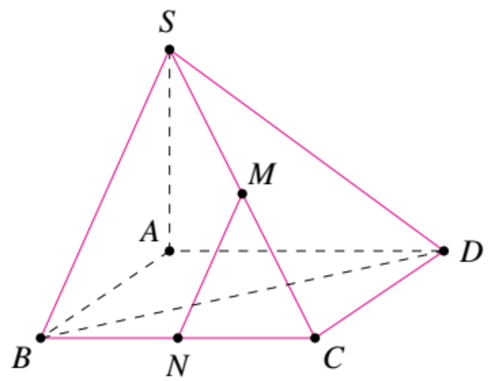
Suy ra góc giữa SB và (SAC) là góc giữa SB và SH bằng $\widehat{BSH}$.

Ta có $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+a^2}=a\sqrt{3}$, $\frac{1}{BH^2}=\frac{1}{BA^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3a^2}=\frac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow BH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Do ΔSBH vuông tại H nên $\sin\widehat{BSH}=\frac{BH}{SB}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BSH}=30°$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SC,BC. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BD.

Lời giải



Vì M, N là trung điểm của BC, SC nên $MN\,//\,SB$.

Suy ra $\widehat{(MN,BD)}=\widehat{(SB,BD)}$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác SAB và tam giác SAD ta có

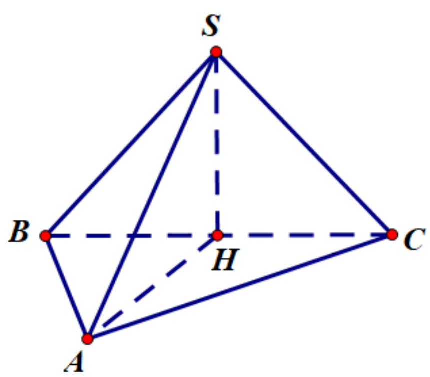
$SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$,

$SD=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

$ABCD$ là hình vuông nên $BD=a\sqrt{2}$. Vậy tam giác SBD là tam giác đều do đó $\widehat{(SB,BD)}=60°\Rightarrow\widehat{(MN,BD)}=60°$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB=a$, đáy ABC là tam giác vuông tai A có $BC=a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của BC. Tính góc giữa SA và (ABC).

Lời giải



H là hình chiếu của S lên (ABC), suy ra AH là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \left(\widehat{SA,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SA, AH}\right) = \widehat{SAH}$,

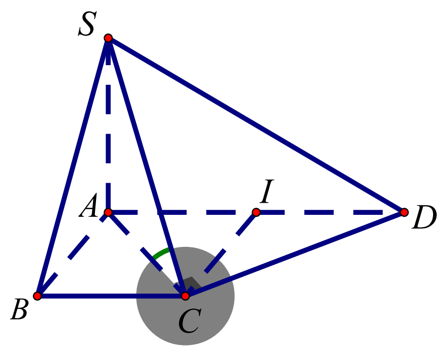
Xét tam giác SHB vuông tại H, ta có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác ABC vuông tại A, có $AH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác SAH vuông tại H, có $\tan\widehat{SAH} = \dfrac{SH}{AH} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} : \dfrac{a}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SAH} = 60°$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2a$, $AB = BC = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết SC tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



$SC \cap (ABCD) = C$ và hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $A \Rightarrow$ hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là $AC \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC, AC}\right) = \widehat{SCA} = 60°$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SA = AC.\tan 60° = a\sqrt{2}.\sqrt{3} = a\sqrt{6}$ và

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2}a$.

Xét tam giác SAD vuông tại A có $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{6a^2 + 4a^2} = a\sqrt{10}$.

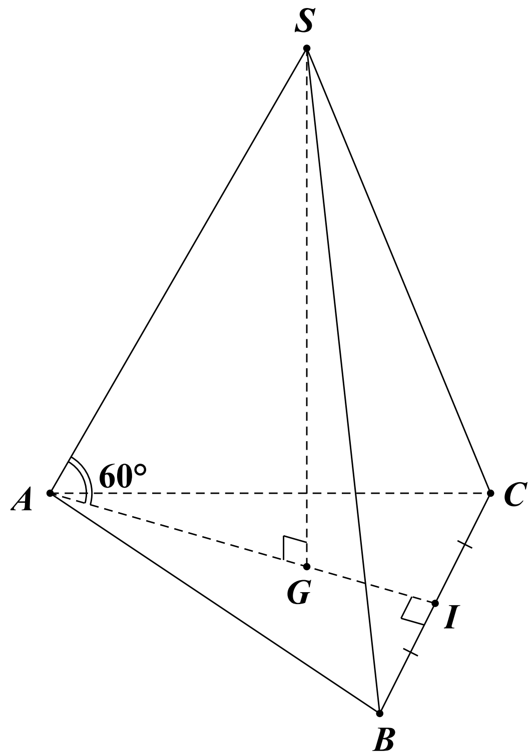
Gọi I là trung điểm của AD.Ta có $AI = \dfrac{1}{2}AD = a \Rightarrow AI = BC$. Lại có $AI \,//\, BC$ nên $ABCI$ là hình bình hành. Do đó $CI = AB = a = \dfrac{1}{2}AD \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$ mà $CD \perp SA$ nên $CD \perp (SAC)$.

Ta có $SD \cap (SAC) = S$ và hình chiếu của D trên mặt phẳng (SAC) là $C \Rightarrow$ hình chiếu của SD trên mặt phẳng (SAC) là $SC \Rightarrow \left(\widehat{SD,(SAC)}\right) = \left(\widehat{SD, SC}\right) = \widehat{DSC}$.

Xét tam giác SCD vuông tại C có $\cos\widehat{DSC} = \dfrac{SC}{SD} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{a\sqrt{10}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \widehat{DSC} \approx 26°33'$.

Câu 26: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$?

Lời giải



Gọi I là trung điểm BC và G là trọng tâm ΔABC

Ta có: $\begin{cases} SA = SB = SC \\ GA = GB = GC \end{cases}$

Suy ra SG là trục của (ABC)

Suy ra $SG \perp (ABC)$

Ta có: A là hình chiếu vuông góc của A lên (ABC) và G là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC)

Suy ra $(SA;(ABC)) = (SA; AG) = \widehat{SAG} = 60°$

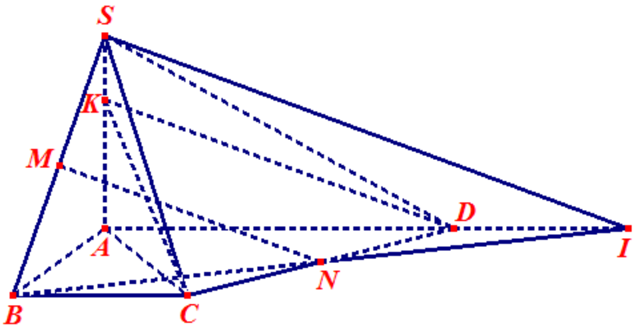
Ta có: $AG = \dfrac{2}{3}AI = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G, ta có:

$SG = \tan 60°.AG = \sqrt{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = a$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B, $AB = BC = a, AD = 2a$, SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Lời giải



Gọi $I = BN \cap AD$. Dễ thấy N là trung điểm của BI, do đó $MN // SI$. Kẻ đường thẳng qua D và song song với SI cắt SA tại $K \Rightarrow DK // SI \Rightarrow (MN,(SAC)) = (DK,(SAC))$

Dễ thấy CK là hình chiếu của DK trên $(SAC) \Rightarrow (DK,(SAC)) = \widehat{DKC}$.

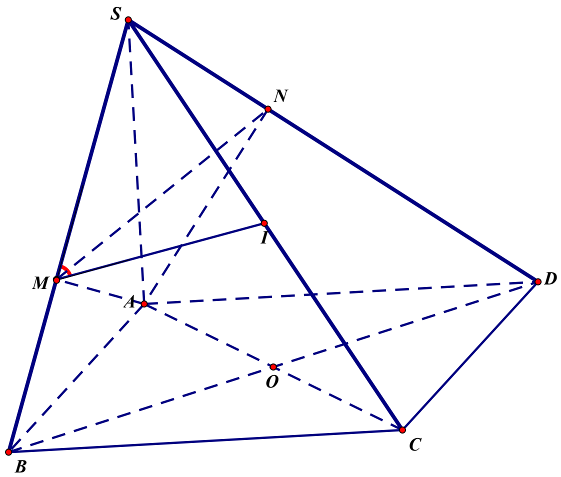
Ta có $KA = \frac{2}{3}SA = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + 2a^2} = \frac{\sqrt{22}}{3}a$, $KD = \sqrt{KA^2 + AD^2} = \sqrt{\frac{4a^2}{9} + 4a^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3}a$

$\Rightarrow \cos\widehat{DKC} = \frac{KC}{KD} = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A lên các cạnh SB, SD. Góc giữa mặt phẳng (AMN) và đường thẳng SB bằng

Lời giải



Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SC

Ta có $BC \perp AB, BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

$AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Tương tự: $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$

Vậy $SC \perp (AMN)$ tại I.

Ta có MI là hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (AMN)

Suy ra góc giữa SB và (AMN) là góc $\widehat{SMI}$

Ta có $\sin \widehat{SMI} = \dfrac{SI}{SM}$

Ta có $SM.SB = SA^2 \Rightarrow SM = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

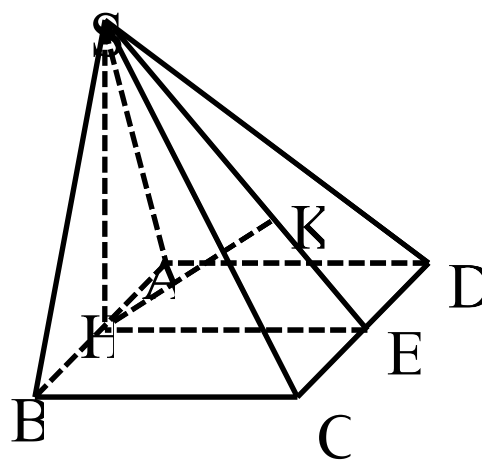
$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$

$SI.SC = SA^2 \Rightarrow SI = a$

Vậy $\sin \widehat{SMI} = \dfrac{SI}{SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SMI} = 60^\circ$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$ và $AD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD) bằng

Lời giải



Gọi H, E lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Do SAB là tam giác đều có trung tuyến SH và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy nên $SH \perp (ABCD)$.

Có $\begin{cases} CD \perp HE \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow (SCD) \perp (SHE)$.

Kẻ $HK \perp SE$ mà $(SCD) \cap (SHE) = SE$ và $(SCD) \perp (SHE)$ nên $HK \perp (SCD)$

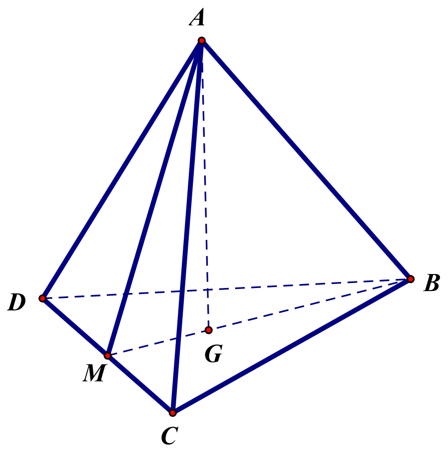
Có $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{HE^2}+\frac{1}{SH^2}=\frac{2}{3a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow HK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do $AB//CD\Rightarrow AB//\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(B,\left(SCD\right)\right)=d\left(H,\left(SCD\right)\right)=HK=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Có $SB\cap\left(SCD\right)=S$ nên $\sin\left(SB,\left(SCD\right)\right)=\frac{d\left(B,\left(SCD\right)\right)}{SB}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(SB,\left(SCD\right)\right)=45^0$.

Câu 30: Cho tứ diện đều $ABCD$. Cosin góc giữa AB và mặt phẳng $\left(BCD\right)$ bằng

Lời giải



Đặt $AB=a\left(a>0\right)$.

Gọi M là trung điểm DC, G là trọng tâm tam giác BCD.

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên $AG\perp\left(BCD\right)$.

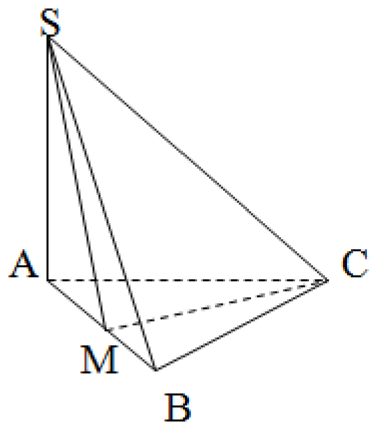
Khi đó $\widehat{\left(AB;\left(BCD\right)\right)}=\widehat{\left(AB;BG\right)}=\widehat{ABG}$.

Ta có $BG=\frac{2}{3}BM=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\cos\widehat{ABG}=\frac{BG}{BA}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 31: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, $SA\perp\left(ABC\right)$, $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng:

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB. Khi đó $CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = a\sqrt{3}$, $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có: $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB)$

$\Rightarrow M$ là hình chiếu của C trên mặt phẳng (SAB)

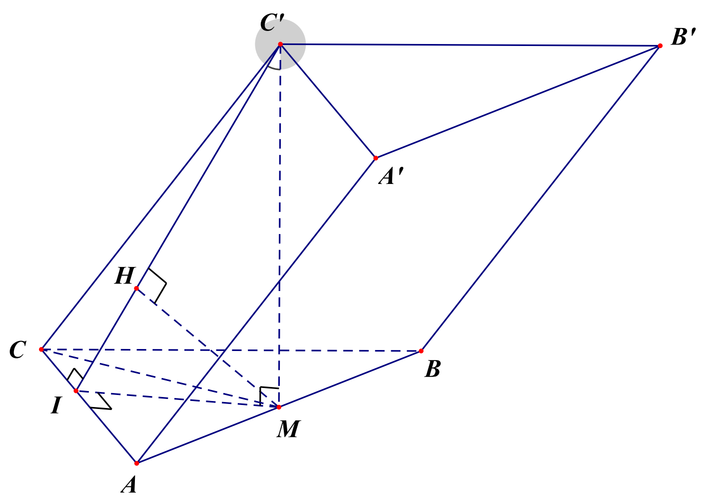
$\Rightarrow SM$ là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB)

$\Rightarrow \widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SM)}$.

Vì $CM \perp (SAB)$ nên $CM \perp SM$, mà $CM = SM = a\sqrt{3}$, do đó tam giác SMC vuông cân tại M. Vậy $\widehat{(SC,(SAB))} = \widehat{(SC,SM)} = \widehat{CSM} = 45°$.

Câu 32: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC = a\sqrt{2}$, $BC = a$, $\widehat{ACB} = 135°$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB. Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải



Dựng $MI \perp AC$ ($I \in AC$) và $MH \perp C'I$ ($H \in C'I$).

Ta có: $\begin{cases} AC \perp IM \\ AC \perp C'M \end{cases} \Rightarrow AC \perp (C'MI)$ mà $HM \subset (C'MI) \Rightarrow MH \perp AC$

Từ và $\Rightarrow MH \perp (ACC'A')$. Do đó góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc $\widehat{HC'M} = \alpha$.

Mặt khác, ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB.\sin 135° = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.a.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow S_{\Delta AMC} = \frac{a^2}{4}$.

Lại có $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}.MI.AC \Rightarrow MI = \frac{2S_{\Delta AMC}}{AC} = \frac{a^2}{2AC} = \frac{a^2}{2a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CB^2 - 2AC.CB.\cos 135°} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + a^2 - 2a\sqrt{2}.a.\cos 135°} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

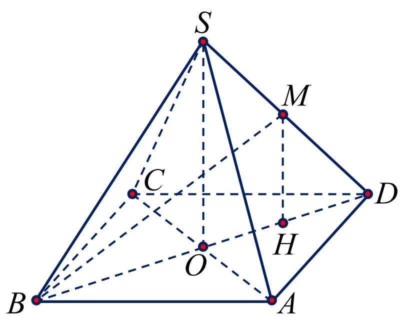
$AI = \sqrt{AM^2 - IM^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow CI = AC - AI = a\sqrt{2} - \frac{3a\sqrt{2}}{4} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

$C'I = \sqrt{C'C^2 - CI^2} = \sqrt{\frac{10a^2}{16} - \frac{2a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $\sin\alpha = \frac{IM}{C'I} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$.

Câu 33: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm SD. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên $(ABCD)$ và $O = AC \cap BD$.

Ta có MH song song với SO và $MH = \frac{1}{2}SO$.

BM có hình chiếu vuông góc trên $(ABCD)$ là BH

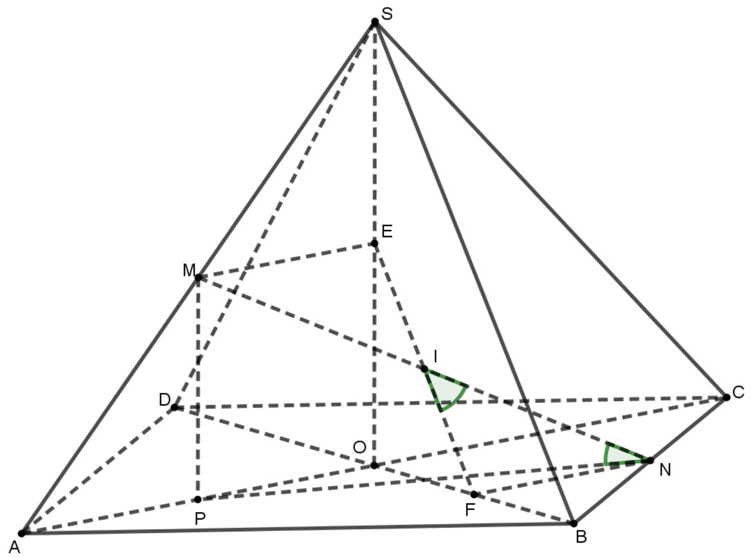
Do đó góc giữa BM và $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Ta có $SO=\sqrt{SD^2-OD^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow MH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$; $BH=\frac{3}{4}BD=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Trong tam giác MBH vuông tại H nên có: $\tan\widehat{MBH}=\frac{MH}{BH}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60°, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm SO, OB thì EF là hình chiếu của MN trên (SBD).

Gọi P là trung điểm OA thì PN là hình chiếu của MN trên $(ABCD)$.

Theo bài ra: $\widehat{MNP}=60^\circ$.

Áp dụng định lý cos trong tam giác CNP ta được:

$$NP^2=CP^2+CN^2-2CP.CN.\cos 45^\circ=\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{a^2}{4}-2.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{a}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5a^2}{8}.$$

Suy ra: $NP=\frac{a\sqrt{10}}{4}$, $MP=NP.\tan 60^\circ=\frac{a\sqrt{30}}{4}$; $SO=2MP=\frac{a\sqrt{30}}{2}$.

$SB=\sqrt{SO^2+OB^2}=2a\sqrt{2}\Rightarrow EF=a\sqrt{2}$.

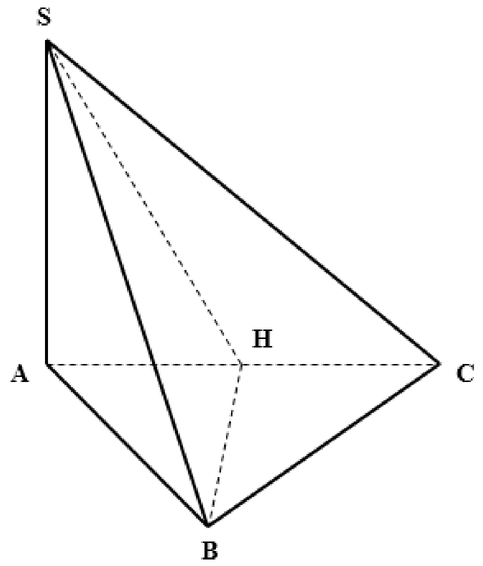
Ta lại có: $MENF$ là hình bình hành.

Gọi I là giao điểm của MN và EF, khi đó góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) là $\widehat{NIF}$.

$$\cos\widehat{NIF}=\frac{IK}{IN}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{4}{a\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = 2a$, $\widehat{BAC} = 60°$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ $BH \perp AC$

Mà $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC)$

Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\widehat{BSH}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H, $BH = AB.\sin 60° = 2a.\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$AH = AB.\cos 60° = 2a.\frac{1}{2} = a$.

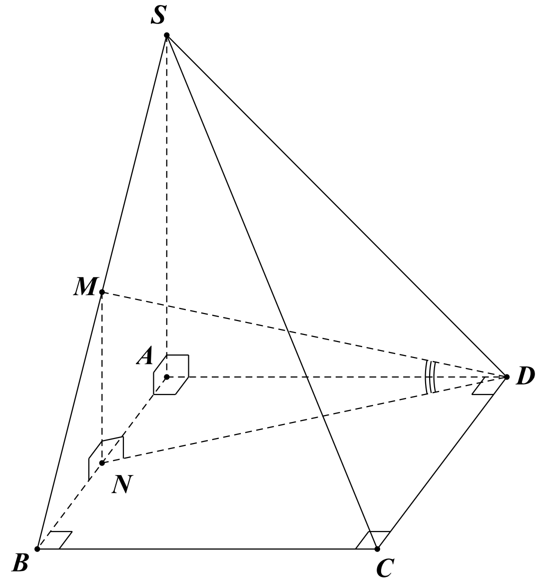
Xét tam giác SAH vuông tại S, $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác SBH vuông tại H có $SH = HB = a\sqrt{3}$ suy ra tam giác SBH vuông tại H.

Vậy $\widehat{BSH} = 45°$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm SB. Tính tan góc giữa đường thẳng DM và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm AB.

Ta có: MN là đường trung bình của ΔSAB nên $MN // SA$ và $MN = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lại có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $MN \perp (ABCD)$ (1).

Suy ra $MN \perp DN$.

Ta có: N là hình chiếu vuông góc của M lên $(ABCD)$ và D là hình chiếu vuông góc của D lên $(ABCD)$.

Suy ra $(DM;(ABCD)) = (DM;ND) = \widehat{MDN}$ ($\widehat{MDN}$ nhọn vì ΔMND vuông tại N).

Ta có: $DN = \sqrt{AD^2 + AN^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét ΔMND vuông tại N, có:

$\tan MDN = \frac{MN}{DN} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $\tan(DM;(ABCD)) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có $AB = BC = a$, $AD = 2a$, có SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD. Tính cosin của góc giữa MN và (SAC).

Lời giải

+) Xác định giao điểm của MN và (SAC):

+) Chọn mp chứa MN là mp(SBN)

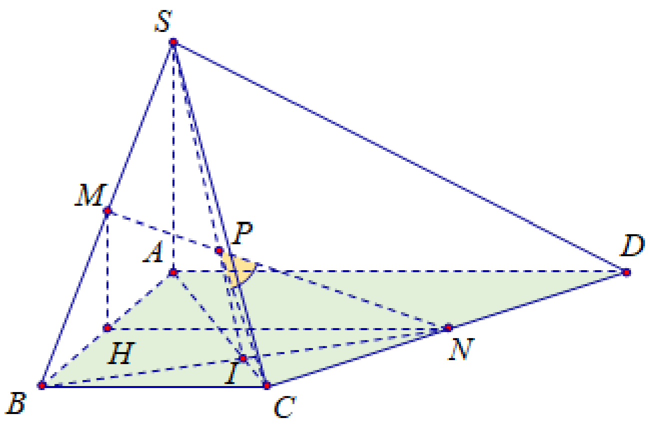
+) Giao tuyến $(SBN)\cap(SAC)=SI$ Trong (SBN) gọi $SI\cap MN=P$, suy ra $P=MN\cap(SAC)$.

+) Xác định góc $\widehat{(MN,(SAC))}$:

+) Ta có $AC^2=AB^2+BC^2=2a^2$; $CD^2=CK^2+KD^2=2a^2$; $AD^2=(2a)^2=4a^2$

$\Rightarrow AC^2+CD^2=AD^2 \Rightarrow \Delta ACD$ vuông tại $C \Rightarrow CD\perp AC$ mà $CD\perp SA$ nên $CD\perp(SAC)$

+) Góc $\widehat{(MN,(SAC))}=\widehat{(MN,PC)}=\widehat{NPC}$



+) Tính góc $\widehat{NPC}$:

+) Ta có $NC=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+) Ta có I là trung điểm BN và M là trung điểm SB suy ra P là trọng tâm $\Delta SBN \Rightarrow PN=\dfrac{2}{3}MN$

+) Gọi H trung điểm AB suy ra $MH//SA$ do đó ΔMNH vuông tại H. $\Rightarrow MN=\sqrt{MH^2+HN^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a+2a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ do đó $PN=\dfrac{2}{3}MN=\dfrac{a\sqrt{10}}{3}$.

Từ đó suy ra $PC=\sqrt{PN^2-NC^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{10}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{22}}{6}$

+) Cosin của góc $\widehat{NPC}$: $\cos\widehat{NPC}=\dfrac{PC}{PN}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{22}}{6}}{\dfrac{a\sqrt{10}}{3}}=\dfrac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 38: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$, $AC=a\sqrt{2}$, $BC=a$, $\widehat{ACB}=135°$. Hình chiếu vuông góc của C' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của AB. Tính góc tạo bởi đường thẳng $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$?

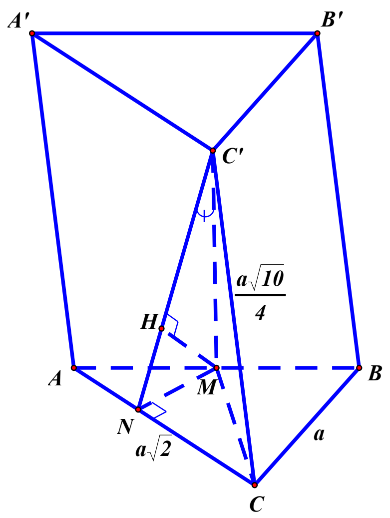
Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.
2. Hướng giải: Vẽ hình, chú ý đường cao của lăng trụ là $C'M$.
B1: Xác định góc giữa $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Ta tìm hình chiếu vuông góc của $C'M$ với mặt phẳng $(ACC'A')$. Từ M kẻ đường vuông góc với AC, ta xác định được góc.

B2: Đưa góc giữa đường thẳng và mặt phẳng về tính góc trong tam giác vuông.

B3: Dựa vào giả thiết tính độ dài 2 cạnh của tam giác vuông. Từ đó suy ra số đo góc của tam giác vuông.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:



Từ M kẻ $MN\perp AC\Rightarrow AC\perp(MNC')\Rightarrow NC'\perp AC$

Kẻ $MH\perp NC'\Rightarrow MH\perp(ACC'A')\Rightarrow$ hình chiếu của MC' lên $(ACC'A')$ là $HC'\Rightarrow\widehat{MC'H}$ là góc giữa MC' và $(ACC'A')$.

Xét ΔABC có $AB^2=AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\widehat{ACB}=2a^2+a^2-2.a\sqrt{2}.a.\cos135°=5a^2$

$\Rightarrow AB=a\sqrt{5}$.

Ta lại có: $\dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{BC}{\sin\widehat{BAC}}\Rightarrow\sin\widehat{BAC}=\dfrac{BC.\sin\widehat{ACB}}{AB}=\dfrac{a.\sin135°}{a\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2.\sqrt{5}}$.

Xét ΔMAN có $\sin\widehat{BAC}=\dfrac{MN}{AM}\Rightarrow MN=AM.\sin\widehat{BAC}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

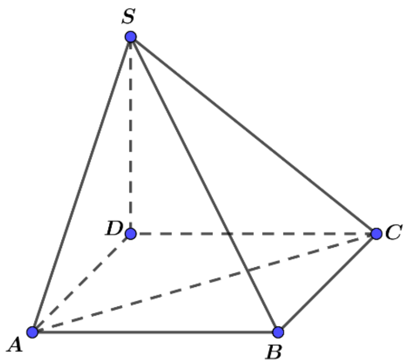
Xét ΔMAN có $MC^2 = \dfrac{AC^2 + BC^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{2a^2 + a^2}{2} - \dfrac{5a^2}{4} = \dfrac{a^2}{4}$.

Xét ΔMNC vuông ở N có: $NC^2 = MC^2 - MN^2 = \dfrac{a^2}{4} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{a^2}{8}$.

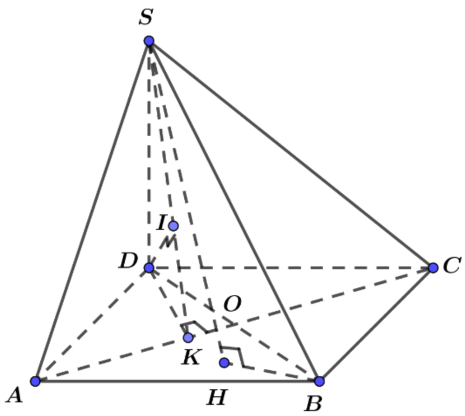
Xét $\Delta NCC'$ vuông ở N có: $NC'^2 = CC'^2 - NC^2 = \left(\dfrac{a\sqrt{10}}{4}\right)^2 - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow NC' = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

Xét $\Delta MNC'$ vuông ở M có $\sin\widehat{NC'M} = \dfrac{MN}{NC'} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{a} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NC'M} = 30°$.

Câu 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bính hành, $AB = 2a, BC = a, \widehat{ABC} = 120^0$. Cạnh bên $SD = a\sqrt{3}$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính sin của góc tạo bởi SB và mặt phẳng (SAC).



Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên mặt phẳng (SAC) khi đó $\left(\widehat{SB,(SAC)}\right) = \widehat{BSH}$

Nên $\sin\left(\widehat{SB,(SAC)}\right) = \sin\widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{d(B,(SAC))}{SB}$ (*)

Lại có $\dfrac{d(B,(SAC))}{d(A,(SAC))} = \dfrac{BO}{DO} = 1 \Rightarrow \sin\widehat{BSH} = \dfrac{BH}{SB} = \dfrac{d(A,(SAC))}{SB}$

Kẻ $DK \perp AC, DI \perp SK \Rightarrow d(A,(SAC)) = DI$

Trong $\Delta ADC: AC=\sqrt{DA^2+DC^2-2DA.DC.\cos\widehat{ADC}}=a\sqrt{7}.$

$S_{\Delta DAC}=\dfrac{1}{2}DA.DC.\sin\widehat{ADC}=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}; DK=\dfrac{2S_{\Delta DAC}}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}a.$

Xét tam giác vuông SDK có đường cao DI suy ra $DI=\sqrt{\dfrac{SD^2.DK^2}{SD^2+DK^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$

Trong $\Delta ABD: BD=\sqrt{DA^2+AB^2-2DA.AB.\cos\widehat{DAB}}=a\sqrt{3}.$

$SB=\sqrt{SD^2+DB^2}=a\sqrt{6}.$

Thay vào (*) ta được $\sin\widehat{BSH}=\dfrac{AI}{SB}=\dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{4}.$

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 5: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và

hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P)

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm **A.**

Trên d chọn điểm B khác A, dựng BH vuông góc với (P) tại H. Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).

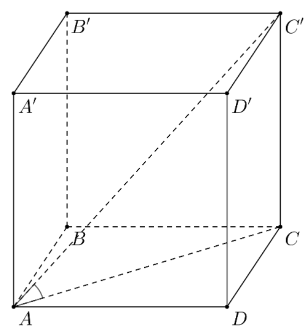
Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)), thì ta sử dụng công thức sau đây. Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra:

. $\sin\alpha = \dfrac{d\left(M,(P)\right)}{AM}$

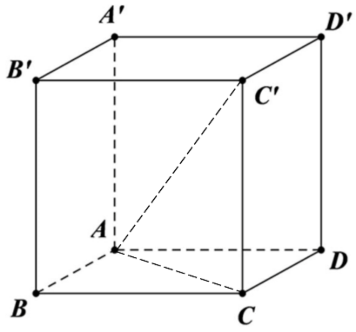
Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Câu 1: **(MĐ 103-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

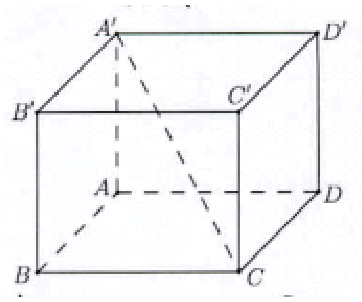
Câu 2: **(MĐ 104-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

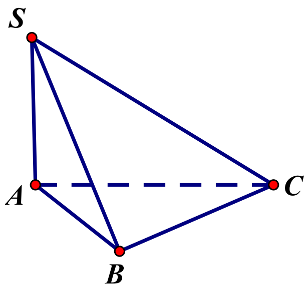
C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: **(ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2020-2021)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Câu 4: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$.(minh họa như hình vẽ bên).

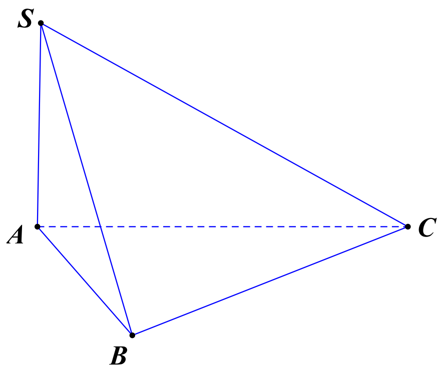


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$.

Câu 5: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = \sqrt{3}a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$.

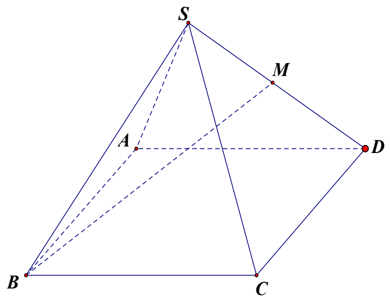
Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng



A. 60°. **B.** 45°.

C. 30°. **D.** 90°.

Câu 6: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Câu 7: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$ **B.** $90°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

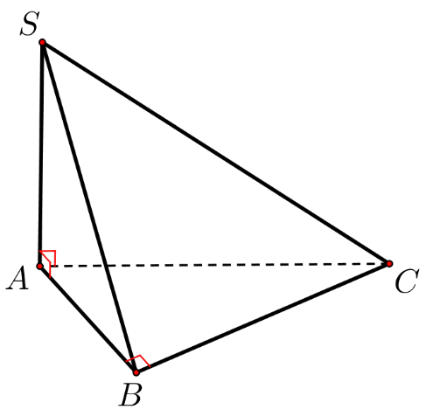
Câu 8: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$ **B.** $60°$ **C.** $30°$ **D.** $90°$

Câu 9: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$ **B.** $90°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

Câu 10: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

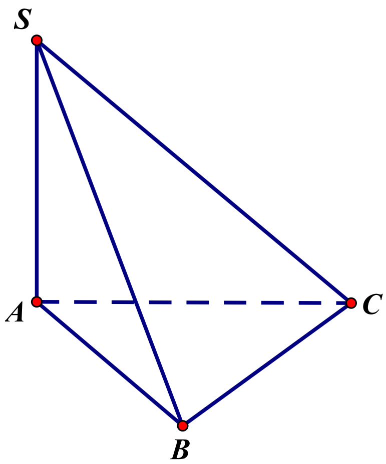


A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Câu 11: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

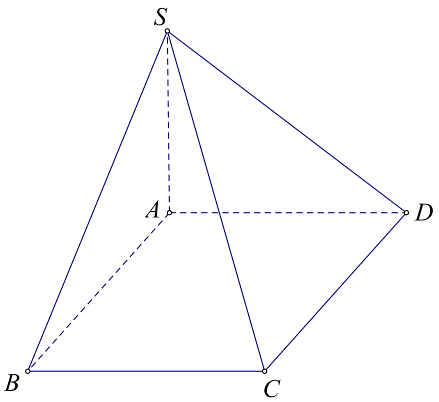
A. 90^o. **B.** 30^o. **C.** 60^o. **D.** 45^o.

Câu 12: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



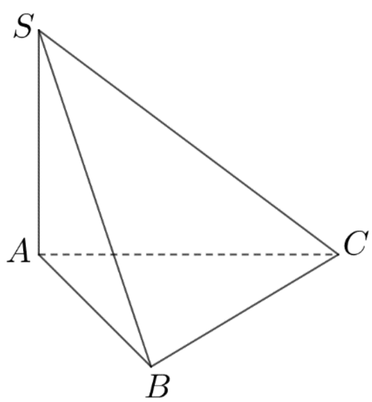
A. $45°$. **B.** $60°$.
C. $30°$. **D.** $90°$

Câu 13: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 01)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



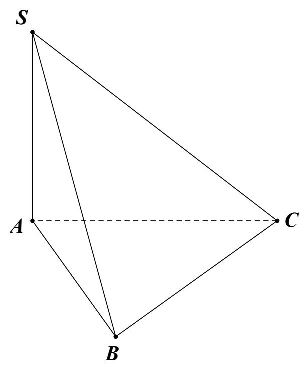
A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 14: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 02)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30^o. **B.** 45^o. **C.** 60^o. **D.** 90^o.

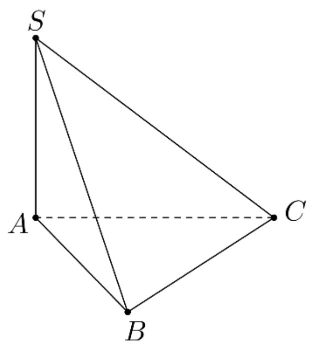
Câu 15: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{15}a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45°. **B.** 30°.
C. 60°. **D.** 90°.

Câu 16: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, BC=3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng

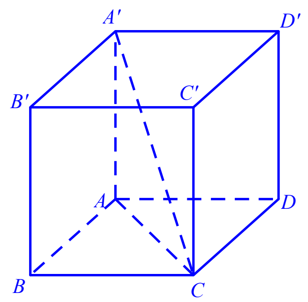


A. 45°. **B.** 90°.
C. 60°. **D.** 30°.

Câu 17: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$; $BC=a\sqrt{2}$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SC và đáy bằng

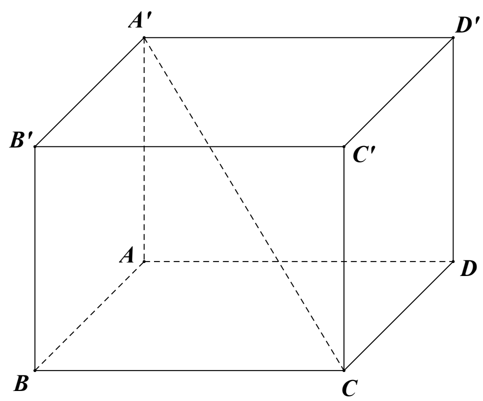
A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Câu 18: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=BC=a, AA'=\sqrt{6}a$ (tham khảo hình dưới). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



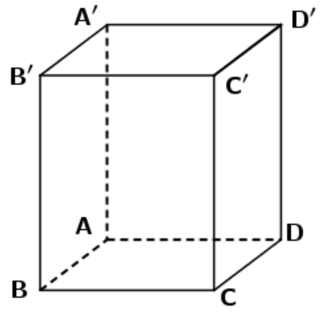
A. 60°. **B.** 90°.
C. 30°. **D.** 45°.

Câu 19: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2\sqrt{2}a$, $AA'=\sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45°. **B.** 90°. **C.** 60°. **D.** 30°.

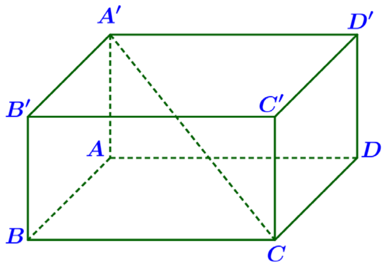
Câu 20: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a,\ AD = \sqrt{3}a,\ AA' = 2\sqrt{3}a$ (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

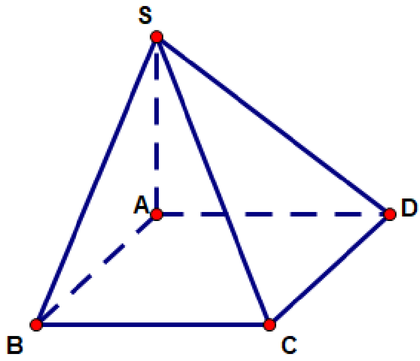
A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 21: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 90°. **D.** 60°.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$ (tham khảo hình dưới đây).



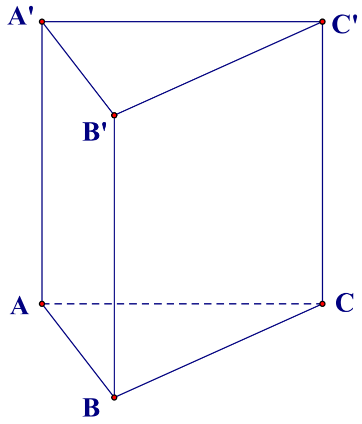
Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là

A. $\widehat{ASD}$. **B.** $\widehat{DAS}$. **C.** $\widehat{SDA}$. **D.** $\widehat{SDC}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = a$, $SB \perp (ABC)$, $SB = a\sqrt{2}$. Gọi góc giữa SC và (SAB) là α. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. **C.** $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan\alpha = \sqrt{3}$.

Câu 24: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 3a$.



Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

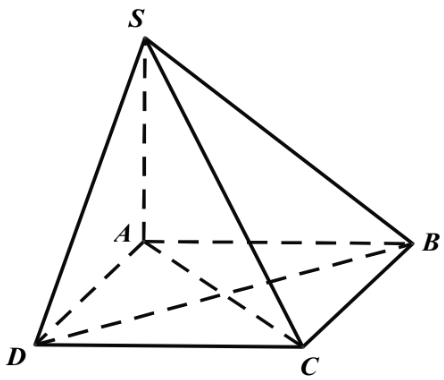
Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SB và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$, ta được kết quả là

A. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{14}$. **C.** $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = \sqrt{3}a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Số đo góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng:

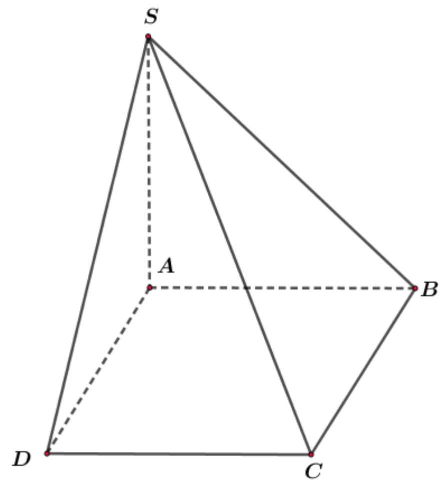


A. $90°$. **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc φ giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC)

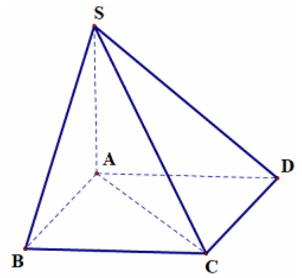
A. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{10}$. **C.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với $AC = 5\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 5$. Góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng



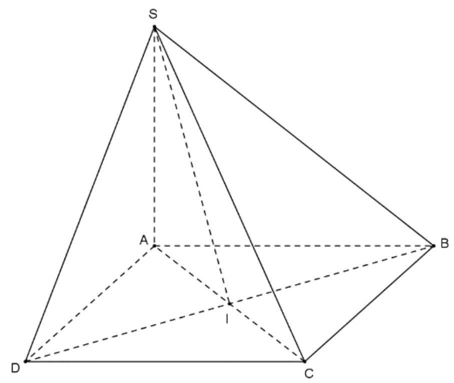
A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$, $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là



A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I, cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó tang của góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng $(ABCD)$ là



A. $\sqrt{6}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

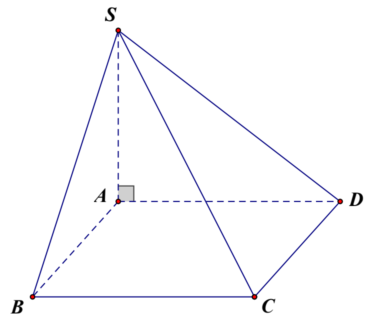
Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, tam giác ABD đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=a$. Côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA=3a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tan góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD)?



A. $\frac{\sqrt{19}}{19}$. **B.** 3.

C. $\frac{1}{3}$. **D.** $\sqrt{19}$.

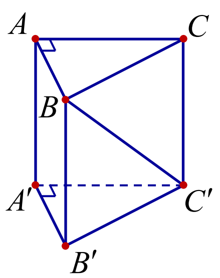
Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, có $SA\perp(ABCD)$, $SA=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA\perp(ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AC=a\sqrt{2}$, $SA=a$. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

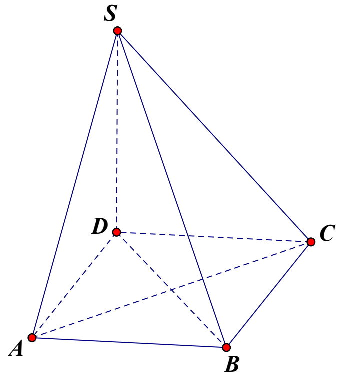
A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 37: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC=AA'=a\sqrt{2}$. Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy.



Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là:

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Câu 39: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60^0, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{41}}{41}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC đều cạnh có độ dài bằng a. Gọi $\alpha = (AB,(SBC))$, khi đó $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Câu 41: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại $A, AB = a\sqrt{3}, AC = AA' = a$. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, O là giao điểm của AC và BD, $\widehat{ABC} = 60°$; SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(53°;61°)$. **B.** $(62°;66°)$. **C.** $(27°;33°)$. **D.** $(25°;27°)$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD. Khi đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng

A. 45^o **B.** 60^o **C.** 30^o **D.** 90^o

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{5}$, đáy là tam giác vuông tại A với $AB=a$, $AC=2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC). Giá trị của tan α bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2}{5}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** 2.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=AB$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC,SC. Góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng.

A. 45^0. **B.** 30^o. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $4a$, $SO\perp(ABC)$. Gọi I là trung điểm cạnh CD, H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên SI. Biết $OH=a\sqrt{2}$. Khi đó số đo của góc giữa đường thẳng SO và (SCD) bằng

A. $30°$ **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Câu 47: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là $2a$, $SA=3a$. Tính **sin** của góc giữa BC và mặt phẳng (SAB)?

A. $\frac{\sqrt{46}}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{23}}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{46}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{23}}{4}$.

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông ở B với $AB=3$, $BC=4$, $SC\perp(ABC)$, $d(C;SA)=4$.Gọi E là hình chiếu của B lên SA Tính côsin của góc tạo bởi BE và (SAC).

A. $\frac{5\sqrt{34}}{34}$. **B.** $\frac{3\sqrt{17}}{17}$. **C.** $\frac{2\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB=a, SD=a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (SCD) thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(0°;20°)$. **B.** $(20°;40°)$. **C.** $(40°;60°)$. **D.** $(60°;80°)$.

Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $AA'=a\sqrt{2}$. Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 45^0.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB,SD. tan của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA=a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD. Khi đó giá trị tan của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng:

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

CHƯƠNG VIII

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 5: GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. GÓC NHỊ DIỆN

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VỚI MẶT PHẲNG

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là góc giữa d và

hình chiếu của nó trên mặt phẳng (P)

Gọi α là góc giữa d và mặt phẳng (P) thì $0° \le \alpha \le 90°$

Đầu tiên tìm giao điểm của d và (P) gọi là điểm **A.**

Trên d chọn điểm B khác A, dựng BH vuông góc với (P) tại H. Suy ra AH là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P).

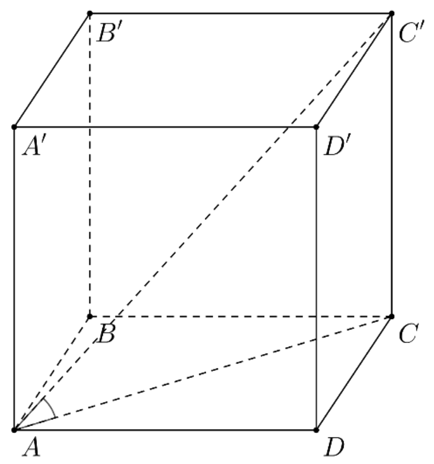
Vậy góc giữa d và (P) là góc $\widehat{BAH}$.

Nếu khi xác định góc giữa d và (P) khó quá (không chọn được điểm B để dựng BH vuông góc với (P)), thì ta sử dụng công thức sau đây. Gọi α là góc giữa d và (P) suy ra:

. $\sin\alpha = \dfrac{d\left(M,(P)\right)}{AM}$

Ta phải chọn điểm M trên d, mà có thể tính khoảng cách được đến mặt phẳng (P). Còn A là giao điểm của d và mặt phẳng (P).

Câu 1: **(MĐ 103-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

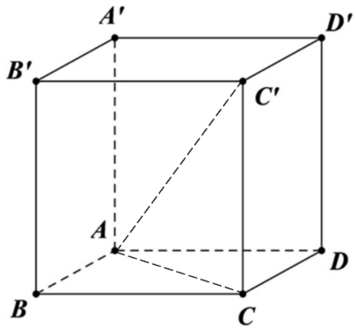
Chọn A

Ta có $\left(\widehat{AC',(ABCD)}\right)=\left(\widehat{AC',AC}\right)=\widehat{C'AC}=\alpha$.

Giả sử hình lập phương có cạnh là a

Trong tam giác $A'AC$ ta có $\sin\alpha=\frac{CC'}{AC'}=\frac{a}{\sqrt{2a^2+a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: **(MĐ 104-2022)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

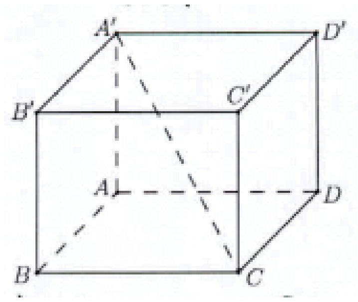
Lời giải

Chọn A

- Ta có AC' là đường chéo hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ $\Rightarrow AC'=AB.\sqrt{3}$

$\begin{cases} CC'\perp(ABCD) \\ AC'\cap(ABCD)=A \end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{AC',(ABCD)}\right)=\widehat{C'AC}$, $\sin\widehat{C'AC}=\frac{CC'}{AC'}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3: **(ĐỀ THAM KHẢO BGD&ĐT NĂM 2020-2021)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



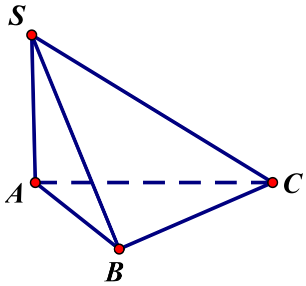
A. 30°.　　**B.** 45°.　　**C.** 60°.　　**D.** 90°.

Lời giải

Góc cần tìm là $\widehat{A'CA} = \alpha$. Vì đáy là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ và

$$\tan\alpha = \frac{AA'}{AC} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}.$$

Câu 4: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$.(minh họa như hình vẽ bên).

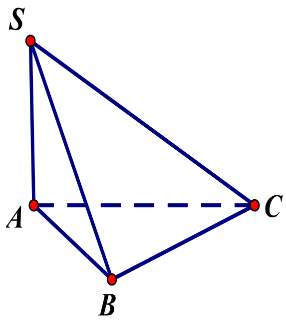


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 60°.　　**B.** 45°.　　**C.** 30°.　　**D.** 90°.

Lời giải

Chọn B

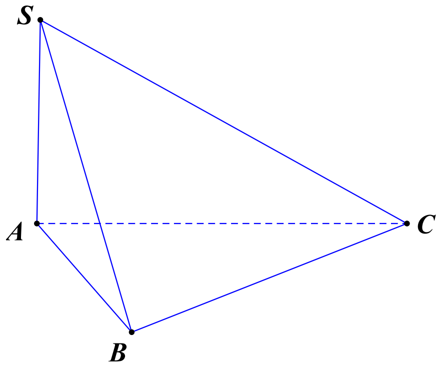


Ta có: $\begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = (\widehat{SC,AC}) = \widehat{SCA}$.

Mà: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a = SA$.

Vì ΔSAC vuông cân tại A nên ta có $\widehat{SCA} = 45°$.

Câu 5: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = \sqrt{3}a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

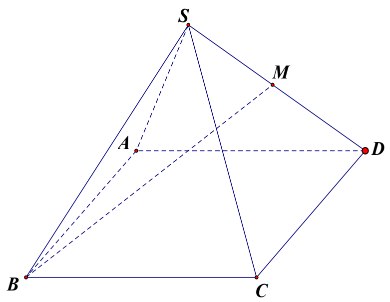
Lời giải

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa SC và (ABC) bằng $\widehat{SCA}$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2a\sqrt{3}$.

Suy ra $\tan \widehat{ASC} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SAC} = 30^{\circ}$.

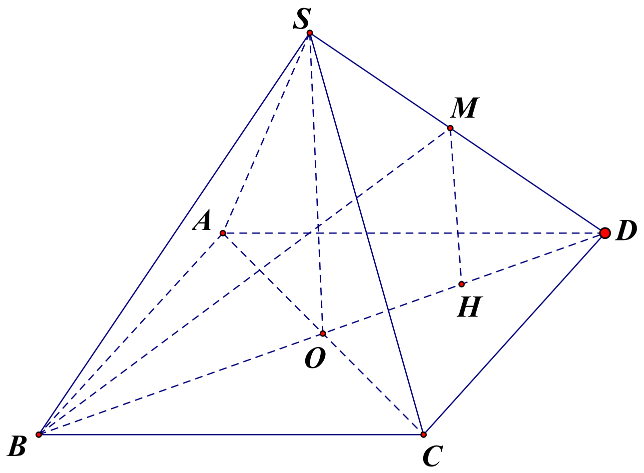
Câu 6: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a. Gọi M là trung điểm của SD. Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH // SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ và $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{MBH}$.

Khi đó ta có $\tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}$.

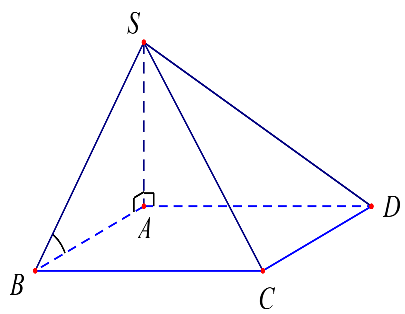
Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$

Câu 7: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. $60°$ **B.** $90°$ **C.** $30°$ **D.** $45°$

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SBA}$.

Ta có $\cos\widehat{SBA}=\dfrac{AB}{SB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{SBA}=60^\circ$.

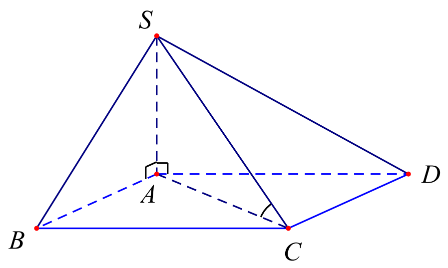
Vậy góc giữa đường thẳng SB và và mặt phẳng đáy bằng bằng 60°.

Câu 8: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° **B.** 60° **C.** 30° **D.** 90°

Lời giải

Chọn A



Do $SA\perp(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc $\widehat{SCA}$.

Ta có $SA=\sqrt{2}a$, $AC=\sqrt{2}a$ $\Rightarrow\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=1\Rightarrow\widehat{SCA}=45^\circ$.

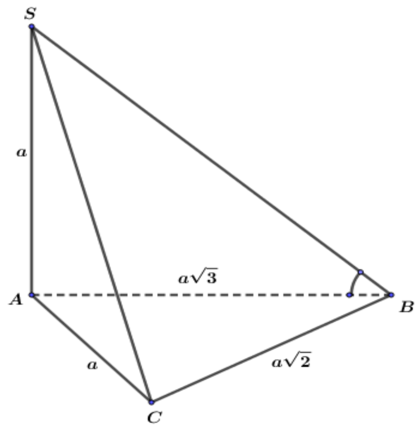
Vậy góc giữa đường thẳng SC và và mặt phẳng đáy bằng bằng 45°.

Câu 9: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2017-2018)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C, $AC=a$, $BC=\sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

A. 60° **B.** 90° **C.** 30° **D.** 45°

Lời giải

Chọn C



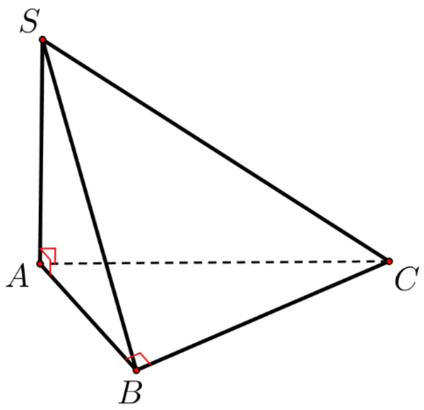
Có $SA\perp(ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC).

$\Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB, AB}\right) = \widehat{SBA}$.

Mặt khác có ΔABC vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

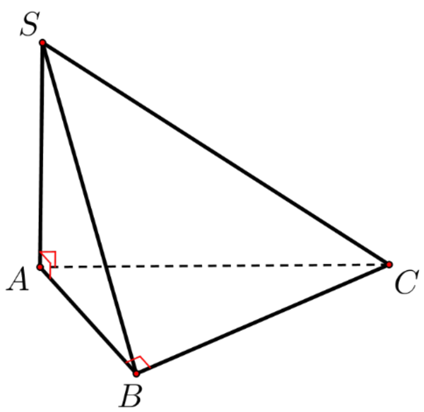
Khi đó $\tan \widehat{SBA} = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên $\left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = 30°$.

Câu 10: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 90°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 60°.

Lời giải



Ta thấy hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là AC nên $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right) = \widehat{SCA}$.

Mà $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$ nên $\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = 1$.

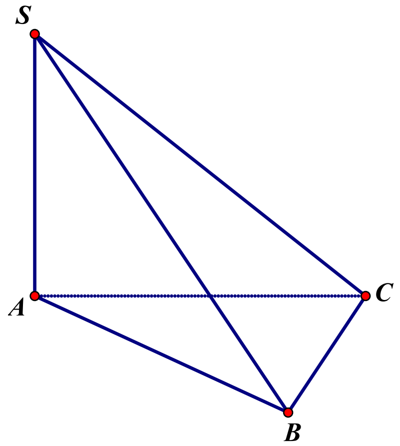
Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

Câu 11: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

A. 90^o. **B.** 30^o. **C.** 60^o. **D.** 45^o.

Lời giải

Chọn D



Ta có: SA vuông góc với mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow$ A là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC)

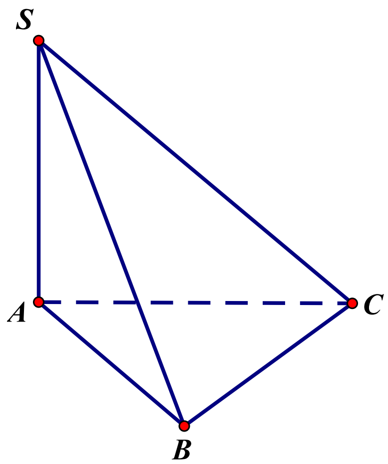
$\Rightarrow$ AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \left[\widehat{SC,(ABC)}\right] = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA}$

ΔABC vuông tại B $\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$

$\tan\widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^o \Rightarrow \left[\widehat{SC,(ABC)}\right] = 45^o$.

Câu 12: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2018-2019)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. $45°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $90°$

Lời giải

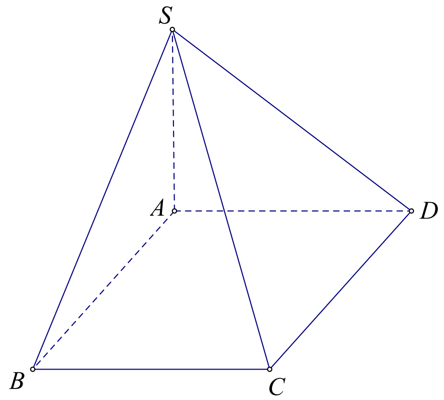
Chọn A

Vì tam giác ABC vuông cân tại B $\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

Ta có $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=\widehat{SCA}$

Mà $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}=1\Rightarrow\widehat{SCA}=45°$.

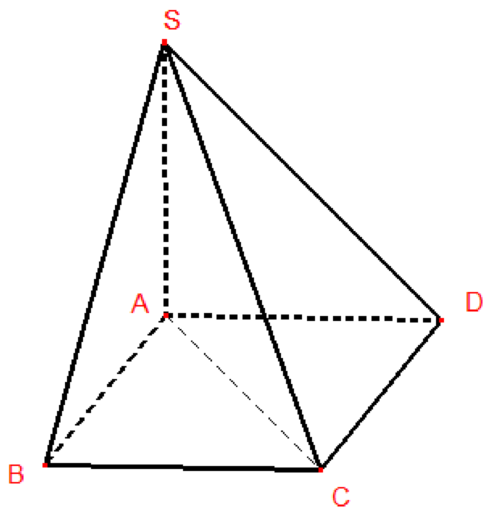
Câu 13: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 01)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B



Vì $SA\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

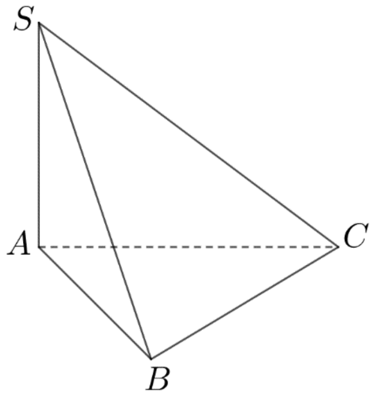
Do đó góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$

Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$ nên: $AC=a\sqrt{6}$

Ta có: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy: $\widehat{SCA}=30^\circ$.

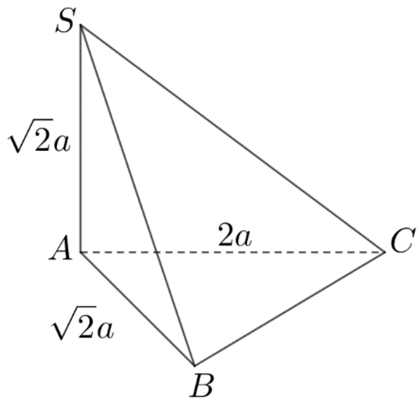
Câu 14: **(ĐTK BGD&ĐT NĂM 2019-2020 LẦN 02)** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=\sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 30°. **B.** 45°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SB\cap(ABC)=B$; $SA\perp(ABC)$ tại A.

$\Rightarrow$ Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB.

$\Rightarrow$ Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\alpha=\widehat{SBA}$.

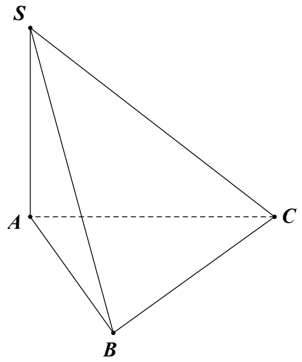
Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AC=2a$ nên $AB=\dfrac{AC}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a=SA$.

Suy ra tam giác SAB vuông cân tại A.

Do đó: $\alpha=\widehat{SBA}=45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45°.

Câu 15: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a$, $BC=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{15}a$.



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C

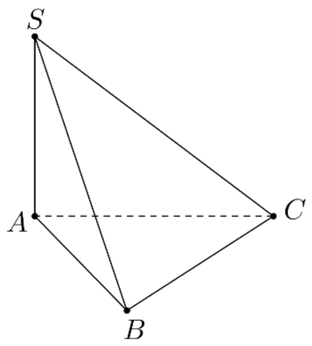
Do SA vuông góc với mặt phẳng đáy nên AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng đáy. Từ đó suy ra: $\left(\widehat{SC;(ABC)}\right)=\left(\widehat{SC;AC}\right)=\widehat{SCA}$.

Trong tam giác ABC vuông tại B có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+4a^2}=\sqrt{5}a$.

Trong tam giác SAC vuông tại A có: $\tan\widehat{SCA}=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{\sqrt{15}a}{\sqrt{5}a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{SCA}=60°$.

Vậy $\left(\widehat{SC;(ABC)}\right)=60°$.

Câu 16: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB=a, BC=3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=\sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



A. $45°$. **B.** $90°$.
C. $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên $\left(\widehat{SC,(ABC)}\right)=\widehat{SCA}$

Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{10}$

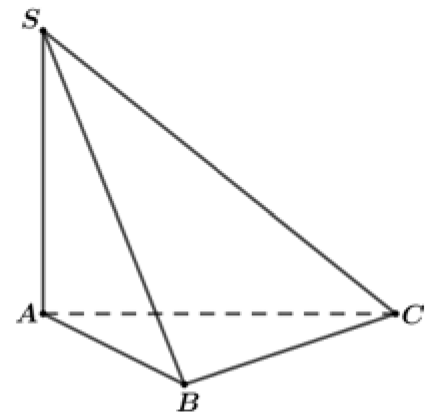
Khi đó $\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{30}}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^0$.

Câu 17: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020)** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$; $BC = a\sqrt{2}$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SC và đáy bằng

A. 90^0. **B.** 45^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn D



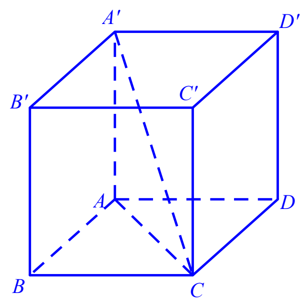
Ta có : Góc SC và đáy là góc $\widehat{SCA}$.

Xét tam giác SCA vuông tại A có:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$

$\tan \widehat{SCA} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^0$.

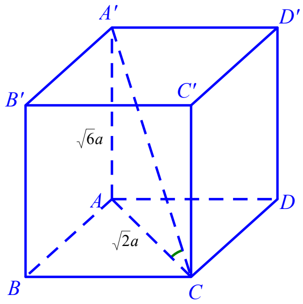
Câu 18: **(MĐ 101 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = BC = a, AA' = \sqrt{6}a$ (tham khảo hình dưới). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:



A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn A



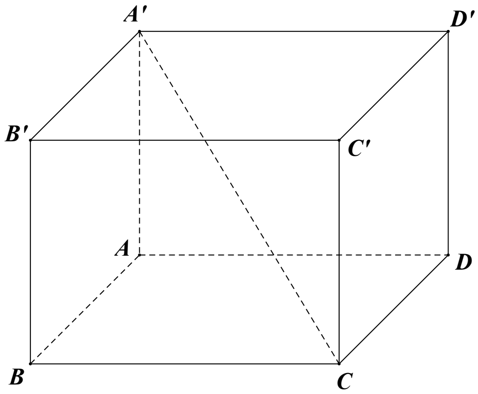
Ta có góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc giữa $A'C$ và AC và bằng góc $\widehat{A'CA}$.

Ta có $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=a\sqrt{2}$.

Xét tam giác $\Delta A'CA$ có $\tan\widehat{A'CA}=\dfrac{A'A}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}a}{\sqrt{2}a}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{A'CA}=60°$.

Vậy góc $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ và bằng $60°$.

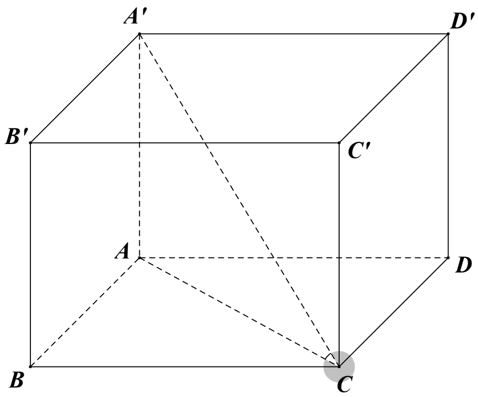
Câu 19: **(MĐ 102 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a$, $AD=2\sqrt{2}a$, $AA'=\sqrt{3}a$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



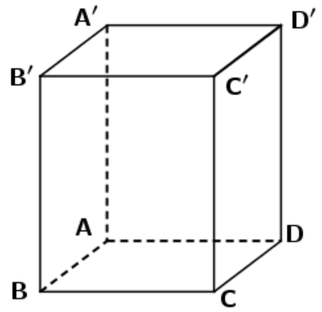
+) Ta có: $\left(\widehat{A'C,(ABCD)}\right)=\left(\widehat{A'C,AC}\right)=\widehat{ACA'}$.

+) Trong tam giác ABC vuông tại A, có: $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+8a^2}=3a$.

+) Trong tam giác ACA' vuông tại A, có: $\tan\widehat{ACA'}=\dfrac{AA'}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\widehat{ACA'}=30°$.

Vậy $\left(\widehat{A'C,(ABCD)}\right)=30°$.

Câu 20: **(MĐ 104 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a,\ AD=\sqrt{3}a,\ AA'=2\sqrt{3}a$ (tham khảo hình vẽ).

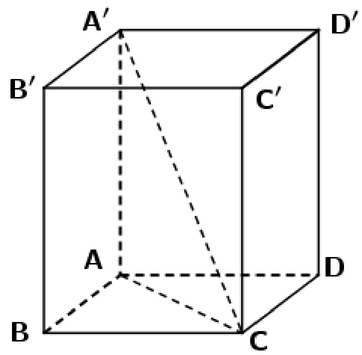


Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn C

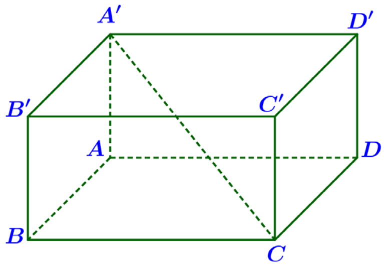


Do $A'A\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng $(ABCD)$

suy ra góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\widehat{A'CA}$.

$$\text{Có }\tan\widehat{A'CA}=\frac{A'A}{AC}=\frac{A'A}{\sqrt{AB^2+AD^2}}=\frac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{a^2+\left(\sqrt{3}a\right)^2}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{A'CA}=60°.$$

Câu 21: **(MĐ 103 BGD&ĐT NĂM 2019-2020 – ĐỢT 2)** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB=AA'=a$, $AD=a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 30°.　　**B.** 45°.　　**C.** 90°.　　**D.** 60°.

Lời giải

Chọn A

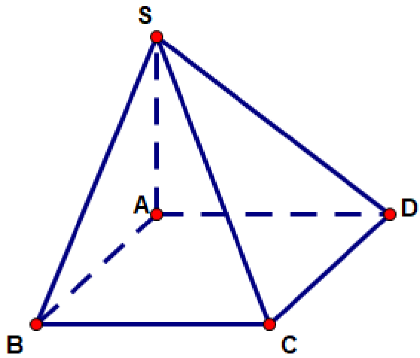
Vì $ABCD$ là hình chữ nhật, có $AB=a$, $AD=a\sqrt{2}$ nên

$AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$

Ta có $\left(A'C;\left(ABCD\right)\right)=\left(A'C;CA\right)=\widehat{A'CA}$

Do tam giác $A'AC$ vuông tại A nên $\tan\widehat{A'AC}=\dfrac{AA'}{AC}=\dfrac{a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{A'AC}=30^\circ$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA\perp\left(ABCD\right)$ (tham khảo hình dưới đây).



Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là

A. $\widehat{ASD}$.　　**B.** $\widehat{DAS}$.　　**C.** $\widehat{SDA}$.　　**D.** $\widehat{SDC}$.

Lời giải

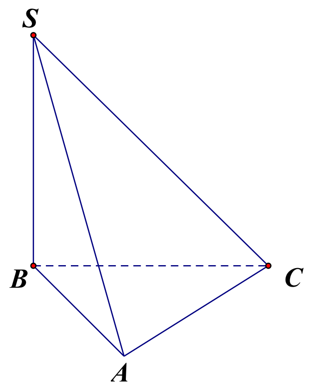
Chọn C

Hình chiếu của SD lên mp $\left(ABCD\right)$ là AD nên góc giữa SD và mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=a$, $SB\perp\left(ABC\right)$, $SB=a\sqrt{2}$. Gọi góc giữa SC và $\left(SAB\right)$ là α. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.　　**B.** $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$.　　**C.** $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　**D.** $\tan\alpha=\sqrt{3}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SAB)$

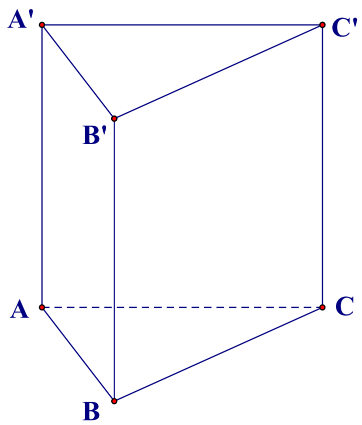
Suy ra, hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB) là $SA \Rightarrow (SC;(SAB)) = (SC;SA) = \widehat{ASC} = \alpha$

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $AC = AB = a$

Áp dụng định lý Py – ta – go vào tam giác SAB ta có: $SA = \sqrt{SB^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông tại A có: $\tan \widehat{ASC} = \dfrac{AC}{SA} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

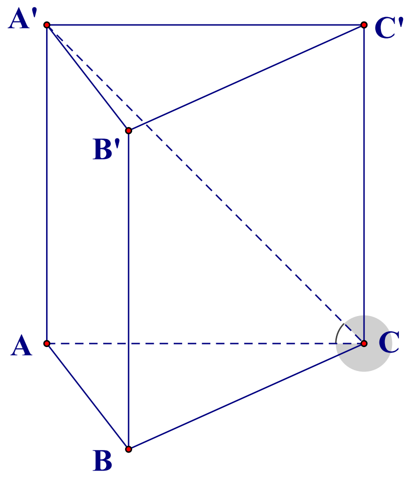
Câu 24: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $AA' = 3a$.



Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng

A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $30°$.

Lời giải



Ta có hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC) là AC.

Nên $\left(A'C,(ABC)\right)=(A'C,AC)=\widehat{A'CA}$.

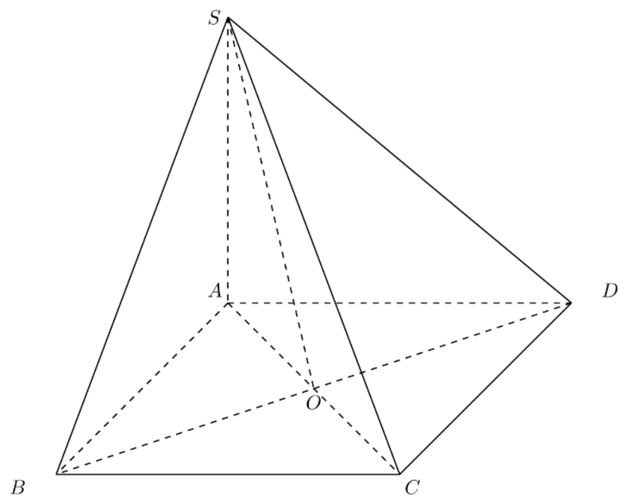
Ta có $\tan\widehat{A'CA}=\dfrac{A'A}{AC}=\dfrac{3a}{a\sqrt{3}}=\sqrt{3}\Rightarrow\widehat{A'CA}=60°$.

Do vậy $\left(A'C,(ABC)\right)=60°$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{6}$. Gọi α là góc giữa SB và mặt phẳng (SAC). Tính $\sin\alpha$, ta được kết quả là

A. $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{14}}{14}$. **C.** $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{1}{5}$.

Lời giải



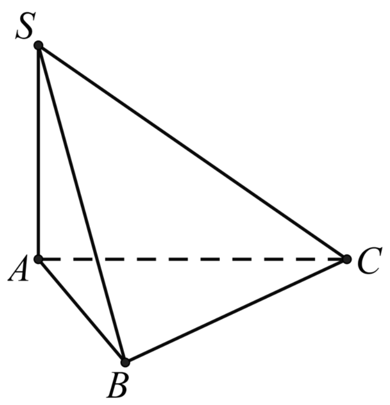
Dễ thấy $BO\perp(SAC)\Rightarrow\left(SB,(SAC)\right)=\widehat{BSO}$

$\sin\widehat{BSO} = \dfrac{BO}{SB} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{14}$

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $AB = 3a$, $BC = \sqrt{3}a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy (ABC) bằng

A. 60°. **B.** 45°. **C.** 30°. **D.** 90°.

Lời giải

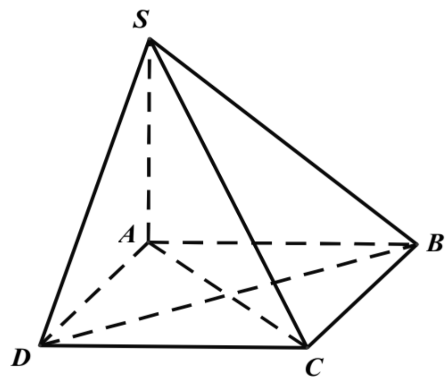


Ta có $SA \perp (ABC)$ nên góc giữa SC và (ABC) bằng $\widehat{ACS}$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{9a^2 + 3a^2} = 2a\sqrt{3}$.

Suy ra $\tan\widehat{ACS} = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{2a}{2a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ACS} = 30^\circ$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Số đo góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAB) bằng:



A. 90°. **B.** 60°. **C.** 45°. **D.** 30°.

Lời giải

Ta có $DA \perp (SAB)$ suy ra SA là hình chiếu của SD lên mặt phẳng (SAB).

Ta có $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right) = \left(\widehat{SD,SA}\right) = \widehat{ASD}$.

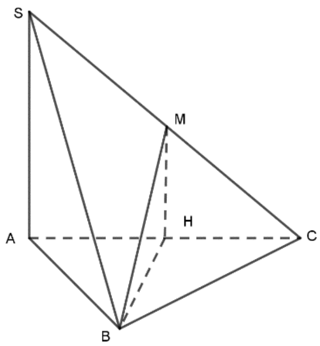
Tam giác SAD vuông tại A có $\tan\widehat{ASD}=\dfrac{AD}{SA}=\dfrac{a}{a}=1\ \Rightarrow \widehat{ASD}=45°$

Vậy $\left(\widehat{SD,(SAB)}\right)=45°$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc φ giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC)

A. $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. **B.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. **C.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$. **D.** $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{7}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của $AC \Rightarrow HM // SA, MH=\dfrac{SA}{2}=a$.

Mà $SA\perp(ABC)$.

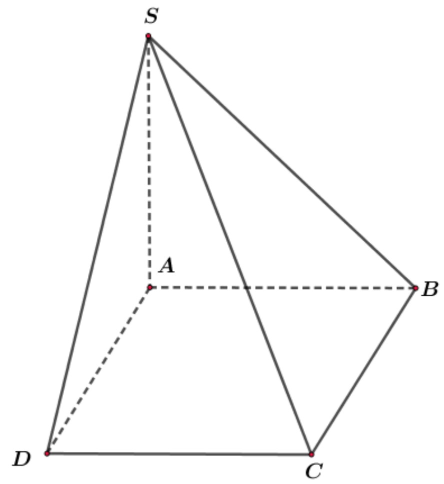
$\Rightarrow MH\perp(ABC)\Rightarrow \widehat{(BM,(ABC))}=\widehat{(BM,BH)}=\widehat{MBH}$.

Ta có: $BH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow BM=\sqrt{BH^2+MH^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+a^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

Trong tam giác vuông BMH ta có:

$$\cos\varphi=\cos\widehat{MBH}=\frac{BH}{BM}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông với $AC=5\sqrt{2}$. Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=5$. Góc giữa SD và mặt phẳng (SAB) bằng



A. $45°$. **B.** $90°$. **C.** $30°$. **D.** $60°$.

Lời giải

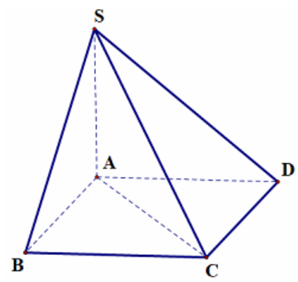
Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow (SD,(SAB)) = (SD, SA) = \widehat{DSA}$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} \Rightarrow AB = 5$

$\Rightarrow \tan\widehat{DSA} = \dfrac{AD}{SA} = \dfrac{5}{5} = 1 \Rightarrow \widehat{DSA} = 45°$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a$, $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a, AD = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là



A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

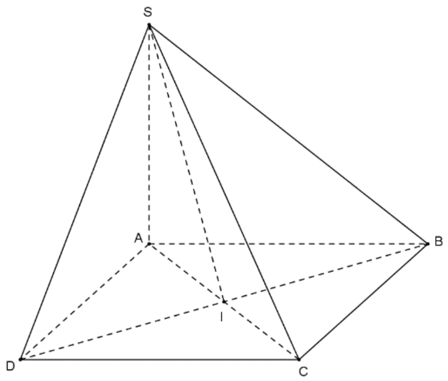
Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra $(SC,(ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = \alpha$.

Mặt khác $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác vuông SAC có $\tan\alpha = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^0$.

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm I, cạnh a. Biết SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó tang của góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng $(ABCD)$ là



A. $\sqrt{6}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{6}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AI là hình chiếu vuông góc của SI lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó, góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{(SI, AI)}$.

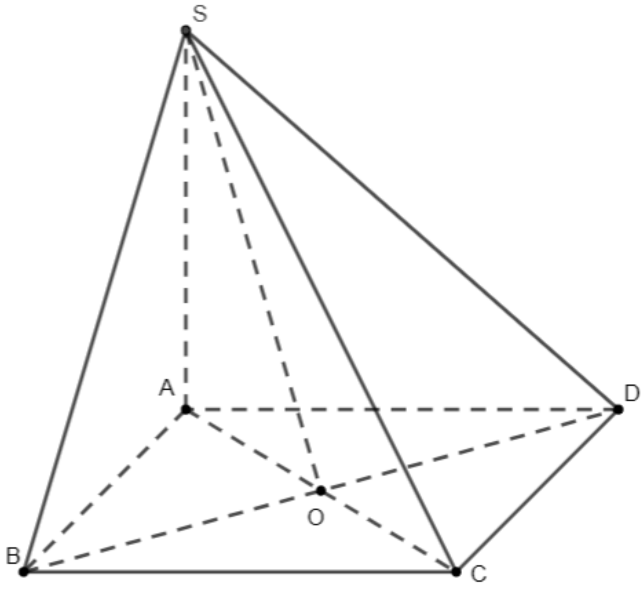
Xét tam giác SAI vuông tại A nên $\widehat{SIA} < 90° \Rightarrow \widehat{(SI, AI)} = \widehat{SIA}$.

$$\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}.$$

Câu 32: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, tam giác ABD đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. $45°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Ta có $\left(SO,\left(ABCD\right)\right)=\left(SO,OA\right)=\widehat{SOA}$.

Xét tam giác SAO vuông tại SO có

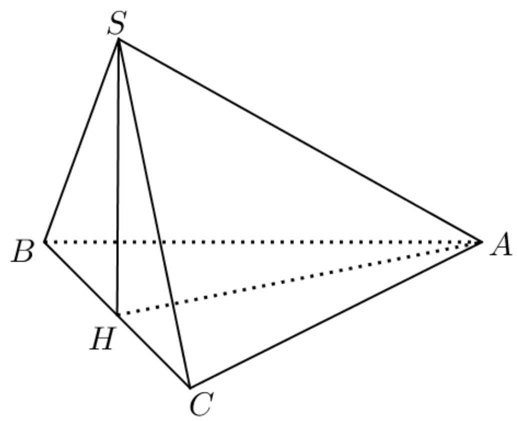
$$SA=\frac{3a\sqrt{2}}{2}, AO=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{AB^2-\left(\frac{BD}{2}\right)^2}=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{6}a}{2}.$$

Suy ra $\tan\widehat{SOA}=\frac{SA}{AO}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\widehat{SOA}=30^\circ$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là tam giác vuông tại A, cạnh $BC=a$. Côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $\left(ABC\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



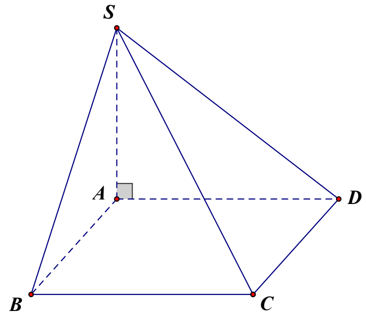
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên $\left(ABC\right)$.

Do $SA=SB=SC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC hay H là trung điểm của

$BC \Rightarrow AH = \dfrac{a}{2}$.

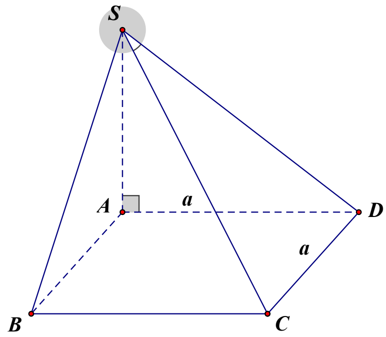
Ta có $\widehat{\left(SA,\left(ABC\right)\right)} = \widehat{SAH} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{AH}{SA} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = 3a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Tính tan góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(SAD\right)$?



A. $\dfrac{\sqrt{19}}{19}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\sqrt{19}$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình vuông suy ra $CD \perp AD$ (1).

Mặt khác, theo giả thiết ta có $SA \perp \left(ABCD\right)$ nên $SA \perp CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp \left(SAD\right) \Rightarrow SD$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $\left(SAD\right)$ Do đó $\widehat{\left(SC,(SAD)\right)} = \left(SC,SD\right) = \widehat{CSD}$.

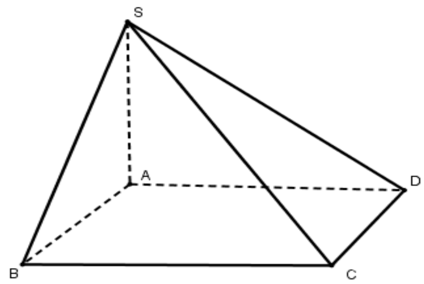
Xét tam giác SCD vuông tại D, ta có:

$$\tan\widehat{CSD} = \frac{CD}{SD} = \frac{CD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a}{\sqrt{\left(3a\sqrt{2}\right)^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{19}}{19}.$$

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, có $SA \perp \left(ABCD\right)$, $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ bằng

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải



Ta có

$BC \perp AB$.

$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$

Nên $BC \perp (SAB)$ và $BC \perp SB$.

Suy ra SC là hình chiếu của SB lên mặt phẳng (SAB).

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là góc giữa SC và SB hay góc $\widehat{CSB}$.

Trong tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

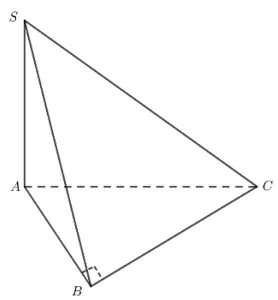
Trong tam giác SBC vuông tại B có: $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30°$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B, $AC = a\sqrt{2}$, $SA = a$. Gọi α là góc giữa SC và mặt phẳng (SAB). Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải



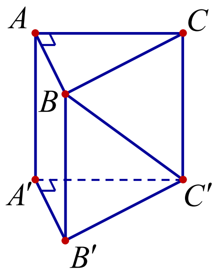
Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (1), tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow BC \perp BA$ (2);

$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BA = BC = a$ và $SB = a\sqrt{2}$

Từ $(1),(2) \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{SC,(SAB)} = \widehat{SC,SB} = \widehat{BSC} = \alpha$

Tam giác SBC vuông tại $B \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 37: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $BC = AA' = a\sqrt{2}$. Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

ΔABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a$.

$\Delta ABA'$ vuông tại A $\Rightarrow A'B = a\sqrt{3}$.

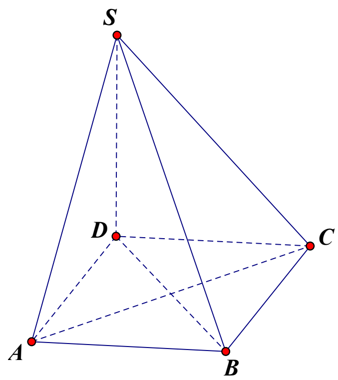
Ta có $\begin{cases} C'A' \perp A'B' \\ C'A' \perp AA' \end{cases} \Rightarrow C'A' \perp (ABB'A')$.

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

$\Rightarrow (BC';(ABB'A')) = (BC';BA')$.

$\Delta A'BC'$ vuông tại $A' \Rightarrow \tan\widehat{A'BC'} = \dfrac{A'C'}{A'B} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

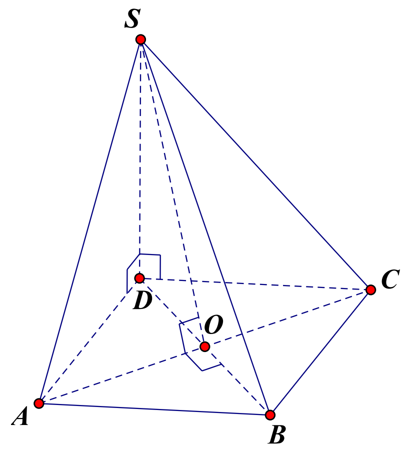
Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy.



Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là:

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 30^0. **D.** 60^0.

Lời giải



Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình vuông $ABCD$.

Vì $\begin{cases} SD \perp (ABCD) \\ AO \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SD \perp AO$.

Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ AO \perp SD \end{cases} \Rightarrow AO \perp (SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của AS lên mặt phẳng (SBD) suy ra $(SA,(SBD)) = \widehat{ASO}$.

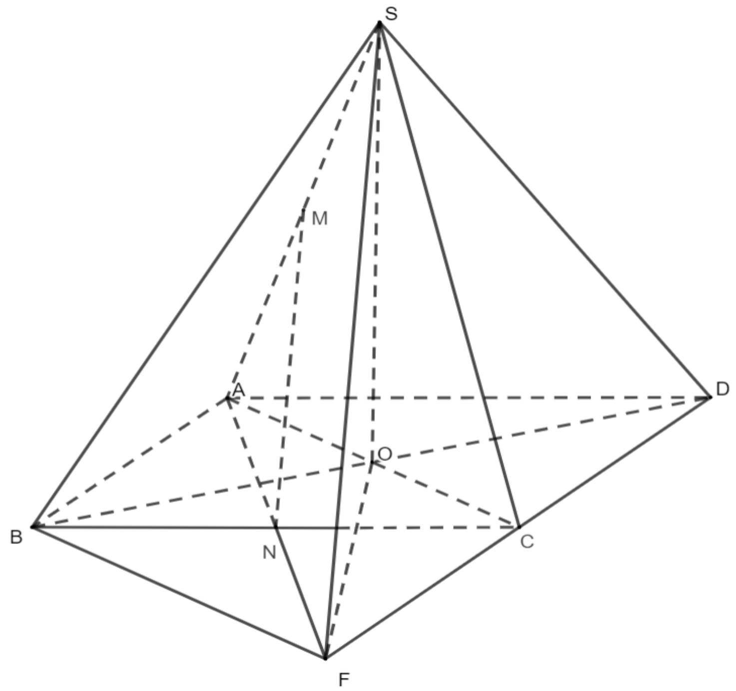
Tam giác AOS vuông tại O có: $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SA = \sqrt{SD^2 + DA^2} = a\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow \sin\widehat{ASO} = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30°.$$

Câu 39: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC. Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60^0, cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng:

A. $\dfrac{\sqrt{41}}{41}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{41}}{41}$.

Lời giải



Ta có $AN \cap CD = F \Rightarrow MN//SF$; $(MN,(ABCD)) = (SF,(ABCD)) = \widehat{SFO} = 60°$.

Với

$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}; CF = CD = a \Rightarrow OF = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2} - 2a\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos 135°} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

. Khi đó $SF = \frac{OF}{\cos 60°} = \frac{a\sqrt{10}}{2} : \frac{1}{2} = a\sqrt{10}$.

Ta có $OC \perp BD, OC \perp SO \Rightarrow OC \perp (SBD)$, lại có $OC//BF \Rightarrow BF \perp (SBD)$, do vậy $(MN,(SBD)) = (SF,(SBD)) = \widehat{FSB}$.

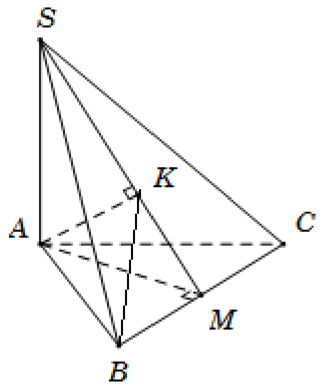
$BF = 2OC = a\sqrt{2}$ (OC là đường trung bình trong tam giác BDF), $SB = \sqrt{SF^2 - BF^2} = 2\sqrt{2}a$.

Vậy $\cos\widehat{BSF} = \frac{SB}{SF} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = a\sqrt{3}$, tam giác ABC đều cạnh có độ dài bằng a. Gọi $\alpha = (AB,(SBC))$, khi đó $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC. Kẻ đường cao AK của tam giác SAM.

Tam giác ABC đều $\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow AK \perp (SBC)$.

Suy ra $\alpha = (AB,(SBC)) = (AB,KB) = \widehat{ABK}$.

Xét tam giác ABM vuông tại A có

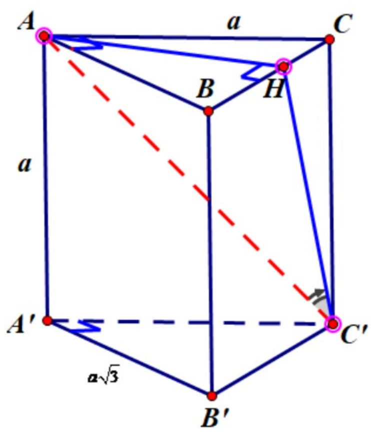
$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{3}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{3a^2} \Leftrightarrow AK = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Vì $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp BK$. Xét tam giác ABK vuông tại K có $\sin\alpha = \sin\widehat{ABK} = \frac{AK}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 41: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC vuông tại $A, AB = a\sqrt{3}, AC = AA' = a$. Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Lời giải



Hạ $AH \perp BC$, ta có $AH \perp (BCC'B')$. Do đó, $(AC';(BCC'B')) = \widehat{AC'H}$.

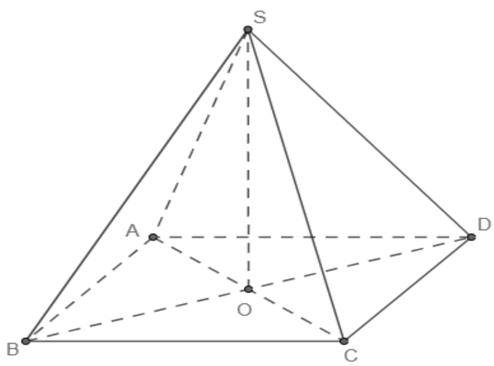
Trong tam giác ABC, ta có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\sin\widehat{AC'H}=\dfrac{AH}{AC'}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, O là giao điểm của AC và BD, $\widehat{ABC}=60°$; SO vuông góc với $(ABCD)$ và $SO=a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(53°;61°)$. **B.** $(62°;66°)$. **C.** $(27°;33°)$. **D.** $(25°;27°)$.

Lời giải



Ta có: $BD\perp AC$ và $BD\perp SO$

nên $BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$.

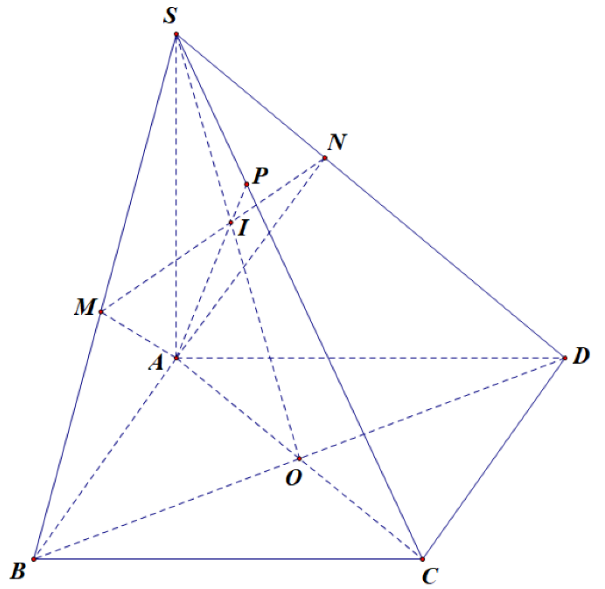
Mà $(SBD)\cap(SAC)=SO \Rightarrow\left(\widehat{SB,(SAC)}\right)=\left(\widehat{SB,SO}\right)=\widehat{BSO}$.

Ta có: $\tan\widehat{BSO}=\dfrac{OB}{SO}=\dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BSO}=\arctan\dfrac{1}{2}\approx 26,56°$.

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD. Khi đó góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng

A. 45^o **B.** 60^o **C.** 30^o **D.** 90^o

Lời giải



Cách 1:

Gọi $AC \cap BD = O$, $SO \cap MN = I$, $AI \cap SC = P$.

$AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$ và $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$, do đó: $SC \perp (AMN)$ hay $SC \perp (AMPN)$.

Suy ra: $(SB,(AMN)) = (SM,(AMPN)) = \widehat{SMP}$.

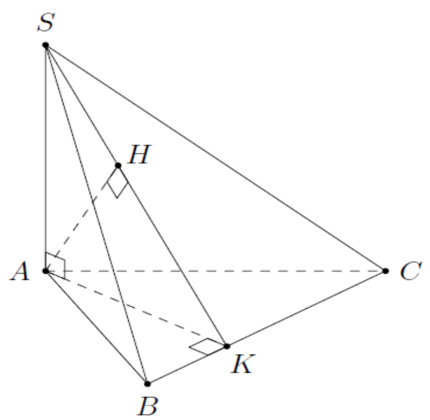
Ta có: $SM = \dfrac{SA^2}{SB} = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^2+a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$; $SP = \dfrac{SA^2}{SC} = \dfrac{2a^2}{\sqrt{2a^2+2a^2}} = a$.

Nên $\sin\widehat{SMP} = \dfrac{SP}{SM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SMP} = 60^o$.

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{5}$, đáy là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC). Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\dfrac{2}{5}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. **D.** 2.

Lời giải



Dựng AK vuông góc BC, AH vuông góc SK.

Ta có $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.

Mà $AH \perp SK$ nên $AH \perp (SBC)$.

Do đó SK là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBC) nên

$\alpha = (SA,(SBC)) = (SA,SK) = \widehat{ASK}$.

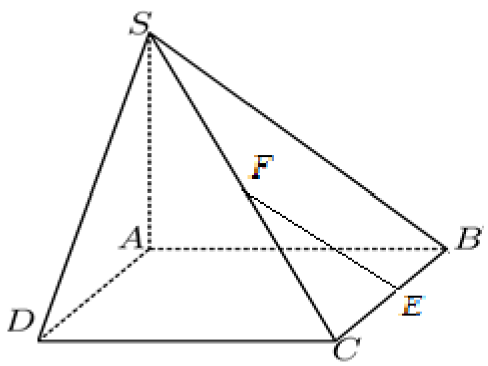
Ta có $AK = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Khi đó, $\tan\alpha = \dfrac{AK}{AS} = \dfrac{\frac{2a\sqrt{5}}{5}}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, SC. Góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng.

A. 45^0. **B.** 30^o. **C.** 60^0. **D.** 90^0.

Lời giải



Ta có:

$\begin{cases} AB \perp AD \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow (\widehat{EF,(SAD)}) = (\widehat{BS,(SAD)}) = (\widehat{BS,AS}) = \widehat{BSA}$.

Xét tam giác SAB vuông tại A và có $SA = AB$ suy ra $\widehat{BSA} = 45^0$.

Vậy góc giữa EF và mặt phẳng (SAD) bằng 45^0.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $4a$, $SO \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm cạnh CD, H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên SI. Biết $OH = a\sqrt{2}$. Khi đó số đo của góc giữa đường thẳng SO và (SCD) bằng

A. $30°$ **B.** $60°$. **C.** $45°$. **D.** $90°$.

Lời giải

$\left.\begin{matrix} SO\perp(ABCD) \\ CD\subset(ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SO\perp CD, OI\perp CD \Rightarrow CD\perp(SOI)$.

$OH\subset(SOI)\Rightarrow OH\perp CD$, $OH\perp SI \Rightarrow OH\perp(SIO) \Rightarrow (SO,(SCD)) = \widehat{OSI}$.

$OI = 2a, OH = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta OHI$ vuông cân tại $H \Rightarrow \widehat{HIO} = 45° \Rightarrow \widehat{OSI} = 45°$.

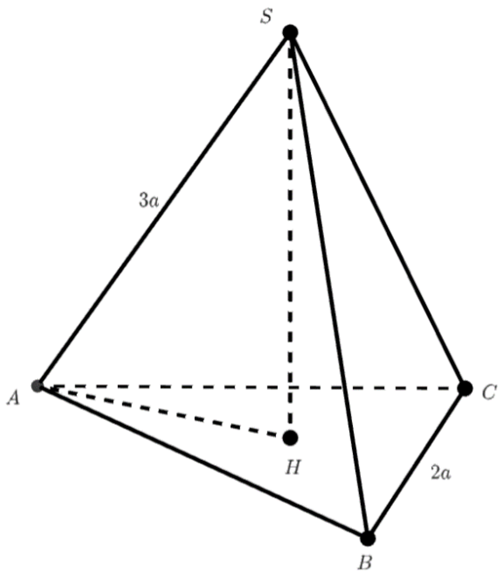
$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a \Rightarrow SD = SC = CD = a \Rightarrow \Delta SCD$ đều $\Rightarrow \widehat{SDC} = 60°$.

Suy ra $(AB, SD) = (CD, SD) = \widehat{SDC} = 60°$.

Câu 47: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là $2a$, $SA = 3a$. Tính **sin** của góc giữa BC và mặt phẳng (SAB)?

A. $\frac{\sqrt{46}}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{23}}{8}$. **C.** $\frac{\sqrt{46}}{4}$. **D.** $\frac{\sqrt{23}}{4}$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S xuống đáy.

$AH = \frac{2}{3}h_{\Delta ABC} = \frac{2}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{2}a = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

Chiều cao $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{69}}{3}a$.

Diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{\text{canh}^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC = \frac{1}{3}.\text{SH}.S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{23}}{3}a^3$.

Diện tích tam giác SAB : $S_{\Delta SAB} = \sqrt{p(p-SA)(p-SB)(p-AB)} = 2\sqrt{2}a^2$

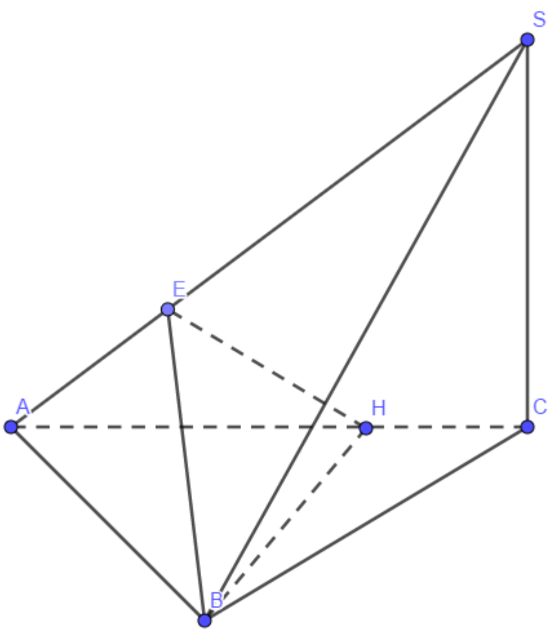
Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là: $d\left[C;(SAB)\right] = \dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{\sqrt{46}}{4}a.$

Sin góc giữa BC và mặt phẳng (SAB): $\sin = \dfrac{d\left[C;(SAB)\right]}{BC} = \dfrac{\sqrt{46}}{8}.$

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC là tam giác vuông ở B với $AB=3$, $BC=4$, $SC \perp (ABC)$, $d(C;SA)=4$.Gọi E là hình chiếu của B lên SA Tính côsin của góc tạo bởi BE và (SAC).

A. $\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.

Lời giải



Ta có

$SC \perp (ABCD)$

Kẻ $BH \perp AC (H \in AC) \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Ta có: $BE \perp SA$.

Suy ra góc tạo bởi hai mặt phẳng BE và (SAC) bằng góc $\widehat{BEH}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B có $BH \perp AC (H \in AC)$.

Suy ra $BH = \dfrac{BA.BC}{\sqrt{BA^2+BC^2}} = \dfrac{12}{5}$.

$AH.AC=AB^2\Rightarrow\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{9}{25}\Rightarrow\dfrac{d\left(H;SA\right)}{d\left(C;SA\right)}=\dfrac{9}{25}\Rightarrow\dfrac{HE}{4}=\dfrac{9}{25}\Rightarrow HE=\dfrac{36}{25}$.

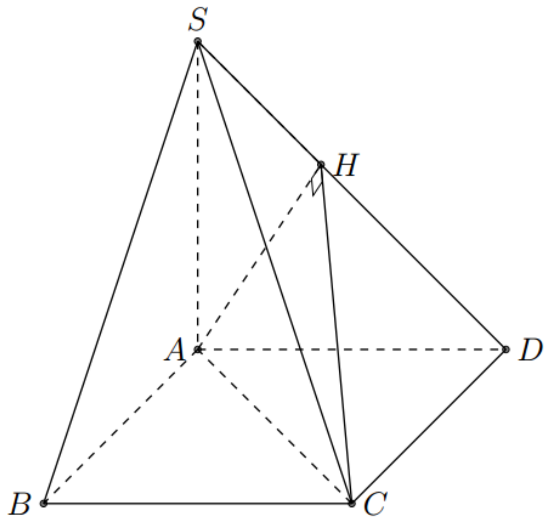
Xét tam giác BHE vuông tại H có

$\tan\widehat{BEH}=\dfrac{BH}{HE}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\cos\widehat{BEH}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\widehat{BEH}}}=\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$.

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết rằng $AB=a, SD=a\sqrt{5}$. Góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng $\left(SCD\right)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(0°;20°\right)$. **B.** $\left(20°;40°\right)$. **C.** $\left(40°;60°\right)$. **D.** $\left(60°;80°\right)$.

Lời giải



Kẻ $AH\perp SD$ tại H.

Ta có $AH\perp CD$.

Suy ra $AH\perp\left(SCD\right)$.

Khi đó HC là hình chiếu vuông góc của AC lên mặt phẳng $\left(SCD\right)$.

Suy ra $\widehat{\left(AC,\left(SCD\right)\right)}=\widehat{\left(AC,HC\right)}=\widehat{ACH}$.

Tam giác SAD vuông tại A và AH là đường cao nên

$SA=\sqrt{SD^2-AD^2}=2a$.

$\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{1}{\left(2a\right)^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{5}{4a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$.

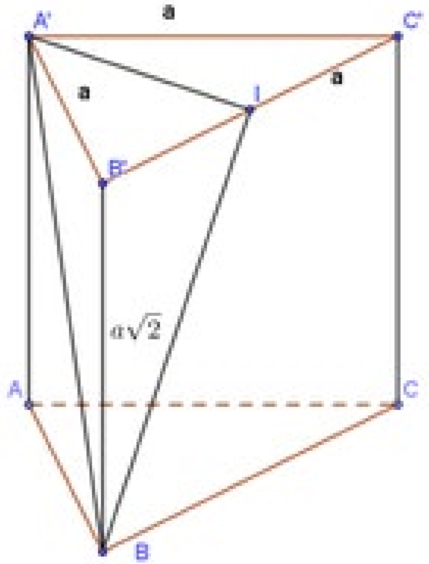
Tam giác AHC vuông tại H nên

$$\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow \widehat{C} = 39,23°.$$

Câu 50: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là

A. 60^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 45^0.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C'$.

Ta có: $\begin{cases} A'I \perp B'C' \\ A'I \perp BB' \end{cases} \Rightarrow A'I \perp (BCC'B')$.

Suy ra: IB là hình chiếu vuông góc $A'B$ trên mặt phẳng $(BCC'B')$.

Khi đó: $(A'B;(BCC'B')) = (A'B;IB) = \widehat{A'BI}$.

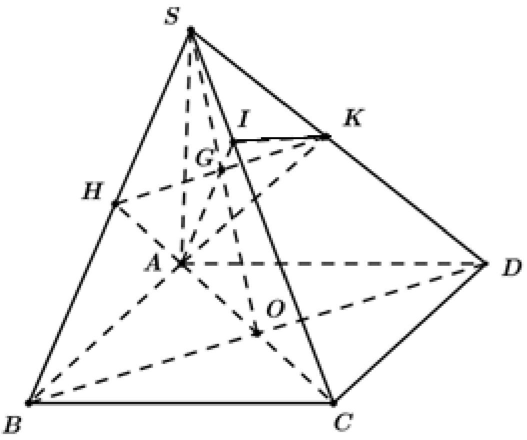
Xét tam giác vuông $A'BI$ có: $\sin \widehat{A'BI} = \frac{A'I}{A'B} = \frac{a\sqrt{3}}{2.a\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$.

Suy ra: $\widehat{A'BI} = 30^0$.

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SD. tan của góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Gọi $G = SO \cap HK, I = AG \cap SC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Từ đó:

$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Hoàn toàn tương tự: $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$

Từ,:

$\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$

$\Rightarrow SI \perp (AHK)$

$\Rightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của S trên (AHK)

$\Rightarrow IK$ là hình chiếu vuông góc của SD trên (AHK)

$\Rightarrow (SD,(AHK)) = (SK,(AHK)) = (SK, IK) = \widehat{SKI}$

Xét Δ vuông SAC có: $SA = a; AC = a\sqrt{2}; AI \perp SC$

$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$

$\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét ΔSAD: $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$

Do SAD vuông cân tại $A \Rightarrow KS = KD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét ΔSIK vuông tại I có:

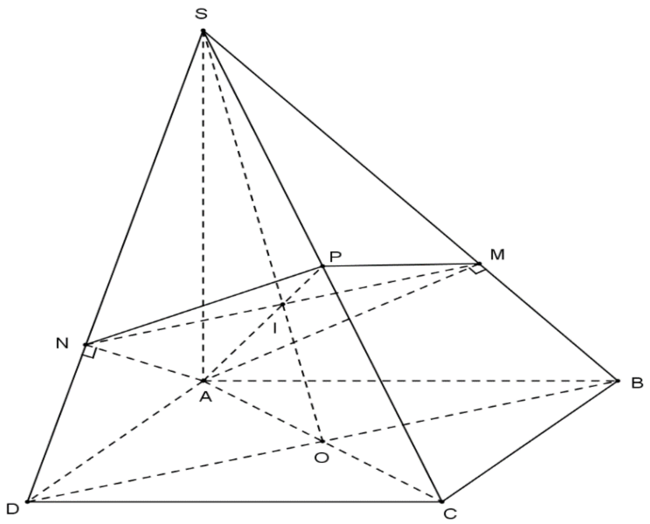
$$IK = \sqrt{SK^2 - SI^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{SKI} = \frac{SI}{IK} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{2}$$

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD. Khi đó giá trị tan của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) bằng:

A. 1. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Lời giải



Gọi $P = SC \cap (AMN)$; $O = AC \cap BD \Rightarrow MN$; AP; SO đồng quy tại I

Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

Mà $AM \perp SB$ nên $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

$\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$

Mà $AN \perp SD$ nên $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$

Do đó $SC \perp (AMN) \Rightarrow AP \perp SC$ và PM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (AMN) hay PM là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (AMN)

$\Rightarrow \widehat{(SB;(AMN))} = \widehat{(SB;PM)} = \widehat{SMP}$

Ta có: $\frac{SP}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{3}{5} \Rightarrow SP = \frac{3}{5}.a\sqrt{5}$

$\frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow SM = \frac{3}{2}.a$

$\tan SMB = \frac{SP}{PM} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} : \frac{3}{2\sqrt{5}} a = 2$