Chương 08

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 11

Biên soạn

LÊ MINH TÂM

Mục lục

Hình học & Đo lường

Bài 01

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A Lý thuyết

1. Góc giữa 2 đường thẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Nhận xét

(1) Xác định góc giữa đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

(2) Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0° \le (a,b) \le 90°$.

⌘ Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

- *Bước 1.* Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases} (d_1,d_2)=\alpha \\ d_2 // d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1,d_2)=(d_1,d_3)=\alpha$
- *Bước 2.* Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

Định nghĩa:

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.
Kí hiệu $a \perp b$.

B Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng.

(1) AB và $B'C'$ (2) AC và $B'C'$ (3) $A'C'$ và $B'C$

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng bao nhiêu?

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

Bài 5. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a, BAC = 120°$ và cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC

Bài 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, khi đó $\cos\alpha$ bằng

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $BAD, DAA', A'AB$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, tính giá trị của $\cos\alpha$.

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi G, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, DB, biết $EF = \frac{5}{6}AB$. Tính góc giữa CD và AB.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng bao nhiêu?

Bài 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

Bài 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của cạnh AB. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'I$ được kết quả là

Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$.

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a$ và $BAC = BAD = 60°, CAD = 90°$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài cạnh AC để côsin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BM.

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = a$, $BAC = BAD = 60°$ và $CAD = 90°$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AB và DM .

Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, cạnh $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp AB$, $SA \perp AD$, $SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và DC.

(2) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Bài 17. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M, N, P là trung điểm các cạnh AC, BC và BD.

(1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

(2) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

--------------------Hết--------------------

Hình học & Đo lường

Bài 02

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A Lý thuyết

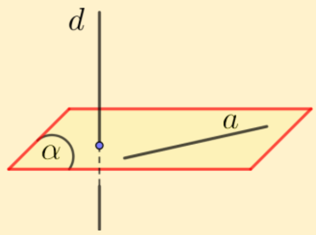
1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là ***vuông góc*** với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a ***nằm trong*** mặt phẳng (α).

Ký hiệu: $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$

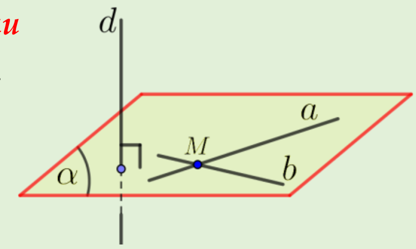
Nhận xét: $\begin{cases} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$



Định lý 1:

Nếu đường thẳng d ***vuông góc*** với hai đường thẳng ***cắt nhau*** cùng thuộc một mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng ấy.

$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



Định lý 2:

Có duy nhất:

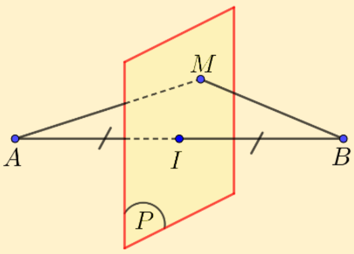
- Một mặt phẳng:
  - + đi qua một điểm cho trước, và
  - + vuông góc với đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng:
  - + đi qua một điểm cho trước, và
  - + vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

⌘ *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng*

Định nghĩa:

Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

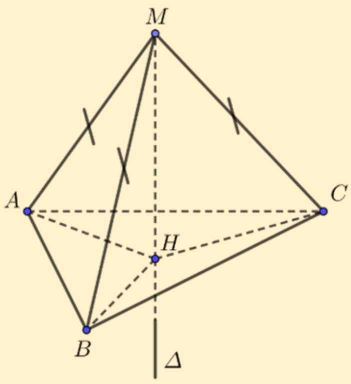
Nhận xét: (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \forall M \in (P), MA = MB$.



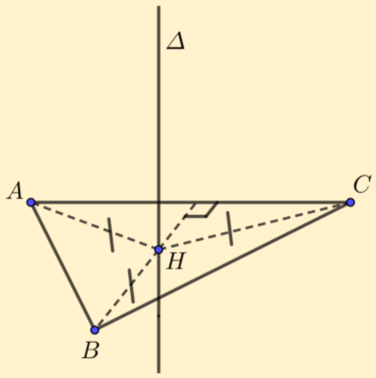
⌘ *Trục của đa giác*

Định nghĩa:

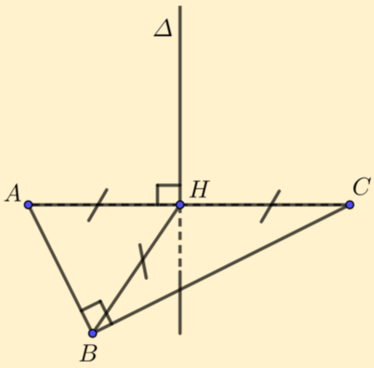
Trục của đa giác là đường thẳng qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Nếu một điểm nằm trên trục của đa giác thì nó cách đều các đỉnh của đa giác.



Tam giác thường



Tam giác đều



Tam giác vuông

Chứng minh:

Cho đa giác có n đỉnh $A_1A_2\ldots A_n$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác và d là trục của đa giác.

Lấy điểm $I \in d$.

Khi đó: $\Delta IOA_1 = \Delta IOA_2 = \ldots = \Delta IOA_n$ (Δ vuông có 2 cạnh bằng nhau) $\Rightarrow IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n$

2. Liên hệ giữa tính song song - vuông góc của đường thẳng & mặt phẳng

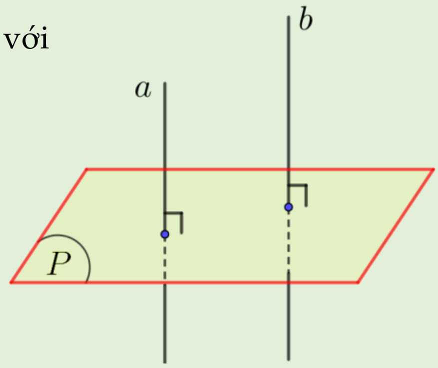
Định lý 3:

(1) Cho hai đường thẳng song song, nếu mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Tóm tắt: $\begin{cases} a//b \\ a\perp(P) \end{cases} \Rightarrow b\perp(P)$

(2) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} a\neq b \\ a\perp(P)\,;\,b\perp(P) \end{cases} \Rightarrow a//b$



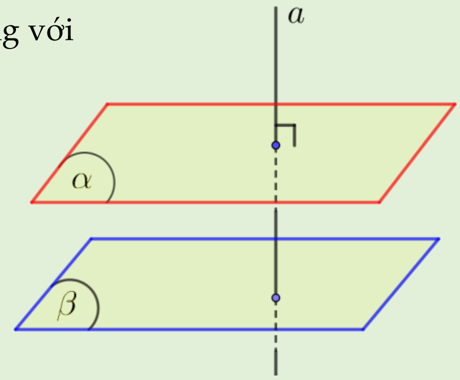
Định lý 4:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song với mặt phẳng ấy.

Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a\perp(\alpha) \end{cases} \Rightarrow a\perp(\beta)$

(2) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

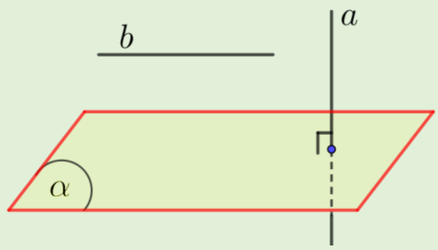
Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha)\neq(\beta) \\ (\alpha)\perp a \\ (\beta)\perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$



Định lý 5:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song với mặt phẳng ấy.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$



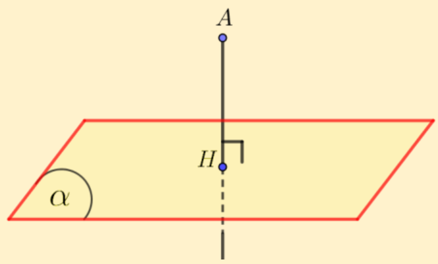
(2) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng *(không chứa đường thẳng đó)* cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} b \not\subset (\alpha) \\ b \perp a \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow b // (\alpha)$

3. Phép chiếu vuông góc

Định nghĩa:

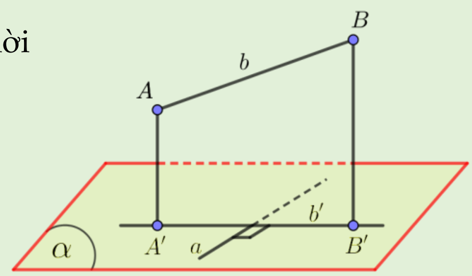
- Cho đường thẳng Δ vuông góc với (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (α).
- H là hình chiếu vuông góc *(gọi tắt là hình chiếu)* của A lên (P) nếu $AH \perp (P)$ và $H \in (P)$.



4. Định lý ba đường vuông góc

Định lý 6 (định lý ba đường vuông góc):

- Cho a nằm trong (α) và b không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α).
- Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α).
- Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



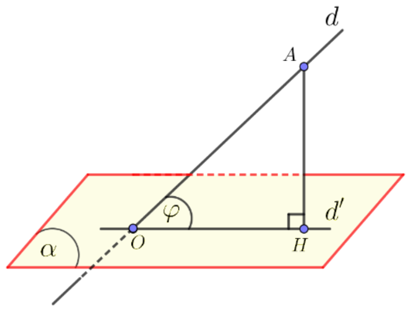
5. Góc giữa đường thẳng & mặt phẳng

Nhận xét

(1) $d \perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = 90^\circ$

(2) $d \not\perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = \left(\widehat{d;d'}\right) = \widehat{AOH}$ với d' là hình chiếu của đường thẳng d lên (P)

Chú ý: $0 \le \left(d;(P)\right) \le 90^\circ$.

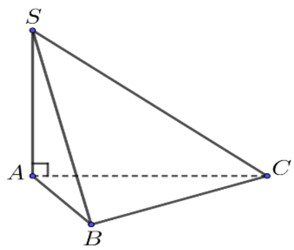


6. Kiến thức bổ trợ

6.1. Một số mô hình thường gặp

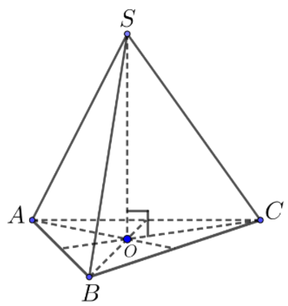
(1). Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy.

- $SA \perp BC$
- $\Delta SAB, \Delta SAC$ vuông tại A
- A là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).



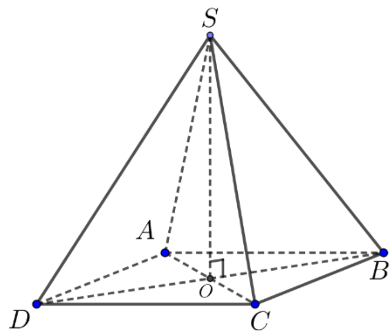
(2). Hình chóp tam giác đều.

- Đáy ΔABC là tam giác đều.
- Mặt bên là các tam giác cân tại S. (hoặc là tam giác đều nếu hình chóp là tứ diện đều).
- O là trọng tâm ΔABC.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục ΔABC.
- $SA = SB = SC$



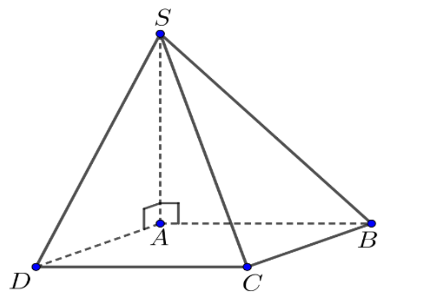
(3). Hình chóp tứ giác đều.

- Đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân tại S.
- Các tam giác SAC, SBD cân tại S.
- O là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục hình vuông $ABCD$.
- $SA = SB = SC = SD$.



(4). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi.

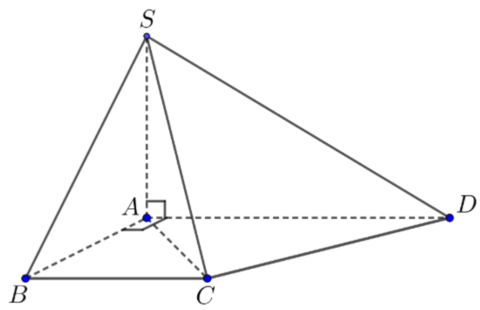
- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $ABCD$ là hình vuông hoặc hình thoi thì AC vuông góc BD.



(5). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có góc A vuông và SA vuông với đáy.

- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $AD = 2BC$:

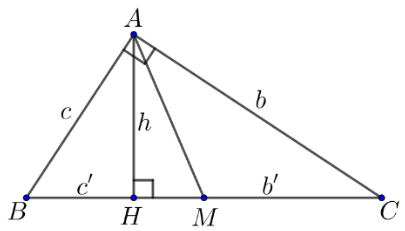
+ Gọi I là trung điểm AD thì $CI \perp AD$.
+ Trong trường hợp thêm $AB = BC$ thì $AC \perp CD$.



6.2. Các hệ thức lượng trong tam giác

(1). Tam giác ABC vuông tại A:

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} b.c$
- $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago)
- $b^2 = b' \cdot a$
- $c^2 = c' \cdot a$
- $h^2 = b' \cdot c'$
- $a \cdot h = b.c$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
- $\frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2}$
- $AM = \frac{1}{2} BC$ với M là trung điểm BC.



- $\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC}$
- $\cos B = \sin C = \frac{AB}{BC}$
- $\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB}$
- $\cot B = \cot C = \frac{AB}{AC}$

(2). Tam giác thường:

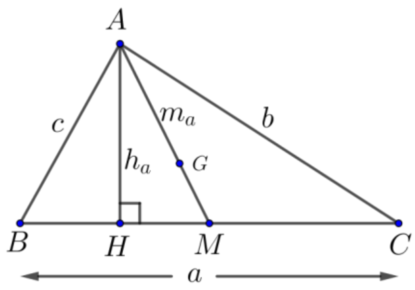
- ***Định lí côsin:***

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

- ***Tính cosin 1 góc:***



- ***Diện tích tam giác***

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

• ***Độ dài trung tuyến:***

$m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$

$m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4}$

$m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4}$

• ***Định lí sin:*** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

$S = \dfrac{abc}{4R}$

$S = pr; p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội
tiếp tam giác ABC.

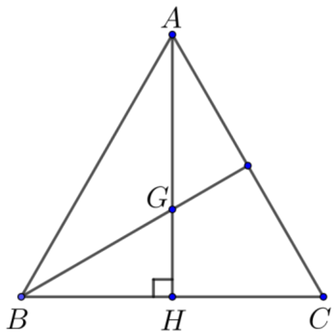
(3). Tam giác đều:

Xét tam giác đều cạnh x.

Diện tích tam giác đều: $S = x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Đường cao tam giác đều: $h = x.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với G là trọng tâm ΔABC: $AG = \dfrac{2}{3}.AH = x.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



6.3. Các chú ý khác

– Độ dài đường chéo hình vuông cạnh bằng a là $a\sqrt{2}$.

– Độ dài đường chéo hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là a và b là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

– Trong hình vuông và hình thoi, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc nhau.

B Bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng

Phương pháp

☑ *Cách 1.*

Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong (P).

☑ *Cách 2.*

Chứng minh d song song với a mà $a \perp (P)$

☑ *Cách 3.*

Chứng minh $d \perp (Q)$ và $(Q) // (P)$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh $AH \perp SC$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

(1) $BC \perp (OAH)$.

(2) H là trực tâm của ΔABC.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

☑ Chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta làm như sau:

- *Bước 1.* Chọn (P) chứa đường thẳng b
- *Bước 2.* Chứng minh $a\perp(P)\to a\perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Chứng minh $HK\perp SC$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA\perp(ACBD), AD=2a, AB=BC=a$. Chứng minh rằng $CD\perp SC$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

C Luyện tập

Dạng: Chứng minh vuông góc

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là hình tam giác vuông tại A và có $SA \perp (ABC)$. Chứng minh rằng $AC \perp SB$.

Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

(1) Chứng minh rằng $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

(2) Chứng minh $SC \perp HK$.

(3) Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Bài 20. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH và AK là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

(3) HK cắt tia CB tại I. Chứng minh: ΔAIC vuông.

Bài 21. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $SB \perp (ABC)$.

(1) Chứng minh rằng ΔSAC vuông.

(2) Gọi BH và BK lần lượt là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SBC$. Chứng minh rằng ΔBHK vuông.

Bài 22. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AM \perp SB$ tại M, trên SC lấy N sao cho $MN // BC$. Chứng minh rằng:

(1) $AM \perp (SBC)$ (2) $SB \perp AN$

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

(1) Chứng minh: $BC \perp (ADI)$.

(2) Gọi AH là đường cao trong ΔADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Lấy D đối xứng với B qua trung điểm O của AC. Chứng minh $CD \perp (SAC)$.

Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD = 2AB$, $SA \perp (ABCD)$.

(1) Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao của ΔSAB, ΔSAD. Chứng minh $SC \perp HK$.

(2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC. Kẻ $AI \perp SM$ tại I. Chứng minh $SN \perp HI$

Bài 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau.

(1) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

(2) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh: $BC \perp (SOM)$.

(3) Gọi H là hình chiếu của O trên SM. Chứng minh: $OH \perp (SBC)$.

(4) Chứng minh: $SC \perp BD$.

(5) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB, SD. Chứng minh: $SC \perp IK$.

Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, CD.

(1) Chứng minh $SA = SB = SC = SD$

(2) Chứng minh $MN \perp SP$

Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Cho $AB = 2a; AD = DC = a$ và $SA \perp (ABCD)$.

(1) Chứng minh: SCD và SBC là các tam giác vuông.

(2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và SB. Chứng minh $DCMN$ là hình chữ nhật.

Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông $SM \perp (ABCD)$ với M là trung điểm của AD.

(1) Chứng minh: các tam giác SAB và SCD vuông

(2) Gọi N là trung điểm của CD. Chứng minh $AN \perp (SMB)$.

Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$. Hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là H nằm trên cạnh AC và $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA.

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều, $SB = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, CD.

(1) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$

(2) Chứng minh $BD \perp SK$

Bài 32. Cho tứ diện $OABC$, có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

(1) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$.

(2) $BC \perp (OAH)$

(3) H là trực tâm tam giác ABC.

(4) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, tam giác SDC vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD

(1) Tính các cạnh của tam giác SIJ, chứng minh $SI \perp (SCD), SJ \perp (SAB)$.

(2) Gọi H là hình chiếu của S trên IJ. Chứng minh $SH \perp AC$.

(3) Gọi M là điểm thuộc đường thẳng DC, sao cho $BM \perp SA$. Tính AM?

Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, SCD vuông tại D có $SD = a\sqrt{5}$.

(1) Chứng minh $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.

(2) Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt CB, CD tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC, K và L là giao điểm của SB, SD với (HIJ). Chứng minh $AK \perp (SBC)$ và $AL \perp (SCD)$.

(3) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

Bài 35. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với đáy, tam giác ABC đều cạnh a và $CC' = a$.

(1) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

(2) Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh $AM \perp BC'$.

(3) Lấy điểm N thuộc $A'B'$ sao cho $NB' = \frac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

Dạng: Góc giữa đường mặt

Bài 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm hình chiếu của:

(1) SC, SB, SO lên mặt phẳng $(ABCD)$.

(2) AC, SC, SD lên mặt phẳng (SAB).

(3) SB, DC lên mặt phẳng (SAC)

(4) SA, AC lên mặt phẳng (SCD).

Bài 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông cân tại B. Cho độ dài các cạnh $SA = AB = a$. Xác định và tính:

(1) Góc giữa SB và (ABC)

(2) Góc giữa SC và (SAB).

Bài 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. ΔABC đều cạnh a. Tính

(1) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC)

(2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

Bài 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA \perp (ABC)$, $AB = a, SA = a\sqrt{3}$.

(1) Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC).

(2) Gọi H, K lần lượt là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$. Tính góc giữa đường thẳng AK và (SBC).

Bài 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc giữa đường thẳng và , đường thẳng và .

(1) Góc giữa đường thẳng SD và (SAB)

(2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

Bài 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. $AB = 2a$, , $AD = CD = a, SA = a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$

(1) Tính góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$, đường thẳng SC và $(ABCD)$

(2) Kẻ $AH \perp SC$ tại H, $AK \perp SD$ tại K. Tính góc giữa đường thẳng AH và (SAD), đường thẳng AC và (SCD).

(3) Tính góc giữa đường thẳng SB và (SAC) .

Bài 42. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD). Tính

(1) Góc giữa AB và (BCD)

(2) Góc giữa AH và (ACD)

Bài 43. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân tại $B, BA = BC = a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BC, $DE \perp (ABC)$. Biết góc hợp bởi đường thẳng DA và (DEF) bằng 30^o. Tính DE .

Bài 44. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = AC = a, SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu của I lên mp(SAB) .

(1) Chứng minh $SA \perp BC$

(2) Chứng minh H là trực tâm của tam giác SAB .

(3) Giả sử góc giữa SI và (SAB) bằng 45^o. Tính độ dài cạnh SA .

(4) Với độ dài vừa tìm được của SA , hãy tính góc giữa đường thẳng SA và (ABC), đường thẳng SA và (SBC).

Bài 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'; AC' và CD'.

(2) Tính góc giữa IK và $(A'B'C'D')$ trong đó I, K lần lượt là trung điểm của $BC, A'D'$.

Bài 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

(1) BD' và $(AA'D'D)$

(2) BD và $(B'AC)$.

Bài 47. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a, BC = 2a$. Góc giữa $A'C$ và mặt đáy bằng 30^0.

(1) Tính góc giữa $A'C$ và $(ABB'A')$.

(2) Tính góc giữa AA' và $(A'BC)$.

--------------------Hết--------------------

Hình học & Đo lường

Bài 03

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

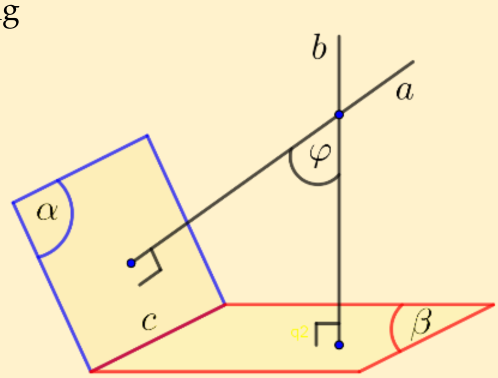
A Lý thuyết

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{matrix} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{matrix}(\alpha)//(\beta)\\(\alpha)\equiv(\beta)\end{matrix}\right.\Rightarrow\left((\alpha),(\beta)\right)=0^\circ$.

+ $0^\circ\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90^\circ$.

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa:

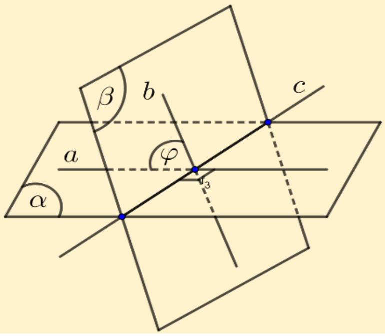
Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

$$(P)\perp(Q)\Leftrightarrow\left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90^\circ$$

Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau:

Cho 2 mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c

$$\begin{cases} a\subset(\alpha), a\perp c \\ b\subset(\beta), b\perp c \end{cases}\Rightarrow\left((\alpha),(\beta)\right)=(a,b)$$



Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

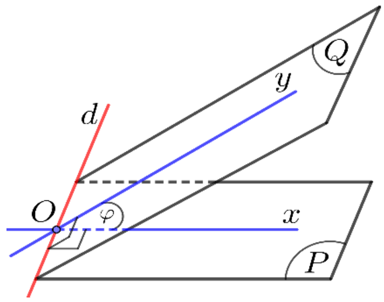
⌘ Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

• Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

• Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $((P),(Q)) = (Ox, Oy)$.



Lưu ý

Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau:

(1) Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P).

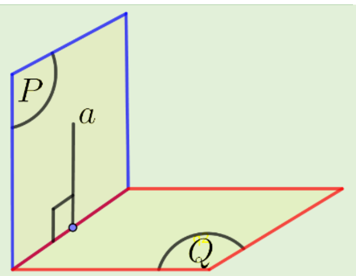
(2) Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $((\alpha),(\beta)) = \widehat{MOH}$.

▶ Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc:

Định lý 1:

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau ⇔ trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

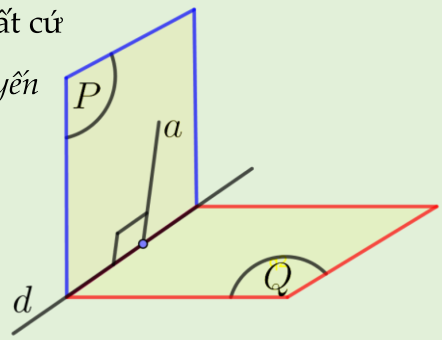


3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 2:

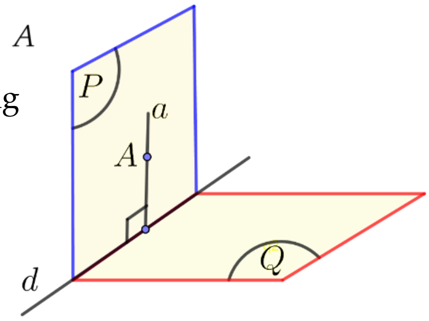
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (P) \\ (Q) \supset a \perp d \end{cases}$$



Nhận xét

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và thì A là một điểm trong (P) thì đường thẳng đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong mặt phẳng (P).

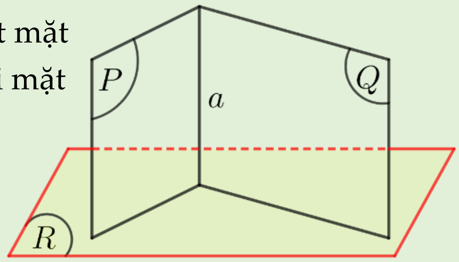


Kí hiệu: $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\ A\in(P)\\ A\in a\perp(Q)\end{cases} \Rightarrow a\subset(P)$.

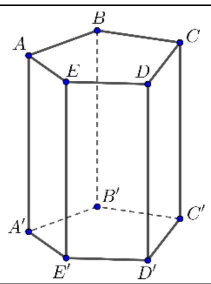
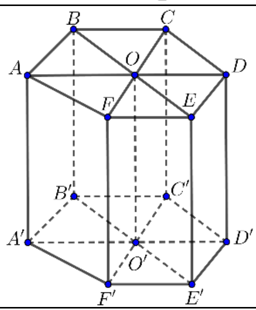
Định lý 3:

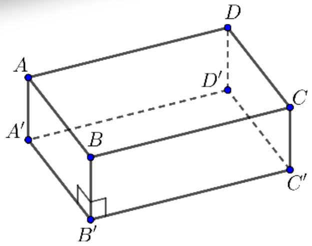
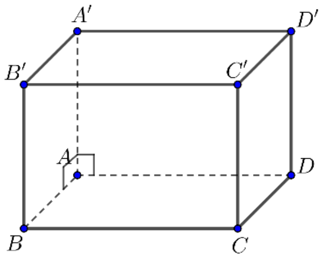
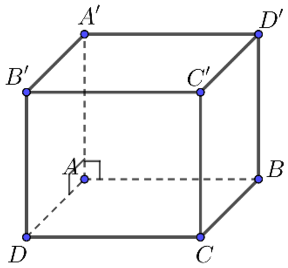
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\ (P)\perp(R)\\ (Q)\perp(R)\end{cases} \Rightarrow a\perp(P)$$



4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Tên	Hình vẽ	Tính chất
Hình lăng trụ đứng		Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy. • Các mặt bên là các hình chữ nhật. • Các mặt bên vuông góc với hai đáy.
Hình lăng trụ đều		Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Hình hộp đứng		Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật. Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a,b,c là 3 kích thước.
Hình lập phương		Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

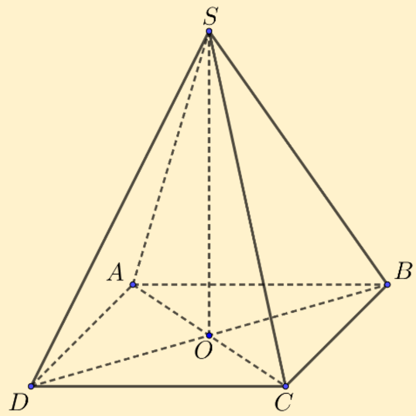
5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa hình chóp đều:

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Tính chất:

- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

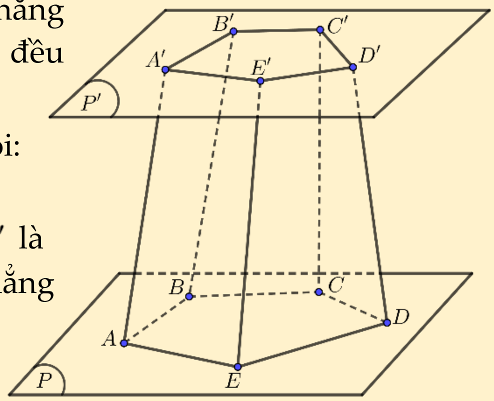


Định nghĩa hình chóp cụt đều:

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

▶ Trong hình chóp cụt đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$, ta gọi:

+ Các điểm A', B', C', D', E' là các đỉnh.
+ Đa giác $ABCDE$ là đáy lớn, đa giác A', B', C', D', E' là đáy nhỏ. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



▶ Nhận xét:

- Cạnh của hai đa giác là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một
- Các hình thang cân $AA'EE', AA'B'B, BB'C'C, C'CDD', DD'E'E$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

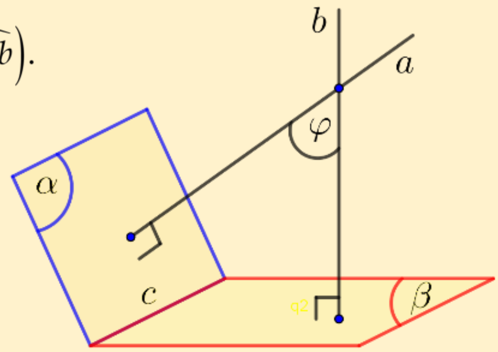
B Bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha)\equiv(\beta) \end{array}\right. \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right)=0^\circ$.

+ $0^\circ \le \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) \le 90^\circ$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm

Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

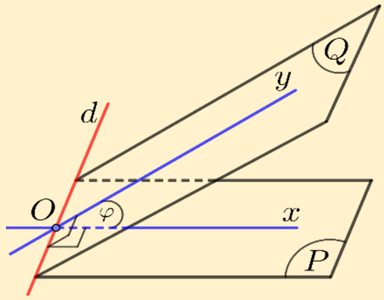
⌘ Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

• Trong (P) dựng $Ox \perp d$.

• Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{\left((P),(Q)\right)} = \widehat{(Ox,Oy)}$.



Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA\perp(ABC)$, $SA=\sqrt{3}cm, AB=1cm$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng bao nhiêu?

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.4.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi $(A'BC);(ABC)$. Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

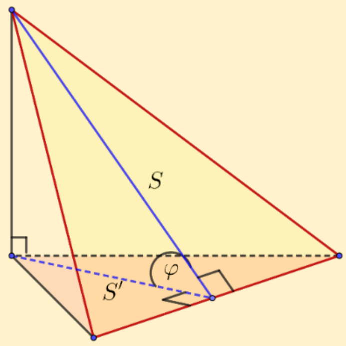
....

....

Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu

Phương pháp

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (α) và S' là diện tích hình chiếu của H' của H trên mặt phẳng (β) thì $S' = S.\cos\varphi$ trong đó $\varphi = \left[\widehat{(\alpha);(\beta)}\right]$.



Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác SBC vuông cân tại S, có $SB = a$. Mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc $30°$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 4. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta dùng một trong các cách sau:

▶ **Cách 1.** Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

▶ **Cách 2.** Chứng minh trong mặt này có một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

$$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

Ví dụ 4.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC)\perp(AHK)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

Ví dụ 4.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng $(SBC)\perp(SAC)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

Dạng 5. Thiết diện

Phương pháp

Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc đường thẳng a cắt hình chóp theo thiết diện.

- Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì?
  Tìm đường thẳng song song với (P).
- Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:
- Sử dụng tính chất về giao tuyến song song: $\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$
- Kết luận hình dạng của thiết diện và tính các yêu cầu liên quan.

Ví dụ 5.1.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A, D; $AB = 2a$; $SA = AD = DC = a$; $SA \perp (ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha) \perp (SAC)$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

C Luyện tập

Dạng: Tính góc giữa hai mặt phẳng

Bài 48. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB=2a$, $AD=a$, $SA=3a$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$

(2) (SBD) và $(ABCD)$

(3) (SBC) và (SAC)

Bài 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA\perp(ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Bài 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA=a$ và $SA\perp(ABC)$, $AB=BC=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAC);(SBC)$.

Bài 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD);(ABCD)$. Biết $\tan\alpha=\sqrt{2}$, tính góc giữa $(SAC);(SBC)$.

Bài 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Tính góc giữa các mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$

(2) (SBC) và (SAD)

(3) (SAB) và (SBD)

(4) (SBC) và (SAC)

Bài 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D có $AB=2a$, $AD=DC=a$, có $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$.

(1) Chứng minh $(SAB)\perp(SAD)$ và $(SAC)\perp(SCB)$

(2) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Tính tan φ

$$\Rightarrow \tan\varphi=\tan SCA=\frac{SA}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với mặt đáy góc $60°$. Tính góc giữa các mặt phẳng:

(1) (SAB) và (SCD)

(2) (SAB) và (SBC)

Bài 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và $(SAB)\perp(ABCD)$.

(1) (SCD) và $(ABCD)$

(2) (SCD) và (SAD)

Bài 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA=SB=SD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là hình thoi cạnh a, $A=60°$.

(1) Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $SB\perp BC$.

(2) Tính góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.

Bài 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình chữ nhật với $AB=a, AD=3a, SA=2a$ và $SA\perp(ABCD)$. Tính góc hợp bởi SC và (SBD).

Bài 58. Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a; $AA'=a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (BCA').

Bài 59. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bằng $2a$. M là trung điểm của CC'

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng BM và $A'B'$.

(2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (ABC).

Bài 60. CCho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $A'A=a$ và $A'O\perp(ABCD)$. Tính góc hợp bởi:

(1) Cạnh bên và mặt đáy.

(2) Cạnh bên và cạnh đáy.

(3) $(BDB'D')$ và $(ABCD)$, $(ACC'A')$ và $(ABCD)$

Bài 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi φ là góc tạo bởi $(SAC);(SCD)$. Giá trị của $\cos\varphi$ bằng

Bài 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC=a$, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB)

Bài 63. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB=2\sqrt{3}$ và $AA'=2$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng bao nhiêu?

Bài 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB=2AD=2DC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng

Bài 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB,SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng (AHK) và $(ABCD)$ bằng

Bài 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD, tính góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$.

Bài 67. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

Bài 68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

Bài 69. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

Bài 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB = a$, góc $BAD = 60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD), SA = x$. Tìm x để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 90^0.

Bài 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60^0, tam giác SBC đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Khi đó

Bài 72. Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

Bài 73. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$.

Bài 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $BC = \sqrt{2}\,a$ và ΔACD vuông cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD và I là trung điểm SC. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (AHI) và $(ABCD)$.

Bài 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng

Bài 76. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $BAC = 120°$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

Bài 77. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC = 2$, $AA' = \sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$.

Dạng: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Bài 78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA = a$, các cạnh còn lại bằng b. Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Bài 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy . Chứng minh $(SAB) \perp (SAD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

(1) Chứng minh: $(SAB) \perp (SAD)$

(2) Chứng minh: $(SAC) \perp (SBD)$

Bài 80. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

(1) Chứng minh: $(SBC) \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao của hai tam giác SAB, SAC. Chứng minh $(SBC) \perp (AHK)$.

Bài 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có $SA = SB = SC = SD$.

(1) Chứng minh: $(SBD) \perp (ABCD)$

(2) Chứng minh: $(SAC) \perp (SBD)$

Bài 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm AB.

(1) Chứng minh SM vuông góc $(ABCD)$.

(2) Chứng minh tam giác SBC vuông và (SAD) vuông góc (SAB).

Bài 83. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông tại B và $AD \perp (ABC)$

(1) Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$.

(2) Vẽ đường cao AH của ΔABD. Chứng minh: $AH \perp (BCD)$.

Bài 84. Cho tứ diện $SABC$ có ba đỉnh A, B, C tạo thành Δ vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$.

(1) Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$

(2) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

(3) Tính độ dài đoạn AH.

(4) Từ trung điểm O của đoạn AC vẽ $OK \perp (SBC)$. Tính độ dài OK.

Bài 85. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của ΔABC và ΔSBC.

(1) Chứng minh $(SAH) \perp (SBC)$

(2) Chứng minh $(CHK) \perp (SBC)$

Bài 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM = \frac{a}{2}, DN = \frac{3a}{4}$. Chứng minh: $(SAM) \perp (SMN)$.

Bài 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, ΔSAB đều và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB. Chứng minh: $(SAD) \perp (SAB)$.

Bài 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.

(1) Chứng minh $(SAC)\perp(SBC)$ (2) Chứng minh $(ABI)\perp(SBC)$

Bài 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $SA=SB=SC=a$.

(1) Chứng minh $AC'\perp(A'BD)$ (2) Chứng minh $(AB'C'D)\perp(BCD'A')$

Bài 90. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $CK\perp BD$.

(1) Chứng minh $C'K\perp DB$.

(2) Chứng minh $(C'BD)\perp(C'CK)$

(3) Kẻ $CH\perp C'K$. Chứng minh $CH\perp(C'BD)$.

Bài 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a, AD=a\sqrt{2}, SA=a$ và $SA\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD. Chứng minh $(SAC)\perp(SMB)$.

Bài 92. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Tính diện tích ΔAMN biết rằng $(AMN)\perp(SBC)$.

Bài 93. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB\perp(BCD)$. Trong ΔBCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong (ACD) vẽ $DK\perp AC$. Gọi H là trực tâm của ΔACD.

(1) Chứng minh $(ACD)\perp(ABE)$.

(2) Chứng minh $(ACD)\perp(DFK)$

(3) Chứng minh $OH\perp(ACD)$

Bài 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$; $BAD=60^\circ$, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{6}$.

(1) Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

(2) Chứng minh $(SBC)\perp(SDC)$

Dạng: Thiết diện

Bài 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB. Khi đó, mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

Bài 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

Bài 97. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC, SC, SB lần lượt tại N, P, Q. Diện tích của tứ giác $MNPQ$ bằng

Bài 98. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB = CD = 8$, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = x.BC$ $(0 < x < 1)$. Mặt phẳng qua M, song song với AB, CD và lần lượt cắt DB, AD, AC tại N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng bao nhiêu?

Bài 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi (α).

Bài 100. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

Bài 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng bao nhiêu?

Bài 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $AB = SA = a$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC, SD tại H, I, K.

(1) Chứng minh $HK // BD$.

(2) Chứng minh $AH \perp SB$, $AK \perp SD$.

(3) Chứng minh tứ giác $AHIK$ có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích $AHIK$ theo a.

Bài 103. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA=2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua điểm B và vuông góc với cạnh SC. Tìm thiết diện của tứ diện bị cắt bởi (α) và tính diện tích của thiết diện đó.

Bài 104. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi H là trung điểm BC, O là trung điểm AH và G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO=2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Bài 105. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB=AC=a\sqrt{2}$. Ba điểm I,K,M lần lượt là trung điểm của BC,CC' và BI; $BB'=2a$.

(1) Chứng minh $B'C\perp(AKI)$

(2) Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với $B'C$ cắt hình trụ.

Bài 106. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy của lăng trụ bằng a. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc $45°$ và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M,N,P,Q. Tính diện tích thiết diện.

Bài 107. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh A. Gọi H là trung điểm của BC, O là trung điểm của AH và G là trọng tâm của ΔABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO=2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Bài 108. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD'. Tính diện tích thiết diện.

Bài 109. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=b$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sau cho $AM=x(0<x<a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng AC.

(1) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

(2) Tính diện tích S của thiết diện theo a,b,x.

(3) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

--------------------Hết--------------------

Hình học & Đo lường

Bài 04

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

KHOẢNG CÁCH

A Lý thuyết

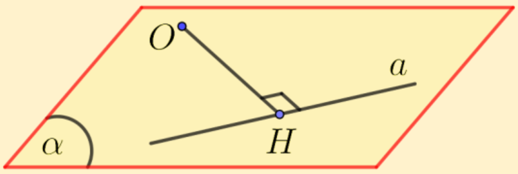
1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng

1.1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

Định nghĩa:

Cho điểm O và đường thẳng a.
Trong mặt phẳng (O,a),

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a.
- Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a.



Kí hiệu : $d(O,a)=OH$.

Nhận xét

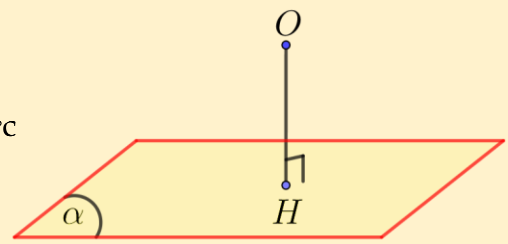
- $\forall N \in a : ON \geq d(O,a) = OH$
- $d(O,a)=0 \Leftrightarrow O \in a$

1.2. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng*

Định nghĩa:

Cho điểm O và mặt phẳng (α).

- Gọi H là hcvg của O trên mặt phẳng (α).
- Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).



Kí hiệu : $d(O,(\alpha))=OH$

Nhận xét

- $\forall N \in (P) : ON \geq d(O,(P)) = OH$
- $d(O,(P))=0 \Leftrightarrow O \in (P)$

2. Khoảng cách giữa đường và mặt song song, hai mặt song song

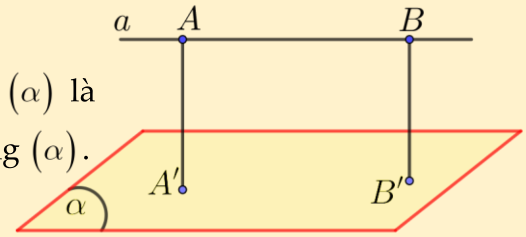
2.1. *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α).

• Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α).

Kí hiệu : $d(a,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$

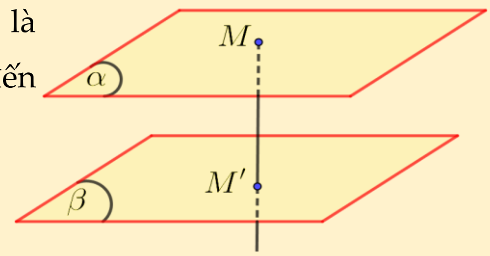


2.2. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha),(\beta)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

Kí hiệu : $d((\alpha),(\beta)) = d(M,(\beta))$ với điểm $M \in (\alpha)$



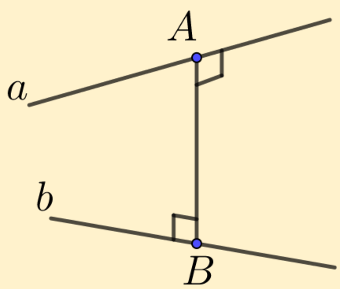
3. Đường vuông góc chung và khoảng cách hai đường chéo nhau

3.1. *Định nghĩa*

Định nghĩa:

- Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b
- Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b tại A, B thì độ dài đoạn thẳng AB gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b

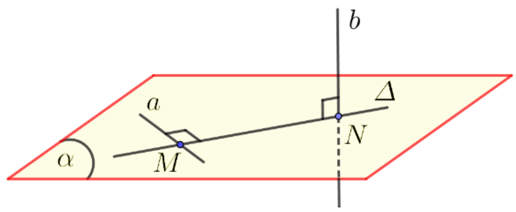
Kí hiệu: $d(a,b) = AB$



3.2. *Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau*

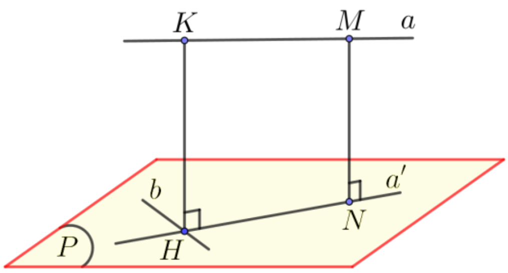
▶ **Cách 1:** Khi a vuông b

- Dựng một mặt phẳng $(\alpha) \supset a, (\alpha) \perp b$ tại N
- Trong (α) dựng $NM \perp a$ tại M
- Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của a và b



▶ **Cách 2:** Khi a chéo b

- Dựng một mặt phẳng $(P)\supset b,(P)//a$.
- Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P), bằng cách lấy $M\in a$ dựng đoạn $MN\perp(P)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song với a
- Gọi $H=a'\cap b$, dựng $HK//MN$ $\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của a và b



Nhận xét

(1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng song song với nó và chứa thằng còn lại.

(2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

B Bài tập

Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên

Phương pháp

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất:

"Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia."

Nhận xét:

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC). Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải

....

....

....

....

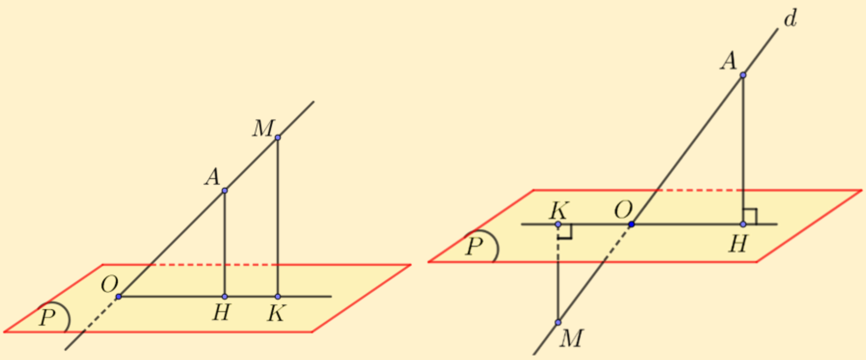
....

....

Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Phương pháp

Từ các điểm yêu cầu, ta quy về chân đường cao:
Giả sử $AM \cap (P) = \{O\}$ như hình vẽ.



Khi đó: $\dfrac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow d(M,(P)) = \dfrac{OM}{OA} \cdot d(A,(P))$ với $\dfrac{OM}{OA}$ là hằng số.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
▶ **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
▶ **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Goi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

(1) Tính chiều cao của hình chóp.

(2) Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Dạng 3. Khoảng cách hai đường chéo nhau

Phương pháp

Phương pháp chung: Ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

⌘ *Trường hợp 1:*

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \subset (P) \\ b // (P) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d(b,(P))$.

Khi đó chọn $M \in b$ sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

♻ Nếu không tìm được $\begin{cases} (P) \supset a \\ (P) // b \end{cases}$ thì ta phải dựng $\begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) // b \end{cases}$

⌘ *Trường hợp 2:* a và b lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song nhau.

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \in (P) \\ b \in (Q) \\ (P) // (Q) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d((P),(Q))$

⌘ *Trường hợp 3:* a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy của hình chóp

♻ Ta làm như sau:

(+) Gọi $I = a \cap (P)$ (mặt đáy).

(+) Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b.

(+) Khi đó b song song với (P) chứa a và Δ.

(+) Chọn M trên b sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.

▶ **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

▶ **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Ví dụ 3.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa SA và BC theo a.

Lời giải

....

....

....

....

....

....

....

C Luyện tập

Dạng: Tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Bài 110. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=2a, SA$ vuông góc với đáy và SB tạo với đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách từ:

(1) Điểm S đến mặt phẳng (ABC).
(2) Điểm C đến mặt phẳng (SAB).
(3) Điểm B đến mặt phẳng (SAC).
(4) Điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Bài 111. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $AB=2a$, $SA=4a$.

(1) Tính khoảng cách từ O đến (SAB).

(2) Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

Bài 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$

(1) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

(2) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

(3) Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC, trọng tâm G của ΔSCD đến (SBD).

(4) Tính khoảng cách từ O, I và G đến mặt phẳng (SAB).

Bài 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông tâm O cạnh $a, SA\perp(ABCD)$, $SA=2a$

(1) Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC).

(2) Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBD).

(3) Tính theo a khoảng cách từ O đến (SBC).

Bài 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng đáy và $SO=2a$.

(1) Tính theo a khoảng cách từ O đến (SBC).

(2) Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC).

Bài 115. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=SA=2a$.

(1) Tính khoảng cách từ đường thẳng AB đến (SCD).

(2) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB).

Bài 116. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với (ABC); $AB=AC=4\text{cm}$; $AD=3\text{cm}$; $BC=5\text{cm}$.

(1) Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

(2) Gọi M là trung điểm AB, tính khoảng cách từ M đến (BCD).

Bài 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của ΔABC. Đường thẳng SD hợp với $(ABCD)$ góc 30^0. Tính khoảng cách d từ B đến (SCD) theo a.

Bài 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuôn cạnh a, mặt bên (SAD) vuông góc với đáy $(ABCD)$ và SAD là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AD.

(1) Tính theo a khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.

(2) Tính theo a khoảng cách giữa SM và BD.

(3) Tính theo a khoảng cách từ M đến (SBC).

Bài 119. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$, I là trung điểm của BC, O là trọng tâm của ΔABC.

(1) Tính $d(S,(ABC)), d(O,SA)$.

(2) Chứng minh $(SBC)\perp(SAI)$. Tính $d(O,(SBC))$.

Bài 120. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I là trung điểm AB. Tính

(1) $d(A,(SBC))$

(2) $d(I,(SCD))$

Bài 121. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, ΔABC đều có cạnh bằng a, $AA'=a$ và đỉnh A' cách đều A,B,C . Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $A'B$. Tính

(1) Khoảng cách từ A' đến (ABC).

(2) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN).

Bài 122. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$,đáy ABC là $AC=a\sqrt{3}$, $ACB=30^\circ$. Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° và mặt phẳng $(A'BC)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm H trên cạnh BC sao cho $HC=3HB$ và mặt phẳng $(A'AH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(1) Tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC)

(2) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'AC)$.

Dạng: Tính khoảng cách 2 đường chéo nhau

Bài 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA\perp(ABCD)$, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính

(1) $d\left(AC,SB\right)$.

(2) Sin của góc giữa SB và mặt phẳng $\left(SAC\right)$.

Bài 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2a$, $BC=AB=a$, $SA=2a$ và $SA\perp\left(ABCD\right)$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau:

(1) $d\left(SA;BC\right)$.

(2) $d\left(SA;CD\right)$.

(3) $d\left(SD;BC\right)$.

(4) $d\left(SD;AB\right)$.

(5) $d\left(SB;AD\right)$.

Bài 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh $2a, SA\perp\left(ABCD\right)$, SB tạo với đáy một góc 45^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng :

(1) SA và BC

(2) AB và SD

(3) BD và SC

(4) AC và SD

Bài 126. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau BC' và CD'.

Bài 127. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $A=60^\circ$. Góc giữa $A'C$ và đáy bằng 60°.

(1) Tính độ dài đường cao của hình hộp.

(2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

Bài 128. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=BC=a$, $AC=a\sqrt{2}$.

(1) Chứng minh $BC\perp AB'$.

(2) Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh $\left(BC'M\right)\perp\left(ACC'A'\right)$.

(3) Tính khoảng cách giữa BB' và AC'.

Dạng: Tính khoảng cách liên quan nhỏ nhất

Bài 129. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau đôi một và $AD=2AC=3AB=a$. Gọi Δ là đường thẳng chứa trong mặt $\left(BCD\right)$ sao cho có khoảng cách từ điểm A đến Δ là nhỏ nhất bằng

Bài 130. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng phẳng $\left(SAD\right)$. Khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường thẳng SA và Δ bằng

Bài 131. Cho tứ diện $S.ABC$ trong đó $SA=SB=SC=a$, các góc $\angle BSC=\angle BSA=60^0$. Tìm giá trị lớn nhất khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $\left(SBC\right)$?

--------------------Hết--------------------

Hình học & Đo lường
Bài 05

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

ÔN TẬP CHƯƠNG

Bài 132. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$.

(1) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

(2) Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

(3) Tính góc giữa SC và (SAB).

(4) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

(5) Tính $\mathrm{d}(A,(SCD))$.

Bài 133. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $SB \perp (ABC)$, biết $AC = a\sqrt{2}, BC = a, SB = 3a$

(1) Chứng minh $AC \perp (SBC)$.

(2) Gọi BH là đường cao của ΔSBC. Chứng minh $SA \perp BH$.

(3) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Bài 134. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O cạnh $AB = 2BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Góc giữa SO và mặt phẳng đáy bằng $45°$. M là trung điểm AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB

(1) Chứng minh ΔACH vuông.

(2) Tính $\mathrm{d}(H,(SCD))$.

(3) Tính $\mathrm{d}(M,(ACH))$.

(4) Tính $\mathrm{d}(SO, MC)$.

Bài 135. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm H của OB. Biết góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$.

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.

(2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

(3) Tính khoảng cách từ G đến $(AA'C)$, với G là trọng tâm của $\Delta B'C'C$.

Bài 136. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AB = a$, $BC = 2a$, $ABC = 60°$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$.

(1) Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

(2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC, AC và SD.

Bài 137. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = 2a, BC = a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

(1) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$

(2) Gọi E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, gọi K là điểm bất kỳ thuộc đoạn AD. Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K. Hãy tính khoảng cách này theo a?

Bài 138. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy đều bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm H của cạnh $B'C'$.

(1) Tính khoảng cách hai đáy.

(2) Tính góc giữa BC và AC'.

(3) Tính góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy.

Bài 139. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

(1) Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

(2) Chứng minh rằng $B'D \perp (BA'C')$.

(3) Chứng minh $B'C \perp (A'B'CD)$.

(4) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

(5) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

(6) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Bài 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và vuông gcos với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi I, M, F lần lượt là trung điểm của AD, AB, SB và K là giao điểm của BI và CM.

(1) Chứng minh $(CMF) \perp (SIB)$.

(2) Tính BK và KF.

(3) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

(4) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

Bài 141. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $BAD = 60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với đáy và $SO = \dfrac{3a}{4}$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và BE.

(1) Chứng minh $(SOF) \perp (SBC)$.

(2) Tính khoảng cách từ O và A đến (SBC).

(3) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AD và vuông góc với (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với (α). Tính diện tích của thiết diện này.

(4) Tính góc giữa (α) và $(ABCD)$.

Bài 142. Cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD và E, F lần lượt là trung điểm của SA, SB.

(1) Tính khoảng cách từ A đến (SCD). Tính tan góc giữa (SAB) và (SCD).

(2) Gọi $G = CE \cap DF$. Chứng minh $CE \perp SA, DF \perp SB$. Tính tan góc giữa (GEF) và (SAB).

(3) Chứng minh G là trọng tâm của ΔSHK. Tính khoảng cách từ G đến (SCD).

(4) Gọi M là điểm di động trên đoạn SA. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên (CDM).

Bài 143. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$

(1) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

(2) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.

(3) Gọi φ là góc giữa AB và mặt phẳng (α). Tính $\sin\varphi$.

Bài 144. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD.

(1) Cho biết ΔSCD vuông cân tại S. Chứng minh: $SE \perp (SCD)$ và $SF \perp (SAB)$.

(2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên EF. Chứng minh: $SH \perp AC$.

(3) Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).

Bài 145. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$

(1) Chứng minh $(SAC) \perp (SBD); (SCD) \perp (SAD)$.

(2) Tính góc giữa SD và $(ABCD)$, SB và (SAD), SB và (SAC).

(3) Tính $d(A,(SCD)), d(B,(SAC))$.

Bài 146. Cho hình chóp $A.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, góc $B = 60^o$, $AB = a$, hai mặt bên (SAB) và (SBC) vuông góc với đáy, $SB = 2a$. Hạ $BH \perp SA (H \in SA); BK \perp SA (K \in SC)$.

(1) Chứng minh $SB \perp (ABC)$.

(2) Chứng minh $SB \perp (ABC)$.

(3) Chứng minh $SC \perp (BHK)$.

(4) Tính côsin của góc tạo bởi SA và (BHK).

Bài 147. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là trung điểm của SC.

(1) Chứng minh $(MBD) \perp (SAC)$.

(2) Tính góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

(3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

(4) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

Bài 148. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$.

(1) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

(2) Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

(3) Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến (ABC').

Bài 149. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ lấy điểm S. Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

(1) Chứng minh $SBC = SCD = 90°$.

(2) Chứng minh ba đường thẳng AD', AC', AB cùng nằm trên mặt phẳng. Từ đó chứng minh $C'D'$ luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên Ax.

(3) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC khi $SA = a\sqrt{2}$.

là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

--------------------Hết--------------------

Chương 08

QUAN HỆ VUÔNG GÓC

TÀI LIỆU DÀNH CHO KHỐI 11

Biên soạn

LÊ MINH TÂM

Mục lục

Hình học & Đo lường

Bài 01

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A Lý thuyết

1. Góc giữa 2 đường thẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng a,b trong không gian, kí hiệu (a,b), là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song hoặc trùng với a và b.

Nhận xét

(1) Xác định góc giữa đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.

(2) Với hai đường thẳng a và b bất kì: $0° \le (a,b) \le 90°$.

⌘ Để tính số đo của góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) ta có thể thực hiện tính thông qua góc giữa hai đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng đã cho.

- *Bước 1.* Sử dụng tính chất sau: $\begin{cases} (d_1,d_2)=\alpha \\ d_2 // d_3 \end{cases} \Rightarrow (d_1,d_2)=(d_1,d_3)=\alpha$
- *Bước 2.* Áp dụng định lí côsin trong tam giác để xác định góc.

2. Hai đường thẳng vuông góc trong không gian

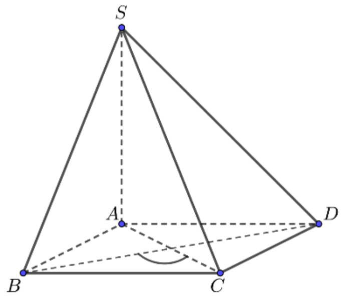
Định nghĩa:

Hai đường thẳng a và b được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng $90°$.
Kí hiệu $a \perp b$.

B Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, $SA = AB$ và $SA \perp BC$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Lời giải



• Ta có: $\left.\begin{matrix} BC//AD \\ SA \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SAD = 90^\circ$

$\rightarrow (SD, BC) = (SD, AD) = SDA$

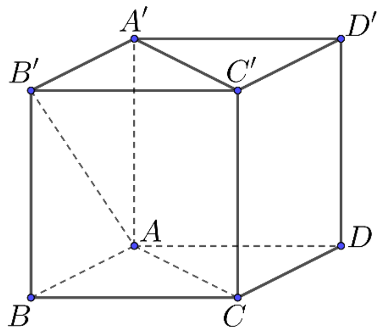
• ΔSAD vuông tại A có:

$\tan SDA = \dfrac{SA}{AD} = 1 \Rightarrow SDA = 45^\circ \Rightarrow (SD, BC) = 45^\circ$.

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa 2 đường thẳng.

(1) AB và $B'C'$ (2) AC và $B'C'$ (3) $A'C'$ và $B'C$

Lời giải



(1) AB và $B'C'$

• Ta có $AB // A'B'$ mà $(A'B', B'C') = 90^\circ$ nên $(AB, B'C') = 90^\circ$

(2) AC và $B'C'$

• Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $(AC, BC) = 45^\circ$.

• Ta có $BC // B'C'$ nên $(AC, B'C') = 45^\circ$

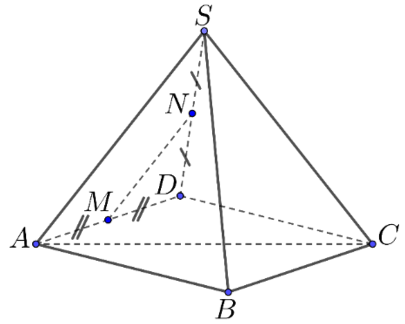
(3) $A'C'$ và $B'C$

• Ta có $AC // A'C'$ và $\Delta ACB'$ là Δ đều

• Do đó $(A'C', B'C) = (AC, B'C) = 60^\circ$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng bao nhiêu?

Lời giải

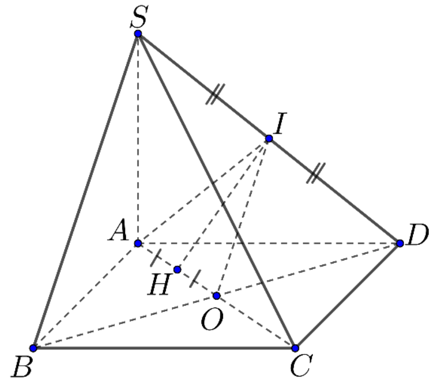


- Ta có: $MN//SA \Rightarrow (MN,SC)=(SA,SC)$.
- Lại có: $AC=a\sqrt{2}$.
- Xét ΔSAC, nhận thấy: $AC^2=SA^2+SC^2$.
- Theo định lí Pitago đảo, ΔSAC vuông tại S.

$\longrightarrow ASC=90^0$ hay $(MN,SC)=(SA,SC)=90^0$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a; SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Khi đó, cosin góc giữa SB và AC bằng

Lời giải



- Gọi I là trung điểm của SD

$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của ΔSBD

$$\Rightarrow \begin{cases} OI//SB \\ OI=\dfrac{SB}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AB^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3a^2+a^2}}{2}=a \end{cases}$$

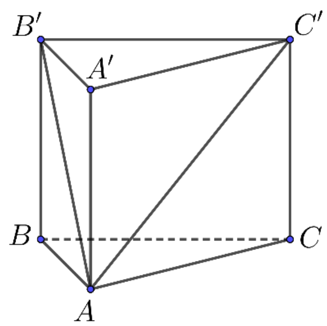
- Vì $OI//SB \Rightarrow (SB,AC)=(OI,AC)=AOI$
- Ta có: $AI=\dfrac{SD}{2}=\dfrac{\sqrt{SA^2+AD^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3a^2+a^2}}{2}=a$

$\Rightarrow AI=OI \Rightarrow \Delta AOI$ cân tại I.

- Gọi H là trung điểm của $OA \Rightarrow IH\perp OA$. Và $OH=\dfrac{OA}{2}=\dfrac{AC}{4}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$
- Xét ΔOHI, ta có: $\cos HOI=\dfrac{OH}{OI}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\longrightarrow \cos(SB,AC)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Bài 5. Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, $AB=AC=a, BAC=120°$ và cạnh bên $AA'=a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC

Lời giải



- Ta có $BC//B'C' \Rightarrow (AB',BC)=(AB',B'C')$
- Xét $\Delta AB'C'$ có $AB'=AC'=\sqrt{AB^2+BB'^2}=a\sqrt{3}$
- Áp dụng định lý cosin cho ΔABC, ta có

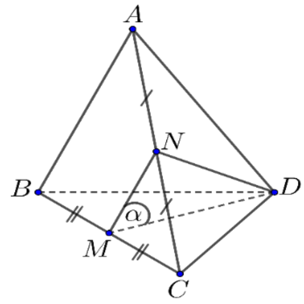
$BC^2=AB^2+AC^2-2.AB.AC.\cos BAC$

$=a^2+a^2-2.a.a.\cos 120°=3a^2 \Rightarrow BC=B'C'=a\sqrt{3}$

$\rightarrow \Delta AB'C'$ đều, do đó $(AB',BC)=(AB',B'C')=AB'C'=60°$

Bài 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm của cạnh BC. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB và DM, khi đó $\cos\alpha$ bằng

Lời giải



• Gọi N là trung điểm của AC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow \begin{cases} MN // AB \\ MN = \dfrac{1}{2}AB \end{cases}$

• Vì ΔBCD và ΔACD là các tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow MD = ND = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

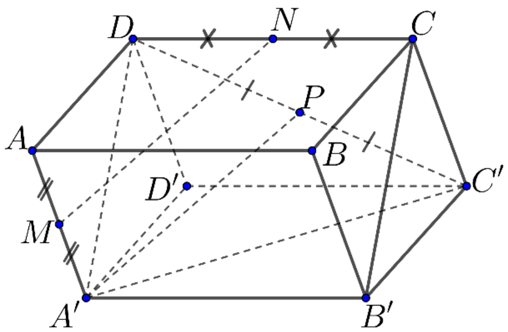
• Vì $MN // AB \Rightarrow \alpha = (AB, DM) = (MN, DM)$

• Xét ΔMND: $\cos NMD = \dfrac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN.MD} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} > 0$

$\Rightarrow NMD < 90° \Rightarrow (MN, DM) = NMD \Rightarrow \cos\alpha = \cos NMD = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Bài 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a và các góc $BAD, DAA', A'AB$ đều bằng $60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA', CD. Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng MN và $B'C$, tính giá trị của $\cos\alpha$.

Lời giải



• Ta có $\begin{cases} A'D // B'C \\ MN // A'P \end{cases}$ với P là trung điểm DC'.

$\rightarrow (MN, B'C) = (A'P, A'D) = DA'P$

• Vì $BAD = DAA' = A'AB = 60°$ và các cạnh hình hộp bằng a.

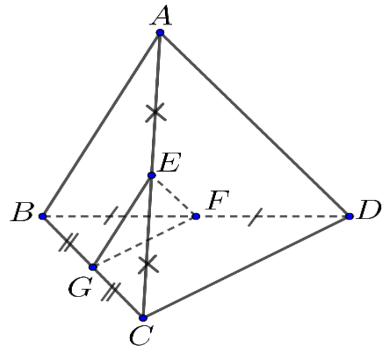
• Do đó $A'D = a, C'D = C'A' = a\sqrt{3}$.

$\rightarrow A'P = \dfrac{A'D^2 + A'C'^2}{2} - \dfrac{DC'^2}{4} \Rightarrow A'P = \dfrac{\sqrt{5}a}{2}$.

• Áp dụng định lý cos $\Delta A'DP$: $\cos\alpha = \dfrac{A'D^2 + A'P^2 - DP^2}{2A'D.A'P} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

Bài 8. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \dfrac{4}{3}AB$. Gọi G, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, DB, biết $EF = \dfrac{5}{6}AB$. Tính góc giữa CD và AB.

Lời giải



- Gọi G là trung điểm của BC
- Đặt $AB = a$. Ta có $GE = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

$GF = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{2a}{3}; EF = \dfrac{5}{6}AB = \dfrac{5a}{6}$.

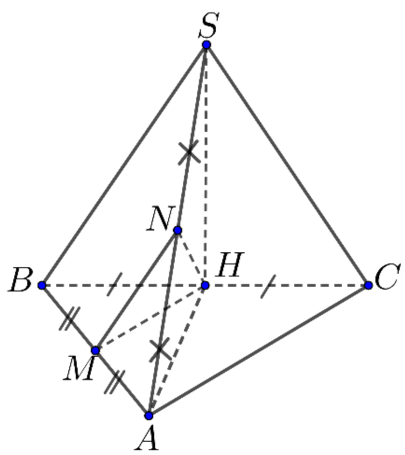
- Từ đó $GE^2 + GF^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{4a^2}{9} = \dfrac{25a^2}{36} = EF^2$

$\Rightarrow \Delta GEF$ vuông tại G.

- Vì $GE // AB, GF // CD$ nên $(AB, CD) = (GE, GF) = EGF = 90°$.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC = a\sqrt{2}$, các cạnh còn lại đều bằng a. Góc giữa hai đường thẳng SB và AC bằng bao nhiêu?

Lời giải



- Ta có $AB^2 + AC^2 = 2a^2 = BC^2 \to \Delta ABC$ vuông tại A.
- Gọi H, M, N lần lượt là trung điểm BC, AB, SA.

$\begin{cases} MN // SB \\ MH // AC \end{cases}$ nên $(SB; AC) = (MN; MH)$.

$MN = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a}{2}$, $NH = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a}{2}$, $AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

- Xét ΔSBC có $SB = SC$ nên $SH \perp BC$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - HB^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

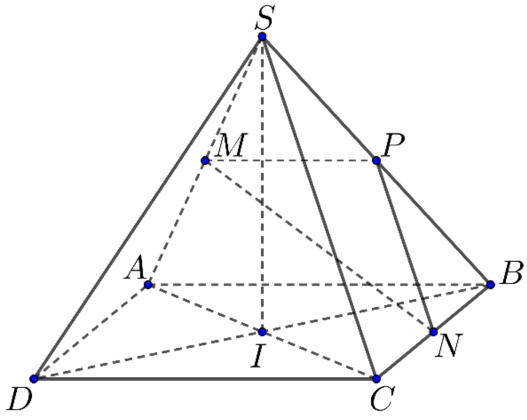
- Lại có H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
- Mà $SA = SB = SC = a$ nên $SH \perp (ABC)$.

$\to \Delta SAH$ vuông cân tại H.

$HN = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$. Do đó ΔMHN đều cạnh $\dfrac{a}{2}$. Góc cần tìm bằng 60^0.

Bài 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, độ dài cạnh bên cũng bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Góc giữa MN và SC bằng

Lời giải



- Gọi P là trung điểm của SB,
- Ta có $SC // NP \Rightarrow (MN,SC) = (MN,NP) = MNP$.
- Mà $MP = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$; $NP = \frac{1}{2}SC = \frac{a}{2}$;

$MC^2 = \dfrac{2(SC^2 + AC^2) - SA^2}{4} = \dfrac{5a^2}{4}$;

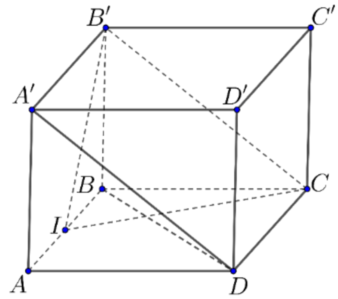
$MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$MN^2 = \dfrac{2(MC^2 + MB^2) - BC^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$.

- Do đó $\cos MNP = \dfrac{NP^2 + MN^2 - MP^2}{2.NP.MN} = \dfrac{MN}{2NP} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{2.\frac{a}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow MNP = 30°$.

Bài 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của cạnh AB. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'I$ được kết quả là

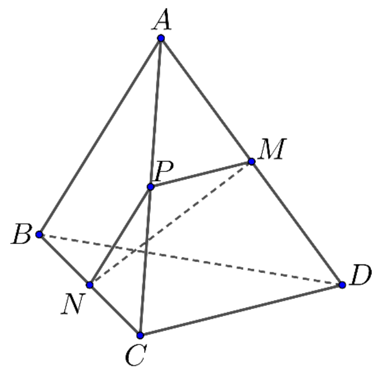
Lời giải



- Gọi độ dài cạnh hình lập phương là $a > 0$.
- Ta có $B'C$ // $A'D \Rightarrow (A'D, B'I) = (B'I, B'C)$.
- Tính được $IB' = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = CI$; $CB' = a\sqrt{2}$.
- Trong $\Delta B'CI$: $\cos IB'C = \cos(A'D, B'I) = \dfrac{IB'^2 + CB'^2 - IC^2}{2.IB'.CB'} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$

Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Xác định độ dài đoạn thẳng MN để góc giữa hai đường thẳng AB và MN bằng $30°$.

Lời giải



- Gọi P là trung điểm AC.
- Ta có $NP // AB, MP // CD$à $NP = MP = \dfrac{a}{2}$

$\Rightarrow (AB, MN) = (NP, MN)$.

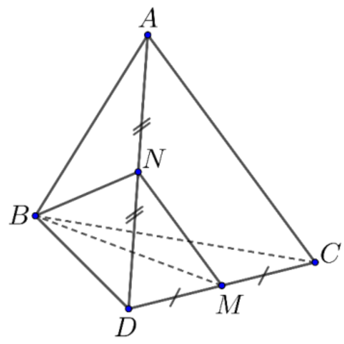
- $\cos MNP = \dfrac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2.MN.NP} = \dfrac{MN}{a}$.

$(AB, MN) = 30° \Rightarrow \left[\begin{array}{l} MNP = 30° \\ MNP = 150° \end{array}\right.$

$MNP = 30° \Rightarrow \dfrac{MN}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ hoặc $MNP = 150° \Rightarrow \dfrac{MN}{a} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (loại).

Bài 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AD = a$ và $BAC = BAD = 60^\circ, CAD = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Tính độ dài cạnh AC để côsin góc giữa hai đường thẳng AC và BM bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



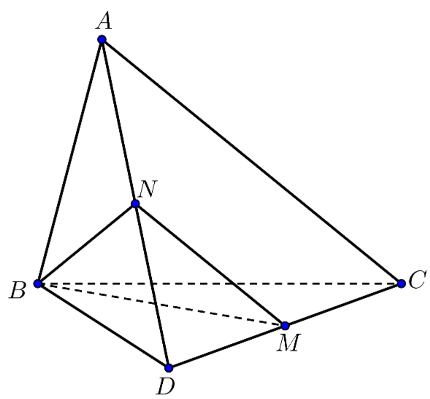
- Gọi N là trung điểm của AD.
- Ta có $(BM, AC) = (BM, MN) = \alpha$
- Đặt $AC = 2x \Rightarrow MN = x > 0$
- Ta có ΔABD đều cạnh a nên $BD = a, BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- ΔACD vuông tại A nên $DC^2 = AD^2 + AC^2 = a^2 + 4x^2$
- Xét ΔABC ta có $BC^2 = a^2 + 4x^2 - 2ax$
- Do đó $BM^2 = \frac{a^2 + a^2 + 4x^2 - 2ax}{2} - \frac{a^2 + 4x^2}{4} = \frac{3a^2 + 4x^2 - 4ax}{4}$
- Ta tính $\cos BMN = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM.MN} = \frac{\frac{3a^2 + 4x^2 - 4ax}{4} + x^2 - \frac{3a^2}{4}}{2.\frac{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}{2}.x}$

$$= \frac{8x^2 - 4ax}{4x.\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}} = \frac{2x - a}{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}$$

- Theo giả thiết ta có $\cos\alpha = \left|\frac{2x - a}{\sqrt{3a^2 + 4x^2 - 4ax}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 8x^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = a \end{array}\right.$
- Do $x > 0$ nên $x = a \Rightarrow AC = 2x = 2a$

Bài 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M là trung điểm của CD. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC và BM.

Lời giải



- Gọi N là trung điểm của AD

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\Delta ACD \Rightarrow MN // AC$.

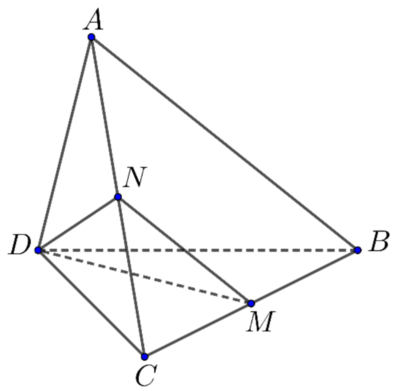
$\Rightarrow (BM, AC) = (BM, MN)$.

- Xét $\Delta BMN: \begin{cases} BM = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ MN = \frac{a}{2} \end{cases}$
- Nên $\cos BMN = \frac{BM^2 + MN^2 - BN^2}{2BM.MN} = \frac{MN}{2BM} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

• Do đó $\left(BM,AC\right)=\left(BM,MN\right)=BMN=\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Bài 15. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD=a$, $BAC=BAD=60^\circ$ và $CAD=90^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AB và DM .

Lời giải



• $\Delta ABC:\begin{cases}AB=AC=a\\ BAC=60^\circ\end{cases}\Rightarrow \Delta ABC$ là Δ đều $\Rightarrow BC=AB=a$.

• $\Delta BAD:\begin{cases}AB=AD=a\\ BAD=60^\circ\end{cases}\Rightarrow \Delta BAD$ là Δ đều $\Rightarrow BD=AB=a$.

• ΔACD vuông cân tại A: $CD=\sqrt{AC^2+AD^2}=a\sqrt{2}$.

• Xét ΔBCD có $BC=BD=a, CD=a\sqrt{2}$, DM là trung tuyến:

$$DM^2=\frac{DB^2+DC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}=\frac{a^2+2a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow DM=\frac{\sqrt{5}a}{2}$$

• Gọi N là trung điểm của AC

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình $\Delta ACB\Rightarrow\begin{cases}MN // AB\\ MN=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow\left(DM,AB\right)=\left(DM,MN\right)$.

• Xét ΔACD vuông tại A có DN là trung tuyến

Nên $DN=\sqrt{AD^2+AN^2}=\sqrt{AD^2+\dfrac{AC^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}$.

• Xét $\Delta DMN:\begin{cases}DM=DN=\dfrac{\sqrt{5}a}{2}\\ MN=\dfrac{a}{2}\end{cases}\Rightarrow \cos DMN=\dfrac{MD^2+MN^2-DN^2}{2.MD.MN}=\dfrac{MN}{2.MD}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

$\Rightarrow DMN=\arccos\dfrac{1}{2\sqrt{5}}=\left(DM,MN\right)=\left(DM,AB\right)$.

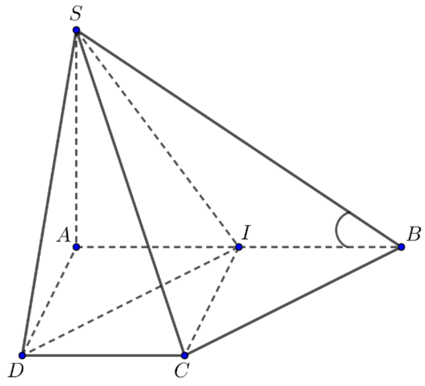
Bài 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D, cạnh $AB=2a$, $AD=DC=a$, $SA\perp AB$, $SA\perp AD$, $SA=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và DC.

(2) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

Lời giải

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng SB và DC.



- $AB//DC \Rightarrow (SB,DC)=(SB,AB)$
- Xét ΔSAB: $\tan SBA=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SBA=(SB,DC)=30^\circ$

(2) Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC.

- Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow \begin{cases} IB=\dfrac{AB}{2}=a \\ DC=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IB=DC \\ IB//DC \end{cases}$

$\Rightarrow DCBI$ là hình bình hành $\Rightarrow DI//BC \Rightarrow (SD,BC)=(SD,DI)$

- Ta có: $SD=\sqrt{SA^2+AD^2}=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$. Tương tự: $SI=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}$
- Tứ giác $AICD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow DI=a\sqrt{2}$
- Xét ΔSDI $\cos SDI=\dfrac{SD^2+DI^2-SI^2}{2SD\cdot DI}=\dfrac{3}{\sqrt{42}}\Rightarrow (SD,BC)=\arccos\left(\dfrac{3}{\sqrt{42}}\right)$

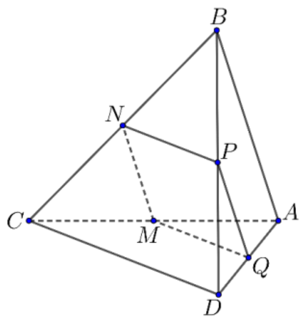
Bài 17. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi M,N,P là trung điểm các cạnh AC,BC và BD.

(1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

(2) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

Lời giải

(1) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).



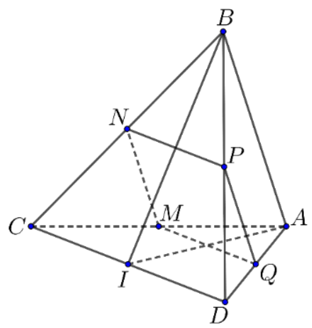
- Ta có N,P lần lượt là trung điểm của BC, BD

Nên NP là đường trung bình $\Delta BCD \to NP//CD$.

- $\begin{cases} (BCD)\cap(MNP)=M \\ NP//CD \end{cases} \to (BCD)\cap(MNP)=d$ qua M; $\begin{cases} d//CD \\ d\cap AD=Q \end{cases}$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là MQ.

(2) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.



Gọi I là trung điểm CD.

- ΔBCD có I là trung điểm CD nên $BI\perp CD$.
- ΔACD có I là trung điểm CD nên $AI\perp CD$.
- Suy ra $CD\perp(ABI)$. Do đó $CD\perp AB$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và CD là 90°.

-------------------Hết-------------------

Hình học & Đo lường

Bài 02

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

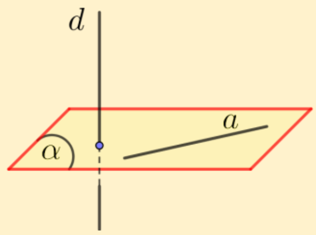
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A Lý thuyết

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định nghĩa:

Đường thẳng d được gọi là ***vuông góc*** với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a ***nằm trong*** mặt phẳng (α).



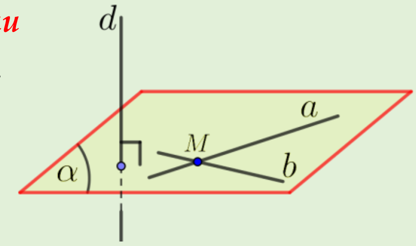
Ký hiệu: $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow d \perp a, \forall a \subset (\alpha)$

Nhận xét: $\begin{cases} d \perp (P) \\ a \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d \perp a$

Định lý 1:

Nếu đường thẳng d ***vuông góc*** với hai đường thẳng ***cắt nhau*** cùng thuộc một mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng ấy.

$$\begin{cases} d \perp a \subset (P) \\ d \perp b \subset (P) \\ a \cap b = M \end{cases} \Rightarrow d \perp (P)$$



Định lý 2:

Có duy nhất:

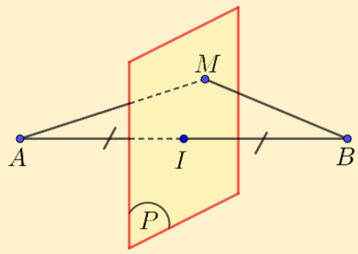
- Một mặt phẳng:
  + đi qua một điểm cho trước, và
  + vuông góc với đường thẳng cho trước.
- Một đường thẳng:
  + đi qua một điểm cho trước, và
  + vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

⌘ *Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng*

Định nghĩa:

Mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

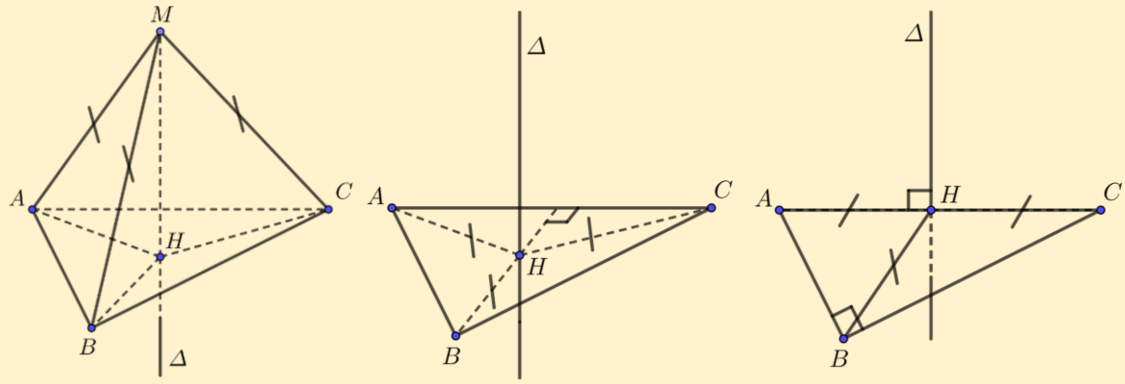
Nhận xét: (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB $\Leftrightarrow \forall M \in (P), MA = MB$.



⌘ *Trục của đa giác*

Định nghĩa:

Trục của đa giác là đường thẳng qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đó. Nếu một điểm nằm trên trục của đa giác thì nó cách đều các đỉnh của đa giác.



Chứng minh:

Cho đa giác có n đỉnh $A_1A_2\ldots A_n$.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác và d là trục của đa giác.

Lấy điểm $I \in d$.

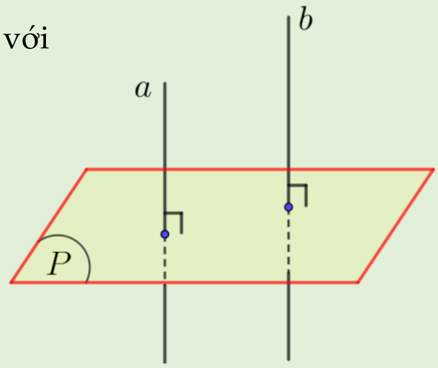
Khi đó: $\Delta IOA_1 = \Delta IOA_2 = \ldots = \Delta IOA_n$ (Δ vuông có 2 cạnh bằng nhau) $\Rightarrow IA_1 = IA_2 = \ldots = IA_n$

2. Liên hệ giữa tính song song – vuông góc của đường thẳng & mặt phẳng

Định lý 3:

(1) Cho hai đường thẳng song song, nếu mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

Tóm tắt: $\begin{cases} a//b \\ a \perp (P) \end{cases} \Rightarrow b \perp (P)$



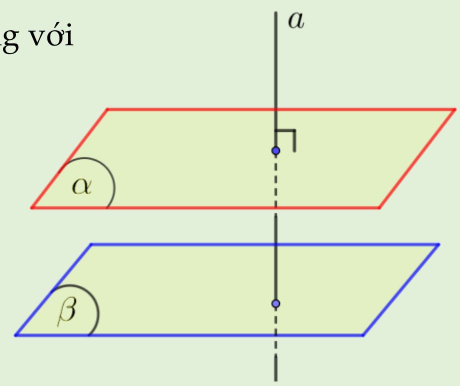
(2) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \neq b \\ a \perp (P) ; b \perp (P) \end{cases} \Rightarrow a//b$

Định lý 4:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó cũng vuông góc với bất kì mặt phẳng nào song song với mặt phẳng ấy.

Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha)//(\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta)$



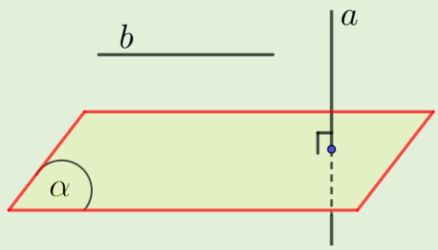
(2) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//(\beta)$

Định lý 5:

(1) Một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì nó vuông góc với bất kì đường thẳng nào song song với mặt phẳng ấy.

Tóm tắt: $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b$



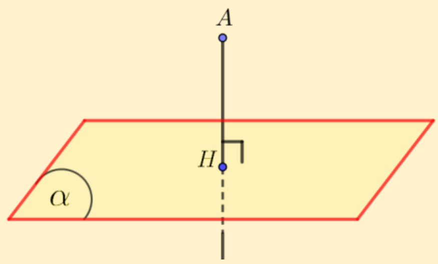
(2) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng *(không chứa đường thẳng đó)* cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

Tóm tắt: $\begin{cases} b \not\subset (\alpha) \\ b \perp a \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow b // (\alpha)$

3. Phép chiếu vuông góc

Định nghĩa:

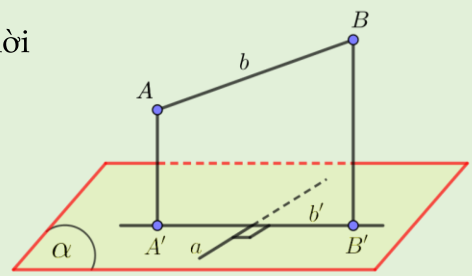
- Cho đường thẳng Δ vuông góc với (α). Phép chiếu song song theo phương của Δ lên (α) được gọi là phép chiếu vuông góc lên (α).
- H là hình chiếu vuông góc *(gọi tắt là hình chiếu)* của A lên (P) nếu $AH \perp (P)$ và $H \in (P)$.



4. Định lý ba đường vuông góc

Định lý 6 (định lý ba đường vuông góc):

- Cho a nằm trong (α) và b không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α).
- Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α).
- Khi đó $a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'$.



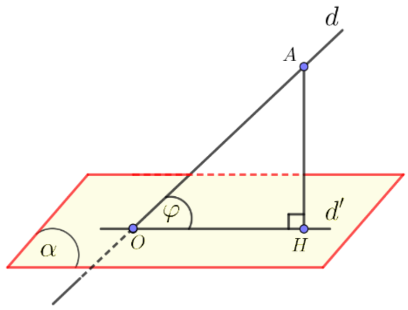
5. Góc giữa đường thẳng & mặt phẳng

Nhận xét

(1) $d \perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = 90°$

(2) $d \not\perp (P) \Rightarrow \left(\widehat{d;(P)}\right) = \left(\widehat{d;d'}\right) = \widehat{AOH}$ với d' là hình chiếu của đường thẳng d lên (P)

Chú ý: $0 \le (d;(P)) \le 90°$.

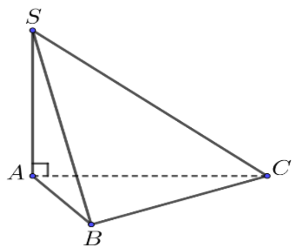


6. Kiến thức bổ trợ

6.1. Một số mô hình thường gặp

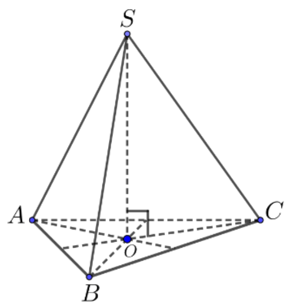
(1). Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy.

- $SA \perp BC$
- $\Delta SAB, \Delta SAC$ vuông tại A
- A là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).



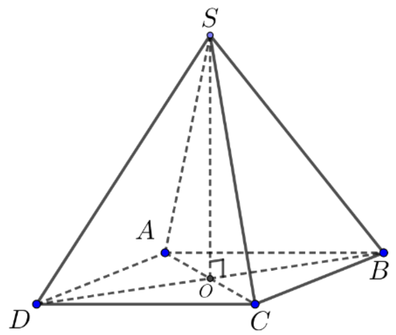
(2). Hình chóp tam giác đều.

- Đáy ΔABC là tam giác đều.
- Mặt bên là các tam giác cân tại S. (hoặc là tam giác đều nếu hình chóp là tứ diện đều).
- O là trọng tâm ΔABC.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục ΔABC.
- $SA = SB = SC$



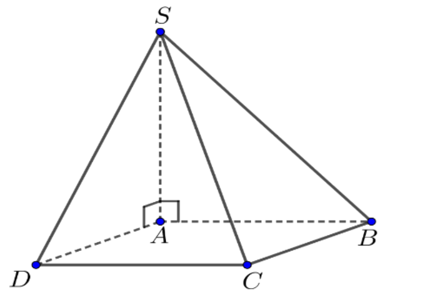
(3). Hình chóp tứ giác đều.

- Đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là các tam giác cân tại S.
- Các tam giác SAC, SBD cân tại S.
- O là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- $SO \perp (ABC)$, SO là trục hình vuông $ABCD$.
- $SA = SB = SC = SD$.



(4). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi.

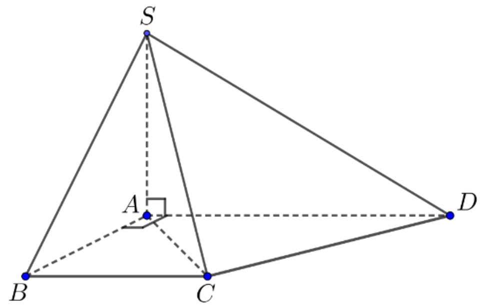
- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $ABCD$ là hình vuông hoặc hình thoi thì AC vuông góc BD.



(5). Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có góc A vuông và SA vuông với đáy.

- A là hình chiếu của S lên $ABCD$.
- Các tam giác SAB, SAC, SAD vuông tại A.
- ***Đặc biệt:*** Nếu $AD = 2BC$:

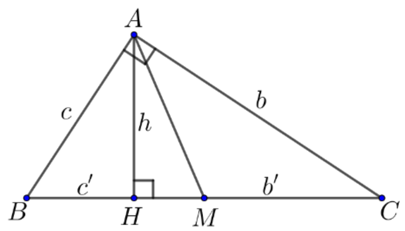
+ Gọi I là trung điểm AD thì $CI \perp AD$.
+ Trong trường hợp thêm $AB = BC$ thì $AC \perp CD$.



6.2. Các hệ thức lượng trong tam giác

(1). Tam giác *ABC* vuông tại *A*:

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{1}{2}b.c$
- $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pitago)
- $b^2 = b' \cdot a$
- $c^2 = c' \cdot a$
- $h^2 = b' \cdot c'$
- $a \cdot h = b.c$
- $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
- $\frac{b'}{c'} = \frac{b^2}{c^2}$
- $AM = \frac{1}{2}BC$ với M là trung điểm BC.



- $\sin B = \cos C = \frac{AC}{BC}$
- $\cos B = \sin C = \frac{AB}{BC}$
- $\tan B = \cot C = \frac{AC}{AB}$
- $\cot B = \cot C = \frac{AB}{AC}$

(2). Tam giác thường:

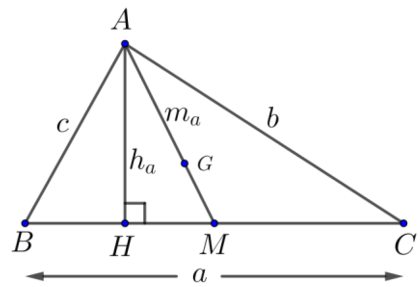
- ***Định lí côsin:***

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

- ***Tính cosin 1 góc:***



- ***Diện tích tam giác***

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

• ***Độ dài trung tuyến:***

$m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

$m_b^2 = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$

$m_c^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

• ***Định lí sin:*** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$

$S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

$S = \dfrac{abc}{4R}$

$S = pr; p = \dfrac{a+b+c}{2}$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội
tiếp tam giác ABC.

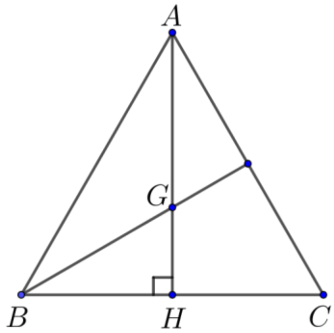
(3). Tam giác đều:

Xét tam giác đều cạnh x.

Diện tích tam giác đều: $S = x^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Đường cao tam giác đều: $h = x.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Với G là trọng tâm ΔABC: $AG = \dfrac{2}{3}.AH = x.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



6.3. Các chú ý khác

– Độ dài đường chéo hình vuông cạnh bằng a là $a\sqrt{2}$.

– Độ dài đường chéo hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là a và b là $\sqrt{a^2 + b^2}$.

– Trong hình vuông và hình thoi, các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và vuông góc nhau.

B Bài tập

Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc mặt phẳng

Phương pháp

☑ *Cách 1.*

Chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong (P).

☑ *Cách 2.*

Chứng minh d song song với a mà $a\perp(P)$

☑ *Cách 3.*

Chứng minh $d\perp(Q)$ và $(Q)//(P)$.

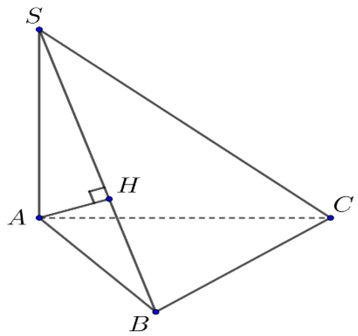
Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(1) Chứng minh $BC\perp(SAB)$.

(2) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh $AH\perp SC$.

Lời giải



(1) *Chứng minh* $BC\perp(SAB)$.

- Ta có $SA\perp(ABC)$ mà $BC\subset(ABC)$ $\Rightarrow SA\perp BC\ (1)$.
- ΔABC vuông tại B hay $AB\perp BC\ (2)$.
- Trong $(SAB): SA\cap AB=A,\ (3)$.
- Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow BC\perp(SAB)$.

(2) *Chứng minh* $AH\perp SC$.

- Theo câu (1), $BC\perp(SAB)$ mà $AH\subset(SAB)$ nên $AH\perp BC$.
- Lại có AH là đường cao của $\Delta SAB\Rightarrow AH\perp SB$.
- Trong ΔSBC, $AH\perp BC$ và $AH\perp SB$ $\Rightarrow AH\perp SC$.

Ví dụ 1.2.

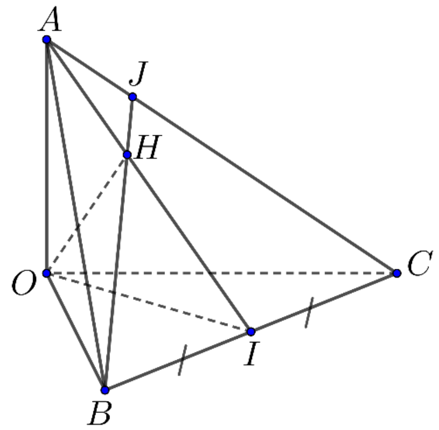
Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

(1) $BC \perp (OAH)$.

(2) H là trực tâm của ΔABC.

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC



(1) *Chứng minh* $BC \perp (OAH)$..

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC.$

Mà $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$ nên $OH \perp BC.$

Vậy $BC \perp (OAH)$.

(2) *Chứng minh* H là trực tâm của ΔABC.

Do $OH \perp (ABC)$ nên $OH \perp AC (1)$.

Ta có $\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases}$ nên $OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC (2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AC \perp (OBH) \Rightarrow AC \perp BH.$

Mặt khác $BC \perp (OAH) \Rightarrow AH \perp BC.$

Vậy H là trực tâm của ΔABC

Dạng 2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp

☑ Chứng minh hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau, ta làm như sau:

- *Bước 1.* Chọn (P) chứa đường thẳng b
- *Bước 2.* Chứng minh $a \perp (P) \to a \perp b$

Ví dụ 2.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD. Chứng minh $HK \perp SC$.

Lời giải

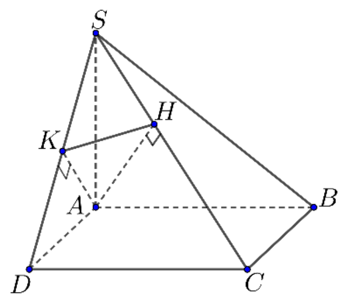
Chọn $(AHK) \supset HK \to$ Chứng minh $SC \perp (AHK)$

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$

Mà $AK \perp SD$ nên $AK \perp (SDC) \Rightarrow AK \perp SC$.

Mặt khác $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$.

$\Rightarrow HK \perp SC$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ACBD)$, $AD = 2a, AB = BC = a$. Chứng minh rằng $CD \perp SC$.

Lời giải

Ta có: $\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp CD \quad (1)$.

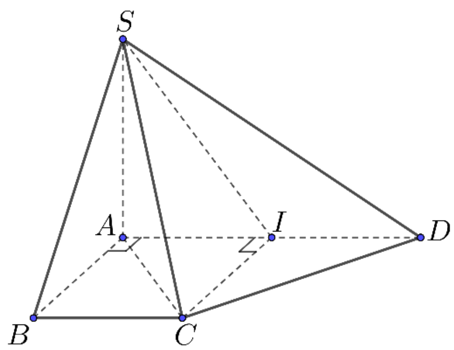
Gọi I là trung điểm AD.

Tứ giác $ABCI$ là hình vuông $\to ACI = 45°$

Mặt khác, ΔCID là Δ vuông cân tại I nên $DCI = 45°$.

Suy ra $ACD = 90°$ hay $AC \perp CD \quad (2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$.



C Luyện tập

Dạng: Chứng minh vuông góc

Bài 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là hình tam giác vuông tại A và có $SA \perp (ABC)$. Chứng minh rằng $AC \perp SB$.

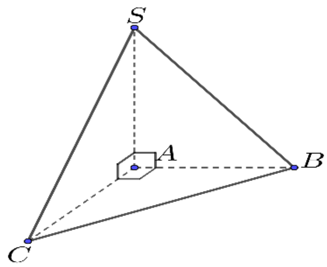
Lời giải

Vì $SA \perp (ABC)$

Nên AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC).

Mặt khác theo giả thiết $AC \perp AB$.

Suy ra $AC \perp SB$ (theo định lý ba đường vuông góc).



Bài 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O và SA vuông góc với đáy. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC, SD.

(1) Chứng minh rằng $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

(2) Chứng minh $SC \perp HK$.

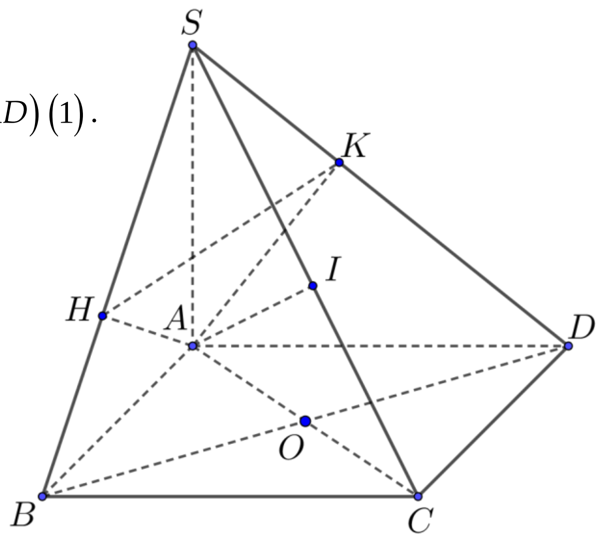
(3) Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải

(1) Chứng minh rằng $CD \perp (SAD)$, $BD \perp (SAC)$.

⌘ *Chứng minh $CD \perp (SAD)$*

- Theo $ABCD$ là hình vuông nên $CD \perp AD \subset (SAD)$ (1).
- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ (2).
- Trong $(SAD): SA \cap AD = A$, (3).
- Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow CD \perp (SAD)$.



⌘ *Chứng minh $BD \perp (SAC)$*

- Theo $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ (4).
- $SA \perp (ABCD)$ và $BD \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$ (5).
- Trong $(SAC): SA \cap AC = A$, (3).
- Từ (4), (5) và (6) $\Rightarrow BD \perp (SAC)$.

(2) Chứng minh $SC \perp HK$.

- Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \\ AB, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$
- Lại có $AH \perp SB$ nên theo hệ quả, ta được $AH \perp SC$.
- Theo *câu* (1), $CD \perp (SAD)$ mà $AK \subset (SAD)$ nên $AK \perp CD$.
- Lại có AK là đường cao của tam giác $SAD \Rightarrow AK \perp SD$.

Nên theo hệ quả $AK \perp SC$.
Trong ΔAKH: $AH \perp SC$ và $AK \perp SC$ nên theo hệ quả $HK \perp SC$.

(3) Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

- Ta có $\Delta SAB = \Delta SAD (c-g-c) \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SD} \Rightarrow HK // BD \ (7)$.
- Theo *câu* (1), $BD \perp (SAC)$ mà $AI \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp AI \ (8)$.
- Từ (7) và (8), $HK \perp AI$.

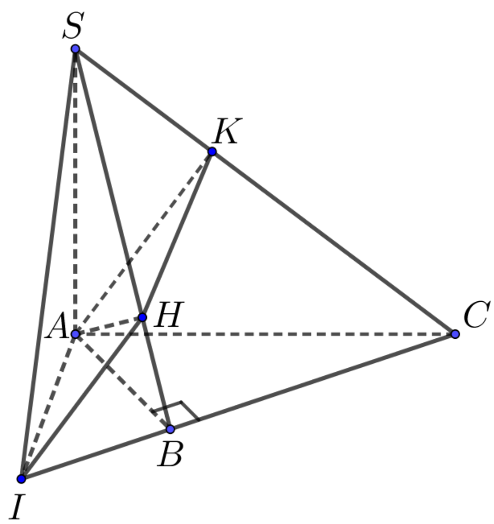
Bài 20. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA \perp (ABC)$.

(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

(2) Gọi AH và AK là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SAC$. Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

(3) HK cắt tia CB tại I. Chứng minh: ΔAIC vuông.

Lời giải



(1) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.

- Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

(2) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.

- Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \ (BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$
- Ta có: $\begin{cases} AK \perp SC \\ AH \perp SC \ (AH \perp (SBC)) \\ AH, AK \subset (AHK) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

(3) HK cắt tia CB tại I. Chứng minh: ΔAIC vuông.

- Ta có: $\begin{cases} AI \perp SA \ (SA \perp (ABC)) \\ AI \perp SC \ (SC \perp (AHK)) \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SAC) \Rightarrow AI \perp AC$.

Vậy ΔAIC vuông tại A.

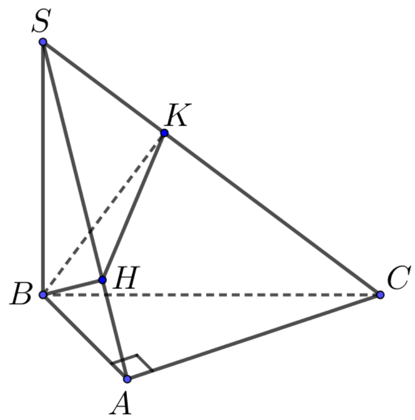
Bài 21. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $SB \perp (ABC)$.

(1) Chứng minh rằng ΔSAC vuông.

(2) Gọi BH và BK lần lượt là đường cao của $\Delta SAB, \Delta SBC$. Chứng minh rằng ΔBHK vuông.

Lời giải

(1) Chứng minh rằng ΔSAC vuông.



• Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ SB \perp AC\left(SB \perp (ABC)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp SA \Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại A.

(2) Chứng minh rằng ΔBHK vuông.

• Ta có: $\begin{cases} AC \perp (SAB) \\ BH \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BH \perp AC (1)$

• Lại có $BH \perp SA$ (giả thiết) (2).

• Từ (1) và $(2) \Rightarrow BH \perp (SAC)$, mà $HK \subset (SAC) \Rightarrow BH \perp HK \Rightarrow \Delta BHK$ vuông tại H.

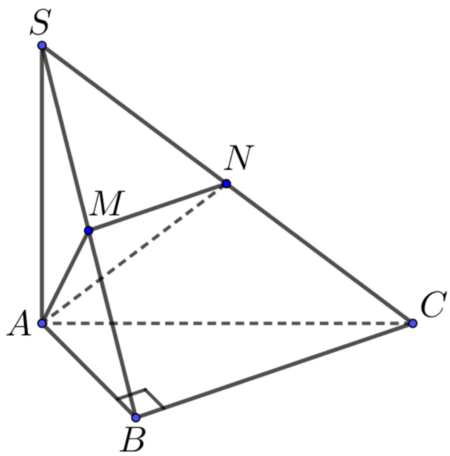
Bài 22. Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và ΔABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AM \perp SB$ tại M, trên SC lấy N sao cho $MN // BC$. Chứng minh rằng:

(1) $AM \perp (SBC)$

(2) $SB \perp AN$

Lời giải

(1) $AM \perp (SBC)$



• Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ SA \perp BC\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$, mà $AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM (1)$,

• Lại có $AM \perp SB (2)$

• Từ (1) và $(2) \Rightarrow AM \perp (SBC)$.

(2) $SB \perp AN$

• Ta có: $\begin{cases} BC \perp (SAB) \\ MN // BC \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp SB (3)$

• Lại có $AM \perp SB$ (giả thiết) (4).

• Từ (3) và $(4) \Rightarrow SB \perp (AMN)$, mà $AN \subset (AMN) \Rightarrow SB \perp AN$.

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

(1) Chứng minh: $BC \perp (ADI)$.

(2) Gọi AH là đường cao trong ΔADI. Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

Lời giải

(1) Chứng minh: $BC \perp (ADI)$.

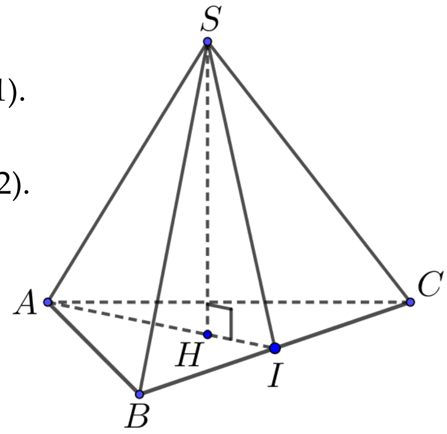
- ΔABC cân tại A

và AI là đường trung tuyến và là đường cao $\Rightarrow AI \perp BC$ (1).

- ΔDBC cân tại D

và DI là đường trung tuyến và là đường cao $\Rightarrow DI \perp BC$ (2).

- Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (ADI)$.



(2) Chứng minh $AH \perp (BCD)$

- Theo câu (1), $BC \perp (ADI), AH \subset (ADI). \Rightarrow BC \perp AH$.
- Mặt khác, $AH \perp DI$, $BC \cap DI = \{I\}, BC, DI \subset (BCD)$.

Vậy suy ra $AH \perp (BCD)$.

Bài 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA \perp (ABC)$. Lấy D đối xứng với B qua trung điểm O của AC. Chứng minh $CD \perp (SAC)$.

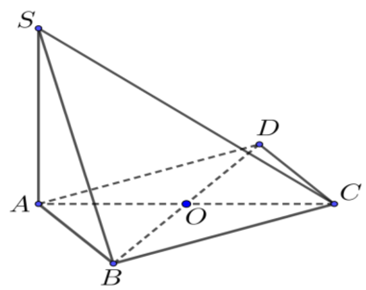
Lời giải

- Ta có $ABCD$ là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

$\Rightarrow CD // AB$.

- Mà $BA \perp AC \Rightarrow CD \perp AC$ (1).
- Mặt khác $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CD$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $CD \perp (SAC)$.



Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AD = 2AB$, $SA \perp (ABCD)$.

(1) Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao của ΔSAB, ΔSAD. Chứng minh $SC \perp HK$.

(2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD, BC. Kẻ $AI \perp SM$ tại I. Chứng minh $SN \perp HI$

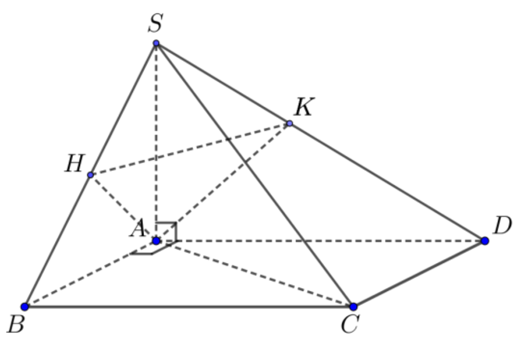
Lời giải

(1) Chứng minh $SC \perp HK$.

- Ta có $\left.\begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \end{matrix}\right\}$

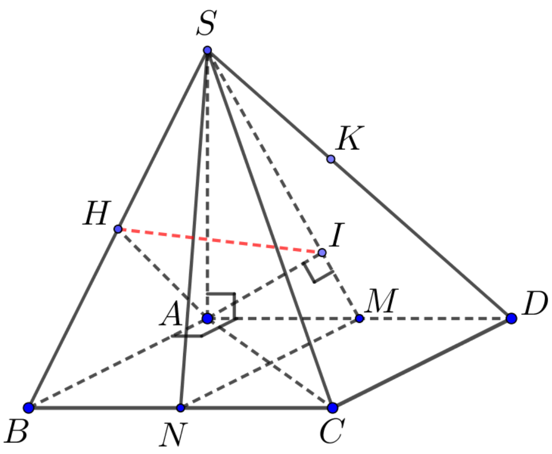
$\Rightarrow BC \perp (SAB), AH \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$.

- Ta có $\left.\begin{matrix} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$ (1).
- Tương tự $CD \perp (SAD), AK \subset (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.



- Ta có $\left.\begin{matrix} AK \perp SD \\ AK \perp SC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$ (2).

(2) Chứng minh $SN \perp HI$.



- Ta có $ABNM$ là hình vuông.
- Ta có $AH \perp (SBC), SN \subset (SBC) \Rightarrow AH \perp SN$ (3).
- $\left.\begin{matrix} NM \perp AM \\ NM \perp SA(SA \perp (ABCD)) \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow NM \perp (SAM), AI \subset (SAM) \Rightarrow NM \perp AI$.

- $\left.\begin{matrix} AI \perp SM \\ AI \perp NM \end{matrix}\right\} \Rightarrow AI \perp (SMN) \Rightarrow AI \perp SN$ (4).

Từ (3) và (4) $\to SN \perp (AHI) \Rightarrow SN \perp HI$.

Bài 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau.

(1) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

(2) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh: $BC \perp (SOM)$.

(3) Gọi H là hình chiếu của O trên SM. Chứng minh: $OH \perp (SBC)$.

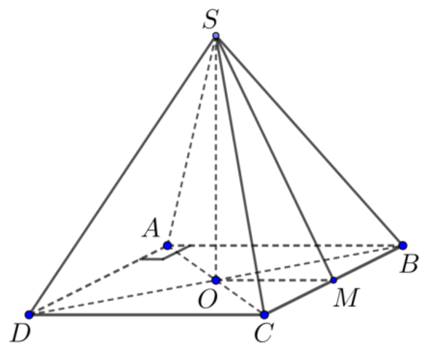
(4) Chứng minh: $SC \perp BD$.

(5) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB, SD. Chứng minh: $SC \perp IK$.

Lời giải

(1) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

- Ta có $SA = SB = SC = SD \Rightarrow \Delta SAC$ và ΔSBD cân đỉnh S.
- Do đó $SO \perp AC$ và $SO \perp BD$. Suy ra $SO \perp (ABCD)$.



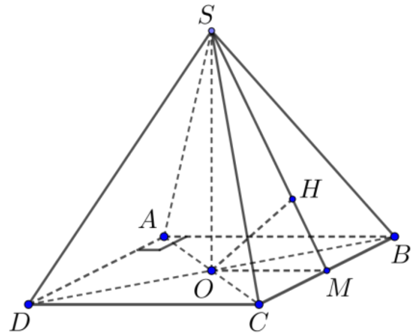
(2) Chứng minh: $BC \perp (SOM)$.

- Do $ABCD$ là hình vuông nên $OM \perp CB$.
- Mặt khác $SO \perp (ABCD)$ nên $CB \perp SO$.
- Từ đó ta suy ra $CB \perp (SOM)$.

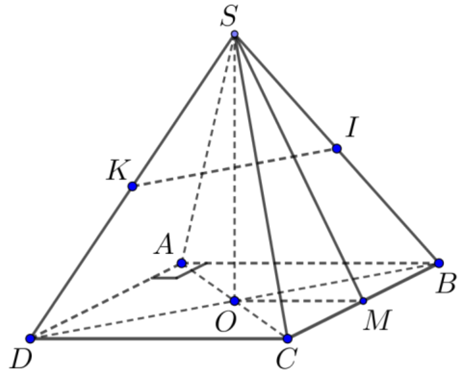
(3) Chứng minh: $OH \perp (SBC)$.

- Do H là hình chiếu của O lên SM nên $OM \perp SM$.
- Theo trên ta có $CB \perp (SOM)$ nên $OM \perp CB$.

Vậy $OM \perp (SCB)$.



(4) Chứng minh: $SC \perp BD$.



- Do $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$.
- Theo trên ta có $SO \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SO$.
- Suy ra $BD \perp (SAC)$. Do đó $BD \perp SC$.

(5) Chứng minh: $SC \perp IK$.

- Do I, K là trung điểm SB, SC nên $IK \parallel BD$.
- Theo trên thì $BD \perp SC$ nên $IK \perp SC$.

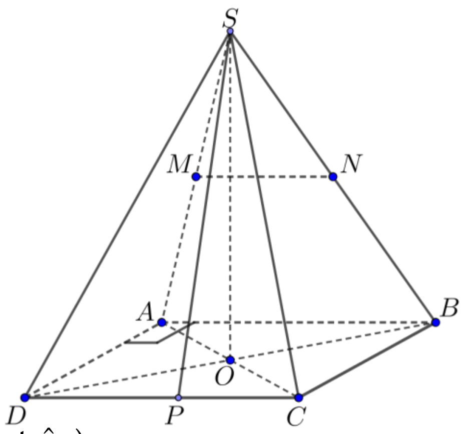
Bài 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình vuông tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Gọi M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh $SA,\ SB,\ CD$.

(1) Chứng minh $SA = SB = SC = SD$

(2) Chứng minh $MN \perp SP$

Lời giải

(1) Chứng minh $SA = SB = SC = SD$



- Do $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SO \perp (ABCD)$

Nên $SO \perp AC$ và $SO \perp BD$.

- Mặt khác $OA = OB = OC = OD$ nên $SA = SB = SC = SD$

(hình chiếu bằng nhau thì đường xiên bằng nhau)

(2) Chứng minh $MN \perp SP$

- Do M, N là trung điểm SA và SB

Nên $MN // AB // CD$ (đường trung bình.)

- Mặt khác P là trung điểm CD và $SC = SD$ (chứng minh trên).
- Suy ra $SP \perp CD$, do đó $SP \perp MN$.

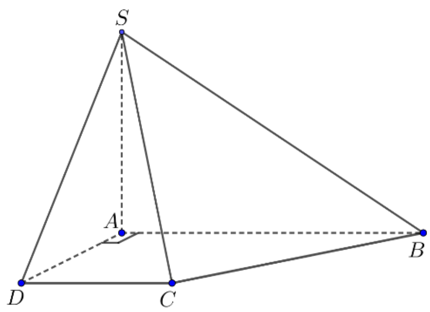
Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. Cho $AB = 2a; AD = DC = a$ và $SA \perp (ABCD)$.

(1) Chứng minh: SCD và SBC là các tam giác vuông.

(2) Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA và SB. Chứng minh $DCMN$ là hình chữ nhật.

Lời giải

(1) Chứng minh: SCD và SBC là các tam giác vuông.

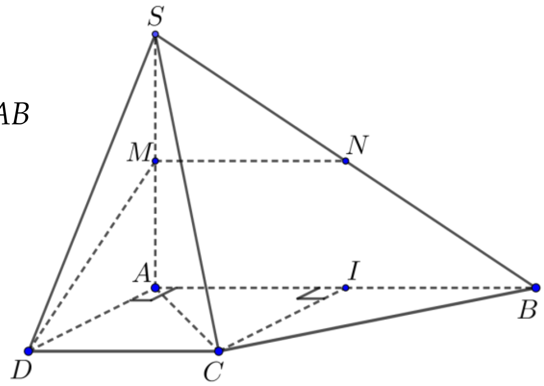


- Ta có $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D.
- Gọi I là trung điểm của AB,

Suy ra $CI = IA = IB$ nên ΔACB vuông tại C.

- Ta có $\begin{cases} CB \perp SA \\ CA \perp CB \end{cases} \Rightarrow CB \perp SC \Rightarrow \Delta SCB$ vuông tại C.

(2) Chứng minh tứ giác $DCMN$ là hình chữ nhật.



- Do MN là đường trung bình ΔSAB nên $\begin{cases} MN // AB \\ MN = \frac{1}{2}AB \end{cases}$

Suy ra $\begin{cases} MN // CD \\ MN = \frac{1}{2}CD \end{cases} \Rightarrow DCMN$ là hình bình hành.

- Mặt khác $CD \perp DM$ $\left(CD \perp (SAD)\right)$
- Do đó $DCMN$ là hình chữ nhật.

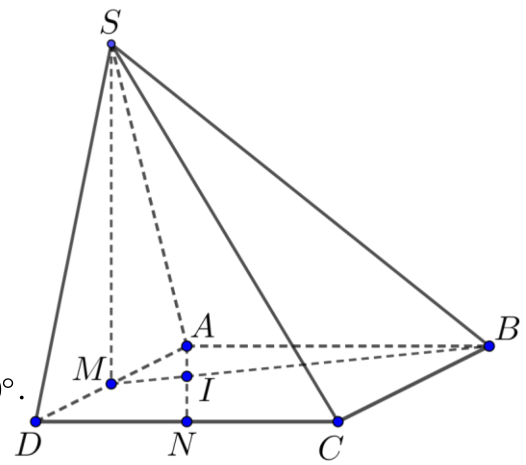
Bài 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông $SM \perp (ABCD)$ với M là trung điểm của AD.

(1) Chứng minh: các tam giác SAB và SCD vuông

(2) Gọi N là trung điểm của CD. Chứng minh $AN \perp (SMB)$.

Lời giải

(1) Chứng minh: các tam giác SAB và SCD vuông



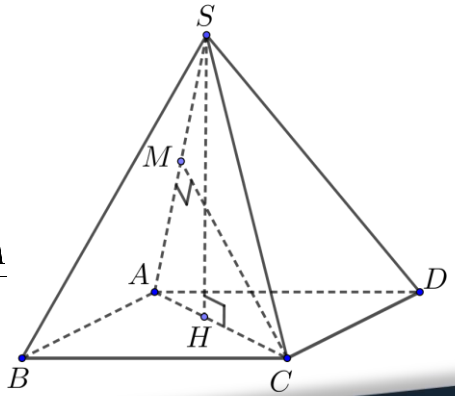
- Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp SA \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A.
- Ta có $\begin{cases} AD \perp CD \\ SM \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D.

(2) Chứng minh $AN \perp (SMB)$.

- $\Delta AMB = \Delta DNA, MAB = ADN = 90°$.
- $AMB + ABM = 90° \Rightarrow AMB + DAN = 90° \Rightarrow AIM = 90°$.
- Ta có $\begin{cases} AN \perp BM \\ SM \perp AN \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SBM)$.

Bài 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA = a$. Hình chiếu của S trên $(ABCD)$ là H nằm trên cạnh AC và $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA.

Lời giải



- ΔSAH vuông tại H nên $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.
- Ta có $CM = \frac{SH.AC}{SA} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.
- ΔAMC vuông tại M nên $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \frac{a}{2} = \frac{SA}{2}$

Suy ra M là trung điểm của SA.

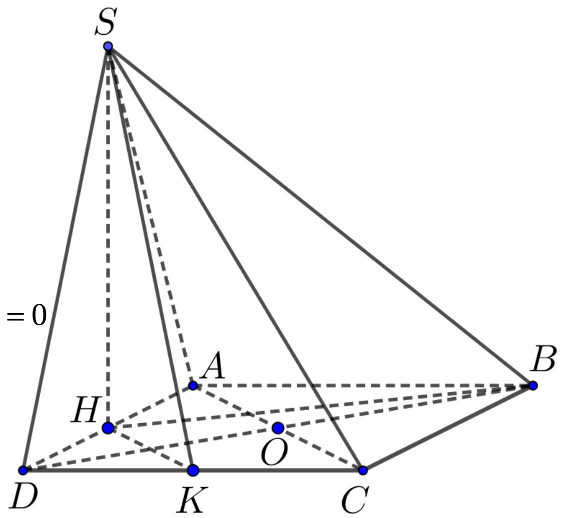
Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều, $SB = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AD, CD.

(1) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$

(2) Chứng minh $BD \perp SK$

Lời giải

(1) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$



- Ta có $HB = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.
- ΔSAD là Δ đều cạnh a: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- ΔSHB: $\cos H = \frac{HS^2 + HB^2 - SB^2}{2.HS.HB} = \frac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{4}a^2 - 2a^2}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}} = 0$

$\Rightarrow SHB = 90^0 \Rightarrow SH \perp HB$.

- Khi đó: $\begin{cases} SH \perp AD \\ SH \perp HB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

(2) Chứng minh $BD \perp SK$

- Ta có $\begin{cases} HK // AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp HK$.
- $(ABCD) \perp SH \Rightarrow BD \perp SH \Rightarrow BD \perp (SHK) \Rightarrow BD \perp SK$.

Bài 32. Cho tứ diện $OABC$, có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC). Chứng minh:

(1) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$.

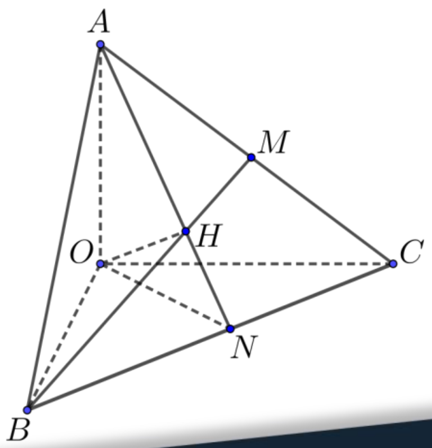
(2) $BC \perp (OAH)$

(3) H là trực tâm tam giác ABC.

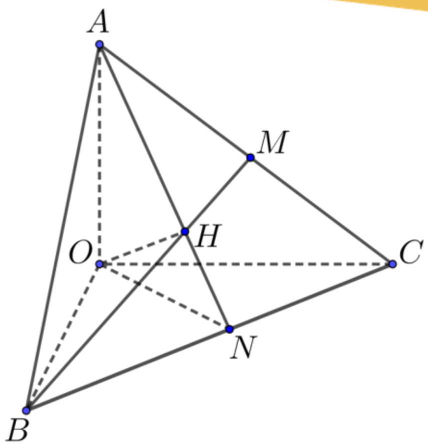
(4) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

Lời giải

(1) $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$



- Xét $OA \& \Delta OBC$: $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC$.
- Xét $OB \& \Delta OAC$: $\begin{cases} OA \perp OB \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OB \perp AC$.



- Xét $OC \& \Delta OAB: \begin{cases} OA \perp OC \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB$.

(2) $BC \perp (OAH)$

- Ta có: $\begin{cases} OH \perp (ABC) \\ H \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp BC$.

$(OBC) \perp OA \Rightarrow BC \perp OA \Rightarrow BC \perp (AOH)$

(3) H là trực tâm tam giác ABC

- Ta có: $BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp AH (1)$
- Ta có $\begin{cases} AC \perp OH \\ AC \perp OB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (BOH) \Rightarrow AC \perp BH (2)$

Từ $(1),(2)$ ta có H là trực tam của tam giác ABC.

(4) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

- Tam giác vuông AON có OH là đường cao nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{ON^2} + \dfrac{1}{OA^2}$.
- Tam giác vuông OBC có ON là đường cao nên: $\dfrac{1}{ON^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Suy ra $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Bài 33. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, tam giác SDC vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD

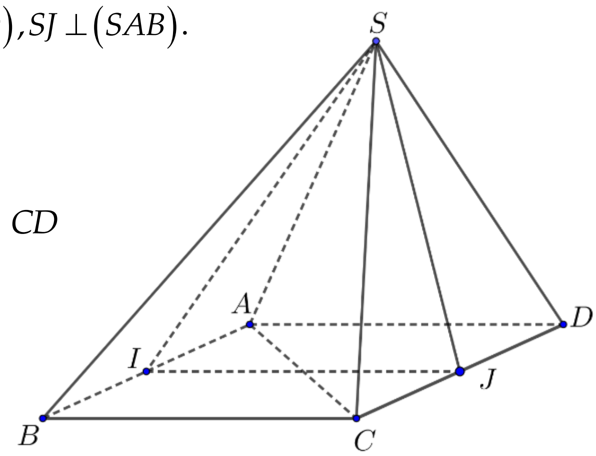
(1) Tính các cạnh của tam giác SIJ, chứng minh $SI \perp (SCD), SJ \perp (SAB)$.

(2) Gọi H là hình chiếu của S trên IJ. Chứng minh $SH \perp AC$.

(3) Gọi M là điểm thuộc đường thẳng DC, sao cho $BM \perp SA$. Tính AM?

Lời giải

(1) Tính các cạnh của tam giác SIJ, chứng minh $SI \perp (SCD), SJ \perp (SAB)$.



- ΔSAB là tam giác đều nên $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.
- $IJ // AD, IA = IB \Rightarrow IJ = AD = a$.
- ΔSDC vuông cân đỉnh S, J là trung điểm của CD

Nên: $SJ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

⌘ *Chứng minh* $SI \perp (SCD)$:

- Ta có $SI \perp AB // CD \Rightarrow SI \perp CD$.

- $a^2=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow IJ^2=SI^2+SJ^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại $S \Rightarrow SI\perp SJ \Rightarrow SI\perp(SCD)$.

⌘ *Chứng minh:* $SJ\perp(SAB)$:

- Ta có ΔSIJ vuông tại $S\Rightarrow SJ\perp SI$.
- Ta có ΔSCD vuông cân tại $S\Rightarrow SJ\perp CD//AB\Rightarrow SJ\perp AB$.

Suy ra $SJ\perp(SAB)$

(2) Chứng minh $SH\perp AC$.

- Ta có $SH\perp IJ\,(H\in IJ)$.
- $\begin{cases}CD\perp SJ\\ CD\perp IJ\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SIJ),(SH\subset(SIJ))\Rightarrow CD\perp SH$.

Suy ra $SH\perp(ABCD)\,(H\in(ABCD))\Rightarrow SH\perp AC$.

(3) Tính AM

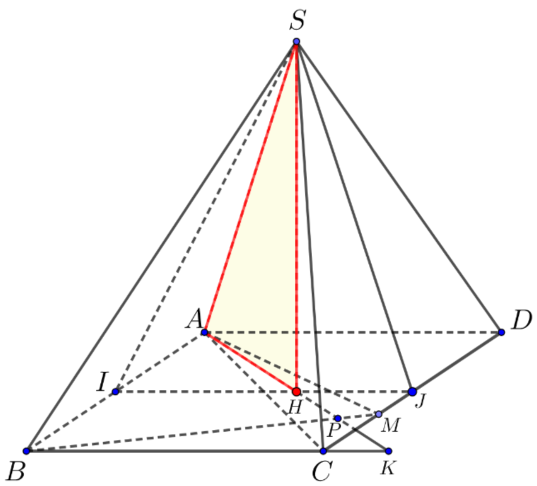
- Kẻ $BM\perp AH=P$, $AH\cap CB=K$.
- $\Delta AIH\sim\Delta BCM:\frac{IH}{CM}=\frac{AI}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow CM=2IH$
- Xét $\Delta SHI: IH=\sqrt{SI^2-SH^2}$

$=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{3a}{4}$.

$\Rightarrow CM=2IH=\frac{3a}{2}$.

- $\Delta ADM: AM^2=AD^2+MD^2$

$=AD^2+(CM-CD)^2=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.



Bài 34. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB=a, BC=a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, SCD vuông tại D có $SD=a\sqrt{5}$.

(1) Chứng minh $SA\perp(ABCD)$ và tính SA.

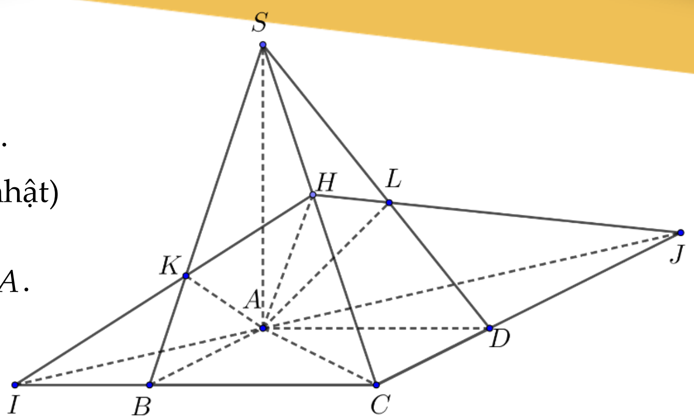
(2) Đường thẳng qua A vuông góc với AC, cắt CB,CD tại I,J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC, K và L là giao điểm của SB,SD với (HIJ). Chứng minh $AK\perp(SBC)$ và $AL\perp(SCD)$.

(3) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.

Lời giải

(1) Chứng minh $SA\perp(ABCD)$ và tính SA.

- Ta có: $BC\perp AB$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật)



- $BC \perp SB$ (do ΔSBC vuông tại B)

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$. Mà $SA \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp SA$.

- Ta có: $DC \perp AD$ (do $ABCD$ là hình chữ nhật)
- $DC \perp SD$ (do ΔSDC vuông tại D)

$\Rightarrow DC \perp (SAD)$. Mà $SA \subset (SAD) \Rightarrow DC \perp SA$.

- Ta có: $\left.\begin{matrix} SA \perp BC \\ SA \perp CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$.
- $SA \perp (ABCD), AD \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD$.

$\Rightarrow$ ΔSAD vuông tại $A \Rightarrow SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = \sqrt{5a^2 - 3a^2} = a\sqrt{2}$.

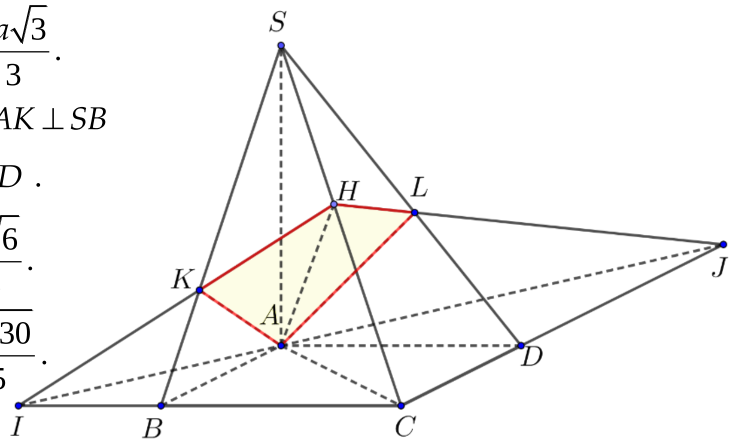
(2) Chứng minh $AK \perp (SBC)$ và $AL \perp (SCD)$.

- Vì $SA \perp (ABCD)$, $IJ \subset (ABCD)$ $\Rightarrow SA \perp IJ$.
- Ta có: $\left.\begin{matrix} IJ \perp AC \\ IJ \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow IJ \perp (SAC)$. Mà $SC \subset (SAC) \Rightarrow IJ \perp SC$.
- Mặt khác, $AH \perp SC$
- $IJ \cap AH = \{A\}; IJ, AH \subset (IJH)$

$\Rightarrow SC \perp (IJH) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp AK & (1) \\ SC \perp AL & (2) \end{cases}$.

- Ta có: $BC \perp (SAB)$. Mà $AK \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AK (3)$.
- $DC \perp (SAD)$. Mà $AL \subset (SAD) \Rightarrow DC \perp AL (4)$.
- Từ (1) và (3) suy ra $AK \perp (SBC)$.
- Từ (2) và (4) suy ra $AL \perp (SDC)$.

(3) Tính diện tích tứ giác $AKHL$.



- Ta có $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.
- $\Delta SAC \Rightarrow \dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.
- Ta có: $AK \perp (SBC)$. Mà $SB \subset (SDC) \Rightarrow AK \perp SB$
- $AL \perp (SDC)$. Mà $SD \subset (SAD) \Rightarrow AL \perp SD$.
- $\Delta SAB \Rightarrow \dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.
- $\Delta SAD \Rightarrow \dfrac{1}{AL^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} \Rightarrow AL = \dfrac{a\sqrt{30}}{5}$.
- Có: $AK \perp (SBC)$.

Mà $KH \subset (SBC) \Rightarrow AK \perp KH \Rightarrow KH = \sqrt{AH^2 - AK^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow S_{\Delta AKH} = \dfrac{1}{2}KH.KA = \dfrac{a^2}{3}$.

- $AL \perp (SDC)$. Mà $LH \subset (SAD) \Rightarrow AL \perp LH \Rightarrow LH = \sqrt{AH^2 - AL^2} = \dfrac{a\sqrt{30}}{15}$.

$\Rightarrow S_{\Delta AHL} = \dfrac{1}{2}LH.LA = \dfrac{a^2}{5}$. Vậy $S_{AKHL} = S_{\Delta AKH} + S_{\Delta AKL} = \dfrac{8a^2}{15}$.

Bài 35. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với đáy, tam giác ABC đều cạnh a và $CC' = a$.

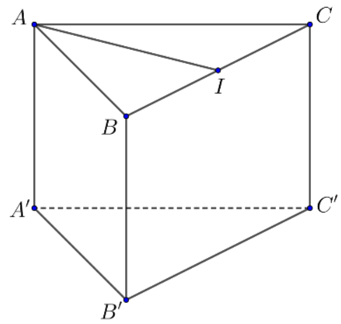
(1) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

(2) Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh $AM \perp BC'$.

(3) Lấy điểm N thuộc $A'B'$ sao cho $NB' = \dfrac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

Lời giải

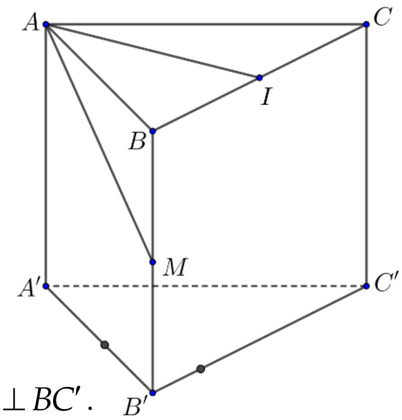
(1) Chứng minh $AI \perp BC'$.



- Vì ΔABC đều, I là trung điểm BC $\Rightarrow AI \perp BC$.
- Ta có: $AA' \perp (ABC)$ mà $AI \subset (ABC)$ $\Rightarrow AA' \perp AI$.
- Mặt khác, $AA' // BB' \Rightarrow BB' \perp AI$.
- Ta có: $\left.\begin{array}{l} AI \perp BC \\ AI \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AI \perp (BCC'B')$
- Mà $BC' \subset (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.

(2) Chứng minh $AM \perp BC'$.

- Ta có: $AA' \perp (ABC)$ mà $AA' // BB' // CC'$ $\Rightarrow BB' \perp (ABC), CC' \perp (ABC)$.



- Xét tứ giác $BCC'B'$ có: $\left.\begin{array}{l} B = C = 90^0 \\ BC = CC' = B'C' = BB' \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BCC'B'$ là hình vuông $\Rightarrow BC' \perp B'C \,(1)$.

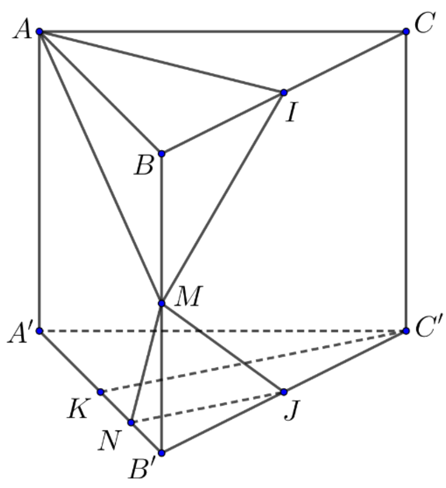
- Vì I, M lần lượt là trung điểm BC, BB'

$\Rightarrow IM$ là đường trung bình $\Delta BC'B'$ $\Rightarrow IM // B'C \,(2)$.

- Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC' \perp IM$.
- Ta có: $\left.\begin{array}{l} BC' \perp AI \\ BC' \perp MI \end{array}\right\} \Rightarrow BC' \perp (AMI)$. Mà $AM \subset (AMI)$ $\Rightarrow AM \perp BC'$.

(3) Chứng minh $AM \perp (MNJ)$.

- Gọi K là trung điểm $A'B'$ $\Rightarrow C'K \perp A'B'$ (vì $\Delta A'B'C'$ đều)



- Ta có: $\left.\begin{matrix} C'K \perp AA' \\ C'K \perp A'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow C'K \perp (ABB'A')\ (3)$
- Vì N, J lần lượt là trung điểm của $KB', B'C'$

$\Rightarrow NJ$ là đường trung bình $\Delta KB'C'$ $\Rightarrow NJ//KC'(4)$.

- Từ (3) và (4) $\Rightarrow NJ \perp (ABB'A')$.

Mà $AM \subset (ABB'A') \Rightarrow NJ \perp AM$.

- Vì M, J lần lượt là trung điểm $BB'; B'C'$

$\Rightarrow MJ$ là đường trung bình $\Delta BB'C'$ $\Rightarrow MJ//BC'$.

Mà $BC' \perp (AMI) \Rightarrow MJ \perp (AMI) \Rightarrow MJ \perp AM$.

- Ta có $\left.\begin{matrix} AM \perp MJ \\ AM \perp NJ \end{matrix}\right\} \Rightarrow AM \perp (MNJ)$.

Dạng: Góc giữa đường mặt

Bài 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tìm hình chiếu của:

(1) SC, SB, SO lên mặt phẳng $(ABCD)$.

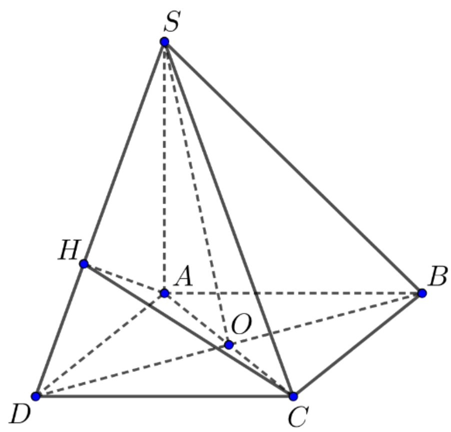
(2) AC, SC, SD lên mặt phẳng (SAB).

(3) SB, DC lên mặt phẳng (SAC)

(4) SA, AC lên mặt phẳng (SCD).

Lời giải

(1) SC, SB, SO lên mặt phẳng $(ABCD)$.



- Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow A$ là hình chiếu của S lên $(ABCD)$

$\rightarrow AC, AB, AO$ là hình chiếu của SC, SB, SO lên $(ABCD)$.

(2) AC, SC, SD lên mặt phẳng (SAB).

- Có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CB$;
- Đáy $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp CB$

$\Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow B$ là hình chiếu của C lên (SAB).

$\rightarrow AB, SB$ lần lượt là hình chiếu của AC, SC lên (SAB).

- Có $\left\{\begin{matrix} CB \perp (SAB) \\ AD//CB \end{matrix}\right. \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow A$ là hình chiếu của D lên (SAB).
- Do đó SA là hình chiếu của SD lên (SAB).

(3) SB, DC lên mặt phẳng (SAC)

- Có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD$; đáy $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC\perp BD$
$\Rightarrow BD\perp(SAC)$ mà $BD\cap(SAC)=O$.
$\Rightarrow O$ là hình chiếu của B và D lên lên (SAC).
- Do đó SO, OC lần lượt là hình chiếu của SB, DC lên (SAC).

(4) SA, AC lên mặt phẳng (SCD).

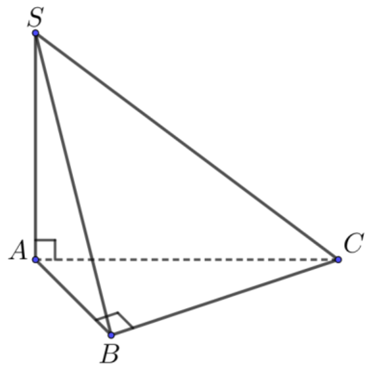
- Có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp CD$; đáy $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AD\perp CD$
$\Rightarrow CD\perp(SAD)$.
- Trong (SAD), kẻ $AH\perp SD\Rightarrow AH\perp(SCD)\Rightarrow H$ là hình chiếu của A lên (SCD).
- Do đó SH, HC lần lượt là hình chiếu của SA, AC lên (SCD).

Bài 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, ABC là tam giác vuông cân tại B. Cho độ dài các cạnh $SA=AB=a$. Xác định và tính:

(1) Góc giữa SB và (ABC)

(2) Góc giữa SC và (SAB).

Lời giải



(1) Góc giữa SB và (ABC)

- AB là hình chiếu vuông góc của SB lên (ABC).

Suy ra góc giữa SB và (ABC) là $\widehat{SBA}$.

- Tam giác SAB vuông cân tại A suy ra $\widehat{SBA}=45^\circ$.

(2) Góc giữa SC và (SAB).

- Ta có $\begin{cases} CB\perp AB \\ CB\perp SA \end{cases}\Rightarrow CB\perp(SAB)$
- SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB).
- Góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB}$.
- Ta có $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$
- Vì $CB\perp(SAB)$ nên $CB\perp SB$.
- ΔSBC vuông tại B có $\tan\widehat{CSB}=\dfrac{BC}{SB}=\dfrac{a}{\sqrt{2}a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \widehat{CSB}\approx 35^\circ15'$.

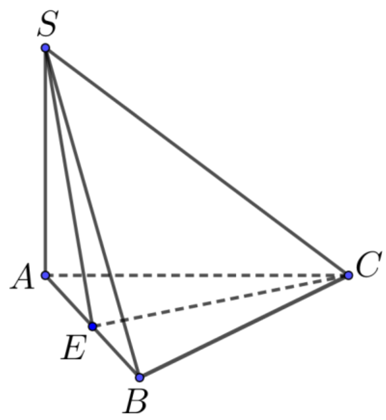
Bài 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=2a$. ΔABC đều cạnh a. Tính

(1) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC)

(2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

Lời giải

(1) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC)



- $SA\perp(ABC)\Rightarrow\left(SB,(ABC)\right)=\left(SB,AB\right)=SBA$
- $\tan SBA=\dfrac{SA}{AB}=\dfrac{2a}{a}=2\Rightarrow SBA=63°26'$

(2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

- Gọi E là trung điểm AB.
- Ta có $EC\perp AB$ và $SA\perp EC$
- Do đó $EC\perp(SAB)$

Suy ra $\left(SC,(SAB)\right)=\left(SC,SE\right)=CSE$

- $\tan CSE=\dfrac{EC}{SE}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{57}}{17}\Rightarrow CSE=23°56'$

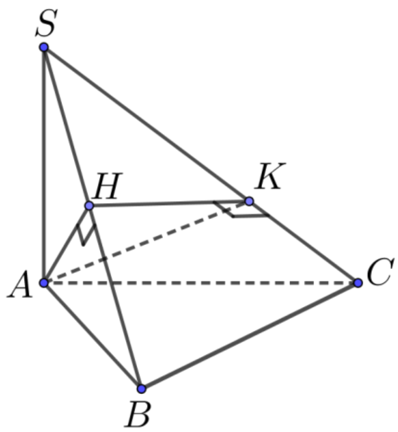
Bài 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA\perp(ABC)$, $AB=a,SA=a\sqrt{3}$.

(1) Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC).

(2) Gọi H,K lần lượt là đường cao của $\Delta SAB,\Delta SAC$. Tính góc giữa đường thẳng AK và (SBC).

Lời giải

(1) Tính góc giữa đường thẳng SC và (ABC).



- $SA\perp(ABC)\Rightarrow\left(SC,(ABC)\right)=\left(SC,AC\right)=SCA$
- $\tan SCA=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow SCA=50°46'$.

(2) Tính góc giữa đường thẳng AK và (SBC).

- Ta có $\begin{cases}AH\perp SB\\AH\perp AB\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)$

$\Rightarrow\left(AK,(SBC)\right)=\left(AK,HK\right)=AKH$

- $\sin AKH=\dfrac{AH}{AK}=\dfrac{\dfrac{SA.AB}{SB}}{\dfrac{SA.AC}{SC}}=\dfrac{AB.SC}{SB.AC}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\Rightarrow AKH=52°14'$.

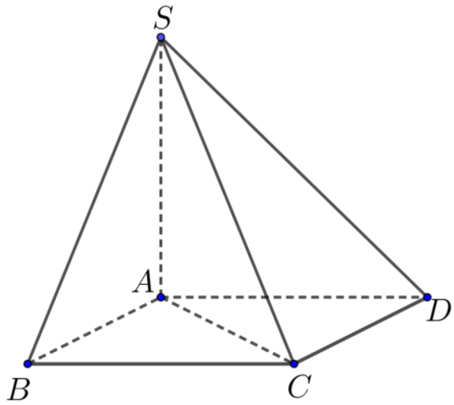
Bài 40. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính góc giữa đường thẳng và , đường thẳng và .

(1) Góc giữa đường thẳng SD và (SAB)

(2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

Lời giải

(1) Góc giữa đường thẳng SD và (SAB)



- Ta có $AD \perp (SAB) \Rightarrow (SD,(SAB)) = (SD,SA) = ASD$

$\tan ASD = \dfrac{AD}{SA} = \sqrt{3} \Rightarrow ASD = 60°$

(2) Góc giữa đường thẳng SC và (SAB)

- Ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow (SC,(SAB)) = (SC,SB) = BSC$

$\tan BSC = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow ASD = 50°46'$

Bài 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D. $AB = 2a$,, $AD = CD = a, SA = a\sqrt{2}, SA \perp (ABCD)$

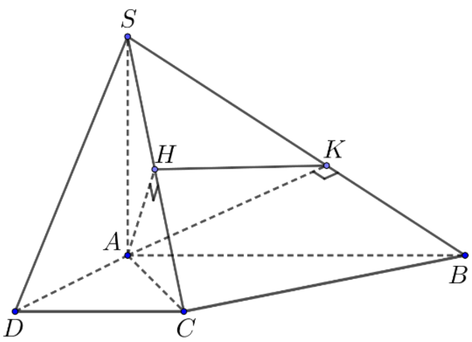
(1) Tính góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$, đường thẳng SC và $(ABCD)$

(2) Kẻ $AH \perp SC$ tại H, $AK \perp SD$ tại K. Tính góc giữa đường thẳng AH và (SAD), đường thẳng AC và (SCD).

(3) Tính góc giữa đường thẳng SB và (SAC) .

Lời giải

(1) Tính góc giữa đường thẳng SB và $(ABCD)$, đường thẳng SC và $(ABCD)$



- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SB,(ABCD)) = (SB, AB) = SBA$
- $\tan SBA = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SBA = 35°15'$.
- $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SC,(ABCD)) = (SC, AC) = SCA$
- $\tan SCA = \dfrac{SA}{AC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow SCA = 45°$.

(2) Tính góc giữa đường thẳng AH và (SAD), đường thẳng AC và (SCD).

• Ta có $\begin{cases} AH \perp SC \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow \left(AK,(SBC)\right) = \left(AK, HK\right) = AKH$

• $\sin AKH = \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{\dfrac{SA.AC}{SC}}{\dfrac{SA.AB}{SB}} = \dfrac{SB.AC}{AB.SC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AKH = 60°$

(3) Tính góc giữa đường thẳng SB và (SAC) .

• Ta có $BC \perp (SAC) \Rightarrow \left(SB,(SAC)\right) = \left(SB,SC\right) = BSC$

$\Rightarrow \tan BSC = \dfrac{BC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow BSC = 45°$.

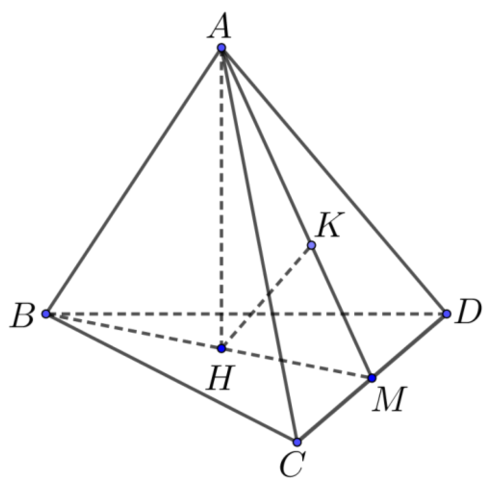
Bài 42. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD). Tính

(1) Góc giữa AB và (BCD)

(2) Góc giữa AH và (ACD)

Lời giải

(1) Góc giữa AB và (BCD)



• Gọi M là trung điểm của CD.

• Vì tứ diện $ABCD$ đều và H là hc của A lên (BCD)

$\Rightarrow H$ là trọng tâm ΔBCD .

• Hình chiếu của AB lên mặt phẳng (BCD) là BH .

• Do đó góc giữa $\left(AB;(BCD)\right) = ABH$.

• Xét ΔBCD:

$BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BH = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}; HM = \dfrac{1}{3}BM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

• Xét $\Delta ABH : \cos ABH = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ABH \approx 54°44'$.

(2) Góc giữa AH và (ACD)

• Kẻ $HK \perp AM$.

• Ta có: $\begin{cases} CD \perp BM \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp HK$.

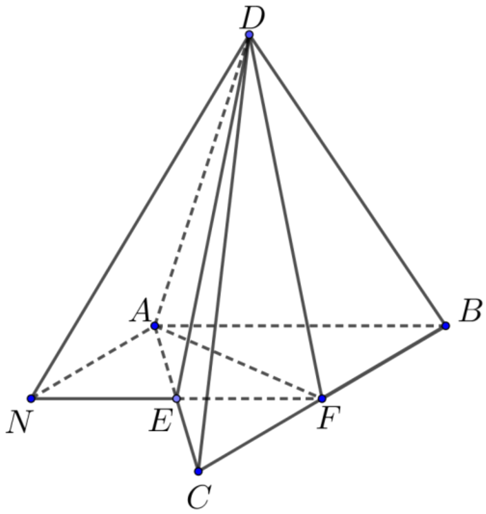
• Lại có: $\begin{cases} HK \perp CD \\ HK \perp AM \end{cases} \Rightarrow HK \perp (ACD) \Rightarrow \left(AH;(ACD)\right) = \left(AH; AK\right) = HAK$.

Xét $\Delta ABH: AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

- Xét $\Delta AHM: \tan HAM=\dfrac{HM}{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow HAM\approx 19^\circ 28'$.

Bài 43. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông cân tại $B, BA=BC=a$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BC, $DE\perp(ABC)$. Biết góc hợp bởi đường thẳng DA và (DEF) bằng 30°. Tính DE.

Lời giải



- Lấy điểm N sao cho $ABFN$ là hình chữ nhật.
- Kẻ $AH\perp DN$.
- Ta có: $\begin{cases} AN\perp NF \\ AN\perp DE \end{cases}\Rightarrow AN\perp(DNF)$

$\Rightarrow$góc giữa DA với (DEF) là $ADN=30^\circ$.

- Ta có: $AN=BF=\dfrac{a}{2}$.
- Xét $\Delta DAN: \sin 30^\circ=\dfrac{AN}{AD}\Leftrightarrow AD=\dfrac{AN}{\sin 30^\circ}=a$.
- ΔABC vuông cân tại $B\Rightarrow AC=a\sqrt{2}\Rightarrow AE=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Xét $\Delta DAE: DE=\sqrt{DA^2-AE^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 44. Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB=AC=a, SA=SB=SC$. Gọi I là trung điểm của BC, H là hình chiếu của I lên mp(SAB).

(1) Chứng minh $SA\perp BC$

(2) Chứng minh H là trực tâm của tam giác SAB.

(3) Giả sử góc giữa SI và (SAB) bằng 45°. Tính độ dài cạnh SA.

(4) Với độ dài vừa tìm được của SA, hãy tính góc giữa đường thẳng SA và (ABC), đường thẳng SA và (SBC).

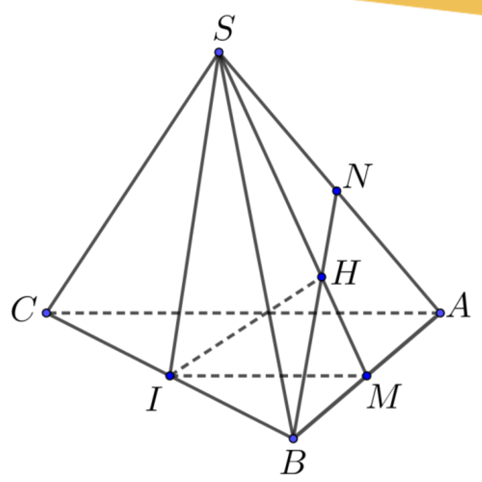
Lời giải

(1) Chứng minh $SA\perp BC$

- Ta có: $\begin{cases} SI\perp CB \\ AI\perp CB \end{cases}\Rightarrow CB\perp(SAI)\Rightarrow CB\perp SA$.

(2) Chứng minh H là trực tâm của tam giác SAB.

- Gọi M là trung điểm của AB, $BN\perp SA$ và $H=SM\cap BN$.



- Ta có: $\begin{cases} AB \perp IM \\ AB \perp SM \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SIM) \Rightarrow AB \perp IH$.
- Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ SA \perp BN \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BCN) \Rightarrow SA \perp IH$.
- $\begin{cases} IH \perp AB \\ IH \perp SA \end{cases} \Rightarrow IH \perp (SAB)$.

Vậy H là trực tâm của tam giác SAB

(3) Giả sử góc giữa SI và (SAB) bằng 45°. Tính độ dài cạnh SA .

- Do $IH \perp (SAB)$ nên góc giữa $(SI;(SAB)) = ISH = 45^\circ$.
- Đặt $SH = IH = x \Rightarrow SI = x\sqrt{2}$.
- Do ΔSAB cân tại S nên $SH = \dfrac{2}{3}SM \Rightarrow SM = \dfrac{3x}{2}$.
- IM là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow IM = \dfrac{a}{2}$.
- Xét $\Delta SIM: IM^2 = SI^2 + SM^2 - 2SI.SM.\cos ISM$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{4} = 2x^2 + \dfrac{9}{4}x^2 - 2.x\sqrt{2}.\dfrac{3}{2}x.\cos 45^\circ \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{5}}{5} \rightarrow SM = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$.

- Xét $\Delta SAM: SA = \sqrt{SM^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a\sqrt{5}}{10}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{70}}{10}$.

(4) Tính góc giữa đường thẳng SA và (ABC), đường thẳng SA và (SBC).

- Ta có: $\begin{cases} AB \perp IM \\ AB \perp SM \end{cases} \Rightarrow AB \perp SI$.
- $\begin{cases} SI \perp BC \\ SI \perp AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABC) \Rightarrow (SA;(ABC)) = SAI$.
- Xét $\Delta AIM: AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Xét $\Delta SAI: \tan SAI = \dfrac{SI}{AI} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow SAI \approx 41^\circ 48'37{,}13''$.
- Ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp SI \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow (SA;(SBC)) = ASI$.
- Xét $\Delta SAI: \tan ISA = \dfrac{IA}{SI} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow ISA \approx 48^\circ 11'22{,}87''$.

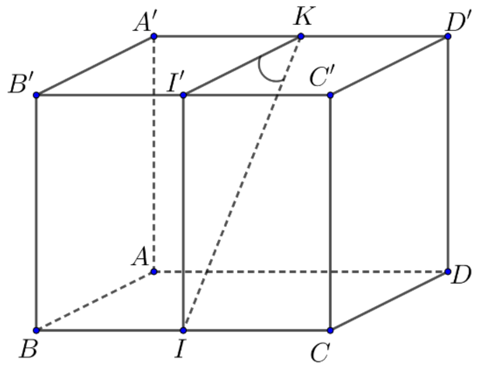
Bài 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'; AC' và CD'.

(2) Tính góc giữa IK và $(A'B'C'D')$ trong đó I, K lần lượt là trung điểm của $BC, A'D'$.

Lời giải

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC'; AC' và CD'.



- Gọi a là độ dài cạnh của hình lập phương
- Có $AD'//BC' \Rightarrow (AB', BC') = (AB', AD')$
- Xét $\Delta AB'D'$: $AB' = AD' = B'D' = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta AB'D'$ đều

$\Rightarrow B'AD' = 60^0 \Rightarrow (AB', AD') = 60^0 \Rightarrow (AB', BC') = 60^0$.

- $\cos\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{CD'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{CD'}}{\left|\overrightarrow{AC'}\right|.\left|\overrightarrow{CD'}\right|}$
- Có $\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{CD'} = \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{CD'}\right) = 90^0$.

Vậy $(AC', CD') = 90^0$.

(2) Tính góc giữa IK và $(A'B'C'D')$

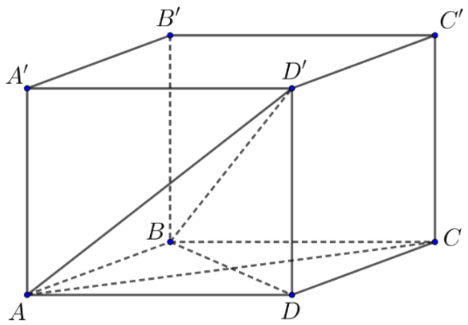
- Gọi I' là trung điểm của $B'C' \Rightarrow I'$ là hình chiếu của I lên $(A'B'C'D')$.
- Có $IK \cap (A'B'C'D') = K \rightarrow (IK, (A'B'C'D')) = (IK, I'K) = IKI'$.
- Lại có $\Delta IKI'$ vuông cân tại $I' \Rightarrow IKI' = 45^0 \Rightarrow (IK, (A'B'C'D')) = 45^0$.

Bài 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

(1) BD' và $(AA'D'D)$ (2) BD và $(B'AC)$.

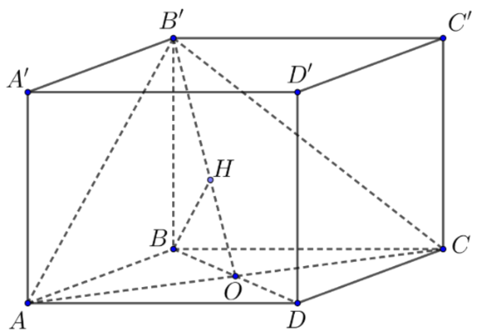
Lời giải

(1) BD' và $(AA'D'D)$



- $\left.\begin{array}{l} BD' \cap (AA'D'D) = D' \\ BA \perp (AA'D'D) \end{array}\right\} \Rightarrow (BD', (AA'D'D)) = BD'A$
- Xét $\Delta ABD'$ có $AB = a, AD' = a\sqrt{2}, BD' = a\sqrt{3}$
- $\cos BD'A = \dfrac{AD'}{BD'} \Rightarrow BD'A = 35{,}3^0$.

(2) BD và $(B'AC)$.



- Gọi $O = AC \cap BD$, gọi H là hc của B lên $B'O$
- Có $\left.\begin{array}{l} BH \perp B'O \\ BH \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow BH \perp (B'AC)$
- Mà $BD \cap (B'AC) = O \Rightarrow (BD, (B'AC)) = BOH = BOB'$
- $\tan BOB' = \dfrac{BB'}{BO} = \sqrt{2} \Rightarrow BOB' \approx 54{,}7^0$.

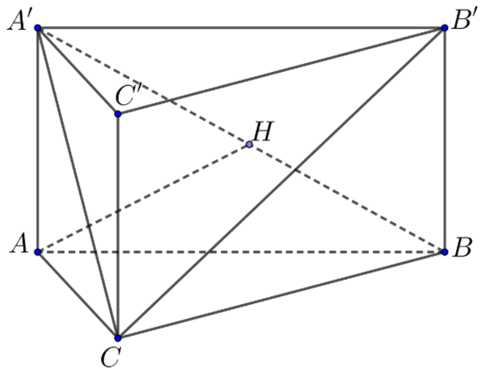
Bài 47. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có AA' vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B, $AB = a, BC = 2a$. Góc giữa $A'C$ và mặt đáy bằng 30^0.

(1) Tính góc giữa $A'C$ và $(ABB'A')$.

(2) Tính góc giữa AA' và $(A'BC)$.

Lời giải

(1) Tính góc giữa $A'C$ và $(ABB'A')$.



- $\left.\begin{array}{l} A'C \cap (ABB'A') = A' \\ CB \perp (ABB'A') \end{array}\right\} \Rightarrow (A'C, (ABB'A')) = CA'B$.
- ΔABC vuông tại B có $AB = a, BC = 2a \Rightarrow AC = a\sqrt{5}$
- Có góc giữa $A'C$ và mặt đáy bằng $30^0 \Rightarrow A'CA = 30^0$.
- $AA' = AC.\tan 30^0 = \dfrac{a\sqrt{15}}{3}$, $A'C = \dfrac{AC}{\cos 30^0} = \dfrac{2a\sqrt{15}}{3}$.
- Xét $\Delta A'BC$: $\sin CA'B = \dfrac{BC}{A'C} \Rightarrow CA'B \approx 50,77^0$

(2) Tính góc giữa AA' và $(A'BC)$.

- Từ A hạ $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp (A'BC)$
- $\left.\begin{array}{l} AA' \cap (A'BC) = A' \\ AH \perp (A'BC) \end{array}\right\} \Rightarrow (AA', (A'BC)) = AA'H = AA'B$
- $\tan AA'B = \dfrac{AB}{AA'} = \dfrac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow AA'B \approx 37,76^0 \Rightarrow (AA', (A'BC)) \approx 37,76^0$

--------------------Hết--------------------

Hình học & Đo lường

Bài 03

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

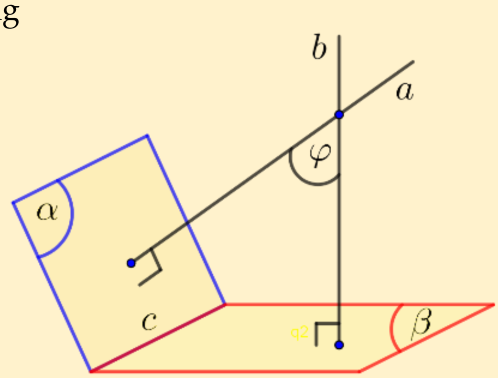
A Lý thuyết

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

$$+\text{ Nếu } \left[\begin{array}{l} (\alpha)//(\beta) \\ (\alpha)\equiv(\beta) \end{array}\right. \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right)=0^\circ.$$

$$+\ 0^\circ \le \left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right) \le 90^\circ\ .$$

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa:

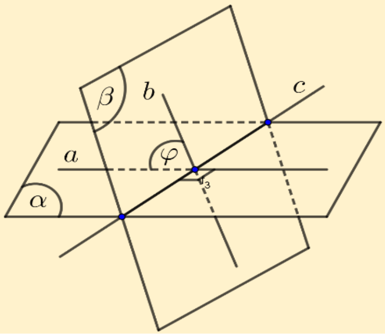
Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90°.

$$(P)\perp(Q) \Leftrightarrow \left(\widehat{(P),(Q)}\right)=90^\circ$$

Góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau:

Cho 2 mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau theo giao tuyến c

$$\left\{\begin{array}{l} a\subset(\alpha), a\perp c \\ b\subset(\beta), b\perp c \end{array}\right. \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right)=(a,b)$$



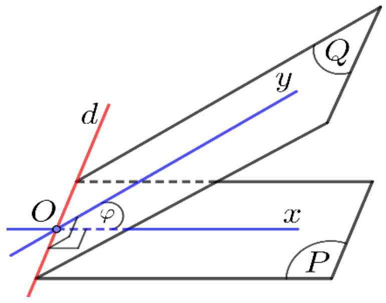
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

⌘ Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox \perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\left((P),(Q)\right) = (Ox, Oy)$.



Lưu ý

Việc xác định điểm O có thể được thực hiện theo cách sau:

(1) Chọn điểm M trên (Q) sao cho dễ dàng xác định hình chiếu H của nó trên (P).

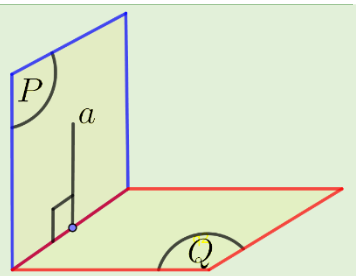
(2) Dựng $MO \perp d$ thì khi đó $\left((\alpha),(\beta)\right) = \widehat{MOH}$.

▶ Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc:

Định lý 1:

Hai mặt phẳng vuông góc với nhau ⇔ trong mặt phẳng này có một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$

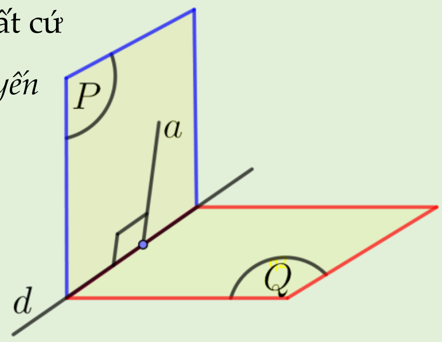


3. Tính chất cơ bản về hai mặt phẳng vuông góc

Định lý 2:

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong (Q) mà *vuông góc với giao tuyến* của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (P).

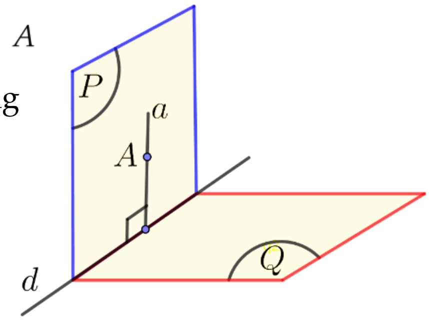
$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = d \Rightarrow a \perp (P) \\ (Q) \supset a \perp d \end{cases}$$



Nhận xét

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và thì A là một điểm trong (P) thì đường thẳng đi qua A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong mặt phẳng (P).

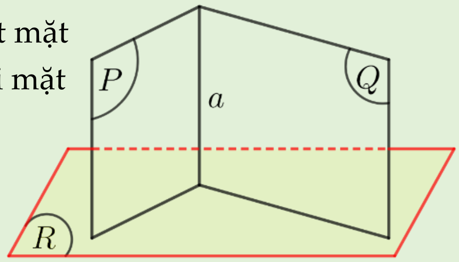
Kí hiệu: $\begin{cases}(P)\perp(Q)\\ A\in(P)\\ A\in a\perp(Q)\end{cases}\Rightarrow a\subset(P).$



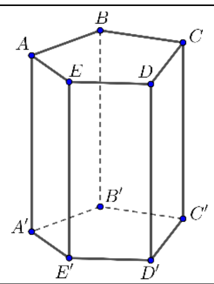
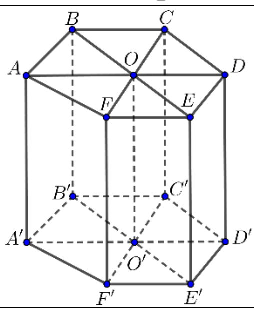
Định lý 3:

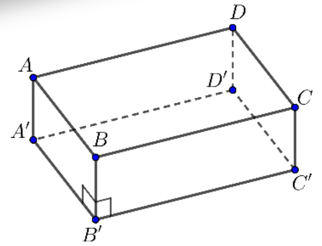
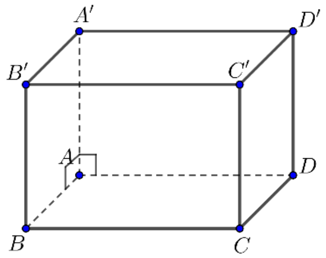
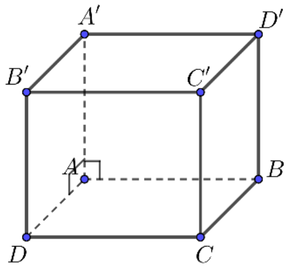
Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

$$\begin{cases}(P)\cap(Q)=a\\ (P)\perp(R)\\ (Q)\perp(R)\end{cases}\Rightarrow a\perp(P)$$



4. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương

Tên	Hình vẽ	Tính chất
Hình lăng trụ đứng		Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với hai mặt đáy. • Các mặt bên là các hình chữ nhật. • Các mặt bên vuông góc với hai đáy.
Hình lăng trụ đều		Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Hình hộp đứng		Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
Hình hộp chữ nhật		Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Tất cả các mặt đều là hình chữ nhật. Đường chéo $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ với a,b,c là 3 kích thước.
Hình lập phương		Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

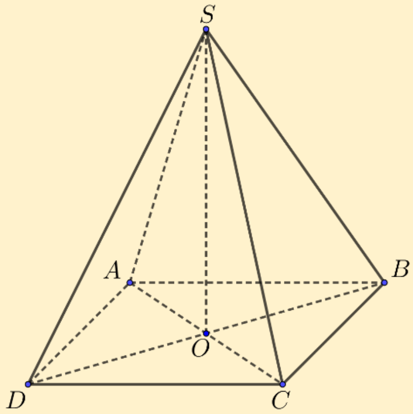
5. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

Định nghĩa hình chóp đều:

Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều và có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Tính chất:

- Các cạnh bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau.
- Các mặt bên của hình chóp đều tạo với đáy các góc bằng nhau.

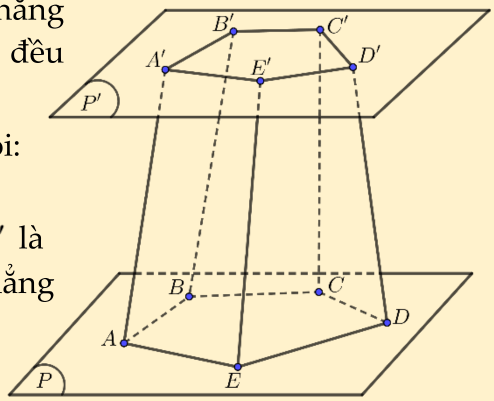


Định nghĩa hình chóp cụt đều:

Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một mặt phẳng song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cụt đều.

▶ Trong hình chóp cụt đều $ABCDE.A'B'C'D'E'$, ta gọi:

+ Các điểm A', B', C', D', E' là các đỉnh.
+ Đa giác $ABCDE$ là đáy lớn, đa giác A', B', C', D', E' là đáy nhỏ. Đáy lớn và đáy nhỏ nằm trên hai mặt phẳng song song.



▶ **Nhận xét:**

- Cạnh của hai đa giác là cạnh đáy. Các cạnh đáy tương ứng song song từng đôi một
- Các hình thang cân $AA'EE', AA'B'B, BB'C'C, C'CDD', DD'E'E$ là các mặt bên.
- Cạnh bên của mặt bên gọi là cạnh bên của hình chóp cụt đều. Hình chóp cụt đều có các cạnh bên bằng nhau, các mặt bên là những hình thang cân.
- Đoạn thẳng nối tâm hai đáy là đường cao. Độ dài đường cao là chiều cao.

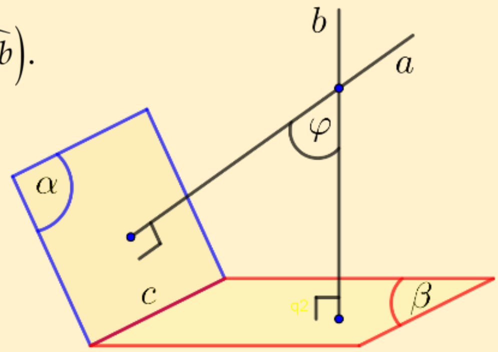
B Bài tập

Dạng 1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng bằng cách dùng định nghĩa

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha)\\ b\perp(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\left(\widehat{a,b}\right).$$



Chú ý:

+ Nếu $\left[\begin{array}{l}(\alpha)//(\beta)\\ (\alpha)\equiv(\beta)\end{array}\right.\Rightarrow((\alpha),(\beta))=0^\circ$.

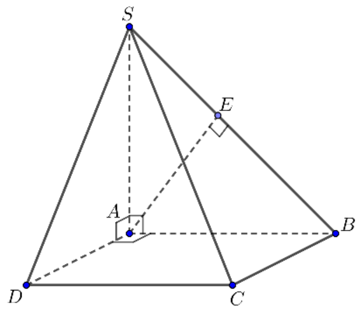
+ $0^\circ\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90^\circ$.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA=a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

Lời giải

Ta có $\left\{\begin{array}{l}AB\perp AD\\ AB\perp SA\end{array}\right.\Rightarrow AB\perp(SAD)$.



Gọi E là hình chiếu của A lên SB, dễ thấy $AE\perp(SBC)$.

Vậy $\left[(SAD);(SBC)\right]=(AB;AE)=\widehat{BAE}$

Ta có ΔSAB vuông cân tại A nên $\widehat{SBA}=45^o$. $\Rightarrow\widehat{BAE}=45^o$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng 45°.

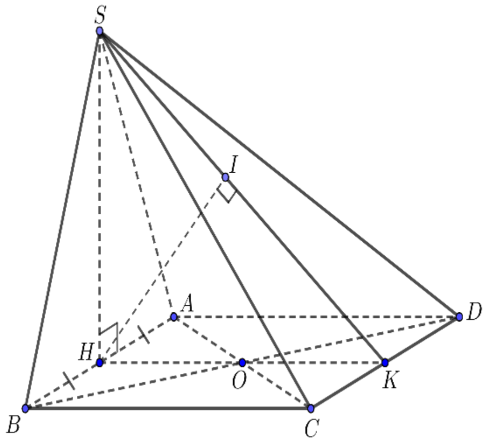
Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng

Lời giải

Gọi H,K là trung điểm của $AB;CD$.

Do $(SAB)\perp(ABCD)$ nên SH là đường cao của hình chóp.



Ta có $HK \perp AB, HK \perp SH \Rightarrow HK \perp (SAB)$ (1)

Dựng $HI \perp SK \Rightarrow HI \perp (SCD)$ (2).

Từ (1) và (2) $\rightarrow \left[(SAB);(SDC)\right] = \left(HK, HI\right) = IHK$.

Ta có $SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; HK = a$.

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $\cos IHK = \dfrac{HI}{HK} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Dạng 2. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa trên giao tuyến

Phương pháp

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm

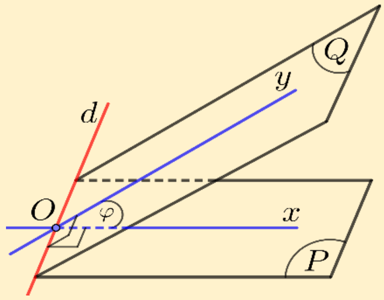
Cách xác định góc dùng cho hai mặt phẳng cắt nhau:

⌘ Bước 1. Tìm giao tuyến d của (P) và (Q).

⌘ Bước 2. Chọn điểm O trên d, từ đó:

- Trong (P) dựng $Ox \perp d$.
- Trong (Q) dựng $Oy \perp d$.

Khi đó: $\widehat{((P),(Q))} = \widehat{(Ox,Oy)}$.



Ví dụ 2.1.

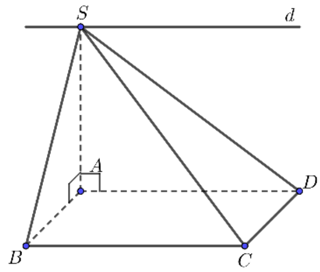
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) bằng

Lời giải

Mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (SAD) cắt nhau theo giao tuyến là đường thẳng $d // BC // AD$.

Vì $SA \perp d, SB \perp d$ nên $((SBC),(SAD)) = (SA,SB) = ASB$.

Vậy ΔSAB vuông cân tại A nên $ASB = 45^o$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng bao nhiêu?

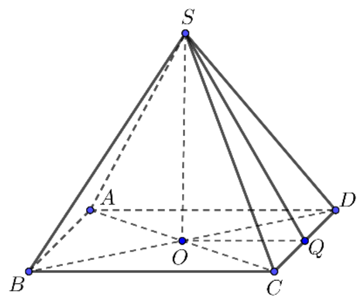
Lời giải

Gọi Q là trung điểm $BC \to OQ \perp BC$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp OQ \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (SQ,OQ) = SQO$.

ΔSOQ có $\tan SQO = \frac{SO}{OQ} = \sqrt{3} \Rightarrow SQO = 60^o$.

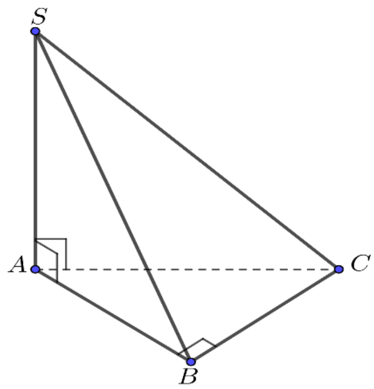
Vậy (SBC) hợp với $(ABCD)$ một góc $60°$.



Ví dụ 2.3.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $SA \perp (ABC)$, $SA = \sqrt{3}cm, AB = 1cm$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy góc bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$.

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = SBA.$$

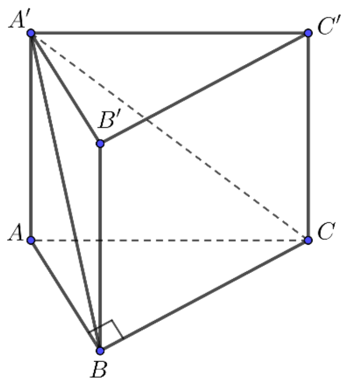
$$\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow SBA = 60^o.$$

Vậy góc giữa (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 60^0.

Ví dụ 2.4.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $BA = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi φ là góc hợp bởi $(A'BC);(ABC)$. Khi đó, tính $\tan\varphi$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B) \Rightarrow BC \perp A'B$.

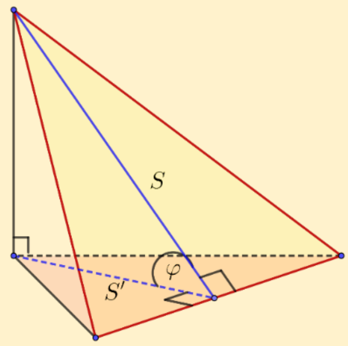
Do $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ A'B \subset (A'BC); A'B \perp BC \\ AB \subset (ABC); AB \perp BC \end{cases}$ nên $A'BA = \varphi$ là góc hợp bởi $(A'BC);(ABC)$.

Xét $\Delta A'BC$ vuông tại A ta có $\tan\varphi = \dfrac{A'A}{BA} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$.

Dạng 3. Xác định góc giữa hai mặt phẳng dựa vào định lý hình chiếu

Phương pháp

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (α) và S' là diện tích hình chiếu của H' của H trên mặt phẳng (β) thì $S' = S.\cos\varphi$ trong đó $\varphi = \left[\widehat{(\alpha);(\beta)}\right]$.



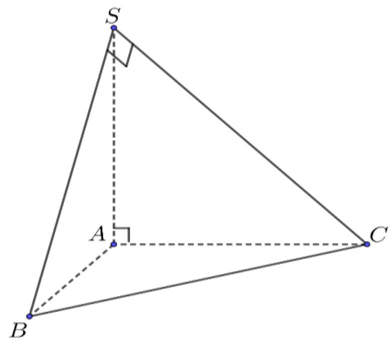
Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. Tam giác SBC vuông cân tại S, có $SB = a$. Mặt phẳng (SBC) hợp với đáy một góc $30°$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải

- Do ΔSBC vuông cân tại S nên $S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}SB.SC = \frac{a^2}{2}$
- $SA \perp (ABC)$ nên ΔABC là hcvg của ΔSBC lên (ABC)
- Gọi φ là góc giữa (SBC) và (ABC) ta có : $\varphi = 30°$
- Áp dụng tính chất diện tích hình chiếu của đa giác, ta có:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta SBC}.\cos\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\cos 30° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \to S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Ví dụ 3.2.

Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC).

Lời giải

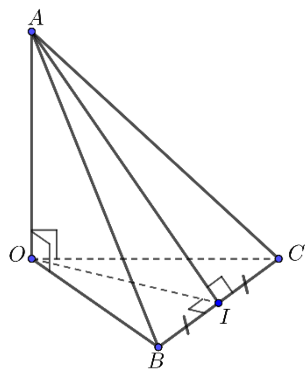
Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$ mà $OA \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI; BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow ((OBC),(ABC)) = (OI, AI) = OIA$.

Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét ΔOAI vuông tại A có $\tan OIA = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow OIA = 30^0$.

Vậy $((ABC),(OBC)) = 30^0$.



Dạng 4. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp

Để chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau ta dùng một trong các cách sau:

▶ **Cách 1.** Xác định góc giữa hai mặt phẳng, rồi tính trực tiếp góc đó bằng 90^0.

$$\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=90^0 \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

▶ **Cách 2.** Chứng minh trong mặt này có một đường thẳng vuông góc với mặt kia.

$$\begin{cases} a\subset(\alpha) \\ a\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\perp(\beta).$$

Ví dụ 4.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh rằng $(SAC)\perp(AHK)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} SA\perp CD\left(do\ SA\perp(ABCD)\right) \\ CD\perp AD \end{cases}$

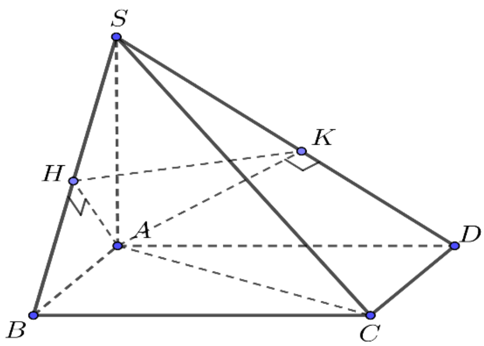
Suy ra $CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AK.$

Mà $AK\perp SD$ nên $AK\perp(SCD)\Rightarrow AK\perp SC$.

Tương tự ta chứng minh được $AH\perp SC.$

Do đó $SC\perp(AHK)$.

Mà $SC\subset(SAC)$ nên $(SAC)\perp(AHK)$.



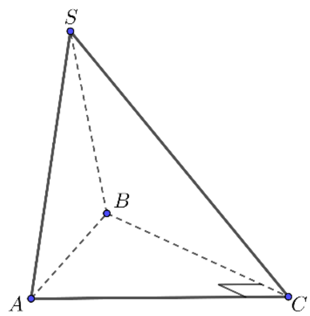
Ví dụ 4.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Chứng minh rằng $(SBC)\perp(SAC)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} (SAC)\cap(ABC)=AC \\ (SAC)\perp(ABC) \\ BC\subset(ABC), BC\perp AC \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAC)$

Mà $BC\subset(SBC)$ nên $(SBC)\perp SAC.$



Dạng 5. Thiết diện

Phương pháp

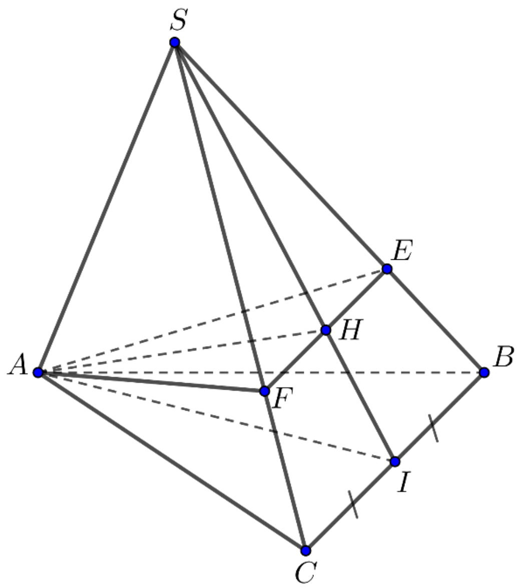
Mặt phẳng (P) đi qua một điểm và vuông góc đường thẳng a cắt hình chóp theo thiết diện.

- Xác định mặt phẳng (P) có tính chất gì?
  Tìm đường thẳng song song với (P).
- Tìm các đoạn giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp:
- Sử dụng tính chất về giao tuyến song song: $\begin{cases} a \subset (Q) \\ a // (P) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = m // a.$
- Kết luận hình dạng của thiết diện và tính các yêu cầu liên quan.

Ví dụ 5.1.

Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a, SA = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của cạnh BC, mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SI cắt hình chóp đã cho theo một thiết diện. Tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải



Kẻ $AH \perp SI \to AH \subset (P)$.

Ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH.$

Mà $(P) \perp SI$ nên $(P) // BC$.

Lại có $(P) \cap (SBC) = d // BC \Rightarrow H \in d.$

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của d và SB, SC.

$\Rightarrow$ Thiết diện cần tìm là ΔAEF.

Ta có $SA = SB = SC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},$

$SI = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

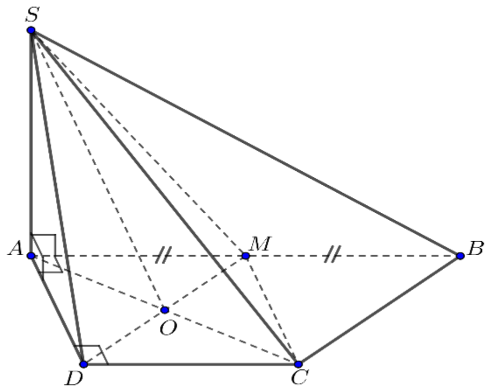
$S_{\Delta SAI} = \dfrac{\sqrt{5a^2}}{8} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}.$

Ta có $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{SH}{SI} \Rightarrow EF = \dfrac{a}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{2} AH.FE = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}.$

Ví dụ 5.2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A,D; $AB=2a$; $SA=AD=DC=a$; $SA\perp(ABCD)$. Tính diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) qua SD và $(\alpha)\perp(SAC)$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm AB.

Tứ giác $ADCM$ là hình vuông $\Rightarrow DM\perp AC$.

Mà $DM\perp SA$

$\Rightarrow DM\perp(SAC)\Rightarrow(SDM)\perp(SAC)\Rightarrow(\alpha)=(SDM)$.

Suy ra thiết diện là ΔSDM.

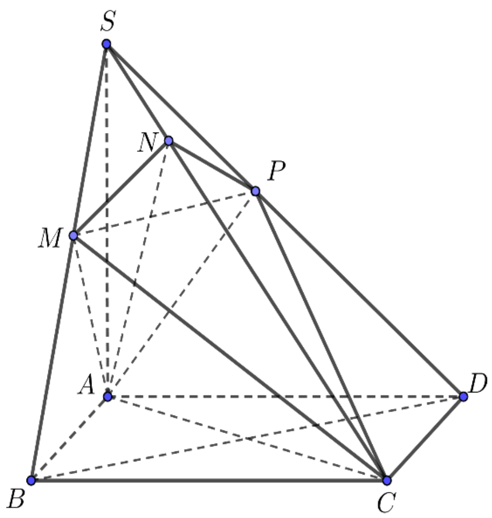
Ta có $SO=\sqrt{SA^2+OA^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}, DM=a\sqrt{2}$.

Diện tích thiết diện là $S_{\Delta SDM}=\dfrac{SO.DM}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ví dụ 5.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với SC. Tính diện tích của thiết diện cắt bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi M,N,P là giao điểm của (P) với các đường thẳng SB,SC,SD.

Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BC$. Mà $BC\perp AB$.

$BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AM$.

Mặt khác $SC\perp(P)\Rightarrow SC\perp AM$ nên

$AM\perp(SBC)\Rightarrow AM\perp SB$.

Tương tự $AN\perp SC, AP\perp SD, MP // BD\Rightarrow MP\perp AN$.

Ta có $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SP}{SD}=\dfrac{MP}{BD}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow MP=\dfrac{4a\sqrt{2}}{5}$.

ΔSAN vuông tại A nên $AN=\dfrac{AS.AC}{\sqrt{AS^2+AC^2}}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $S_{AMNP}=\dfrac{AN.MP}{2}=\dfrac{4a^2\sqrt{6}}{15}$.

C Luyện tập

Dạng: Tính góc giữa hai mặt phẳng

Bài 48. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB = 2a$, $AD = a$, $SA = 3a$ và SA vuông góc với đáy. Xác định và tính góc giữa hai mặt phẳng:

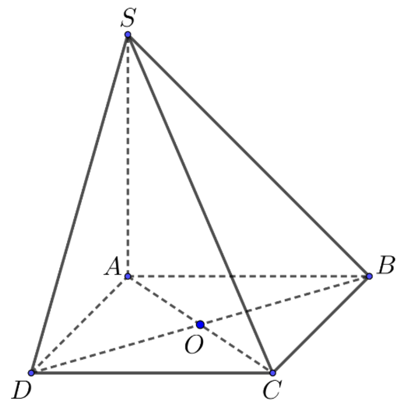
(1) (SBC) và $(ABCD)$

(2) (SBD) và $(ABCD)$

(3) (SBC) và (SAC)

Lời giải

(1) (SBC) và $(ABCD)$

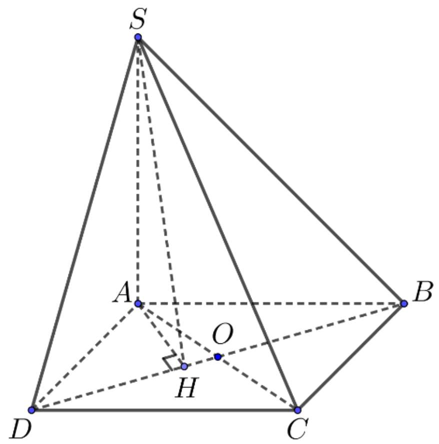


- $(SBC)\cap(ABCD) = BC$
- Do $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$
- Nên: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$
- Ta có $\begin{cases} SB \subset (SBC),\ SB \perp BC \\ AB \subset (ABCD),\ AB \perp BC \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (AB,SB) = SBA$

- Xét ΔSAB A: $\tan SBA = \dfrac{SA}{AB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow SBA = 33.69° \Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = 33,69°$.

(2) (SBD) và $(ABCD)$



- Gọi H là hình chiếu của A trên BD,

Suy ra: $\begin{cases} BD \perp AH \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAH) \Rightarrow BD \perp SH$

- $(SBD)\cap(ABCD) = BD$
- Ta có $\begin{cases} SH \subset (SAH),\ SH \perp BD \\ AH \subset (ABCD),\ AH \perp BD \end{cases}$

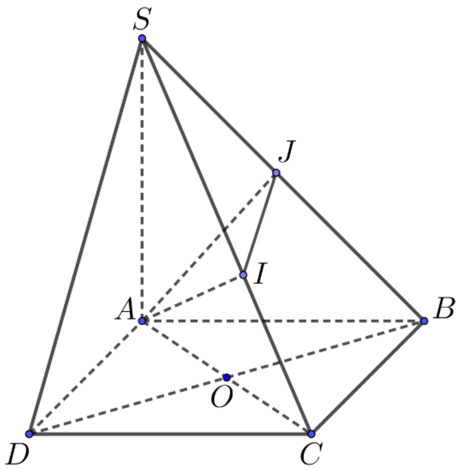
$\Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = (AH,SH) = AHS$

- Xét ΔABD vuông tại A:

$\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

- Xét ΔSAH A: $\tan AHS = \dfrac{SA}{AH} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AHS = 73,4° \Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = 73,4°$

(3) (SBC) và (SAC)



• Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của A trên AC và AB.

Ta có: $BC \perp (SAB)$(cmt) mà $AJ \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AJ$

• $\begin{cases} AJ \perp SB \\ AJ \perp BC \end{cases} \Rightarrow AJ \perp (SBC)$ mà $IJ \subset (SBC) \Rightarrow \begin{cases} AJ \perp IJ \\ AJ \perp SC \end{cases}$

• $\begin{cases} SC \perp AI \\ SC \perp AJ \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AIJ) \Rightarrow SC \perp AI; SC \perp IJ$

• Ta có $\begin{cases} IJ \subset (SBC),\ IJ \perp SC \\ AI \subset (SAC),\ AI \perp SC \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBC),(SAC)) = (AI, IJ) = AIJ$

• Xét ΔSAC vuông tại A: $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{5a^2} = \dfrac{14}{45a^2} \Rightarrow AI = \sqrt{\dfrac{45}{14}}a$

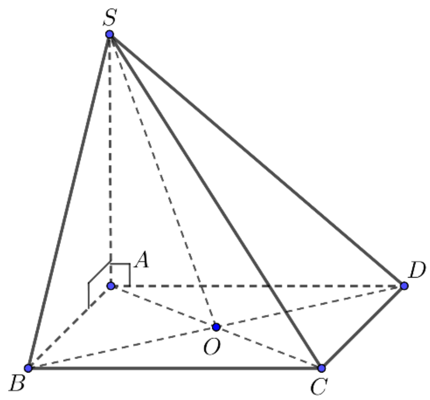
• Xét ΔSAB vuông tại A: $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{1}{9a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{13}{36a^2} \Rightarrow AJ = \sqrt{\dfrac{36}{13}}a$

• Xét ΔAIJ vuông tại J: $\sin AIJ = \dfrac{AJ}{AI} = \sqrt{\dfrac{56}{65}} \Rightarrow AIJ = 68{,}15°$

$\Rightarrow ((SBC),(SAC)) = AIJ = 68{,}15°$

Bài 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, và $SA \perp (ABCD)$. Tính cosin góc giữa mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông.

Ta có: $\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SO \perp BD; AO \perp BD \end{cases}$

$\Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = (SO, AO) = SOA$.

Xét ΔSAO vuông tại A:

$\cos SOA = \dfrac{AO}{SO} = \dfrac{\frac{1}{2}AC}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 50. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $SA = a$ và $SA \perp (ABC)$, $AB = BC = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

Ta có $(SAC)\cap(SBC)=SC$.

Gọi F là trung điểm AC thì $BF\perp(SAC)$.

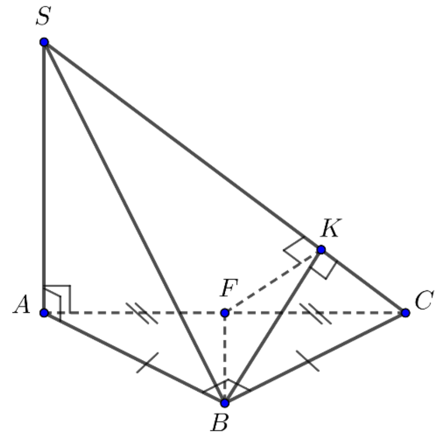
Dựng $BK\perp SC$ tại $K\Rightarrow SC\perp(BKF)$

$\Rightarrow((SAC),(SBC))=(KB,KF)=BKF$

Dễ thấy $\Delta CFK\backsim\Delta CSA\Rightarrow\dfrac{FK}{FC}=\dfrac{SA}{SC}\Rightarrow FK=\dfrac{FC.SA}{SC}=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

ΔBFK vuông tại F có $\tan BKF=\dfrac{FB}{FK}=\sqrt{3}\Rightarrow BKF=60^o$.

Vậy góc giữa $(SAC);(SBC)$ bằng $60°$.



Bài 51. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(SBD);(ABCD)$. Biết $\tan\alpha=\sqrt{2}$, tính góc giữa $(SAC);(SBC)$.

Lời giải

Gọi O là tâm đáy và K là hình chiếu của O trên SC.

Do $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}$ nên $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SO$.

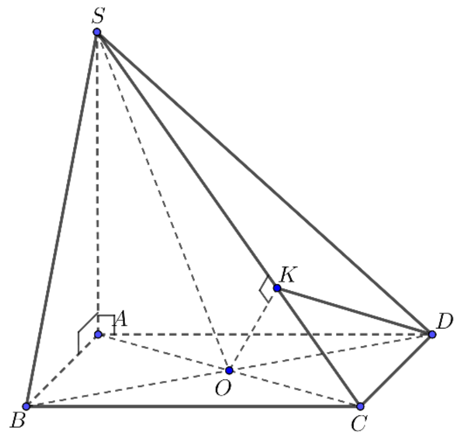
$\Rightarrow\left[(SBD);(ABCD)\right]=SOA=\alpha$.

Ta có $\tan\alpha=\dfrac{SA}{OA}=\sqrt{2}\Rightarrow SA=OA.\sqrt{2}=a$.

Do $\begin{cases}SC\perp BD\\SC\perp OK\end{cases}$ nên $SC\perp BK\Rightarrow\left[(SAC);(SBC)\right]=BKO$.

Ta có $\tan BKO=\dfrac{BO}{OK}=\dfrac{BO}{\frac{1}{2}d(A,SC)}=\dfrac{2BO}{\frac{SA.AC}{\sqrt{SA^2+AC^2}}}=\sqrt{3}$.

Suy ra $BKO=60^o$.



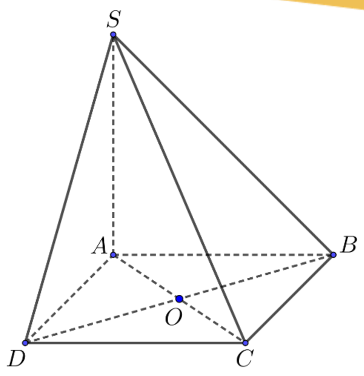
Bài 52. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, $SA\perp(ABCD)$, $SA=a$. Tính góc giữa các mặt phẳng:

(1) (SBC) và $(ABCD)$ (2) (SBC) và (SAD)

(3) (SAB) và (SBD) (4) (SBC) và (SAC)

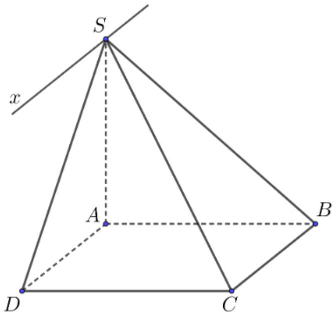
Lời giải

(1) *Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$.*



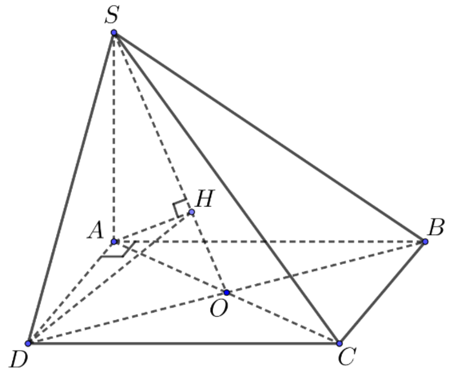
- Ta có $(SBC)\cap(ABCD)=BC$.
- Ta có $\begin{cases} SA\perp BC \\ AB\perp BC \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.
- $\begin{cases} (SBC)\cap(ABCD)=BC \\ SB\perp BC \\ AB\perp BC \end{cases}\Rightarrow((SBC);(ABCD))=SBA$
- Tam giác SAB vuông cân tại A suy ra $SBA=45°$.

(2) *Góc giữa* (SBC) *và* (SAD).



- Kẻ $Sx//AD//BC$ mà $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp Sx;SB\perp Sx$
- Xét (SAD) và (SBC) có S là điểm chung và $AD//BC$
- Suy ra $(SAD)\cap(SBC)=Sx//AD//BC$ và $SA\perp Sx;SB\perp Sx$
- Góc giữa (SBC) và (SAD) là $ASB=45°$ (do tam giác SAB vuông cân tại A).

(3) *Góc giữa* (SAB) *và* (SBD).

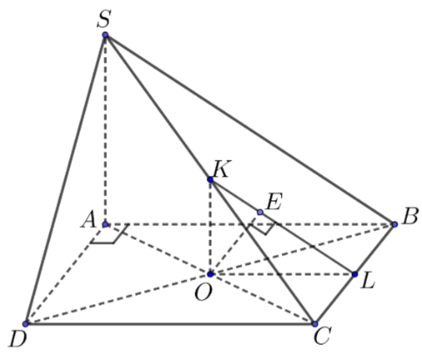


- Kẻ $AC\cap BD=O$
- Ta có: $\begin{cases} AC\perp BD \\ SA\perp BD \end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$.
- Dựng $AH\perp SO\Rightarrow AH\perp(SBD)$.
- Ta có $AI\perp(SBD)$, $AD\perp(SAB)$

$\Rightarrow((SBD),(SAB))=(AH,AD)=DAH$

- ΔSAO vuông tại A: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AS^2}+\dfrac{1}{AO^2}=\dfrac{3}{a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Vì $AH\perp(SBD)\Rightarrow AH\perp HD$ nên $\cos DAH=\dfrac{AH}{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow DAH=arc\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

(4) *Góc giữa* (SBC) *và* (SAC).



- Vẽ $OK//SA$; $OL//AB$

$\Leftrightarrow OK\perp BC,OL\perp BC\Rightarrow BC\perp(OLK)$.

- Vẽ $OE\perp KL\Rightarrow BC\perp OE\Rightarrow OE\perp(SBC)$

Mà $OB\perp(SAC)$

$\Rightarrow(SAC);(SBC)=BOE$.

- Mà $OK=\frac{1}{2}SA=\frac{a}{2};OL=\frac{a}{2}$.
- ΔKOL vuông tại O có $\frac{1}{OE^2}=\frac{1}{OL^2}+\frac{1}{OK^2}\Rightarrow OE=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.
- $OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$
- Vì $OE\perp(SBC)\Rightarrow BE\perp EO\Rightarrow \cos BOE=\frac{OE}{OB}=\frac{1}{2}\Rightarrow BOE=45°$.

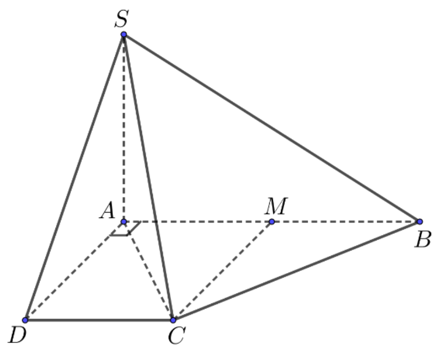
Bài 53. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D có $AB=2a$, $AD=DC=a$, có $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$.

(1) Chứng minh $(SAB)\perp(SAD)$ và $(SAC)\perp(SCB)$

(2) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$. Tính tan φ

Lời giải

(1) *Chứng minh* $(SAB)\perp(SAD)$ *và* $(SAC)\perp(SCB)$.



- Ta có: $\begin{cases} AD\perp AB \\ AD\perp SA\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAB)\Rightarrow(SAD)\perp(SAB)$
- Gọi M là trung điểm $AB\Rightarrow CM=MA=MB=a$
- Suy ra ΔABC vuông tại $C\Rightarrow BC\perp AC$.
- Mà $BC\perp SA\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow(SCB)\perp(SAC)$.

(2) *Tính tan* φ

- Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.
- $\begin{cases}(SBC)\cap(ABCD)=BC \\ AC\perp BC \\ SC\perp BC\left(BC\perp(SAC)\right)\end{cases}\Rightarrow\left((SBC);(ABCD)\right)=SCA=\varphi$

$\Rightarrow \tan\varphi=\tan SCA=\frac{SA}{AC}=\frac{a}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

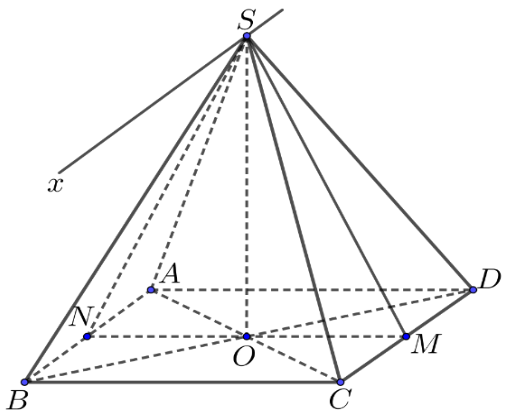
Bài 54. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, mặt bên hợp với mặt đáy góc $60°$. Tính góc giữa các mặt phẳng:

(1) (SAB) và (SCD) (2) (SAB) và (SBC)

Lời giải

- Gọi $O=AC\cap BD\Rightarrow SO\perp(ABCD)$. Gọi M là trung điểm CD suy ra:
- Ta có $\begin{cases}(SCD)\cap(ABCD)=CD \\ OM\perp CD \\ SM\perp CD\end{cases}\Rightarrow\left((SCD),(ABCD)\right)=SMO$.

Theo giả thiết ta được: $SMO = 60°$



(1) (SAB) và (SCD)

- Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow \Delta SMN$ cân tại S

Mà $SMO = 60°$

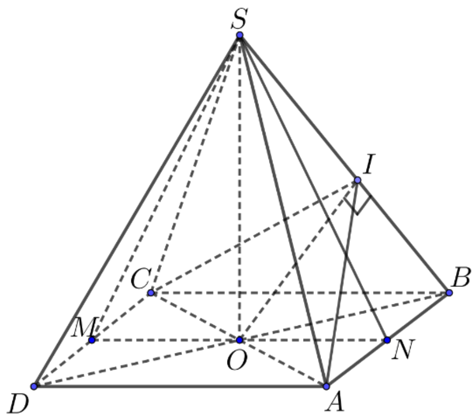
$\Rightarrow \Delta SMN$ là tam giác đều.

- Kẻ $Sx // AB // CD$.
- Xét (SAB) và (SCD) có S là điểm chung và $AB // CD$
- Suy ra giao tuyến (SAD) và (SBC) là Sx.
- ΔSAB cân tại S có SN là trung tuyến và là đường cao $\Rightarrow SN \perp AB$

Mà $Sx // AB \Rightarrow Sx \perp SN$

- Tương tự $Sx \perp SM$.
- $\begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ Sx \perp SN \\ Sx \perp SM \end{cases} \Rightarrow ((SAB),(SCD)) = MSN = 60°$ (do ΔSMN là tam giác đều)

Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng $60°$



(2) (SAB) và (SBC)

- Kẻ $OI \perp SB \Rightarrow SB \perp OI \subset (IAC)$
- Mặt khác dễ thấy $AC \perp (SBD) \supset SB$
- Suy ra: $SB \perp AC \subset (IAC) \Rightarrow SB \perp (IAC)$
- Do đó

$$((SAB),(SBC)) = (IA, IC) = \left[\begin{array}{l} AIC \text{ khi } AIC \le 90° \\ 180 - AIC \text{ khi } AIC \le 90° \end{array}\right. .$$

- Mà ta có $AIC = 2OIC$
- Trong ΔOIC: $\tan OIC = \dfrac{OC}{OI}$ mà $OI.SB = SO.OB \Rightarrow OI = \dfrac{SO.OB}{SB}$.
- ΔSMO vuông tại O: $\tan SMO = \dfrac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM.\tan SMO = \dfrac{a}{2}\tan 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
- Ta có: $SO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.
- Do đó: $OI = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{30}}{10}$; $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan OIC = \dfrac{OC}{OI} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{a\sqrt{30}}{10}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

• Do đó: $OIC \approx 52° \Rightarrow AIC \approx 104° \Rightarrow (IA, IC) = 76°$

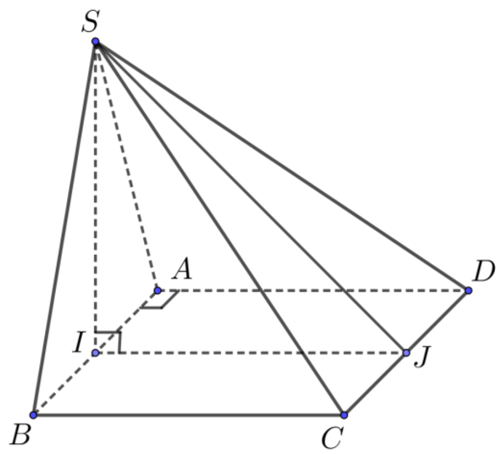
Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng $76°$.

Bài 55. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$.

(1) (SCD) và $(ABCD)$ (2) (SCD) và (SAD)

Lời giải

(1) *Tính góc giữa (SCD) và $(ABCD)$.*



• Gọi I là trung điểm AB. ΔSAB đều nên $SI \perp AB$.

• Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = SI \\ SI \perp AB \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$.

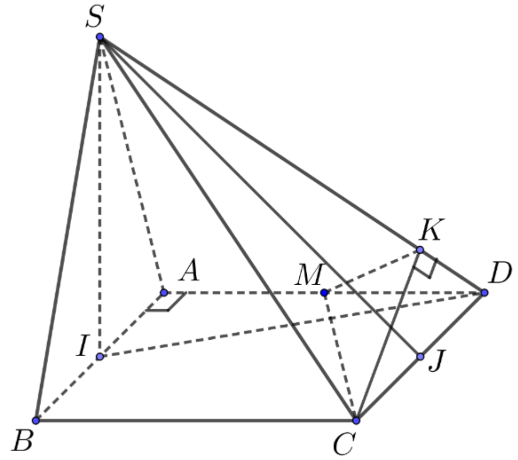
• Gọi J là trung điểm CD. Khi đó $IJ \perp CD$ (1)

• $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp CD \Rightarrow SJ \perp CD$ (2).

• Từ (1) và (2), (SCD) và $(ABCD)$ là SJI.

• $\tan SJI = \dfrac{SI}{IJ} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SJI \approx 40°53°$.

(2) *Tính góc giữa (SCD) và (SAD).*



• Gọi M là trung điểm AD. Xét ΔADI và ΔDMC, có

$\begin{cases} AI = DM \\ AD = CD \\ A = D \end{cases} \Rightarrow \Delta AID = \Delta DMC \Rightarrow CM \perp ID$.

• $\left.\begin{matrix} CM \perp ID \\ CM \perp SI \end{matrix}\right\} \Rightarrow CM \perp (SID) \Rightarrow CM \perp SD$.

• Kẻ đường thẳng $CK \perp SD, K \in SD \Rightarrow SD \perp (CMK)$.

• Khi đó $\left((SCD);(SAD)\right) = (CK; MK)$

• Ta có $CM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$;

$SD = \sqrt{SI^2 + ID^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$;

• $MK = \dfrac{1}{2} d(A; SD) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$; $SJ = \sqrt{SI^2 + IJ^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$;

$$CK.SD = SJ.CD \Rightarrow CK = \frac{SJ.CD}{SD} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$

• Ta có $\cos CKM = \dfrac{KC^2 + KM^2 - CM^2}{2KC.KM} = \dfrac{\frac{14a^2}{16} + \frac{2a^2}{16} - \frac{5a^2}{4}}{2\frac{a\sqrt{14}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\frac{14a^2}{16} + \frac{2a^2}{16} - \frac{5a^2}{4}}{2\frac{a\sqrt{14}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{-1}{\sqrt{7}}.$

Suy ra $\cos(KC; KM) = \dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow (KC; KM) \approx 67°47°$.

Bài 56. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SB = SD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là hình thoi cạnh a, $A = 60°$.

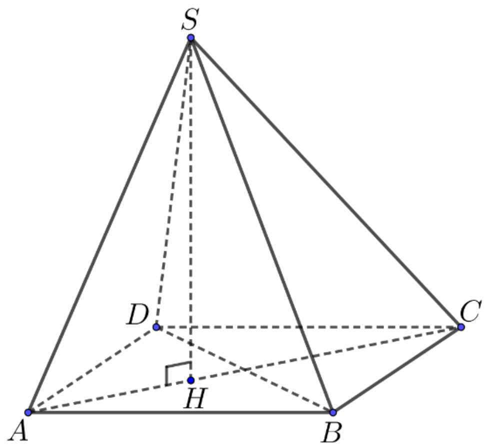
(1) Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $SB \perp BC$.

(2) Tính góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.

Lời giải

(1) *Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $SB \perp BC$.*

* *Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$.*



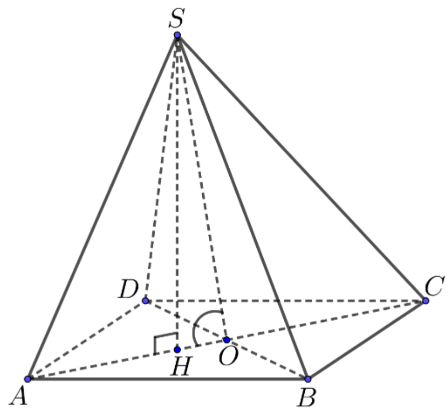
• ΔABC đều cạnh a có $A = 60°$ nên ΔABC đều.
• Gọi H là trọng tâm ΔABC thì H cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.
• Theo giả thiết, $SA = SB = SD$
Nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

* *Chứng minh $SB \perp BC$.*

• Ta có $\begin{cases} HB \perp AD \\ SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp AD \end{cases}$

$\Rightarrow AD \perp (SHB) \Rightarrow AD \perp SB \Rightarrow BC \perp SB$ (vì $AD//BC$).

(2) *Tính góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.*



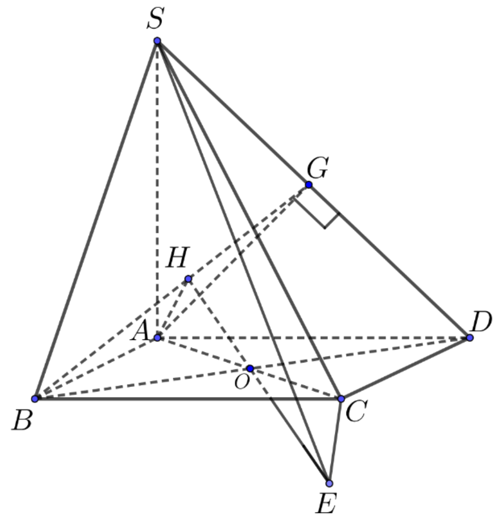
• Gọi O là tâm của hình thoi.
• Vì $BD \perp (SHO)$ nên góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ là SOH
• Ta có $\tan SOH = \dfrac{SH}{OH}$;
• $OH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $AH = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{3}} = a\sqrt{\dfrac{5}{12}}$.

$\Rightarrow \tan SOH = \dfrac{SH}{OH} = \sqrt{5} \Rightarrow SOH \approx 65°54'$

Bài 57. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình chữ nhật với $AB = a, AD = 3a, SA = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc hợp bởi SC và (SBD).

Lời giải



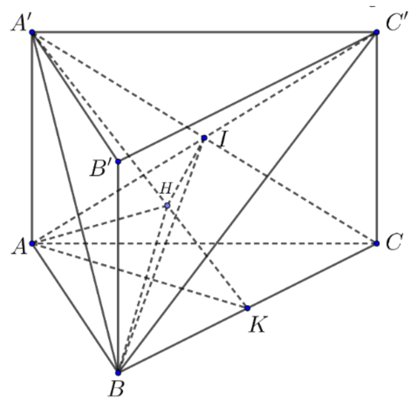
- Vẽ $AH \perp (SBD), CE \perp (SBD), O = AC \cap BD$.
- Ta có $\begin{cases} (AOH) \perp (SBD) \\ (CEO) \perp (SBD) \\ (AOH) \cap (SBD) = HO \\ (CEO) \cap (SBD) = EO \end{cases} \Rightarrow H, O, E$ thẳng hàng.
- Gọi φ là góc hợp bởi SC và (SBD).

Khi đó $\varphi = (SC; SE) = ESC$.

- $\Delta AHO = \Delta CEO \, (g.c.g) \Rightarrow CE = AH$.
- Trong mặt phẳng (SBD) gọi $G = BH \cap SD$.
- Do $\left.\begin{array}{l} AH \perp (SBD) \Rightarrow AH \perp SD \\ \left.\begin{array}{l} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow AB \perp SD \end{array}\right\} \Rightarrow SD \perp (ABH) \Rightarrow SD \perp AG$.
- Trong ΔSAD, ta có $\dfrac{1}{AG^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{4a^2} + \dfrac{1}{9a^2} = \dfrac{13}{36a^2} \Rightarrow AG = \dfrac{6a\sqrt{13}}{13}$.
- Trong ΔAGB, ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AG^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{\frac{13a^2}{36}} = \dfrac{49}{36a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{6a}{7} = CE$.
- Trong ΔABC, ta có $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{10}$
- Trong ΔSAC, ta có $SC = \sqrt{AC^2 + AS^2} = a\sqrt{14}$.
- Ta có $\sin\varphi = \dfrac{CE}{CS} = \dfrac{\frac{6a}{7}}{a\sqrt{14}} = \dfrac{3\sqrt{14}}{49} \Rightarrow \varphi \approx 13°14°$.

Bài 58. Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a; $AA' = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (BCA').

Lời giải



- Gọi K là trung điểm BC,
- Do ΔABC đều nên $AK \perp BC$ và $AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Mà $AA' \perp BC$.

$\Rightarrow BC \perp (AA'K)$. Kẻ $AH \perp A'K \quad (1) \Rightarrow AH \perp BC \quad (2)$,

• $(1),(2) \Rightarrow AH \perp (A'BC)$.

• Giả sử $I = A'C \cap AC'$ thì I là trung điểm của AC'

• Gọi φ góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (BCA').

• ΔBHI là ảnh của ΔBAI qua phép chiếu vuông góc lên $(A'BC)$

$\Rightarrow S_{BHI} = S_{BAI}.\cos\varphi \quad (3)$.

• Xét $\Delta ABC'$ có $AB = a,\ BC' = AC' = a\sqrt{2}$, BI là trung tuyến nên

$$BI^2 = \frac{2(AB^2 + BC'^2) - AC'^2}{4} = \frac{2(a^2 + 2a^2) - 2a^2}{4} = a^2 \Rightarrow BI = a.$$

• Xét ΔABI có $AI = \frac{a\sqrt{2}}{2}; AB = BI = a \Rightarrow S_{BAI} = \frac{a^2\sqrt{7}}{16} \quad (4)$.

• Xét $\Delta AA'K$ vuông tại A có AH là đường cao nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{7}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

• Xét ΔBHI có $BI = a$, $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{7}} = \frac{2a}{\sqrt{7}}$.

$$HI = \sqrt{AI^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{7}} = \frac{a}{\sqrt{14}}.$$

$$\Rightarrow \cos IHB = \frac{IH^2 + HB^2 - BI^2}{2IH.HB} = -\frac{5\sqrt{2}}{8} \Rightarrow \sin IHB = \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

$$\Rightarrow S_{BHI} = \frac{1}{2}HI.HB\sin IHB = \frac{a^2\sqrt{7}}{56} \quad (5).$$

Từ $(3),(4),(5)$ ta có $\frac{a^2\sqrt{7}}{56} = \frac{a^2\sqrt{7}}{16}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{2}{7} \Rightarrow \varphi \approx 73,4^0$.

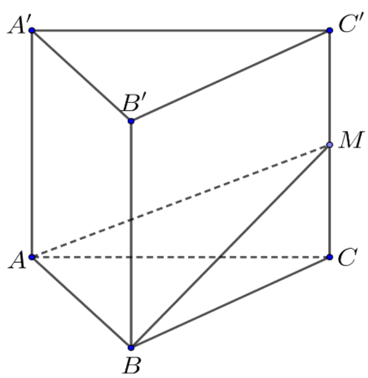
Bài 59. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bằng $2a$. M là trung điểm của CC'

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng BM và $A'B'$.

(2) Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (ABC).

Lời giải

(1) Tính góc giữa hai đường thẳng BM và $A'B'$.



• Ta có: $A'B' // AB$ nên $(BM; A'B') = (BM; AB)$.

• Xét ΔABM có $AB = 2a$, $AM = BM = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

$$\Rightarrow \cos ABM = \frac{AB^2 + BM^2 - AM^2}{2.AB.BM} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow ABM = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

• Vậy góc giữa BM và $A'B'$ là $ABM = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

(2) *Tính góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (ABC).*

- Ta có $MC \perp (ABC)$ nên ΔABC là hình chiếu của ΔABM trên (ABC).
- Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (MAB) và (ABC) ta có: $S_{ABC} = S_{MAB}.\cos\varphi$ (1).
- ΔABC đều cạnh $2a$ nên $S_{ABC} = a^2\sqrt{3}$ (2).
- Xét ΔABM có $AB = 2a$, $AM = BM = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

$\cos AMB = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin AMB = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow S_{ABM} = \dfrac{1}{2}AM.BM.\sin AMB = a^2\sqrt{5}$ (3).

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $a^2\sqrt{3} = a^2\sqrt{5}\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Bài 60. CCho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $A'A = a$ và $A'O \perp (ABCD)$. Tính góc hợp bởi:

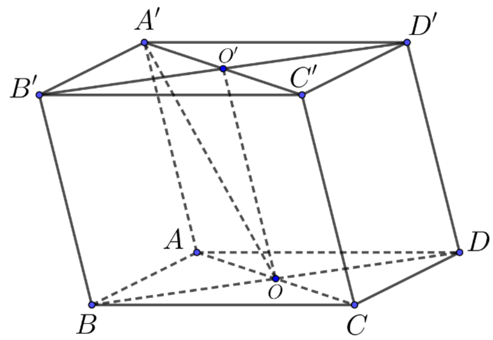
(1) Cạnh bên và mặt đáy.

(2) Cạnh bên và cạnh đáy.

(3) $(BDB'D')$ và $(ABCD)$, $(ACC'A')$ và $(ABCD)$

Lời giải

(1) *Cạnh bên và mặt đáy.*



- Ta có: $(AA',(ABCD)) = (AA', AO) = A'AO$.
- $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- $\cos A'AO = \dfrac{AO}{AA'} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'AO = 45^0$.

(2) *Cạnh bên và cạnh đáy.*

- Ta có:

$A'D = \sqrt{A'O^2 + OD^2} = \sqrt{AA'^2 - AO^2 + OD^2} = AA' = a$

- Do đó $\Delta A'AD$ đều $\Rightarrow (A'A, AD) = 60^0 \Rightarrow (A'A, AC) = 45^0$

(3) $(BDB'D')$ *và* $(ABCD)$, $(ACC'A')$ *và* $(ABCD)$.

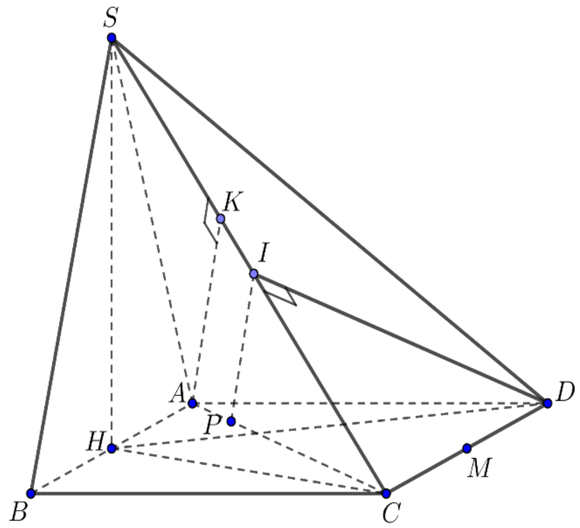
- Ta có: $\begin{cases} A'O \perp BD\,(A'O \perp (ABCD)) \\ AC \perp BD \\ A'O \cap AC = O \\ A'O, AC \subset (A'AC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (A'AC)$

$\Rightarrow ((ABCD),(BDD'B')) = (AC, OO') = (AC, AA') = 45^0$.

- Ta có: $BD \perp (A'AC) \Rightarrow (ABCD) \perp (ACC'A') \Rightarrow ((ABCD),(ACC'A')) = 90^0$.

Bài 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, ΔSAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Gọi φ là góc tạo bởi $(SAC);(SCD)$. Giá trị của $\cos\varphi$ bằng

Lời giải



Gọi H,M lần lượt là trung điểm của AB,CD.

Vì ΔSAB là Δ đều và $(SAB)\perp(ABCD)$

Nên $SH\perp(ABCD)$.

Kẻ $\begin{cases} AK\perp SC\,(K\in SC) \\ DI\perp SC\,(I\in SC)\end{cases}$ và $IP//AK\,(P\in AC)$

Suy ra $\varphi=(IP,ID)=PID$

Ta có $\begin{cases} HC=HD=\dfrac{a\sqrt{5}}{2} \\ SC=SD=a\sqrt{2} \\ SM=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}\end{cases} \Rightarrow DI=\dfrac{SM.CD}{SD}=\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$

$\Delta CSA=\Delta SCD\Rightarrow AK=DI=\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$.

$CI=SK=\sqrt{CD^2-DI^2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\Rightarrow CK=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

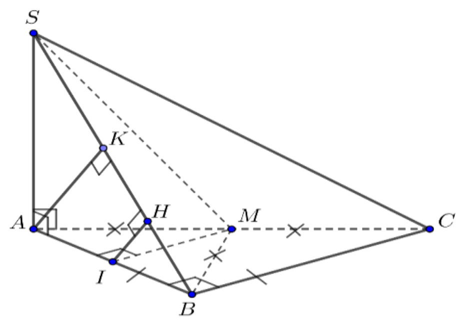
$\Delta CPI\backsim\Delta CAK\Rightarrow IP=\dfrac{CI}{CK}.AK=\dfrac{a\sqrt{14}}{12}, AP=\dfrac{KI}{CK}.AC=\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

ΔAPD có $PD=\sqrt{AP^2+AD^2-2AP.AD.\cos 45^o}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

ΔIPD có $\cos PID=\dfrac{IP^2+ID^2-DP^2}{2.IP.ID}=\dfrac{5}{7}\Rightarrow\cos\varphi=\dfrac{5}{7}$

Bài 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $BC=a$, cạnh SA vuông góc với đáy, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của AC. Tính côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB)

Lời giải



Ta có: $(SBM)\cap(SAB)=SB$.

Vì ΔABC vuông cân tại B, M là trung điểm AC

Nên $MB\perp AC$ và $MA=MB=MC=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi I là trung điểm AB.

Vì ΔMAB cân tại M nên $MI\perp AB$ (1)

Hơn nữa $MI \perp SA$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MI \perp SB\,(*)$.

Kẻ $IH \perp SB$. Suy ra $MH \perp SB\,(**)$

Từ $(*)$ và $(**) \to \left[(SBM);(SAB)\right] = (IH;MH)$.

Ta có $MI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Vì $MB \perp (SAC)$ nên ΔSMB vuông tại M và có $\begin{cases} MB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \\ SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{2} \end{cases}$;

$\Rightarrow \dfrac{1}{MH^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{MB^2} = \dfrac{16}{7a^2} \Rightarrow MH = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}$.

Gọi K là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB

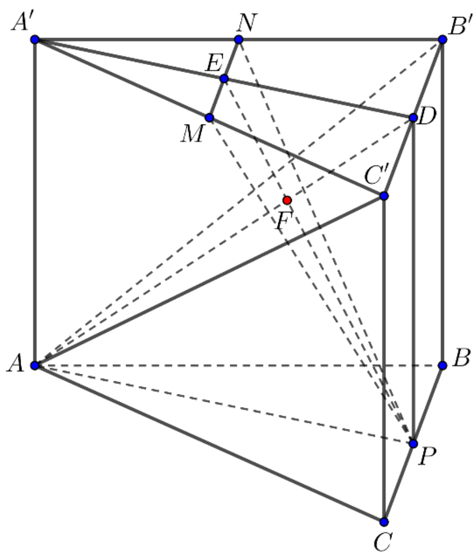
Ta có $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AB^2} = \dfrac{4}{3a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IH = \dfrac{AK}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔMIH ta có $\cos MHI = \dfrac{HI^2 + HM^2 - MI^2}{2HI.HM} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Vậy côsin góc giữa hai mặt phẳng (SBM) và (SAB) bằng $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Bài 63. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2\sqrt{3}$ và $AA' = 2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC. Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(AB'C')$ và (MNP) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi P là trung điểm của BC.

Ta có $\begin{cases} MN \perp A'D \\ MN \perp PD \end{cases} \Rightarrow MN \perp (APDA')$

$\Rightarrow (MNP) \perp (APDA')$.

$\begin{cases} B'C' \perp A'D \\ B'C' \perp PD \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (APDA') \Rightarrow (AB'C') \perp (APDA')$.

Mặt khác: $\begin{cases} (MNP) \cap (APDA') = PE \\ (AB'C') \cap (APDA') = AD \end{cases}$.

$\Rightarrow \left[(AB'C');(MNP)\right] = (PE;AD)$.

Gọi $E = MN \cap A'D$, $F = AD \cap PE$.

Ta có $\frac{FD}{FA}=\frac{EF}{FP}=\frac{ED}{AP}=\frac{1}{2}$.

Ta có: $A'D=\sqrt{A'B'^2-B'D^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=3\Rightarrow ED=\frac{3}{2}$.

$AD=\sqrt{A'D^2+AA'^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\Rightarrow FD=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

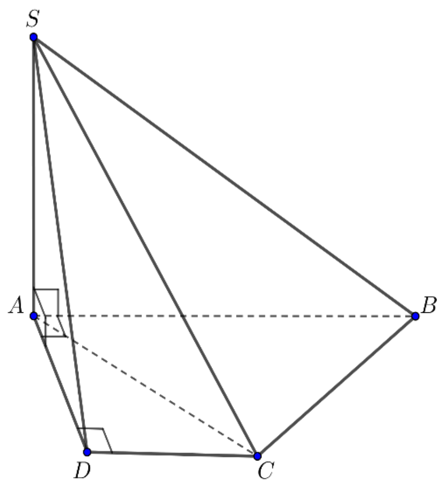
$EP=\sqrt{ED^2+PD^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}\Rightarrow EF=\frac{5}{6}$.

Trong ΔEDF có $\cos EFD=\frac{EF^2+FD^2-ED^2}{2EF.FD}=\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2.\frac{5}{6}.\frac{\sqrt{13}}{3}}=-\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Do góc giữa hai mặt phẳng là góc nhỏ hơn hoặc bằng $90°$ nên Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ và $\left(MNP\right)$ bằng $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

Bài 64. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, $SA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB=2AD=2DC=a$. Góc giữa hai mặt phẳng $\left(SBC\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng

Lời giải



Ta có: $\left(SBC\right)\cap\left(ABCD\right)=BC$.

Vì $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB=2AD=2DC=a\Rightarrow AC\perp BC$ (1).

$SA\perp\left(ABCD\right)\Rightarrow SA\perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) $\rightarrow BC\perp SC$ nên $\left[\left(SBC\right);\left(ABCD\right)\right]=SCA$.

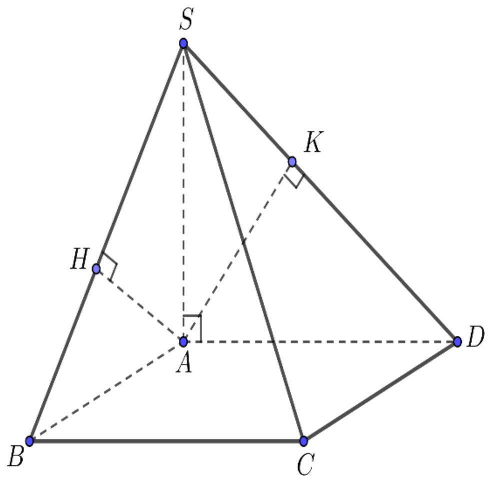
Trong ΔDAC có $AD=DC=\frac{a}{2}\Rightarrow AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong ΔASC có $SA=AC=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow SCA=45°$.

Vậy góc giữa $\left(SBC\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng $45°$.

Bài 65. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng a, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$ (hình bên). Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB,SD. Số đo của góc tạo bởi mặt phẳng $\left(AHK\right)$ và $\left(ABCD\right)$ bằng

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Suy ra $AH \perp BC$.

Lại có: $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SB \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Chứng minh tương tự ta có $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Có $\begin{cases} AH \perp SC \\ AK \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

Do $\begin{cases} SC \perp (AHK) \\ SA \perp (ABCD) \end{cases}$

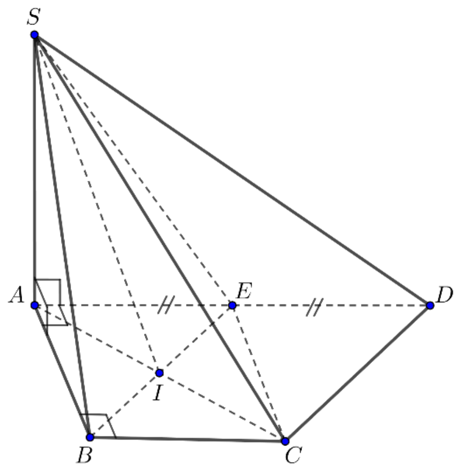
$\Rightarrow ((AHK),(ABCD)) = (SC,SA) = ASC$

Có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2} \Rightarrow ASC = 45°$.

Vậy $((AHK),(ABCD)) = 45°$.

Bài 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, biết $AD = 2a$, $AB = BC = a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi E là trung điểm của AD, tính góc giữa hai mặt phẳng (SBE) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có $ABCE$ là hình vuông cạnh bằng a.

Gọi $I = AC \cap BE$. Khi đó $\begin{cases} (SBE) \cap (ABCD) = BE \\ AI \perp BE \\ SI \perp BE \end{cases}$.

Do đó $\left[(SBE);(ABCD)\right] = SIA$.

Lại có $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI:

$\tan SIA = \dfrac{SA}{IA} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} : \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow SIA = 60°$.

Bài 67. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = a, AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC'. Tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

Lời giải

Gọi $I = AC \cap BD$.

Ta có góc $\left((A'BD),(MBD)\right) = (IA', IM)$.

Để $(A'BD) \perp (MBD)$ thì $IA' \perp IM \Rightarrow A'IM = 90°$.

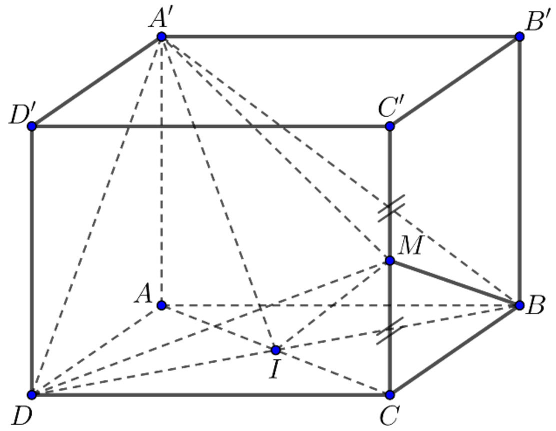
Xét $\Delta A'IM$ có: $A'I^2 = b^2 + \dfrac{a^2}{2}$; $A'M^2 = 2a^2 + \dfrac{b^2}{4}$;

$IM^2 = \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{4}$.

Ta có: $A'M^2 = A'I^2 + IM^2$

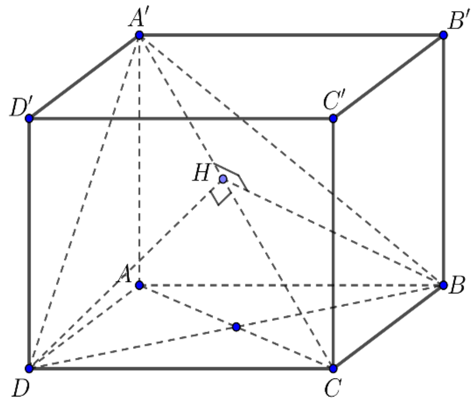
$\Leftrightarrow 2a^2 + \dfrac{b^2}{4} = b^2 + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{4} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.

Vậy $\dfrac{a}{b} = 1$.



Bài 68. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$.

Lời giải



+ $\Delta BA'C$ vuông tại B (vì $BC \perp (ABB'A') \Rightarrow BC \perp A'B$).

Kẻ $BH \perp A'C$ trong $\Delta BA'C$.

$BD \perp (AA'C)$ (vì $BD \perp AC, BD \perp AA'$) $\Rightarrow BD \perp A'C$.

Ta có $BH \perp A'C$;

$BD \perp A'C \Rightarrow A'C \perp (BHD) \Rightarrow A'C \perp HD$.

+ $(BA'C) \cap (DA'C) = A'C$.

$A'C \perp (BHD)$

$(BHD) \cap (BA'C) = BH$

$(BHD) \cap (DA'C) = DH$

$\Rightarrow \left[(BA'C);(DA'C)\right] = (BH; DH)$.

+ $BH = DH \left(\Delta BA'C = \Delta DA'C\right)$.

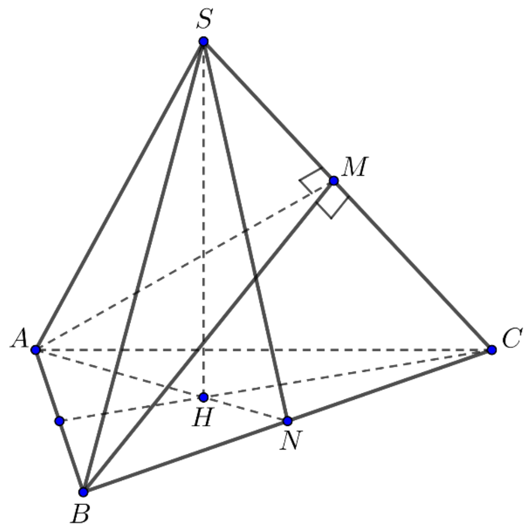
$$\Delta BA'C: \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA'^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{\left(a\sqrt{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BH^2 = \frac{2a^2}{3} = DH^2.$$

$$\Delta BHD: \cos BHD = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH.DH} = \frac{\dfrac{2a^2}{3} + \dfrac{2a^2}{3} - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2.\dfrac{2a^2}{3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BHD = 120^0.$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng $(BA'C)$ và $(DA'C)$ bằng $180^0 - 120^0 = 60^0$.

Bài 69. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng $2a$, cạnh đáy bằng a. Gọi α là góc giữa hai mặt bên của hình chóp đó. Hãy tính $\cos\alpha$.

Lời giải



Gọi M,N là chân đường cao hạ từ B,S của ΔSBC.

H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC).

Ta có: $AB\perp(SHC)\Rightarrow AB\perp SC$

Mặt khác $SC\perp BM\Rightarrow SC\perp(ABM)\Rightarrow SC\perp AM$

$$\begin{cases} AM\subset(SAC) \\ BM\subset(SBC) \\ SC\perp AM, SC\perp BM \end{cases}\Rightarrow((SAC);(SBC))=(AM;BM).$$

Ta tính góc AMB.

ΔSBC cân tại S nên N là trung điểm của BC.

+) $SN=\sqrt{SC^2-NC^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{15}}{2}$.

+) $BM=\frac{SN.BC}{SC}=\frac{a\sqrt{15}.a}{2.2a}=\frac{a\sqrt{15}}{4}$.

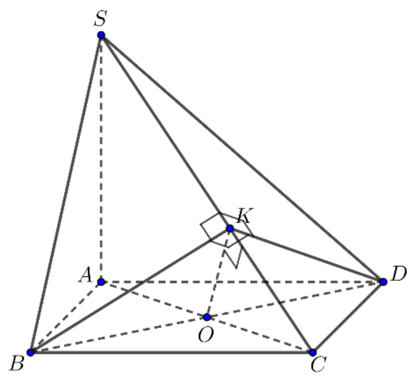
+) $AM=\sqrt{AC^2-MC^2}=\sqrt{BC^2-MC^2}=BM$.

Ta có $\cos AMB=\frac{AM^2+BM^2-AB^2}{2.MA.MB}=\frac{\frac{15a^2}{16}+\frac{15a^2}{16}-a^2}{2.\frac{15a^2}{16}}=\frac{7}{15}>0$, suy ra góc AMB nhọn.

Vậy $\alpha=((SAC);(SBC))=(AM;BM)=AMB\Rightarrow\cos\alpha=\frac{7}{15}$.

Bài 70. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, cạnh $AB=a$, góc $BAD=60^0$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA=x$. Tìm x để góc giữa (SBC) và (SCD) bằng 90^0.

Lời giải



Ta có $\Delta SBC=\Delta SCD$ (c-c-c) và chung cạnh SC.

Kẻ $BK\perp SC, DK\perp SC$,

khi đó góc giữa (ABC) và (SCD) là góc DKB.

Nối OK, do $SC\perp(BDK)\Rightarrow SC\perp OK\Rightarrow\Delta OKC$ vuông tại K.

Khi $DKB=90^0$, suy ra $OK=\frac{1}{2}BD=\frac{a}{2}$.

Ta có $OC=\frac{a\sqrt{3}}{2}, SC=\sqrt{x^2+3a^2}$ mà $\Delta SAC\sim\Delta OKC$

Suy ra $\dfrac{SA}{OK}=\dfrac{SC}{OC}\Rightarrow SA^2.OC^2=SC^2.OK^2\Rightarrow \dfrac{3a^2x^2}{4}=\left(x^2+3a^2\right)\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow x=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Bài 71. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, góc ABC bằng 60^0, tam giác SBC đều cạnh a, hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm H của cạnh BC. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC). Khi đó

Lời giải

ΔSBC đều cạnh a, H là trung điểm BC

Nên $SH\perp BC$ và $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dựng $HF//AC\Rightarrow HF\perp AB$.

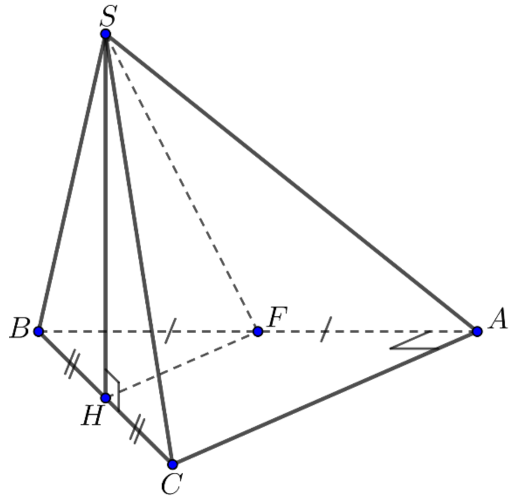
Xét ΔBHF có $\sin 60^0=\dfrac{HF}{BH}\Rightarrow HF=BH.\sin 60^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$

Ta có $\begin{cases}AB\perp HF\\ AB\perp SH\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SHF)$

Mà $SF\subset(SHF)$ nên $SF\perp AB$.

Khi đó $\left((ABC),(SAB)\right)=SFH=\varphi$.

Trong ΔSHF có $\tan\varphi=\dfrac{SH}{HF}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Bài 72. Cho hình chóp tứ giác đều, có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng

Lời giải

Ta có $SI\perp(ABCD)$ nên chiều cao của hình chóp là $SI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi M là trung điểm AB.

Vì IM là đường trung bình $\Delta ABD\rightarrow IM//AD$.

Mặt khác $AB\perp AD$ (do $ABCD$ là hình vuông).

Do đó $IM\perp AB$.

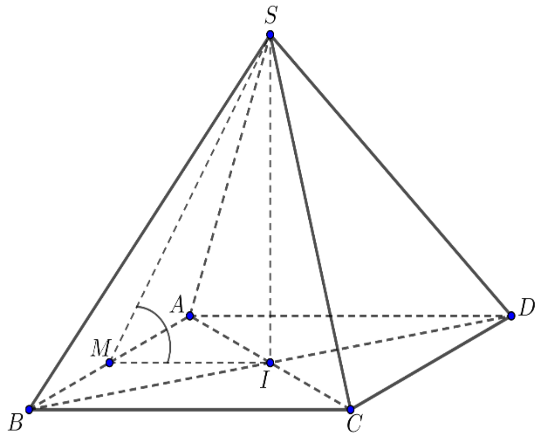
$S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều

Nên ΔSAB cân tại $S\Rightarrow SM\perp AB$.

Ta có: $(SAB)\cap(ABCD)=AB$; $SM\subset(SAB)$;

$SM\perp AB$; $IM\subset(ABCD)$; $IM\perp AB$

Nên $\left((SAB),(ABCD)\right)=(SM,IM)=SMI$.

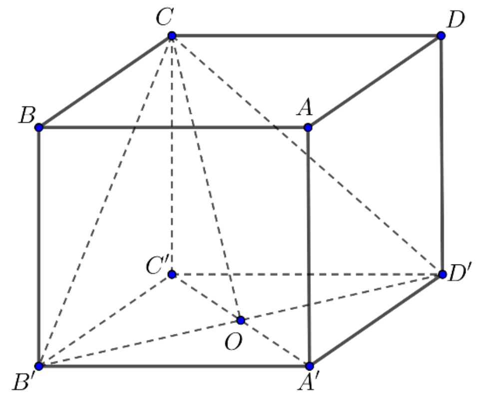


Xét ΔSMI vuông tại I, ta có: $\tan SMI = \frac{SI}{MI} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{a} = \sqrt{3}$. Suy ra $SMI = 60°$.

Vậy góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$.

Bài 73. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng $(CB'D')$ và $(ABCD)$.

Lời giải



Do $(ABCD)//(A'B'C'D')$

Nên $\left[(CB'D');(ABCD)\right] = \left[(CB'D');(A'B'C'D')\right]$

Gọi $O = A'C' \cap B'D'$, ta chứng minh được

$B'D' \perp (C'OC) \Rightarrow B'D' \perp CO$,

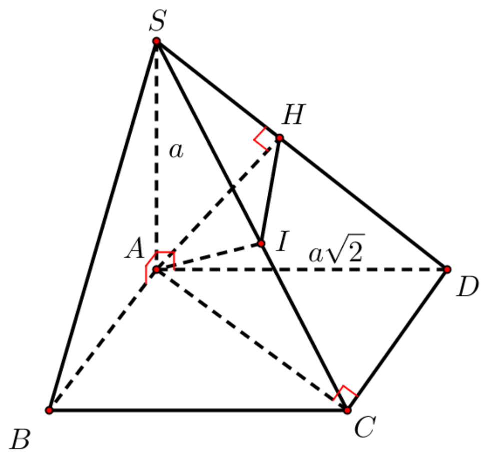
Nên $\left[(CB'D');(A'B'C'D')\right] = (CO;C'O) = C'OC$.

Đặt $CC' = 1$ thì ta có $C'O = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\Rightarrow CO = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\Rightarrow \cos C'OC = \frac{C'O}{CO} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 74. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $BC = \sqrt{2}a$ và ΔACD vuông cân tại C. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD và I là trung điểm SC. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (AHI) và $(ABCD)$.

Lời giải



Ta có $CD = AC = SA = a \Rightarrow AI \perp SC$ (1)

Lại có $CD \perp SA$ và $CD \perp AC \Rightarrow CD \perp AI$ (2)

Từ (1) và $(2) \Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow AI \perp SD$

$\begin{cases} SD \perp AI \\ SD \perp AH \end{cases} \Rightarrow SD \perp (AHI)$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ SD \perp (AHI) \end{cases}$

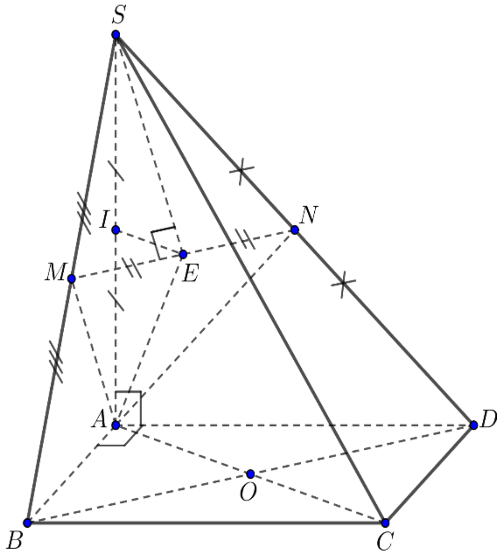
$\Rightarrow ((ABCD);(AHI)) = (SA;SD) = ASD$;

$\tan ASD = \frac{AD}{SA} = \sqrt{2}$.

Bài 75. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và SD. Sin của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng

Lời giải

Có: $SB = BD = SD = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SBD$ đều.



$AM = AN = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = SM = SN \Rightarrow \Delta AMN$ đều.

Gọi E là trung điểm $MN \Rightarrow AE \perp MN$ và $SE \perp MN$.

$\begin{cases} (AMN)\cap(SBD) = MN \\ AE \perp MN \\ SE \perp MN \end{cases} \Rightarrow \left((AMN),(SBD)\right) = (AE, SE)$.

Tính $\sin SEA$.

AE là đường cao tam giác đều $AMN \Rightarrow AE = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

SE là đường cao tam giác đều $SMN \Rightarrow SE = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

$\Rightarrow \Delta SEA$ cân tại $E \Rightarrow SEA = 2SEI$.

Gọi I là trung điểm $SA \Rightarrow SI = \dfrac{a}{2} \Rightarrow EI = \sqrt{SE^2 - SI^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔSEI vuông tại I, ta có: $\sin SEI = \dfrac{SI}{SE} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ và $\cos SEI = \dfrac{EI}{SE} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow \sin SEA = 2\sin SEI.\cos SEI = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Vậy $\sin$ của góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

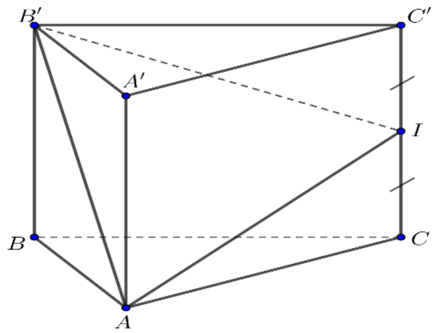
Chú ý: SEA là góc tù nên góc giữa hai mặt phẳng (AMN) và (SBD) bằng $180^\circ - SEA$.

Ta vẫn có: $\sin\left(180^\circ - SEA\right) = \sin SEA = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 76. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân, với $AB = AC = a$ và góc $BAC = 120^\circ$, cạnh bên $AA' = a$. Gọi I là trung điểm của CC'. Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ bằng

Lời giải

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC$



$= a^2 + a^2 - 2.a.a.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 3a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{3}$.

Xét $\Delta B'AB$ có $AB' = \sqrt{BB'^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔIAC có $IA = \sqrt{IC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Xét $\Delta IB'C'$ có $B'I=\sqrt{B'C'^2+C'I^2}=\sqrt{3a^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Xét $\Delta IB'A$ có $B'A^2+IA^2=2a^2+\frac{5a^2}{4}=\frac{13a^2}{4}=B'I^2\Rightarrow\Delta IB'A$ vuông tại A

$\Rightarrow S_{IB'A}=\frac{1}{2}AB'.AI=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{5}}{2}=\frac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Lại có $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\frac{1}{2}a.a.\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Gọi góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$ là α.

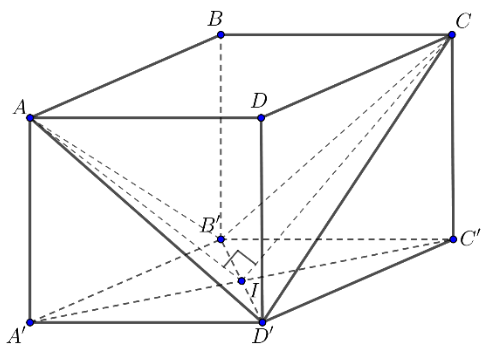
Ta có ΔABC là hình chiếu vuông góc của $\Delta AB'I$ trên mặt phẳng (ABC).

Do đó $S_{ABC}=S_{IB'A}.\cos\alpha\Rightarrow\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{10}}{4}.\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{30}}{10}$.

Bài 77. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Biết $AC=2$, $AA'=\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(CB'D')$.

Lời giải

Ta thấy : $(AB'D')\cap(CB'D')=B'D'$



Gọi I là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$.

Khi đó ta suy ra: $AI\subset(AB'D')$, $AI\perp B'D'$,

$CI\subset(CB'D')$, $CI\perp B'D'$.

Suy ra : $\left((AB'D'),(CB'D')\right)=(AI,CI)$.

Xét tam giác AIC có: $AC=2$,

$CI=AI=\sqrt{AA^2+A'I^2}=\sqrt{3+1}=2$.

Do đó tam giác AIC đều $\Rightarrow AIC=60^0$.

Suy ra: $\left((AB'D'),(CB'D')\right)=60^0$.

Dạng: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Bài 78. Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh $SA=a$, các cạnh còn lại bằng b. Chứng minh $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

Lời giải

Gọi $\{O\}=AC\cap BD$.

Vì $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng b

Nên $ABCD$ là một hình thoi.

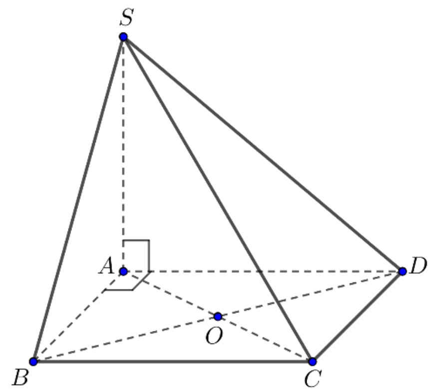
Suy ra $AC\perp BD$ nên O là trung điểm của BD.

Mặt khác $SB=SD$ nên ΔSBD cân tại S.

Do đó $SO\perp BD$.

Vậy $\begin{cases} BD\perp AC \\ BD\perp SO \end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$

Suy ra $(SAC)\perp(ABCD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.



Bài 79. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với đáy . Chứng minh $(SAB)\perp(SAD)$ và $(SAC)\perp(SBD)$.

(1) Chứng minh: $(SAB)\perp(SAD)$

(2) Chứng minh: $(SAC)\perp(SBD)$

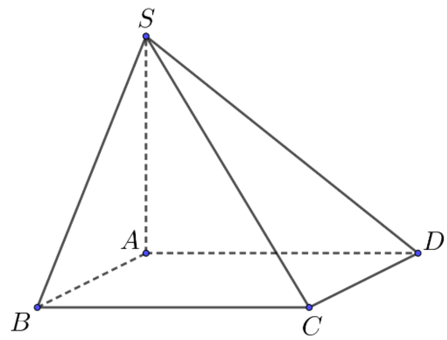
Lời giải

(1) *Chứng minh:* $(SAB)\perp(SAD)$.

- Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AB$ (1).
- Ta có $AB\perp AD$ ($ABCD$ là hình vuông) (2).
- $\xrightarrow{(1)\&(2)} AB\perp(SAD), AB\subset(SAB)\Rightarrow(SAB)\perp(SAD)$.

(2) *Chứng minh:* $(SAC)\perp(SBD)$.

- Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp BD$ (1).
- Ta có $BD\perp AC$ ($ABCD$ là hình vuông) (2).
- $\xrightarrow{(1)\&(2)} BD\perp(SAC), BD\subset(SBD)\ \Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$.



Bài 80. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và $SA\perp(ABC)$.

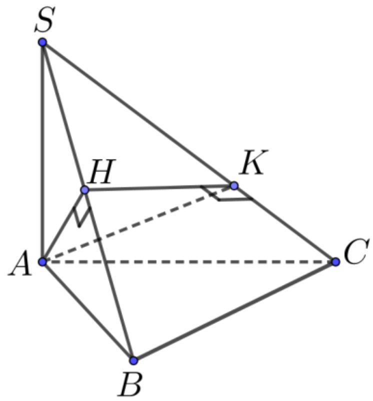
(1) Chứng minh: $(SBC)\perp(SAB)$.

(2) Gọi AH và AK lần lượt là đường cao của hai tam giác SAB, SAC. Chứng minh $(SBC)\perp(AHK)$.

Lời giải

(1) *Chứng minh* $(SBC)\perp(SAB)$.

- Ta có $SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp BC$ (1).
- Ta có $AB\perp BC$ (ΔABC là tam giác vuông tại B (2).
- $\xrightarrow{(1)\&(2)}\begin{cases}BC\perp(SAB)\\BC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow(SBC)\perp(SAB)\Rightarrow(SAB)\perp(SAD)$.



(2) *Chứng minh* $(SBC)\perp(AHK)$.

- Theo kết quả $BC\perp(SAB), AH\subset(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$ (3).
- Mà $AH\perp SB$ (4).
- $\xrightarrow{(3)\&(4)}\begin{cases}AH\perp(SBC)\\AH\subset(AHK)\end{cases}\Rightarrow(AHK)\perp(SBC)$.

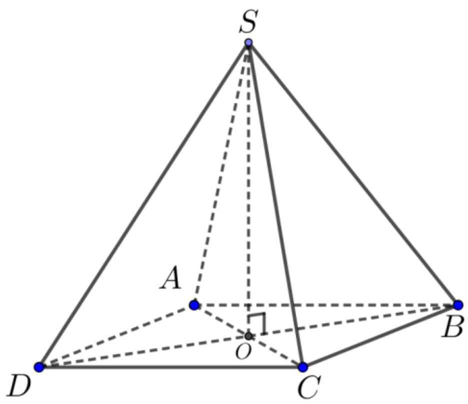
Bài 81. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có $SA=SB=SC=SD$.

(1) Chứng minh: $(SBD)\perp(ABCD)$ (2) Chứng minh: $(SAC)\perp(SBD)$

Lời giải

(1) *Chứng minh* $(SBD)\perp(ABCD)$.

- Ta có $SA=SC\Rightarrow\Delta SAC$ cân tại S,
SO là đường trung tuyến $\Rightarrow SO\perp AC$.
- Ta có $SB=SD\Rightarrow\Delta SBD$ cân tại S,
SO là đường trung tuyến $\Rightarrow SO\perp BD$.
- $AC\cap BD=\{O\}$
$\Rightarrow SO\perp(ABCD)$, mà $SO\subset(SBD)\Rightarrow(SBD)\perp(ABCD)$



(2) *Chứng minh* $(SAC)\perp(SBD)$.

- Theo chứng minh trên, ta có $SO\perp BD$.
- Ta có $ABCD$ là hình vuông $AC\perp BD$.
- Mà $SO\cap AC=\{O\}$.
- Vậy $BD\perp(SAC), BD\subset(SBD)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$.

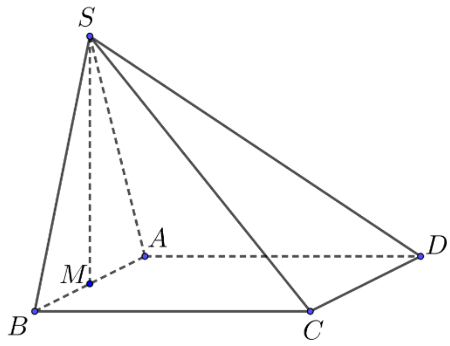
Bài 82. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm AB.

(1) Chứng minh SM vuông góc $(ABCD)$.

(2) Chứng minh tam giác SBC vuông và (SAD) vuông góc (SAB).

Lời giải

(1) *Chứng minh SM vuông góc $(ABCD)$.*



- Ta có ΔSAB đều và M là trung điểm AB nên $SM \perp AB$
- Mặt khác ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases}$,

Suy ra $SM \perp (ABCD)$.

(2) *Chứng minh ΔSBC vuông và (SAD) vuông góc (SAB).*

- Theo trên ta có $SM \perp (ABCD) \Rightarrow SM \perp BC$.
- Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp BC$.
- Từ đó, ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Nên tam giác SBC vuông tại B.
Do $AD // BC$ nên $AD \perp (SAB)$. Do đó (SAD) vuông góc (SAB).

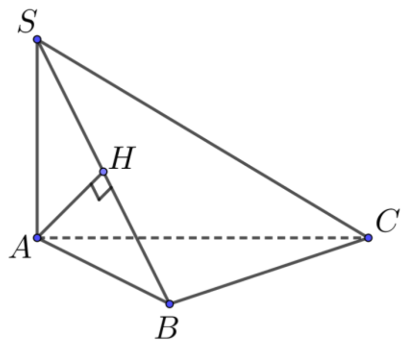
Bài 83. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC là tam giác vuông tại B và $AD \perp (ABC)$

(1) Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$.

(2) Vẽ đường cao AH của ΔABD. Chứng minh: $AH \perp (BCD)$.

Lời giải

(1) *Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$.*



- Ta có ABC là tam giác vuông tại B nên $BC \perp AB$.
- Mặt khác $AD \perp (ABC)$ nên $AD \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (ABD)$. Do đó $(BCD) \perp (ABD)$.

(2) *Chứng minh: $AH \perp (BCD)$.*

- Theo trên ta có $BC \perp (ABD)$ nên $BC \perp AH$.
- Theo giả thiết, ta có $AH \perp BD$. Do đó $AH \perp (BCD)$.

Bài 84. Cho tứ diện $SABC$ có ba đỉnh A, B, C tạo thành Δ vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$.

(1) Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$

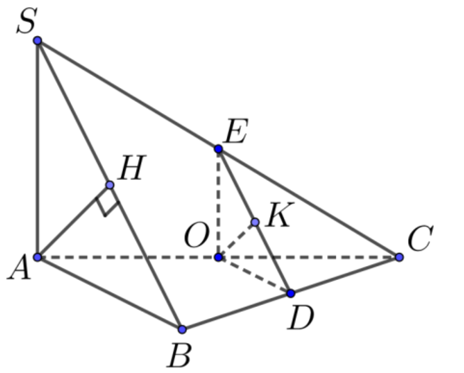
(2) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh $AH \perp (SBC)$.

(3) Tính độ dài đoạn AH.

(4) Từ trung điểm O của đoạn AC vẽ $OK \perp (SBC)$. Tính độ dài OK.

Lời giải

(1) *Chứng minh $(SAB) \perp (SBC)$*



- Ta có ABC là tam giác vuông tại B nên $BC \perp AB$.
- Mặt khác $AS \perp (ABC)$ nên $AS \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAB)$. Do đó $(SBC) \perp (SAB)$.

(2) *Chứng minh $AH \perp (SBC)$.*

- Theo trên ta có $BC \perp (SAB)$ nên $BC \perp AH$.
- Theo giả thiết, ta có $AH \perp SB$. Do đó $AH \perp (SBC)$.

(3) *Tính độ dài đoạn AH.*

- ΔABC vuông cân đỉnh B và $AC = 2a \to BA = BC = a\sqrt{2}$.
- Mặt khác ΔSAB vuông tại S và AH là đường cao.
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

(4) *Tính độ dài OK.*

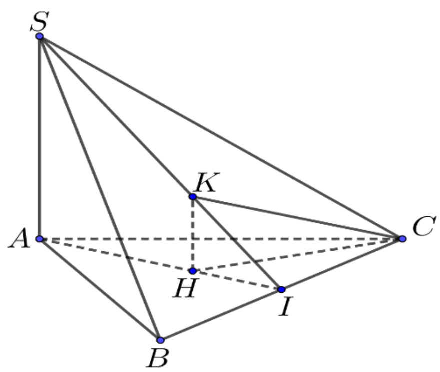
- Gọi D, E lần lượt là trung điểm BC, CS.
- Ta có $\begin{cases} OD // AB \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow OD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Tương tự ta có $\begin{cases} OE // SA \\ SE = EC \end{cases} \Rightarrow OE = \dfrac{1}{2}SA = \dfrac{a}{2}$.
- Kẻ $OK \perp ED, (K \in ED)$. Dễ thấy $(SAB) // (OED)$ nên $CD \perp (OED) \Rightarrow CD \perp OK$.
- Do đó $OK \perp (SBC)$.
- Xét ΔOED, đường cao OK, ta được: $\dfrac{1}{OK^2} = \dfrac{1}{OD^2} + \dfrac{1}{OE^2} = \dfrac{6}{a^2} \Rightarrow OK = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Bài 85. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của ΔABC và ΔSBC.

(1) Chứng minh $(SAH) \perp (SBC)$ (2) Chứng minh $(CHK) \perp (SBC)$

Lời giải

(1) *Chứng minh $(SAH) \perp (SBC)$.*



- Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow BC \perp AI$.
- $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

$\Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SAH) \perp (SBC)$.

(2) *Chứng minh $(CHK) \perp (SBC)$.*

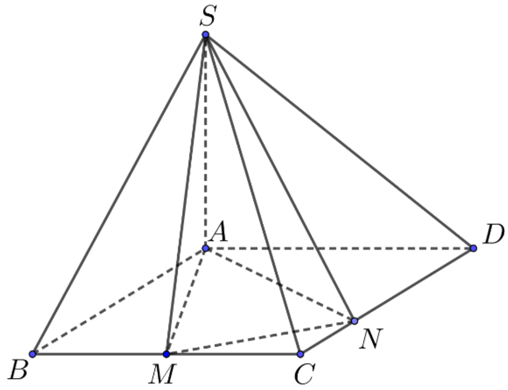
- Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CH$
- Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên $CH \perp AB$

• Từ đó suy ra $CH\perp(SAB)\Rightarrow CH\perp SB$.

• Vì K là trực tâm của tam giác SBC nên $CK\perp SB$
$\Rightarrow SB\perp(CKH)\Rightarrow(SCB)\perp(CKH)$.

Bài 86. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$. Gọi M,N là các điểm thuộc BC và CD sao cho $BM=\frac{a}{2}, DN=\frac{3a}{4}$. Chứng minh: $(SAM)\perp(SMN)$.

Lời giải



• Ta có: $SA\perp(ABCD)$ nên $SA\perp MN$.

• ΔABM nên $AM^2=AB^2+BM^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$.

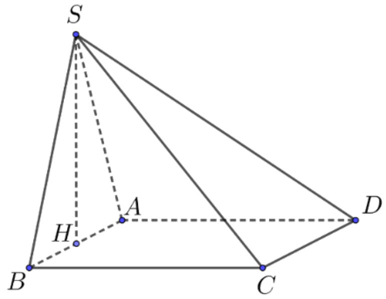
• ΔCMN nên $MN^2=CM^2+CN^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}=\frac{5a^2}{16}$.

• ΔADN nên $AN^2=AD^2+DN^2=a^2+\frac{9a^2}{16}=\frac{25a^2}{16}$.

• Vì $AM^2+MN^2=\frac{5a^2}{4}+\frac{5a^2}{16}=\frac{25a^2}{16}=AN^2$
$\Rightarrow\Delta AMN$ vuông tại M.
$\Rightarrow AM\perp MN$
$\Rightarrow MN\perp(SAM)\Rightarrow(SAM)\perp(SMN)$.

Bài 87. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, ΔSAB đều và vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB. Chứng minh: $(SAD)\perp(SAB)$.

Lời giải



• Ta có ΔSAB đều và H là trung điểm AB
Nên $SH\perp AB$.

• Mặt khác ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\end{cases}$

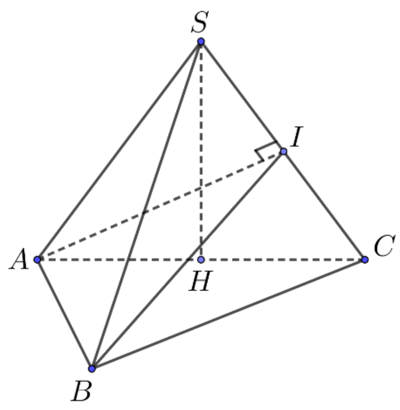
$\Rightarrow SH\perp(ABCD)\Rightarrow SH\perp AD$.

• Ta có $\begin{cases}AD\perp SH\\AD\perp AB\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAB)\Rightarrow(SAD)\perp(SAB)$.

Bài 88. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC.

(1) Chứng minh $(SAC)\perp(SBC)$ (2) Chứng minh $(ABI)\perp(SBC)$

Lời giải



(1) *Chứng minh:* $(SAC)\perp(SBC)$.

- SAC là tam giác đều và vuông góc với (ABC)
- Gọi H là trung điểm của AC $\Rightarrow SH\perp AC$
- $(ABC)\cap(SAC)=AC\Rightarrow SH\perp(ABC)\Rightarrow SH\perp BC$
- Tam giác ABC là tam giác vuông tại $C\Rightarrow BC\perp AC$

Suy ra $BC\perp(SAH)\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow(SBC)\perp(SAC)$.

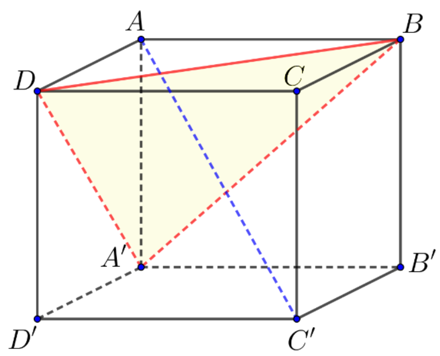
(2) *Chứng minh:* $(ABI)\perp(SBC)$.

- $BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AI$
- Và $SC\perp AI$ nên $AI\perp(SBC)$. Do đó $(ABI)\perp(SBC)$.

Bài 89. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a và $SA=SB=SC=a$.

(1) Chứng minh $AC'\perp(A'BD)$ (2) Chứng minh $(AB'C'D)\perp(BCD'A')$

Lời giải



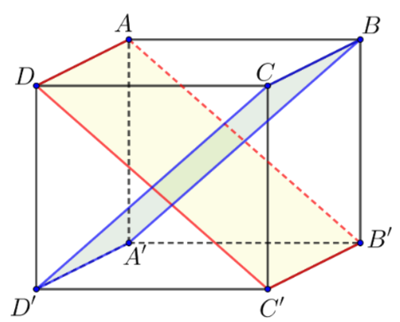
(1) *Chứng minh:* $AC'\perp(A'BD)$.

- Ta có $A'D\subset(AA'D'D)$;
- HCVG của AC' trên $(AA'D'D)$ là AD'
- Do $AD'\perp A'D\Rightarrow AC'\perp A'D$ (1).
- Ta có $BD\subset(ABCD)$,

HCVG của AC' trên $(ABCD)$ là AC

- Do $AC\perp DB\Rightarrow AC'\perp BD$ (2).

Từ $(1),(2)\Rightarrow AC'\perp(A'BD)$.



(2) *Chứng minh:* $(AB'C'D)\perp(BCD'A')$.

- Ta có $AB'\perp A'B$ (1) vì $ABB'A'$ là hình vuông.
- $A'D'\perp(ABB'A'),(ABB'A')\supset AB'\Rightarrow AB'\perp A'D'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AB'\perp(BCD'A')$,

Mà $AB'\subset(AB'C'D)\Rightarrow(AB'C'D)\perp(BCD'A')$.

Bài 90. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Kẻ $CK\perp BD$.

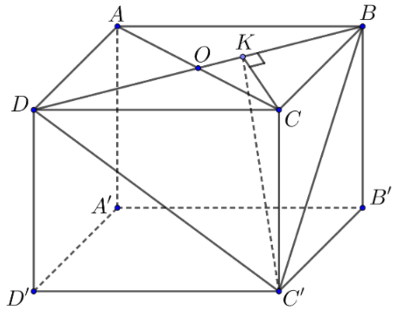
(1) Chứng minh $C'K\perp DB$.

(2) Chứng minh $(C'BD)\perp(C'CK)$

(3) Kẻ $CH\perp C'K$. Chứng minh $CH\perp(C'BD)$.

Lời giải

(1) *Chứng minh* $C'K \perp DB$



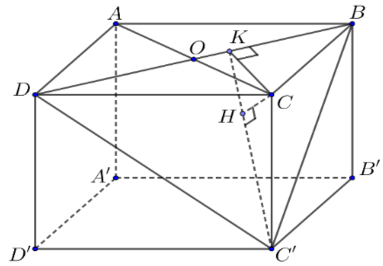
- Ta có CK là hcvg của $C'K$ trên $(ABCD)$,
- $CK \subset (ABCD), CK \perp BD$

$\Rightarrow C'K \perp BD$.

(2) *Chứng minh* $(C'BD) \perp (C'CK)$

- Ta có $\begin{cases} BD \perp CK \\ BD \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (CC'K) \Rightarrow (C'BD) \perp (CC'K)$.

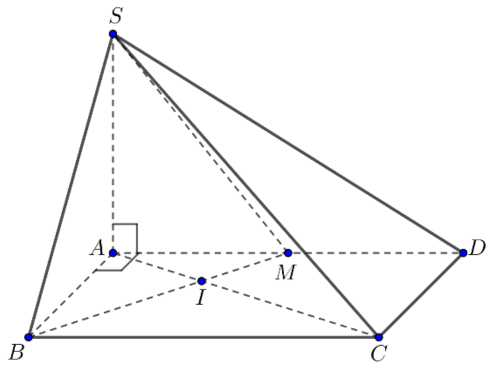
(3) *Chứng minh* $CH \perp (C'BD)$.



- Ta có $CH \perp C'K$.
- $BD \perp (CC'K), CH \subset (CC'K) \Rightarrow BD \perp CH$
- Suy ra $CH \perp (C'BD)$.

Bài 91. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD. Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của AC và MB.
Ta có $MA = MD$ và $AD // BC$

Nên áp dụng định lý Talet, suy ra $AI = \frac{1}{2} IC$.

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{1}{9} AC^2 = \frac{a^2}{3}.$$

$$MI^2 = \frac{1}{9} MB^2 = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a^2\right] = \frac{a^2}{6}.$$

Từ đó suy ra $AI^2 + MI^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{6} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = MA^2$.

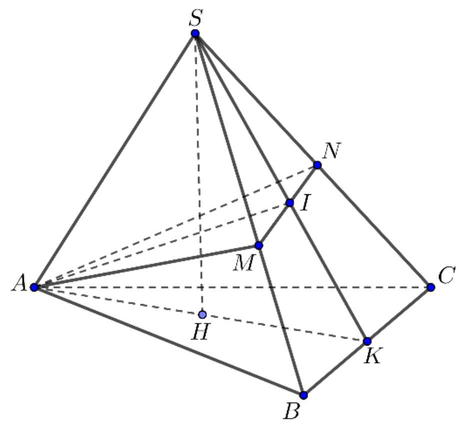
Vậy ΔAMI là tam giác vuông tại I. Suy ra $MB \perp AC$.(1)
Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp MB$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $MB \perp (SAC)$.

Do $MB \subset (SMB)$ nên $(SMB) \perp (SAC)$

Bài 92. Cho hình chóp đều $S.ABC$, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính diện tích ΔAMN biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của BC và $\{I\} = SK \cap MN$.

Từ giả thiết ta có

$MN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a}{2}, MN // BC \Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AM = AN$ (hai trung tuyến tương ứng).

$\rightarrow \Delta AMN$ cân tại $A \Rightarrow AI \perp MN$.

Ta có $\begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases} \Rightarrow AI \perp (SBC)$.

Suy ra $AI \perp SK$ và ΔSAK cân tại A; $SA = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $SK^2 = SB^2 - BK^2 = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$.

Suy ra $AI = \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\dfrac{SK}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}MN.AI = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$.

Bài 93. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$. Trong ΔBCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong (ACD) vẽ $DK \perp AC$. Gọi H là trực tâm của ΔACD.

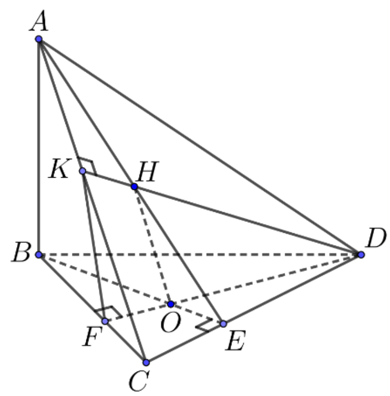
(**1**) Chứng minh $(ACD) \perp (ABE)$.

(**2**) Chứng minh $(ACD) \perp (DFK)$

(**3**) Chứng minh $OH \perp (ACD)$

✍ ***Lời giải***

(**1**) *Chứng minh:* $(ACD) \perp (ABE)$



- Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp CD$
- Vì BE là đường cao tam giác $BCD \Rightarrow BE \perp CD$.
- Ta có: $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} CD \perp AB \\ CD \perp BE \end{array}\right\} \Rightarrow CD \perp (ABE) \\ \qquad\qquad CD \subset (ACD) \end{array}\right\} \Rightarrow (ACD) \perp (ABE)$.

(**2**) *Chứng minh* $(ACD) \perp (DFK)$

- Vì $AB \perp (BCD) \Rightarrow AB \perp DF$
- Vì DF là đường cao tam giác $BCD \Rightarrow DF \perp BC$.
- Ta có: $\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{l} DF \perp AB \\ DF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow DF \perp (ABC) \\ AC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow DF \perp AC$
- Mặt khác, $DK \perp AC \Rightarrow AC \perp (DFK)$.
- Lại có, $AC \subset (ACD) \Rightarrow (ACD) \perp (DFK)$.

(3) *Chứng minh $OH \perp (ACD)$*

- Do $CD \perp (ABE) \Rightarrow CD \perp AE$.
- Mà $DK \perp AC \Rightarrow H = AE \cap DK \Rightarrow H \in (ABE) \cap (DFK)$.
- Ta có: $\left.\begin{array}{l} (ACD) \perp (ABE) \\ (ACD) \perp (DFK) \\ (ABE) \cap (DFK) = OH \end{array}\right\} \Rightarrow OH \perp (ACD)$.

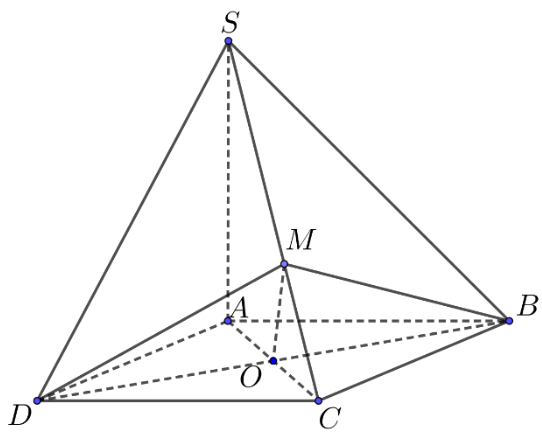
Bài 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$; $BAD = 60°$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

(1) Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

(2) Chứng minh $(SBC) \perp (SDC)$

Lời giải

(1) *Chứng minh: $(SAC) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.*



- Vì $SA \perp (ABCD)$ mà

$SA \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$.

- Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$.
- Vì $SA \perp (ABCD)$, $BD \subset (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$.
- Ta có: $\left.\begin{array}{l} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.
- Mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

(2) *Chứng minh: $(SBC) \perp (SDC)$.*

- Kẻ $BM \perp SC$ (1).
- Vì $BD \perp (SAC)$, $SC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$ (2).
- Từ $(1),(2) \Rightarrow SC \perp (BMD)$.

- Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SBC)\cap(SDC)=SC\\(BMD)\cap(SBC)=BM\\(BMD)\cap(SDC)=DM\\SC\perp(BMD)\end{array}\right\}\Rightarrow\left((SBC),(SDC)\right)=\left(BM,DM\right)=\widehat{BMD}$.
- ΔSAB vuông tại $A\Rightarrow SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{6a^2+4a^2}=a\sqrt{10}$.
- ΔABO vuông tại $O\Rightarrow\cos\widehat{BAO}=\dfrac{AO}{AB}\Rightarrow AO=AB.\cos\widehat{BAO}=2a.\cos 30^\circ=a\sqrt{3}$.

$\Rightarrow AC=2AO=2a\sqrt{3}\Rightarrow SC=\sqrt{AC^2+SA^2}=\sqrt{12a^2+6a^2}=3a\sqrt{2}$

- Ta có: $SM+MC=3a\sqrt{2}$ (3)
- Mặt khác, $BM^2=SB^2-SM^2=BC^2-CM^2$

$\Leftrightarrow SM^2-CM^2=SB^2-BC^2=10a^2-4a^2=6a^2$

$\Leftrightarrow(SM-MC)(SM+MC)=6a^2\Leftrightarrow(SM-MC).3a\sqrt{2}=6a^2\Leftrightarrow SM-MC=a\sqrt{2}$ (4)

- Từ $(3),(4)\Rightarrow\begin{cases}SM=2a\sqrt{2}\\MC=a\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow BM=\sqrt{SB^2-SM^2}=a\sqrt{2}$ (ΔSBM vuông tại M)
- ΔABO vuông tại $O\Rightarrow\sin\widehat{BAO}=\dfrac{BO}{AB}\Rightarrow BO=AB.\sin\widehat{BAO}=2a.\sin 30^\circ=a$.
- Vì ΔBMD cân tại M, OM là đường trung tuyến $\Rightarrow OM$ là đường cao.

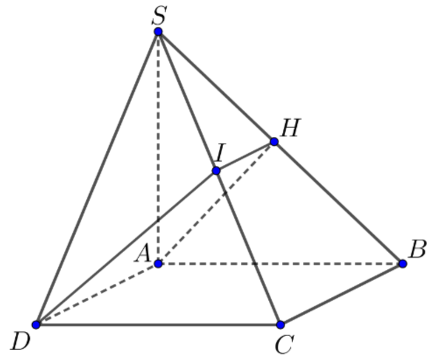
$\Rightarrow$ ΔBMO vuông tại $O\Rightarrow\sin\widehat{BMO}=\dfrac{BO}{BM}=\dfrac{a}{a\sqrt{2}}\Rightarrow\widehat{BMO}=45^\circ\Rightarrow\widehat{BMD}=90^\circ$.

Vậy $(SBC)\perp(SDC)$.

Dạng: Thiết diện

Bài 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SB. Khi đó, mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

Lời giải



- Gọi $AH\perp SB$ tại H.

$\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=AH$.

- Có $\begin{cases}AD\perp SA\\AD\perp AB\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAB)\Rightarrow AD\perp SB$.

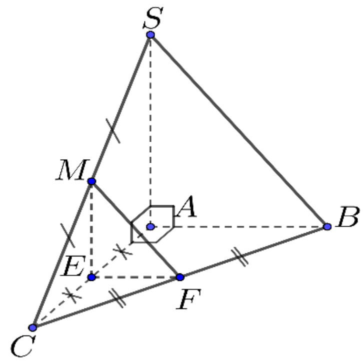
$\Rightarrow(\alpha)\cap(ABCD)=AD$.

- Có $BC//AD\Rightarrow BC\subset(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$.
- Vẽ $HI//BC\,(I\in SC)\Rightarrow(\alpha)\cap(SBC)=HI$.

Vậy $(\alpha)\cap S.ABCD=AHID$ là hình thang vuông tại A,H.

Bài 96. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB=AC=a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA=a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC.

Lời giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC.
Do đó $ME//SA$, $EF//AB$.

Mà $SA\perp(ABC)$ (gt) nên $ME\perp(ABC)$, suy ra $ME\perp EF$.

Dễ thấy $(MEF)\equiv(P)$, thiết diện là ΔMEF vuông tại E.

Diện tích thiết diện là $S=\frac{1}{2}ME.EF=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}SA.\frac{1}{2}AB=\frac{a^2}{8}$.

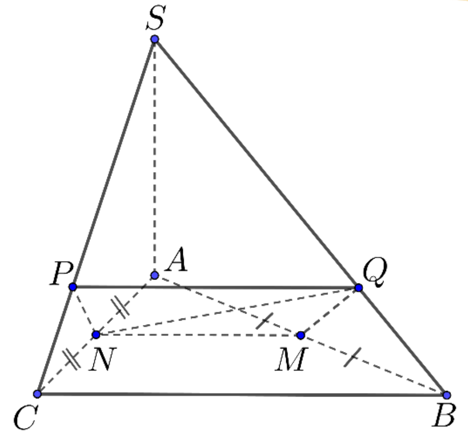
Bài 97. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B với $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$, cạnh bên $SA=a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC,SC,SB lần lượt tại N,P,Q. Diện tích của tứ giác $MNPQ$ bằng

Lời giải

$BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$

Do (P) đi qua trung điểm M của AB và vuông góc với SB cắt AC,SC,SB lần lượt tại N,P,Q nên $MN//PQ//BC$,

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thang vuông tại M,Q.



$S_{MNPQ}=\frac{1}{2}\left(MN+PQ\right).MQ$

+ ΔABC có $MN//BC, MN=\frac{1}{2}BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$;

+ $\Delta MQB \backsim \Delta SAB \Rightarrow \frac{MQ}{MB}=\frac{SA}{SB}$

$\Rightarrow MQ=\frac{SA.MB}{SB}=\frac{a\sqrt{3}.a}{2a.2}=\frac{a\sqrt{3}}{4}$;

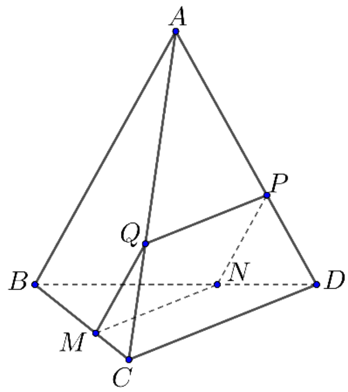
$QB=\sqrt{MB^2-MQ^2}=\frac{a}{4} \quad \Rightarrow SQ=\frac{7a}{4}$.

Có: $MN//PQ//BC$ nên $\frac{PQ}{BC}=\frac{SQ}{SB}\Rightarrow PQ=\frac{SQ.BC}{SB}=\frac{7a\sqrt{3}}{8}$.

Vậy $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}\left(MN+PQ\right).MQ=\frac{33a^2}{64}$.

Bài 98. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=8$, M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $\left(0<x<1\right)$. Mặt phẳng qua M, song song với AB, CD và lần lượt cắt DB, AD, AC tại N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



MQ // AB và NP // $AB \Rightarrow MQ$ // PN,

Tương tự $PQ// NM$ (vì cùng $//CD$), mà $AB\perp CD$

$\Rightarrow$Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

$\frac{MQ}{AB}=\frac{MC}{BC}=1-\frac{BM}{BC}=1-\frac{MN}{CD}\Rightarrow\frac{MQ}{AB}+\frac{MN}{CD}=1=\frac{MQ+MN}{8}$

$\Rightarrow MQ+MN=8$.

$S_{MNPQ}=MQ.MN\le\frac{\left(MQ+MN\right)^2}{4}=16$.

Suy ra diện tích lớn nhất của tứ giác $MNPQ$ bằng 16.

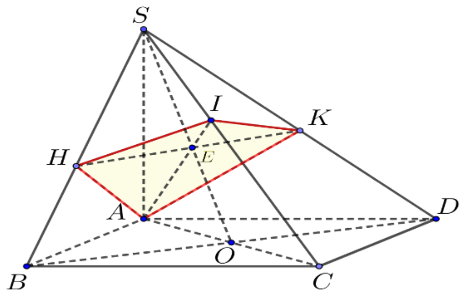
Bài 99. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm SC, $\left(\alpha\right)$ là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi $\left(\alpha\right)$.

Lời giải

Trong $\left(ABCD\right)$, gọi $O=AC\cap BD$.

Trong $\left(SAC\right)$, gọi $E=SO\cap AI$.

Trong $\left(SBD\right)$ kẻ đường thẳng qua E và song song với BD lần lượt cắt SB, SD tại H, K.



Vậy thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AIKH$.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AC \perp BD \\ SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AI \Rightarrow HK \perp AI$.

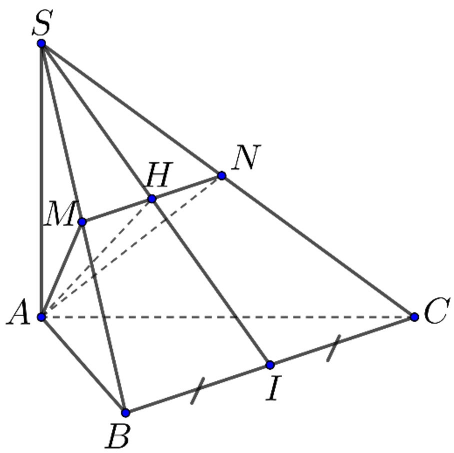
Ta có $AI = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = \frac{1}{2}.2\sqrt{2}a = a\sqrt{2}$.

Và E là trọng tâm ΔSAC nên $\frac{HK}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}BD = \frac{4}{3}a$.

Vậy diện tích tứ giác $AHIK$ là $S_{AHIK} = \frac{1}{2}AI.HK = \frac{2\sqrt{2}}{3}a^2$.

Bài 100. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = a$ và vuông góc với đáy. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với trung tuyến SI của tam giác SBC. Tính diện tích S của thiết diện tạo bởi (α) với hình chóp đã cho.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SI.
Kẻ đường thẳng MN qua H và song song với BC và cắt SB, SC lần lượt tại M, N.
Ta có: $SI \perp BC \Rightarrow SI \perp MN$ và $SI \perp AH$.
$\Rightarrow SI \perp (AMN)$.
Dễ dàng ta chứng minh được
$BC \perp (SAI) \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow AH \perp MN$.
Ta dễ dàng chứng minh được tam giác AMN cân.

$AH = \sqrt{\frac{SA^2.AI^2}{SA^2 + AI^2}} = \frac{\sqrt{21}}{7}a$.

Ta có: $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$.

$SA^2 = SI.SH \Rightarrow SH = \frac{2}{\sqrt{7}}a$.

Do $MN // BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{SH}{SI} \Rightarrow MN = \frac{4}{7}a$.

$S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.AH = \frac{2a^2\sqrt{21}}{49}$.

Bài 101. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, đáy lớn $AD = 8$, đáy nhỏ $BC = 6$, SA vuông góc với đáy, $SA = 6$. Gọi M là trung điểm AB, (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi N, P và Q lần lượt là trung điểm CD, SC và SB.

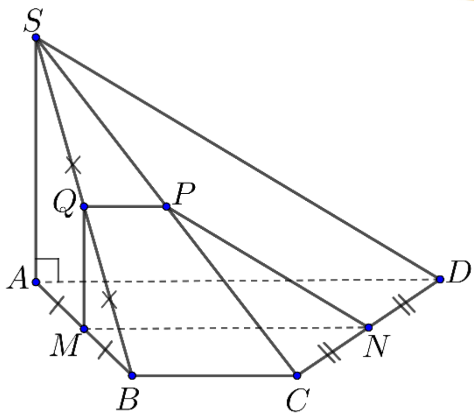
Ta có: $\begin{cases}(P)\cap(SAB)=MQ\\(P)\cap(ABCD)=MN\\(P)\cap(SCD)=NP\end{cases}$

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $MNPQ$ là hình thang vuông tại M, Q và $MQ=PQ=3$, $MN=7$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là:

$$S_{MNPQ}=\frac{MQ.(MN+PQ)}{2}=\frac{3.(7+3)}{2}=15.$$



Bài 102. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, $AB=SA=a$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC, (P) cắt SB, SC, SD tại H,I,K.

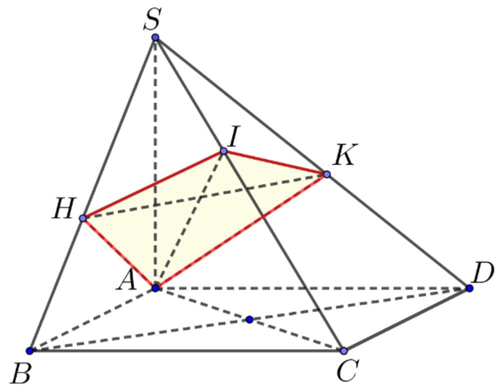
(1) Chứng minh $HK // BD$.

(2) Chứng minh $AH\perp SB$, $AK\perp SD$.

(3) Chứng minh tứ giác $AHIK$ có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích $AHIK$ theo a.

Lời giải

(1) *Chứng minh $HK // BD$.*



- Ta có: $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp SC$
- Mà $(P)\perp SC$ nên $BD//(P)$
- $\begin{cases}(P)\cap(SBD)=HK\\BD//(P)\end{cases}\Rightarrow HK//BD$

(2) *Chứng minh $AH\perp SB$, $AK\perp SD$.*

- Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$ (1)
- Vì $SC\perp(P)$ mà $AH\subset(P)$ nên $SC\perp AH$ (2)
- Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp SB$
- Ta có: $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAD)\Rightarrow CD\perp AK$ (3)

- Vì $SC \perp (P)$ mà $AK \subset (P)$ nên $SC \perp AK$ (4)
- Từ (3) và (4) suy ra $AK \perp SD$

(3) *Chứng minh tứ giác $AHIK$ có hai đường chéo vuông góc. Tính diện tích $AHIK$ theo a.*

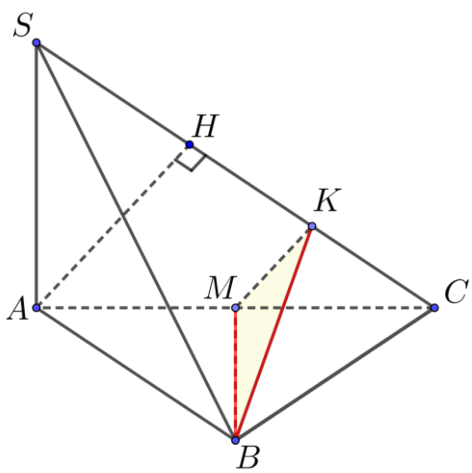
- Ta có : $\begin{cases} HK // BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow HK \perp AI$ vì $AI \subset (SAC)$

Vậy tứ giác $AHIK$ có hai đường chéo vuông góc

- Ta có: $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$
- $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{HK}{BD} \Rightarrow HK = SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$
- $S_{AHIK} = \dfrac{1}{2}AI.HK = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$

Bài 103. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua điểm B và vuông góc với cạnh SC. Tìm thiết diện của tứ diện bị cắt bởi (α) và tính diện tích của thiết diện đó.

Lời giải



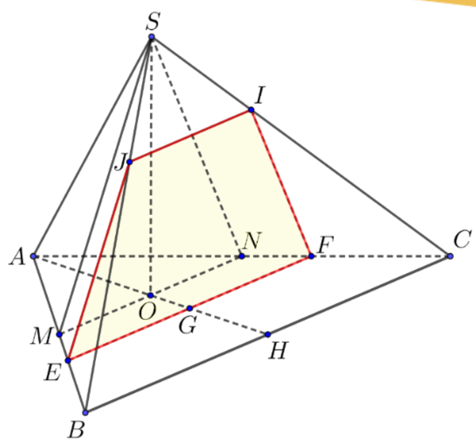
- Kẻ $AH \perp SC$
- Mà $(\alpha) \perp SC$ nên $AH // (\alpha)$
- Gọi M là trung điểm của AC
- Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{cases} \Rightarrow BM \perp SC \Rightarrow BM \subset (\alpha)$
- Mà $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAC) \\ AH // (\alpha), AH \subset (SAC) \end{cases}$

$\Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = MK (MK // AH, K \in SC)$.

- Vậy thiết diện của tứ diện là ΔBKM $(BM \perp MK)$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$
- $S_{\Delta BKM} = \dfrac{1}{2}.MK.MB = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}AH.MB = \dfrac{1}{4}.\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{20}$.

Bài 104. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi H là trung điểm BC, O là trung điểm AH và G là trọng tâm của tam giác ABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO = 2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Lời giải



- Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB,AC .
- $MO=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{4}BC=\frac{a}{4}$.
- $SO\perp MN$ và O là trung điểm $MN\Rightarrow \Delta SMN$ cân tại S .
- $SM=SN=\sqrt{SO^2+MO^2}=\frac{a\sqrt{65}}{4}$.
- Ta có: $\begin{cases} MN\perp AH\left(MN//BC\right) \\ SO\perp AH \\ MN,SO\subset\left(SMN\right) \end{cases}\Rightarrow AH\perp\left(SMN\right)$.
- $\left(P\right)$ qua G và vuông góc với $AH\Rightarrow\left(P\right)$ là mặt phẳng qua G và song song $\left(SMN\right)$.
- G là điểm chung của $\left(P\right)$ và $\left(SMN\right),\left(SMN\right)//\left(P\right)$

$\Rightarrow\left(SMN\right)\cap\left(P\right)=d$ qua G song song MN cắt AB,AC lần lượt tại E,F

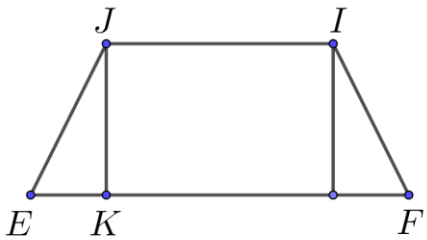
$\Rightarrow EF//BC\Rightarrow\frac{EF}{BC}=\frac{AG}{AH}=\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{2}{3}\Rightarrow EF=\frac{2}{3}BC=\frac{2a}{3}$.
- E là điểm chung của $\left(P\right)$ và $\left(SAB\right)$,

$\Rightarrow\left(SAB\right)\cap\left(P\right)=d'$ qua E song song SM cắt SB tại J .
- $EJ//SM\Rightarrow\frac{EJ}{SM}=\frac{BE}{BM}=\frac{2}{3}\Rightarrow EJ=\frac{2}{3}SM=\frac{a\sqrt{65}}{6}$.
- F là điểm chung của $\left(P\right)$ và $\left(SAC\right)$,

$\Rightarrow\left(SAC\right)\cap\left(P\right)=d''$ qua F song song SN cắt SC tại I .
- $IF//SN\Rightarrow\frac{IF}{SN}=\frac{FC}{CN}=\frac{CI}{CS}=\frac{2}{3}\Rightarrow IF=\frac{2}{3}SN=\frac{a\sqrt{65}}{6}$.

Suy ra thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt $\left(P\right)$ là hình thang cân $IJEF$.

- Ta có: $\frac{CI}{CS}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{SI}{SC}=\frac{1}{3}=\frac{IJ}{BC}\Rightarrow IJ=\frac{a}{3}$.



- Gọi K là hình chiếu vuông góc của J lên EF .
- $EK=\frac{1}{2}\left(EF-IJ\right)=\frac{a}{6}$; $JK=\sqrt{JE^2-EK^2}=\frac{3a}{4}$.

Vậy $S_{IJEF} = \frac{1}{2} JK(IJ + EF) = \frac{3a^2}{8}$.

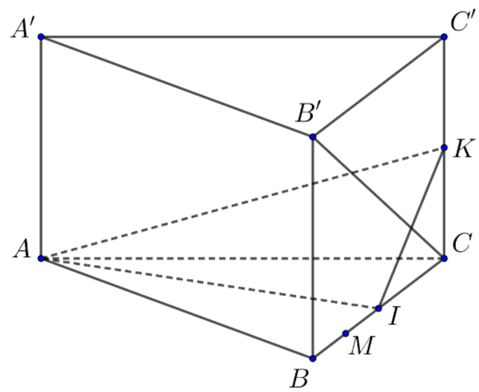
Bài 105. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân, $AB = AC = a\sqrt{2}$. Ba điểm I, K, M lần lượt là trung điểm của BC, CC' và BI ; $BB' = 2a$.

(1) Chứng minh $B'C \perp (AKI)$

(2) Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với $B'C$ cắt hình trụ.

Lời giải

(1) *Chứng minh* $B'C \perp (AKI)$



• $AB = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$

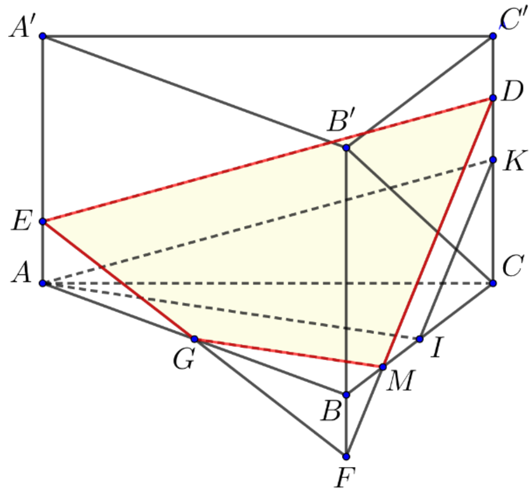
$\Rightarrow BCC'B'$ là hình vuông $\Rightarrow B'C \perp BC'$.

• Ta có $\left.\begin{matrix} \left\{\begin{matrix} AI \perp BB' \\ AI \perp BC \end{matrix}\right. \to AI \perp (BCC'B') \\ B'C \subset (BCC'B') \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'C \perp AI$

Và $B'C \perp IK$ (vì $BC' // IK$).

$\Rightarrow B'C \perp (AIK)$.

(2) *Xác định thiết diện do mặt phẳng* (P) *qua* M *và vuông góc với* $B'C$ *cắt hình trụ.*



• Mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với $B'C$ và $B'C \perp (AKI) \Rightarrow (P)$ là mặt phẳng đi qua M và song song với (AIK) .

• $(BCC'B') \cap (P) = M$.

$(BCC'B') \cap (AIK) = IK$.

$\Rightarrow (BCC'B') \cap (P) = d$ qua M , song song IK , cắt CC' , BB' lần lượt tại D, F .

• $(ACC'A') \cap (P) = D$.

$(ACC'A) \cap (AIK) = AK$.

$\Rightarrow (ACC'A')\cap(P)=d'$ qua D, song song AK, cắt AA' tại E.

- $(ABB'A')\cap(P)=EF, EF\cap AB=G$.
- $(ABC)\cap(P)=GM$.

Vậy thiết diện do (P) qua M và vuông góc $B'C$ cắt hình trụ là tứ giác $DEGM$.

Bài 106. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh đáy của lăng trụ bằng a. Một mặt phẳng (α) hợp với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ một góc $45°$ và cắt các cạnh bên của lăng trụ tại M,N,P,Q. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải

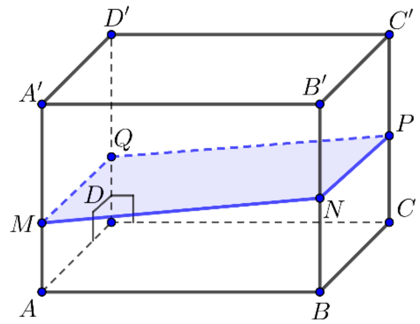
Gọi S là diện tích thiết diện $MNPQ$.

Ta có hình chiếu của $MNPQ$ xuống $(ABCD)$ chính là hình vuông $ABCD$.

$S'=S_{ABCD}=a^2$.

Gọi $\varphi=((\alpha),(ABCD))$ thì $\varphi=45°$.

Do $S'=S.\cos\varphi=S.\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow S=\sqrt{2}S'=\sqrt{2}a^2$.



Bài 107. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh A. Gọi H là trung điểm của BC, O là trung điểm của AH và G là trọng tâm của ΔABC. Biết SO vuông góc mặt phẳng (ABC) và $SO=2a$. Tính diện tích thiết diện với hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua G và vuông góc với AH.

Lời giải

Qua G dựng MN $(M\in AB, N\in AC)$ song song BC thì $MN\perp AH\Rightarrow MN\subset(P)$.

Qua G dựng $GK(K\in SH)$ song song SO thì $GK\perp AH$.

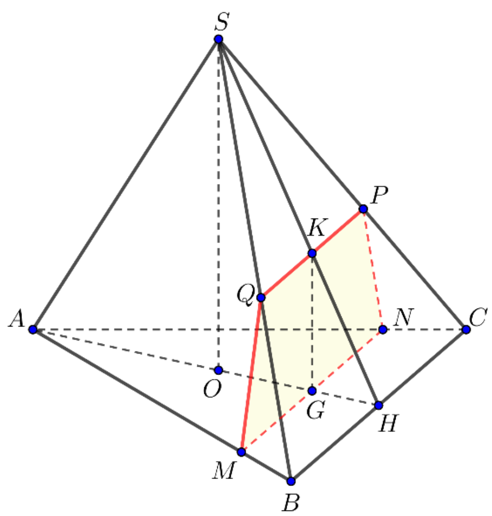
$\Rightarrow GK\subset(P)$

Qua K dựng PQ $(P\in SC, Q\in SB)$ song song BC thì $PQ\perp AH\Rightarrow PQ\subset(P)$.

Suy ra thiết diện là tứ giác MNPQ.

Ta có MN và PQ cùng song song BC

$\rightarrow G$ là trung điểm MN và K là trung điểm của PQ. Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.



Vì G là trọng tâm ΔABC và $MN // BC\Rightarrow MN=\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}a$.

Ta có $\dfrac{OH}{AH}=\dfrac{1}{2},\dfrac{HG}{AH}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{HG}{OH}=\dfrac{2}{3}$.

Vì $GK//SO$ nên $\dfrac{HG}{HO}=\dfrac{GK}{SO}=\dfrac{HK}{HS}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow KG=\dfrac{4}{3}a.$

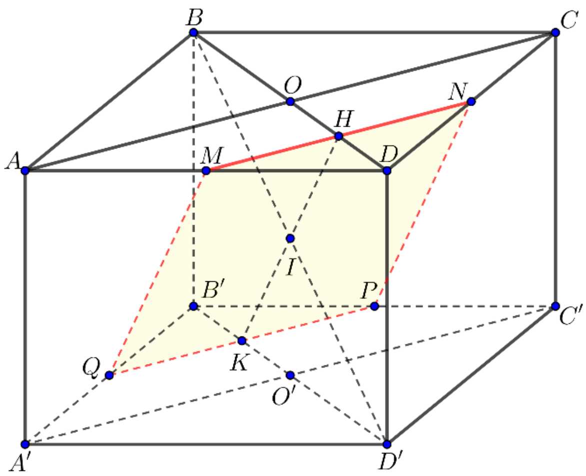
Mặt khác $PQ//BC,\dfrac{HK}{HS}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{SK}{SH}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{PQ}{BC}\Rightarrow PQ=\dfrac{1}{3}a.$

Vậy diện tích thiết diện cần tìm là $S=\dfrac{1}{2}.(PQ+MN).GK=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}a+\dfrac{2}{3}a\right).\dfrac{4}{3}a=\dfrac{2}{3}a^2$.

Bài 108. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BD'. Tính diện tích thiết diện.

Lời giải

Thiết diện là hình chữ nhật $MNPQ$.



Ta có $\Delta IBH\backsim\Delta DBD'$ suy ra $\dfrac{IB}{DB}=\dfrac{IH}{DD'}=\dfrac{BH}{BD'}$.

Suy ra $BH=\dfrac{IB.BD'}{DB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}}=\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$ và

$IH=\dfrac{IB.DD'}{DB}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a}{a\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}a}{4}$.

$\Rightarrow\dfrac{DH}{DO}=\dfrac{BD-BH}{DO}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MN=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $NP=HK=2HI=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy $S_{MNPQ}=MN.NP=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

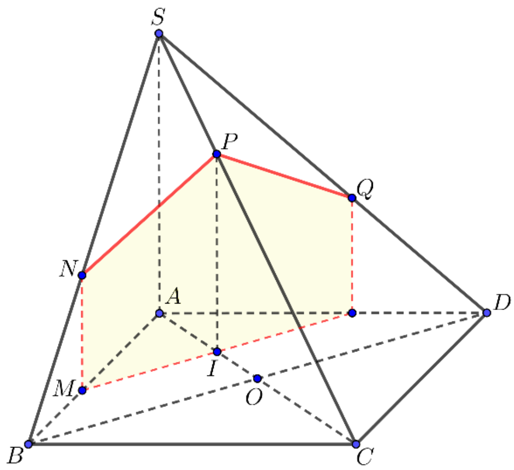
Bài 109. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=b$ và vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm trên cạnh AB sau cho $AM=x(0<x<a)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M vuông góc với đường thẳng AC.

(1) Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với mặt phẳng (α).

(2) Tính diện tích S của thiết diện theo a,b,x.

(3) Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.

Lời giải



(1) *Xác định thiết diện của hình chóp đã cho với (α).*

Ta có $\begin{cases} SA \perp AC \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow (\alpha)//SA, (\alpha)//BD.$

+) $\begin{cases} (\alpha)//SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = m$ với m qua M và $\begin{cases} m//SA \\ m \cap SB = N \end{cases}$.

+) $\begin{cases} (\alpha)//BD \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = n$ với n qua M và $\begin{cases} n//BD \\ n \cap AD = L \\ n \cap AC = I \end{cases}$.

+) $\begin{cases} (\alpha)//SA \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = p$ qua I và $\begin{cases} p//SA \\ p \cap SC = P \end{cases}$.

+) $\begin{cases} (\alpha)//SA \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = q$ qua L và $\begin{cases} q//SA \\ q \cap SD = Q \end{cases}$.

Mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình chóp $S.ABCD$ theo năm đoạn giao tuyến MN, NP, PQ, QL, LM nên thiết diện là ngũ giác $MNPQL$.

(2) *Tính diện tích S của thiết diện theo a, b, x.*

Chú ý tính chất đối xứng ta có $S_{MNPQL} = 2S_{MINP}$.

Trong đó tứ giác $MINP$ là hình thang vuông tại I và M, gọi O là tâm hình vuông $ABCD$

Theo định lí Ta-lét: $\frac{MN}{SA} = \frac{BM}{BA} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MN = \frac{b(a-x)}{a}$;

$\frac{MI}{BO} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow MI = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

$\frac{IP}{SA} = \frac{CI}{CA} = \frac{CO+OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{OI}{2OA} = \frac{1}{2} + \frac{BM}{2BA} = \frac{1}{2} + \frac{a-x}{2a} = \frac{2a-x}{2a} \Rightarrow IP = \frac{b(2a-x)}{2a}$.

Ta có $S_{MNPQL} = (MN + IP)MI = \left[\frac{b(a-x)}{a} + \frac{b(2a-x)}{2a}\right]\frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}bx(4a-3x)}{4a}$.

(3) *Tìm x để diện tích của thiết diện lớn nhất.*

Sử dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$S=\frac{\sqrt{2}.bx\left(4a-3x\right)}{4a}=\frac{\sqrt{2}.b}{12a}.3x\left(4a-3x\right)\le\frac{\sqrt{2}.b}{12a}\left(\frac{3x+4a-3x}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{2}ab}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3x=4a-3x\Leftrightarrow x=\frac{2a}{3}$.

--------------------**Hết**--------------------

Hình học & Đo lường

Bài 04

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

KHOẢNG CÁCH

A Lý thuyết

1. Khoảng cách từ 1 điểm tới 1 đường thẳng, đến 1 mặt phẳng

1.1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng*

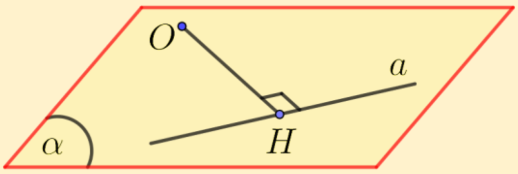
Định nghĩa:

Cho điểm O và đường thẳng a.

Trong mặt phẳng (O,a),

• Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a.

• Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng a.



Kí hiệu : $d(O,a)=OH$.

Nhận xét

- $\forall N\in a: ON\ge d(O,a)=OH$
- $d(O,a)=0\Leftrightarrow O\in a$

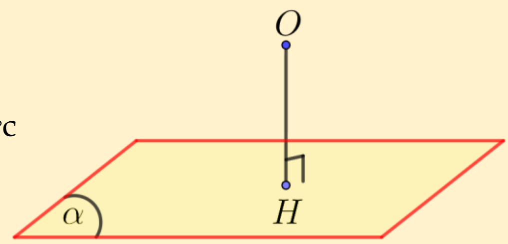
1.2. *Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng*

Định nghĩa:

Cho điểm O và mặt phẳng (α).

• Gọi H là hcvg của O trên mặt phẳng (α).

• Khi đó khoảng cách giữa hai điểm O và H được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α).



Kí hiệu : $d(O,(\alpha))=OH$

Nhận xét

- $\forall N\in(P): ON\ge d(O,(P))=OH$
- $d(O,(P))=0\Leftrightarrow O\in(P)$

2. Khoảng cách giữa đường và mặt song song, hai mặt song song

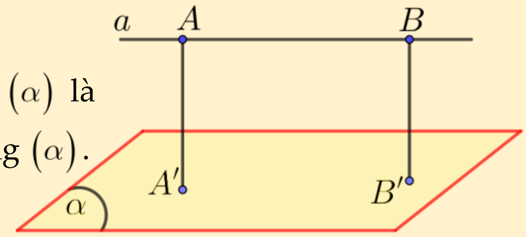
2.1. *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α).

• Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α).

Kí hiệu : $d(a,(\alpha))=d(A,(\alpha))$

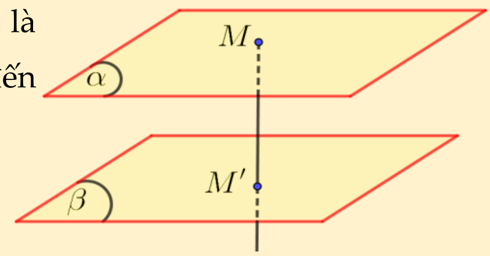


2.2. *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Định nghĩa:

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha),(\beta)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia

Kí hiệu : $d((\alpha),(\beta))=d(M,(\beta))$ với điểm $M\in(\alpha)$



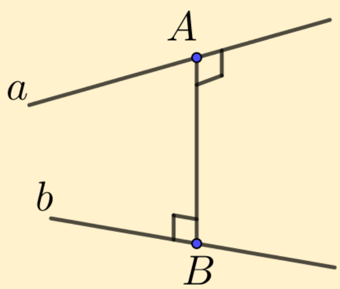
3. Đường vuông góc chung và khoảng cách hai đường chéo nhau

3.1. *Định nghĩa*

Định nghĩa:

- Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b và cùng vuông góc với mỗi đường ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b
- Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a và b tại A,B thì độ dài đoạn thẳng AB gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b

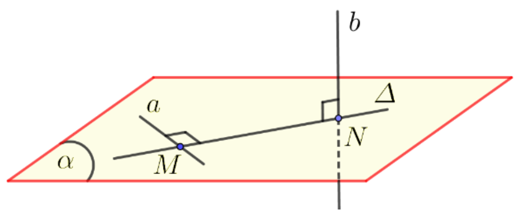
Kí hiệu: $d(a,b)=AB$



3.2. *Cách dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau*

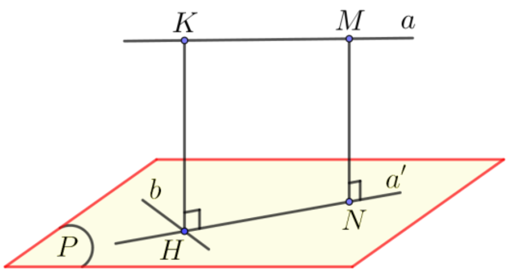
▶ **Cách 1:** Khi a vuông b

- Dựng một mặt phẳng $(\alpha)\supset a,(\alpha)\perp b$ tại N
- Trong (α) dựng $NM\perp a$ tại M
- Đoạn MN là đoạn vuông góc chung của a và b



Cách 2: Khi a chéo b

- Dựng một mặt phẳng $(P)\supset b,(P)//a$.
- Dựng a' là hình chiếu của a lên mặt phẳng (P), bằng cách lấy $M\in a$ dựng đoạn $MN\perp(P)$, lúc đó a' là đường thẳng đi qua N và song song với a
- Gọi $H=a'\cap b$, dựng $HK//MN$ $\Rightarrow HK$ là đoạn vuông góc chung của a và b



Nhận xét

(1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó với mặt phẳng song song với nó và chứa thẳng còn lại.

(2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

B Bài tập

Dạng 1. Khoảng cách từ chân đường cao đến một mặt bên

Phương pháp

- **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.
- **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).
- **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
  Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ba bước dựng ở trên là sử dụng tính chất:

"Hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trên mặt này vuông góc với giao tuyến thì sẽ vuông góc với mặt phẳng kia."

Nhận xét:

Đây là bài toán cơ bản nhưng vô cùng quan trọng trong việc tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng. Hầu như tính khoảng cách từ một điểm bất kỳ đến mặt phẳng bên đều thông qua điểm này.

Ví dụ 1.1.

Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC). Hãy xác định khoảng cách từ điểm A đến mặt bên (SBC).

Lời giải

Ta có $BC = (SBC) \cap (ABC)$.

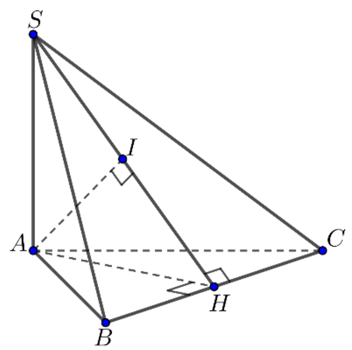
Dựng $AH \perp BC$ tại H.

Dựng $AI \perp SH$ tại I.

Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

$(SBC) \perp (SAH) = AH$ có $AI \perp SH$

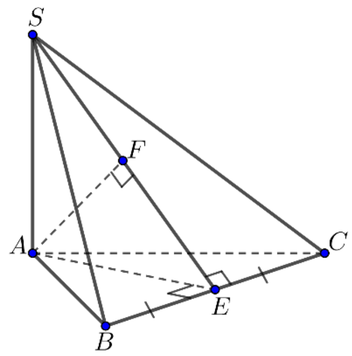
Nên $AI \perp (SBC)$. Vậy $d\left(A;(SBC)\right) = AI$.



Ví dụ 1.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) theo a, biết $SA = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Lời giải



Gọi E là trung điểm BC thì $BC \perp AE$ (vì ABC đều).
Dựng $AF \perp SE$ tại F.

Có $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AE \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAE) = SE \Rightarrow AF \perp SE$

Suy ra $AF \perp (SBC)$.

Vậy $\text{d}(A,(SBC)) = AF$.

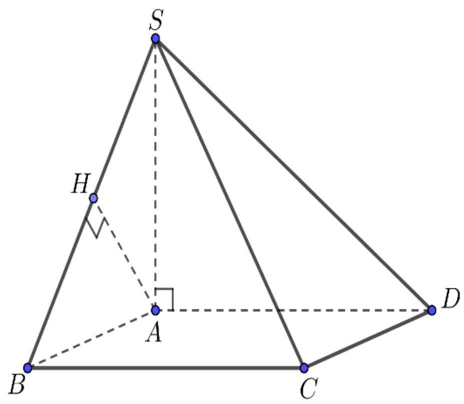
Trong ΔSAE: $\dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AE^2} = \dfrac{2}{3a^2} + \dfrac{4}{3a^2} = \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow AF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\text{d}(A,(SBC)) = AF = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 1.3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh a, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB) = SB$

Kẻ $AH \perp SB$ tại $H \Rightarrow AH \perp (SBC)$

Vậy: $\text{d}(A,(SBC)) = AH$.

Trong ΔSAB:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

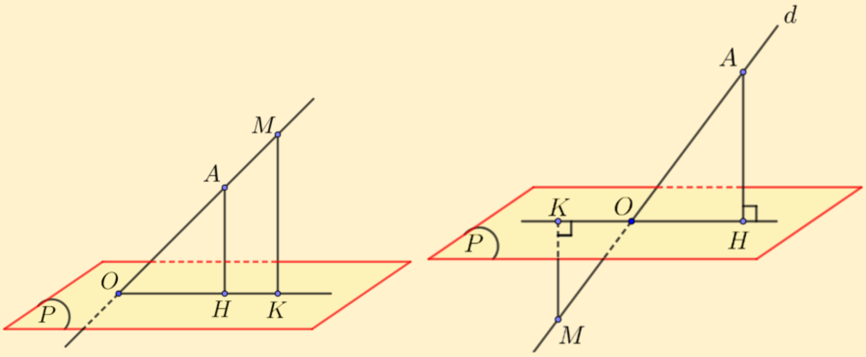
Kết luận: $\text{d}(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Dạng 2. Khoảng cách từ điểm bất kỳ đến một mặt phẳng

Phương pháp

Từ các điểm yêu cầu, ta quy về chân đường cao:

Giả sử $AM \cap (P) = \{O\}$ như hình vẽ.



Khi đó: $\dfrac{d(M,(P))}{d(A,(P))} = \dfrac{OM}{OA} \Rightarrow d(M,(P)) = \dfrac{OM}{OA} \cdot d(A,(P))$ với $\dfrac{OM}{OA}$ là hằng số.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.

▶ **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

▶ **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 2.1.

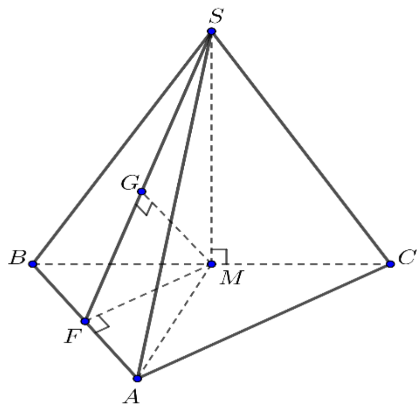
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $BC = 2a$, $\widehat{ABC} = 60°$. Goi M là trung điểm BC. Biết $SA = SB = SC = a\sqrt{5}$.

(1) Tính chiều cao của hình chóp.

(2) Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

Lời giải

(1) Tính chiều cao của hình chóp.



Vì ΔABC vuông tại A, M là trung điểm của BC

Nên ta có $MA = MB = MC$. (1)

Theo đề $SA = SB = SC$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow M$ là HCVG của S lên (ABC).

Vậy $d(S,(ABC)) = SM$.

Trong ΔSBM có $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \sqrt{\left(a\sqrt{5}\right)^2 - a^2} = 2a$.

(2) Tính khoảng cách từ M đến (SAB).

M là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABC).

Kẻ $MF\perp AB$ tại F. Kẻ $MG\perp SF$ tại $G\Rightarrow MG\perp(SAB)$.

MAB là tam giác cân có góc $60°$ nên MAB đều $\Rightarrow MF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong ΔSMF: $\dfrac{1}{MG^2}=\dfrac{1}{SM^2}+\dfrac{1}{MF^2}=\dfrac{1}{(2a)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}\Rightarrow MG=\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ví dụ 2.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BA=3a$, $BC=4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên BC.

Do $(SBC)\perp(ABC)$ nên $SH\perp(ABC)$.

Trong ΔSBH: $\begin{cases} SH=SB\cdot\sin 30^\circ=a\sqrt{3} \\ BH=SB\cdot\cos 30^\circ=3a \end{cases}$.

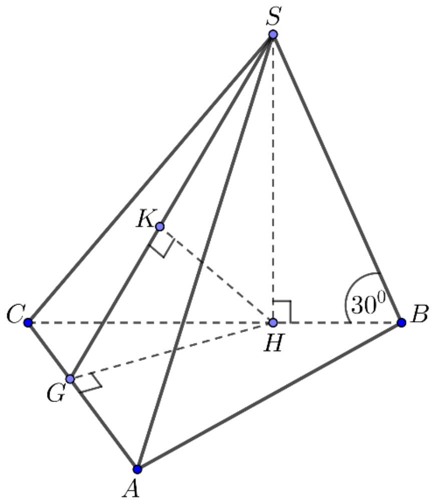
Dựng $HG\perp AC$ tại G. Dựng $HK\perp SG$ tại K.

Ta có $\begin{cases} AC\perp HG \\ AC\perp SH \end{cases}\Rightarrow AC\perp \text{mp}(SHG)$.

$\Rightarrow(SAC)\perp(SHG)$ vì $AC\subset(SAC)$

Và $(SAC)\cap(SGH)=SG\Rightarrow HK\perp(SAC)$.

Vậy $\text{d}(H,(SAC))=HK$.



Ta có $\Delta CGH\sim\Delta CBA\Rightarrow\dfrac{GH}{BA}=\dfrac{CH}{CA}\Rightarrow GH=\dfrac{a}{5a}.3a=\dfrac{3a}{5}$.

Trong ΔSGH : $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{HG^2}+\dfrac{1}{HS^2}=\dfrac{25}{9a^2}+\dfrac{1}{3a^2}=\dfrac{28}{9a^2}\Rightarrow HK=\dfrac{3a\sqrt{7}}{14}$.

$HB\cap(SAC)=\{C\}\Rightarrow\dfrac{\text{d}(B,(SAC))}{\text{d}(H,(SAC))}=\dfrac{BC}{HC}=4$

Vậy $\text{d}(B,(SAC))=4\text{d}(H,(SAC))=\dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Dạng 3. Khoảng cách hai đường chéo nhau

Phương pháp

Phương pháp chung: Ta phải chuyển khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng hoặc khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

⌘ ***Trường hợp 1:***

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \subset (P) \\ b // (P) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d(b,(P))$.

Khi đó chọn $M \in b$ sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

♻ Nếu không tìm được $\begin{cases} (P) \supset a \\ (P) // b \end{cases}$ thì ta phải dựng $\begin{cases} (Q) \supset a \\ (Q) // b \end{cases}$

⌘ ***Trường hợp 2:*** a và b lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song nhau.

♻ Nếu đường thẳng $\begin{cases} a \in (P) \\ b \in (Q) \\ (P) // (Q) \end{cases} \Rightarrow d(a,b) = d((P),(Q))$

⌘ ***Trường hợp 3:*** a là cạnh bên còn b là một cạnh đáy của hình chóp

♻ Ta làm như sau:

(+) Gọi $I = a \cap (P)$ (mặt đáy).

(+) Từ I dựng đường thẳng Δ song song với b.

(+) Khi đó b song song với (P) chứa a và Δ.

(+) Chọn M trên b sao cho có thể tính $d(M,(P))$ là $d(a,b)$.

Để tính được $d(M,(P))$ ta chỉ cần tính $d(A,(P))$ bằng các bước sau:

▶ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ.

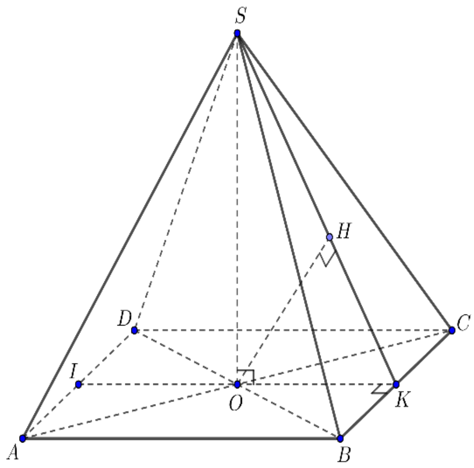
▶ **Bước 2:** Từ hình chiếu vuông góc của đỉnh, dựng $AH \perp \Delta$ (với $H \in \Delta$).

▶ **Bước 3:** Dựng $AI \perp SH$ (với $I \in SH$). Khoảng cách cần tìm là AI.
Với S là đỉnh, A là hình chiếu vuông góc của đỉnh trên mặt đáy.

Ví dụ 3.1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD, BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AD theo a.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC)$

Nên $d(AD,SB) = d(AD,(SBC)) = d(I,(SBC))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên SK

Nên $\begin{cases} OH \perp SK \\ OH \perp BC \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

Trong ΔSAO: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Trong ΔSOK:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{4}{6a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{14a^2}{3} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{42}}{14}.$$

$$OI \cap (SBC) = \{K\} \Rightarrow \frac{d(I,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{IK}{OK} = 2.$$

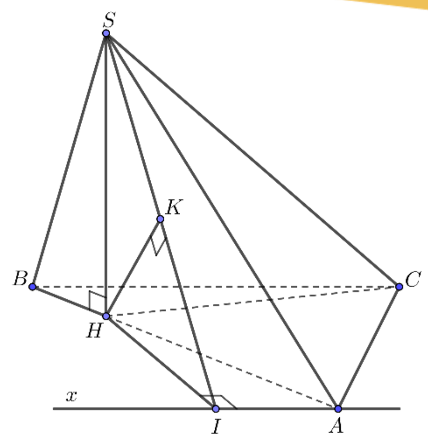
Vậy $d(AD,SB) = d(I,(SBC)) = 2d(O,(SBC)) = 2OH = \dfrac{a\sqrt{42}}{7}$.

Ví dụ 3.2.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa SA và BC theo a.

Lời giải

Áp dụng định lí Cô-sin trong ΔAHC ta có :



$CH^2 = CA^2 + AH^2 - 2.CA.AH.\cos CAH$.

$= a^2 + \frac{4a^2}{9} + 2.a.\frac{2a}{3}.\cos 60^0 = \frac{7a^2}{9} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Ta có HC là hình chiếu vuông góc của SC trên (ABC)

Nên $\left(SC;(ABC)\right) = SCH = 60^0$.

Trong ΔSCH: $SH = CH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{7}}{3}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

Từ A kẻ $Ax // BC \Rightarrow BC // (SAx)$

Khi đó $d(BC,SA) = d(BC,(SAx)) = d(B,(SAx))$.

Dựng $HI \perp Ax$ tại I.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên SI.

Vì $\begin{cases} Ax \perp HI \\ Ax \perp SH \end{cases} \Rightarrow Ax \perp (SHI) \Rightarrow (SAx) \perp (SHI) = SI$.

Mà $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAx)$. Vậy $d(H,(SAx)) = HK$.

Trong ΔAIH: $HI = HA.\cos 60^0 = \frac{2a}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong ΔSIH: $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{9}{21a^2} + \frac{9}{3a^2} = \frac{24a^2}{7} \Rightarrow HK = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{24}}$.

$BH \cap (SAx) = A \Rightarrow \frac{d(B,(SAx))}{d(H,(SAx))} = \frac{BA}{HA} = \frac{3}{2}$.

Vậy $d(BC,SA) = d(B,(SAx)) = \frac{3}{2}d(H,(SAx)) = \frac{3}{2}HK = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

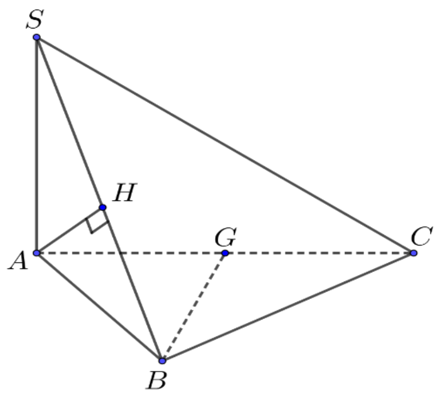
C Luyện tập

Dạng: Tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

Bài 110. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB=2a, SA$ vuông góc với đáy và SB tạo với đáy một góc $60°$. Tính khoảng cách từ:

(1) Điểm S đến mặt phẳng (ABC).
(2) Điểm C đến mặt phẳng (SAB).
(3) Điểm B đến mặt phẳng (SAC).
(4) Điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải



(1) *Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (ABC).*

- Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA = d(S;(ABC))$.
- SB tạo với đáy một góc $60° \Rightarrow \widehat{SBA} = 60°$
- ΔSAB: $SA = AB.\tan\widehat{SBA} = 2a.\tan 60° = 2\sqrt{3}a$.

(2) *Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).*

- Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.
- Suy ra $BC = d(C;(SAB))$.
- ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = 2a \Rightarrow BC = AB = 2a$.

(3) *Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC).*

- Gọi G là trung điểm của AC
- Ta có: $\begin{cases} BG \perp AC \\ BG \perp SA \end{cases} \Rightarrow BG \perp (SAC) \Rightarrow BG$ là khoảng cách từ điểm B đến (SAC).
- ABC là tam giác vuông cân tại $B \Rightarrow BG = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{2} = a\sqrt{2}$.

(4) *Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).*

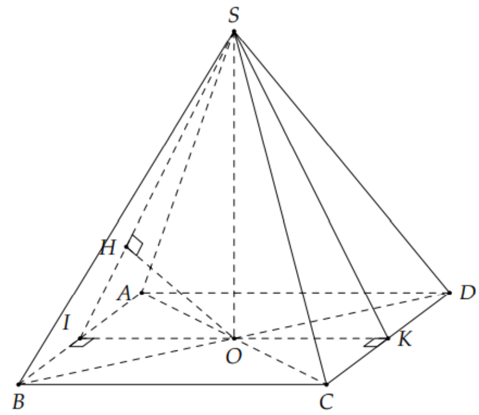
- Gọi H là hình chiếu của A trên SB
- Ta có $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH$ là khoảng cách từ điểm A đến (SBC).
- Tam giác AHB vuông tại H nên $AH = AB.\sin 60° = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Bài 111. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $AB = 2a$, $SA = 4a$.

(1) Tính khoảng cách từ O đến (SAB).
(2) Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

Lời giải

(1) *Khoảng cách từ O đến (SAB).*



Theo đề bài thì $SO \perp (ABCD)$.

Dựng $OI \perp AB$ tại I thì $AB \perp (SIO)$.

$\Rightarrow (SAB) \perp (SIO) = SI$

Dựng $OH \perp SI$ tại $H \Rightarrow OH \perp (SAB)$

$\Rightarrow \mathrm{d}(O,(SAB)) = OH$.

OI là đường trung bình $\Delta BAD \Rightarrow OI = \frac{1}{2}AD = a$.

Trong ΔSAO: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{16a^2 - 2a^2} = a\sqrt{14}$.

Trong ΔSOI: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{14a^2} = \frac{15}{14a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{210}}{15}$.

(2) *Khoảng cách từ A đến (SCD).*

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên khoảng cách từ tâm O đến các mặt bên bằng nhau,

có $\mathrm{d}(O,(SAB)) = \mathrm{d}(O,(SCD)) = OH = \frac{a\sqrt{210}}{15}$.

$AO \cap (SCD) = \{C\}$, nên có $\frac{\mathrm{d}(A,(SCD))}{\mathrm{d}(O,(SCD))} = \frac{AC}{AO} = 2$.

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = 2.\mathrm{d}(O,(SCD)) = \frac{2a\sqrt{210}}{15}$.

Bài 112. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a, SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi SC và mặt phẳng (SAB) bằng $30°$

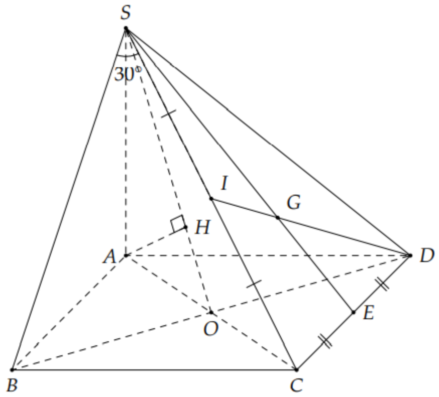
(1) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).

(2) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).

(3) Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC, trọng tâm G của ΔSCD đến (SBD).

(4) Tính khoảng cách từ O, I và G đến mặt phẳng (SAB).

Lời giải



(1) *Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBD).*

Vì $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.

Do đó SB là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (SAB).

$\Rightarrow (SC,(SAB)) = (SC,SB) = CSB = 30°$.

Trong ΔSBC vuông tại B có $SB = BC.\cot 30° = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSAB: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} SA \perp BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$.

Trong (SAC), kẻ $AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SBD)) = AH$.

Trong ΔSAO: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AO^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $d(A,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

(2) *Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD).*

Vì $AC \cap (SBD) = O$ nên $\dfrac{d(C,(SBD))}{d(A,(SBD))} = \dfrac{CO}{AO} = 1$.

Vậy $d(C,(SBD)) = d(A,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{5}$.

(3) *Tính khoảng cách từ trung điểm I của SC, trọng tâm G của ΔSCD đến (SBD).*

Vì $IC \cap (SBD) = S \Rightarrow \dfrac{d(I,(SBD))}{d(C,(SBD))} = \dfrac{IS}{CS} = \dfrac{1}{2}$.

Do đó $d(I,(SBD)) = \dfrac{1}{2} d(C,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.

Vì $IG \cap (SBD) = D \Rightarrow \dfrac{d(G,(SBD))}{d(I,(SBD))} = \dfrac{GD}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

Do đó $d(G,(SBD)) = \dfrac{2}{3} d(I,(SBD)) = \dfrac{a\sqrt{10}}{15}$.

(4) *Tính khoảng cách từ O, I và G đến mặt phẳng (SAB).*

Theo câu (1) ta có $BC\perp(SAB)\Rightarrow d(C,(SAB))=BC=a$.

Vì $IC\cap(SAB)=S\Rightarrow\dfrac{d(I,(SAB))}{d(C,(SAB))}=\dfrac{IS}{CS}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $d(I,(SAB))=\dfrac{1}{2}d(C,(SAB))=\dfrac{a}{2}$.

Vì $OC\cap(SAB)=A\Rightarrow\dfrac{d(O,(SAB))}{d(C,(SAB))}=\dfrac{OA}{CA}=\dfrac{1}{2}$.

Do đó $d(O,(SAB))=\dfrac{1}{2}d(C,(SAB))=\dfrac{a}{2}$.

Vì $CE//AB$ nên $d(C,(SAB))=d(E,(SAB))=a$.

Vì $EG\cap(SAB)=S\Rightarrow\dfrac{d(G,(SAB))}{d(E,(SAB))}=\dfrac{GS}{ES}=\dfrac{2}{3}$.

Do đó $d(G,(SAB))=\dfrac{2}{3}d(E,(SAB))=\dfrac{2a}{3}$.

Bài 113. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông tâm O cạnh $a, SA\perp(ABCD)$, $SA=2a$

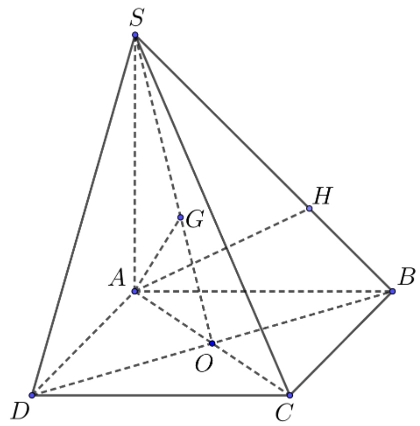
(1) Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC).

(2) Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBD).

(3) Tính theo a khoảng cách từ O đến (SBC).

Lời giải

(1) *Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC).*



- Từ A kẻ $AH\perp SB$ $\quad(1)$
- $\left.\begin{array}{l}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH \qquad (2)$
- Từ (1) và (2): $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH=d(A,(SBC))$.

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}=\frac{5}{4a^2}\Rightarrow AH=\frac{2a\sqrt{5}}{5}\Rightarrow d(A,(SBC))=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

(2) *Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBD).*

- Từ A kẻ $AG\perp SO$ $\quad(3)$
- $\left.\begin{array}{l}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{array}\right\}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp AG \qquad (4)$

- Từ (3) và (4): $AG\perp(SBD)\Rightarrow AG=d(A,(SBD))$.
- $\dfrac{1}{AG^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AO^2}=\dfrac{9}{4a^2}\Rightarrow AH=\dfrac{2a}{3}\Rightarrow d(A,(SBD))=\dfrac{2a}{3}$.

(3) *Tính theo a khoảng cách từ O đến (SBC).*

- Có $AO\cap(SBC)=C\Rightarrow\dfrac{d(O,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\dfrac{OC}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d(O,(SBC))=\dfrac{1}{2}d(A,(SBC))=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

Bài 114. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng đáy và $SO=2a$.

(1) Tính theo a khoảng cách từ O đến (SBC).

(2) Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC).

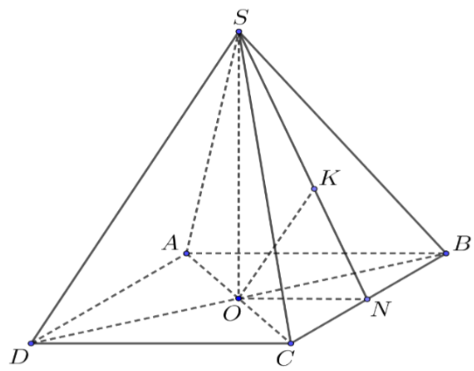
Lời giải

(1) *Tính theo a khoảng cách từ O đến (SBC).*

- Gọi N là trung điểm của BC
- Ta có: $\left.\begin{array}{l}BC\perp ON\\BC\perp SO\end{array}\right\}\Rightarrow BC\perp(SON)$
- Kẻ $OK\perp SN$
- Ta có $OK\perp BC$ vì $\left.\begin{array}{l}BC\perp(SON)\\OK\subset(SON)\end{array}\right\}\to OK\perp(SBC)$

$\Rightarrow d(O,(SBC))=OK$

- $\dfrac{1}{OK^2}=\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{ON^2}\Rightarrow OK=\dfrac{2a}{\sqrt{17}}\to d(O,(SBC))=\dfrac{2a}{\sqrt{17}}$



(2) *Tính theo a khoảng cách từ A đến (SBC).*

- Vì $AC=2OC$ nên $d(A,(SBC))=2d(O,(SBC))\to d(A,(SBC))=\dfrac{4a\sqrt{17}}{17}$

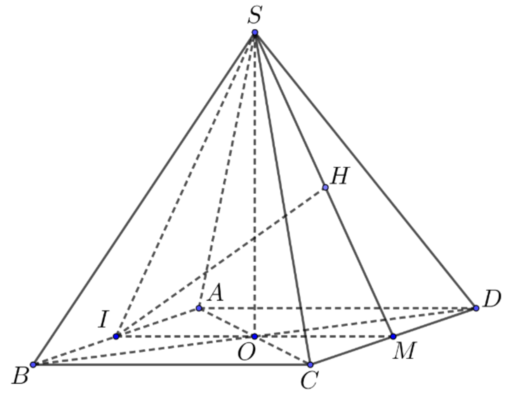
Bài 115. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB=SA=2a$.

(1) Tính khoảng cách từ đường thẳng AB đến (SCD).

(2) Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB).

Lời giải

(1) *Tính khoảng cách từ đường thẳng AB đến (SCD).*



- Gọi I,M là trung điểm $AB;CD$

Thì $\begin{cases} CD\perp IM \\ CD\perp SM \end{cases}\Rightarrow CD\perp (SIM)$

- Vẽ $IH\perp SM$ tại $H\in SM$ thì $IH\perp (SCD)$
- Mà $AB//CD\subset (SCD)\Rightarrow AB//(SCD)$

$\Rightarrow d(AB,(SCD))=d(I,(SCD))=IH=\dfrac{SO.IM}{SM}$

- ΔSAB đều cạnh $2a\Rightarrow SI=a\sqrt{3}\Rightarrow SM=a\sqrt{3}$
- Và $OM=\dfrac{1}{2}IM=a\Rightarrow SO=\sqrt{SM^2-OM^2}=a\sqrt{2}$

Vậy $d(AB,(SCD))=\dfrac{SO.IM}{SM}=\dfrac{a\sqrt{2}.2a}{a\sqrt{3}}=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

(2) *Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAB).*

- Ta có $DC//AB\Rightarrow DC//(SAB)\Rightarrow d(D,(SAB))=d(M,(SAB))$
- Do $S.ABCD$ hình chóp tứ giác đều nên $d(M,(SAB))=d(I,(SCD))=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $d(D,(SAB))=\dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

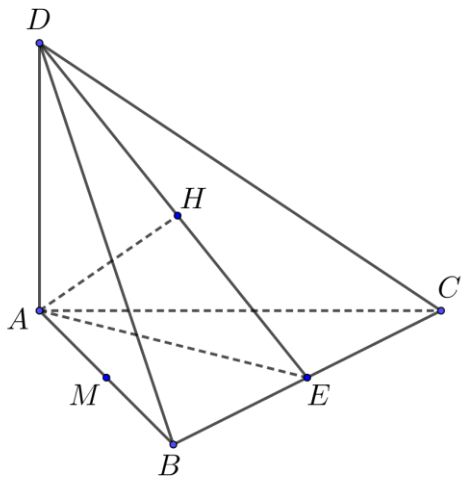
Bài 116. Cho tứ diện $ABCD$ có AD vuông góc với (ABC); $AB=AC=4\text{cm}$; $AD=3\text{cm}$; $BC=5\text{cm}$.

(1) Tính khoảng cách từ A đến (BCD).

(2) Gọi M là trung điểm AB, tính khoảng cách từ M đến (BCD).

Lời giải

(1) *Tính khoảng cách từ A đến mp(BCD).*



- Gọi E là trung điểm của $BC\Rightarrow AE\perp BC$.
- Ta có: $\begin{cases} AE\perp BC \\ AD\perp BC \\ AD,AE\subset (ADE) \end{cases}\Rightarrow BC\perp (ADE)$
- Mà $BC\subset (BCD)\Rightarrow (BCD)\perp (ADE)$
- Lại có: $(BCD)\cap (ADE)=DE$.
- Kẻ $AH\perp DE\Rightarrow AH\perp (BCD)\Rightarrow d(A,(BCD))=AH$.

- $\Delta AEC:\ AE=\sqrt{AC^2-EC^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{39}}{2}$

- $\Delta ADE:\ \frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AE^2}+\frac{1}{AD^2}\Leftrightarrow AH=\frac{AE.AD}{\sqrt{AE^2+AD^2}}=\frac{3\sqrt{13}}{5}$.

Vậy $d\left(A,\left(BCD\right)\right)=AH=\frac{3\sqrt{13}}{5}$.

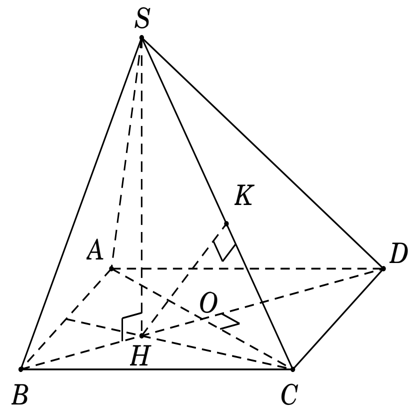
(2) *Tính khoảng cách từ M đến $mp\left(BCD\right)$.*

- Ta có: $AM\cap\left(BCD\right)=\left\{B\right\}\Rightarrow\frac{d\left(A,\left(BCD\right)\right)}{d\left(M,\left(BCD\right)\right)}=\frac{AB}{AM}=2$

$\Rightarrow d\left(M,\left(BCD\right)\right)=\frac{d\left(A,\left(BCD\right)\right)}{2}=\frac{3\sqrt{13}}{10}$.

Bài 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên $\left(ABCD\right)$ trùng với trọng tâm của ΔABC. Đường thẳng SD hợp với $\left(ABCD\right)$ góc 30^0. Tính khoảng cách d từ B đến $\left(SCD\right)$ theo a.

Lời giải



Xác định $30^\circ=\left(SD;\left(ABCD\right)\right)=\left(SD;HD\right)=SDH$ và $SH=HD.\tan SDH=\frac{2a}{3}$.

Ta có $d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\frac{BD}{HD}.d\left(H,\left(SCD\right)\right)=\frac{3}{2}.d\left(H,\left(SCD\right)\right)$.

Ta có $HC\perp AB\Rightarrow HC\perp CD$.

Kẻ $HK\perp SC$. Khi đó $d\left(H,\left(SCD\right)\right)=HK$.

ΔSHC, có $HK=\frac{SH.HC}{\sqrt{SH^2+HC^2}}=\frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\frac{3}{2}HK=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

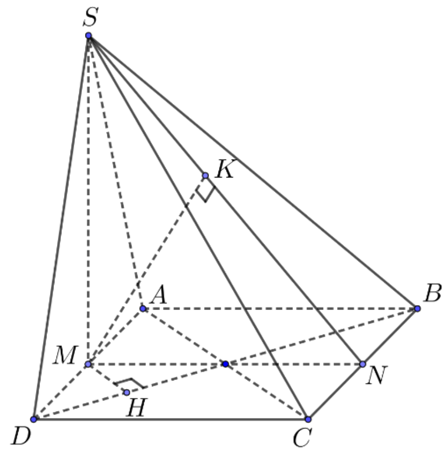
Bài 118. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuôn cạnh a, mặt bên $\left(SAD\right)$ vuông góc với đáy $\left(ABCD\right)$ và SAD là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của AD.

(1) Tính theo a khoảng cách từ S đến $\left(ABCD\right)$.

(2) Tính theo a khoảng cách giữa SM và BD.

(3) Tính theo a khoảng cách từ M đến $\left(SBC\right)$.

Lời giải



(1) *Tính theo a khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.*

- ΔSAD là tam giác đều
- Mà M là trung điểm của AD nên $SM\perp AD$
- $\begin{cases}(SAD)\perp(ABCD)\\(SAD)\cap(ABCD)=AD\\SM\perp AD, SM\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow SM\perp(ABCD)$
- $d\left(S,(ABCD)\right)=SM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

(2) *Tính theo a khoảng cách giữa SM và BD.*

- Kẻ $MH//AC$
- Ta có: $\begin{cases}AC\perp BD\\AC//MH\end{cases}\Rightarrow MH\perp BD$ (1)
- Mà $SM\perp(ABCD)\Rightarrow MH\perp SM(2)$
- Từ $(1),(2)$ suy ra $d(SM,BD)=MH=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

(3) *Tính theo a khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC).*

- Gọi N là trung điểm của BC
- Ta có: $BC\perp MN$
- Mà $BC\perp SM$ vì $SM\perp(ABCD)$
- Nên $BC\perp(SMN)$
- Kẻ $MK\perp SN$
- Ta có $MK\perp BC$ vì $BC\perp(SMN)$ và $MK\subset(SMN)$ nên $MK\perp(SBC)$

$\Rightarrow d\left(M,(SBC)\right)=MK$

- $\dfrac{1}{MK^2}=\dfrac{1}{SM^2}+\dfrac{1}{MN^2}\Rightarrow MK=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}\rightarrow d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

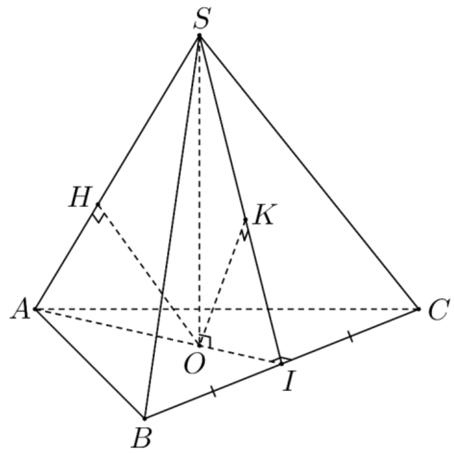
Bài 119. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$, I là trung điểm của BC, O là trọng tâm của ΔABC.

(1) Tính $d\left(S,(ABC)\right), d(O,SA)$.

(2) Chứng minh $(SBC)\perp(SAI)$. Tính $d\left(O,(SBC)\right)$.

Lời giải

(1) *Tính* $d\left(S,\left(ABC\right)\right), d\left(O,SA\right)$.



- Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều $\rightarrow SO\perp\left(ABC\right)$.
- Khi đó $d\left(S,\left(ABC\right)\right)=SO$.
- Vì ΔABC đều nên $AI=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $AO=\dfrac{2}{3}AI=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{42}}{6}$.

- Kẻ $OH\perp SA\rightarrow d\left(O,SA\right)=OH=\dfrac{SO.OA}{\sqrt{SO^2+OA^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{9}$.

(2) *Chứng minh* $\left(SBC\right)\perp\left(SAI\right)$. *Tính* $d\left(O,\left(SBC\right)\right)$.

- Vì ΔABC đều có I là trung điểm BC nên $BC\perp AI$ mà $BC\perp SO$ (do $SO\perp\left(ABC\right)$)

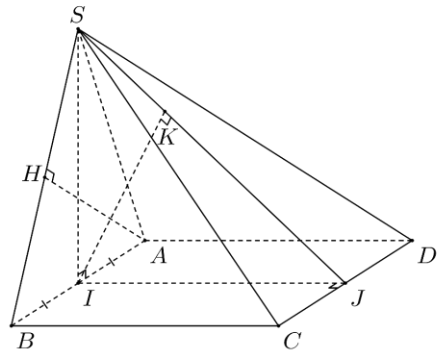
$\Rightarrow BC\perp\left(SAI\right)$. Mà $BC\subset\left(SBC\right)$ nên $\left(SBC\right)\perp\left(SAI\right)$.

- Trong $\left(SOI\right)$, kẻ $OK\perp SI$ $\left(K\in SI\right)$.
- Ta có $\begin{cases}\left(SBC\right)\perp\left(SAI\right)\\ \left(SBC\right)\cap\left(SAI\right)=SI\\ OK\subset\left(SAI\right),OK\perp SI\end{cases}\Rightarrow OK\perp\left(SBC\right)$ tại K.
- Khi đó $d\left(O,\left(SBC\right)\right)=OK=\dfrac{SO.OI}{\sqrt{SO^2+OI^2}}=\dfrac{a\sqrt{70}}{30}$.

Bài 120. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, mặt bên $\left(SAB\right)$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$. Gọi I là trung điểm AB. Tính

(1) $d\left(A,\left(SBC\right)\right)$ (2) $d\left(I,\left(SCD\right)\right)$

Lời giải



❶. $d\left(A,(SBC)\right)$.

- Vì SAB là tam giác đều nên $SI \perp AB$.
- Ta có $\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SI\subset(SAB), SI\perp AB\end{cases}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$.
- Trong (SAB), vẽ $AH\perp SB$ ($H\in SB$).
- Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SI\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.
- Mà $SB\perp AH$ suy ra $AH\perp(SBC)$ tại H.
- Khi đó $d\left(A,(SBC)\right)=AH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

❷. $d\left(I,(SCD)\right)$

- Kẻ $IJ\perp CD$ ($J\in CD$), $IK\perp SJ$ ($K\in SJ$). Suy ra J là trung điểm CD.
- Ta có $\begin{cases}CD\perp IJ\\CD\perp SI\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SIJ)\Rightarrow CD\perp IK$ (do $IK\subset(SIJ)$).
- Mà $SJ\perp IK$ suy ra $IK\perp(SCD)$ tại $K\rightarrow d\left(I,(SCD)\right)=IK$.
- Vì tam giác SAB đều nên $SI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và $IJ=BC=a$.

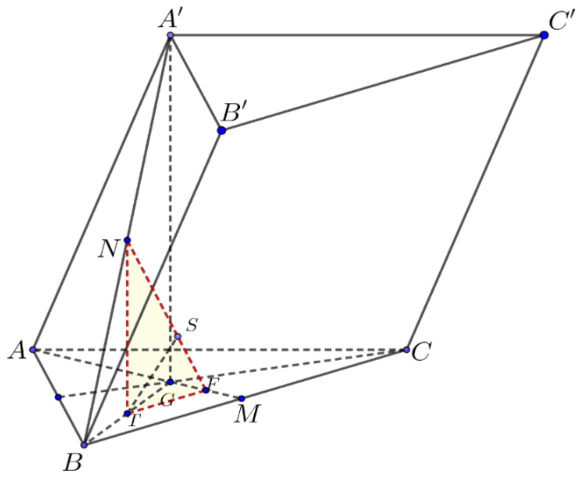
Vậy $d\left(I,(SCD)\right)=IK=\dfrac{IJ.SI}{\sqrt{IJ^2+SI^2}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Bài 121. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, ΔABC đều có cạnh bằng a, $AA'=a$ và đỉnh A' cách đều A,B,C. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và $A'B$. Tính

(1) Khoảng cách từ A' đến (ABC).

(2) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN).

Lời giải



(1) *Khoảng cách từ A' đến (ABC).*

- Ta có: $A'A = A'B = A'C$

Nên G là trọng tâm ΔABC đều

Và G là hình chiếu A' lên ABC.

Nên $d(A';(ABC)) = A'G$.

- Ta có: $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

(2) *Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (AMN).*

- Lấy T là trung điểm BG

$\Rightarrow NT // A'G, NT \perp (ACB)$,

- $TF // BC$ với F là trung điểm GM.
- Kẻ $TS \perp NF$
- Ta có: $TF \perp AM\ (TF // BC)$.

Mà $NT \perp AM\ (NT \perp (ABC))$ nên $AM \perp (NTF)$.

$\Rightarrow \begin{cases} AM \perp TS \\ NF \perp TS \end{cases}$ nên $TS \perp (AMN)$

$\Rightarrow TS = d(T;(AMN)) = \dfrac{1}{2} d(B;(AMN)) = \dfrac{1}{2} d(C;(AMN))$.

- Ta có: $\begin{cases} NT = \dfrac{1}{2} A'G = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \\ TF = \dfrac{1}{2} BM = \dfrac{a}{4} \end{cases}$

Nên $\dfrac{1}{TS^2} = \dfrac{1}{NT^2} + \dfrac{1}{TF^2} \Rightarrow \dfrac{1}{TS^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a^2}{6}\right)} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a^2}{16}\right)} \Rightarrow TF = \dfrac{a\sqrt{22}}{22}$

Nên $d(C;(AMN)) = \dfrac{a\sqrt{22}}{11}$

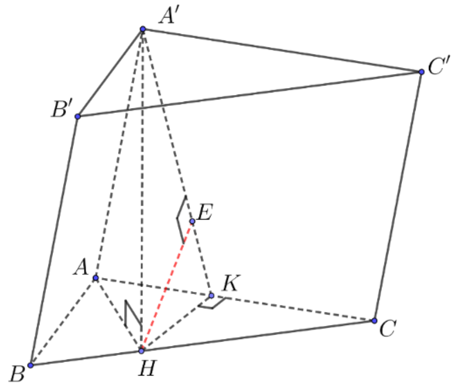
Bài 122. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$,đáy ABC là $AC = a\sqrt{3}$, $ACB = 30^\circ$. Cạnh bên hợp với mặt phẳng đáy một góc 60° và mặt phẳng $(A'BC)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm H trên cạnh BC sao cho $HC = 3HB$ và mặt phẳng $(A'AH)$ vuông góc với mặt phẳng (ABC).

(1) Tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC)

(2) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'AC)$.

Lời giải

(1) *Tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC)*



- Ta có: $(A'AH)\cap(A'BC)=A'H$.
- Có $\begin{cases}(A'AH)\perp(ABC)\\(A'BC)\perp(ABC)\end{cases}$ nên $A'H\perp(ABC)$.
- ΔAHC có: $AH^2=AC^2+HC^2-2.AC.HC.\cos 30^\circ$

Suy ra $AH^2=3a^2+a^2-2a\sqrt{3}.a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=a^2\Rightarrow AH=a$.

- $\Delta A'AH$: $A'H=AH.\tan 60^\circ=a\sqrt{3}$.

Nên $d(A';(ABC))=A'H=a\sqrt{3}$.

(2) *Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'AC)$.*

- Từ H kẻ $HK\perp AC$ trong (ABC).
- Kẻ đường cao HE của tam giác $A'HK$.
- Ta có: $HK\perp AC$, $A'H\perp AC$ nên $AC\perp(A'HK)$.

Suy ra $AC\perp HE$, mà $A'K\perp HE$

Nên $HE\perp(A'AC)\Rightarrow d(H;(A'AC))=HE$.

- Ta có: $HK=HC.\sin 30^\circ=a.\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}a$.

Suy ra: $\dfrac{1}{HE^2}=\dfrac{1}{HK^2}+\dfrac{1}{A'H^2}=\dfrac{1}{\frac{1}{4}a^2}+\dfrac{1}{3a^3}=\dfrac{13}{3a^2}\Rightarrow HE=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

Với $BC\cap(A'AC)=C\Rightarrow\dfrac{d(B;(A'AC))}{d(H;(A'AC))}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow d(B;(A'AC))=\dfrac{4a\sqrt{39}}{9}$.

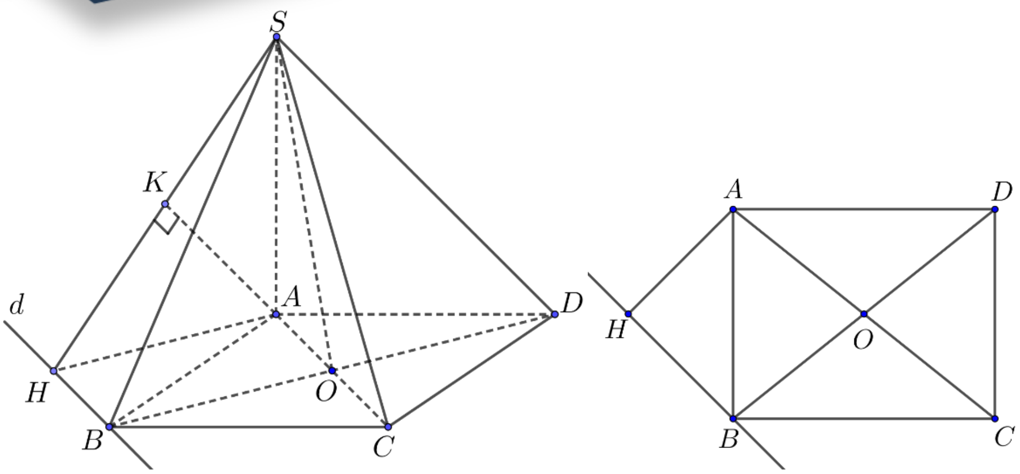
Dạng: Tính khoảng cách 2 đường chéo nhau

Bài 123. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SA\perp(ABCD)$, góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Tính

(1) $d(AC,SB)$.

(2) Sin của góc giữa SB và mặt phẳng (SAC).

Lời giải



(1) $d\left(AC,SB\right)$.

- Hình chiếu của SB lên $\left(ABCD\right)$ là AB

$\Rightarrow \left(SB,\left(ABCD\right)\right)=\left(SB,AB\right)=SBA=60^0$

$\Rightarrow SA=AB.\tan 60^0=2a\sqrt{3}$

- Trong $\left(ABCD\right)$, qua B kẻ d song song với AC
- Kẻ $AH\perp d$
- Ta có $d\perp SA$ vì $SA\perp\left(ABCD\right)$ và $d\subset\left(ABCD\right)$
- Nên $d\perp\left(SAH\right)$
- Kẻ $AK\perp SH$.
- Ta có: $AK\perp d$ vì $d\perp\left(SAH\right)$ và $AK\subset\left(SAH\right)$

Nên $AK\perp\left(SBH\right)$

- Ta lại có d//AC nên $AC//\left(SBH\right)$

$\rightarrow d\left(AC,SB\right)=d\left(AC,\left(SBH\right)\right)=d\left(A,\left(SBH\right)\right)=AK$

- Mà $AH=\dfrac{1}{2}BD=a\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}\Rightarrow AK=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}=d\left(AC,SB\right)$

(2) *Sin của góc giữa SB và mặt phẳng* $\left(SAC\right)$.

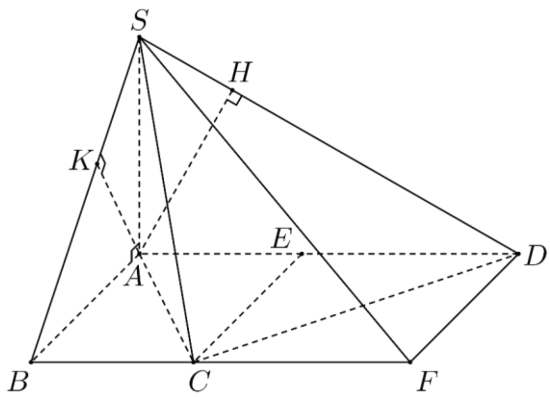
- Ta có $\begin{cases}BO\perp AC\\BO\perp SA\end{cases}\Rightarrow BO\perp\left(SAC\right)$
- Hình chiếu của SB lên $\left(SAC\right)$ là $SO\Rightarrow\left(SB,\left(SAC\right)\right)=\left(SB,SO\right)=BSO$
- Ta có: $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=4a$

$\Rightarrow \sin\left(SB,\left(SAC\right)\right)=\sin BSO=\dfrac{OB}{SB}=\dfrac{a\sqrt{2}}{4a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Bài 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B, $AD=2a$, $BC=AB=a$, $SA=2a$ và $SA\perp(ABCD)$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau:

(1) $d(SA;BC)$.
(2) $d(SA;CD)$.
(3) $d(SD;BC)$.
(4) $d(SD;AB)$.
(5) $d(SB;AD)$.

Lời giải



(1) SA và BC,

- Ta có $\begin{cases} AB\perp SA \\ AB\perp BC \end{cases} \Rightarrow d(SA,BC)=AB=a.$

(2) SA và CD,

- Kẻ $CE\perp AD$.

Khi đó $ABCE$ là hình vuông và $AC\perp CD$.

- Mà $AC\perp SA$ nên $d(SA,CD)=AC=a\sqrt{2}$.

(3) SD và BC,

- Vì $BC\,//\,AD$ nên suy ra $BC\,//\,(SAD)$.
- Khi đó $d(SD,BC)=d(BC,(SAD))=d(B,(SAD))$.
- Ta có $\begin{cases} AB\perp AD \\ AB\perp SA \end{cases} \Rightarrow AB\perp(SAD)\to d(B,(SAD))=AB=a\to d(SD,BC)=a.$

(4) SD và AB.

- Lấy điểm F sao cho $DABF$ là hình bình hành $\to AB\,//\,DF\Rightarrow AB\,//\,(SDF)$.
- Khi đó $d(SD,AB)=d(AB,(SDF))=d(A,(SDF))$.
- Trong (SAD), kẻ $AH\perp SD$ $(H\in SD)$.
- Ta có $\begin{cases} DF\perp AD\ (AD\,//\,AB) \\ DF\perp SA \end{cases} \Rightarrow DF\perp(SAD)\Rightarrow DF\perp AH$ (do $AH\subset(SAD)$).
- Mà $SD\perp AH$ suy ra $AH\perp(SDF)$ tại H.
- Khi đó $d(A,(SDF))=AH=\dfrac{SA.AD}{\sqrt{SA^2+AD^2}}=\dfrac{2a.2a}{\sqrt{(2a)^2+(2a)^2}}=a\sqrt{2}\to d(SD,AB)=a\sqrt{2}$.

(5) SB và AD.

- Ta có $AD\,//\,BC$ nên suy ra $AD\,//\,(SBC)$.
- Khi đó $d(SB,AD)=d(AD,(SBC))=d(A,(SBC))$.

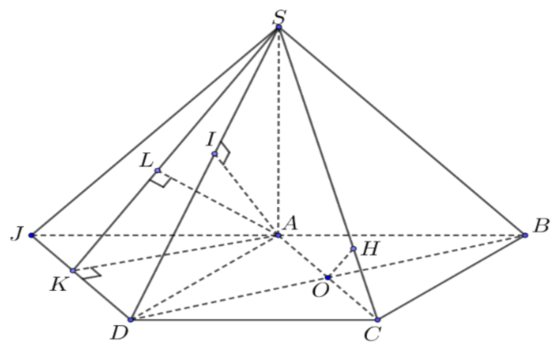
- Trong (SAB), kẻ $AK \perp SB$ ($K \in SB$).
- Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$ (do $AK \subset (SAB)$).
- Mà $SB \perp AK$ suy ra $AK \perp (SBC)$ tại K.
- Khi đó $d(A,(SBC)) = AK = \dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \dfrac{2a.a}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5} \rightarrow d(SB, AD) = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Bài 125. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh $2a, SA \perp (ABCD)$, SB tạo với đáy một góc 45^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng :

(1) SA và BC (2) AB và SD

(3) BD và SC (4) AC và SD

Lời giải



(1) *SA và BC*

- $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow d(SA, BC) = AB = 2a$

(2) *AB và SD*

Ta có $AB // (SCD)$

$\Rightarrow d(AB, SD) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD))$

- Từ A hạ $AI \perp SD$

$\Rightarrow AI \perp (SCD) \Rightarrow d(A, (SCD)) = AI$

- Có SB tạo với đáy một góc $45^0 \Rightarrow SBA = 45^0$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow SA = AB = 2a$

- Có ΔSAD vuông cân tại $A \Rightarrow AI = \dfrac{1}{2} SD = a\sqrt{2}$.

(3) *BD và SC*

- Gọi O là giao của AC và BD.
- Từ O hạ $OH \perp SC \Rightarrow \begin{cases} OH \perp BD \\ OH \perp SC \end{cases} \Rightarrow d(BD; SC) = OH$
- Có $\Delta OHC \sim \Delta SAC \Rightarrow \dfrac{OH}{SA} = \dfrac{OC}{SC}$.
- Có $OC = \dfrac{1}{2} AC = a\sqrt{2}, SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a\sqrt{3} \Rightarrow \dfrac{OC}{SC} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

$\Rightarrow \dfrac{OH}{SA} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow OH = \dfrac{\sqrt{6}}{6}.2a = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(BD, SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

(4) *AC và SD*

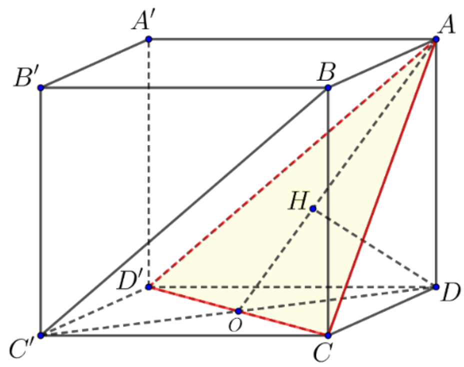
- Dựng hình bình hành $ACDJ$

$\Rightarrow AC//DJ \Rightarrow AC//(SDJ) \Rightarrow d(AC,SD)=d(AC,(SDJ))=d(A,(SDJ))$

- Từ A hạ $AK\perp DJ$, Từ A hạ $AL\perp SK \Rightarrow AL\perp(SDJ)\Rightarrow d(A,(SDJ))=AL$
- Có $\dfrac{1}{AL^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AJ^2}+\dfrac{1}{AD^2}=\dfrac{3}{4a^2}\Rightarrow AL=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow d(AC,SD)=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 126. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường chéo nhau BC' và CD'.

Lời giải



- Dựng (ACD') qua CD' và song song với BC'.
- Khi đó, $d(BC';CD')=d(BC';(ACD'))=d(C';(ACD'))$.
- Trong $(CDD'C')$, gọi $\{O\}=CD'\cap DC'$.

$\dfrac{d(C';(ACD'))}{d(D;(ACD'))}=\dfrac{C'O}{DO}=1$

$\Rightarrow d(C';(ACD'))=d(D;(ACD'))\ (1)$

- Dựng $DH\perp AO\ (H\in AO)$.
- Ta có $\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}CD'\perp DO\\CD'\perp AD\end{array}\right.\Rightarrow CD'\perp(AOD)\\ \qquad\qquad\qquad DH\subset(AOD)\end{array}\right\}\Rightarrow CD'\perp DH$
- Ta có $\left\{\begin{array}{l}DH\perp AO\\DH\perp CD'\end{array}\right.\Rightarrow DH\perp(ACD')\rightarrow d(D;(ACD'))=DH\ (2)$
- Xét ΔAOD: $\dfrac{1}{DH^2}=\dfrac{1}{DO^2}+\dfrac{1}{DA^2}\Rightarrow DH=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\ (3)$

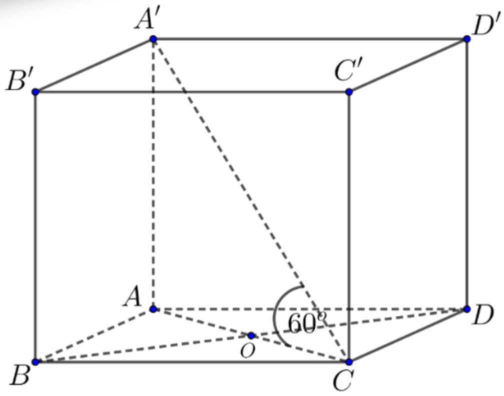
Từ $(1),(2),(3)\Rightarrow d(BC';CD')=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

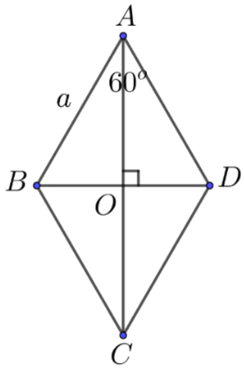
Bài 127. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $A=60^\circ$. Góc giữa $A'C$ và đáy bằng 60°.

(1) Tính độ dài đường cao của hình hộp.

(2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và BB'.

Lời giải





(1) *Tính độ dài đường cao của hình hộp.*

- Gọi $\{O\} = AC \cap BD$.
- ΔABD cân tại A có $A = 60^\circ$ nên ΔABD đều.
- Ta có AO là trung tuyến $\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$.

- Xét $\Delta AA'C$: $AA' = AC \cdot \tan 60^\circ = 3a$.

Vậy đường cao hình hộp là $3a$.

(2) *Tính khoảng cách giữa $A'C$ và BB'.*

- Ta có $\begin{cases} BB' // AA' \\ BB' \not\subset (AA'C) \end{cases} \Rightarrow BB' // (AA'C)$.

$d(BB', A'C) = d(BB', (AA'C)) = d(B, (AA'C))$.

- Ta có $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BO \perp (AA'C)$.
- Vậy $d(B, (AA'C)) = BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a}{2} \rightarrow d(BB', A'C) = \dfrac{a}{2}$

Bài 128. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = BC = a$, $AC = a\sqrt{2}$.

(1) Chứng minh $BC \perp AB'$.

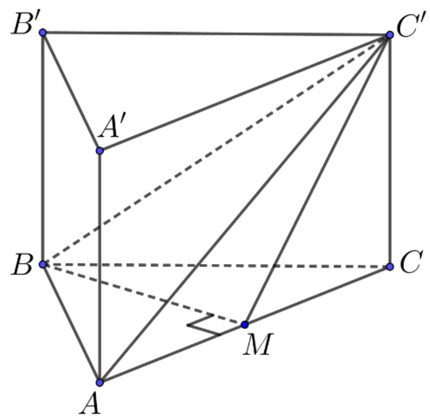
(2) Gọi M là trung điểm AC. Chứng minh $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

(3) Tính khoảng cách giữa BB' và AC'.

Lời giải

(1) *Chứng minh* $BC \perp AB'$.

- Có $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nên ΔABC vuông cân tại B.
- Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp BB' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABB'A')$.
- Mà $AB' \subset (ABB'A') \Rightarrow BC \perp AB'$.



(2) *Chứng minh* $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

- Ta có $\begin{cases} BM \perp AC \\ BM \perp CC' \end{cases} \Rightarrow BM \perp (ACC'A')$.
- Mà $BM \subset (BC'M) \Rightarrow (BC'M) \perp (ACC'A')$.

(3) *Tính khoảng cách giữa* BB' *và* AC'.

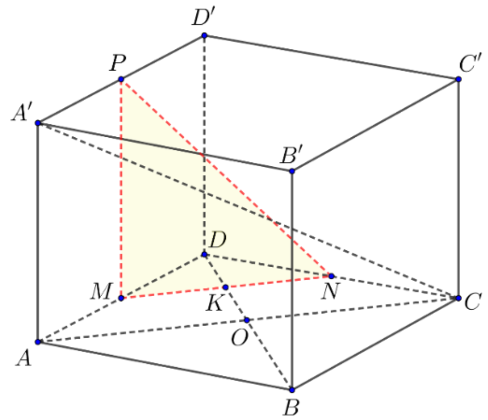
$BB' // AA' \Rightarrow BB' // (ACC'A') \Rightarrow d(BB', AC') = d(BB', (ACC'A')) = d(B, (ACC'A')) = BM$.

- Ta có $BM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \to d(BB', AC') = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 129. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm cạnh $AD, DC, A'D'$. Tính khoảng cách giữa (MNP) và (ACC').

Lời giải

- Ta có: $MN // AC \Rightarrow MN // (A'AC)$
- Mặt khác: do $PM // AA' \Rightarrow PM // (A'AC)$.
- Từ đó, $(A'AC) // (PMN)$.
- Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$, $K = OD \cap MN$
- Ta có: $\begin{cases} KO \perp AC \\ KO \perp A'A \end{cases} \to KO \perp (AA'C)$



$\Rightarrow d((PMN);(A'AC)) = d(K;(A'AC)) = KO$

- Do M, N là trung điểm nên $KO = \dfrac{1}{2}OD = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $d((PMN);(A'AC)) = d(K;(A'AC)) = KO = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Dạng: Tính khoảng cách liên quan nhỏ nhất

Bài 130. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC, AD vuông góc với nhau đôi một và $AD = 2AC = 3AB = a$. Gọi Δ là đường thẳng chứa trong mặt (BCD) sao cho có khoảng cách từ điểm A đến Δ là nhỏ nhất bằng

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (BCD).

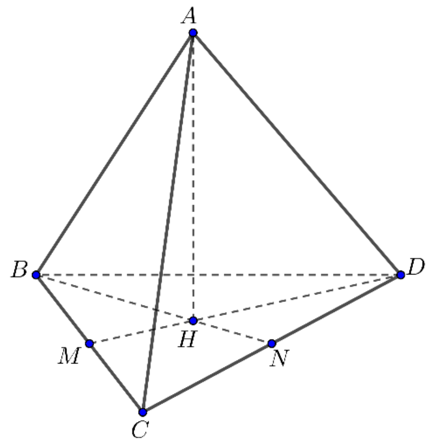
Khi đó ta có H là trực tâm của ΔBCD

Với mọi đường thẳng Δ nằm trong (BCD) thì $d(A;\Delta) \geq AH$.

Do đó đường thẳng Δ thỏa mãn phải đi qua điểm H.

Do đó $\min\{d(A;\Delta)\} = AH$.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{14}{a^2}$



$\Rightarrow AH = \dfrac{a}{\sqrt{14}}$.

Bài 131. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng phẳng (SAD). Khoảng cách ngắn nhất giữa hai đường thẳng SA và Δ bằng

Lời giải

Ta có $\Delta \subset (SAD), (SAD) // BC$,

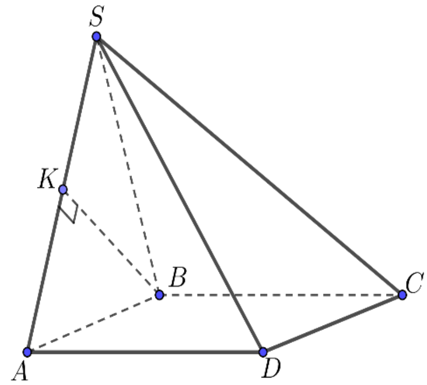
Nên $d(\Delta, BC) = d((SAD), BC) = d(SA, BC)$.

Ta có $\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \Rightarrow BC \perp (SAB) \quad (1) \\ BC \perp AB \end{cases}$

Trong mặt phẳng (SAB), dựng $BK \perp SA$ tại K (2)

Từ $(1),(2) \rightarrow BK$ là đoạn vuông góc chung SA và BC

Vậy $d(SA, BC) = BK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$



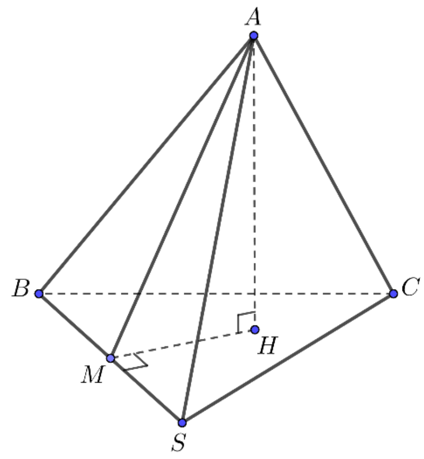
Bài 132. Cho tứ diện $S.ABC$ trong đó $SA = SB = SC = a$, các góc $\measuredangle BSC = \measuredangle BSA = 60^0$. Tìm giá trị lớn nhất khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC)?

Lời giải

Ta chú ý rằng: $AB = BC = a$ và độ dài cạnh AC thay đổi.
Giả sử $AH \perp (SBC)$ tại H. Ta gọi M là trung điểm SB.

Vì ΔSAB là tam giác đều
Nên gọi M là trung điểm của SB thì $AM \perp SB$.
Do vậy khi AC thay đổi thì AH nằm trong mặt phẳng trung trực của cạnh SB.
Do vậy $AH \le AM$

$\Rightarrow AH_{\max} = AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ khi $(SAB) \perp (SBC)$.



--------------------Hết--------------------

Hình học & Đo lường

Bài 05

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

ÔN TẬP CHƯƠNG

Bài 133. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$.

(1) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

(2) Chứng minh rằng $(SAC)\perp(SBD)$.

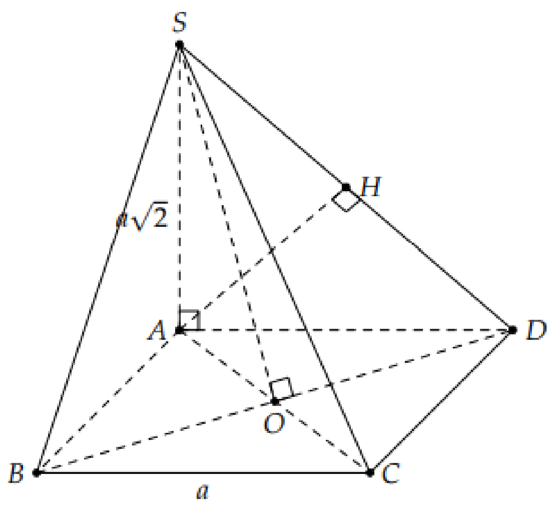
(3) Tính góc giữa SC và (SAB).

(4) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.

(5) Tính $d\left(A,(SCD)\right)$.

Lời giải

(1) *Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.*



▶ Chứng minh ΔSAB vuông

Ta có $SA\perp(ABCD)\Rightarrow SA\perp AD$, $SA\perp AB$

$\Rightarrow \Delta SAD$ và ΔSAB vuông tại A.

▶ Chứng minh ΔSBC vuông

Ta có $BC\perp AB$ (hai cạnh kề của hình vuông),

$BC\perp SA$ (vì $SA\perp(ABCD)$)

$\Rightarrow BC\perp(SAB)$, mà $SB\subset(SAB)$ nên $BC\perp SB$

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.

▶ Chứng minh ΔSCD vuông.

Ta có $CD\perp AD$ (hai cạnh kề của hình vuông),

$CD\perp SA$ (vì $SA\perp(ABCD)$)

$\Rightarrow CD\perp(SAD)$, mà $SD\subset(SAD)$ nên $CD\perp SD$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại D.

(2) *Chứng minh rằng* $(SAC)\perp(SBD)$.

$BD\perp AC$ (Hai đường chéo của hình vuông);

$BD\perp SA$ (Vì $SA\perp(ABCD)$)

$\Rightarrow BD\perp(SAC)$, mà $BD\subset(SBD)\Rightarrow(SAC)\perp(SBD)$

(3) *Tính góc giữa SC và (SAB).*

Do $BC \perp (SAB)$ tại B nên hình chiếu của C lên (SAB) là B

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (SAB) là $SB \Rightarrow (SC,(SAB)) = (SC,SB) = CSB$

Trong ΔSAB vuông tại A, ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Trong ΔSBC vuông tại B, ta có $\tan CSB = \dfrac{BC}{SB} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow CSB = 30^\circ$

Vậy $(SC,(SAB)) = 30^\circ$.

(4) *Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.*

Ta có $(SBD) \cap (ABCD) = BD$.

Gọi O là tâm cúa hình vuông $(ABCD), O \in BD$

Theo chứng minh ở câu 2. có $BD \perp (SAC)$, mà $SO \subset (SAC) \Rightarrow SO \perp BD$.

Mặt khác, $AO \perp BD$.

Vậy $((SBD),(ABCD)) = (SO, AO) = AOS$ (do AOS là góc nhọn).

$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Trong ΔSAO vuông tại A, ta có $\tan AOS = \dfrac{SA}{AO} = \dfrac{a\sqrt{2}}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = 2 \Rightarrow AOS = \arctan 2$

$\Rightarrow ((SBD),(ABCD)) = AOS = \arctan 2$

(5) *Tính* $\mathrm{d}(A,(SCD))$.

Gọi H là hình chiếu của A lên SD. Ta có $AH \perp SD$

$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH \perp (SCD)$ tại $H \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.

Xét ΔSAD vuông tại A có AH là đường cao.

Ta có $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AD^2} = \dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $\mathrm{d}(A,(SCD)) = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

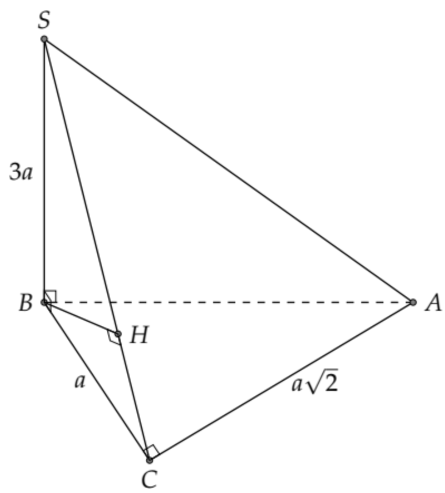
Bài 134. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại C và $SB \perp (ABC)$, biết $AC = a\sqrt{2}, BC = a, SB = 3a$

(1) Chứng minh $AC \perp (SBC)$.

(2) Gọi BH là đường cao của ΔSBC. Chứng minh $SA \perp BH$.

(3) Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).

Lời giải



(1) *Chứng minh $AC \perp (SBC)$.*

Ta có $\begin{cases} AC \perp BC \ (gt) \\ AC \perp SB \ (\text{vì } SB \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABC)$

(2) *Gọi BH là đường cao của ΔSBC. Chứng minh $SA \perp BH$.*

Ta có $BH \perp SC$ (gt)

Theo chứng minh trên, $AC \perp (ABC)$. Mà

$BH \subset (SBC) \Rightarrow BH \perp AC$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH \perp (SAC)$

Mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow BH \perp SA$

(3) *Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC).*

Do $SB \perp (ABC)$ tại B nên hình chiếu của S lên (ABC) là B.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABC) là BA.

$\Rightarrow (SA,(ABC)) = (SA, BA) = SAB$

Trong ΔABC: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$

Trong ΔSBA vuông tai B, ta có $\tan SAB = \dfrac{SB}{AB} = \dfrac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

$\Rightarrow SBA = 60°$. Vậy $(SA,(ABC)) = SBA = 60°$

Bài 135. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O cạnh $AB = 2BC = 2a$, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Góc giữa SO và mặt phẳng đáy bằng $45°$. M là trung điểm AB, H là hình chiếu vuông góc của A trên SB

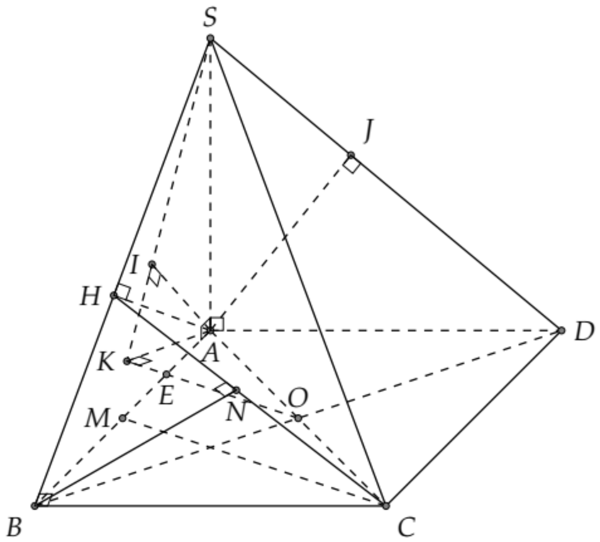
(1) Chứng minh ΔACH vuông.

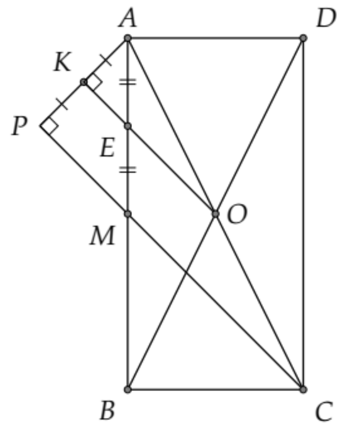
(2) Tính $\mathrm{d}(H,(SCD))$.

(3) Tính $\mathrm{d}(M,(ACH))$.

(4) Tính $\mathrm{d}(SO, MC)$.

Lời giải





Ta có $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=a\sqrt{5}\Rightarrow AO=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

AO là hình chiếu vuông góc của SO trên $(ABCD)$

Góc giữa SO và $(ABCD)$ là góc $SOA=45°\Rightarrow SA=AO.\tan 45°=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

(**1**) *Chứng minh ΔACH vuông.*

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH, BC\perp SB$.

Ta có $\begin{cases}AH\perp SB\\AH\perp BC\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp CH\left(CH\subset(SBC)\right)$.

Vậy tam giác ΔACH vuông tại H.

(**2**) *Tính* $\mathrm{d}\left(H,(SCD)\right)$.

Vì $\begin{cases}CD\perp AD\\CD\perp SA\end{cases}$ nên $CD\perp(SAD)\Rightarrow(SCD)\perp(SAD)\ \left(CD\subset(SCD)\right)$.

Dựng $AJ\perp SD\,(J\in SD)\Rightarrow AJ\perp(SCD)$.

Vậy khoảng cách từ A đến (SCD) là AJ.

Trong ΔSAD: $AJ.SD=AS.AD\Rightarrow AJ=\dfrac{AS.AD}{SD}=\dfrac{AS.AD}{\sqrt{AD^2+AS^2}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{5}}{2}\cdot a}{\sqrt{\frac{5a^2}{4}+a^2}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Vì $AB//CD\Rightarrow d\left(B,(SCD)\right)=d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Trong ΔSAB: $SH.SB = SA^2 \Rightarrow \dfrac{SH.SB}{SB^2} = \dfrac{SA^2}{SB^2} \Rightarrow \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \dfrac{\frac{5a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4} + 4a^2} = \dfrac{5}{21}$.

$\Rightarrow SH = \dfrac{5}{21}SB = \dfrac{5}{21}.\dfrac{a\sqrt{21}}{2} = \dfrac{5a\sqrt{21}}{42}$, $BH = SB - SH = \dfrac{81\sqrt{21}}{21}$.

$BH \cap (SCD) = \{S\}$ nên ta có:

$$\dfrac{d(H,(SCD))}{d(B,(SCD))} = \dfrac{SH}{SB} = \dfrac{5}{21} \Rightarrow d(H,(SCD)) = \dfrac{5}{21}d(B,(SCD)) = \dfrac{5}{21}.\dfrac{a\sqrt{5}}{3} = \dfrac{5a\sqrt{5}}{63}.$$

Vậy $d(H,(SCD)) = \dfrac{5a\sqrt{5}}{63}$.

(3) *Tính* $\mathrm{d}(M,(ACH))$.

Vì $AH \perp (SCD) \Rightarrow (ACH) \perp (SBC)$. Dựng $BN \perp CH\,(N \in CH)$ thì $BN \perp (ACH)$.

Vậy $d(B,(ACH)) = BN$.

Trong ΔHBC: $\dfrac{1}{BN^2} = \dfrac{1}{BH^2} + \dfrac{1}{BC^2} = \dfrac{21}{64a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{85}{64a^2} \Rightarrow BN = \dfrac{8a}{\sqrt{85}}$.

$BM \cap (ACH) = \{A\}$ nên ta có:

$$\dfrac{d(M,(ACH))}{d(B,(ACH))} = \dfrac{MA}{BA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(M,(ACH)) = \dfrac{1}{2}d(B,(ACH)) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{8a}{\sqrt{85}} = \dfrac{4a}{\sqrt{85}}.$$

Vậy $d(M,(ACH)) = \dfrac{4a}{\sqrt{85}}$.

(4) *Tính* $\mathrm{d}(SO, MC)$.

Qua O dựng đường thẳng song song với CM cắt đoạn AB tại E.
Dựng AK vuông góc OE tại K.
Ta có $OE \perp AK, OE \perp SA \Rightarrow OE \perp (SAK) \Rightarrow (SOE) \perp (SAK)$ theo giao tuyến SK.

Dựng $AI \perp SK$ tại K. $\Rightarrow AI \perp (SOE)$

Vậy khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SOE) là AI.

Gọi $P = CM \cap AK$. Vì $BM = BC = a$ nên ΔCBM vuông cân tại B.
ΔAPM vuông cân tại P và ΔAKE vuông cân tại E.

Trong ΔAKE: $AK = KE = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$.

Trong ΔSAK vuông tại A có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AK^2} + \dfrac{1}{AS^2} = \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{4}{5a^2} = \dfrac{44}{5a^2} \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{55}}{22}$.

Vì $MC // OE \Rightarrow d(MC, OE) = d(MC,(SOE)) = d(M,(SOE))$.

$AM \cap (SOE) = \{E\}$ nên ta có:

$$\frac{d(M,(SOE))}{d(A,(SOE))} = \frac{ME}{AE} = 1 \Rightarrow d(M,(SOE)) = d(A,(SOE)) = \frac{a\sqrt{55}}{22}.$$

Vậy $d(MC,OE) = \frac{a\sqrt{55}}{22}$.

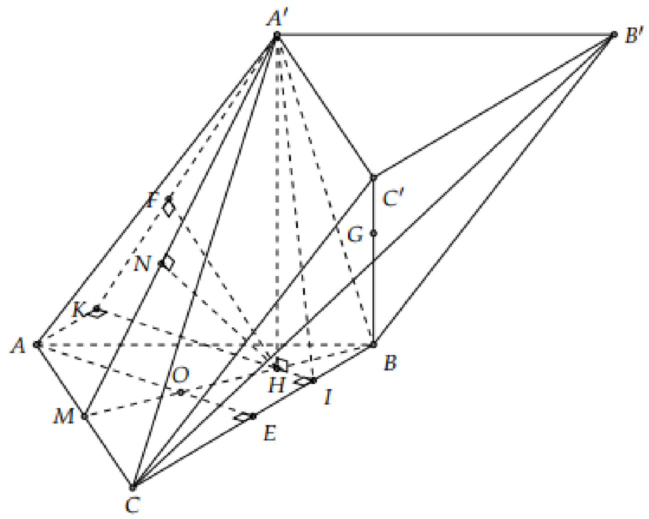
Bài 136. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O cạnh a. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm H của OB. Biết góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) bằng $60°$.

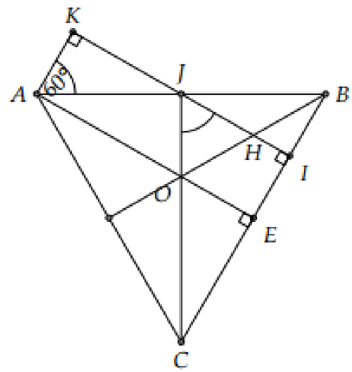
(1) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.

(2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.

(3) Tính khoảng cách từ G đến $(AA'C)$, với G là trọng tâm của $\Delta B'C'C$.

Lời giải





(1) *Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC.*

Gọi E, M, I lần lượt là trung điểm của CB, AC, EB.

Vì ΔABC đều có $AE \perp BC, BM \perp AC$.

HI là đường trung bình của ΔBOE nên $HI // OE$

$\Rightarrow HI \perp BC$ và $HI = \frac{1}{2}OE = \frac{1}{6}AE = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Ta có $\begin{cases} BC \perp HI \\ BC \perp HA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (HIA') \Rightarrow BC \perp IA'$.

Từ đó suy ra $((A'BC),(ABC)) = HIA' = 60°$.

Trong $\Delta HIA'$ có: $HA' = HI \tan 60° = \frac{a}{4}$.

Trong (ABC), kẻ $Ax//BC$. Khi đó $(AA',BC)=(AA',Ax)$.

Dựng $HK\perp Ax,(K\in Ax)\Rightarrow HK//AE$.

Ta có $\begin{cases}Ax\perp HK\\ Ax\perp HA'\end{cases}\Rightarrow Ax\perp(HKA')\Rightarrow Ax\perp A'K$.

Tam giác OHJ đều $JH=OJ=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $AKIE$ là hình chữ nhật có $HK=EI=\dfrac{a}{4}$.

$KI=AE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow HK=KI-HI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}-\dfrac{a\sqrt{3}}{12}=\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}$.

Trong $\Delta HKA'$: $KA'=\sqrt{HA'^2+HK^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a}{4}\right)^2+\left(\dfrac{5a\sqrt{3}}{12}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{61}}{6}$.

Trong $\Delta AKA'$: $\tan A'AK=\dfrac{A'K}{AK}=\dfrac{a\sqrt{21}}{3}\Rightarrow A'AK=\arctan\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

Kết luận $(A'A,BC)=A'AK=\arctan\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

(2) *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC.*

Vì $Ax//BC\Rightarrow d(BC,AA')=d(BC,(A'Ax))=d(I,(A'Ax))$, vì $(I\in BC)$.

Vì $Ax\perp(HKA')\Rightarrow(A'Ax)\perp(HKA')$ theo giao tuyến $A'K$.

Dựng $HK\perp A'K,(F\in A'K)\Rightarrow HF\perp(A'Ax)\Rightarrow d(H,(A'Ax))=HF$.

Trong $\Delta A'HK$ có $HF.KA'=HA'.HK\Rightarrow HF.\dfrac{a\sqrt{21}}{6}=\dfrac{a}{4}.\dfrac{5a\sqrt{13}}{12}\Rightarrow HF=\dfrac{5a\sqrt{7}}{56}$.

$HI\cap(A'Ax)=\{K\}$ nên ta có:

$$\frac{d(I,(A'Ax))}{d(H,(A'Ax))}=\frac{IK}{HK}=\frac{5}{6}\Rightarrow d(I,(A'Ax))=\frac{5}{6}d(H,(A'Ax))=\frac{3a\sqrt{7}}{27}.$$

Vậy $d(BC,A'A)=\dfrac{3a\sqrt{7}}{27}$.

(3) *Tính khoảng cách từ G đến $(AA'C)$, với G là trọng tâm của $\Delta B'C'C$.*

Ta có $\begin{cases}AC\perp HM\\ AC\perp HA'\end{cases}\Rightarrow AC\perp(HMA')\Rightarrow(ACC'A')\perp(HMA')$ theo giao tuyến $A'M$.

Dựng $HN\perp A'M(N\in A'M)\Rightarrow HN\perp(ACC'A')\Rightarrow d(H,(ACC'A'))=HN$.

Trong $\Delta HMA'$, có $\dfrac{1}{HN^2}=\dfrac{1}{HM^2}+\dfrac{1}{HA'^2}=\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{16}{a^2}=\dfrac{19}{a^2}\Rightarrow HN=\dfrac{a}{\sqrt{19}}$.

$HB\cap(ACC'A')=\{M\}$ nên ta có:

$$\frac{d(B,(ACC'A'))}{d(H,(ACC'A'))}=\frac{BM}{HM}=\frac{3}{2}\Rightarrow d(B,(ACC'A'))=\frac{3}{2}d(H,(ACC'A'))=\frac{3a}{2\sqrt{19}}$$

$BG\cap(ACC'A')=\{C'\}$ nên ta có:

$$\frac{d(G,(ACC'A'))}{d(B,(ACC'A'))}=\frac{GC'}{BC'}=\frac{1}{3}\Rightarrow d(G,(ACC'A'))=\frac{1}{3}d(B,(ACC'A'))=\frac{a}{2\sqrt{19}}.$$

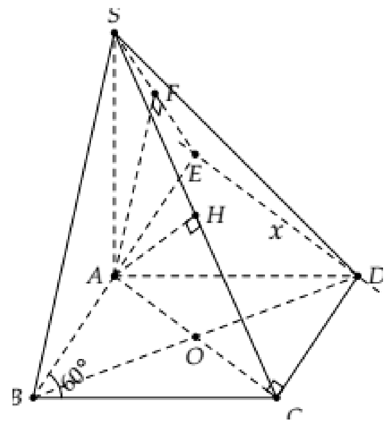
Vậy $d(G,(ACC'A'))=\frac{a}{2\sqrt{19}}$.

Bài 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có $AB=a$, $BC=2a$, $\widehat{ABC}=60°$, SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng $60°$.

(1) Tính khoảng cách từ A đến (SCD).

(2) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC, AC và SD.

Lời giải



Áp dụng định lí cô – sin cho $\triangle ABC$ ta có:

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA.BC.\cos 60°=a^2+4a^2-2a.2a.\frac{1}{2}=3a^2$

$\Rightarrow AC=a\sqrt{3}$.

Ta có $BC^2=AB^2+AC^2=4a^2$ nên $\triangle ABC$ vuông tại A.

Ta có $\begin{cases}CD\perp AC\\CD\perp SA\end{cases}\Rightarrow CD\perp(SAC)$, do đó $CD\perp SC$.

Vậy $\left((SCD),(ABCD)\right)=\widehat{SCA}=60°$.

Ta có $SA=AC.\tan\widehat{SCA}=3a$.

(1) *Tính khoảng cách từ A đến (SCD).*

Ta có $CD\perp(SAC)\Rightarrow(SCD)\perp(SAC)$, (do $CD\subset(SCD)$).

Với nhau theo giao tuyến SC.

Trong (SAC), dựng $AH\perp SC\Rightarrow AH\perp(SCD)$. Vậy $d(A,(SCD))=AH$.

Trong ΔSAC, ta có : $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AS^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{1}{3a^2}+\frac{1}{9a^2}=\frac{4}{9a^2}\Rightarrow AH=\frac{3a}{2}$.

Vậy $d(A,(SCD))=AH=\frac{3a}{2}$.

(2) *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC, AC và SD.*

Ta có $AB//CD\Rightarrow AB//(SCD)$.

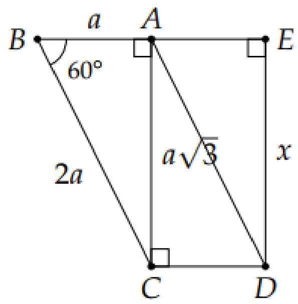
Do đó $d\left(AB,CD\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(A,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{3a}{2}$ (vì $SC\subset\left(SCD\right)$).

+ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD.
Kẻ $Dx//AC$. Gọi $E=Dx\cap AB\Rightarrow AB\perp Dx$ tại E.

Ta có $\begin{cases}Dx\perp AB\\ Dx\perp SA\end{cases}\Rightarrow Dx\perp\left(SAB\right)\Rightarrow\left(SD,Dx\right)\perp\left(SAB\right)=SE$.

Dựng $AF\perp SE\Rightarrow AF\perp\left(SD,Dx\right)$.. Vậy $d\left(A,\left(SD,Dx\right)\right)AF$.

Đáy $ABCD$ được vẽ ở hình dưới đây.
Ta có $ACDE$ là hình chữ nhật, có $AE=CD=a$.



Trong $\triangle SAE$ ta có $\dfrac{1}{AF^2}=\dfrac{1}{AF^2}+\dfrac{1}{AE^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow AF=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì $AC\parallel Dx\Rightarrow AC\parallel\left(SD,Dx\right)$.

Do đó $d\left(AC,SD\right)=d\left(AC,\left(SD,Dx\right)\right)=d\left(A,\left(SD,Dx\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

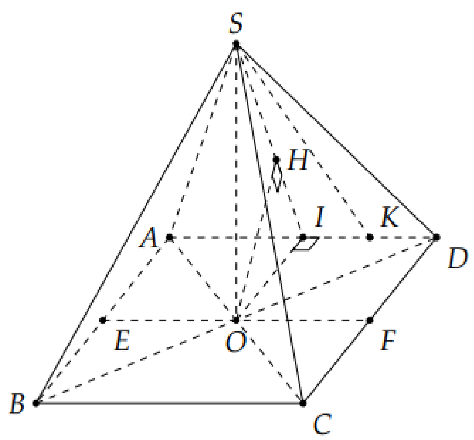
Bài 138. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB=2a,BC=a$, các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

(1) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $\left(ABCD\right)$

(2) Gọi E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, gọi K là điểm bất kỳ thuộc đoạn AD. Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K. Hãy tính khoảng cách này theo a?

✍ ***Lời giải***

(1) *Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $\left(ABCD\right)$*



Gọi O là tâm của đáy $ABCD$ thì ta có $OA=OB=OC=OD$.
Theo đề bài $SA=SB=SC=SD$.
Do đó, O là hình chiếu vuông góc của S trên $\left(ABCD\right)$, ta có $SO\perp\left(ABCD\right)$
Trong ΔSAO vuông tại O, ta có

$$SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{SA^2-\frac{AC^2}{4}}=\sqrt{2a^2-\frac{5a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(2) *Chứng minh khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào vị trí của K.*

Ta có $SK\subset(SAD)$.

Mà $EF\parallel AD\Rightarrow EF\parallel(SAD)\Rightarrow d(EF,SK)=d(EF,(SAD))=d(O,(SAD))$

Vì khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAD) không đổi nên khoảng cách giữa hai đường thẳng

EF và SK cũng không đổi, nghĩa là khoảng cách này không phụ thuộc vào điểm K.

Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK theo a.?

Dựng $OI\perp AD(I\in AD)$, ta có $AD\perp SO$ và $AD\perp OI\Rightarrow AD\perp(SOI)\Rightarrow(SAD)\perp(SOI)$:

Hai mặt phẳng này vuông góc nhau theo giao tuyến SI.

Dựng $OH\perp SI(H\in SI)\Rightarrow OH\perp(SAD)$.

Vậy $d(O,(SAD))=OH$. Trong ΔSOI vuông tại O, ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{4}{3a^2}+\frac{1}{a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow OH=\frac{a\sqrt{21}}{7}$$

Vậy $d(EF,SK)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

Bài 139. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy đều bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm H của cạnh $B'C'$.

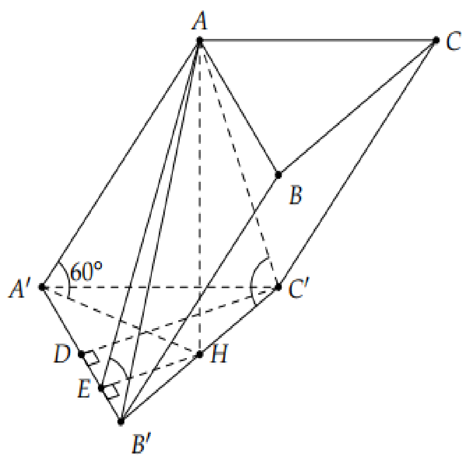
(1) Tính khoảng cách hai đáy.

(2) Tính góc giữa BC và AC'.

(3) Tính góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy.

Lời giải

(1) *Tính khoảng cách hai đáy*



$A'H$ là hình chiếu vuông góc của AA' trên $(A'B'C')$

Nên góc giữa AA' và $(A'B'C')$ là góc $\angle AA'H=60^0$.

Trong $\Delta AA'H$ vuông tại H , ta có

$$AH=A'H.\tan 60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{3a^2}{2}$$

Vì $AH\perp(A'B'C')$ mà $(ABC)//(A'B'C')\Rightarrow AH\perp(ABC)$.

Suy ra khoảng cách giữa hai mặt đáy là $AH=\dfrac{3a}{2}$

(2) *Tính góc giữa BC và AC'*

Vì $B'C'//BC$ nên góc giữa BC và AC' bằng góc giữa $B'C'$ và AC' là góc $AC'H$.

Trong $\Delta AC'H$ vuông tại H, ta có $\tan AC'H = \dfrac{AH}{HC'} = \dfrac{3a}{2} : \dfrac{a}{2} = 3 > 0 \Rightarrow AC'H = \arctan 3$.

(3) *Tính góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy*

Dựng $C'D$ và HE cùng vuông góc với $A'B'$ lần lượt tại D và E.

Ta có $\begin{cases} A'B' \perp HE \\ A'B' \perp AH \end{cases} \Rightarrow A'B' \perp (AHE) \Rightarrow A'B' \perp AE$.

Hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ có giao tuyến $A'B'$ cùng vuông góc với hai đường thẳng AE và HE tại điểm E nên $((ABB'A'),(A'B'C')) = (AE, HE) = AEH$.

Vì HE là đường trung bình của tam giác $C'DB'$ nên $HE = \dfrac{1}{2}C'D = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Trong ΔAEH, ta có $\tan AEH = \dfrac{AH}{EH} = \dfrac{3a}{2} : \dfrac{a\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3} \Rightarrow AEH = \arctan 2\sqrt{3}$.

Bài 140. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

(1) Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

(2) Chứng minh rằng $B'D \perp (BA'C')$.

(3) Chứng minh $B'C \perp (A'B'CD)$.

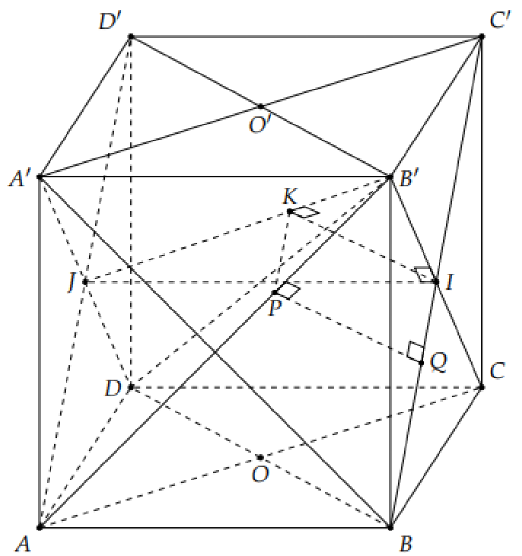
(4) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

(5) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

(6) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Lời giải

(1) *Chứng minh rằng khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau. Tính khoảng cách đó.*



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên các Δ sau là Δ vuông bằng nhau và đều nhận AC' làm cạnh huyền:

$\Delta ABC', \Delta AA'C', \Delta ACC', \Delta AD'C', \Delta ADC', \Delta AB'C'$.

$\Rightarrow$ Khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' bằng nhau.

Gọi khoảng cách từ B đến AC' bằng h.

Trong $\Delta ABC'$ có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

(2) *Chứng minh rằng $B'D \perp (BA'C')$.*

Ta có $\begin{cases} B'B = B'A' = B'C' = a \\ AB' = A'C' = C'B = a\sqrt{2} \end{cases}$ nên hình chóp $B'.BA'C'$ là hình chóp đều.

$\Rightarrow B'H \perp (BA'C')$, với H là tâm của $\Delta BA'C'$. (1)

Tương tự ta có $D.BA'C'$ là hình chóp đều nên $DH \perp (BA'C')$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B'D \perp (BA'C')$.

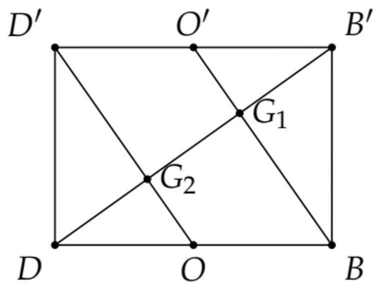
(3) *Chứng minh $B'C \perp (A'B'CD)$.*

Vì $BCC'B'$ là hình vuông nên ta có $BC' \perp B'C$.

Ta có $DC \perp (BCC'B')$ nên $DC \perp BC'$.

Vậy $BC' \perp (A'B'CD)$.

(4) *Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').*



Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Trong $(BDD'B')$, gọi $G_1 = DB' \cap BO'$, do $BO' \subset (BA'C')$ nên $G_1 = DB' \cap (BA'C')$.

Vậy $B'G_1 \perp (BA'C') \Rightarrow d(B',(BA'C')) = B'G_1$.

Hoàn toàn tương tự $d(D,(ACD')) = DG_2$.

Dễ dàng chứng minh được $(ACD') // (BA'C') \rightarrow G_1G_2 = d((ACD'),(BA'C'))$.

Dễ thấy $G_1G_2 = B'G_1 = GG_2 = \frac{1}{3}DB' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(BA'C')$ là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(5) *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.*

Ta có BC' và CD' lần lượt thuộc hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD').

Theo (4) ta có $(BA'C') // (ACD')$.

Vậy $d(BC',CD') = d((ACD'),(BA'C')) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

(6) *Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.*

Gọi I và J lần lượt là tâm của hai hình vuông $BCC'B'$ và $ADD'A'$.

Trong $(A'B'CD)$, dựng $IK \perp JB', K \in JB'$.

Trong $(AB'D')$, dựng $KP // AD', P \in AB'$, suy ra $KP // BC'$.

Trong (KP, BC'), dựng $PQ // IK, Q \in BC'$.

▶ *Ta chứng minh PQ là đoạn vuông góc chung của BC' và AB'.*

Ta có $BC' \perp (A'B'CD), IK \subset (A'B'CD)$ nên $IK \perp BC'$.

Mà $BC' // AD' \Rightarrow IK \perp AD'$. Ngoài ra ta có $IK \perp JB'$ nên $IK \perp (AB'D') \Rightarrow IK \perp AB'$.

Tóm lại $\begin{cases} IK \perp BC' \\ IK \perp AB' \end{cases}$, mà $PQ // IK$ nên PQ vuông góc với BC' và AB'

Vậy PQ là đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Ta có $IJ // A'B'$, mà $A'B' \perp (BCC'B') \Rightarrow IJ \perp (BCC'B') \Rightarrow IJ \perp IB'$.

Xét $\Delta B'IJ$ có đường cao IK nên $\dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{1}{IB'^2} + \dfrac{1}{IJ^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2} \Rightarrow IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Theo cách dựng thì $IKPQ$ là hình chữ nhật nên $PQ = IK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Bài 141. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAD) là tam giác đều và vuông gcos với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi I, M, F lần lượt là trung điểm của AD, AB, SB và K là giao điểm của BI và CM.

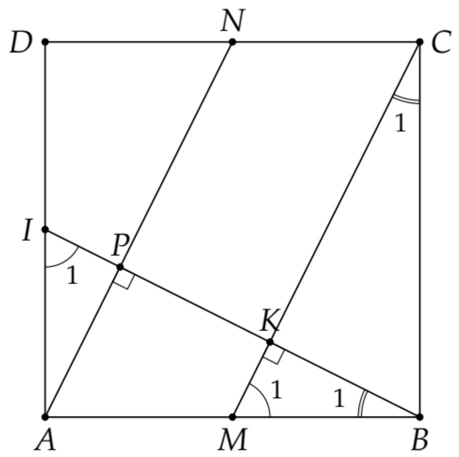
(1) Chứng minh $(CMF) \perp (SIB)$.

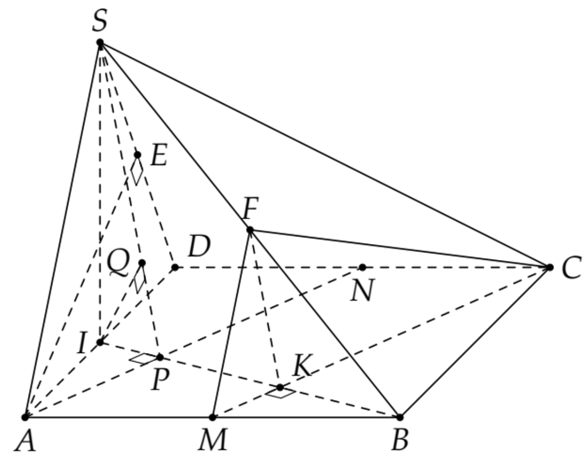
(2) Tính BK và KF.

(3) Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.

(4) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.

Lời giải





(1) *Chứng minh $(CMF) \perp (SIB)$.*

Ta có $\Delta IAB = \Delta MBC\left(c-g-c\right) \Rightarrow B_1 = C_1$.

Từ $C_1 + M_1 = 90^0 \Rightarrow B_1 + M_1 = 90^0 \Rightarrow MKB = 90^0 \Rightarrow CM \perp IB$.

Ta có $\begin{cases} CM \perp IB \\ CM \perp SI \quad \left(SI \perp \left(ABCD\right)\right) \\ CM \subset \left(CMF\right) \end{cases}$ nên $\left(CMF\right) \perp \left(SIB\right)$.

(2) *Tính BK và KF.*

ΔCBM vuông tại B nên $CM = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có $BK.CM = BM.BC \Leftrightarrow BK = \dfrac{BM.BC}{CM} = \dfrac{\frac{a}{2}.a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

ΔSIB vuông tại I nên $SB = \sqrt{SI^2 + BI^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$ và $\cos SBI = \dfrac{BI}{SB} = \dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

Trong ΔBKF : $FK^2 = BK^2 + BF^2 - 2.BK.BF.\cos FBK = \dfrac{a^2}{5} + \dfrac{a^2}{2} - 2.\dfrac{a\sqrt{5}}{5}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{\sqrt{10}}{4} = \dfrac{a^2}{5}$.

Vậy $FK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

(3) *Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SD.*

Ta có $AB \perp AD$ và $AB \perp SI$ nên $AB \perp \left(SAD\right)$.

Trong $\left(SAD\right)$, kẻ $AE \perp SD$.

Khi đó, AE là đoạn vuông góc chung của AB và SD.

Vậy $d\left(AB,SD\right) = AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (Vì AE là đường cao của tam giác đều SAD).

(4) *Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SA.*

Gọi N là trung điểm CD.

Ta có $AN//CM \Rightarrow CM//\left(SAN\right)$.

$\Rightarrow d\left(CM,SA\right) = d\left(CM,\left(SAN\right)\right) = d\left(K,\left(SAN\right)\right)$ (do $K \in CM$).

Gọi $P = AN \cap BI$. Ta có $BI \perp AN$ (vì $AN//CM$).

Do đó, $AN \perp \left(SIP\right)$. Từ I kẻ $IQ \perp SP, Q \in SP$.

Kết hợp với $IQ \perp AN$ thì $IQ = d\left(I,\left(SAN\right)\right)$.

Ta có $\Delta IAP = \Delta MBK \Rightarrow IP = MK = \dfrac{BM^2}{MC} = \dfrac{a^2}{4} : \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{10}$.

ΔSIP vuông tại I nên $\dfrac{1}{IQ^2}=\dfrac{1}{IS^2}+\dfrac{1}{IP^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{20}{a^2}=\dfrac{64}{3a^2}\Rightarrow IQ=\dfrac{a\sqrt{3}}{8}$.

Ta có $IK\cap(SAN)=P$ nên $\dfrac{d(K,(SAN))}{d(I,(SAN))}=\dfrac{KP}{IP}=2\Rightarrow d(K,(SAN))=2d(I,(SAN))=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(CM,SA)=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 142. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $BAD=60^\circ$. Đường thẳng SO vuông góc với đáy và $SO=\dfrac{3a}{4}$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BC và BE.

(1) Chứng minh $(SOF)\perp(SBC)$.

(2) Tính khoảng cách từ O và A đến (SBC).

(3) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua AD và vuông góc với (SBC). Xác định thiết diện của hình chóp với (α). Tính diện tích của thiết diện này.

(4) Tính góc giữa (α) và $(ABCD)$.

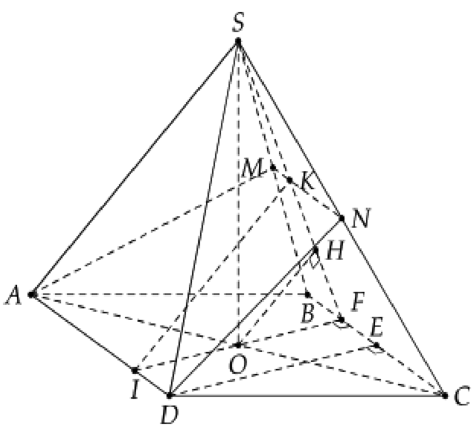
Lời giải

(1) *Chứng minh* $(SOF)\perp(SBC)$.

Vì ΔBDC đều nên $DE\perp BC\Rightarrow OF\perp BC$ (OF là đường trung bình của ΔBDE).

Ta có $\begin{cases} BC\perp SO \\ BC\perp OF \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SOF)$.

Mà $BC\subset(SBC)$ nên $(SOF)\perp(SBC)$.



(2) *Tính khoảng cách từ* O *và* A *đến* (SBC).

Trong mặt phẳng (SOF), dựng $OH\perp SF, H\in SF$ thì $OH\perp(SBC)$.

Do đó $d(O,(SBC))=OH$.

Trong ΔSOF vuông tại O ta có $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OS^2}+\dfrac{1}{OF^2}=\dfrac{16}{9a^2}+\dfrac{16}{3a^2}=\dfrac{64}{9a^2}\Rightarrow OH=\dfrac{3a}{8}$.

Vậy $d(O,(SBC))=OH=\dfrac{3a}{8}$.

Gọi $I=FO\cap AD$.

Trong mặt phẳng (SIF) dựng $IK\perp SF$ tại K thì $IK\perp(SBC)$ (vì $IK\,||\,OH$).

Ta có $AD\,||\,BC$ nên $AD\,||\,(SBC)$.

Do đó $d\left(A,(SBC)\right)=d\left(I,(SBC)\right)=IK=2OH=\dfrac{3a}{4}$ (vì $I\in AD$).

(3) *Xác định thiết diện của hình chóp với (α). Tính diện tích của thiết diện này.*

Ta có $IK\perp(SBC)$ nên mặt phẳng (α) chính là (ADK).

Ta có $\begin{cases} K\in(SBC)\cap(ADK) \\ AD\,||\,BC \end{cases}\Rightarrow(SBC)\cap(ADK)=Kx$, ($Kx\,||\,AD\,||\,BC$).

Gọi $M=Kx\cap SB, N=Kx\cap SD$. Vậy thiết diện là hình thang $ADNM$.

* Tính diện tích hình thang $ADNM$.

Ta có $S_{ADNM}=\dfrac{1}{2}(AD+NM).IK$.

ΔSOF vuông tại O nên $SF=\sqrt{OS^2+OF^2}=\sqrt{\dfrac{9a^2}{16}+\dfrac{3a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔSIK vuông tại K nên $SK=\sqrt{SI^2-IK^2}=\sqrt{\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{9a^2}{16}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

Do đó, $\dfrac{SK}{SF}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow K$ là trung điểm SF.

Như thế, MN là đường trung bình ΔSBC. Từ đó, $MN=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{a}{2}$.

Vậy $S_{ADNM}=\dfrac{1}{2}(AD+NM).IK=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{a}{2}\right).\dfrac{3a}{4}=\dfrac{9a^2}{16}$.

(4) *Tính góc giữa (α) và $(ABCD)$.*

Ta có $\begin{cases} (\alpha)\cap(ABCD)=AD \\ FI\perp AD, KI\perp AD \\ FI\subset(ABCD), KI\subset(\alpha) \end{cases}\Rightarrow\left((\alpha),(ABCD)\right)=FIK$.

ΔFIK vuông tại K, có $\cos FIK=\dfrac{IK}{IF}=\dfrac{3a}{4}:\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow FIK=30^\circ$.

Vậy $\left((\alpha),(ABCD)\right)=30^\circ$.

Bài 143. Cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của AB,CD và E,F lần lượt là trung điểm của SA,SB.

(1) Tính khoảng cách từ A đến (SCD). Tính tan góc giữa (SAB) và (SCD).

(2) Gọi $G=CE\cap DF$. Chứng minh $CE\perp SA, DF\perp SB$. Tính tan góc giữa (GEF) và (SAB).

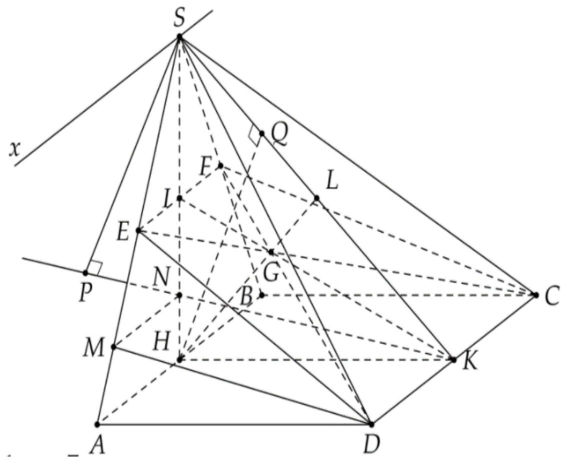
(3) Chứng minh G là trọng tâm của ΔSHK. Tính khoảng cách từ G đến (SCD).

(4) Gọi M là điểm di động trên đoạn SA. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên (CDM).

Lời giải

(1) *Tính khoảng cách từ A đến (SCD). Tính tan góc giữa (SAB) và (SCD).*

Ta có $\begin{cases} DC \perp HK \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SHK) \Rightarrow (SCD) \perp (SHK)$.



Trong (SHK), dựng $HQ \perp SK, (Q \in SK)$. Khi đó, $HQ \perp (SCD)$.

Như thế, $d(H,(SCD)) = HQ$.

ΔSHK vuông tại K nên

$$\frac{1}{HQ^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{7}{3a^2}.$$

Suy ra, $HQ = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ và $d(H,(SCD)) = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

*) Tính tan góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Ta có $(SAB) \cap (SCD) = Sx, (Sx // AB // CD)$ và $\begin{cases} SH \perp AB, SK \perp CD \\ SH \subset (SAB), SK \subset (SCD) \\ Sx // AB // CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} SH \perp Sx \\ SK \perp Sx \end{cases}$

$\Rightarrow ((SAB),(SCD)) = KSH$.

ΔSHK vuông tại H nên $\tan KSH = \frac{HK}{HS} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) *Gọi $G = CE \cap DF$. Chứng minh $CE \perp SA, DF \perp SB$. Tính tan góc giữa (GEF) và (SAB).*

ΔHBC vuông tại B nên $HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

ΔSHC vuông tại H nên $SC = \sqrt{HS^2 + HC^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$.

Xét ΔSAC có $CA = CS = a\sqrt{2}$ nên ΔSAC cân tại C và có CE là đường trung tuyến,
$\Rightarrow CE$ cũng là đường cao.
Vậy $CE \perp SA$.
Chứng minh tương tự thì $DF \perp SB$.
▶ Tính tan góc giữa hai mặt phẳng (GEF) và (SAB).
Gọi $I = SH \cap EF$. Khi đó, I là trung điểm của EF.

Ta có $CDEF$ là hình thang cân và I,F lần lượt là trung điểm của hai đáy EF và CD nên $IK\perp EF$.

Như thế, $\begin{cases}(SAB)\cap(CDEF)=EF\\ SH\perp EF, KI\perp EF\\ SH\subset(SAB), KI\subset(CDEF)\end{cases} \Rightarrow ((SAB),(CDEF))=HIK$.

ΔHIK vuông tại H nên $\tan HIK=\dfrac{HK}{HI}=\dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(3) *Chứng minh G là trọng tâm của ΔSHK. Tính khoảng cách từ G đến (SCD).*

Vì $CDEF$ là hình thang cân nên $G\in KI$.

Trong hình thang cân $CDEF$ ta có tỉ lệ đồng dạng

$$\frac{GF}{GD}=\frac{GE}{GC}=\frac{GI}{GK}=\frac{EF}{DC}=\frac{1}{2}, \text{ (vì } EF=\frac{1}{2}AB, AB=CD\text{)}.$$

Suy ra, $GK=2GI\Leftrightarrow KG=\dfrac{2}{3}KI$.

Mà KI là đường trung tuyến của ΔSHK.

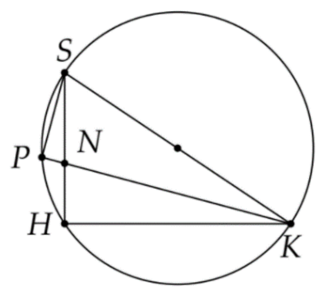
Vậy G là trọng tâm của ΔSHK

Trong (SHK), gọi $L=HG\cap SK$.

Ta có, $\dfrac{\mathrm{d}(G,(SCD))}{\mathrm{d}(H,(SCD))}=\dfrac{GL}{HL}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \mathrm{d}(G,(SCD))=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(H,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

Vậy $\mathrm{d}(G,(SCD))=\dfrac{a\sqrt{21}}{21}$.

(4) *Gọi M là điểm di động trên đoạn SA. Tìm tập hợp những điểm là hình chiếu vuông góc của S trên (CDM).*



Ta có $CD\perp(SHK)\Rightarrow(CDM)\perp(SHK)$.

Dựng $MN//CD, N\in SH$. Ta được, $(CDM)\cap(SHK)=KN$.

Dựng $SP\perp KN\Rightarrow SP\perp(CDM)$.

Do đó, P là hình chiếu của S trên (CDM).

Ta có $\widehat{SPK} = 90°$ nên P thuộc đường tròn đường kính SK trong (SHK).

Mặt khác, M di động trên đoạn SA nên N di động trên đoạn SH.

Ta suy ra điểm P chạy trên cung SH của đường tròn đường kính SK.

Bài 144. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{3}$

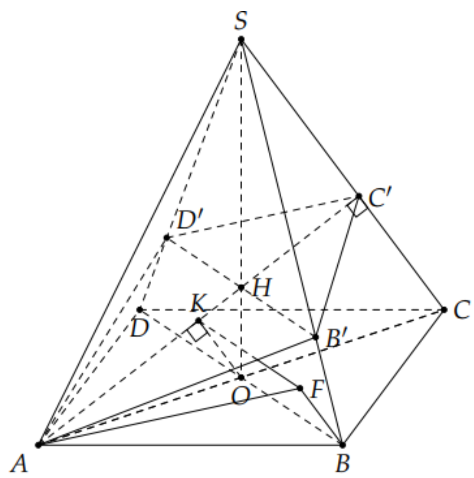
(1) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.

(2) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC. Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.

(3) Gọi φ là góc giữa AB và mặt phẳng (α). Tính $\sin\varphi$.

Lời giải

(1) *Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$.*



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Thì SO là khoảng cách từ S đến $(ABCD)$.

Ta có: $SO^2 = SC^2 - OC^2 = 3a^2 - \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{10a^2}{4} \Rightarrow SO = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

(2) *Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α). Tính diện tích của thiết diện này.*

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp SC$.

Trong (SAC) dựng $AC' \perp SC$.

Gọi H là giao điểm của AC' và SO.

Trong (SBD),đường thẳng qua H và song song với BD cắt SB và SD lần lượt tại B' và D'.

Ta có: $B'D' \perp SC$.

Vậy $SC \perp (AB'C'D')$ và (α) là $(AB'C'D')$.

$BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC' \Rightarrow B'D' \perp AC'$.

Do đó: $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2} AC'.B'D'$.

Ta có: $AC' = \dfrac{SO.AC}{SC} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{10}}{2}.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

$SC'^2 = SA^2 - AC'^2 = 3a^2 - \dfrac{5a^2}{3} = \dfrac{4a^2}{3} \Rightarrow SC' = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Từ hai tam giác vuông đồng dạng SOC và $SC'H$, ta có: $SH = \dfrac{SC'.SC}{SO} = \dfrac{\dfrac{2a}{\sqrt{3}}.a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{4a}{\sqrt{10}}$.

Vì $B'D' \parallel BD$ nên $\dfrac{B'D'}{BD} = \dfrac{SH}{SO} = \dfrac{4a}{\sqrt{10}}.\dfrac{2}{a\sqrt{10}} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow B'D' = \dfrac{4}{5}a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{AB'C'D'} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.\dfrac{4}{5}a\sqrt{2} = \dfrac{2a^2\sqrt{30}}{15}$.

(3) *Gọi φ là góc giữa AB và mặt phẳng (α). Tính $\sin\varphi$.*

Gọi φ là góc $(AB,(\alpha))$. Ta có: $CC' = SC - SC' = a\sqrt{3} - \dfrac{2a}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Dựng $OK \parallel CC'$ với $K \in AC'$, thì $OK \perp (\alpha)$ và $OK = \dfrac{1}{2}CC' = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Dựng $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OK}$ thì $BF \perp (\alpha)$ và $BF = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

Ta có: $(AB,(\alpha)) = BAF = \varphi$; $\sin BAF = \dfrac{BF}{BA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{6}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Bài 145. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên (SAB) là tam giác đều. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB,CD.

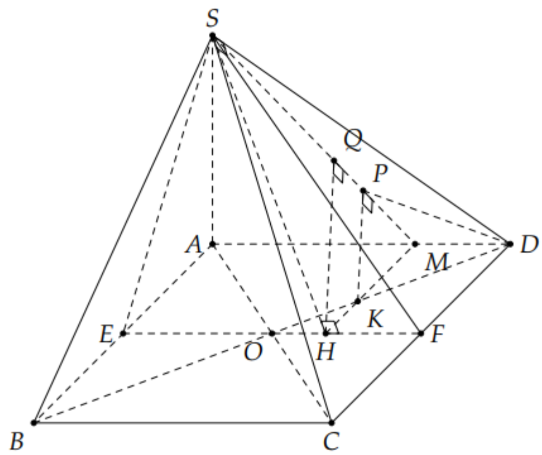
(1) Cho biết ΔSCD vuông cân tại S. Chứng minh: $SE \perp (SCD)$ và $SF \perp (SAB)$.

(2) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên EF. Chứng minh: $SH \perp AC$.

(3) Tính góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SAD).

Lời giải

(1) *Chứng minh: $SE \perp (SCD)$ và $SF \perp (SAB)$.*



▶ Chứng minh $SE \perp (SCD)$:

Do ΔSCD cân tại S có F là trung điểm của $CD \Rightarrow CD \perp SF$.

Mà $CD \perp EF$ (theo tính chất của hình vuông) $\Rightarrow CD \perp (SEF)$.

Lại có $SE \subset (SEF) \Rightarrow SE \perp CD$ (1).

Ta chứng minh ΔSEF vuông tại

ΔSCD vuông tại S có SF là đường trung tuyến nên $SF = \dfrac{1}{2}CD = \dfrac{a}{2}$.

ΔSAB đều cạnh a có SE là đường trung tuyến nên $SE=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; EF=a$.

Có $SE^2+SF^2=\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=a^2=EF^2$.

Vậy ΔSEF vuông tại $S \Rightarrow SE\perp SF \quad (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra: $SE\perp (SCD)$.

▶ Chứng minh $SF\perp (SAB)$:

Ta có: $CD\perp (SEF)$, mà $AB \parallel CD \Rightarrow AB\perp (SEF)\Rightarrow SF\perp AB \quad (3)$.

Từ (2) và $(3)\Rightarrow SF\perp (SAB)$.

(2) *Chứng minh:* $SH\perp AC$.

Ta có $CD\perp (SEF)$ (theo chứng minh trên), mà $SH\subset (SEF)\Rightarrow SH\perp CD$.

Hơn nữa, $SH\perp EF$ (gt) $\Rightarrow SH\perp (ABCD)$.

Mà $AC\perp (ABCD)\Rightarrow SH\perp AC$.

(3) *Tính góc giữa đường thẳng* BD *và mặt phẳng* (SAD).

Gọi O là tâm của hình vuông $(ABCD)$.

Theo tính chất của hình vuông $ABCD$, ta có AC,BD,EF đồng quy tại O.

Vì $SE>SF$ nên H thuộc đoạn OF.

Trong $(ABCD)$, qua H vẽ đường thẳng song song với CD cắt AD,OD lần lượt tại M và K.

Vậy $\left(BD,(SAD)\right)=\left(KD,(SAD)\right)$.

Ta có: $\begin{cases} AD\perp MH \\ AD\perp SH \end{cases} \Rightarrow AD\perp (SHM)\Rightarrow (SAD)\perp (SHM)$

Mà $(SAD)\cap (SHM)=SM$. Vẽ $KP\perp SM \quad (P\in SM)\Rightarrow KP\perp (SAD)$ tại P.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của K lên (SAD) là $P\Rightarrow$ Hình chiếu của KD lên (SAD) là PD.

$\Rightarrow \left(BD,(SAD)\right)=(KD,PD)=KDP$

Để tìm góc KDP, ta đi tìm KD và KP:

ΔSEF vuông tại S có SH là đường cao nên ta có:

$$\frac{1}{SH^2}=\frac{1}{SE^2}+\frac{1}{SF^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3a^2}{4}}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=\frac{16}{3a^2}\Rightarrow SH=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

ΔSEH vuông tại H nên ta có $EH=\sqrt{SE^2-SH^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{16}}=\frac{3a}{4}$.

$OH=EH-OE=\frac{3a}{4}-\frac{a}{2}=\frac{a}{4}\Rightarrow HF=OF-OH=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$.

$\Rightarrow H$ là trung điểm của OF, mà $HK//DF$ nên HK là đường trung bình của ΔFOD

$\Rightarrow K$ là trung điểm của $OD\Rightarrow KD=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$ (Do $BD=a\sqrt{2}$)

$HK=\frac{1}{2}DF=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a}{4}; MK=MK-HK=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của MH.

Trong (SHM), vẽ $HQ\perp SM$ $(Q\in SM)$, mà $KP\perp SM\Rightarrow KP//HQ$.

Mà K là trung điểm của MH nên KP là đường trung bình của $\Delta MHQ\Rightarrow KP=\frac{1}{2}HQ$.

ΔSHM vuông tại H có HQ là đường cao, ta có:

$$\frac{1}{HQ^2}=\frac{1}{HS^2}+\frac{1}{HM^2}=\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{3a^2}{16}}+\frac{1}{\frac{a^2}{4}}=\frac{28}{3a^2}\Rightarrow HQ=\frac{a\sqrt{21}}{14}$$

$\Rightarrow KP=\frac{1}{2}HQ=\frac{a\sqrt{21}}{28}$.

Trong ΔKPD vuông tại P, ta có: $\sin KDP=\frac{KP}{KD}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}}{\frac{a\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{42}}{14}\Rightarrow KDP=\arcsin\frac{\sqrt{42}}{14}$.

Vậy $(BD,(SAD))=KDP=\arcsin\frac{\sqrt{42}}{14}$.

Bài 146. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA\perp(ABCD)$ và $SA=2a$

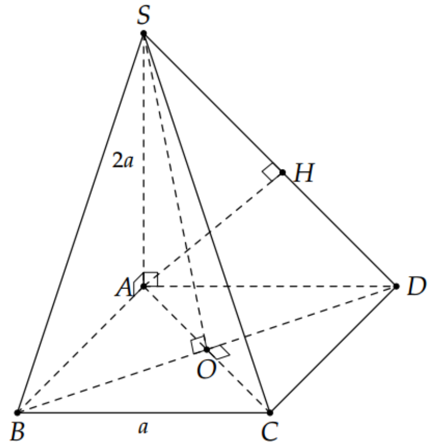
(1) Chứng minh $(SAC)\perp(SBD);(SCD)\perp(SAD)$.

(2) Tính góc giữa SD và $(ABCD)$, SB và (SAD), SB và (SAC).

(3) Tính $d(A,(SCD)),d(B,(SAC))$.

Lời giải

(1) *Chứng minh* $(SAC)\perp(SBD);(SCD)\perp(SAD)$.



▶ Chứng minh $(SAC)\perp(SBD)$.

Ta có: $BD\perp AC$ (hai đường chéo của hình vuông $ABCD$);
$BD\perp SA$ (do $SA\perp(ABCD)$).

$\Rightarrow BD\perp(SAC)$, mà $BD\subset(SBD)$.

$\Rightarrow(SAC)\perp(SBD)$.

▶ Chứng minh $(SCD)\perp(SAD)$.

Ta có: $CD\perp AD$ (hai cạnh kề của hình vuông $ABCD$);
$CD\perp SA$ (do $SA\perp(ABCD)$).

$\Rightarrow CD\perp(SAD)$, mà $CD\subset(SCD)$.

$\Rightarrow(SCD)\perp(SAD)$.

(2) *Tính góc giữa SD và* $(ABCD)$, *SB và* (SAD), *SB và* (SAC).

▶ Tính góc giữa SB và (SAD)

Ta có $SA\perp(ABCD)$ tại A nên hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là A.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên $(ABCD)$ là AD.

$\Rightarrow(SD,(ABCD))=(SD,AD)=SDA$.

Trong ΔSAD vuông tại A, $\tan SDA=\dfrac{SA}{AD}=\dfrac{2a}{a}=2\Rightarrow SDA=\arctan 2$.

Vậy $(SD,(ABCD))=SDA=\arctan 2$.

▶ Tính góc giữa SB và (SAD)

Ta có: $\begin{cases}BA\perp SA\\ BA\perp AD\end{cases}\Rightarrow BA\perp(SAD)$ tại A nên hình chiếu của B lên (SAD) là A.

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên $(ABCD)$ là SA.

$\Rightarrow(SB,(SAD))=(SB,SA)=BSA$

Trong ΔSAB vuông tai A, có $\tan BSA=\dfrac{AB}{SA}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow BSA=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Vậy $(SB,(SAD))=BSA=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

▶ Tính góc giữa SB và (SAC)

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$

Theo chứng minh trên: $BD\perp(SAC)$ tại $O\Rightarrow(SB,(SAC))=(SB,SO)=BSO$.

$BD = a\sqrt{2} \Rightarrow BO = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

ΔSAB vuông tại A nên $SB = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

Trong ΔSOB vuông tai O, có $\sin BSO = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow BSO = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

Vậy $(SB,(SAC)) = BSO = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

(3) *Tính* $d(A,(SCD)), d(B,(SAC))$.

▶ Tính $d(A,(SCD))$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SD

Ta có: $AH \perp SD$

Theo chứng minh ở câu (**1**), $CD \perp (SAD)$.

Mà $AH \subset (SAD) \Rightarrow AH \perp CD \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow AH = d(A,(SCD))$

ΔSAD vuông tại A: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy $d(A,(SCD)) = AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

▶ Tính $d(B,(SAC))$.

Theo chứng minh trên $BD \perp (SAC)$ tại O nên hình chiếu của B lên (SAC) là O.

$\Rightarrow d(B,(SAC)) = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 147. Cho hình chóp $A.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A, góc $B = 60^o$, $AB = a$, hai mặt bên (SAB) và (SBC) vuông góc với đáy, $SB = 2a$. Hạ $BH \perp SA (H \in SA); BK \perp SA (K \in SC)$.

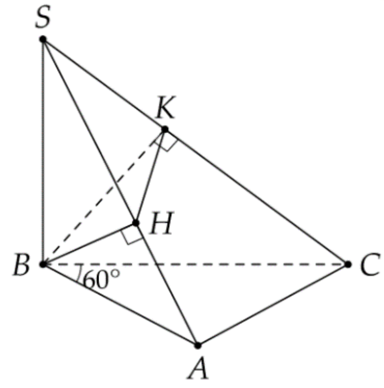
(1) Chứng minh $SB \perp (ABC)$.

(2) Chứng minh $SB \perp (ABC)$.

(3) Chứng minh $SC \perp (BHK)$.

(4) Tính côsin của góc tạo bởi SA và (BHK).

Lời giải



(1) *Chứng minh* $SB \perp (ABC)$.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \perp (ABC); (SBC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SB \perp (ABC)$.

(2) *Chứng minh* $SB \perp (ABC)$.

Ta có: $AC \perp AB$ do ΔABC vuông tại A và $AC \perp SB$ do $SB \perp (ABC)$

$\Rightarrow AC \perp (SAB) \Rightarrow BH \perp AC$ do $BH \subset (SAB)$.

Mặt khác: $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BH$ do $SC \subset (SAC)$.

Ta lại có: $SC \perp BK \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

(3) *Chứng minh* $SC \perp (BHK)$.

Ta có: $BH \perp (SAC), HK \subset (SAC) \Rightarrow BH \perp HK$

Vậy tam giác BHK vuông tại H.

(4) *Tính côsin của góc tạo bởi* SA *và* (BHK).

Ta có: $SC \perp (BHK)$ tại K nên HK là hình chiếu vuông góc của SH trên (BHK)

Do đó: $(SA,(BHK)) = (SH,(BHK)) = (SH,HK) = SHK$

Vì $SHK = SCA$ nên $\cos SHK = \cos SCA = \dfrac{AC}{SC}$.

Ta có: ABC vuông tại $A, AC = AB.\tan 60^o = a\sqrt{3}, BC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = 2a$

ΔSBC vuông tại B nên $SC = \sqrt{SC^2 + BC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Suy ra: $\cos(SA,(BHK)) = \dfrac{AC}{SC} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

Bài 148. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ và M là trung điểm của SC.

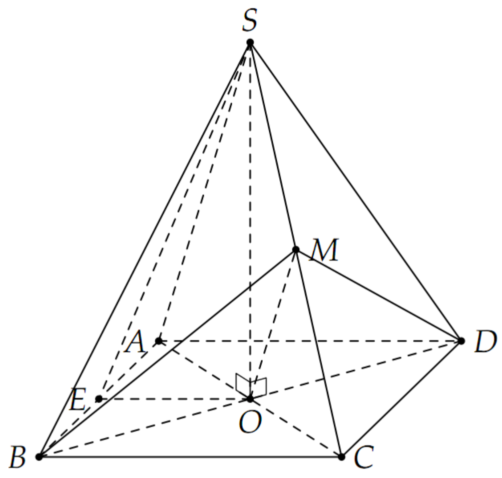
(1) Chứng minh $(MBD) \perp (SAC)$.

(2) Tính góc giữa SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

(3) Tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và $(ABCD)$.

(4) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

Lời giải



(1) *Chứng minh* $(MBD)\perp(SAC)$.

Vì hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO\perp(ABCD)$,

Mà $BD\subset(ABCD)$ nên $BD\perp SO$.

Ta lại có $BD\perp AC\Rightarrow BD\perp(SAC)$, mà $BD\subset(MBD)$,

suy ra $(MBD)\perp(SAC)$.

(2) *Tính góc giữa* SA *và mặt phẳng* $(ABCD)$.

Vì $SO\perp(ABCD)$

Nên OA là hình chiếu vuông góc của SA lên $(ABCD)$.

Suy ra $(SA,(ABCD))=(SA,AO)=SAO$.

Ta có $SA=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $AC=a\sqrt{2}\Rightarrow AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O có: $\cos SAO=\dfrac{AO}{SA}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\Rightarrow SAO=\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

(3) *Tính góc giữa hai mặt phẳng* (MBD) *và* $(ABCD)$.

Ta có $(MBD)\cap(ABCD)=BD$. (1)

Mà $BD\perp(SAC)$, $OM\subset(SAC)\Rightarrow OM\perp BD$. (2)

Và $OC\perp BD$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $((MBD),(ABCD))=(OM,OC)=MOC$ (do MOC là góc nhọn).

ΔSOC có OM là đường trung tuyến nên $OM=CM=\dfrac{1}{2}SC=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

Áp dụng định lý Cô-sin trong tam giác COM, ta có

$$\cos MOC=\frac{OM^2+OC^2-CM^2}{2OM.OC}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{5}}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{5}}{4}\right)^2}{2.\frac{a\sqrt{5}}{4}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Vậy $((MBD),(ABCD))=COM=\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

(4) *Tính góc giữa hai mặt phẳng* (SAB) *và* $(ABCD)$.

Ta có $(SAB)\cap(ABCD)=AB$.

Gọi E là trung điểm AB.

Khi đó $OE\perp AB$ mà $SO\perp AB\Rightarrow SE\perp AB$.

Suy ra $((SAB),(ABCD))=(SE,OE)=SEO$ (vì SEO nhọn).

ΔSCO vuông tại O nên $SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

ΔSEO vuông tại O, ta có $\tan SEO=\frac{SO}{OE}=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{a}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow SEO=60^\circ$.

Vậy $\left((SAB),(ABCD)\right)=60^\circ$.

Bài 149. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA'\perp(ABC)$ và $AA'=a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC=2a$, $AB=a\sqrt{3}$.

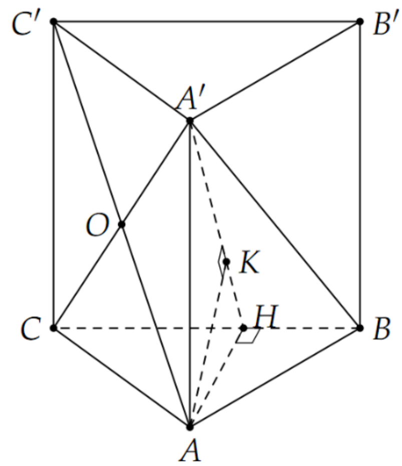
(1) Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

(2) Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.

(3) Chứng minh rằng $AB\perp(ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến (ABC').

Lời giải

(1) *Tính khoảng cách từ AA' đến mặt phẳng $(BCC'B')$.*



Vì $AA'//BB'\Rightarrow AA'//(BCC'B')$ nên $d\left(AA',(BB'C'C)\right)=d\left(A,(BB'C'C)\right)$.

Vì $AA'\perp(ABC)$ nên $(ABC)\perp(BCC'B')=BC$.

Kẻ $AH\perp BC$ tại $H\Rightarrow AH\perp(BCC'B')$.

Do đó, $d\left(A,(BB'C'C)\right)=AH$.

Ta có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{4a^2-3a^2}=a$.

ΔABC vuông tại A: $AH=\frac{AB.AC}{\sqrt{AB^2+AC^2}}=\frac{a.a\sqrt{3}}{2a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d\left(AA',(BB'C'C)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

(2) *Tính khoảng cách từ A đến $(A'BC)$.*

Cách 1.

Kẻ $AK\perp A'H$ tại K.

Ta có $\begin{cases}AA'\perp BC\\ AH\perp BC\end{cases}\Rightarrow(A'AH)\perp BC\Rightarrow AK\perp BC$.

Suy ra $AK\perp(A'BC)$. Do đó $d\left(A,(A'BC)\right)=AK$.

$\Delta A'AH$ vuông tại A: $AK=\frac{AA'.AH}{\sqrt{AA'^2+AH^2}}=\frac{a.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{3a^2}{4}}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d\left(A,\left(A'BC\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Cách 2.

Vì AA', AB, AC đôi một vuông góc nên gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(A'BC\right)$, ta có $\dfrac{1}{d^2}=\dfrac{1}{AA'^2}+\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{7}{3a^2}\Rightarrow d=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

(3) *Chứng minh rằng $AB\perp\left(ACC'A'\right)$ và tính khoảng cách từ A' đến $\left(ABC'\right)$.*

Ta có $\begin{cases}AB\perp AC\\AB\perp AA'\end{cases}\Rightarrow AB\perp\left(ACC'A'\right)$.

Gọi O là giao điểm của $A'C$ và AC'.

Ta có $A'O\perp AC'$ (do $ACC'A'$ là hình vuông).

Mặt khác $A'O\perp AB$ (do $A'O\subset\left(ACC'A'\right)$ và $AB\perp\left(ACC'A'\right)$).

$\Rightarrow A'O\perp\left(ABC'\right)$ tại O.

Do đó $d\left(A',\left(ABC'\right)\right)=A'O=\dfrac{A'C}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bài 150. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, có $AD=2a$, $AB=BC=a$. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ lấy điểm S. Gọi C' và D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

(1) Chứng minh $SBC=SCD=90°$.

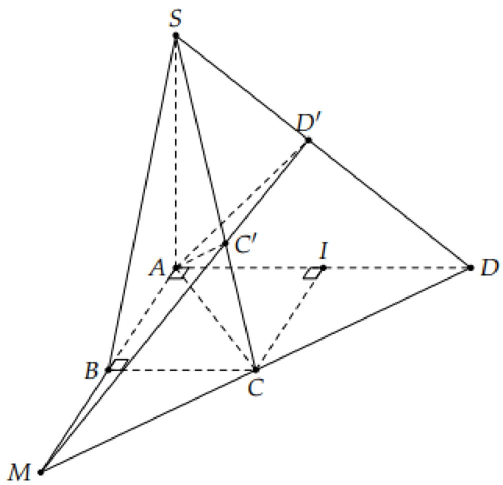
(2) Chứng minh ba đường thẳng AD', AC', AB cùng nằm trên mặt phẳng. Từ đó chứng minh $C'D'$ luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên Ax.

(3) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC khi $SA=a\sqrt{2}$.

là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

Lời giải

(1) *Chứng minh $SBC=SCD=90°$.*



là hình chiếu vuông góc của đỉnh A trên SC và SD.

Ta có $BC\perp BA, BC\perp SA$ (do $SA\perp\left(ABCD\right)$)

$\Rightarrow BC\perp SB$.

Gọi I là trung điểm AD

$\Rightarrow ABCI$ là hình vuông $\Rightarrow IA=ID=IC\Rightarrow\Delta ACD$ vuông tại C.

Ta có $CD\perp AC, CD\perp SA$ (do $SA\perp\left(ABCD\right)$)

$\Rightarrow CD\perp SC$.

Vậy $SBC=SCD=90^\circ$.

(2) *Chứng minh ba đường thẳng AD', AC', AB cùng nằm trên mặt phẳng. Từ đó chứng minh $C'D'$ luôn đi qua một điểm cố định khi S chạy trên Ax.*

$AB \perp AD, AB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$) $\Rightarrow AB \perp SD$ (1).

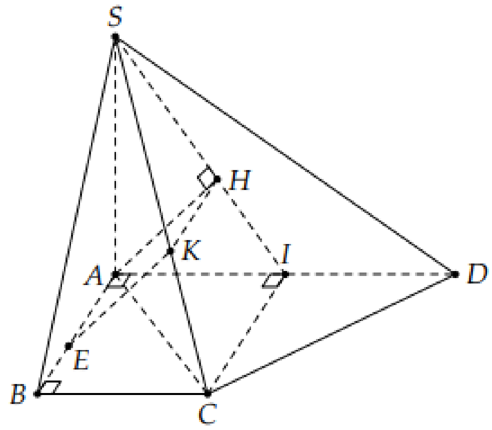
$\begin{cases} AC' \perp SC \\ AC' \perp CD \left(do\, CD \perp (SAC), AC' \subset (SAC)\right) \end{cases} \Rightarrow AC' \perp SD$ (2)

$AD' \perp SD$ (giả thiết) (3).

Từ (1), (2), (3) AB, AC', AD' cùng nằm trên (P) đi qua A và vuông góc với SD.

Do đó $C'D'$ đi qua một điểm cố định là giao điểm I của AB và CD khi điểm S di động trên đường thẳng Ax.

(3) *Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và SC khi $SA = a\sqrt{2}$.*



Ta có $CI // AB \Rightarrow AB // (SCI)$.

Kẻ $AH \perp SI$ tại H.

Ta có $AH \perp SI, AH \perp CI$ (do $CI \perp (SAD)$)

$\Rightarrow AH \perp (SCI)$.

Kẻ $HK // CI$ $(K \in SC)$ và lấy điểm $E \in AB : AE = HK$.

Khi đó $AHKE$ là hình bình hành $\Rightarrow AH // KE$.

Suy ra, $KE \perp AB$ (do $AH \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$)

và $KE \perp SC$ (do $AH \perp (SCI) \Rightarrow AH \perp SC$).

Do đó, KE là đoạn vuông góc chung của AB và SC.

Xét ΔSAI: $AH = \dfrac{SA.AI}{\sqrt{SA^2 + AI^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}.a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(AB, SC) = KE = AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

--------------------Hết--------------------