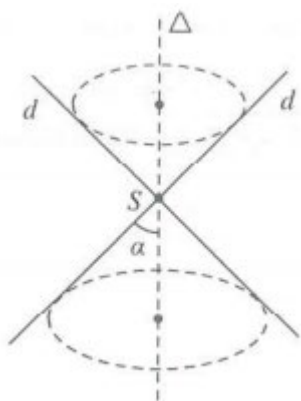


## CHỦ ĐỀ 12: MẶT NÓN - HÌNH NÓN - KHỐI NÓN

### A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

#### I. ĐỊNH NGHĨA MẶT NÓN

Cho đường thẳng  $\Delta$ . Xét một đường thẳng  $d$  cắt  $\Delta$  tại  $S$  tạo thành một góc  $\alpha$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Mặt tròn xoay sinh bởi đường thẳng  $d$  như thế khi quay quanh  $\Delta$  gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản hơn là mặt nón)



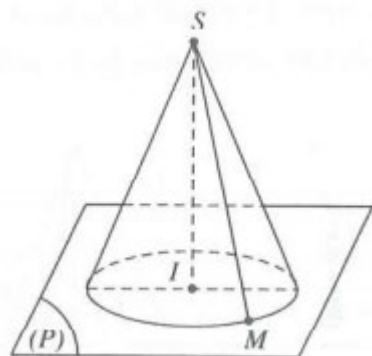
- $\Delta$  gọi là trục của mặt nón
- $D$  gọi là đường sinh của mặt nón
- $S$  gọi là đỉnh của mặt nón
- Góc  $2\alpha$  gọi là góc ở đỉnh của mặt nón (hình vẽ bên)

#### II. HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

Cho mặt nón  $(N)$  với trục  $\Delta$ , đỉnh  $S$ , góc ở đỉnh  $2\alpha$

Gọi  $(P)$  là mặt phẳng vuông góc với  $\Delta$  tại điểm  $I$  khác  $S$ . Mặt phẳng  $(P)$  cắt mặt nón theo một đường tròn  $(C)$  có tâm  $I$ . Lại gọi  $(P')$  là mặt phẳng vuông góc với  $\Delta$  tại  $S$ .

Khi đó: Phần của mặt nón  $(N)$  giới hạn bởi hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(P')$  cùng với hình tròn xác định bởi  $(C)$  được gọi là hình nón:



- S gọi là đỉnh của hình nón
- Đường tròn (C) gọi là đường tròn đáy của hình nón
- Với mỗi điểm M nằm trên đường tròn (C), đoạn thẳng SM gọi là đường sinh của hình nón
- Đoạn thẳng SI gọi là trục của hình nón (đó chính là khoảng cách từ đỉnh S đến mặt đáy)
- Một hình nón chia không gian thành hai phần: phần bên trong và phần bên ngoài của nó. Hình nón cùng với phần bên trong của nó gọi là khối nón

### III. KHÁI NIỆM VỀ DIỆN TÍCH HÌNH NÓN VÀ THỂ TÍCH KHỐI NÓN

Một hình chóp gọi là nội tiếp hình nón nếu:

- Đáy của hình chóp là đa giác nội tiếp đáy của hình nón
- Đỉnh của hình chóp là đỉnh của hình nón

#### 1. Định nghĩa.

Diện tích xung quanh của hình nón là giới hạn của diện tích xung quanh của một hình chóp đều nội tiếp hình nón đó khi số cạnh đáy tăng lên vô hạn

Thể tích của khối nón là giới hạn của thể tích khối chóp đều nội tiếp khối nón đó khi số cạnh tăng lên vô hạn

#### 2. Diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón

Diện tích xung quanh:  $S_{xq} = \pi Rl$

Diện tích toàn phần:  $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi Rl + \pi R^2$

Trong đó, R, l lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón

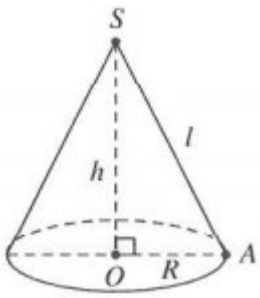
#### 3. Thể tích của khối nón

Thể tích của khối nón có bán kính đáy R và chiều cao h là  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

#### 4. Mối liên hệ giữa chiều cao, đường sinh và bán kính đáy

Tam giác SAO vuông tại A, có  $SA^2 = SO^2 + OA^2$

Do đó  $l^2 = h^2 + R^2$  (tham khảo hình vẽ bên)

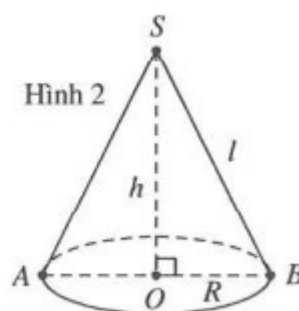
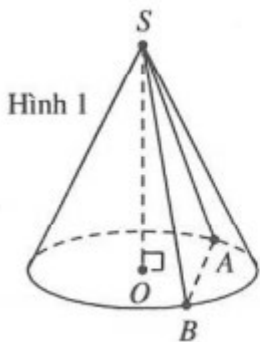


#### IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HÌNH NÓN VỚI MỘT MẶT PHẪNG QUA ĐỈNH CỦA NÓ

Cho một hình nón (N) và một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh S của hình nón.

Có ba vị trí tương đối giữa (P) và (N)

- (P) và (N) có một điểm chung duy nhất
- (P) và (N) có chung một đường sinh duy nhất. Khi đó (P) tiếp xúc với (N) và (P) gọi là tiếp diện của (N)
- (P) và (N) có chung hai đường sinh (Hình 1). Nếu (P) chứa trục của hình nón thì thiết diện của (P) và hình nón gọi là thiết diện qua trục (Hình 2)



- Thiết diện qua trục của hình nón là tam giác cân có cạnh bên  $SA = l$ , cạnh đáy  $AB = 2R$

#### B. CÁC DẠNG TOÁN TRỌNG TÂM VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

##### Dạng 1. Bài toán liên quan đến công thức diện tích, thể tích

**Ví dụ 1:** Diện tích xung quanh hình nón có bán kính đáy  $R = 3$ , chiều cao  $h = 4$  bằng

A.  $12\pi$

B.  $6\pi$

C.  $15\pi$

D.  $9\pi$

*Lời giải*

$$\text{Độ dài đường sinh } l = \sqrt{R^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Vậy diện tích xung quanh hình nón là  $S_{xq} = \pi Rl = 15\pi$ . **Chọn C**

**Ví dụ 2:** Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 4, diện tích xung quanh bằng  $20\pi$ . Thể tích khối nón đã cho bằng

A.  $4\pi$

B.  $8\pi$

C.  $20\pi$

D.  $16\pi$

**Lời giải**

$$\text{Theo giả thiết, ta có } \begin{cases} R = 4 \\ S_{xq} = 20\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 4 \\ \pi Rl = 20\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 4 \\ l = 5 \end{cases}$$

$$\text{Lại có: } l^2 = h^2 + R^2 \rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón (N) là } V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot 4^2 \cdot 3 = 16\pi$$

**Chọn D**

**Ví dụ 3:** Cho hình nón (N) có diện tích xung quanh bằng  $2\pi$ , diện tích toàn phần bằng  $3\pi$ . Thể tích khối nón đã cho bằng

A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

C.  $\frac{\sqrt{6}}{6}\pi$

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

**Lời giải**

$$\text{Diện tích xung quanh hình nón là } S_{xq} = \pi Rl = 2\pi \Leftrightarrow Rl = 2$$

$$\text{Diện tích toàn phần hình nón là } S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2 = 3\pi \Leftrightarrow Rl + R^2 = 3$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} Rl = 2 \\ Rl + R^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = 1 \\ Rl = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R = 1 \\ l = 2 \end{cases} \rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón (N) là } V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

**Chọn A**

**Ví dụ 4:** Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng  $60^\circ$ , độ dài đường sinh bằng 4. Thể tích khối nón đã cho bằng

A.  $\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

B.  $\frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

C.  $2\sqrt{3}\pi$

D.  $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

**Lời giải**

Vì góc ở đỉnh của hình nón bằng  $60^\circ$   $l = 2R = 4 \Rightarrow R = 2$

Ta có  $h^2 + R^2 = l^2 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối nón đã cho là  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\pi}{3}$ .

**Chọn B.**

**Ví dụ 5:** Trong không gian, cho tam giác AC vuông tại A,  $AB = a$  và  $AC = a\sqrt{3}$ . Độ dài đường sinh  $l$  của hình nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB bằng

A.  $l = a$

B.  $l = a\sqrt{2}$

C.  $l = a\sqrt{3}$

D.  $l = 2a$

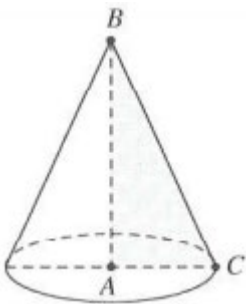
**Lời giải**

**Kỹ năng vẽ hình:** Tam giác quay quanh cạnh nào thì cạnh đó là trục, đồng thời chính là chiều cao của hình nón

Quay tam giác ABC xung quanh trục AB, ta được hình nón có chiều cao  $h = AB = a$ , bán kính đáy  $R = AC = a\sqrt{3}$  (hình vẽ bên)

Do đó, độ dài đường sinh là  $l = \sqrt{h^2 + R^2} = 2a$ .

**Chọn D.**



**Ví dụ 6:** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, góc  $ABC = 60^\circ$ ,  $BC = 4a$ . Thể tích khối nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AC bằng

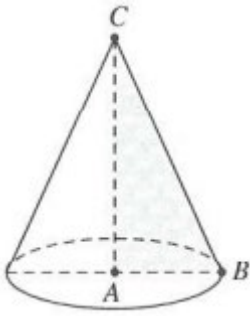
A.  $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

B.  $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$

C.  $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{9}$

D.  $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{9}$

**Lời giải**



Tam giác ABC vuông tại A, có  $\sin \hat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = 2a\sqrt{3}$

$$\text{Và } AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{(4a)^2 - (2a\sqrt{3})^2} = 2a$$

Quay tam giác ABC xung quanh trục AC, ta được hình nón có chiều cao  $h = AC = 2a\sqrt{3}$ , bán kính đáy  $R = AB = 2a$  (hình vẽ bên)

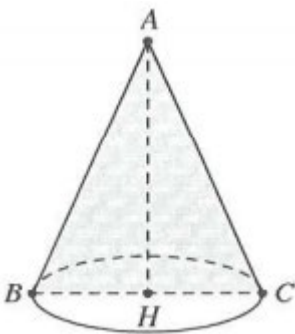
$$\text{Vậy thể tích khối nón cần tìm là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$$

**Chọn B**

**Ví dụ 7:** Trong không gian, cho tam giác ABC đều cạnh  $2a$ . Gọi H là trung điểm của BC. Thể tích của khối nón nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AH bằng

- A.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$       B.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{6}$

**Lời giải**



Quay tam giác ABC quanh trục AH, ta được hình nón có chiều cao  $h = AH = a\sqrt{3}$ , bán kính đáy

$$R = BH = \frac{BC}{2} = a \text{ (hình vẽ bên)}$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón cần tính là } V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{3}$$

**Chọn C**

**Ví dụ 8:** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A,  $AB = 3a$ ,  $BC = 5a$ . Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục BC bằng

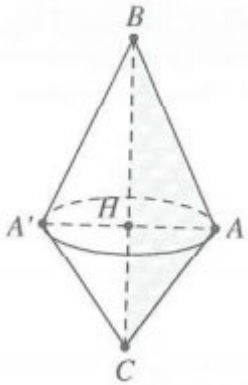
A.  $\frac{36\pi a^3}{5}$

B.  $\frac{48\pi a^3}{25}$

C.  $\frac{16\pi a^3}{5}$

D.  $\frac{48\pi a^3}{5}$

**Lời giải**



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC

Tam giác ABC vuông tại A, có  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4a$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{(3a)^2} + \frac{1}{(4a)^2} \Rightarrow AH = \frac{12a}{5}$$

Quay tam giác ABC quanh trục BC, ta được hai hình nón có chiều cao lần lượt là  $h_1 = BH, h_2 = CH$  và bán kính đáy  $R = AH$  (hình vẽ bên)

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là  $V = V_1 + V_2$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi \cdot AH^2 \cdot BC = \frac{48\pi a^3}{5}$$

**Chọn D.**

**Ví dụ 9:** Trong không gian, cho hình thang ABCD vuông tại A và D,  $AB = AD = a$ ,  $CD = 2a$ . Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình thang ABCD xung quanh trục AD bằng

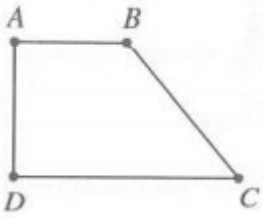
A.  $\frac{7\pi a^3}{3}$

B.  $\frac{5\pi a^3}{3}$

C.  $\frac{4\pi a^3}{3}$

D.  $\frac{8\pi a^3}{3}$

**Lời giải**



Quay hình thang ABCD quanh trục AD, ta được khối nón cụt có hai bán kính đáy lần lượt là  $R_1 = AB, R_2 = CD$  và chiều cao  $h = AD$

Công thức tính thể tích nón cụt  $V = \frac{1}{3} \pi h (R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$  được phát triển từ công thức thể tích tổng quát của khối có hai đáy song song

Vậy thể tích cần tính là  $V = \frac{1}{3} \pi a [a^2 + (2a)^2 + a \cdot 2a] = \frac{7\pi a^3}{3}$

**Chọn A.**

**Ví dụ 10:** Trong không gian, cho hình thang ABCD có  $AB \parallel CD$  và  $AB = AD = BC = a, CD = 2a$ . Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình thang ABCD xung quanh trục AB bằng

- A.  $\frac{5\pi a^3}{3}$                       B.  $\pi a^3$                       C.  $\frac{5\pi a^3}{4}$                       D.  $\frac{5\pi a^3}{2}$

**Lời giải**

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang ABCD quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích V tạo bởi hai khối:

- Khối trụ tròn xoay có chiều cao  $h = CD = MN = 2a$  và bán kính đường tròn đáy

$$R = DN = \sqrt{DA^2 - NA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (như hình vẽ bên).}$$

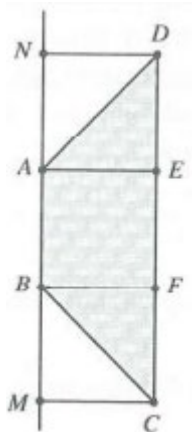
- Thể tích khối trụ trên trừ đi thể tích  $2 \cdot V_2$  của hai khối nón có chiều cao  $h_2 = \frac{a}{2}$  và bán kính đường

tròn đáy  $R = DN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

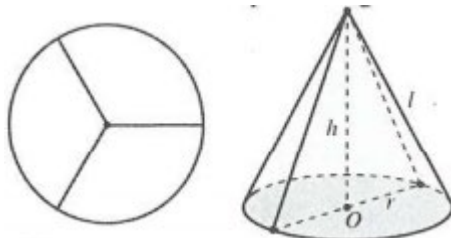
Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là  $V = V_1 - 2 \cdot V_2 = \pi \cdot 2a \cdot \frac{3a^2}{4} - \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{5}{4} \pi a^3$

**Chọn C**





**Ví dụ 11:** Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Thể tích của mỗi cái phễu bằng



A.  $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$  lít

B.  $\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$  lít

C.  $\frac{1600\sqrt{2}\pi}{3}$  lít

D.  $\frac{32\sqrt{2}\pi}{3}$  lít

**Lời giải**

Khi quấn hình quạt để tạo thành một hình nón, ta được

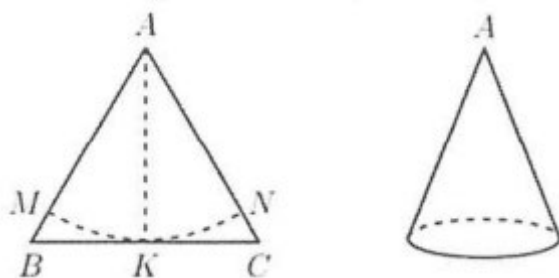
- Đường sinh hình nón bằng bán kính hình quạt  $l = R = 60\text{cm}$
- Chu vi đáy hình nón bằng độ dài cung hình quạt  $C = 2\pi r = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 60 \Rightarrow r = 20$

Do đó, chiều cao của hình nón là  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{60^2 - 20^2} = 40\sqrt{2}\text{cm}$

Vậy thể tích của mỗi cái phễu là  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40\sqrt{2} = \frac{1600\sqrt{2}\pi}{3}\text{cm}^3 = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$  lít.

**Chọn B.**

**Ví dụ 12:** Có một miếng tôn hình tam giác đều ABC cạnh 3 dm (như hình vẽ).



Gọi K là trung điểm của BC. Người ta dùng compa có tâm là A và bán kính AK vạch ra cung tròn MN (M, N theo thứ tự thuộc cạnh AB và AC) rồi cắt miếng tôn theo cung tròn đó. Lấy phần hình quạt người ta gò sao cho cạnh AM và AN' trùng nhau thành một cái phễu hình nón không đáy với đỉnh A. Tính thể tích V của cái phễu.

- A.  $V = \frac{\sqrt{141} \cdot \pi}{64} dm^3$       B.  $V = \frac{\sqrt{105} \cdot \pi}{64} dm^3$       C.  $V = \frac{3\sqrt{3} \cdot \pi}{32} dm^3$       D.  $V = \frac{3\pi}{64} dm^3$

**Lời giải**

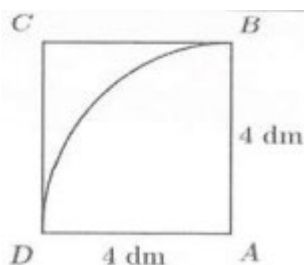
Độ dài đường sinh của phễu là  $l_N = AM = AK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Độ dài cung MN là  $\ell = \frac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot AK = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} (dm)$

Bán kính đáy của phễu là  $r = \frac{\ell}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}}{4}$  suy ra  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \sqrt{\ell_N^2 - r^2} = \frac{\sqrt{105}\pi}{64} (dm^3)$

**Chọn B.**

**Ví dụ 13:** Từ miếng tôn hình vuông cạnh bằng 4 dm, người ta cắt ra hình quạt tâm A bán kính AB = AD = 4 dm (xem hình) để cuộn lại thành một chiếc phễu hình nón (khi đó AB trùng với AD). Chiều cao của chiếc phễu có số đo gần đúng (làm tròn đến 3 chữ số thập phân) là



- A. 3,872 dm      B. 3,874 dm      C. 3,871 dm      D. 3,873 dm

**Lời giải**

Chu vi của đáy hình nón có độ dài bằng cung BD.

Độ dài cung BD là:  $l = \frac{1}{4} \cdot (2\pi \cdot 4) = 2\pi$ . Suy ra bán kính đường tròn đáy hình nón là:  $r = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

Độ dài đường sinh của hình nón là  $l = 4\text{dm} \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = 3,873\text{dm}$ .

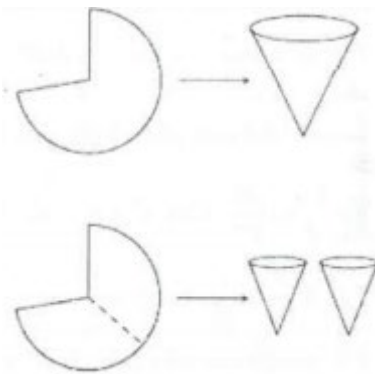
**Chọn D.**

**Ví dụ 14:** Từ một tấm kim loại dẻo hình quạt (như hình vẽ) có bán kính  $R = 13$  và chu vi hình quạt là  $P = 12\pi$ , người ta gò tấm kim loại đó thành những chiếc phễu hình nón theo hai cách:

Cách 1: Gò tấm kim loại ban đầu thành mặt xung quanh của một cái phễu.

Cách 2: Chia đôi tấm kim loại thành hai phần bằng nhau rồi gò thành mặt xung quanh của hai cái phễu.

Gọi  $V_1$  là thể tích của cái phễu ở cách 1,  $V_2$  là tổng thể tích của hai cái phễu ở cách 2. Tính tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$



A.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{133}}{\sqrt{160}}$

B.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{133}}{\sqrt{160}}$

C.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\sqrt{160}}{\sqrt{133}}$

D.  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

**Lời giải**

Theo cách 1 ta có: Độ dài đường sinh của hình nón là:  $l = 13$ , chu vi đáy  $r = \frac{12\pi}{2\pi} = 6$

Khi đó thể tích của chiếc phễu là:  $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - h^2} = 12\pi\sqrt{133}$

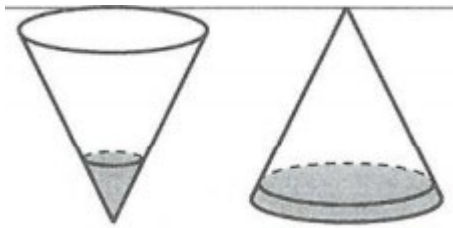
Theo cách 2 ta có: Độ dài đường sinh của hình nón là:  $l = 13$ , chu vi đáy mỗi phễu là:  $r = \frac{6\pi}{2\pi} \Rightarrow r = 3$

Khi đó tổng thể tích của hai chiếc phễu là:  $V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - h^2} = 24\pi\sqrt{10}$

$$\text{Quy ra } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{133}}{2\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{133}}{\sqrt{160}}$$

**Chọn D.**

**Ví dụ 15:** Một cái phễu có dạng hình nón. Người ta đổ một lượng nước vào phễu sao cho chiều cao của lượng nước trong phễu bằng  $\frac{1}{3}$  chiều cao của phễu. Hỏi nếu bịt kín miệng phễu rồi lộn ngược phễu lên thì chiều cao nước xấp xỉ bằng bao nhiêu? Biết rằng chiều cao của phễu là 15 cm



A. 0,5 cm

B. 0,3 cm

C. 0,188 cm

D. 0,216 cm

*Lời giải*

Gọi bán kính đáy của phễu là  $R$ , chiều cao của phễu là  $h = 15$  cm

Vì chiều cao nước trong phễu ban đầu bằng  $\frac{1}{3}h$

Suy ra bán kính đáy hình nón tạo bởi lượng nước là  $\frac{1}{3}R$

Thể tích phễu và thể tích nước lần lượt là  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = 5\pi R^2$ ,  $V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{3}\right)^2 \cdot \frac{h}{3} = \frac{5}{27}\pi R^2$

Do đó, thể tích phần khối nón không chứa nước là  $V_2 = V - V_1 = 5\pi R^2 - \frac{5}{27}\pi R^2 = \frac{130}{27}\pi R^2 \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{26}{27}$

Gọi  $h'$  và  $r$  lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón không chứa nước

$$\frac{h'}{h} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{V_2}{V} = \frac{h'^3}{h^3} = \frac{h'^3}{15^3} = \frac{26}{27} \rightarrow h' = 5\sqrt[3]{26}$$

Vậy chiều cao cần tính là  $h_0 = h - h' = 15 - 5\sqrt[3]{26} = 0,188$  cm

**Chọn C.**

**Ví dụ 16:** Bạn Hùng có một tấm bìa hình tròn như vẽ bên dưới, Hùng muốn biến hình tròn đó thành một cái

phễu hình nón. Khi đó bạn Hùng phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau (diện tích chỗ dán nhỏ không đáng kể). Gọi  $x$  là góc ở tâm hình quạt dùng làm phễu. Tìm  $x$  để thể tích phễu lớn nhất?

A.  $\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$

B.  $\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$

**Lời giải**

Gọi  $R$ ,  $h$  lần lượt là bán kính đáy, chiều cao của hình nón

Thể tích khối nón là  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} R^2 \cdot \sqrt{l^2 - R^2}$

Ta có:  $R^4(l^2 - R^2) = 4 \cdot \frac{R^2}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot (l^2 - R^2) \leq 4 \cdot \frac{\left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^2}{2} + l^2 - R^2\right)^3}{27} = \frac{4l^6}{27}$

Do đó  $R^2 \cdot (l^2 - R^2) \leq \sqrt{\frac{4l^6}{27}} = \frac{2\sqrt{3}l^3}{9} \Rightarrow V \leq \frac{2\sqrt{3}\pi l^3}{27}$

Dấu bằng xảy ra khi  $\frac{R^2}{2} = l^2 - R^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{3}{2}R^2 \Leftrightarrow l = \frac{R\sqrt{6}}{2}$  (1)

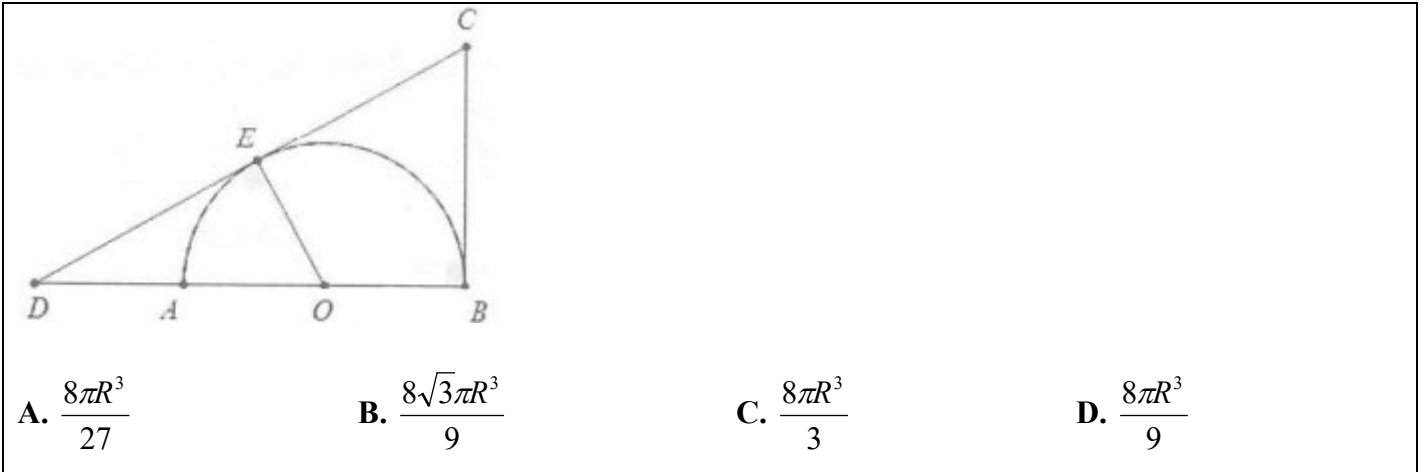
Hình nón nhận được là có đường sinh  $l = OA$ , chu vi đáy là độ dài cung AB

Vì  $x = \widehat{AOB} \Rightarrow$  độ dài cung  $AB = OA \times x = lx \Rightarrow 2\pi R = lx \Rightarrow x = \frac{2\pi R}{l}$  (2)

Từ (1), (2) suy ra  $x = 2\pi \cdot \frac{R}{l} = 2\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$ .

**Chọn B.**

**Ví dụ 17:** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$ , kí hiệu A là đường thẳng vuông góc với AB tại B. Trên nửa đường tròn lấy điểm E di động, tiếp tuyến của nửa đường tròn tại E và cắt tia đối của tia AB tại D và cắt  $\Delta$  tại C (như hình vẽ dưới). Khi quay tam giác BCD quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích nhỏ nhất là ?



**Lời giải**

Đặt  $\widehat{BOC} = \alpha \Rightarrow \alpha \in (45^\circ; 90^\circ) \Rightarrow \tan \alpha > 1$ , chú ý công thức tan sau  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

Tam giác OBC vuông tại B, có  $\tan \widehat{BOC} = \frac{BC}{BO} \Rightarrow BC = R \cdot \tan \alpha$

Ta có  $\widehat{BCD} = 2(90^\circ - \alpha) \Rightarrow BD = BC \cdot \tan(180^\circ - 2\alpha) = -BC \cdot \tan 2\alpha$ .

Khi quay tam giác BCD quanh trục AB ta được khối tròn xoay có thể tích là

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{\pi}{3} \cdot BC^2 \cdot BD = -\frac{\pi}{3} \cdot BC^2 \cdot \tan 2\alpha = \frac{2\pi}{3} \cdot R^3 \cdot \frac{\tan^4 \alpha}{\tan^2 \alpha - 1} \geq \frac{8\pi R^3}{3}$$

Vì  $\tan^4 \alpha \geq 4(\tan^2 \alpha - 1) \Leftrightarrow (\tan^2 \alpha - 2)^2 \geq 0; \forall \alpha \in (45^\circ; 90^\circ)$ . Vậy  $V_{\min} = \frac{8\pi R^3}{3}$

**Chọn C.**

### Dạng 2. Bài toán về thiết diện qua đỉnh nón

**Ví dụ 1:** Cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua trục ta được thiết diện là một tam giác có cạnh huyền bằng  $a\sqrt{6}$ . Thể tích V của khối nón đã cho bằng

A.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{4}$       B.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{3}$       C.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{6}$       D.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{2}$

**Lời giải**

Thiết diện qua trục hình nón là tam giác cân SAB có cạnh bên  $SA = l$ , cạnh đáy  $AB = 2R$

Theo bài ra, ta có  $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Leftrightarrow 2l^2 = 4R^2 \Leftrightarrow l = R\sqrt{2}$

Mặt khác  $AB = 2R = a\sqrt{6} \Rightarrow R = a\sqrt{6}$  suy ra  $l = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{3}$

Do đó  $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \rightarrow V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{4}$

**Chọn A.**

**Ví dụ 2:** Thiết diện qua trục của hình nón (N) là tam giác vuông cân và có diện tích bằng  $a^2$ . Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A.  $S_{xq} = 2\pi a^2$

B.  $S_{xq} = \sqrt{2}\pi a^2$

C.  $S_{xq} = 4\pi a^2$

D.  $S_{xq} = 2\sqrt{2}\pi a^2$

**Lời giải**

Thiết diện qua trục hình nón là tam giác cân SAB có cạnh bên  $SA = l$ , cạnh đáy  $AB = 2R$

Theo bài ra, tam giác SAB vuông  $\Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{SA^2}{2} = \frac{l^2}{2} = a^2 \Rightarrow l = a\sqrt{2}$

Do đó  $l = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{l}{\sqrt{2}} = a$ . Vậy diện tích cần tìm là  $S_{xq} = \pi Rl = \sqrt{2}\pi a^2$ . Chọn B.

**Ví dụ 3:** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh a. Thể tích của khối nón đã cho là

A.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{8}$

B.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$

C.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$

D.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{12}$

**Lời giải**

Theo bài ra, tam giác SAB đều cạnh a  $\Rightarrow SA = SB = AB = a$

Do đó, chiều cao  $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , bán kính đáy  $R = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

Vậy thể tích cần tính là  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{24}$

**Chọn C**

**Ví dụ 4:** Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 9 cm, góc giữa đường sinh và mặt đáy là  $30^\circ$ . Diện tích thiết diện qua trục của hình nón (N) bằng

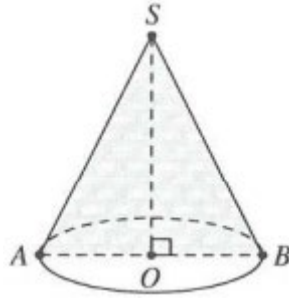
A.  $9\sqrt{3}cm^2$

B.  $18\sqrt{3}cm^2$

C.  $6\sqrt{3}cm^2$

D.  $27\sqrt{3}cm^2$

**Lời giải**



Theo bài ra, ta có  $AB = 2R = 18$  và  $\widehat{SAO} = 30^\circ$

Tam giác SAO vuông tại O, có  $SO = OA \cdot \tan \widehat{SAO} = 9 \cdot \tan 30^\circ = 3\sqrt{3}$

Thiết diện qua trục hình nón là tam giác cân SAB

Suy ra diện tích cần tính là  $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SO \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 18 = 27\sqrt{3} \text{ cm}^2$

**Chọn D**

**Ví dụ 5:** Thiết diện qua trục của hình nón (N) là tam giác có chu vi bằng 10 cm, diện tích bằng  $2\sqrt{5} \text{ cm}^2$ .  
 Tính thể tích khối nón (N), biết rằng bán kính là số nguyên dương.

A.  $\frac{2\sqrt{5}\pi}{3} \text{ cm}^2$

B.  $\frac{4\sqrt{5}\pi}{3} \text{ cm}^2$

C.  $\frac{8\sqrt{5}\pi}{3} \text{ cm}^2$

D.  $2\sqrt{5}\pi \text{ cm}^2$

**Lời giải**

Theo bài ra, ta có 
$$\begin{cases} 2l + 2R = 10 \\ \frac{1}{2} h \cdot 2R = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l + R = 5 \\ h \cdot R = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 5 - R \\ R \cdot \sqrt{l^2 - R^2} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Do đó  $R^2 \cdot [(5 - R)^2 - R^2] = 20 \Leftrightarrow R^2(25 - 10R) = 20 \Leftrightarrow 10R^3 - 25R^2 + 20 = 0 \Rightarrow R = 2$

Suy ra  $h = \sqrt{5}$  Vậy thể tích cần tính là  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot \sqrt{5} = \frac{4\sqrt{5}\pi}{3} \text{ cm}^3$ . **Chọn B**

**Ví dụ 6:** Hình nón (N) có đỉnh S, tâm đường tròn đáy là O, góc ở đỉnh bằng  $120^\circ$ . Một mặt phẳng qua S cắt hình nón (N) theo thiết diện là tam giác vuông SAB. Biết rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO bằng 3. Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón (N)

A.  $S_{xq} = 18\sqrt{3}\pi$

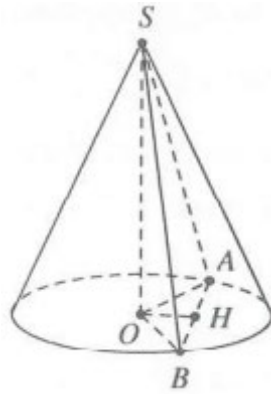
B.  $S_{xq} = 9\sqrt{3}\pi$

C.  $S_{xq} = 36\sqrt{3}\pi$

D.  $S_{xq} = 27\sqrt{3}\pi$

**Lời giải**





Vì góc ở đỉnh bằng  $120^\circ \Rightarrow 2R = l\sqrt{3} \Rightarrow SA = \frac{2\sqrt{3}}{3}OA = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$

Gọi H là trung điểm của AB  $\Rightarrow OH \perp AB$  mà  $SO \perp OH$

Suy ra OH là đoạn vuông góc chung của AB và SO  $\Rightarrow OH = 3$

Tam giác OAH vuông tại H, có  $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{R^2 - 9}$

Tam giác SAB vuông tại S, có  $SA^2 + SB^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left( \frac{2\sqrt{3}}{3}R \right)^2 = 4(R^2 - 9) \Leftrightarrow -\frac{4}{3}R^2 = -36 \Rightarrow R = 3\sqrt{3} \Rightarrow l = 6$$

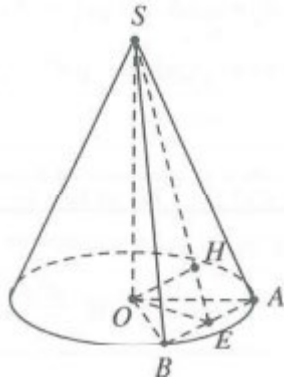
Vậy diện tích xung quanh cần tính là  $S_{xq} = \pi Rl = 18\sqrt{3}\pi$ .

**Chọn A.**

**Ví dụ 7:** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O, bán kính R. Dụng hai đường sinh SA và SB, biết AB chắn trên đường tròn đáy một cung có số đo bằng  $60^\circ$ , khoảng cách từ tâm O đến mặt phẳng (SAB) bằng  $\frac{R}{2}$ . Đường cao h của hình nón bằng

- A.  $R\sqrt{2}$                       B.  $\frac{R\sqrt{6}}{4}$                       C.  $\frac{R\sqrt{3}}{2}$                       D.  $R\sqrt{3}$

**Lời giải**



Theo giả thiết, ta có tam giác OAB đều cạnh R

Gọi E là trung điểm AB, suy ra  $OE \perp AB$  và  $OE = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Gọi h là hình chiếu của O trên SE  $\Rightarrow OH \perp SE$

Ta có  $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SEO) \Rightarrow AB \perp OH$

Từ đó suy ra  $OH \perp (SAB)$  nên  $d(O; (SAB)) = OH = \frac{R}{2}$

Tam giác SEO vuông tại O, có  $\frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OH^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{8}{3R^2} \Rightarrow SO = \frac{R\sqrt{6}}{4}$

**Chọn B**

**Ví dụ 8:** Cho hình nón đỉnh S có đáy là hình tròn tâm O. Dựng hai đường sinh SA và SB, biết tam giác SAB vuông và có diện tích bằng  $4a^2$ . Góc tạo bởi giữa trục SO và mặt phẳng (SAB) bằng  $30^\circ$ . Đường cao h của hình nón bằng

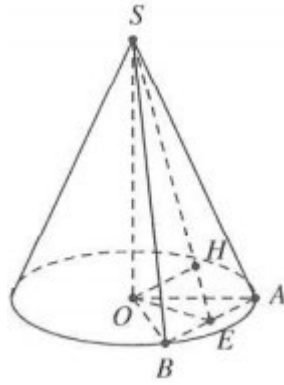
A.  $a\sqrt{2}$

B.  $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D.  $a\sqrt{3}$

*Lời giải*



Theo giả thiết, ta có tam giác SAB vuông cân tại S

Gọi E là trung điểm AB, suy ra  $\begin{cases} SE \perp AB \\ OE \perp AB \end{cases}$  và  $SE = \frac{1}{2} AB$

$$\text{Ta có } S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SE = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot \frac{1}{2} AB = 4a^2 \Rightarrow AB = 4a$$

Gọi H là hình chiếu của O trên SE  $\Rightarrow OH \perp SE$

Lại có  $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SEO) \Rightarrow AB \perp OH$

Từ đó suy ra  $OH \perp (SAB) \Rightarrow \widehat{(SO; (SAB))} = \widehat{OSH} = 30^\circ$

Tam giác SEO vuông tại O, có  $SO = SE \cdot \cos \widehat{OSE} = a\sqrt{3}$ .

**Chọn D.**

**Ví dụ 9:** Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO. Gọi A, B là hai điểm thuộc đường tròn đáy của hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a và  $\widehat{SAO} = 30^\circ, \widehat{SAB} = 60^\circ$ . Độ dài đường sinh l của hình nón bằng

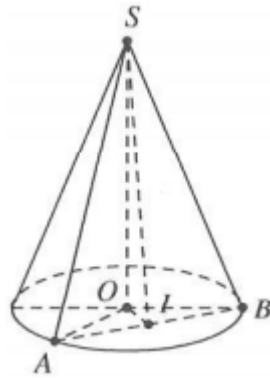
**A.**  $l = a$

**B.**  $l = a\sqrt{3}$

**C.**  $l = a\sqrt{2}$

**D.**  $l = 2a$

**Lời giải**



Gọi I là trung điểm AB, suy ra  $OI \perp AB, SI \perp AB$  và  $OI = a$

Tam giác SAO vuông tại O, có  $OA = SA \cdot \cos \widehat{SAO} = \frac{SA\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAI vuông tại I, có  $IA = SA \cos \widehat{SAB} = \frac{SA}{2}$

Tam giác OIA vuông tại I, có  $OA^2 = OI^2 + IA^2$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}SA^2 = a^2 + \frac{1}{4}SA^2 \Leftrightarrow SA^2 = 2a^2 \Rightarrow SA = a\sqrt{2}$$

Vậy độ dài đường sinh cần tìm là  $l = a\sqrt{2}$ . **Chọn C.**

**Ví dụ 10:** Một hình nón có bán kính đáy R, góc ở đỉnh là  $60^\circ$ . Một thiết diện qua đỉnh nón chắn trên đáy một cung có số đo  $90^\circ$ . Diện tích của thiết diện là

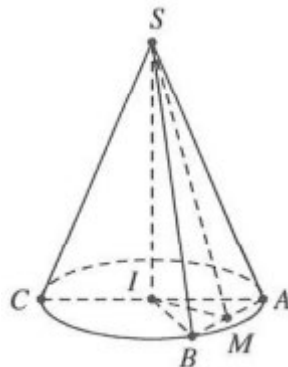
A.  $\frac{R^2\sqrt{7}}{2}$

B.  $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

C.  $\frac{3R^2}{2}$

D.  $\frac{R^2\sqrt{6}}{2}$

**Lời giải**



Vì góc ở đỉnh là  $60^\circ$  nên thiết diện qua trục SAC là tam giác đều cạnh  $2R \Rightarrow$  Đường cao của hình nón là  $SI = R\sqrt{3}$

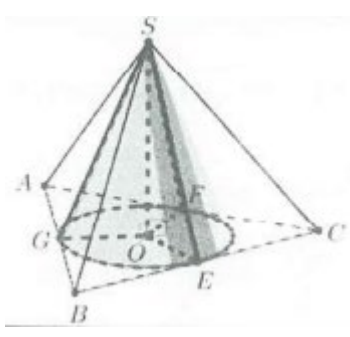
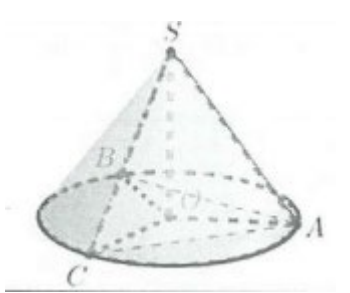
Tam giác SA là thiết diện qua đỉnh, chắn trên đáy cung AB có số đo bằng  $90^\circ$  nên IAB là tam giác vuông cân tại I  $\Rightarrow AB = R\sqrt{2}$

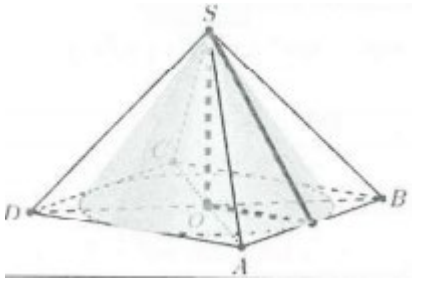
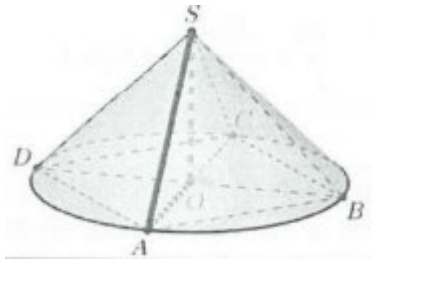
Gọi M là trung điểm của AB thì  $\begin{cases} IM \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases}$  và  $IM = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SMI vuông tại I, có  $SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \frac{R\sqrt{14}}{2}$

Vậy diện tích cần tính là  $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} AB \cdot SM = \frac{R^2\sqrt{7}}{2}$ . Chọn A.

### Dạng 3. Hình nón nội — ngoại tiếp khối chóp đều

Mô hình	Hình vẽ tham khảo (3D)	Tính chất
Hình nón nội tiếp hình chóp tam giác đều		<ul style="list-style-type: none"> <li>● Chiều cao SO là chiều cao của hình chóp</li> <li>● Bán kính đáy OE là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đáy</li> <li>● Đường sinh <math>l = SE</math></li> </ul>
Hình nón ngoại tiếp hình chóp tam giác đều		<ul style="list-style-type: none"> <li>● Chiều cao SO là chiều cao của hình chóp</li> <li>● Bán kính đáy OA là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy</li> <li>● Đường sinh <math>l = SA</math></li> </ul>

<p>Hình nón nội tiếp hình chóp tứ giác đều</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>● Chiều cao <math>SO</math> là chiều cao của hình chóp</li> <li>● Bán kính đáy <math>OM</math> (với <math>M</math> là trung điểm <math>AB</math>) là bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông đáy</li> <li>● Đường sinh <math>l = SM</math></li> </ul>
<p>Hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều</p>		<ul style="list-style-type: none"> <li>● Chiều cao <math>SO</math> là chiều cao của hình chóp</li> <li>● Bán kính đáy <math>OA</math> là bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông đáy</li> <li>● Đường sinh <math>l = SA</math></li> </ul>

**Ví dụ 1:** Thể tích khối nón ngoại tiếp tứ diện đều cạnh  $a$  là

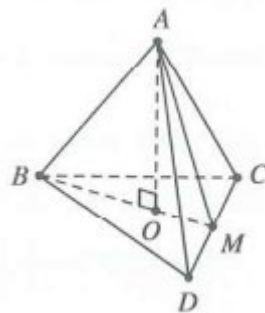
A.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{9}$

B.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{27}$

C.  $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{27}$

D.  $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{9}$

**Lời giải**



Gọi  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCD \Rightarrow AO \perp (BCD)$

Để thấy, bán kính đường tròn ngoại tiếp  $\triangle BCD$  là  $OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Suy ra bán kính đáy hình nón là  $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác ABO vuông tại O, có  $AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Do đó, chiều cao của hình nón là  $h = AO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy thể tích cần tính là  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}\pi a^3}{27}$

**Chọn C**

**Ví dụ 2:** Diện tích xung quanh của hình nón ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng  $a$  và cạnh bên bằng  $4a$  là

- A.  $2\sqrt{2}\pi a^2$                       B.  $\sqrt{2}\pi a^2$                       C.  $4\pi a^2$                       D.  $2\pi a^2$

*Lời giải*

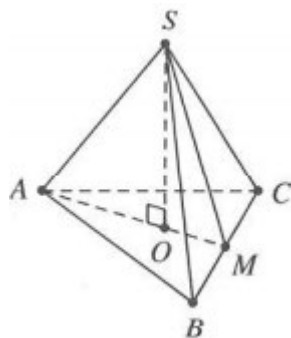
Theo bài ra, ta có bán kính đáy  $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ; đường sinh  $l = 4a$  (xem mô hình ở lý thuyết)

Vậy diện tích xung quanh cần tính là  $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot 4a = 2\sqrt{2}\pi a^2$ . Chọn A.

**Ví dụ 3:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có  $SA = AB = a$ . Thể tích khối nón đỉnh S và có đường tròn đáy nội tiếp tam giác ABC bằng

- A.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{27}$                       B.  $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{27}$                       C.  $\frac{\sqrt{6}\pi a^3}{108}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{108}$

*Lời giải*



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$

Bán kính đáy hình nón là  $R = r_{\Delta ABC} = OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Tam giác SAO vuông tại O, có  $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vậy thể tích khối nón cần tính là  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}\pi a^3}{108}$

**Chọn C.**

**Ví dụ 4:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Tam giác SAB có diện tích bằng  $2a^2$ . Thể tích khối nón có đỉnh S và đường tròn đáy nội tiếp tứ giác ABCD bằng

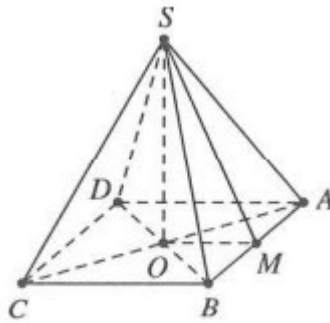
A.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{6}$

B.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{8}$

C.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{4}$

D.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{2}$

**Lời giải**



Gọi M là trung điểm AB  $\Rightarrow SM \perp AB \Rightarrow S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SM \cdot AB$

Mà  $S_{\Delta SAB} = 2a^2$ ;  $AB = a \rightarrow SM = 2.2a^2 : a = 4a$

Bán kính đáy hình nón  $R = OM = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$

Tam giác SMO vuông tại M, có  $SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \frac{3\sqrt{7}a}{2}$

Vậy thể tích khối nón cần tính là  $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{7}a}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{7}}{8}$

**Chọn B.**

**Ví dụ 5:** Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng a và diện tích xung quanh  $S_{xq} = 2\pi a^2$ . Tính thể tích V của khối chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD nội tiếp đáy hình nón và đỉnh S trùng với đỉnh của hình nón



(N)?

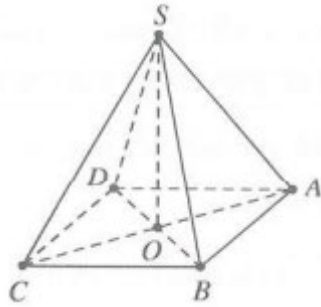
A.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$

B.  $\frac{2a^3}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

D.  $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$

*Lời giải*



Gọi O là tâm hình vuông ABCD  $\Rightarrow$  O là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD

Theo bài ra, đáy hình nón là đường tròn ngoại tiếp ABCD

$$\Rightarrow R = R_{ABCD} = OA = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow AC = 2a \Rightarrow AB = a\sqrt{2}$$

Diện tích xung quanh hình nón là  $S_{xq} = \pi Rl = 2\pi a^2 \Rightarrow l = 2a$

Hình nón (N) có đường sinh  $l = SA = 2a$

Tam giác SAO vuông tại O, có  $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a\sqrt{3}$

$$\text{Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot (a\sqrt{2})^2 = \frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$$

**Chọn D**

**Ví dụ 6:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh AB bằng a, góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng  $60^\circ$ . Diện tích xung quanh của hình nón đỉnh S và có đường tròn đáy ngoại tiếp tam giác ABC bằng

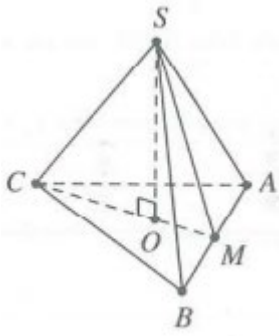
A.  $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$

B.  $\frac{\sqrt{7}\pi a^2}{3}$

C.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$

D.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^2}{6}$

*Lời giải*



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$

Bán kính đáy hình nón là  $R = R_{\Delta ABC} = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Gọi M là trung điểm AB  $\Rightarrow \begin{cases} AB \perp OM \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SMO)$

Do đó  $((SAB); (ABC)) = (SM; OM) = \widehat{SMO} = 60^\circ$

Tam giác SMO vuông tại O, có  $\cos \widehat{SMO} = \frac{OM}{SM} \Rightarrow SM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Tam giác SBM vuông tại M, có  $SB = \sqrt{SM^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

Vậy hình nón có đường sinh  $l = \frac{a\sqrt{21}}{6} \rightarrow S_{sq} = \pi Rl = \frac{\sqrt{7}\pi a^2}{6}$

**Chọn A.**

**Ví dụ 7:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh  $AB = BC = 10a$ ,  $AC = 12a$ , góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng  $45^\circ$ . Thể tích khối nón đỉnh S và có đường tròn đáy nội tiếp tam giác ABC bằng

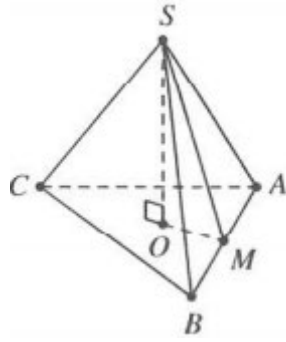
A.  $3\pi a^3$

B.  $9\pi a^3$

C.  $27\pi a^3$

D.  $12\pi a^3$

**Lời giải**



Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$   $SO \perp (ABC)$

Kẻ  $OM \perp AB \Rightarrow OM$  là bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$

Diện tích  $\Delta ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 48a^2$

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC \Rightarrow r_{\Delta ABC} = \frac{S}{p} = 3a$

Ta có  $AB \perp (SMO) \Rightarrow ((SAB); (ABC)) = \widehat{SMO} = 45^\circ$

Tam giác SMO vuông tại O, có  $SO = OM = r_{\Delta ABC} = 3a$

Vậy thể tích khối nón cần tính là  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi}{3} (3a)^2 \cdot 3a = 9\pi a^3$

**Chọn B.**

**Ví dụ 8:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng  $2a$ , khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến một mặt bên là  $\frac{a}{2}$ . Thể tích của khối nón ngoại tiếp hình chóp S.ABC bằng

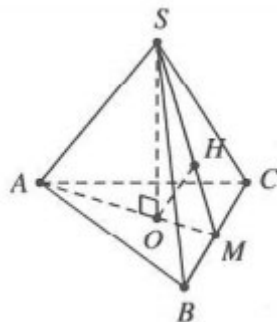
A.  $\frac{4\pi a^3}{3}$

B.  $\frac{4\pi a^3}{27}$

C.  $\frac{4\pi a^3}{9}$

D.  $\frac{2\pi a^3}{3}$

**Lời giải**



Gọi M là trung điểm BC  $\Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Kẻ  $OH \perp SM$  mà  $BC \perp OH \Rightarrow OH \perp (ABC)$

$$\text{Tacó } OM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2a = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Tam giác SMO vuông tại O, có } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OM^2} \Rightarrow SO = a$$

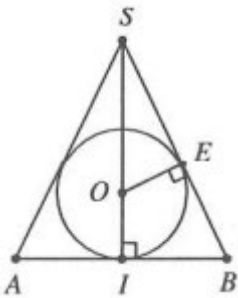
$$\text{Bán kính đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC \text{ là } R_{\Delta ABC} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy thể tích khối nón cần tính là } V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{\pi a}{3} \cdot \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi a^3}{9}$$

**Chọn C**

#### **Dạng 4. Hình nón nội - ngoại tiếp hình trụ, hình cầu**

##### **Hình nón ngoại tiếp hình cầu**



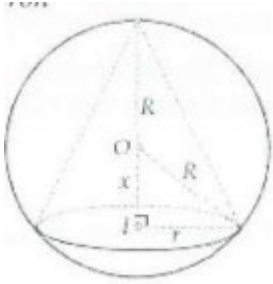
**Lý thuyết:** Xét mặt cắt qua trục, ta đưa về bài toán tam giác ngoại tiếp đường tròn

**Bài toán:** Gọi  $R, r, h$  lần lượt là bán kính mặt cầu, bán kính đáy và chiều cao hình nón  
 $\Rightarrow R = OI, r = IB, h = SI$

$$\text{Ta có } \Delta SEO \sim \Delta SIB \Rightarrow \frac{OE}{IB} = \frac{SO}{SB} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{h-R}{\sqrt{h^2+r^2}}$$

$$\text{Vậy mối liên hệ cần tìm là } \boxed{R = \frac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}}}$$

##### **Hình nón nội tiếp hình cầu**



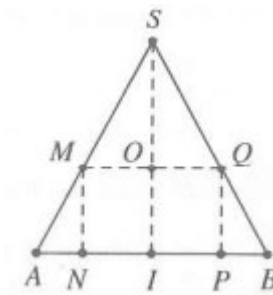
**Lý thuyết:** Xét mặt cắt qua trục, ta đưa về bài toán tam giác nội tiếp đường tròn

**Bài toán:** Gọi  $R, r, h$  lần lượt là bán kính mặt cầu, bán kính đáy và chiều cao hình nón

Ta có  $x^2 + r^2 = R^2$  mà  $x = h - R \Rightarrow (h - R)^2 + r^2 = R^2$

Vậy mối liên hệ cần tìm là 
$$R = \frac{h^2 + r^2}{2h} = \frac{h}{2} + \frac{r^2}{2h}$$

### Hình nón ngoại tiếp hình trụ



**Lý thuyết:** Xét mặt cắt qua trục, ta đưa về bài toán tam giác ngoại tiếp hình chữ nhật, cụ thể là tam giác  $SAB$  (thiết diện qua trục hình nón) và hình chữ nhật  $MNPO$  (thiết diện qua trục hình trụ)

**Bài toán:** Gọi  $R, h, R', H'$  lần lượt là bán kính đáy và chiều cao hình nón; bán kính đáy và chiều cao hình

trụ  $\Rightarrow \begin{cases} R = IA \\ h = SI \end{cases}; \begin{cases} R' = IN \\ h' = OI \end{cases}$

Ta có  $\triangle AMN \sim \triangle ASI \Rightarrow \frac{MN}{SI} = \frac{AN}{AI} \Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{R - R'}{R}$

Vậy mối liên hệ cần tìm là 
$$\frac{h'}{h} = \frac{R - R'}{R}$$

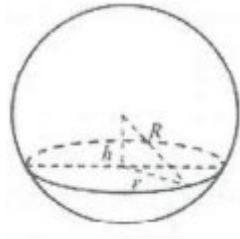
**Ví dụ 1:** Cho hình cầu bán kính bằng 5 cm, cắt hình cầu này bằng một mặt phẳng sao cho thiết diện tạo thành là một đường tròn đường kính 4 cm. Tính thể tích khối nón có đáy là thiết diện vừa tạo và đỉnh là tâm của hình cầu đã cho.

A.  $\approx 19,18cm^3$

B.  $\approx 19,20cm^3$

C.  $\approx 19,21cm^3$

D.  $\approx 19,19cm^3$

**Lời giải**

Theo bài ra, ta có  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $r = 2 \text{ cm}$

Chiều cao của khối nón là  $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{21} \text{ cm}$

Vậy thể tích khối nón là  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{4\sqrt{21}\pi}{3} \approx 19,20cm^3$ .

**Chọn B.**

**Ví dụ 2:** Cho mặt cầu (S) tâm O, bán kính R (không đổi). Mặt phẳng (P) cách O một khoảng bằng x, ( $x < R$ ) và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm H. Gọi T là giao điểm của tia HO với (S). Thể tích của khối nón có đỉnh T và đáy là hình tròn (C) bằng

A.  $\frac{\pi(R^2 - x^2)(R + h)}{6}$

B.  $2\pi(R^2 - x^2)(R + h)$

C.  $\frac{\pi(R^2 - x^2)(R + h)}{3}$

D.  $\pi(R^2 - x^2)(R + h)$

**Lời giải**

Bán kính đáy hình nón là  $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

Chiều cao hình nón là  $h = OT + OH = R + h$

Vậy thể tích khối nón là  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi(R^2 - x^2)(R + h)}{3}$

**Chọn C.**

**Ví dụ 3:** Cho hình nón (N) có bán kính đáy bằng 6, chiều cao bằng 8. Biết rằng có một mặt cầu tiếp xúc với tất cả các đường sinh của hình nón, đồng thời tiếp xúc với mặt đáy của hình nón. Tìm bán kính của mặt cầu đó

A. 4

B. 2

C. 6

D. 3

**Lời giải**

**Bài toán:** Hình nón ngoại tiếp hình cầu  $\Rightarrow R = \frac{rh}{r + \sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{6.8}{6 + \sqrt{6^2 + 8^2}} = 3$

**Chọn D.**

**Ví dụ 4:** Cho khối cầu tâm O, bán kính  $R = 2$ . Mặt phẳng (P) cách O một khoảng x cắt khối cầu theo một hình tròn (C). Một khối nón (N) có đỉnh thuộc mặt cầu, đáy là hình tròn (C). Biết khối nón (N) có thể tích lớn nhất, khi đó giá trị của x bằng

A.  $x = \frac{2}{3}$

B.  $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

C.  $x = \frac{1}{3}$

D.  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Lời giải**

**Bài toán:** Hình nón nội tiếp hình cầu.

Ta có  $r^2 = R^2 - x^2$ , với r là bán kính đáy hình nón

Chiều cao hình nón là  $h = x + R$ . Thể tích khối nón là  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(x + R)$

Lại có  $V = \frac{\pi}{6} \cdot (2R - 2x)(R + x)(R + x) \leq \frac{\pi}{6} \cdot \frac{(2R - 2x + R + x + R + x)^3}{27} = \frac{32\pi R^3}{81}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $2R - 2x = R + x \Leftrightarrow x = \frac{R}{3} = \frac{2}{3}$

**Chọn A.**

**Ví dụ 5:** Cho hình nón tròn xoay (N) có đỉnh là S, có đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Đường cao SO = h. Tính chiều cao x của hình trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp hình nón đã cho ?

A.  $x = \frac{h}{3}$

B.  $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$

C.  $x = \frac{h}{6}$

D.  $x = \frac{h\sqrt{3}}{6}$

**Lời giải**

**Bài toán:** Hình nón ngoại tiếp hình trụ  $\Rightarrow \frac{h'}{h} = \frac{R - R'}{R}$

Với  $R'$ ,  $h'$  lần lượt là bán kính đáy, chiều cao hình trụ  $\Rightarrow x = \frac{h}{R} \cdot (R - R')$

Thể tích khối trụ là  $V = \pi R'^2 x = \pi R'^2 \cdot \frac{h}{R} \cdot (R - R') = \frac{\pi h}{R} [R'^2 \cdot (R - R')]$

$$\text{Ta có: } R'^2 \cdot (R - R') = 4 \cdot \frac{R'}{2} \cdot \frac{R'}{2} \cdot (R - R') \leq 4 \cdot \frac{\left(\frac{R'}{2} + \frac{R'}{2} + R - R'\right)^3}{27} = \frac{4R^3}{27}$$

$$\text{Suy ra } V \leq \frac{\pi h}{R} \cdot \frac{4R^3}{27} = \frac{4\pi R^2 h}{27}. \text{ Đâu = xảy ra khi } \frac{R'}{2} = R - R' \Rightarrow R' = \frac{2}{3}R \Rightarrow x = \frac{h}{3}.$$

**Chọn A.**



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:** Một khối nón tròn xoay có chiều cao  $h = 4$ , bán kính đáy  $r = 5$ . Tính thể tích của khối nón

- A.  $\frac{100\pi}{3}$                       B.  $15\pi$                       C.  $41\pi$                       D.  $\frac{25\pi}{3}$

**Câu 2:** Gọi  $l, h, R$  lần lượt là độ dài đường sinh, chiều cao và bán kính đáy của hình nón (N). Diện tích xung quanh của (N) là

- A.  $S_{xq} = \pi Rh$                       B.  $S_{xq} = 2\pi Rl$                       C.  $S_{xq} = \pi R^2 h$                       D.  $S_{xq} = \pi Rl$

**Câu 3:** Cho khối nón (N) có bán kính đáy bằng 3 và thể tích bằng  $12\pi$ . Tính diện tích xung quanh của hình nón

- A.  $S_{xq} = 15\pi$                       B.  $S_{xq} = 24\pi$                       C.  $S_{xq} = 16\pi$                       D.  $S_{xq} = 18\pi$

**Câu 4:** Cho hình nón có bán kính đáy bằng 3 và chiều cao bằng 4. Tính diện tích xung quanh của hình nón đó

- A.  $S_{xq} = 60\pi$                       B.  $S_{xq} = 15\pi$                       C.  $S_{xq} = 20\pi$                       D.  $S_{xq} = 25\pi$

**Câu 5:** Một hình nón có bán kính đáy bằng  $5a$ , độ dài đường sinh bằng  $13a$ . Tính độ dài đường cao của hình nón

- A.  $h = 7a\sqrt{6}$                       B.  $h = 12a$                       C.  $h = 17a$                       D.  $h = 8a$

**Câu 6:** Một hình nón có bán kính đáy bằng 1 cm, chiều cao bằng 2 cm. Khi đó góc ở đỉnh của hình nón là  $2\varphi$  thỏa mãn

- A.  $\sin \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$                       B.  $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$                       D.  $\cot \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**Câu 7:** Cho hình nón có bán kính đáy là  $6a$ , chiều cao là  $8a$ . Tính diện tích xung quanh của hình nón

- A.  $20\pi a^2$                       B.  $60\pi a^2$                       C.  $50\pi a^2$                       D.  $40\pi a^2$

**Câu 8:** Một hình nón có đường sinh bằng  $3a$  và bán kính đường tròn đáy bằng  $2a$ . Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

- A.  $S_{xq} = \frac{4\sqrt{5}}{3}\pi a^2$                       B.  $S_{xq} = 3\pi a^2$                       C.  $S_{xq} = 12\pi a^2$                       D.  $S_{xq} = 6\pi a^2$

**Câu 9:** Cho khối nón có chiều cao bằng 8 cm và độ dài đường sinh bằng 10 cm. Tính thể tích  $V$  của khối nón đó

- A.  $V = 124\pi cm^3$                       B.  $V = 140\pi cm^3$                       C.  $V = 128\pi cm^3$                       D.  $V = 96\pi cm^3$

**Câu 10:** Một hình nón có bán kính đáy  $r = 3a$ , chiều cao  $h = 4a$ . Ký hiệu góc ở đỉnh của hình nón là  $2\alpha$ . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

**A.**  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

**B.**  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$

**C.**  $\tan \alpha = \frac{4}{5}$

**D.**  $\cot \alpha = \frac{4}{5}$

**Câu 11:** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng  $3\pi a^2$  và bán kính đáy bằng  $a$ . Tính độ dài đường sinh  $l$  của hình nón đã cho

**A.**  $l = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

**B.**  $l = 2\sqrt{2}a$

**C.**  $l = \frac{3a}{2}$

**D.**  $l = 3a$

**Câu 12:** Cho một khối nón có bán kính đáy bằng 3 và thể tích bằng  $12\pi$ . Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón

**A.**  $S_{xq} = 15\pi$

**B.**  $S_{xq} = 45\pi$

**C.**  $S_{xq} = 30\pi$

**D.**  $S_{xq} = 60\pi$

**Câu 13:** Khối nón (N) có bán kính đường tròn đáy bằng 10 và diện tích xung quanh bằng  $120\pi$ . Tính chiều cao của khối nón (N)

**A.**  $2\sqrt{11}$

**B.**  $\frac{11}{3}$

**C.**  $\frac{\sqrt{11}}{2}$

**D.**  $\sqrt{11}$

**Câu 14:** Cho tam giác ABC vuông tại C,  $BC = a$ ,  $AC = b$ . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ABC quanh AC.

**A.**  $\frac{\pi a^2 b}{3}$

**B.**  $\pi a^2 b$

**C.**  $\frac{\pi a^3 b}{3}$

**D.**  $\pi a^3 b$

**Câu 15:** Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A với  $AC = 3a$ ,  $AB = 4a$ . Tính theo  $a$  diện tích xung quanh  $S$  của hình nón khi quay tam giác ABC quanh trục AC.

**A.**  $S = 30a^2\pi$

**B.**  $S = 40a^2\pi$

**C.**  $S = 20a^2\pi$

**D.**  $S = 15a^2\pi$

**Câu 16:** Cho tam giác ABC đều cạnh  $2a$ , đường cao AH. Tính thể tích của khối nón tròn xoay tạo thành khi quay hình tam giác ABC quanh AH.

**A.**  $\pi a^3 \sqrt{3}$

**B.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

**C.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{6}$

**D.**  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{4}$

**Câu 17:** Cho tam giác ABC có  $AB = 3$ ,  $AC = 4$ ,  $BC = 5$ . Tính thể tích vật tròn xoay thu được khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

**A.**  $10\pi$

**B.**  $11\pi$

**C.**  $12\pi$

**D.**  $13\pi$

**Câu 18:** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $\widehat{ABC} = 30^\circ$  quay quanh cạnh góc vuông  $AC = a$  tạo thành hình nón tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

**A.**  $2\pi a^2 \sqrt{3}$

**B.**  $4\pi a^2 \sqrt{3}$

**C.**  $\pi a^2 \sqrt{3}$

**D.**  $2\pi a^2$

**Câu 19:** Trong không gian cho tam giác vuông IOM vuông tại I, góc  $\widehat{IOM} = 30^\circ$  và cạnh  $IM = a$ . Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình nón tròn xoay. Tính thể tích  $V$  của khối nón tròn xoay tương ứng.

A.  $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$       B.  $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$       C.  $V = \pi a^3\sqrt{3}$       D.  $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{6}$

**Câu 20:** Cho tam giác ABC vuông tại A, có  $AB = 10$ ,  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tính diện tích xung quanh  $S_{xq}$  của hình nón tạo thành khi quay tam giác ABC quanh đường thẳng chứa cạnh AC.

A.  $S_{xq} = 1000\sqrt{3}\pi$       B.  $S_{xq} = 100\sqrt{3}\pi$       C.  $S_{xq} = 200\sqrt{3}\pi$       D.  $S_{xq} = 200\pi$

**Câu 21:** Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có  $AB = 3\text{cm}$ . Cho tam giác ABC quay quanh trục AB ta nhận được khối tròn xoay (T). Tính thể tích của (T)

A.  $18\pi(\text{cm}^3)$       B.  $9\pi(\text{cm}^3)$       C.  $27\pi(\text{cm}^3)$       D.  $3\pi(\text{cm}^3)$

**Câu 22:** Gọi S là diện tích hình nón tròn xoay được sinh ra bởi đoạn thẳng AC' của hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh b khi quay quanh trục CC'. Diện tích xung quanh S là

A.  $\pi b^2$       B.  $\pi b^2\sqrt{2}$       C.  $\pi b^2\sqrt{3}$       D.  $\pi b^2\sqrt{6}$

**Câu 23:** Cho hình nón có bán kính đường tròn đáy là 6 cm và diện tích hình tròn đáy bằng diện tích xung quanh của hình nón. Tính thể tích V của khối nón đã cho

A.  $V = 48\pi(\text{cm}^3)$       B.  $V = 64\pi(\text{cm}^3)$       C.  $V = 96\pi(\text{cm}^3)$       D.  $V = 288(\text{cm}^3)$

**Câu 24:** Một khối nón có thể tích bằng  $25\pi\text{cm}^3$ , nếu giữ nguyên chiều cao và tăng bán kính đáy khối nón đó lên 2 lần thì thể tích của khối nón mới bằng

A.  $100\pi\text{cm}^3$       B.  $150\pi\text{cm}^3$       C.  $200\pi\text{cm}^3$       D.  $50\pi\text{cm}^3$

**Câu 25:** Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, góc ở đỉnh bằng  $150^\circ$ . Trên đường tròn đáy lấy điểm A cố định. Có bao nhiêu vị trí của điểm M trên đường tròn đáy của hình nón để diện tích tam giác SMA đạt giá trị lớn nhất?

A. 2      B. 1      C. 4      D. 3

**Câu 26:** Cho hình thang ABCD (AB//CD) vuông tại A có  $AB = 8$ ,  $CD = 5$  và  $BC = 5$ . Tính thể tích V của hình tròn xoay tạo thành khi quay đường gấp khúc ADC quanh trục AB.

A.  $V = \frac{128\pi}{3}$       B.  $V = 128\pi$       C.  $V = \frac{256\pi}{3}$       D.  $V = 96\pi$

**Câu 27:** Cho tam giác ABC cân tại A, biết cạnh  $AB = a$  và  $\widehat{BAC} = 120^\circ$ . Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC.

A.  $V = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$       B.  $V = \frac{\pi a^3}{8}$       C.  $V = \frac{3\pi a^3}{8}$       D.  $V = \frac{\pi a^3}{4}$

**Câu 28:** Cho hình nón đỉnh S và đường tròn đáy có tâm O. Điểm A thuộc đường tròn đáy. Tính số đo góc  $S\hat{A}O$ , biết tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích đáy của hình nón là  $\frac{2}{\sqrt{3}}$

- A.  $120^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $30^\circ$                       D.  $60^\circ$

**Câu 29:** Cho tam giác ABC có AB, BC, CA lần lượt bằng 3, 5, 7. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra do hình tam giác ABC quay quanh đường thẳng AB.

- A.  $50\pi$                       B.  $\frac{75\pi}{4}$                       C.  $\frac{275\pi}{8}$                       D.  $\frac{125\pi}{8}$

**Câu 30:** Cho tam giác AC có AB = 3a, BC = 5a, CA = 7a. Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi cho hình tam giác ABC quay quanh đường thẳng AB.

- A.  $\frac{76a^3\pi}{3}$                       B.  $16a^3\pi$                       C.  $\frac{75a^3\pi}{4}$                       D.  $20a^3\pi$

**Câu 31:** Cho hình nón đỉnh S, xét hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn đáy của hình nón và có AB = BC = 10a, AC = 12a, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng  $45^\circ$ . Tính thể tích của khối nón đã cho.

- A.  $9\pi a^3$                       B.  $12\pi a^3$                       C.  $27\pi a^3$                       D.  $3\pi a^3$

**Câu 32:** Cho S.ABCD là hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với đáy góc  $45^\circ$ . Hình tròn xoay đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD. Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay đó.

- A.  $S_{xq} = 2\pi a^2$                       B.  $S_{xq} = \pi a^2$                       C.  $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{2}$                       D.  $S_{xq} = \frac{\pi a^2}{4}$

**Câu 33:** Cho hình chóp tam giác đều có đáy bằng a và đường cao bằng 6a. Tính thể tích khối nón nội tiếp hình chóp đó?

- A.  $\frac{\pi a^3}{9}$                       B.  $\frac{\pi a^3}{6}$                       C.  $\frac{\pi a^3}{3}$                       D.  $\frac{\pi a^3}{4}$

**Câu 34:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có các cạnh bên bằng a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng  $\alpha$  với  $\tan \alpha = \sqrt{5}$ . Tính thể tích V của khối nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

- A.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{5}}{81}$                       B.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{5}}{27}$                       C.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{5}}{9}$                       D.  $V = \frac{5\pi a^3}{81}$

**Câu 35:** Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh a. Một khối nón có đỉnh là tâm của hình vuông ABCD và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông A'B'C'D'. Tính diện tích toàn phần của khối nón đó.

A.  $S_{tp} = \frac{\pi a^3}{4}$       B.  $S_{tp} = \frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}$       C.  $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{4}(2\sqrt{5} + 1)$       D.  $S_{tp} = \frac{\pi a^2}{4}(\sqrt{5} + 1)$

**Câu 36:** Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC ; mặt phẳng (AMN) vuông góc với (SBC). Tính diện tích xung quanh của hình nón nội tiếp hình chóp đã cho.

A.  $\frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{12}$       B.  $\frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{6}$       C.  $\frac{\pi a^2 \sqrt{5}}{4}$       D.  $\frac{\pi a^2}{4}$

**Câu 37:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên hợp với mặt đáy góc  $60^\circ$ . Hình nón có đỉnh S, đáy là đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD có diện tích xung quanh là

A.  $S = \frac{\pi a^2}{4}$       B.  $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{14}}{4}$       C.  $S = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$       D.  $S = \frac{\pi a^2}{2}$

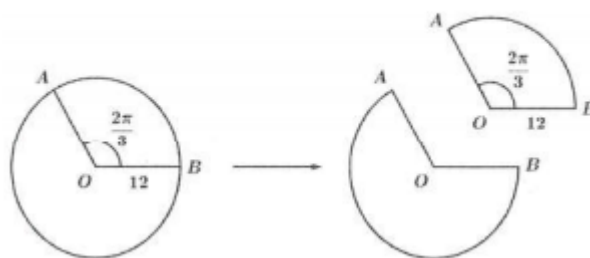
**Câu 38:** Cho tam giác ABC vuông tại A có  $\widehat{ABC} = 30^\circ$  và cạnh góc vuông AC = 2a. Quay tam giác quanh cạnh AC tạo thành hình nón tròn xoay có diện tích xung quanh bằng

A.  $2\pi a^2$       B.  $\frac{4}{3}\pi a^2 \sqrt{3}$       C.  $8\pi a^2 \sqrt{3}$       D.  $16\pi a^2 \sqrt{3}$

**Câu 39:** Cho tam giác ABC có  $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 3 : 2 : 1$ , AB = 10cm. Tính độ dài đường sinh l của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB

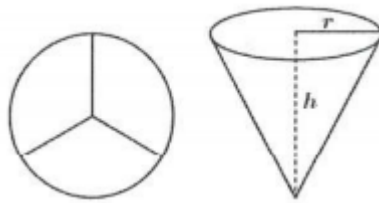
A. 20 cm      B.  $10\sqrt{3}$  cm      C. 30 cm      D. 10 cm

**Câu 40:** An có một tờ giấy hình tròn tâm O, bán kính là 12 cm. Trên đường tròn, An lấy một cung AB có số đo là  $\frac{2\pi}{3}$ , sau đó cắt hình tròn dọc theo hai đoạn OA và OB. An dán mép OA và OB lại với nhau để được hai hình nón đỉnh O. Tính tỉ số thể tích của khối nón nhỏ so với khối nón lớn (xem phần dán giấy không đáng kể).



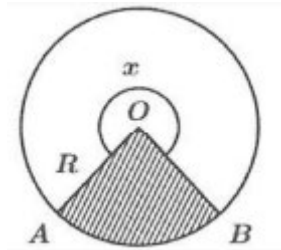
A.  $\frac{1}{8}$       B.  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$       D.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$

**Câu 41:** Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60cm thành ba miền hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



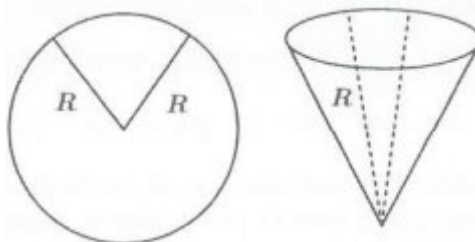
- A.  $V = \frac{16000\sqrt{2}}{3}$  lít      B.  $V = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$  lít      C.  $V = \frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$  lít      D.  $V = \frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$  lít

**Câu 42:** Cắt bỏ hình quạt tròn AOB từ một mảnh các tông hình tròn bán kính R rồi dán hai bán kính OA và OB của hình quạt tròn lại với nhau để được một cái phễu có dạng của một hình nón. Gọi x là góc ở tâm của hình quạt tròn dùng làm phễu,  $0 < x < 2\pi$ . Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối nón.



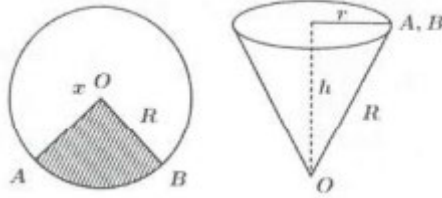
- A.  $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$       B.  $\frac{2}{27}\pi R^3$       C.  $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi R^3$       D.  $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$

**Câu 43:** Từ một miếng sắt tây hình tròn bán kính R, ta cắt đi một hình quạt và cuộn phần còn lại thành một cái phễu hình nón. Số đo cung của hình quạt bị cắt đi phải là bao nhiêu độ (làm tròn đến đơn vị độ) để hình nón có dung tích lớn nhất?



- A. 65°      B. 90°      C. 45°      D. 60°

**Câu 44:** Bình có một tấm bìa hình tròn như hình vẽ. Bạn ấy muốn biến hình tròn đó thành một hình cái phễu hình nón. Khi đó Bình phải cắt bỏ hình quạt tròn AOB rồi dán hai bán kính OA và OB lại với nhau. Gọi x là góc ở tâm hình quạt tròn dùng làm cái phễu. Tìm x để thể tích cái phễu lớn nhất.



A.  $\frac{(6-2\sqrt{6})\pi}{3}$

B.  $\frac{\pi}{3}$

C.  $\frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$

D.  $\frac{(6+2\sqrt{6})\pi}{3}$

**Câu 45:** Cho nửa đường tròn đường kính  $AB = 2R$  và điểm  $C$  thay đổi trên nửa đường tròn đó. Đặt  $\widehat{CAB} = \alpha$  và gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  lên  $AB$ . Tìm  $\tan \alpha$  sao cho thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác  $ACH$  quanh trục  $AB$  đạt giá trị lớn nhất.

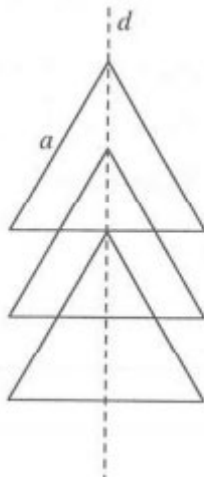
A.  $\tan \alpha = 1$

B.  $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

C.  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D.  $\tan \alpha = \sqrt{3}$

**Câu 46:** Cho ba hình tam giác đều cạnh bằng  $a$  chồng lên nhau như hình vẽ bên (cạnh đáy của tam giác trên đi qua các trung điểm hai cạnh bên của tam giác dưới). Tính theo  $a$  thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay chúng xung quanh đường thẳng  $d$



A.  $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$

B.  $\frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{8}$

C.  $\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{8}$

D.  $\frac{13\sqrt{3}\pi a^3}{96}$

**Câu 47:** Cho khối nón có bán kính  $3a$ . Cắt khối nón đã cho bởi một mặt phẳng vuông góc với trục và bỏ phần trên của khối nón (phần chứa đỉnh của khối nón). Biết thiết diện là hình tròn có bán kính bằng  $a$  và độ dài phần đường sinh còn lại bằng  $\frac{29a}{10}$ . Tính thể tích  $V$  phần còn lại của khối nón theo  $a$ .

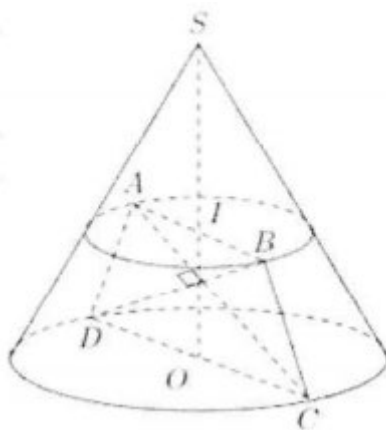
A.  $V = \frac{\pi a^3}{3}$

B.  $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{6}}{27}$

C.  $V = \frac{29\pi a^3}{10}$

D.  $V = \frac{91\pi a^3}{10}$

**Câu 48:** Một hình nón (N) có bán kính đáy R, đường cao SO. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với SO tại sao cho  $SI = \frac{1}{3}SO$ , Một mặt phẳng (Q) qua trục hình nón (N) cắt phần khối nón nằm giữa và đáy hình nón theo thiết diện là hình thang cân ABCD có hai đường vuông góc nhau hình vẽ. Thể tích phần hình nón (N) nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón (N) là



A.  $\frac{76\pi R^3}{81}$

B.  $\frac{52\pi R^3}{81}$

C.  $\frac{64\pi R^3}{81}$

D.  $\frac{40\pi R^3}{81}$



## LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Câu 1:**  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{100}{3}\pi$ . **Chọn A**

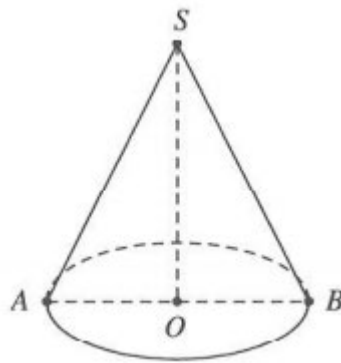
**Câu 2:**  $S_{xq} = \pi Rl$ . **Chọn D**

**Câu 3:** Ta có 
$$\begin{cases} r = 3 \\ V = 12\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 h \end{cases} \Rightarrow h = 4 \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = 15\pi$$
. **Chọn A**

**Câu 4:**  $S_{xq} = \pi r l = \pi \sqrt{h^2 + r^2} = 15\pi$ . **Chọn B**

**Câu 5:** Ta có  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 12a$ . **Chọn B**

**Câu 6:** Ta có  $\cos \phi = \cos \widehat{ASO} = \frac{SO}{SA} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$



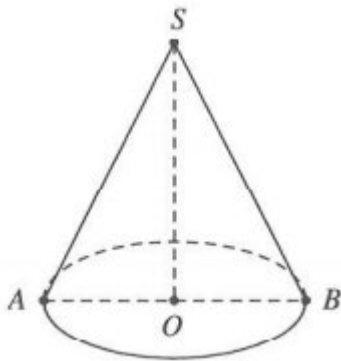
**Chọn C**

**Câu 7:**  $S_{xq} = \pi r l = \pi \sqrt{h^2 + r^2} = 60\pi a^2$ . **Chọn B**

**Câu 8:**  $S_{xq} = \pi r l = 6\pi a^2$ . **Chọn D**

**Câu 9:**  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(l^2 - h^2)h = 96\pi cm^3$ . **Chọn D**

**Câu 10:** Ta có  $\cos \varphi = \cos \widehat{ASO} = \frac{SO}{SA} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}} = \frac{4}{5}$



**Chọn B**

**Câu 11:** Ta có  $\begin{cases} S_{xq} = \pi r l = 3\pi a^2 \\ r = a \end{cases} \Rightarrow l = 3a$ . **Chọn D**

**Câu 12:**  $\begin{cases} r = 3 \\ V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \end{cases} \Rightarrow h = 4 \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = \pi r \sqrt{h^2 + r^2} = 15\pi$ . **Chọn A**

**Câu 13:**  $\begin{cases} r = 10 \\ S_{xq} = \pi r l = \pi \sqrt{h^2 + r^2} = 120\pi \end{cases} \Rightarrow h^2 + 100 = 12^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{11}$

**Chọn A**

**Câu 14:**  $V = \frac{\pi a^2 b}{3}$ . **Chọn A**

**Câu 15:**  $h = 3a, r = 4a \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + r^2} = 5a \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 20\pi a^2$

**Chọn C**

**Câu 16:**  $h = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}, r = a \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

**Chọn B**

**Câu 17:**  $h = 4, r = 3 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 12\pi$

**Chọn C**

**Câu 18:**  $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\tan \widehat{ABC}} = a\sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$

Ta có  $h = a, r = a\sqrt{3}, l = 2a \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 2\pi a^2 \sqrt{3}$

**Chọn A**

**Câu 19:**  $\tan \widehat{IOM} = \frac{IM}{IO} \Rightarrow IO = \frac{IM}{\tan \widehat{IOM}} = a\sqrt{3} \Rightarrow OM = \sqrt{IM^2 + IO^2} = 2a$

Ta có  $h = a\sqrt{3}, r = a, \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

**Chọn B**

**Câu 20:**  $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \tan \widehat{ABC} = 10\sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 20$

Ta có  $h = 10\sqrt{3}, r = 10, l = 20 \Rightarrow S_{xq} = \pi r l = 200\pi$

**Chọn D**

**Câu 21:**  $r = 3, h = 3 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 9\pi$

**Chọn B**

**Câu 22:**  $AC' = b\sqrt{3}, CC' = b, AC = b\sqrt{2} \Rightarrow r = b\sqrt{2}, l = b\sqrt{3} \Rightarrow S_{xq} = \pi rl = \pi b^2 \sqrt{6}$

**Chọn D**

**Câu 23:** 
$$\begin{cases} r = 6\text{cm} \\ \pi r^2 = \frac{3}{5} \pi rl \Rightarrow l = 10 \Rightarrow h = \sqrt{l^2 - r^2} = 8 \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 96\pi \text{cm}^3 \end{cases}$$

**Chọn C**

**Câu 24:**  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 25\pi \Rightarrow V' = \frac{1}{3} \pi (2r)^2 h = 100\pi$

**Chọn A**

**Câu 25:** Kẻ  $SH \perp AM$

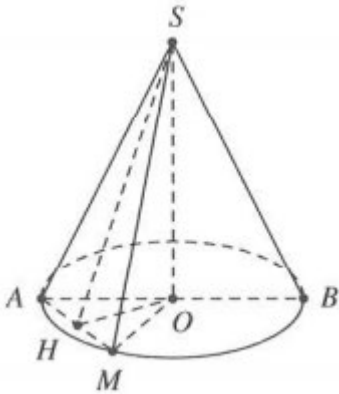
$SA = SM \Rightarrow HA = HM$

$OA = OM \Rightarrow OH \perp AM$

$$S_{SAM} = \frac{1}{2} SH \cdot AM = SH \cdot AH \leq \frac{SH^2 + AH^2}{2} = \frac{l^2}{2}$$

Dấu “=” xảy ra  $\Leftrightarrow ASM = 90^\circ$

Có 2 điểm M thỏa mãn bài toán (đối xứng nhau qua AB)



**Chọn A**

**Câu 26:** Ta có  $AD = \sqrt{BC^2 - (AB - CD)^2} = 4 \Rightarrow V = \pi \cdot AD^2 \cdot CD + \frac{1}{3} \pi AD^2 \cdot (AB - CD) = 96\pi$

**Chọn D**

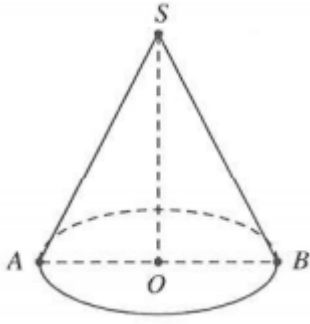
**Câu 27:**  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ} = a\sqrt{3}$ . Kẻ  $BH \perp AC$

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow BH = BC \sin \widehat{ACB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \frac{3a}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot CH \cdot BH^2 - \frac{1}{3} \pi \cdot AH \cdot BH^2 = \frac{\pi a^3}{4}$$

**Chọn D**

**Câu 28:**  $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi rl}{\pi r^2} = \frac{l}{r} = \frac{SA}{OA} \Rightarrow \cos \widehat{SAO} = \frac{OA}{SA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 30^\circ$



**Chọn C**

**Câu 29:** Kẻ  $CH \perp AB$ . Ta có  $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{11}{14}$

Mà  $\cos \widehat{BAC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \widehat{BAC} = \frac{11}{2} \Rightarrow BH = AH - AB = \frac{5}{2}$

Ta có  $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi CH^2 . AH - \frac{1}{3} \pi CH^2 . BH = \frac{75\pi}{4}$

**Chọn B**

**Câu 30:** Kẻ  $CH \perp AB$ . Ta có  $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{11}{14}$

Mà  $\cos \widehat{BAC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = AC \cos \widehat{BAC} = \frac{11a}{2} \Rightarrow BH = AH - AB = \frac{5a}{2}$

Ta có  $CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \frac{5\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi CH^2 . AH - \frac{1}{3} \pi CH^2 . BH = \frac{75\pi a^3}{4}$

**Chọn C**

**Câu 31:** Diện tích tam giác ABC là  $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = 48a^2$

Bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  là  $S = p.r \Rightarrow r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{48a^2}{16a} = 3a$

Gọi H là hình chiếu của I trên AB  $\Rightarrow AB \perp (SIH) \Rightarrow \widehat{((SAB); (ABC))} = \widehat{SHI} = 45^\circ$

Tam giác SIH vuông cân tại I có  $SI = IH = 3a$ . Vậy  $V_{(N)} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = 9\pi a^3$

**Chọn A**

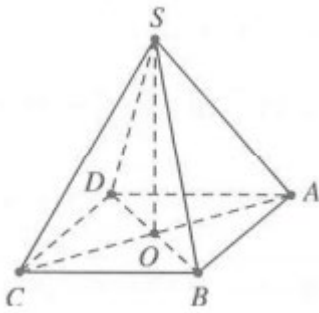
**Câu 32:** Bán kính đường tròn nội tiếp hình vuông ABCD là  $r = \frac{a}{2}$

Gọi O là tâm hình vuông ABCD

$\Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{(SA; (ABCD))} = \widehat{(SA; OA)} = \widehat{SAO}$

Tam giác SAO vuông tại O, có  $\widehat{SAO} = 45^\circ \Rightarrow SO = OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón là  $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2}{2}$



**Chọn C**

**Câu 33:** Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đều cạnh a là  $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Thể tích khối nón cần tính là  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \left( \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \cdot 6a = \frac{\pi a^3}{6}$

**Chọn B**

**Câu 34:** Gọi H là tâm của tam giác ABC  $\Rightarrow SH \perp (ABC)$

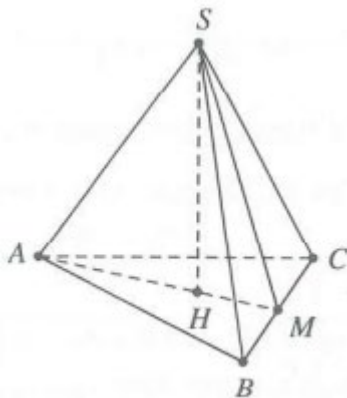
Gọi M là trung điểm của BC  $\Rightarrow AM \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAM)$

Khi đó  $\widehat{(SBC);(ABC)} = \widehat{SMA} \Rightarrow \tan \widehat{SMA} = \frac{SH}{HM}$

Đặt  $AB = x \Rightarrow HM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$  và  $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$

$\Rightarrow \left( a^2 - \frac{x^2}{3} \right) : \frac{x^2}{12} = 5 \Leftrightarrow a^2 - \frac{x^2}{3} = \frac{5x^2}{12} \Leftrightarrow a^2 = \frac{3x^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Vậy  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi}{3} \left( \frac{a}{3} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{5}}{81}$ . **Chọn A**



**Câu 35:** Bán kính đáy của khối nón là  $r = \frac{a}{2}$  và chiều cao của khối nón là  $h = a$

Độ dài đường sinh của khối nón là  $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Vậy diện tích toàn phần cần tính là  $S_{tp} = \pi r^2 h + \pi r l = \frac{\pi a^2}{4} (2\sqrt{5} + 1)$

**Chọn C**

**Câu 36:** Gọi I, K lần lượt là trung điểm của MN, BC

Và H là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC \Rightarrow SH \perp (ABC)$

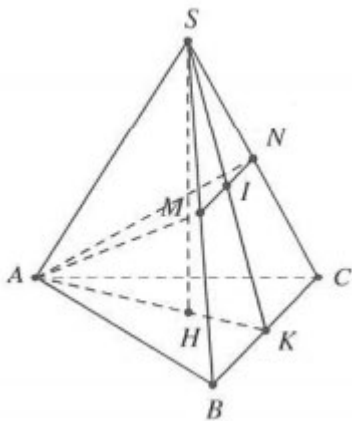
Vì  $\Delta AMN$  cân  $\Rightarrow AI \perp MN$  và  $\Delta SMN$  cân  $\Rightarrow SI \perp MN$

Suy ra  $\widehat{(AMN);(SBC)} = \widehat{SIA} = 90^\circ \Rightarrow \Delta SAK$  cân tại A

$$\Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Bán kính đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  là  $r = HK = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy thể tích khối nón cần tính là  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi a^2 \sqrt{6}}{12}$



**Chọn A**

**Câu 37:** Bán kính đáy (hình vuông ABCD) của khối nón là  $r = \frac{a}{2}$

Gọi O là tâm hình vuông ABCD  $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow \widehat{(SA;(ABCD))} = \widehat{(SA;OA)} = \widehat{SAO} = 60^\circ$$

Gọi M là trung điểm của AB  $\Rightarrow OM \perp AB$

$\Rightarrow SM$  là đường sinh của khối nón

Tam giác SMO vuông tại O, có  $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Vậy diện tích xung quanh là  $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{\pi a^2 \sqrt{7}}{4}$

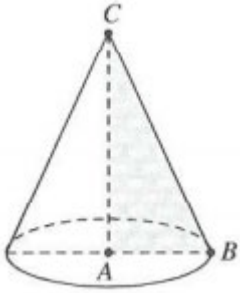
**Chọn C**

**Câu 38:** Tam giác ABC vuông tại A, có  $\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{AC}{\tan \widehat{ABC}} = \frac{2a}{\tan 30^\circ} = 2a\sqrt{3}$

Suy ra  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(2a\sqrt{3})^2 + (2a)^2} = 4a$

Quay tam giác ABC xung quanh trục AC, ta được hình nón có chiều cao  $h = AC = 4$ , bán kính đáy  $R = AB = 3$  (hình vẽ bên)

Vậy diện tích xung quanh hình nón là  $S_{xq} = \pi Rl = 8\pi a^2 \sqrt{3}$



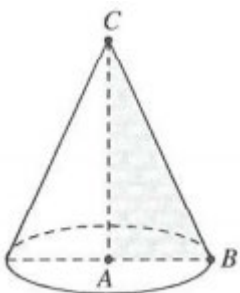
**Chọn C**

**Câu 39:** Ta có  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$  mà  $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} = 3 : 2 : 1 \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = 60^\circ \\ \hat{C} = 30^\circ \end{cases}$

Do đó tam giác ABC vuông tại A  $\Rightarrow \begin{cases} AC = 10\sqrt{3} \\ BC = 20 \end{cases}$

Quay tam giác ABC xung quanh trục AB, ta được hình nón có chiều cao  $h = AB = 10$ , bán kính đáy  $R = AC = 10\sqrt{3}$  (hình vẽ bên)

Vậy độ dài đường sinh cần tính là  $l = BC = 20cm$



**Chọn A**

**Câu 40:** Khối nón có độ dài đường sinh  $l = R = 12cm$

Hình nón nhỏ có đường sinh  $l = 12$  và bán kính đáy  $r_1 = \frac{R \cdot \frac{2\pi}{3}}{2\pi} = 4cm$

Hình nón nhỏ có đường sinh  $\ell = 12$  và bán kính đáy  $r_2 = \frac{R \cdot \left(2\pi - \frac{2\pi}{3}\right)}{2\pi} = 8\text{cm}$

Tỷ số thể tích của khối nón nhỏ so với khối nón lớn là  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_1^2 \cdot \sqrt{\ell^2 - r_1^2}}{r_2^2 \cdot \sqrt{\ell^2 - r_2^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

### Chọn C

**Câu 41:** Ba hình quạt, mỗi hình quạt có độ dài cung là:  $L = \varphi \cdot R = \frac{2\pi}{3} \cdot 6 = 4\pi\text{dm}$

Độ dài cung là chu vi đáy của hình nón  $\Rightarrow L = C = 2\pi r \Rightarrow r = 2\text{dm}$

Chiều cao của hình nón là:  $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = 4\sqrt{2}\text{dm}$

Thể tích của mỗi phễu là  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 \cdot 4\sqrt{2} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{2}\text{lít}$

### Chọn B

**Câu 42:** Phễu chính là khối nón có độ dài đường sinh  $l = R$ . Chuẩn hóa  $R = 1$

Gọi  $h, r$  lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón  $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Ta có  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{1 - r^2}$

Mà  $r^4(1 - r^2) = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (1 - r^2) \leq 4 \cdot \frac{\left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + 1 - r^2\right)^3}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} r \cdot \sqrt{1 - r^2} \leq \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{r^2}{2} = 1 - r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Độ dài cung tròn AB là  $L = x \cdot R = x$  chính bằng chu vi đường tròn đáy của khối nón

Khi đó  $L = x = C = 2\pi r \Rightarrow x = 2\pi r = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$

### Chọn D

**Câu 43:** Xét hình nón được tạo thành, có độ dài đường sinh bằng  $l_n = R$ .

Gọi  $\alpha$  (rad) là số đo cung của hình quạt còn lại, khi đó độ dài cung còn lại là  $L = \alpha R$ .

Và  $L$  chính là chu vi đường tròn đáy của hình nón  $\Rightarrow 2\pi r_n = L = \alpha R \Leftrightarrow r_n = \frac{\alpha R}{2\pi}$ .

Vậy thể tích khối nón là  $V = \frac{1}{3}\pi r_n^2 \cdot h_n = \frac{1}{3}\pi r_n^2 \cdot \sqrt{l_n^2 - r_n^2} = \frac{1}{3}\pi \cdot x^2 \sqrt{R^2 - x^2}$  với  $x = r_n$



$$\text{Ta có } x^4(R^2 - x^2) = 4 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot (R^2 - x^2) \leq 4 \cdot \frac{R^6}{27} \Rightarrow x^2 \sqrt{R^2 - x^2} \leq \frac{2R^3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow V_{\max} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{x^2}{2} = R^2 - x^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha \cdot R}{2\pi} \right)^2 \Leftrightarrow \alpha = \pi \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 294^\circ$$

Vậy số đo cung bị cắt là:  $3360^\circ - 294^\circ = 66^\circ$ .

**Chọn A.**

**Câu 44:** Phễu chính là khối nón có độ dài đường sinh  $l = R$ . Chuẩn hóa  $R = 1$ .

$$\text{Gọi } h, r \text{ lần lượt là chiều cao và bán kính đáy của khối nón } \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Ta có } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

$$\text{Mà } r^4(1 - r^2) = 4 \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \frac{r^2}{2} \cdot (1 - r^2) \leq 4 \cdot \frac{\left( \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} + 1 - r^2 \right)^3}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} r \cdot \sqrt{1 - r^2} \leq \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \frac{r^2}{2} = 1 - r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Độ dài cung tròn AB là  $L = x \cdot R = x$  chính bằng chu vi đường tròn đáy của khối nón

$$\text{Khi đó } L = x = C = 2\pi r \Rightarrow x = 2\pi r = \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$$

**Chọn C**

**Câu 45:** Đặt  $AH = h; CH = r$  lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình nón khi quay tam giác ACH quanh trục AB.

$$\text{Ta có: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \text{ Mặt khác } HB = 2R - h \Rightarrow CH^2 = HA \cdot HB \text{ (hệ thức lượng)}$$

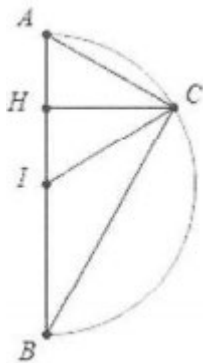
$$\text{Suy ra } r^2 = h(2R - h) \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi h(2R - h) \Rightarrow V_{\max} \Leftrightarrow [(2R - h)h^2]_{\max}$$

**Cách 1:** Xét hàm số  $f(h) = (2R - h)h^2 (0 < h < 2R)$

$$\text{Cách 2: } (2R - h)h^2 = \frac{1}{4}(2R - h) \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} \leq \frac{1}{4} \left( \frac{2R - h + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}}{3} \right)^3 = \frac{2}{27} R^2$$

$$\text{Điều “=” xảy ra} \Leftrightarrow 2R - h = \frac{h}{2} \Leftrightarrow R = \frac{3}{4}h \Rightarrow h = \frac{4}{3}R \Rightarrow r = AH = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



### Chọn B

**Câu 46:** Nếu ba tam giác không trùng lên nhau thì thể tích khối tròn xoay là thể tích của 3 khối nón có chiều cao  $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  và bán kính đáy  $r_1 = \frac{a}{2} \Rightarrow V_1 = 3 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 \right) = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{8}$

Thể tích phần bị trùng lên nhau là hai khối nón có chiều cao  $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$  và bán kính đáy  $r_1 = \frac{a}{4} \Rightarrow V_2 = 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \pi r_1^2 h_1 \right) = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{96}$

$$\text{Thể tích cần tìm là: } V = V_1 - V_2 = \frac{11\sqrt{3}\pi a^3}{96}$$

### Chọn A

**Câu 47:** Dựng hình như hình vẽ bên trong đó:

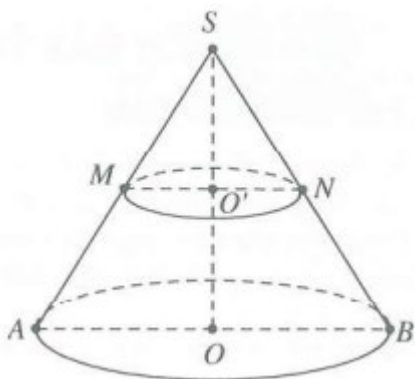
$$O'N = a; OA = 3a \text{ và } MA = \frac{29a}{10}$$

$$\text{Ta có: } \frac{SO'}{SO} = \frac{O'M}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow OO' = 2SO'$$

$$\text{Mặt khác } MA = \sqrt{OO'^2 + (OA - O'M)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{29}{10} \right)^2 = OO'^2 + 4a^2 \Rightarrow OO' = \frac{21}{10}a \Rightarrow SO' = \frac{21}{20}a; SO = \frac{6}{2}a$$

Thể tích V phần còn lại của khối nón là:  $V = \frac{1}{3}(\pi OA^2 \cdot SO - \pi O' M^2 \cdot SO') = \frac{91}{10} \pi a^3$



**Chọn D.**

**Câu 48:** Ta có:  $\frac{SI}{SO} = \frac{IA}{OD} = \frac{1}{3} \Rightarrow IA = \frac{R}{3}$ , gọi  $K = AC \cap BD \Rightarrow \Delta KAB$  vuông cân tại K

$$\Rightarrow KI = \frac{AB}{2} = \frac{R}{3}$$

Tương tự ta có:  $KO = R \Rightarrow OI = KI + KO = \frac{4R}{3}$ .

Mặt khác  $SI = \frac{1}{3}SO \Rightarrow OI = 2SI \Rightarrow SI = \frac{2R}{3}; SO = OI + SI = 2R$

Thể tích phần hình nón (N) nằm giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng chứa đáy hình nón (N) là:

$$V = \frac{1}{3} \pi (OD^2 \cdot SO - IA^2 \cdot SI) = \frac{52\pi R^3}{81}$$

**Chọn B.**