CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

I. LÝ THUYẾT.

1. KHÁI NIỆM VECTƠ

Cho đoạn thẳng AB. Nếu chọn điểm A làm *điểm đầu*, điểm B làm *điểm cuối* thì *đoạn thẳng* AB có hướng từ A đến B. Khi đó ta nói AB là một *đoạn thẳng có hướng*.

1.1. Định nghĩa: Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rỏ điểm đầu, điểm cuối.

1.2. Kí hiệu

Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, … khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

1.3. Độ dài vectơ: Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.

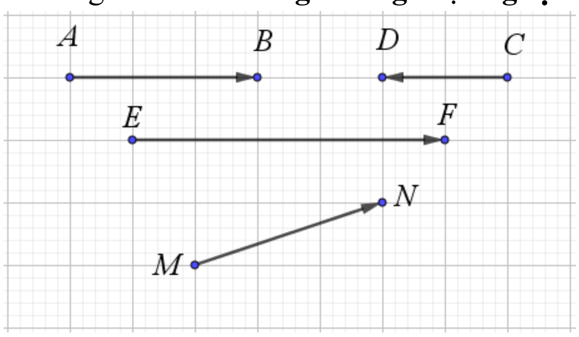
Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

2. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG

2.1. Giá của vectơ: Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là *giá* của vectơ đó.

2.2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng: Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.



2.3. Nhận xét

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

3. HAI VECTO BẰNG NHAU, HAI VECTO ĐỐI:

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

Chú ý

Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

4. VECTƠ – KHÔNG

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ta kí hiệu là $\vec{0}$.

Ta quy ước vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.

Như vậy $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ và $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH MỘT VECTƠ; PHƯƠNG, HƯỚNG CỦA VECTƠ; ĐỘ DÀI CỦA VECTƠ

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa.

+ Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Với hai điểm phân biệt *A, B* có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ hai điểm trên?

Câu 2: Cho tam giác *ABC*, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh *A, B, C*?

Câu 3: Cho hình lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Tìm số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

Câu 4: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

Câu 5: Cho hình bình hành *ABCD* tâm *O*. Gọi *P, Q, R* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, AD.* Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm số vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AR}$

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

Câu 7: Số vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước?

Câu 8: Trên mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt $A, B, C, D, E; F$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ – không, mà có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho?

Câu 9: Cho n điểm phân biệt. Hãy xác định số vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc n điểm trên?

Câu 10: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm cuối là các đỉnh của lục giác là bao nhiêu?

Câu 11: Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Tìm các cặp vectơ cùng hướng?

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

Câu 13: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:

Câu 14: Cho điểm A và véctơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

Câu 16: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có AB = AC = 4. Tính $\left|\overrightarrow{BC}\right|$

Câu 17: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh 3. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ là bao nhiêu?

Câu 18: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{CB}\right|$

Câu 19: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền BC = 12. Tính $\left|\overrightarrow{GM}\right|$ (với M là trung điểm của BC)

Câu 20: Cho hình chữ nhật ABCD, có AB = 4 và AC = 5. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{AC}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 2: Cho 5 điểm *A, B, C, D, E* có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là *A* và điểm cuối là một trong các điểm đã cho?

A. 4 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 12

Câu 3: Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm *O* sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$

Câu 4: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 5: Cho tam giác *ABC.* Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CA.* Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$ **B.** $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{AP}$

C. $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$ **D.** $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MA},\overrightarrow{PN},\overrightarrow{CP}$

Câu 6: Cho hai vectơ khác *vectơ - không*, không cùng phương. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với cả hai vectơ đó?

A. 2. **B.** 1. **C.** không có. **D.** vô số.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 8: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu điểm cuối là đỉnh của lục giác hoặc tâm O và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OC}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 9: Cho tứ giác $ABCD$. Số các véctơ khác véctơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác là

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 10: Cho tam giác ABC, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 11: Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là **sai**?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $DA=BC$.

C. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Hỏi cặp véctơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

A. $ABCD$ là vuông. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.

C. AD và BC có cùng trung điểm. **D.** $AB=CD$.

Câu 14: Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **C.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 15: Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\overrightarrow{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. **B.** $\overrightarrow{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

C. $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|>0$.

Câu 16: Cho hình chữ nhật ABCD, có AB = 4 và AC = 5. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$.

A. 3. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 9. **D.** ±3.

Câu 17: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 3, BC = 4. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{CA}$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}\right|=5.$ **B.** $\left|\overrightarrow{CA}\right|=25.$ **C.** $\left|\overrightarrow{CA}\right|=7.$ **D.** $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{7}.$

Câu 18: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi H là trung điểm BC. Tính $\left|\overrightarrow{AH}\right|$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$ **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}.$

Câu 19: Cho tam giác ABC đều cạnh 2a. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $\left|\overrightarrow{AM}\right|$ bằng:

A. $2a.$ **B.** $2a\sqrt{3}.$ **C.** $4a.$ **D.** $a\sqrt{3}.$

Câu 20: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính $\left|\overrightarrow{OD}\right|$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}.$ **B.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a.$ **C.** $a.$ **D.** $\frac{a^2}{2}.$

Câu 21: Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.

B. Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

C. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

D. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

Câu 22: Cho 3 điểm A,B,C không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 23: Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là:

A. AB. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

Câu 24: Cho tam giác ABC. Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A,B,C?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 25: Từ hai điểm phân biệt A, B xác định được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 26: Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.

B. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.

D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Câu 27: Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Số véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là

A. 10. **B.** 14. **C.** 8. **D.** 12.

Câu 28: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng có cùng độ dài.

B. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

C. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng.

D. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

Câu 29: Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song.

B. Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

C. Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.

D. Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

Câu 30: Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

A. Hai vectơ cùng hướng. **B.** Hai vectơ cùng phương.

C. Hai vectơ đối nhau. **D.** Hai vectơ bằng nhau.

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

A. 12. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 32: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.

B. Độ dài của vec tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vec tơ đó.

C. Hai vec tơ cùng phương thì cùng hướng.

D. Vec tơ là đoạn thẳng có hướng.

Câu 33: Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Câu 34: Cho ba điểm M,N,P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI VECTƠ BẰNG NHAU

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Hãy liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.

Câu 2: Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 3: Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD,DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$.

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

Câu 5: Cho hai điểm phân biệt A,B. Xác định điều kiện để điểm I là trung điểm AB.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm các cạnh BC,CA,AB.
Chứng minh $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng C của qua D.
Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 8: Cho ΔABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MI}$.

Câu 9: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm AB,BC,CD,DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP};\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}$.

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$. Goi M,N lần lượt là trung điểm của AB,DC. AN và CM lần lượt cắt BD tại E,F. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\overrightarrow{FB}$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Câu 2: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{FD}$. **B.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{ED}$. **C.** $\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$. **D.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$.

Câu 3: Cho ba điểm A, B, C phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng. **D.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng.

Câu 4: Cho tam giác đều cạnh $2a$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?
A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=2a$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2a$. **D.** $\overrightarrow{AB}=AB$.

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo. Câu nào sau đây là sai?
A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$.

Câu 6: Cho vectơ $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.
A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 7: Chọn câu dưới đây để mệnh đề sau là mệnh đề đúng: Nếu có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì
A. Tam giác ABC cân. **B.** Tam giác ABC đều.
C. A là trung điểm đoạn BC. **D.** Điểm B trùng với điểm C.

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ là?
A. $ABCD$ là hình vuông. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.
C. AD và BC có cùng trung điểm. **D.** $AB=CD$.

Câu 9: Cho ΔABC với điểm M nằm trong tam giác. Gọi A',B',C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua A',B',C'. Câu nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PC}$
C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$

Câu 10: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?
A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AF}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$.

Câu 11: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A,B,C,M,N,P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ (không kể véctơ $\overrightarrow{MN}$)?
A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Cho hình thoi $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Câu 13: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi
A. Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.
B. Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.
C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.
D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Câu 14: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?
A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 15: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng với $\overrightarrow{BA}$ là
A. $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

Câu 16: Cho lục giác đều $ABCEF$ tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 17: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là:
A. $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

Câu 18: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A,B,C,M,N,P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Câu 19: Cho hình bình hành tâm O. Hãy chọn phát biểu sai

A. $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **C.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$.

Câu 20: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 21: Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi D là điểm đối xứng với A qua O; E là điểm đối xứng với O qua BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{HE}$. **B.** $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OE}$. **D.** $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CD}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ ĐẲNG THỨC VECTƠ

1 PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng: Hai véc tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài và cùng hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{CN}$. Hãy xác định vị trí điểm N.

Câu 2: Cho hình thang $ABCD$ với đáy $BC=2AD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC,MC, CD, AB và E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{QE}$. Xác định vị trí điểm E.

Câu 3: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{GC}$. Hãy xác định vị trí điểm N.

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$, N, P lần lượt là trung điểm cạnh AD, AB và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{NM}$. Xác định vị trí điểm M.

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OM}$. Xác định vị trí điểm M.

Câu 6: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C. Xác định điểm D thỏa $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right|$?

Câu 7: Cho tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BP}$. Chọn khẳng định đúng.

A. N là trung điểm của cạnh MC. **B.** N là trung điểm của cạnh BP.

C. N là trung điểm của cạnh AC. **D.** N là trung điểm của cạnh PC.

Câu 2: Cho tam giác ABC và D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

B. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

C. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ADBC$.

D. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Câu 3: Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. O là tâm của lục giác $ABCDEF$. **B.** O là trung điểm của đoạn FC.

C. $EDCO$ là hình bình hành. **D.** O là trung điểm của đoạn ED.

Câu 4: Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và các mệnh đề.

(I) $ABCD$ là hình bình hành.

(II) D nằm giữa B và C.

(III) C nằm trên đường thẳng đi qua điểm D và song song hoặc trùng với đường thẳng AB.

(IV) Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Số mệnh đề đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Cho hình thang $ABCD$ với đáy $AB=2CD$. Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DA và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. M là trung điểm của PN. **B.** M là trung điểm của AN.

C. M là trung điểm của AB. **D.** M là trung điểm của QN.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Để điểm M thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ thì M phải thỏa mãn mệnh đề nào?

A. M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

B. M là trọng tâm tam giác ABC.

C. M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

D. M thuộc trung trực của AB.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}$ là?

A. tập rỗng. **B.** một đoạn thẳng. **C.** một đường tròn. **D.** một đường thẳng.

Câu 8: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right|$ là?

A. trung trực đoạn BC. **B.** đường tròn tâm A, bán kính BC.

C. đường thẳng qua A và song song với BC. **D.** đường thẳng AB.

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thõa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

A. Trung điểm của AD. **B.** Trung diểm của AC.

C. Điểm C. **D.** Trung điểm của AB.

Câu 10: Cho tứ giác $ABCD$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **B.** $AB=CD$. **C.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left|\overrightarrow{AM}\right|=a\sqrt{3}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=a$. **C.** $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 12: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$?

A. Vô số. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** Không có điểm nào.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. KHÁI NIỆM VECTƠ

Cho đoạn thẳng AB. Nếu chọn điểm A làm *điểm đầu*, điểm B làm *điểm cuối* thì *đoạn thẳng* AB có hướng từ A đến B. Khi đó ta nói AB là một *đoạn thẳng có hướng*.

1.1. Định nghĩa: Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rỏ điểm đầu, điểm cuối.

1.2. Kí hiệu

Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, ... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

1.3. Độ dài vectơ: Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.

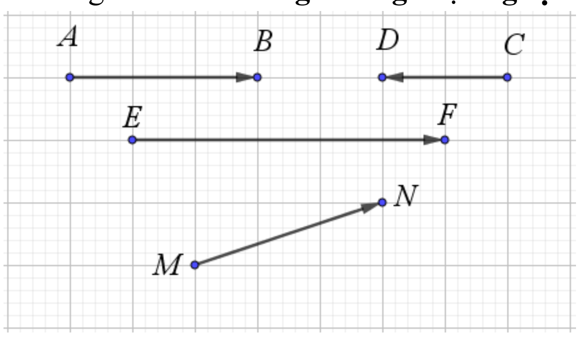
Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

2. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG

2.1. Giá của vectơ: Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là *giá* của vectơ đó.

2.2. Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng: Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.



2.3. Nhận xét

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

3. HAI VECTƠ BẰNG NHAU, HAI VECTƠ ĐỐI:

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài.

Kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

Chú ý

Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$.

4. VECTƠ – KHÔNG

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ta kí hiệu là $\vec{0}$.

Ta quy ước vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.

Như vậy $\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=...$ và $\overrightarrow{MN}=\vec{0}\Leftrightarrow M\equiv N$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH MỘT VECTƠ; PHƯƠNG, HƯỚNG CỦA VECTƠ; ĐỘ DÀI CỦA VECTƠ

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa.

+ Dựa vào các tình chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

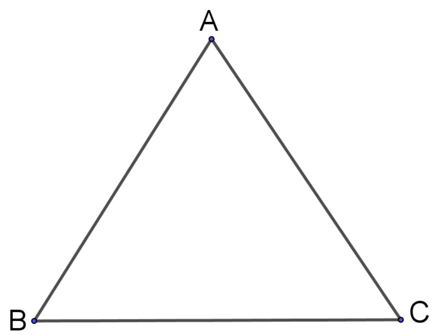
Câu 1: Với hai điểm phân biệt A, B có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ hai điểm trên?

Lời giải

Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?

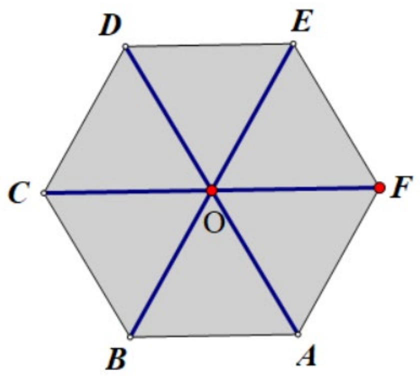
Lời giải



Ta có 6 vectơ: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AC}$.

Câu 3: Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

Lời giải



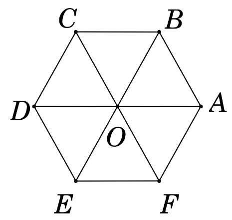
Các vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ là:

$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$.

Câu 4: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

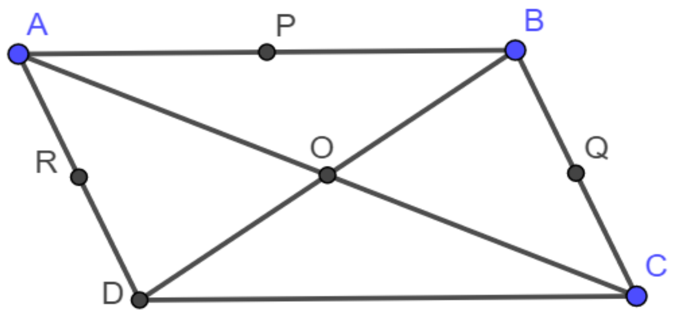
Lời giải

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.



Câu 5: Cho hình bình hành *ABCD* tâm *O*. Gọi *P, Q, R* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, AD*. Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm số vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AR}$

Lời giải



Có 3 vectơ là $\overrightarrow{RD}$; $\overrightarrow{BQ}$; $\overrightarrow{QC}, \overrightarrow{PO}$.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

Lời giải

Một vectơ khác vectơ không được xác định bởi 2 điểm phân biệt. Khi có 4 điểm A,B,C,D ta có 4 cách chọn điểm đầu và 3 cách chọn điểm cuối. Nên ta sẽ có $3.4=12$ cách xác định số vectơ khác $\vec{0}$ thuộc 4 điểm trên.

Câu 7: Số vectơ (khác vectơ $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước?

Lời giải

Một vectơ khác vectơ không được xác định bởi 2 điểm phân biệt. Khi có 7 điểm ta có 7 cách chọn điểm đầu và 6 cách chọn điểm cuối. Nên ta sẽ có $7.6=42$ cách xác định số vectơ khác $\vec{0}$ thuộc 7 điểm trên.

Câu 8: Trên mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt $A,B,C,D,E;F$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ – không, mà có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đã cho?

Lời giải

Xét tập $X = \{A,\ B,\ C,\ D,\ E\ ;\ F\}$. Với mỗi cách chọn hai phần tử của tập X và sắp xếp theo một thứ tự ta được một vectơ thỏa mãn yêu cầu.

Mỗi vectơ thỏa mãn yêu cầu tương ứng cho ta 30 phần tử thuộc tập X.

Vậy số các vectơ thỏa mãn yêu cầu bằng 30.

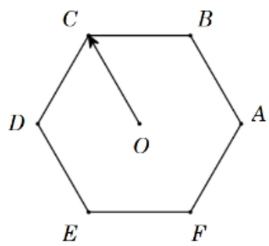
Câu 9: Cho n điểm phân biệt. Hãy xác định số vectơ khác vectơ $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối thuộc n điểm trên?

Lời giải

Khi có n điểm, ta có n cách chọn điểm đầu và $n-1$ cách chọn điểm cuối. Nên ta sẽ có $n(n-1)$ cách xác định số vectơ khác $\vec{0}$ thuộc n điểm trên.

Câu 10: Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm cuối là các đỉnh của lục giác là bao nhiêu?

Lời giải



Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{ED}$.

Câu 11: Cho ba điểm M,N,P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Tìm các cặp vectơ cùng hướng?

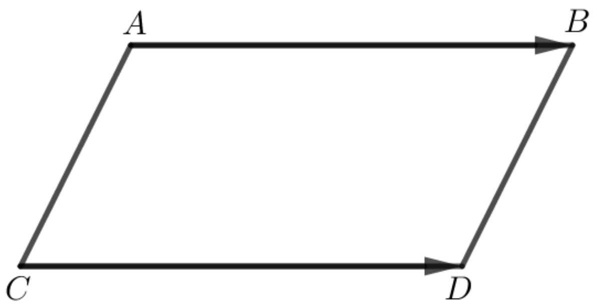
Lời giải

Các vec tơ cùng hướng là : $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{PM}$ và $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PN}$ và $\overrightarrow{NM}$.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$.

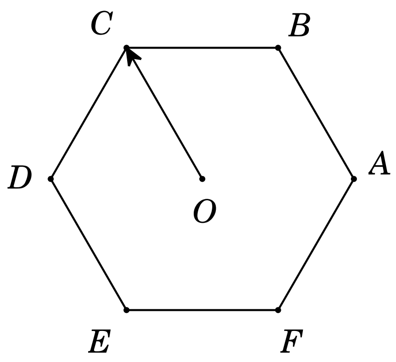
Lời giải

Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ mà thỏa mãn điều kiện đầu Câu là: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$.



Câu 13: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Tìm số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là:

Lời giải



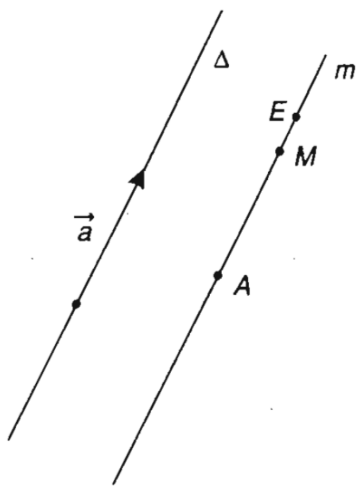
Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{FO}$.

Câu 14: Cho điểm A và véctơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tìm điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$.

b) $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

Lời giải



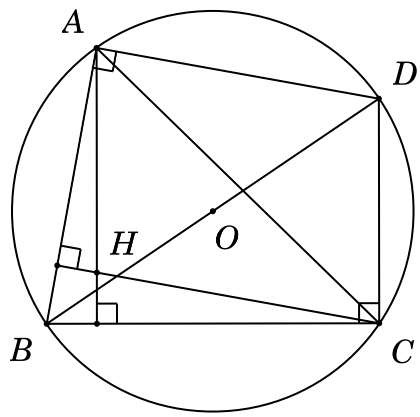
Gọi Δ là giá của $\vec{a}$.

a) Nếu $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$ thì đường thẳng AM song song với Δ. Do đó M thuộc đường thẳng m đi qua A và song song với Δ. Ngược lại, mọi điểm M thuộc đường thẳng m thì $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với $\vec{a}$. Chú ý rằng nếu A thuộc đường thẳng Δ thì m trùng với Δ.

b) Lập luận tương tự như trên, ta thấy các điểm M thuộc một nửa đường thẳng gốc A của đường thẳng m. Cụ thể, đó là nửa đường thẳng chưa điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}$ và $\vec{a}$ cùng hướng.

Câu 15: Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

Lời giải



Ta có $AH \perp BC$ và $DC \perp BC$ (do góc $\widehat{DCB}$ chắn nửa đường tròn). Suy ra $AH \parallel DC$.

Tương tự ta cũng có $CH \parallel AD$.

Suy ra tứ giác $ADCH$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

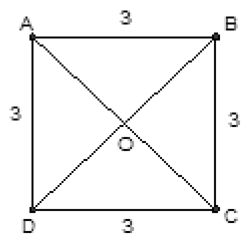
Câu 16: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có AB = AC = 4. Tính $\left|\overrightarrow{BC}\right|$

Lời giải

vì $\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

Câu 17: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh 3. Giá trị của $\left|\overrightarrow{AC}\right|$ là bao nhiêu?

Lời giải



vì $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 3\sqrt{2}$

Câu 18: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{CB}\right|$

Lời giải

vì $\left|\overrightarrow{CB}\right| = CB = a$

Câu 19: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền BC = 12. Tính $\left|\overrightarrow{GM}\right|$ (với M là trung điểm của BC)

Lời giải

vì $\left|\overrightarrow{GM}\right| = GM = \frac{1}{3}.AM = \frac{1}{3}.6 = 2$

Câu 20: Cho hình chữ nhật ABCD, có AB = 4 và AC = 5. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

vì $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 5$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Xét các vectơ có điểm A là điểm đầu thì có các vectơ thỏa mãn Câu toán là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \longrightarrow$ có 3 vectơ.

Tương tự cho các điểm còn lại $B, C, D.$

Câu 2: Cho 5 điểm *A, B, C, D, E* có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là *A* và điểm cuối là một trong các điểm đã cho?

A. 4 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 12

Lời giải

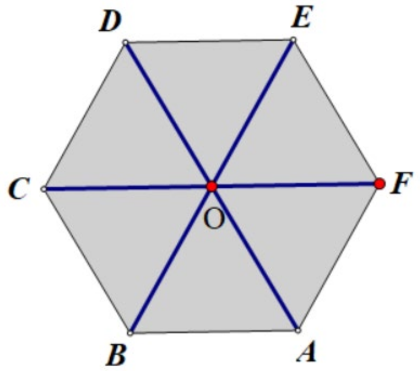
Chọn A

Câu 3: Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm *O* sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

Lời giải

Chọn D



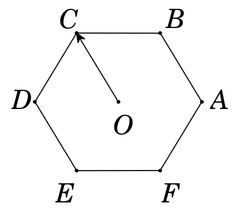
Câu 4: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.



Câu 5: Cho tam giác *ABC***.** Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CA***.** Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

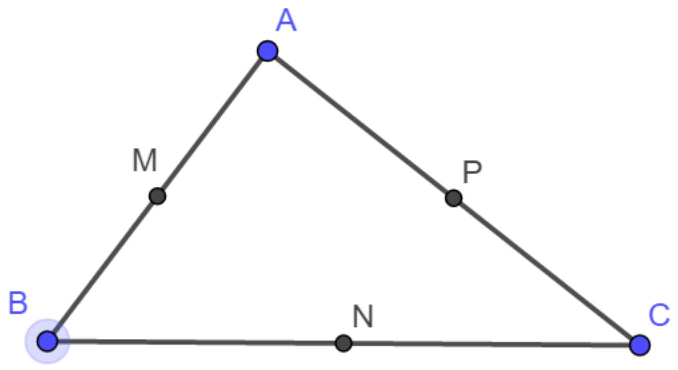
B. $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$

C. $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

D. $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

Lời giải

Chọn C



Câu 6: Cho hai vectơ khác *vectơ - không*, không cùng phương. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với cả hai vectơ đó?

A. 2 . **B.** 1. **C.** không có. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn C

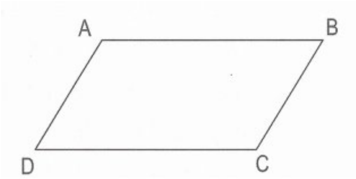
Giả sử tồn tại một vec-tơ $\vec{c}$ cùng phương với cả hai véc-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lúc đó tồn tại các số thực h và k sao cho $\vec{c} = h\vec{a}$ và $\vec{c} = k\vec{b}$. Từ đó suy ra $h\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \dfrac{k}{h}\vec{b}$.

Suy ra hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. (mâu thuẫn). → **Chọn C**

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ là

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Lời giải



Chọn C

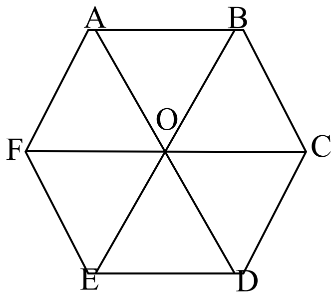
Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ mà thỏa mãn điều kiện đầu Câu là: $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$.

Câu 8: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu điểm cuối là đỉnh của lục giác hoặc tâm O và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OC}$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

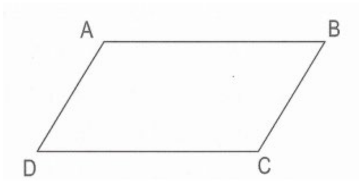


Các vectơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{DE}$.

Câu 9: Cho tứ giác $ABCD$. Số các véctơ khác véctơ-không có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của tứ giác là

A. 4. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải



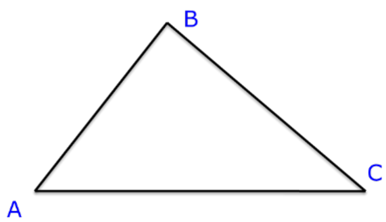
Chọn D

Từ mỗi đỉnh ta có một điểm đầu và ba đỉnh còn lại là ba điểm cuối, vậy tạo nên ba véctơ. Với bốn đỉnh như vậy ta có tất cả $3.4 = 12$ véctơ.

Câu 10: Cho tam giác ABC, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh $A,\ B,\ C$?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải



Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

Câu 11: Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là **sai**?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. **B.** $DA = BC$.

C. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn C

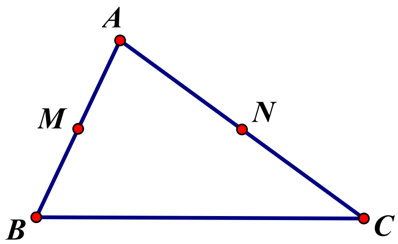
AC và BD là hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương vì vậy không thể bằng nhau.

Câu 12: Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Hỏi cặp véctơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$. **C.** $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$. **D.** $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A



Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

A. $ABCD$ là vuông. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.

C. AD và BC có cùng trung điểm. **D.** $AB = CD$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

• Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

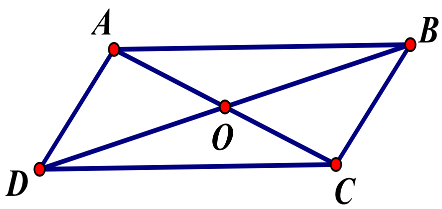
Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 14: Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **C.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn C



$\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$ là hai vectơ đối nhau.

Câu 15: Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\overrightarrow{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. **B.** $\overrightarrow{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

C. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| > 0$.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề $\left|\overrightarrow{AB}\right| > 0$ là mệnh đề **sai**, vì khi $A \equiv B$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0$.

Câu 16: Cho hình chữ nhật ABCD, có AB = 4 và AC = 5. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$.

A. 3. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 9. **D.** ± 3.

Lời giải

Chọn A

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

Câu 17: Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 3, BC = 4. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{CA}$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 5$. **B.** $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 25$. **C.** $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 7$. **D.** $\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

$\left|\overrightarrow{CA}\right| = CA = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$

Câu 18: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi H là trung điểm BC. Tính $\left|\overrightarrow{AH}\right|$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

$\left|\overrightarrow{AH}\right| = AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: Cho tam giác ABC đều cạnh 2a. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $\left|\overrightarrow{AM}\right|$ bằng:

A. $2a$. **B.** $2a\sqrt{3}$. **C.** $4a$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left|\overrightarrow{AM}\right| = AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Câu 20: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính $\left|\overrightarrow{OD}\right|$.

A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)a$. **C.** a. **D.** $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|\overrightarrow{OD}\right| = OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21: Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
B. Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.
C. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.
D. Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

Lời giải

Chọn A

Câu 22: Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C?

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Các vectơ thỏa đề gồm $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

Câu 23: Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là:

A. AB. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 24: Cho tam giác ABC. Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Các véc tơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C là: $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}$.

Vậy có tất cả 6 véc tơ.

Câu 25: Từ hai điểm phân biệt A, B xác định được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Câu 26: Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.

B. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.

D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa thì "Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài."

Câu 27: Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Số véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là

A. 10. **B.** 14. **C.** 8. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Chọn một điểm bất kì là điểm đầu, giả sử là A thì lập được 3 véctơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Tương tự với mỗi điểm đầu lần lượt là B, C, D thì cũng lập được 3 véctơ. Số véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là $4.3 = 12$.

Câu 28: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng có cùng độ dài.

B. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

C. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng.

D. Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa hai véc tơ đối nhau.

Câu 29: Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song.

B. Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.

C. Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.

D. Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa hai vectơ bằng nhau thì chúng cùng phương nên có giá trùng nhau hoặc song song.

Câu 30: Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

A. Hai vectơ cùng hướng. **B.** Hai vectơ cùng phương.

C. Hai vectơ đối nhau. **D.** Hai vectơ bằng nhau.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa hai vectơ đối nhau.

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

A. 12. **B.** 4. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Số vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là số các chỉnh hợp chập 2 của phần tử $\Rightarrow$ số vectơ là $A_4^2 = 12$.

Câu 32: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.

B. Độ dài của vec tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vec tơ đó.

C. Hai vec tơ cùng phương thì cùng hướng.

D. Vec tơ là đoạn thẳng có hướng.

Lời giải

Chọn C

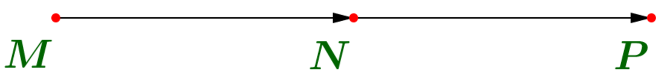
Hai vec tơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

Câu 33: Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Lời giải

Chọn A



Câu 34: Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D

Cặp vectơ cùng hướng là $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH HAI VECTƠ BẰNG NHAU

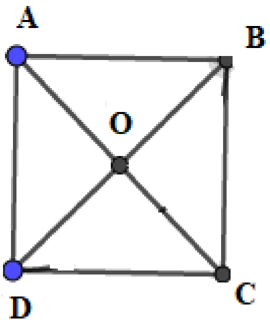
1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Để chứng minh hai vectơ bằng nhau ta chứng minh chúng có cùng độ dài và cùng hướng hoặc dựa vào nhận xét nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Hãy liệt kê tất cả các vectơ bằng nhau nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối.

Lời giải



Các vectơ bằng nhau nhận đỉnh và tâm của hình vuông làm điểm đầu và điểm cuối là:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

Câu 2: Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

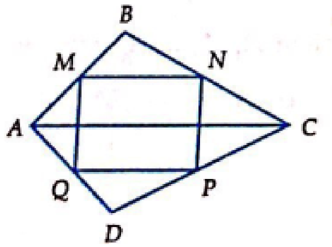
Nếu C nằm trên đường thẳng AB thì D cũng nằm trên đường thẳng AB.

Nếu C không nằm trên đường thẳng AB thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành. Khi đó D nằm trên đường thẳng đi qua C và song song với đường thẳng AB.

Do vậy, có vô số điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 3: Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} MN//AC \\ MN = \frac{1}{2}AC \end{cases}$; $\begin{cases} PQ//AC \\ PQ = \frac{1}{2}AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN//PQ \\ MN = PQ \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Vậy $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Lời giải

Ta có:

• $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \,//\, CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

• Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \,//\, CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 5: Cho hai điểm phân biệt A, B. Xác định điều kiện để điểm I là trung điểm AB.

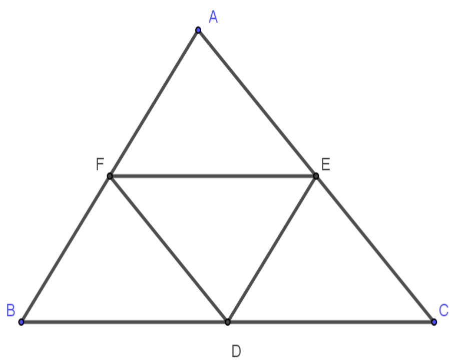
Lời giải

Vì I là trung điểm AB nên ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Vậy điều kiện để điểm I là trung điểm AB là: $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải



Cách 1: Vì EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF \,//\, CD$ nên

$EF = \frac{1}{2}CB \Rightarrow EF = CD \Rightarrow |EF| = |CD|$ (1).

Mặt khác: $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

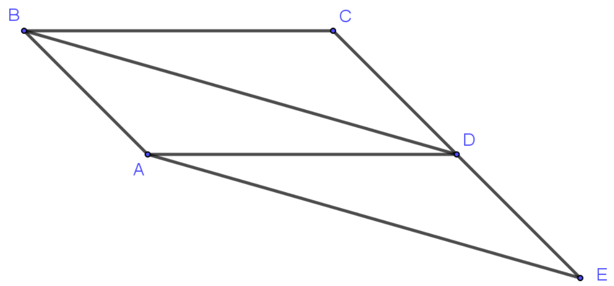
Cách 2: Chứng minh $EFCD$ là hình bình hành

Dễ chứng minh được $EF = \frac{1}{2}BC = CD$ và $EF // CD \Rightarrow EFCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng C của qua D.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải



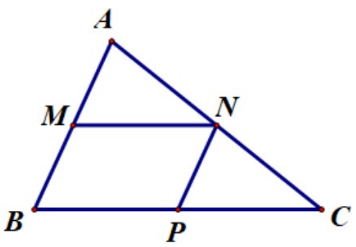
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (1).

Ta có: E là điểm đối xứng C của qua D nên D là trung điểm cuả $CE \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow ABDE$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 8: Cho ΔABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MI}$.

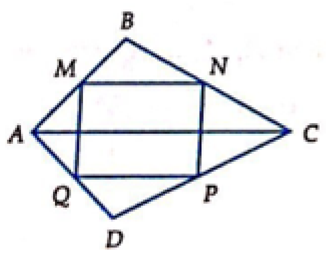
Lời giải



Vì $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MI}$ mà $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MB}$ nên $I \equiv B$.

Câu 9: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm AB,BC,CD,DA. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}; \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

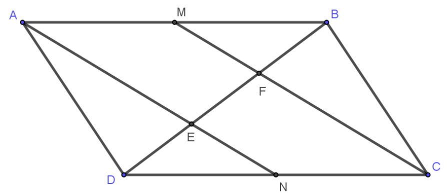
Lời giải



Ta có MN là đường trung bình tam giác $ABC \Rightarrow MN \,||= \frac{1}{2}AC$ và PQ là đường trung bình tam giác $DAC \Rightarrow PQ \,||= \frac{1}{2}AC$. Do đó $MN \,||= PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành nên suy ra $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}; \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$.

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$. Goi M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC. AN và CM lần lượt cắt BD tại E, F. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$

Lời giải



Ta có : $\begin{cases} AM = CN \\ AM // CN \end{cases} \Leftrightarrow AMCN$ là hình bình hành.

Theo gt ta có : N là trung điểm DC và $NE // CF \Rightarrow NE$ là đường trung bình của ΔDFC

$\Rightarrow E$ là trung điểm của $DF \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF}$ (1).

Tương tự ta cũng có : F là trung điểm của BE nên $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

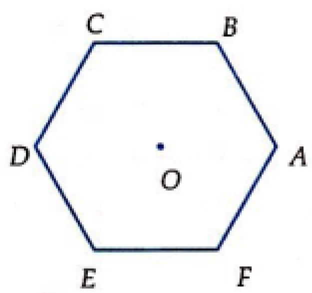
Chọn D

Câu 2: Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm *O* sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$. **B.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$. **C.** $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$. **D.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$.

Lời giải

Chọn D



Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$.

Câu 3: Cho ba điểm *A, B, C* phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng. **D.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn B

Ba điểm *A, B, C* phân biệt.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Câu 4: Cho tam giác đều cạnh $2a$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = 2a$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2a$. **D.** $\overrightarrow{AB} = AB$.

Lời giải

Chọn C

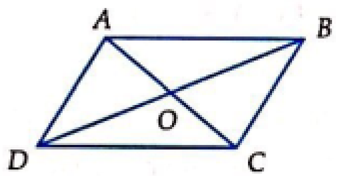
Vì tam giác đều nên $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2a$.

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo. Câu nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$.

Lời giải

Chọn A



Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Câu 6: Cho vectơ $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ và một điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn D

Chú ý rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì có duy nhất điểm ***D***.

Câu 7: Chọn câu dưới đây để mệnh đề sau là mệnh đề đúng: Nếu có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì

A. Tam giác ABC cân.

B. Tam giác ABC đều.

C. A là trung điểm đoạn BC.

D. Điểm B trùng với điểm C.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì A, B, C thẳng hàng và B, C nằm cùng phía so với A. Mà $AB = AC$ nên điểm B trùng với điểm C.

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ là?

A. $ABCD$ là hình vuông. **B.** $ABDC$ là hình bình hành.

C. AD và BC có cùng trung điểm. **D.** $AB = CD$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

 Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 9: Cho ΔABC với điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và N, P, Q lần lượt là các điểm đối xứng với M qua A', B', C'. Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AMCP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có $AQBM$ và $BMCN$ là hình bình hành

$\Rightarrow NC = BM = QA$

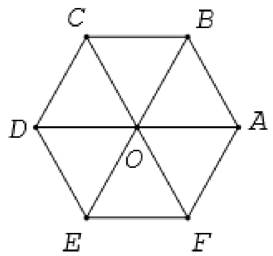
$\Rightarrow AQNC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$.

Câu 10: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AF}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$.

Lời giải

Chọn D



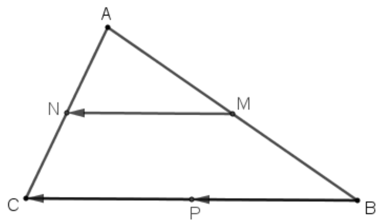
Ta có vì hai vectơ $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OE}$ ngược hướng nên chúng không bằng nhau.

Câu 11: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A, B, C, M, N, P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ (không kể véctơ $\overrightarrow{MN}$)?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Các véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A, B, C, M, N, P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ (không kể véctơ $\overrightarrow{MN}$) là: $\overrightarrow{BP}$ và $\overrightarrow{PC}$

Câu 12: Cho hình thoi $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 13: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

A. Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.

B. Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

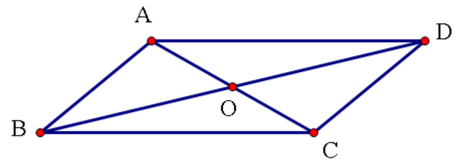
Chọn D

Câu 14: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D



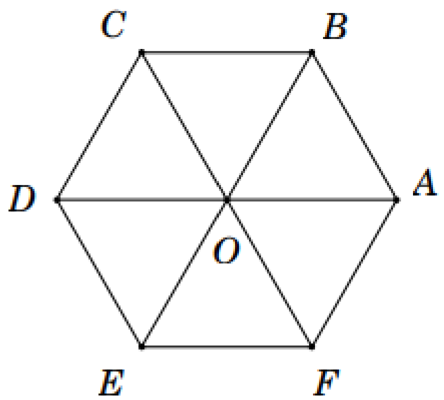
Ta có: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\neq\overrightarrow{AD}$

Câu 15: Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Ba vectơ bằng với $\overrightarrow{BA}$ là

A. $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn B



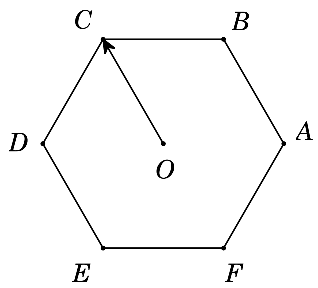
Ba vectơ bằng $\overrightarrow{BA}$ là $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$.

Câu 16: Cho lục giác đều $ABCEF$ tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

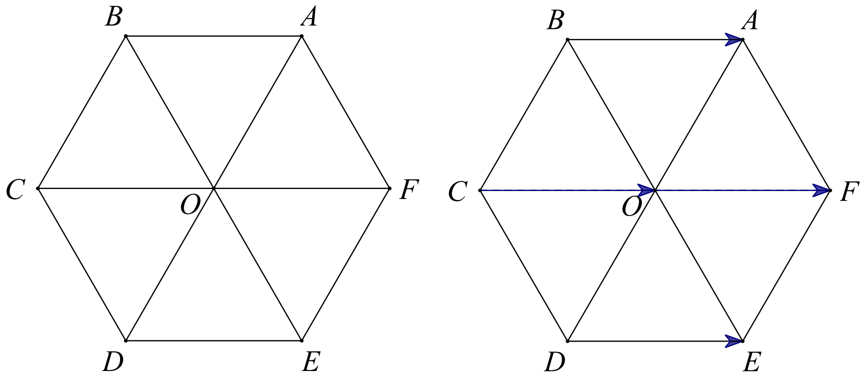
Câu 17: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là:

A. $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$. **D.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử lục giác đều $ABCDEF$ tâm O có hình vẽ như sau



Dựa vào hình vẽ và tính chất của lục giác đều ta có các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$.

Câu 18: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A, B, C, M, N, P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

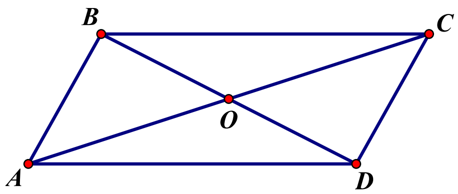
Các véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A, B, C, M, N, P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ là: $\overrightarrow{BP}$ và $\overrightarrow{PC}$

Câu 19: Cho hình bình hành tâm O. Hãy chọn phát biểu sai

A. $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}$. **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Chọn A



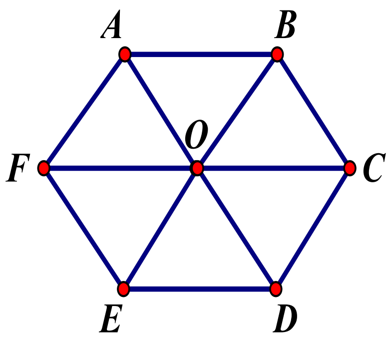
Hình bình hành $ABCD$ có tâm O nên O là trung điểm AC. Suy ra: $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$.

Câu 20: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



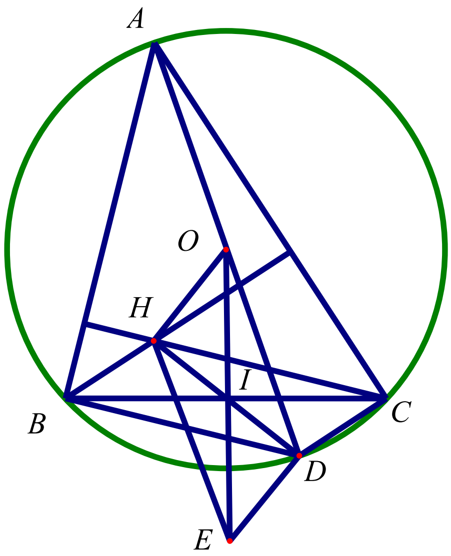
Các vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ mà điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

Câu 21: Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi D là điểm đối xứng với A qua O; E là điểm đối xứng với O qua BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{HE}$. **B.** $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OE}$. **D.** $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của BC.

Do E là điểm đối xứng với O qua BC nên I là trung điểm của OE (1).

Ta có, $CH // DB$ (cùng vuông góc với AB)

Tương tự, $BH // DC$ (cùng vuông góc với AC)

Từ đó suy ra $BHCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của HD (2).

Từ (1) và (2) suy ra, $OHED$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH ĐIỂM THOẢ ĐẲNG THỨC VECTƠ

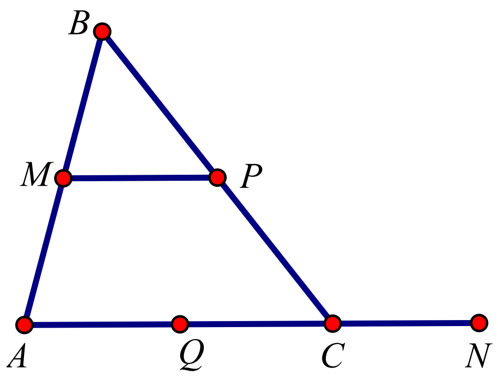
1 PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng: Hai véc tơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng cùng độ dài và cùng hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Gọi M, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{CN}$. Hãy xác định vị trí điểm N.

Lời giải

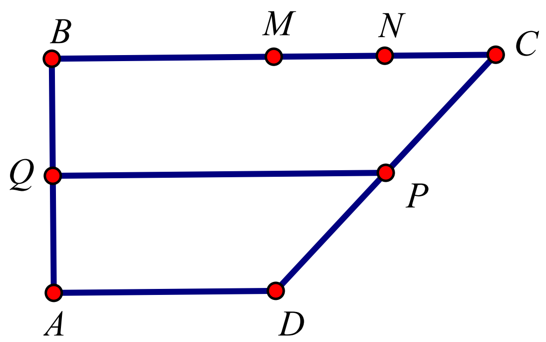


Do $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{CN}$ nên $MP=CN$ và $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{CN}$ cùng hướng.

Vậy N đối xứng với Q qua C.

Câu 2: Cho hình thang $ABCD$ với đáy $BC=2AD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của BC, MC, CD, AB và E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{QE}$. Xác định vị trí điểm E.

Lời giải

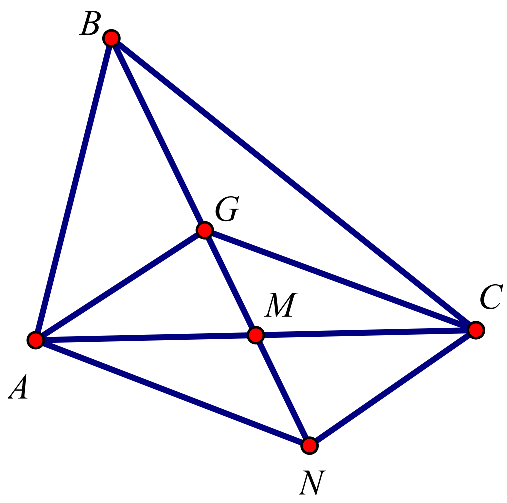


Ta có $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{QE}$ nên $BN=QE$ và $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{QE}$ cùng hướng.

Mà $QP=\dfrac{AD+BC}{2}=\dfrac{3}{2}AD=BN$, suy ra $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{BN}$ nên $E\equiv P$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{GC}$. Hãy xác định vị trí điểm N.

Lời giải

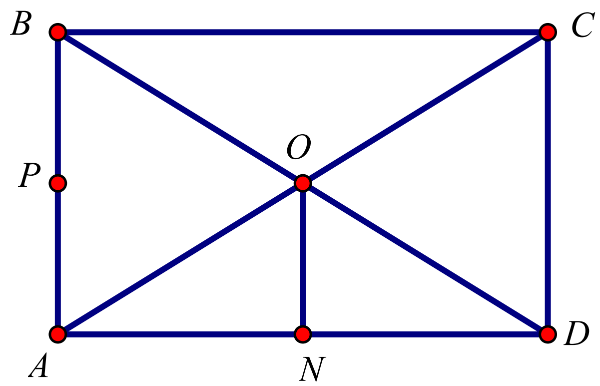


Do $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{GC}$ và A, C, G không thẳng hàng nên $AGCN$ là hình bình hành.

Vậy N đối xứng với G qua trung điểm M của AC.

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$, N, P lần lượt là trung điểm cạnh AD, AB và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{NM}$. Xác định vị trí điểm M.

Lời giải

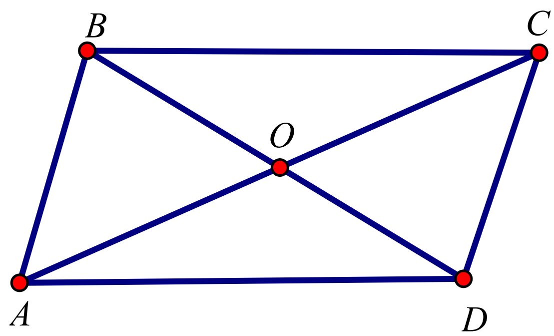


Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{NO}$.

Mà $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{NM}$ suy ra $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO} \Rightarrow M \equiv O$. Vậy M là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 5: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OM}$. Xác định vị trí điểm M.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OM}$ suy ra $AO = OM$ và $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OM}$ cùng hướng nên $M \equiv C$.

Câu 6: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C. Xác định điểm D thỏa $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right|$?

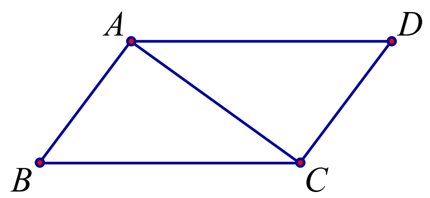
Lời giải

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \Leftrightarrow AB = CD$.

Suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB.

Câu 7: Cho tam giác ABC. Xác định vị trí của điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải



$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$.

Vậy M thỏa mãn $CBAM$ là hình bình hành.

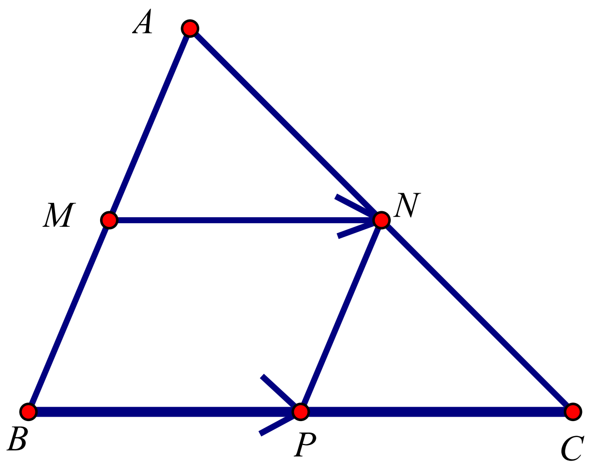
3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP}$. Chọn khẳng định đúng.

A. N là trung điểm của cạnh MC.
B. N là trung điểm của cạnh BP.
C. N là trung điểm của cạnh AC.
D. N là trung điểm của cạnh PC.

Lời giải

Chọn C



Ta có M, B, P không thẳng hàng nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP}$ thì $\begin{cases} MN = BP \\ MN \,//\, BP \end{cases}$.

Mà $BP = \frac{1}{2}BC$, suy ra $\begin{cases} MN \,//\, BC \\ MN = \frac{1}{2}BC \end{cases}$ và $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BP}$ cùng hướng.

Vậy N là trung điểm của cạnh AC.

Câu 2: Cho tam giác ABC và D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

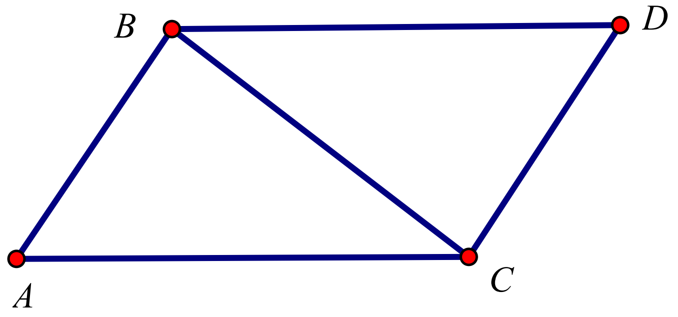
A. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.
B. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.

C. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ADBC$.

D. D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Lời giải

Chọn A



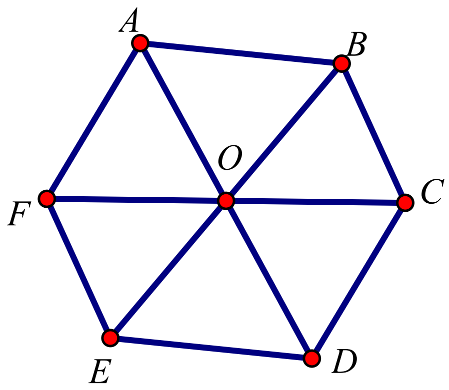
Từ đẳng thức vectơ ta suy ra D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Câu 3: Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. O là tâm của lục giác $ABCDEF$.
B. O là trung điểm của đoạn FC.
C. $EDCO$ là hình bình hành.
D. O là trung điểm của đoạn ED.

Lời giải

Chọn D



Do $ABCDEF$ là lục giác đều và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}$ nên O là trung điểm của đoạn ED là khẳng định sai.

Câu 4: Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và các mệnh đề.

(I) $ABCD$ là hình bình hành.

(II) D nằm giữa B và C.

(III) C nằm trên đường thẳng đi qua điểm D và song song hoặc trùng với đường thẳng AB.

(IV) Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.

Số mệnh đề đúng?

A. 1.
B. 2.
C. 3.
D. 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có mệnh đề " $ABCD$ là hình bình hành" là sai khi ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Mệnh đề " D nằm giữa B và C " là sai khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Mệnh đề "Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng" là sai khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Mệnh đề " C nằm trên đường thẳng đi qua điểm D và song song hoặc trùng với đường thẳng AB " là đúng theo định nghĩa hai vectơ bằng nhau.

Vậy số mệnh đề đúng là 1.

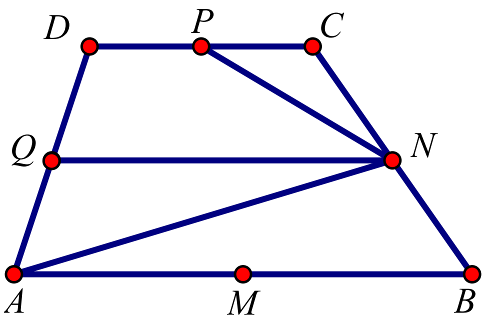
Câu 5: Cho hình thang $ABCD$ với đáy $AB = 2CD$. Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DA và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. M là trung điểm của PN. **B.** M là trung điểm của AN.

C. M là trung điểm của AB. **D.** M là trung điểm của QN.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB}$ nên $DC = MB$ và $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MB}$ cùng hướng. Mà $AB = 2DC$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng. Vậy M là trung điểm của AB.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Để điểm M thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn mệnh đề nào?

A. M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

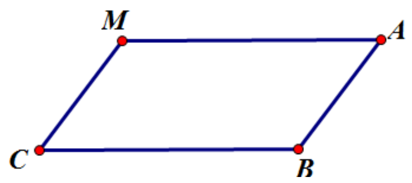
B. M là trọng tâm tam giác ABC.

C. M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

D. M thuộc trung trực của AB.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

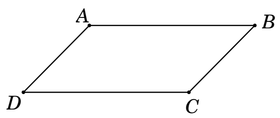
Nên tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là?

A. tập rỗng. **B.** một đoạn thẳng. **C.** một đường tròn. **D.** một đường thẳng.

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$ sai

$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

Câu 8: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right| = \left|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}\right|$ là?

A. trung trực đoạn BC. **B.** đường tròn tâm A, bán kính BC.

C. đường thẳng qua A và song song với BC. **D.** đường thẳng AB.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{CB}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right| \Rightarrow AM=BC$

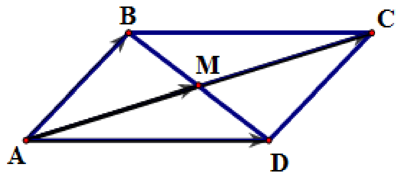
Mà A,B,C cố định $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A, bán kính BC.

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thõa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

A. Trung điểm của AD. **B.** Trung diểm của AC.
C. Điểm C. **D.** Trung điểm của AB.

Lời giải

Chọn B



Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=2.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}$

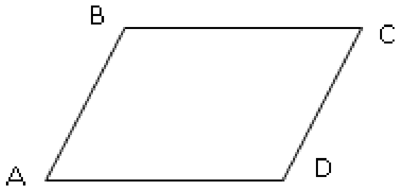
$\Rightarrow$ M là trung điểm của AC.

Câu 10: Cho tứ giác $ABCD$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **B.** $AB=CD$. **C.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn A



$ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \begin{cases} AB=DC \\ \overrightarrow{AB} \text{ cùng hướng } \overrightarrow{DC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\left|\overrightarrow{AM}\right|=a\sqrt{3}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=a$. **C.** $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

ΔABC đều cạnh $2a$ nên $\left|\overrightarrow{AM}\right|=AM=\frac{2a.\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

Câu 12: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$?

A. Vô số. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** Không có điểm nào.

Lời giải

Chọn A

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right| \Leftrightarrow AB=CD$. Do A,B,C cố định nên có vô số điểm D thỏa mãn. Tập hợp điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Lời giải

Chọn A

CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ thì:

A. tam giác ABC là tam giác cân **B.** tam giác ABC là tam giác đều

C. A là trung điểm đoạn BC **D.** điểm B trùng với điểm C

Câu 2: Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$ **C.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$ **D.** $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{NM}$

Câu 3: Cho tam giác ABC, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?

A. 4 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 12

Câu 4: Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. Không có vectơ nào cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

B. Có vô số vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

C. Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, đó là vectơ $\vec{0}$

D. Cả A, B, C đều sai

Câu 5: Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10

Câu 6: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

A. $ABCD$ là hình bình hành

B. $ACBD$ là hình bình hành

C. AD và BC có cùng trung điểm

D. $\overrightarrow{AB}=CD$ và $AB//CD$

Câu 7: Cho hình vuông $ABCD$, câu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **D.** $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$

Câu 8: Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm *C*. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo. Câu nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$ **D.** $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$

Câu 10: Cho tứ giác đều $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$ **B.** $|\overrightarrow{QP}|=|\overrightarrow{MN}|$ **C.** $\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{NP}$ **D.** $|\overrightarrow{MN}|=|\overrightarrow{AC}|$

Câu 11: Cho ba điểm A, B, C phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng
C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng **D.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Câu 12: Cho tứ giác *ABCD.* Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?
A. 4 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Câu 13: Cho 5 điểm *A, B, C, D, E* có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là *A* và điểm cuối là một trong các điểm đã cho:
A. 4 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 12

Câu 14: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:
A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau
B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành
C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều
D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau

Câu 15: Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm *O* sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?
A. $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{ED}$

Câu 16: Cho tam giác *ABC.* Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CA.* Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.
A. $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$ **B.** $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{AP}$
C. $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$ **D.** $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MA},\overrightarrow{PN},\overrightarrow{CP}$

Câu 17: Cho ba điểm *A, B, C* cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ cùng hướng khi và chỉ khi:
A. Điểm *B* thuộc đoạn *AC* **B.** Điểm *A* thuộc đoạn *BC*
C. Điểm *C* thuộc đoạn *AB* **D.** Điểm *A* nằm ngoài đoạn *BC*

Câu 18: Cho tam giác đều cạnh $2a$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?
A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AB}=2a$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2a$ **D.** $\overrightarrow{AB}=AB$

Câu 19: Cho tam giác không cân *ABC.* Gọi *H, O* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. *M* là trung điểm của *BC.* Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. Tam giác *ABC* nhọn thì $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ cùng hướng.
B. $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ luôn cùng hướng.
C. $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ cùng phương nhưng ngược hướng.
D. $\overrightarrow{AH},\overrightarrow{OM}$ có cùng giá

Câu 20: Cho hình thoi tâm *O*, cạnh bằng *a* và $\widehat{A}=60°$. Kết luận nào sau đây là đúng?
A. $\left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|$ **D.** $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Câu 21: Cho tứ giác *ABCD.* Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AD, BC* và *AC.* Biết $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$. Chọn câu đúng.
A. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

Câu 22: Cho tam giác *ABC* với trực tâm *H. D* là điểm đối xứng với *B* qua tâm *O* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC.* Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$ **B.** $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{HC}$

C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

Câu 23: Cho ΔABC với điểm *M* nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB* và *N, P, Q* lần lượt là các điểm đối xứng với *M* qua A', B', C'. Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

Câu 24: Cho tam giác *ABC* có *H* là trực tâm và *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi *D* là điểm đối xứng với *B* qua *O*. Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

Câu 25: Cho đường tròn tâm *O*. Từ điểm *A* nằm ngoài (O), kẻ hai tiếp tuyến *AB, AC* tới (O). Xét mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ (II) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$ (III) $\left|\overrightarrow{BO}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$

Mệnh đề đúng là:

A. Chỉ (I) **B.** (I) và (III) **C.** (I), (II), (III) **D.** Chỉ (III)

Câu 26: Cho hình bình hành *ABCD* tâm *O*. Gọi *P, Q, R* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, AD.* Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

A. Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PR}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$ **C.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

Câu 27: Cho hình vuông *ABCD* tâm *O* cạnh *a*. Gọi *M* là trung điểm của *AB, N* là điểm đối xứng với *C* qua ***D.*** Hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

A. $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Câu 28: Cho tứ giác *ABC**D.*** Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, BC, CD, D**A.*** Gọi *O* là giao điểm của các đường chéo của tứ giác *MNPQ*, trung điểm của các đoạn thẳng *AC, BD* tương ứng là *I, J*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ **B.** $MP = NQ$ **C.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ **D.** $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

Câu 29: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C, có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

A. vô số điểm. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** không có điểm nào.

Câu 30: Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Câu 31: Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Câu 32: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A, B, C, M, N, P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ (không kể véctơ $\overrightarrow{MN}$)?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 33: Cho hình thoi $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}.$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$ **C.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$ **D.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$

Câu 34: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

A. Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.

B. Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Câu 35: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 36: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng với $\overrightarrow{BA}$ là

A. $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

Câu 37: Cho lục giác đều $ABCEF$ tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 38: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là:

A. $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

Câu 39: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A,B,C,M,N,P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Câu 40: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 41: Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi D là điểm đối xứng với A qua O; E là điểm đối xứng với O qua BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{HE}$. **B.** $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OE}$. **D.** $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CD}$.

CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ thì:

A. tam giác ABC là tam giác cân
B. tam giác ABC là tam giác đều
C. A là trung điểm đoạn BC
D. điểm B trùng với điểm C

Lời giải

Đáp án D

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow B \equiv C$

Câu 2: Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$
B. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$
C. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$
D. $\overrightarrow{NP}$ và $\overrightarrow{NM}$

Lời giải

Đáp án A

Câu 3: Cho tam giác ABC, có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C?

A. 4
B. 6
C. 9
D. 12

Lời giải

Ta có các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC}$.

Đáp án B.

Câu 4: Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. Không có vectơ nào cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$
B. Có vô số vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$
C. Có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, đó là vectơ $\vec{0}$
D. Cả A, B, C đều sai

Lời giải

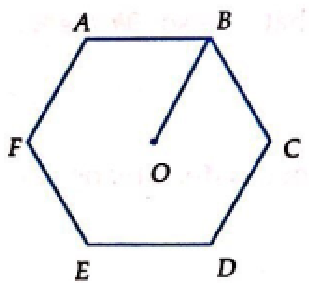
Vì vectơ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ. Nên có một vectơ cùng phương với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, đó là vectơ $\vec{0}$.

Đáp án C.

Câu 5: Cho hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 4
B. 6
C. 8
D. 10

Lời giải



Các vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OB}$ là:

$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$.

Đáp án B.

Câu 6: Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

A. $ABCD$ là hình bình hành

B. $ACBD$ là hình bình hành

C. AD và BC có cùng trung điểm

D. $\overrightarrow{AB} = CD$ và $AB//CD$

Lời giải

Đáp án C

Câu 7: Cho hình vuông $ABCD$, câu nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **C.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ **D.** $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$

Lời giải

Đáp án D

Câu 8: Cho vectơ $\overrightarrow{AB}$ và một điểm *C*. Có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** Vô số

Lời giải

Đáp án A

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo. Câu nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **B.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ **D.** $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$

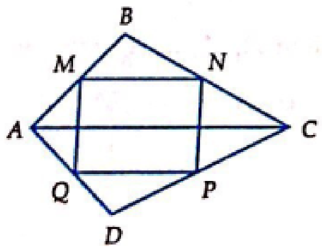
Lời giải

Đáp án A

Câu 10: Cho tứ giác đều *ABCD*. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CD, DA*. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ **B.** $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$ **C.** $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ **D.** $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$

Lời giải



Ta có $\begin{cases} MN//PQ \\ MN = PQ \end{cases}$ (do cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AC$).

Do đó MNPQ là hình bình hành.

Đáp án D.

Câu 11: Cho ba điểm *A, B, C* phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng hướng

C. $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng **D.** $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương

Lời giải

Với ba trường hợp lần lượt *A, B, C* nằm giữa thì ta luôn có $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.

Đáp án D.

Câu 12: Cho tứ giác *ABCD.* Có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

A. 4 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

Lời giải

Đáp án D

Một vectơ khác vectơ không được xác định bởi 2 điểm phân biệt. Do đó có 12 cách chọn 2 điểm trong 4 điểm của tứ giác.

Câu 13: Cho 5 điểm *A, B, C, D, E* có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là *A* và điểm cuối là một trong các điểm đã cho:

A. 4 **B.** 20 **C.** 10 **D.** 12

Lời giải

Đáp án A

Câu 14: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi:

A. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau

B. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành

C. Chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một tam giác đều

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau

Lời giải

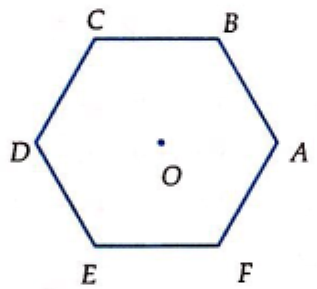
Đáp án D

Câu 15: Cho lục giác đều *ABCDEF* tâm *O*. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm *O* sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

A. $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$ **B.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$ **C.** $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ **D.** $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

Lời giải

Đáp án D



Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

$\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

Câu 16: Cho tam giác *ABC.* Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, CA.* Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

A. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$ **B.** $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$

C. $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$ **D.** $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

Lời giải

Đáp án C

Có 3 đường thẳng song song với *MN* là *AC, AP, PC*

Nên có 7 vectơ

$\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

Câu 17: Cho ba điểm *A, B, C* cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng hướng khi và chỉ khi:

A. Điểm *B* thuộc đoạn *AC* **B.** Điểm *A* thuộc đoạn *BC*

C. Điểm *C* thuộc đoạn *AB* **D.** Điểm *A* nằm ngoài đoạn *BC*

Lời giải

Đáp án A

Câu 18: Cho tam giác đều cạnh $2a$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = 2a$ **C.** $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2a$ **D.** $\overrightarrow{AB} = AB$

Lời giải

Đáp án C

Vì tam giác đều nên $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2a$

Câu 19: Cho tam giác không cân *ABC.* Gọi *H, O* lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. *M* là trung điểm của *BC.* Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Tam giác *ABC* nhọn thì $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng hướng.

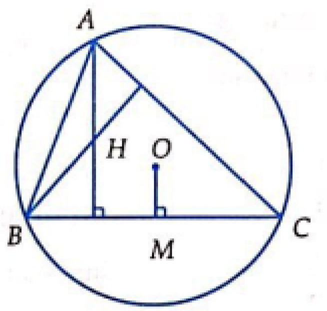
B. $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ luôn cùng hướng.

C. $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng phương nhưng ngược hướng.

D. $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ có cùng giá

Lời giải

Đáp án A



Thật vậy khi ΔABC nhọn thì ta có:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH // OM$$

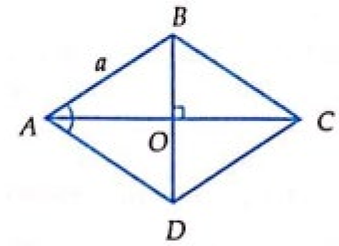
O, H nằm trong tam giác $\Rightarrow \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$ cùng hướng

Câu 20: Cho hình thoi tâm *O*, cạnh bằng *a* và $\widehat{A} = 60°$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{OA}\right| = a$ **C.** $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right|$ **D.** $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Đáp án A



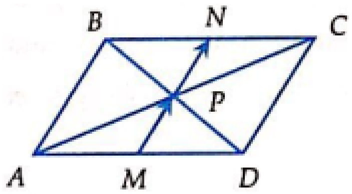
Vì $\widehat{A} = 60° \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AO}\right| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 21: Cho tứ giác *ABCD*. Gọi *M, N, P* lần lượt là trung điểm của *AD, BC* và *AC*. Biết $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$. Chọn câu đúng.

A. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

Lời giải

Đáp án C



Ta có: $MP // DC, MP = \dfrac{1}{2}DC$, $PN // AB, PN = \dfrac{1}{2}AB$ .Mà $MP = PN$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Câu 22: Cho tam giác *ABC* với trực tâm *H*. *D* là điểm đối xứng với *B* qua tâm *O* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ **B.** $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HC}$

C. $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ **D.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

Lời giải

Ta có *BD* là đường kính $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

$AH \perp BC, DC \perp BC \Rightarrow AH // DC$ (1)

Ta lại có $CH \perp AB, DA \perp AB \Rightarrow CH // DA$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tứ giác *HADC* là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$.

Đáp án C.

Câu 23: Cho ΔABC với điểm *M* nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của *BC, CA, AB* và *N, P, Q* lần lượt là các điểm đối xứng với *M* qua A', B', C'. Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$ và $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$ **D.** $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

Lời giải

Ta có $AMCP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có *AQBM* và *BMCN* là hình bình hành

$\Rightarrow NC = BM = QA$

$\Rightarrow AQNC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$.

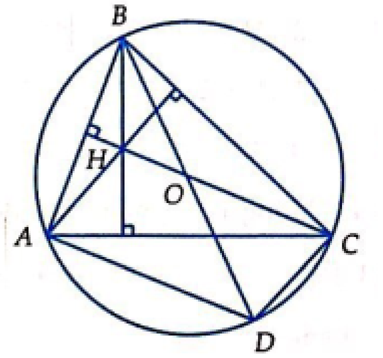
Đáp án B.

Câu 24: Cho tam giác *ABC* có *H* là trực tâm và *O* là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi *D* là điểm đối xứng với *B* qua *O*. Câu nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ **B.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **C.** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

Lời giải

Đáp án A



Ta có thể chỉ ra được $ADCH$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

Câu 25: Cho đường tròn tâm *O*. Từ điểm *A* nằm ngoài (O), kẻ hai tiếp tuyến *AB, AC* tới (O). Xét mệnh đề:

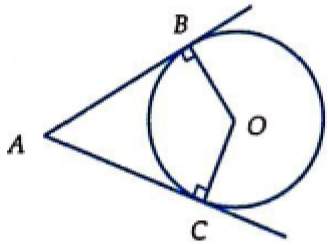
(I) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ (II) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$ (III) $\left|\overrightarrow{BO}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$

Mệnh đề đúng là:

A. Chỉ (I) **B.** (I) và (III) **C.** (I), (II), (III) **D.** Chỉ (III)

Lời giải

Đáp án D



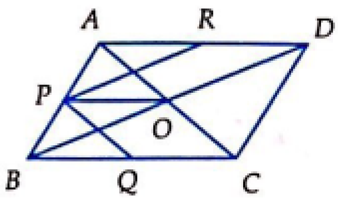
Ta có: $OB = OC = R \Rightarrow \left|\overrightarrow{BO}\right| = \left|\overrightarrow{CO}\right|$

Câu 26: Cho hình bình hành *ABCD* tâm *O*. Gọi *P, Q, R* lần lượt là trung điểm của *AB, BC, AD.* Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

A. Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{PR}$ **B.** Có 4 vectơ bằng $\overrightarrow{AR}$ **C.** Có 2 vectơ bằng $\overrightarrow{BO}$ **D.** Có 5 vectơ bằng $\overrightarrow{OP}$

Lời giải

Đáp án D



Ta có: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

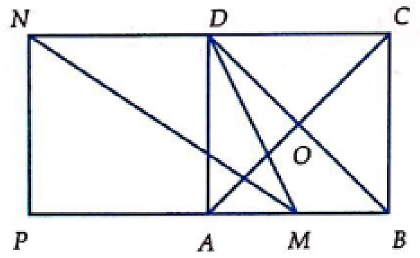
$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QB}$

Câu 27: Cho hình vuông *ABCD* tâm *O* cạnh *a*. Gọi *M* là trung điểm của *AB, N* là điểm đối xứng với *C* qua ***D.*** Hãy tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$.

A. $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ **B.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$ **C.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ **D.** $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Lời giải

Đáp án C



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông MAD ta có:

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$= \frac{5a^2}{4}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông NPM ta có:

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{13a^2}{4}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$$

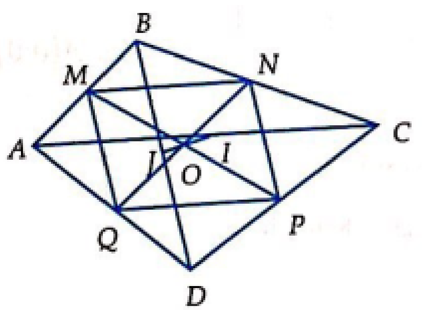
Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

Câu 28: Cho tứ giác *ABCD*. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *AB, BC, CD, DA*. Gọi *O* là giao điểm của các đường chéo của tứ giác *MNPQ*, trung điểm của các đoạn thẳng *AC, BD* tương ứng là *I, J*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$ **B.** $MP = NQ$ **C.** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ **D.** $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

Lời giải

Đáp án D



Ta có: $MNPQ$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ta có:

$\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=-\overrightarrow{OJ}$

Câu 29: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C, có bao nhiêu điểm D thỏa mãn $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

A. vô số điểm. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** không có điểm nào.

Lời giải

Chọn A

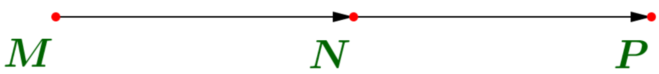
$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right| \Rightarrow AB=CD$. Mà AB là hằng số dương và C cố định cho trước nên D thuộc đường tròn tâm C bán kính là AB.

Câu 30: Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Lời giải

Chọn A



Câu 31: Cho ba điểm M,N,P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

A. $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$. **C.** $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D

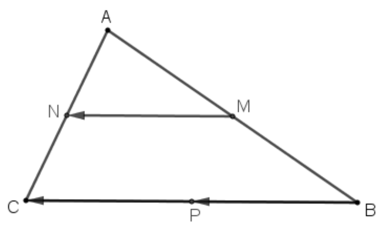
Cặp vectơ cùng hướng là $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Câu 32: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A,B,C,M,N,P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ (không kể véctơ $\overrightarrow{MN}$)?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C



Các véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A,B,C,M,N,P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ (không kể véctơ $\overrightarrow{MN}$) là: $\overrightarrow{BP}$ và $\overrightarrow{PC}$

Câu 33: Cho hình thoi $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 34: Hai vectơ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

A. Chúng cùng phương và có độ dài bằng nhau.

B. Giá của chúng trùng với một trong các cặp cạnh đối của một hình bình hành.

C. Giá của chúng trùng nhau và độ dài của chúng bằng nhau.

D. Chúng cùng hướng và độ dài của chúng bằng nhau.

Lời giải

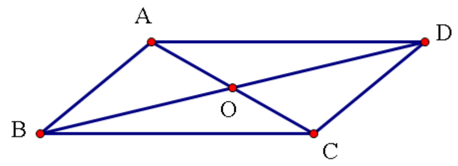
Chọn D

Câu 35: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D



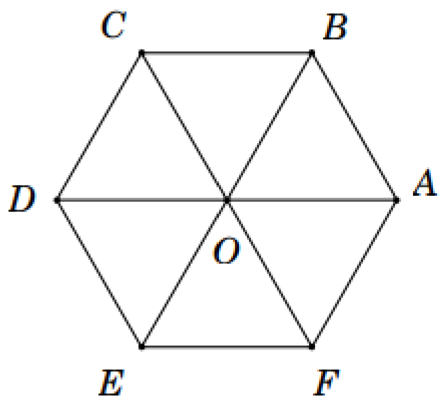
Ta có: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} \neq \overrightarrow{AD}$

Câu 36: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng với $\overrightarrow{BA}$ là

A. $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}$ **D.** $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn B



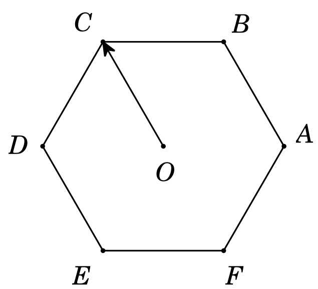
Ba vectơ bằng $\overrightarrow{BA}$ là $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{CO}$.

Câu 37: Cho lục giác đều $ABCEF$ tâm O. Số các vectơ bằng $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A



Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$.

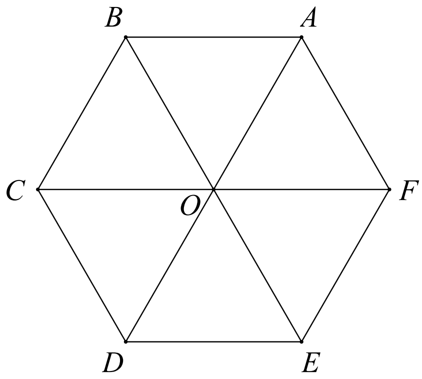
Câu 38: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Ba vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là:

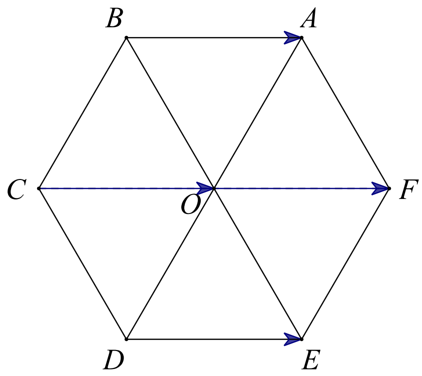
A. $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ED},\overrightarrow{OC}$. **B.** $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$. **D.** $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử lục giác đều $ABCDEF$ tâm O có hình vẽ như sau





Dựa vào hình vẽ và tính chất của lục giác đều ta có các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BA}$ là $\overrightarrow{OF},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{CO}$.

Câu 39: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AC và BC. Có bao nhiêu véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A,B,C,M,N,P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

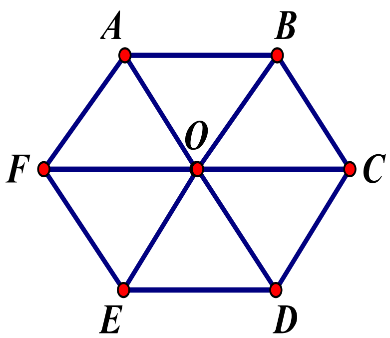
Các véctơ khác véctơ không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm trong các điểm A,B,C,M,N,P bằng véctơ $\overrightarrow{MN}$ là: $\overrightarrow{BP}$ và $\overrightarrow{PC}$

Câu 40: Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

A. 6. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C



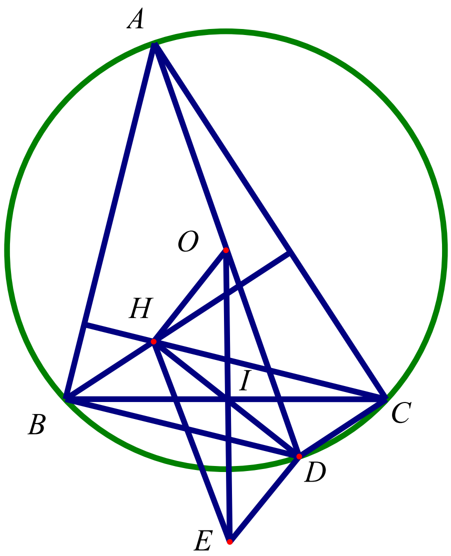
Các vecto bằng vecto $\overrightarrow{OC}$ mà điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của lục giác là $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{ED}$.

Câu 41: Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Gọi D là điểm đối xứng với A qua O; E là điểm đối xứng với O qua BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{HE}$. **B.** $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{DE}$. **C.** $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OE}$. **D.** $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm của BC.

Do E là điểm đối xứng với O qua BC nên I là trung điểm của OE (1).

Ta có, $CH // DB$ (cùng vuông góc với AB)

Tương tự, $BH // DC$ (cùng vuông góc với AC)

Từ đó suy ra $BHCD$ là hình bình hành nên I là trung điểm của HD (2).

Từ (1) và (2) suy ra, $OHED$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{DE}$.

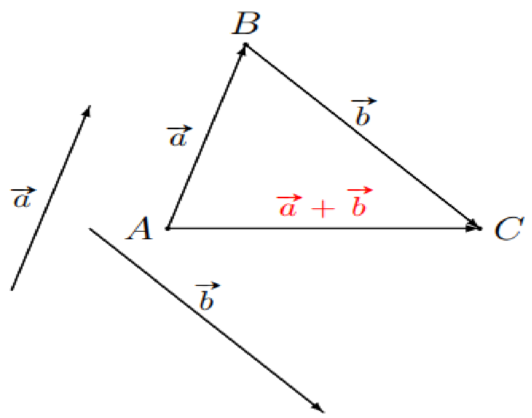
CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 2: TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

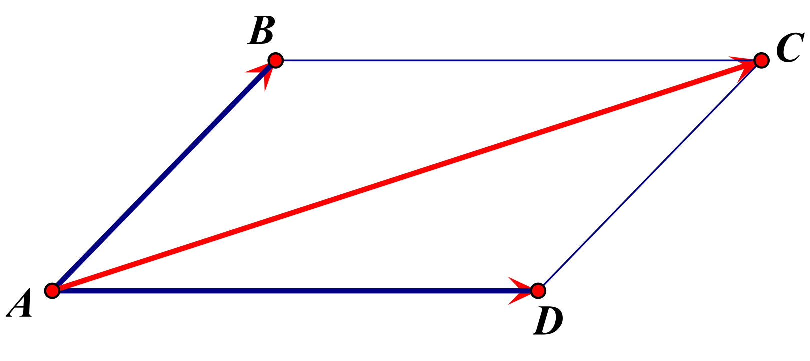
1.1. Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



1.2. Các quy tắc:

+ *Quy tắc ba điểm*: Với ba điểm A, B, C, ta luôn có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

+ *Quy tắc hình bình hành*: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



2. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CỘNG VECTƠ: Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý, ta có:

+ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

+ Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

+ Tính chất của vectơ - không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

3. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

+ Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

+ Với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

4. TÍNH CHẤT VECTO CỦA TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM TAM GIÁC:

+ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

+ Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

II VÍ DỤ MINH HỌA.

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ với M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tìm tổng của hai vectơ:

a) $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$ b) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$

Câu 2. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC.

1) Tìm các hiệu sau $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$;

2) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a với tâm là O. Tính:

a) Độ dài vectơ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}$ b) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|$.

Câu 4. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C và D. Hãy chứng minh đẳng thức: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$, với O là điểm bất kì.

Câu 6. Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thỏa điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Câu 7. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC, với cạnh huyền $BC=12$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

Câu 8. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm hai cạnh AD, BC và G là trung điểm IJ. Gọi P là điểm đối xứng của G qua I, Q là điểm đối xứng của G qua J. Chứng minh các đẳng thức vecto sau:

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GP}$; $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GQ}$. b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Câu 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=1$. Gọi I là trung điểm CD. Hãy tính:

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|$. b) $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right|$.

Câu 10. Cho tam giác ABC, đặt: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Tìm điều kiện của tam giác ABC để:

a) $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. b) $\vec{u}\perp\vec{v}$.

III HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỔNG CÁC VECTƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$, xác định các vectơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC, xác định các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Câu 3. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O, xác định các vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OD}$.

Câu 4. Cho n điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, xác định vectơ

$$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}}+\overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}}+...+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC. Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. **B.** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. **D.** $\vec{0}+\vec{a}=\vec{0}$.

Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{DB}$.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}$.

Câu 4: Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

Câu 5: Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Vectơ tổng $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng

A. $\overrightarrow{BP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{CP}$. **D.** $\overrightarrow{PA}$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{DI}$.

C. $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IA}$.

Câu 8: Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Xác định vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{MQ}$. **D.** $\overrightarrow{MR}$.

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

Câu 10: Cho tam giác ABC và M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}$.

Câu 11: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?.

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CA}$. **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Câu 13: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?.

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm BC, G_1 là điểm đối xứng của G qua M. Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}$ bằng

A. $\overrightarrow{GA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{G_1A}$. **D.** $\overrightarrow{G_1M}$.

Câu 15: Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$;

2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;

3) Tam giác ABC là tam giác đều;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 16: Xét tam giác ABC có trọng tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HG}=\vec{0}$;

2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;

3) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 17: Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$;

2) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HA}$;

3) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O;

4) Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 18: Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$. **D.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{OA}$.

Câu 20: Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, ..., A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, ..., B_n$ ($A_1 \not\equiv B_n$). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{A_1A_n}$. **C.** $\overrightarrow{B_1B_n}$. **D.** $\overrightarrow{A_1B_n}$.

DẠNG 2: VECTƠ ĐỐI, HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Câu 2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$

Câu 3. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

a) Tìm $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}; \overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}; \overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vecto $\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}$.

Câu 4. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Câu 5. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, ..., A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, ..., B_n$ ($A_1 \not\equiv B_n$). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\vec{0}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

C. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ cùng độ dài. **D.** Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung điểm đầu.

Câu 2: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. **D.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$.

Câu 3: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

A. $\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{DA}$. **C.** $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

Câu 4: Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

A. $\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Câu 5: Chọn khẳng định sai:

A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.

C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

Câu 6: Cho 4 điểm bất kỳ $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$. **B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

Câu 7: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$.

Câu 8: Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

A. $\overrightarrow{MR}$. **B.** $\overrightarrow{MQ}$. **C.** $\overrightarrow{MP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$.

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$. **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.

C. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}$. **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $M,\ N,\ D$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ AC,\ BC$. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

A. $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{ND}$. **B.** $\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{ND}$. **C.** $\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{ND}$.

Câu 11: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ bằng

A. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CD}$.

Câu 13: Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ là:

A. $\vec{u}=\vec{0}$. **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. **C.** $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 14: Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ bằng:

A. $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\vec{u}=\vec{0}$. **C.** $u=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 15: Cho 4 điểm $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$.

Câu 16: Cho Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Câu 17: Cho Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Câu 18: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}$.

Câu 19: Cho 4 điểm A,B,C,D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$.

Câu 20: Cho ΔABC, vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{MP}$

(II) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{MN}$

(III) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (III). **C.** (I) và (II). **D.** Chỉ (II).

DẠNG 3:CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho năm điểm A,B,C,D,E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$ b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

Câu 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho 5 điểm phân biệt M,N,P,Q,R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$. **D.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức véctơ nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$. **C.** $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 4: Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

Câu 5: Cho 3 điểm phân biệt A,B,C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ bằng

A. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CD}$.

Câu 7: Cho 6 điểm A,B,C,D,E,F. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 8: Cho hình bình hành ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và A**D.** Tính tổng $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}$.

A. $\overrightarrow{AC}$.. **B.** $\overrightarrow{NM}$.. **C.** $\overrightarrow{CA}$.. **D.** $\overrightarrow{MN}$..

Câu 9: Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Câu 10: Cho 6 điểm A,B,C,D,E,F. Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ bằng

A. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DF}$. **C.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}$.

Câu 11: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$. Đẳng thức nào sau đây ***sai***?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$.

Câu 12: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$ với I là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$. **C.** $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. **C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CB}$.

Câu 16: Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE=EF=FC$, BE cắt AM tại N. Chọn mệnh đề đúng:

A. $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. **C.** $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}=\overrightarrow{EF}$.

Câu 18: Cho tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB. Hệ thức nào là đúng?

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

Câu 19: Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$
C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=6\left|\overrightarrow{AB}\right|$.
D. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Câu 20: Cho tam giác ABC có trực tâm H, D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?
A. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$.
B. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.
C. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HD}$.
D. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA ĐẲNG THỨC VEC TƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho ΔABC, tìm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$.

Câu 2. Cho ΔABC, tìm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}$.

Câu 3. ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Câu 4. ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}$.

Câu 5. Cho tứ giác $ABCD$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho đoạn thẳng AB, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M là trung điểm AB.
B. M trùng A.
C. M trùng B.
D. A là trung điểm MB.

Câu 2: Cho 2 điểm phân biệt A, B. Tìm điểm I thỏa $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. I là trung điểm AB.
B. I thuộc đường trung trực của AB.
C. Không có điểm I.
D. Có vô số điểm I.

Câu 3: Cho ΔABC, B. Tìm điểm I để $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. I là trung điểm AB.
B. I thuộc đường trung trực của AB.
C. Không có điểm I.
D. Có vô số điểm I.

Câu 4: Cho 2 điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M là trung điểm AB.
B. M thuộc đường trung trực của AB.
C. Không có điểm M.
D. Có vô số điểm M.

Câu 5: Cho đoạn thẳng AB, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M là trung điểm AB.
B. M trùng A.
C. M trùng B.
D. A là trung điểm MB.

Câu 6: Cho tam giác ABC, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. M là trung điểm AB.
B. M là trọng tâm ΔABC.
C. M trùng B.
D. A là trung điểm MB.

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Câu 8: Cho $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Câu 9: Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Câu 10: Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Câu 11: Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Câu 12: Cho tứ giác $PQRN$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thỏa
$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng P. **B.** M trùng Q. **C.** M trùng O. **D.** M trùng R.

Câu 13: Cho ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M là trung điểm BC.

C. M là trung điểm CA. **D.** M là trọng tâm ΔABC.

Câu 14: Cho ΔDEF, tìm M thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$. **C.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DF}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

Câu 15: Cho ΔDEF, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}$. **B.** $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EM}$. **C.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{EM}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

Câu 16: Cho ΔABC có O là trung điểm BC, tìm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng A. **B.** M trùng B. **C.** M trùng O. **D.** M trùng C.

Câu 17: Cho ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M là trung điểm BC.

C. M là trung điểm CA. **D.** M là trọng tâm ΔABC.

Câu 18: Cho ΔABC, điểm M thỏa $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng A. **B.** M trùng B.

C. $ACMB$ là hình bình hành. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$.

Câu 19: Cho ΔABC, D là trung điểm AB, E là trung điểm BC, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CM}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{ED}$.

C. M là trung điểm BC. **D.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 20: Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M là trung điểm BC.

C. D là trung điểm BM. **D.** M là trung điểm DC.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÍNH ĐỘ DÀI CỦA VEC TƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$.

Câu 2. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Câu 4. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB=5$, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

Câu 5. Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O, biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là $50\ (\mathrm{N})$ và chúng hợp với nhau một góc $60°$. Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Độ dài $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$ bằng

A. $2a$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=a$.

Câu 4: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C .Có bao nhiêu điểm D thỏa $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$?

A. Vô số. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** Không có điểm nào.

Câu 5: Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. **B.** $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

C. $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|>0$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I; G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

C. $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right|$. **D.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

Câu 7: Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB=5$, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=5$. **C.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{5\sqrt{7}}{4}$. **D.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Câu 8: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$.

Câu 9: Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O, biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là $50\left(\mathrm{N}\right)$ và chúng hợp với nhau một góc $60°$. Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

A. $100\left(\mathrm{N}\right)$. **B.** $50\sqrt{3}\left(\mathrm{N}\right)$. **C.** $100\sqrt{3}\left(\mathrm{N}\right)$. **D.** Đáp án khác.

Câu 10: Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $ABCD$ là hình thoi.

C. $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $ABCD$ là hình thang cân.

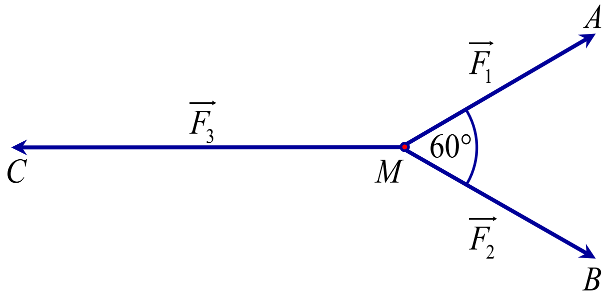
Câu 11: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a$.

Câu 12: Cho tam giác ABC đều cạnh a, có AH là đường trung tuyến. Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right|$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Câu 13: Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB}=60°$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là



A. $25\sqrt{3}$ N. **B.** $50\sqrt{3}$ N. **C.** $50\sqrt{2}$ N. **D.** $100\sqrt{3}$ N.

Câu 14: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Tìm khẳng định **sai**.

A. $\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IA}\right|=IA$. **B.** $\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|=BC$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2AI$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3GA$.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Câu 16: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

A. $4a\sqrt{2}$. **B.** $4a$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Câu 17: Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G. Độ dài vecto $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}$ là

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 18: Tam giác ABC thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì tam giác ABC là

A. Tam giác vuông A. **B.** Tam giác vuông C.
C. Tam giác vuông B. **D.** Tam giác cân tại C.

Câu 19: Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$ có G là trọng tâm. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Câu 20: Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300(\text{N})$ và $400(\text{N})$. $\widehat{AMB}=90°$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

A. $0\ (\text{N})$. **B.** $700(\text{N})$. **C.** $100(\text{N})$. **D.** $500(\text{N})$.

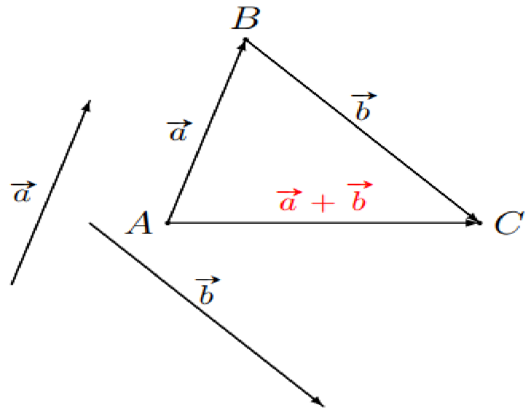
CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 2: TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

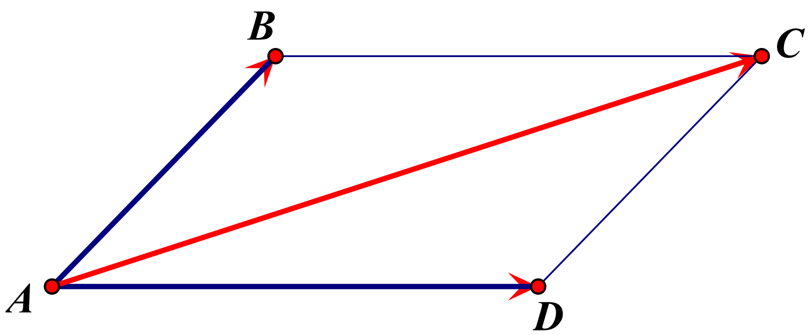
1.1. Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng** của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$. Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.



1.2. Các quy tắc:

+ *Quy tắc ba điểm*: Với ba điểm A, B, C, ta luôn có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

+ *Quy tắc hình bình hành*: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.



2. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP CỘNG VECTƠ: Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ tùy ý, ta có:

+ Tính chất giao hoán: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

+ Tính chất kết hợp: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

+ Tính chất của vectơ - không: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

3. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

+ Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

+ Với ba điểm O, A, B tùy ý, ta luôn có: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

4. TÍNH CHẤT VECTO CỦA TRUNG ĐIỂM ĐOẠN THẲNG VÀ TRỌNG TÂM TAM GIÁC:

+ Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

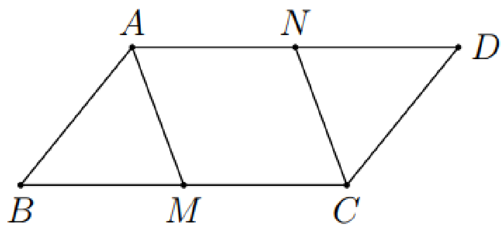
+ Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

II VÍ DỤ MINH HỌA.

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ với M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Tìm tổng của hai vectơ:

a) $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$ b) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$

Lời giải



a) Vì $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN}$ nên ta có $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$.

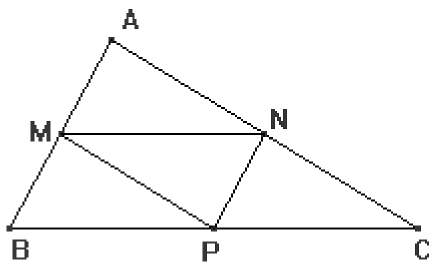
b) Vì $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$ nên ta có $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và BC.

1) Tìm các hiệu sau $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}$;

2) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Lời giải



1) Theo qui tắc ba điểm, thì $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$.

Vì MP là đường trung bình của tam giác ABC và $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng với $\overrightarrow{NC}$ nên ta có $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}$.

Do vậy: $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$.

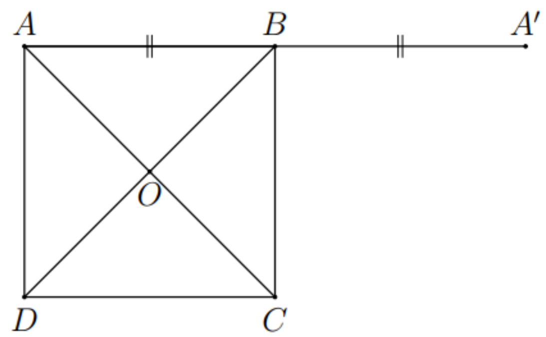
Vì $-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP}$ nên $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

2) Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NP}$ nên có phân tích sau $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MN}$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a với tâm là O. Tính:

a) Độ dài vectơ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}$ b) Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|$.

Lời giải



a) Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BO}$.

Mặt khác $BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Nên $\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CB}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{AA'}$ nên $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|=2a$.

Câu 4. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C và D. Hãy chứng minh đẳng thức: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Cách 1: Sử dụng qui tắc tổng

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\vec{0}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Cách 2: Sử dụng hiệu hai vectơ.

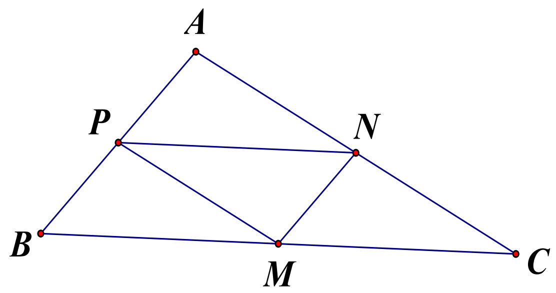
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}.$$

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$, với O là điểm bất kì.

Lời giải



a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $PN\,//\,BM$, $MN\,//\,BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$.

N là trung điểm của $AC\Rightarrow\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}\right)+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

b) Theo quy tắc ba điểm ta có

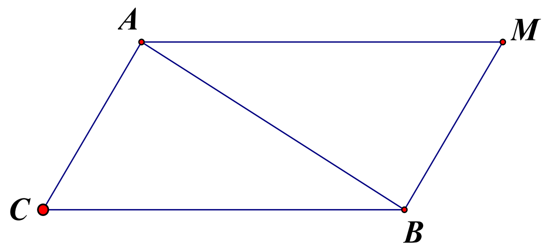
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$

Theo câu a) $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ ta suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thỏa điều kiện $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

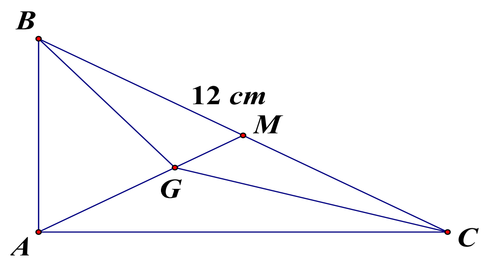
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=\overrightarrow{BC}$.

Suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBM$.

Câu 7. Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC, với cạnh huyền $BC=12$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm BC

Ta có $AM=\dfrac{1}{2}BC=6$; $AG=\dfrac{2}{3}AM=4$.

Mặc khác $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG}$

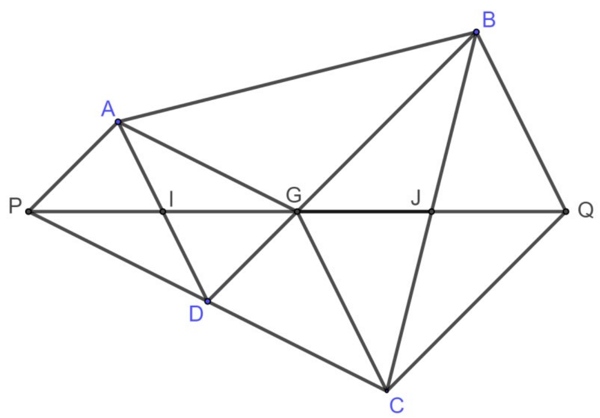
Suy ra $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{AG}\right|=AG=4$.

Câu 8. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm hai cạnh AD, BC và G là trung điểm IJ. Gọi P là điểm đối xứng của G qua I, Q là điểm đối xứng của G qua J. Chứng minh các đẳng thức vecto sau:

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GP}$; $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GQ}$.

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải



a) Hai tứ giác $AGDP$ và $BGCQ$ có hai đường chéo giao nhau tại trung điểm mỗi đường nên chúng là các hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành ta có:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{GP}$ (đpcm).

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GQ}$ (đpcm).

b) Theo cách dựng hình từ đề bài ta thấy G là trung điểm PQ nên $\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$.

Biến đổi biểu thức vecto đề cho và dựa vào kết quả câu a:

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}\right)+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}=\vec{0}$

Câu 9. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2$, $AD=1$. Gọi I là trung điểm CD. Hãy tính:

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|$. b) $\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right|$.

Lời giải

a) Ta thực hiện biến đổi:

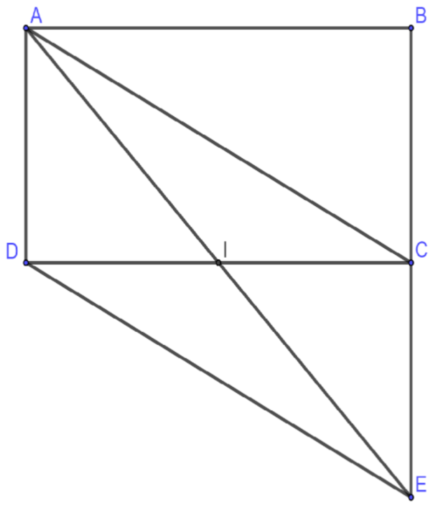
$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Dựng điểm E sao cho: $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}$.

Suy ra $ACED$ là hình bình hành.

Theo quy tắc hình bình hành: $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|=AE$.

Tam giác ABE vuông cân tại B nên: $AE=AB\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.



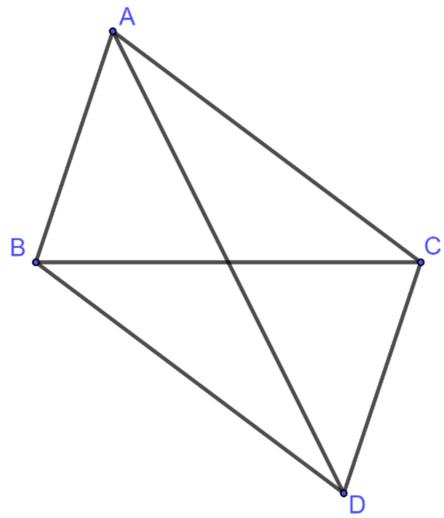
b) Ta thực hiện biến đổi:

$\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right|=\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AI}\right|=\left|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AI}\right|=\left|\overrightarrow{ID}\right|=ID=\dfrac{CD}{2}=1$.

Câu 10. Cho tam giác ABC, đặt: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Tìm điều kiện của tam giác ABC để:

a) $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. b) $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $ABDC$, theo quy tắc hình bình hành và nguyên tắc trừ vectơ, ta có:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

a) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow AD = BC$. Hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo bằng nhau khi và chỉ khi $ABDC$ là hình chữ nhật.

Vậy ΔABC vuông tại A thì $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow AD \perp BC$. Hình bình hành $ABDC$ có hai đường chéo vuông góc khi và chỉ khi $ABDC$ là hình thoi.

Vậy ΔABC cân tại A thì $\vec{u} \perp \vec{v}$.

III HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: CÁC BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN TỔNG CÁC VECTƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$, xác định các vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC, xác định các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Gọi D là điểm sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 3. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O, xác định các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 4. Cho n điểm $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, xác định vectơ

$$\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \ldots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Lời giải

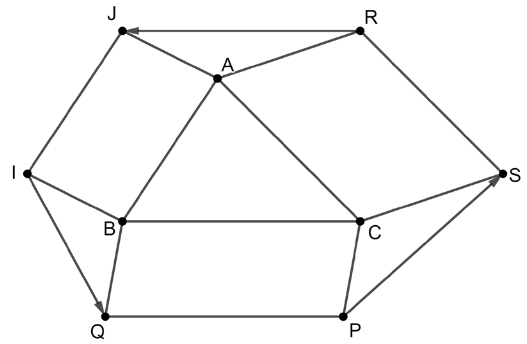
$\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \ldots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}$

$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

Do đó $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \ldots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_n}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ$, $BCPQ$, $CARS$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

Lời giải



$\overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= \left(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}\right) + \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}\right) + \left(\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}\right) + \left(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}\right) \\
&= \left(\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CS}\right) + \left(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PC}\right) \\
&= \overrightarrow{SS} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{CC} \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. **B.** $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

C. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. **D.** $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ bằng

A. $\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{DB}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A,B,C. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$.

Câu 4: Cho bốn điểm phân biệt A,B,C,D. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Câu 5: Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,BC,CA. Vectơ tổng $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng

A. $\overrightarrow{BP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{CP}$. **D.** $\overrightarrow{PA}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BP}$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{DI}$.

C. $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IA}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}$.

Câu 8: Cho các điểm phân biệt M,N,P,Q,R. Xác định vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

A. $\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{MQ}$. **D.** $\overrightarrow{MR}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{MP}$.

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 10: Cho tam giác ABC và M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}$.

Câu 11: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?.

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CA}$. **C.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$. **D.** $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

Câu 13: Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?.

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FA}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm BC, G_1 là điểm đối xứng của G qua M. Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}$ bằng

A. $\overrightarrow{GA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{G_1A}$. **D.** $\overrightarrow{G_1M}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{G_1G}=\overrightarrow{GA}$.

Câu 15: Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$;

2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;

3) Tam giác ABC là tam giác đều;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Rightarrow O\equiv G$. Do đó tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 16: Xét tam giác ABC có trọng tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HG}=\vec{0}$;

2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;

3) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}\Rightarrow H\equiv G$. Do đó tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 17: Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$;

2) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HA}$;

3) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O;

4) Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}\Rightarrow\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$.

Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì $\overrightarrow{HH_1}=\vec{0}$, suy ra $H\equiv O$.

Câu 18: Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$. **B.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.

C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$. **D.** $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 19: Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{OA}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

Câu 20: Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, ..., A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, ..., B_n$ ($A_1 \not\equiv B_n$). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

A. $\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{A_1A_n}$. **C.** $\overrightarrow{B_1B_n}$. **D.** $\overrightarrow{A_1B_n}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}+...+\overrightarrow{A_nO}\right)+\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+...+\overrightarrow{OB_n}\right)$

Vì $\{B_1, B_2, ..., B_n\}=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ nên

$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+...+\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$

Do đó $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OA_2}\right)+...+\left(\overrightarrow{A_nO}+\overrightarrow{OA_n}\right)=\vec{0}$.

DẠNG 2: VECTƠ ĐỐI, HIỆU CỦA HAI VECTƠ

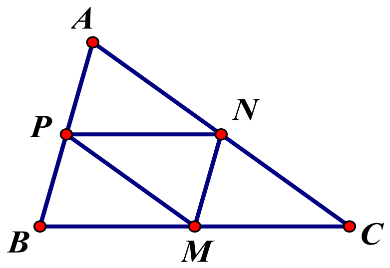
1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải



a) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ

$\Rightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

Vậy $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

b) Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Câu 2. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$

Lời giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\right)+\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}\right)$

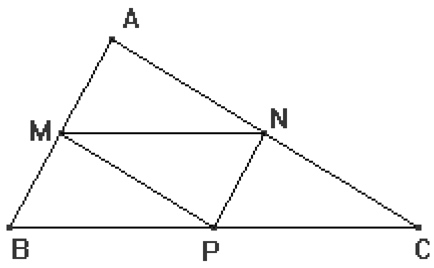
$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}\right)+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC.

a) Tìm $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN};\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC};\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN};\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}$.

b) Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NM}$

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$ *(Vì* $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MP}$*)*

$\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MN}$.

Câu 4. Cho 5 điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Ta có $-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CD};-\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EC}$ *nên*

$VT=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$=VP$\Rightarrow$ đpcm.

Câu 5. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1,A_2,...,A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1,B_2,...,B_n$ ($A_1\not\equiv B_n$). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\vec{0}$.

Lời giải

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+...+\overrightarrow{OB_n}\right)-\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}\right)$

Vì $\{B_1,B_2,...,B_n\}=\{A_1,A_2,...,A_n\}$ nên

$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+...+\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$

Do đó $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}=\vec{0}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương. **B.** Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng.

C. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng độ dài. **D.** Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ chung điểm đầu.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}=-\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

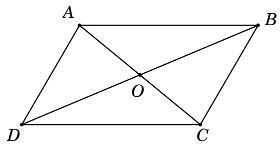
Câu 2: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$.. **B.** $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$..

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.. **D.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$..

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

- Đáp án **A.** Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.
- Đáp án **B.** Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{cases}$. Vậy B sai.
- Đáp án **C.** Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}.$ Vậy C đúng.
- Đáp án **D.** Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$. Vậy D đúng

Câu 3: Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

A. $\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{DA}$. **C.** $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn B

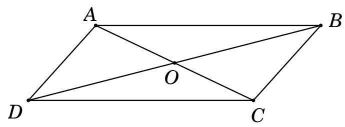
$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 4: Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

A. $\overrightarrow{BA}$. **B.** $\overrightarrow{BC}$. **C.** $\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B



$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 5: Chọn khẳng định sai:

A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.

C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{BA}\neq\vec{0}$.

Câu 6: Cho 4 điểm bất kỳ $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$. **B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. **D.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

Câu 7: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.

Vậy: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$.

Câu 8: Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

A. $\overrightarrow{MR}$. **B.** $\overrightarrow{MQ}$. **C.** $\overrightarrow{MP}$. **D.** $\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 9: Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$. **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.

C. $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}$. **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

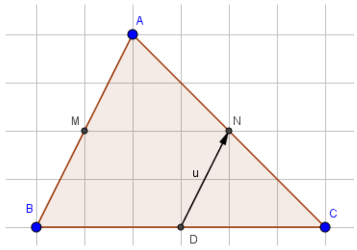
$\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.(đúng).

Câu 10: Cho tam giác ABC có $M,\ N,\ D$ lần lượt là trung điểm của $AB,\ AC,\ BC$. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

A. $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{ND}$. **B.** $\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{ND}$. **C.** $\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{AM}$. **D.** $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{BM},\ \overrightarrow{ND}$.

Lời giải

Chọn A



Nhìn hình ta thấy vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là: $\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{ND}$.

Câu 11: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.
C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 12: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ bằng

A. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ (qui tắc 3 điểm).

Câu 13: Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ là:

A. $\vec{u}=\vec{0}$. **B.** $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. **C.** $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn D

$\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 14: Cho bốn điểm $A,\ B,\ C,\ D$ phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ bằng:

A. $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\vec{u}=\vec{0}$. **C.** $u=\overrightarrow{CD}$. **D.** $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

Câu 15: Cho 4 điểm $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.

Câu 16: Cho Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Do $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{CO}$ đối nhau, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{DO}$ đối nhau.

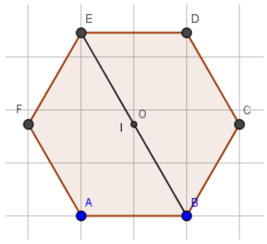
Câu 17: Cho Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EO}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AO}\neq\vec{0}$.

Câu 18: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$.

Câu 19: Cho 4 điểm A,B,C,D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}$.

Câu 20: Cho ΔABC, vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{MP}$

(II) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{MN}$

(III) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (III). **C.** (I) và (II). **D.** Chỉ (II).

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{FQ}=\overrightarrow{MP}$.

DẠNG 3:CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VECTƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$ b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Lời giải

a) Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned} VT &= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{CD}+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}\right) \\ &= \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DA} \\ &= \left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA} \end{aligned}$$

$=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=VP$.

b) Đẳng thức tương đương với

$\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ (đúng).

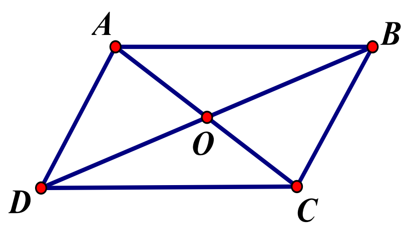
Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải



a) Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$

$=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}$

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ suy ra

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Cách 1: Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$$
$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

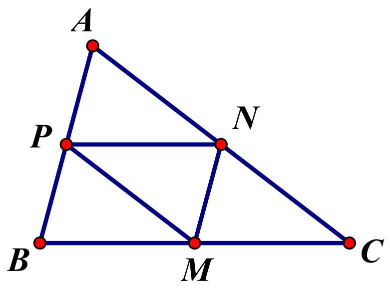
Cách 2: Đẳng thức tương đương với

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hình bình hành).

Câu 3. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

Lời giải



Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên

$PN // BM$, $MN // BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$

N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \left(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}\right) + \overrightarrow{AP}$$

$$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

Câu 4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$

Lời giải

Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'}\right) + \left(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD'}\right)$$

$$= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \overrightarrow{AC} - \left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\right) + \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$.

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

Mặt khác $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$ suy ra $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$.
B. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.
C. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$.
D. $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 2: Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức véctơ nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$.
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

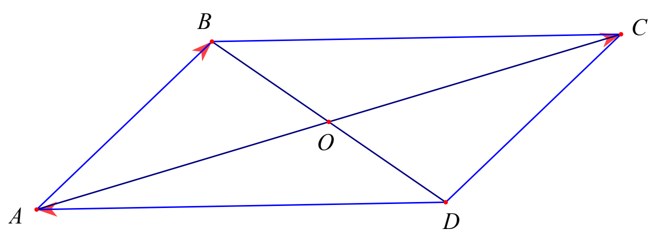
Đẳng thức véctơ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$ đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.
B. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$.
C. $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$.
D. $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ nên $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 4: Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.
B. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$.
C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}$ nên A sai

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{CO}$ nên B đúng.

Câu 5: Cho 3 điểm phân biệt A,B,C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$. **B.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ bằng

A. $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. **B.** $\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. **D.** $\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 7: Cho 6 điểm A,B,C,D,E,F. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}$.

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}=\vec{0}$

Câu 8: Cho hình bình hành ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và A**D.** Tính tổng $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}$

.

A. $\overrightarrow{AC}$.. **B.** $\overrightarrow{NM}$.. **C.** $\overrightarrow{CA}$.. **D.** $\overrightarrow{MN}$..

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$.

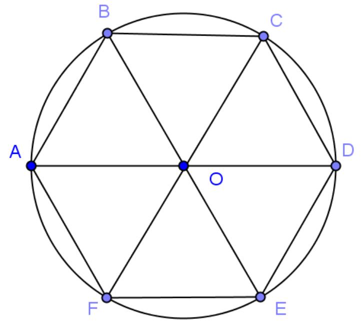
Câu 9: Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$.

Câu 10: Cho 6 điểm A,B,C,D,E,F. Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ bằng

A. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$. **B.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DF}$.

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD}\right)+\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$.

Câu 11: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F$. Đẳng thức nào sau đây ***sai***?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ (vô lý).

Câu 12: Cho các điểm phân biệt $A,\ B,\ C,\ D$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$. **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$ với I là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **D.** $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn D

$ABCD$ là hình bình hành với I là giao điểm của hai đường chéo nên I là trung điểm của AC và BD nên ta có: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Câu 14: Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\Rightarrow$ B đúng.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Tìm khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi M là trung điểm AB, ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 16: Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE=EF=FC$, BE cắt AM tại N. Chọn mệnh đề đúng:

A. $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$. **B.** $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NE}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{NF}=\overrightarrow{EF}$.

Lời giải

Chọn A

Trong tam giác BCE có MF là đường trung bình nên $MF//BE\Rightarrow MF//NE$

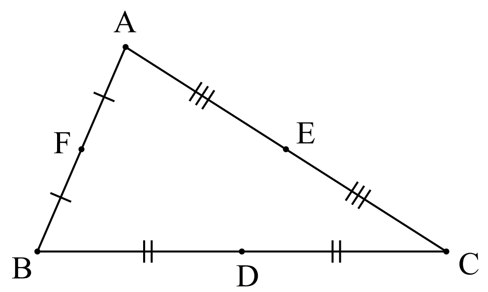
N là trung điểm của AM nên $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$.

Câu 18: Cho tam giác ABC. Gọi D,E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA,AB. Hệ thức nào là đúng?

A. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$. **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$. **D.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FF}$

$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\vec{0}$

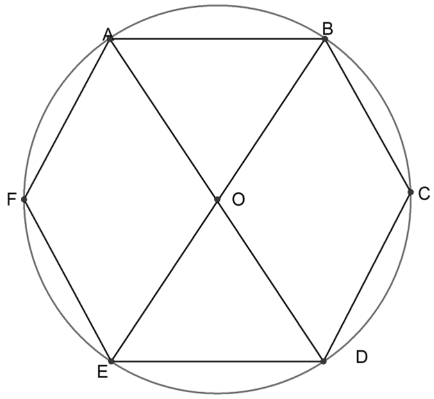
$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$.

Câu 19: Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=6\left|\overrightarrow{AB}\right|$. **D.** $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Lời giải



Chọn A

$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 20: Cho tam giác ABC có trực tâm H, D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$.

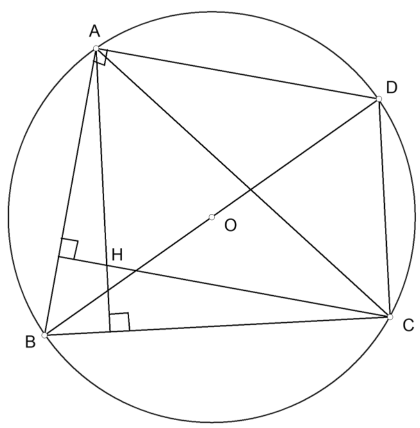
B. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

C. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HD}$.

D. $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: Vì D đối xứng với B qua O nên D thuộc đường tròn (O)

$AD//DH$ (cùng vuông góc với AB)

$AH//CD$ (cùng vuông góc với BC)

Suy ra $ADHC$ là hình bình hành

Vậy $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$.

DẠNG 4: CÁC BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐIỂM THỎA ĐẲNG THỨC VEC TƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho ΔABC, tìm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$.

Suy ra M là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là C sao cho $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$.

Câu 2. Cho ΔABC, tìm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{O}$

Suy ra M trùng C.

Câu 3. ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$

Suy ra M là trung điểm AC.

Câu 4. ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$.

Suy ra M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành.

Câu 5. Cho tứ giác $ABCD$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{BD}$.

Vậy M là điểm đối xứng với B qua D.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho đoạn thẳng AB, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB.　　**B.** M trùng A.

C. M trùng B. **D.** A là trung điểm MB.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow A$ là trung điểm MB.

Câu 2: Cho 2 điểm phân biệt A, B. Tìm điểm I thỏa $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I là trung điểm AB. **B.** I thuộc đường trung trực của AB.

C. Không có điểm I. **D.** Có vô số điểm I.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB.

Câu 3: Cho ΔABC, B. Tìm điểm I để $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I là trung điểm AB. **B.** I thuộc đường trung trực của AB.

C. Không có điểm I. **D.** Có vô số điểm I.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{CB}$ cùng phương nên $AI // CB$. Suy ra có vô số điểm I.

Câu 4: Cho 2 điểm phân biệt A, B. Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M thuộc đường trung trực của AB.

C. Không có điểm M. **D.** Có vô số điểm M.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{O}$ (vô lý).

Câu 5: Cho đoạn thẳng AB, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M trùng A.

C. M trùng B. **D.** A là trung điểm MB.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{O}$ suy ra M là trung điểm AB.

Câu 6: Cho tam giác ABC, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M là trọng tâm ΔABC.

C. M trùng B. **D.** A là trung điểm MB.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$ nên M là trọng tâm ΔABC.

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 8: Cho $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 9: Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}$ suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}$ (O là trung điểm AC) nên M trùng O.

Câu 10: Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, suy ra M trùng D.

Câu 11: Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O. **B.** M trùng A. **C.** M trùng B. **D.** M trùng C.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}=\vec{O}$.

Câu 12: Cho tứ giác $PQRN$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng P. **B.** M trùng Q.

C. M trùng O. **D.** M trùng R.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}\Leftrightarrow\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NO}$.

Câu 13: Cho ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M là trung điểm BC.

C. M là trung điểm CA. **D.** M là trọng tâm ΔABC.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$

Suy ra M là trọng tâm ΔABC.

Câu 14: Cho ΔDEF, tìm M thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{ED}$. **B.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$. **C.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DF}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$.

Suy ra M là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là F sao cho $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$.

Câu 15: Cho ΔDEF, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}$. **B.** $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{EM}$. **C.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{EM}$. **D.** $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED}+\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM}=\overrightarrow{ED}$.

Suy ra $DEFM$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EF}$.

Câu 16: Cho ΔABC có O là trung điểm BC, tìm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng A. **B.** M trùng B. **C.** M trùng O. **D.** M trùng C.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{O}$

Suy ra M trùng C.

Câu 17: Cho ΔABC, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M là trung điểm BC.

C. M là trung điểm CA. **D.** M là trọng tâm ΔABC.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$

Suy ra M là trung điểm AC.

Câu 18: Cho ΔABC, điểm M thỏa $\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng A. **B.** M trùng B.

C. $ACMB$ là hình bình hành. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BA}$

Suy ra M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Nên $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}$.

Câu 19: Cho ΔABC, D là trung điểm AB, E là trung điểm BC, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CM}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{ED}$.

C. M là trung điểm BC. **D.** $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{O}$

Suy ra M là trung điểm AC. Suy ra $BEMD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 20: Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB. **B.** M là trung điểm BC.

C. D là trung điểm BM. **D.** M là trung điểm DC.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM}=\overrightarrow{BD}$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÍNH ĐỘ DÀI CỦA VEC TƠ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$.

Lời giải

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}$.

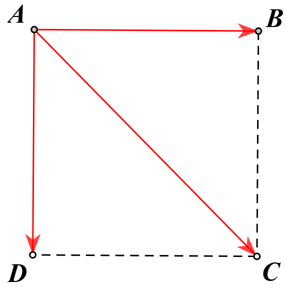
Câu 2. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

Lời giải

Gọi M là điểm sao cho $ABMC$ là hình bình hành. Ta có $AB=AC$ nên $ABMC$ là hình thoi. Gọi O là tâm hình thoi $ABMC$. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|=AM=2AO=a\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

Lời giải



Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=2a\sqrt{2}$.

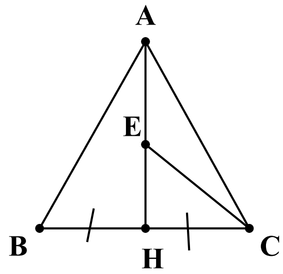
Câu 4. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB=5$, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

Lời giải

Gọi M là điểm sao cho $CHMA$ là hình bình hành.

Ta có: $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\right|=\left|\overrightarrow{CM}\right|=CM=2CE$ (E là tâm cúa hình bình hành $CHMA$).

Ta lại có: $AH=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ (ΔABC đều, AH là đường cao).

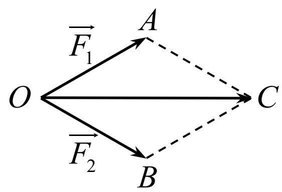


Trong tam giác HEC vuông tại H, có:

$$EC=\sqrt{CH^2+HE^2}=\sqrt{2.5^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{4}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=2CE=\frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 5. Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O, biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là $50\ (\mathrm{N})$ và chúng hợp với nhau một góc $60°$. Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Giả sử $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OB}$.

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $\widehat{AOB}=60°$, $OA=OB=50$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC=50\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=50\sqrt{3}\,(\text{N})$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{3}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là điểm sao cho $ABMC$ là hình bình hành. Ta có $AB=AC$ nên $ABMC$ là hình thoi. Gọi O là tâm hình thoi $ABMC$. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AM}\right|=AM=2AO=a\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Độ dài $\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|$ bằng

A. $2a$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có

$$\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=AB\sqrt{2}=a\sqrt{2}.$$

Câu 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{AC}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=a$.

Lời giải

Chọn D

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=AB=a$.

Câu 4: Cho $\overrightarrow{AB}$ khác $\vec{0}$ và cho điểm C.Có bao nhiêu điểm D thỏa $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$?

A. Vô số. **B.** 1 điểm. **C.** 2 điểm. **D.** Không có điểm nào.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|\Leftrightarrow AB=CD$.

Suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB.

Câu 5: Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. **B.** $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

C. $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|>0$.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề $\left|\overrightarrow{AB}\right| > 0$ là mệnh đề **sai**, vì khi $A \equiv B$ thì $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 0$.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I; G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$.

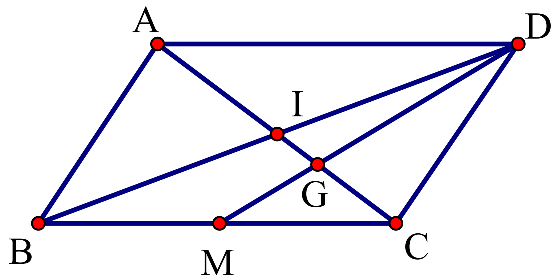
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

C. $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right|$.

D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$ (vôlý) $\rightarrow$ A sai.

G là trọng tâm tam giác BCD; A là một điểm nằm ngoài tam giác BCD $\rightarrow$ đẳng thức ở đáp án B đúng.

Ta có $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$ và $\left|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{DB}\right|$. Mà $\left|\overrightarrow{DB}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$ $\rightarrow$ đáp án C đúng.

Ta có $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IC}$ đối nhau, có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; tương tự $\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ $\rightarrow$ đáp án D là đúng.

Câu 7: Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

B. $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = 5$.

C. $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.

D. $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \dfrac{5\sqrt{7}}{2}$.

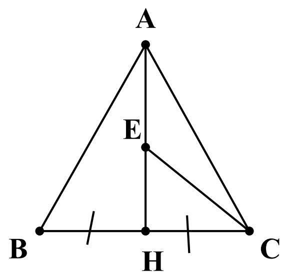
Lời giải

Chọn D

Gọi M là điểm sao cho $CHMA$ là hình bình hành.

Ta có: $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}\right| = \left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}\right| = \left|\overrightarrow{CM}\right| = CM = 2CE$ (E là tâm của hình bình hành $CHMA$).

Ta lại có: $AH = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ (ΔABC đều, AH là đường cao).



Trong tam giác HEC vuông tại H, có:

$$EC=\sqrt{CH^2+HE^2}=\sqrt{2.5^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{4}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=2CE=\frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 8: Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$. **C.** $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn C

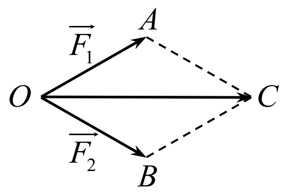
Ta có O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$.

Câu 9: Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O, biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là $50\ (\mathrm{N})$ và chúng hợp với nhau một góc $60°$. Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

A. $100\ (\mathrm{N})$. **B.** $50\sqrt{3}\ (\mathrm{N})$. **C.** $100\sqrt{3}\ (\mathrm{N})$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn B



Giả sử $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OB}$.

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $\widehat{AOB}=60°$, $OA=OB=50$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC=50\sqrt{3}$.

Vậy $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=50\sqrt{3}(\mathrm{N})$.

Câu 10: Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. **B.** $ABCD$ là hình thoi.

C. $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải

Chọn D

Tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow$ $ABCD$ là hình bình hành (1), nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Mà $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $ABCD$ là hình thoi nên $\left|\overrightarrow{CD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$.

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB=a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a\sqrt{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2a$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=a$.

Lời giải

Chọn A

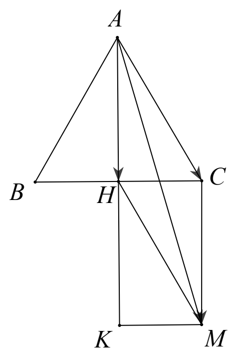
Gọi D là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành. Tam giác ABC vuông cân tại A suy ra $ABDC$ là hình vuông. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AD}\right|=2AM=BC=a\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC đều cạnh a, có AH là đường trung tuyến. Tính $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right|$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $2a$. **C.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



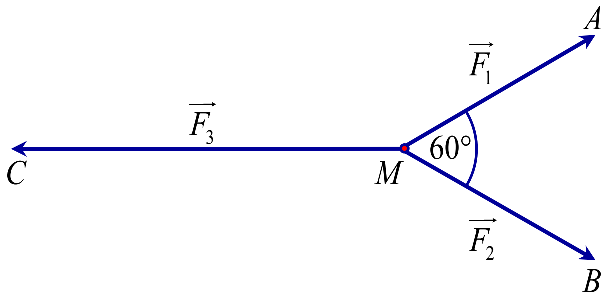
Dựng $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AH}$ $\Rightarrow AHMC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AM}$ $\Rightarrow \left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AH}\right|=AM$.

Gọi K đối xứng với A qua BC $\Rightarrow \Delta AKM$ vuông tại K.

$AK=2AH=a\sqrt{3}$; $KM=CH=\frac{a}{2}$.

$$AM=\sqrt{AK^2+KM^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 13: Cho ba lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB}=60^\circ$. Khi đó cường độ lực của $\overrightarrow{F_3}$ là

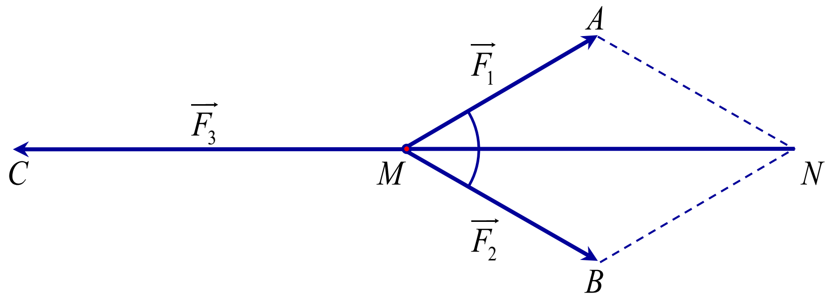


A. $25\sqrt{3}$ N. **B.** $50\sqrt{3}$ N. **C.** $50\sqrt{2}$ N. **D.** $100\sqrt{3}$ N.

Lời giải

Chọn A

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\overrightarrow{F_3} = -\left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right)$.



Dựng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MN}$.

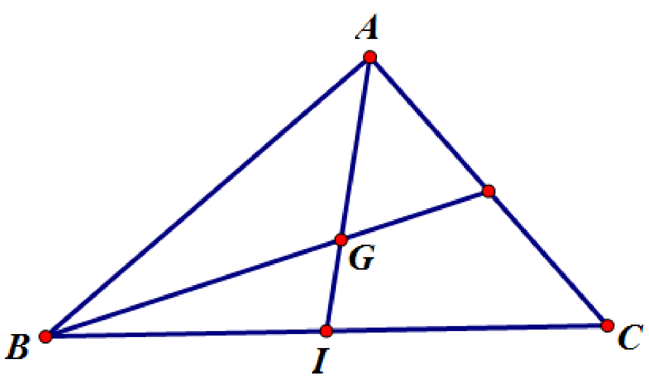
Suy ra $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \left|-\overrightarrow{MN}\right| = MN = \dfrac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Tìm khẳng định **sai**.

A. $\left|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\right| = IA$. **B.** $\left|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right| = BC$. **C.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 2AI$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 3GA$.

Lời giải

Chọn B



$\left|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\right| = \left|\vec{0} + \overrightarrow{IA}\right| = \left|\overrightarrow{IA}\right| = IA$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở A đúng.

$\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD = 2AI$ (Gọi D là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành, I là trung điểm BC) nên khẳng định ở C đúng.

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2AI=3GA$ (Do G là trọng tâm tam giác ABC) nên khẳng định ở D đúng.

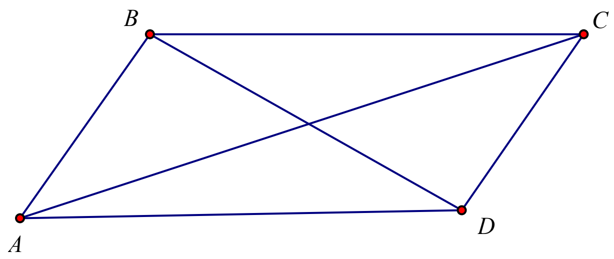
$\left|\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|=\left|\vec{0}\right|=0$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở B sai.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$. **B.** $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|$. **C.** $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|$.

Lời giải

Chọn A



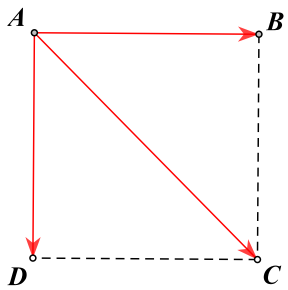
Ta có $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{BD}\right|$ là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

Câu 16: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|$.

A. $4a\sqrt{2}$. **B.** $4a$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=AC=2a\sqrt{2}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G. Độ dài vecto $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}$ là

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)=\overrightarrow{GB}-\left(-\overrightarrow{GB}\right)$ vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{GE}\right|=2GB=2.\frac{2}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ (E đối xứng với G qua M).

Câu 18: Tam giác ABC thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$ thì tam giác ABC là

A. Tam giác vuông A. **B.** Tam giác vuông C.

C. Tam giác vuông B. **D.** Tam giác cân tại C.

Lời giải

Chọn A

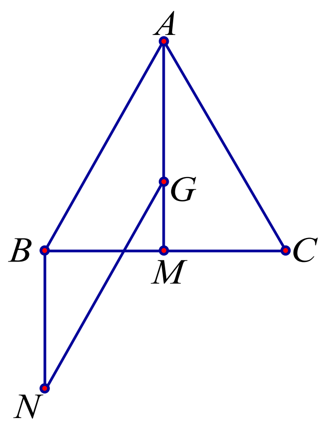
Gọi E là trung điểm BC, M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Ta có $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\overrightarrow{CB}\right|\Leftrightarrow AE=\frac{1}{2}BC$. Trung tuyến kẻ từ A bằng một nửa cạnh BC nên tam giác ABC vuông tại A.

Câu 19: Cho tam giác đều ABC cạnh $2a$ có G là trọng tâm. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|$ là

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm BC, dựng điểm N sao cho $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AG}$.

Ta có : $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{GB}-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)\right|=\left|2\overrightarrow{GB}\right|=2.GB=2.\frac{2}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$

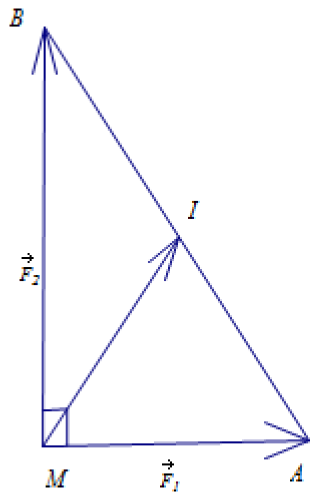
(E đối xứng với B qua G).

Câu 20: Cho hai lực $\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300(\text{N})$ và $400(\text{N})$. $\widehat{AMB}=90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

A. $0\,(\text{N})$. **B.** $700(\text{N})$. **C.** $100(\text{N})$. **D.** $500(\text{N})$.

Lời giải

Chọn D



Cường độ lực tổng hợp của $\left|\overrightarrow{F}\right| = \left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F}_2\right| = \left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = 2\left|\overrightarrow{MI}\right| = AB$ (I là trung điểm của AB). Ta có $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$ suy ra $\left|\overrightarrow{F}\right| = 500\left(N\right)$.

CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 3: TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

I. LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA:

+ Cho số $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

+ Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

+ Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k, ta có:

1) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$; **2)** $\left(h+k\right)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;

3) $h\left(k\vec{a}\right) = \left(hk\right)\vec{a}$; **4)** $1\vec{a} = \vec{a}$, $\left(-1\right)\vec{a} = -\vec{a}$.

+ Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

+ Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

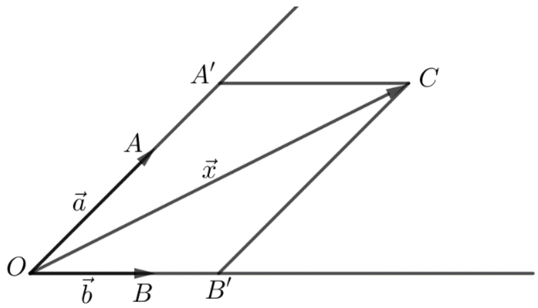
2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG:

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

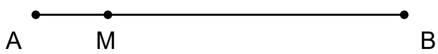


II. VÍ DỤ MINH HỌA.

Câu 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

Lời giải



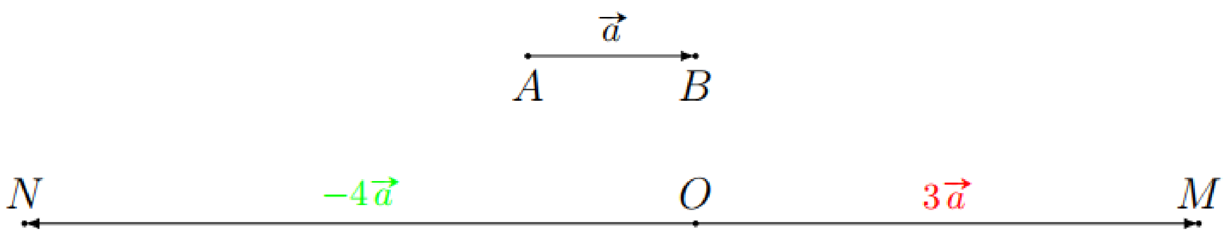
a) $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow|k|=\dfrac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{5}$, mà $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=\dfrac{1}{5}$.

b) $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Rightarrow|k|=\dfrac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{4}$, mà $\overrightarrow{MA}$ ngược hướng $\overrightarrow{MB}\Rightarrow k=-\dfrac{1}{4}$.

c) $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow|k|=\dfrac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{MA}{AB}=\dfrac{1}{5}$, mà $\overrightarrow{MA}$ ngược hướng $\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=-\dfrac{1}{5}$.

Câu 2. Cho $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ và điểm O. Xác định hai điểm M và N sao cho: $\overrightarrow{OM}=3\vec{a}$; $\overrightarrow{ON}=-4\vec{a}$.

Lời giải



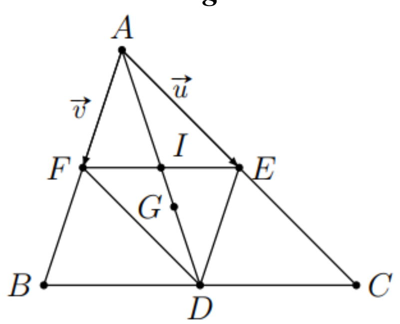
Vẽ d đi qua O và song song với giá của $\vec{a}$ (nếu O thuộc giá của $\vec{a}$ thì d là giá của $\vec{a}$).

– Trên d lấy điểm M sao cho $OM=3|\vec{a}|$, $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{a}$ cùng hướng. Khi đó $\overrightarrow{OM}=3\vec{a}$.

– Trên d lấy điểm N sao cho $ON=4|\vec{a}|$, $\overrightarrow{ON}$ và $\vec{a}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{ON}=-4\vec{a}$.

Câu 3. Cho ΔABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Lời giải



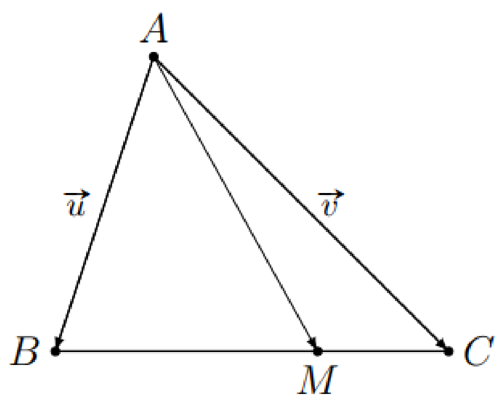
Dễ thấy tứ giác $AEDF$ là hình bình hành dẫn đến I là trung điểm của AD.

Do đó $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{u}+\dfrac{1}{2}\vec{v}$.

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\vec{u}+\dfrac{2}{3}\vec{v}$; $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=0.\vec{u}+(-1)\vec{v}$; $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



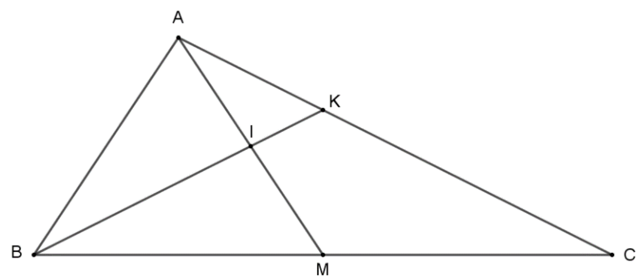
Từ giả thiết $MB = 2MC$ ta dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ mà $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM và K là điểm thuộc AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có I là trung điểm của $AM \Rightarrow 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}$.

Mặt khác M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$.

Suy ra 3 điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 6. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN // AC$.

Lời giải

Ta có

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$ (1).

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$.

Do ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên bốn điểm A, B, C, M là bốn đỉnh của hình bình hành $BCMA \Rightarrow$ ba điểm A, M, C không thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN // AC$.

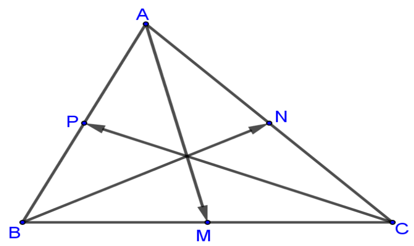
Câu 7. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

Lời giải

Ta có

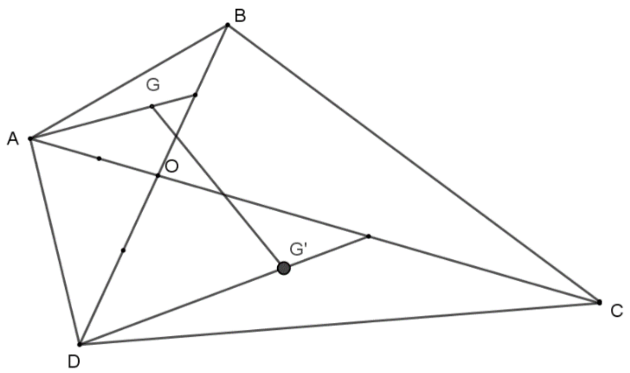
$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}.$$



Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{GG'}$.

Lời giải



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên ta có:

$\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$ (1).

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên ta có:

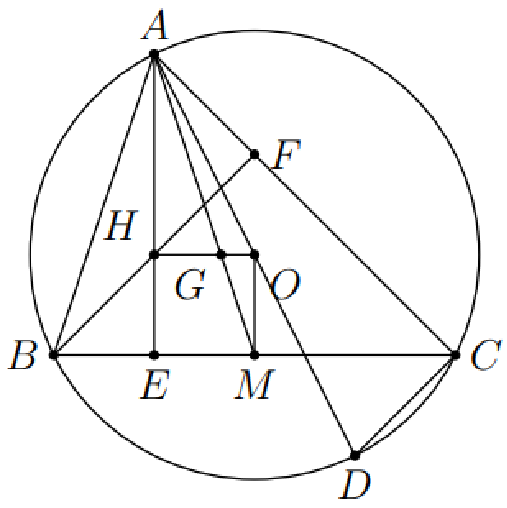
$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GO}=-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}-\overrightarrow{GB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{GG'}$

Câu 9. Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O, ta có

$BH\,//\,DC$ (cùng vuông góc với AC) (1).

$CH\,//\,BD$ (cùng vuông góc với AB) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ ba điểm H, M, D thẳng hàng.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

Ta có $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

4.12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

4.13. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

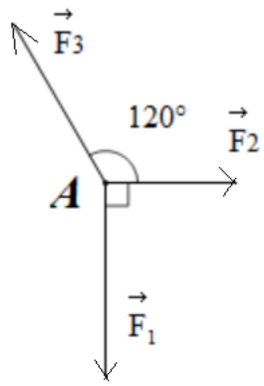
b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

4.14. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$.

4.15. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$, biết $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

III HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH VECTƠ $k\vec{a}$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hai điểm phân biệt A, B. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

Câu 2: Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Câu 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính

a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$

Câu 4: Cho ΔABC vuông tại B có $\widehat{A} = 30^0$, $AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính:

a) $\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Khẳng định nào **sai**?

A. $1.\vec{a} = \vec{a}$

B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$

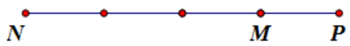
C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$

D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$

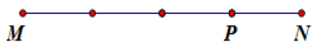
Câu 2: Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:

Hình 1

Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 3 **B.** Hình 4 **C.** Hình 1 **D.** Hình 2

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Câu 4: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC .Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ **B.** $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ **C.** $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ **D.** $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

Câu 5: Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$ **C.** $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$ **D.** $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Câu 6: Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$ **B.** $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$ **C.** $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$ **D.** $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Câu 7: Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

A. $m = 3$ **B.** $m = -\frac{1}{3}$ **C.** $m = \frac{1}{3}$ **D.** $m = -3$

Câu 8: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. $2a$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 9: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của AB. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

A. M là trung điểm của BC

B. M là trung điểm của IC

C. M là trung điểm của IA

D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thõa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

A. Trung điểm của AC **B.** Điểm C

C. Trung điểm của AB **D.** Trung điểm của AD

Câu 11: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh $2a$. Góc $\widehat{BAD} = 60^0$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=2a\sqrt{3}$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{3}$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=3a$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=3a\sqrt{3}$

Câu 12: Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Tam giác ABC đều **B.** Tam giác ABC cân tại C

C. Tam giác ABC vuông tại C **D.** Tam giác ABC cân tại B

Câu 13: Cho tam giác OAB vuông cân tạ O với $OA=OB=a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u}=\frac{21}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

A. $\frac{a\sqrt{140}}{4}$ **B.** $\frac{a\sqrt{321}}{4}$ **C.** $\frac{a\sqrt{520}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

Câu 14: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DE. Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

Câu 15: Cho đoạn thẳng AB. Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

Câu 16: Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA=\frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ **C.** $\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MA}$ **D.** $\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Câu 17: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM. Đường thẳng BN cắt AC tại P. Khi đó $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

A. $-\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{5}{3}$

DẠNG 2: HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM và K là trung điểm AC sao $AK=\frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm $B,\ I,\ K$ thẳng hàng.

Câu 2: Cho tam giác ABC. Hai điểm $M,\ N$ được xác định bởi hệ thức:

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Chứng minh $MN//AC$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

A. $AB = AC$ **B.** $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M

Câu 2: Cho ΔABC. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}$ **B.** $\vec{a}-2\vec{b}, 2\vec{a}-\vec{b}$ **C.** $5\vec{a}+\vec{b}, -10\vec{a}-2\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}$

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $-3\vec{a}+\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+6\vec{b}$ **B.** $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $2\vec{a}+\vec{b}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ **D.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

A. $\vec{u} = 2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$

C. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v} = 2\vec{a}-9\vec{b}$ **D.** $\vec{u} = 2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

Câu 5: Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. -7 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 6

Câu 6: Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Câu 7: Cho tam giác ABC. Hai điểm M,N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $MN \perp AC$ **B.** $MN // AC$

C. M nằm trên đường thẳng AC **D.** Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau

DẠNG 3: BIỂU THỊ MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 2: Cho ΔABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Câu 3: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC, trọng tâm G. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

Câu 2: Cho tam giác ABC biết $AB=8, AC=9, BC=11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN=x(0<x<9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Câu 3: Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **D.** $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Câu 4: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA và AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

Câu 5: Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của cạnh AD, M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vectơ $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$ **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$

C. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$ **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi G theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD. Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **B.** $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **C.** $3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Câu 8: Cho tam giác ABC với phân giác trong AD. Biết $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

A. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **C.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi K là trung điểm của MN. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Câu 10: Cho tam giác ABC, N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G là trọng tâm tam giác ABC. Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AN}$ là:

A. $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

C. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ **D.** $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

Câu 11: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC. Biết $AB=4$, $BC=5$ và $CA=6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

DẠNG 4: ĐẲNG THỨC VECTƠ CHỨA TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$.

Câu 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$

b) Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$

Câu 4: Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:

A. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$ **B.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

C. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ **D.** $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$

Câu 2: Cho tam giác ABC với $H,\ O,\ G$ lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:

A. $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ **D.** $2\overrightarrow{GO}=-3\overrightarrow{OH}$

Câu 3: Ba trung tuyến $AM,\ BN,\ CP$ của tam giác ABC đồng quy tại G. Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

A. $\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CG}\right)$ **B.** $3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GP}\right)$ **C.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right)$ **D.** $\vec{0}$

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của $BC,\ CD$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\ \overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\ \overrightarrow{IK}$ **D.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\ \overrightarrow{AC}$

Câu 5: Cho tam giác đều ABC tâm O. Điểm M là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là $D,\ E,\ F$. Hệ thức giữa các vectơ $\overrightarrow{MD},\ \overrightarrow{ME},\ \overrightarrow{MF},\ \overrightarrow{MO}$ là:

A. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N là trung điểm AB và DC. Lấy các điểm $P,\ Q$ lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB}=-2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$.

C. $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA}\right)$.

Câu 7: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm M bất kỳ, ta luôn có:

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ **C.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$

Câu 8: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta luôn có:

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$

Câu 9: Cho ΔABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$ **B.** $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ **C.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$ **D.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$

Câu 11: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}$ **C.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{AB}$

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ bằng:

A. $\overrightarrow{MN}$ **B.** $2\overrightarrow{MN}$ **C.** $3\overrightarrow{MN}$ **D.** $-2\overrightarrow{MN}$

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

Câu 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{OH}=4\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OG}$ **D.** $3\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}$

Câu 16: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là điểm trên GC sao cho $IC=3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng:

A. $2\overrightarrow{MI}$ **B.** $3\overrightarrow{MI}$ **C.** $4\overrightarrow{MI}$ **D.** $5\overrightarrow{MI}$

Câu 17: Cho tam giác đều ABC có tâm O. Gọi I là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC. Hạ ID,IE,IF tương ứng vuông góc với BC,CA,AB. Giả sử $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\frac{a}{b}\overrightarrow{IO}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng:

A. 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 7

Câu 18: Cho tam giác ABC, có bao nhiêu điểm M thoả mãn: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=1$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Câu 19: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$.

A. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$

B. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$

C. D là trọng tâm của tam giác ABC

D. D là trực tâm của tam giác ABC

Câu 20: Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Gọi O là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.

A. Điểm M là hình chiếu vuông góc của O trên d

B. Điểm M là hình chiếu vuông góc của A trên d

C. Điểm M là hình chiếu vuông góc của B trên d

D. Điểm M là giao điểm của AB và d

Câu 21: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Hãy xác định điểm K thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{AK}=\vec{0}$ và điểm D thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}-12\overrightarrow{KD}=\vec{0}$.

A. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của BC

B. K là trung điểm của BC và D là trung điểm của MN

C. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AB

D. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AC

Câu 22: Cho hình bình hành ABCD, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là:

A. trung điểm AC **B.** điểm C **C.** trung điểm AB **D.** trung điểm AD

Câu 23: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ là:

A. Đường tròn đường kính AB. **B.** Đường tròn đường kính BC.

C. Đường trung trực của cạnh AD. **D.** Đường trung trực của cạnh AB.

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right|$ là:

A. Một đường thẳng. **B.** Một đường tròn.

C. Toàn bộ mặt phẳng $(ABCD)$. **D.** Tập rỗng.

Câu 25: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$. Tập hợp M là:

A. Một đường tròn **B.** Một đường thẳng **C.** Một đoạn thẳng **D.** Nửa đường thẳng

Câu 26: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm M thỏa $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Câu 27: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$. Tập hợp M là:

A. Một đoạn thẳng **B.** Một đường tròn **C.** Nửa đường tròn **D.** Một đường thẳng

Câu 28: Cho năm điểm A,B,C,D,E. Khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=3\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\dfrac{\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}}{4}$ **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Câu 29: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Câu 30: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 3: TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA:

+ Cho số $k \neq 0$ và một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số k là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

+ Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

+ Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kỳ, với mọi số thực h và k, ta có:

1) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$; **2)** $\left(h+k\right)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$;

3) $h\left(k\vec{a}\right) = \left(hk\right)\vec{a}$; **4)** $1\vec{a} = \vec{a}$, $\left(-1\right)\vec{a} = -\vec{a}$.

+ Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

+ Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với mọi điểm M ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

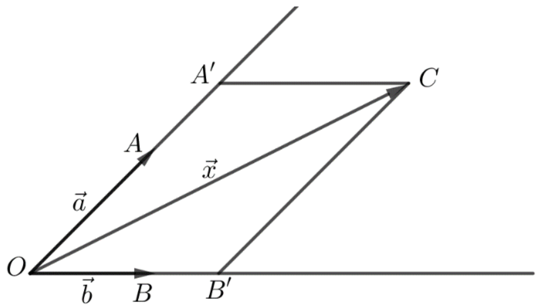
2. ĐIỀU KIỆN ĐỂ HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG:

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương là có một số thực k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Nhận xét: Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số h, k sao cho $\vec{x} = h\vec{a} + k\vec{b}$.

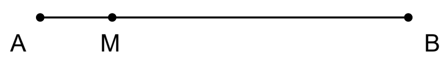


II VÍ DỤ MINH HỌA.

Câu 1. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho $AM = \frac{1}{5}AB$. Tìm k trong các đẳng thức sau:

a) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ c) $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{AB}$

Lời giải



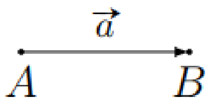
a) $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow |k|=\dfrac{|\overrightarrow{AM}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{5}$, mà $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng $\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=\dfrac{1}{5}$.

b) $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Rightarrow |k|=\dfrac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{4}$, mà $\overrightarrow{MA}$ ngược hướng $\overrightarrow{MB}\Rightarrow k=-\dfrac{1}{4}$.

c) $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow |k|=\dfrac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{MA}{AB}=\dfrac{1}{5}$, mà $\overrightarrow{MA}$ ngược hướng $\overrightarrow{AB}\Rightarrow k=-\dfrac{1}{5}$.

Câu 2. Cho $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ và điểm O. Xác định hai điểm M và N sao cho: $\overrightarrow{OM}=3\vec{a}$; $\overrightarrow{ON}=-4\vec{a}$.

Lời giải



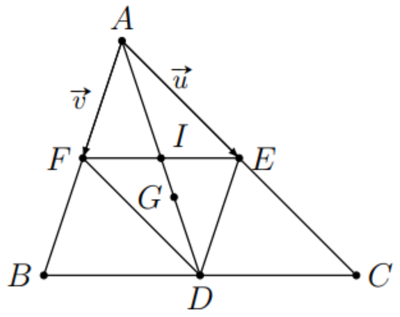
Vẽ d đi qua O và song song với giá của $\vec{a}$ (nếu O thuộc giá của $\vec{a}$ thì d là giá của $\vec{a}$).

– Trên d lấy điểm M sao cho $OM=3|\vec{a}|$, $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{a}$ cùng hướng. Khi đó $\overrightarrow{OM}=3\vec{a}$.

– Trên d lấy điểm N sao cho $ON=4|\vec{a}|$, $\overrightarrow{ON}$ và $\vec{a}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{ON}=-4\vec{a}$.

Câu 3. Cho ΔABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Lời giải



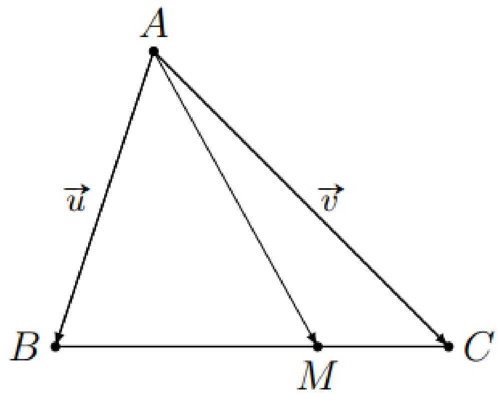
Dễ thấy tứ giác $AEDF$ là hình bình hành dẫn đến I là trung điểm của AD.

Do đó $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{u}+\dfrac{1}{2}\vec{v}$.

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\vec{u}+\dfrac{2}{3}\vec{v}$; $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=0.\vec{u}+(-1)\vec{v}$; $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải



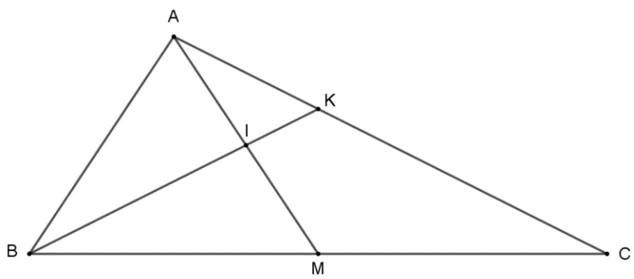
Từ giả thiết $MB = 2MC$ ta dễ dàng chứng minh được $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ mà $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM và K là điểm thuộc AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có I là trung điểm của $AM \Rightarrow 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}$.

Mặt khác M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Do đó $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$.

Suy ra 3 điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 6. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Chứng minh $MN // AC$.

Lời giải

Ta có

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}\ (1)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}$.

Do ba điểm A, B, C không thẳng hàng nên bốn điểm A, B, C, M là bốn đỉnh của hình bình hành $BCMA \Rightarrow$ ba điểm A, M, C không thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MN // AC$.

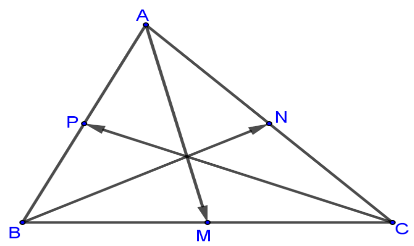
Câu 7. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

Lời giải

Ta có

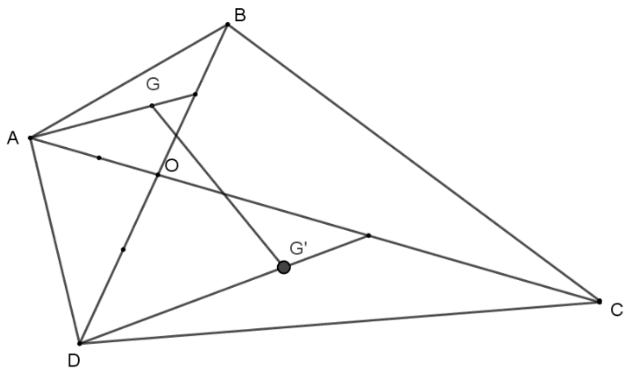
$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}.$$



Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi G, G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{GG'}$.

Lời giải



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên ta có:

$\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right)$ (1).

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên ta có:

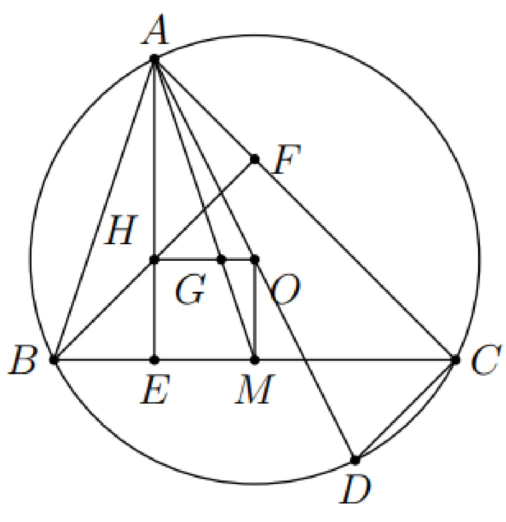
$\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}\right)$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$

Câu 9. Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O, ta có

$BH \,//\, DC$ (cùng vuông góc với AC) (1).

$CH \,//\, BD$ (cùng vuông góc với AB) (2).

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHCD$ là hình bình hành $\Rightarrow$ ba điểm H, M, D thẳng hàng.

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Ta có $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

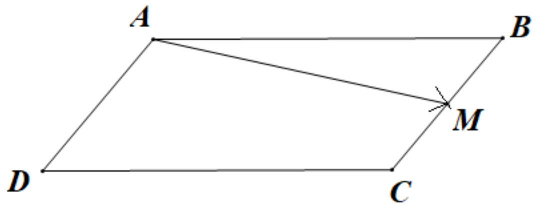
Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.11. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

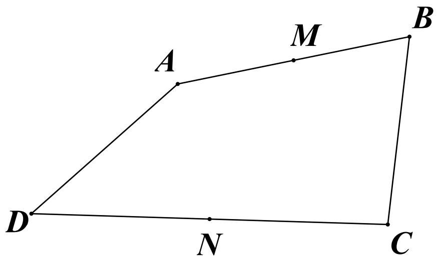
Lời giải



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

4.12. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi $M,\ N$ tương ứng là trung điểm của các cạnh $AB,\ CD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}=2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)=2\overrightarrow{MN}+\vec{0}+\vec{0}=2M$$

$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$$

4.13. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b) Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA}\right)+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB}\right)=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{KA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}\left(-2\overrightarrow{KB}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OK}$

4.14. Cho tam giác ABC .

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$.

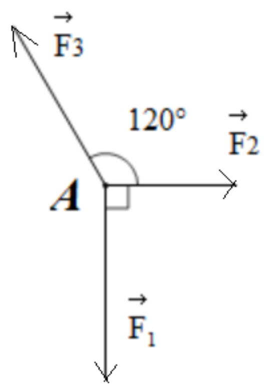
Lời giải

a)

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$
$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}=-\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

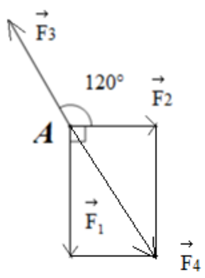
b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{OM}$

4.15. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{F_3}$, biết $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Lời giải



$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_4}$

$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{F_4}=-\overrightarrow{F_3}\Rightarrow\left|-\overrightarrow{F_3}\right|=\left|\overrightarrow{F_4}\right|$

Ta có: $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right|.\tan 30° = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}; \left|\overrightarrow{F_4}\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{F_1}\right|}{\cos 30°} = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$;

Vậy $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ N, $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ N.

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH VECTƠ $k\vec{a}$

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hai điểm phân biệt A, B. Xác định điểm M biết $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Lời giải

Ta có:

$2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}-3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$

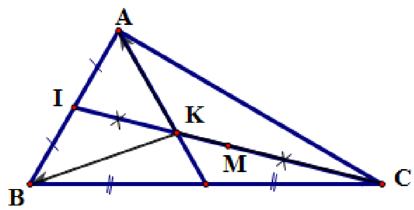
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng và $AM=3AB$.

Câu 2: Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

$\Rightarrow K$ là trọng tâm của tam giác ABC.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Ta có:
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

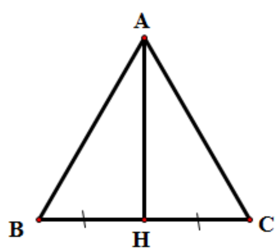
$\Rightarrow M$ là trung điểm của IC.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tính

a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|$

b) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$

Lời giải



a) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{AC}\right|=2AC=2a$.

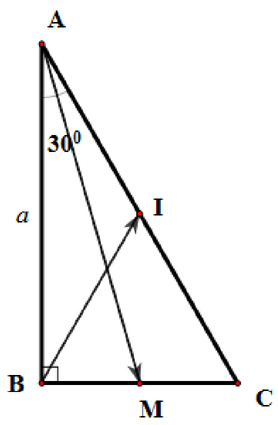
b) Gọi H là trung điểm của BC. Ta có:

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AH}\right|=2\left|\overrightarrow{AH}\right|=2AH=2\sqrt{AB^2-BH^2}=2\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$$

Câu 4: Cho ΔABC vuông tại B có $\widehat{A}=30^0$, $AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính:

a) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|$ b) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$

Lời giải



Ta có: $BC=AB\tan A=a\tan 30^0=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $AC=\dfrac{AB}{\cos A}=\dfrac{a}{\cos 30^0}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

a) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|2\overrightarrow{BI}\right|=2\left|\overrightarrow{BI}\right|=2BI=2.\dfrac{AC}{2}=AC=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

b) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2\left|\overrightarrow{AM}\right|=2AM=2\sqrt{AB^2+BM^2}=2\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Khẳng định nào **sai**?

A. $1.\vec{a}=\vec{a}$

B. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k>0$

C. $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k<0$

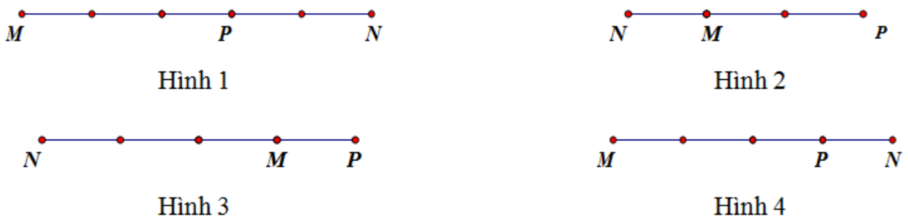
D. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a}=k\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ)

Câu 2: Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



A. Hình 3 **B.** Hình 4 **C.** Hình 1 **D.** Hình 2

Lời giải

Chọn A

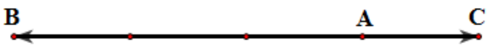
$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MP}$ và $\left|\overrightarrow{MN}\right| = 3\left|\overrightarrow{MP}\right|$.

Câu 3: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

Lời giải

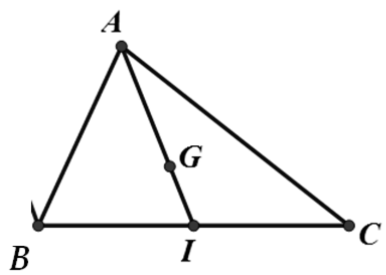
Chọn D



Câu 4: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC .Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ **B.** $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ **C.** $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$ **D.** $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

Lời giải



Chọn A

Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vecto $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

Câu 5: Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ **B.** $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$ **C.** $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$ **D.** $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn B

Câu 6: Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$ **B.** $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$ **C.** $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$ **D.** $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-4\vec{a}-3\vec{a}=-7\vec{a}$.

Câu 7: Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a}=m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=15$

A. $m=3$ **B.** $m=-\frac{1}{3}$ **C.** $m=\frac{1}{3}$ **D.** $m=-3$

Lời giải

Chọn B

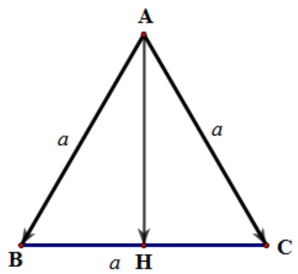
Do $\vec{a},\vec{b}$ ngược hướng nên $m=-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=-\frac{5}{15}=-\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ bằng:

A. $2a$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a\sqrt{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2.\overrightarrow{AH}\right|=2.AH=2.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=2a\sqrt{3}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của AB. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

A. M là trung điểm của BC

B. M là trung điểm của IC

C. M là trung điểm của IA

D. M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM=2MC$

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trung điểm của IC.

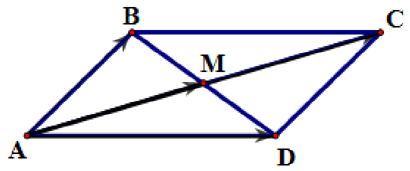
Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thõa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

A. Trung điểm của AC **B.** Điểm C

C. Trung điểm của AB **D.** Trung điểm của AD

Lời giải

Chọn A



Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=2.\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow$ M là trung điểm của AC.

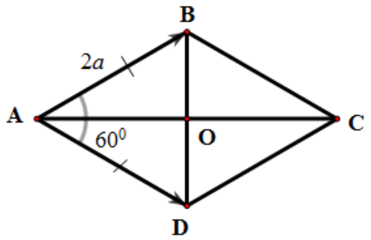
Câu 11: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O, cạnh $2a$. Góc $\widehat{BAD}=60^0$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=2a\sqrt{3}$ **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=a\sqrt{3}$

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=3a$ **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=3a\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A



Tam giác ABD cân tại A và có góc $\widehat{BAD}=60^0$ nên ΔABD đều

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AO}\right|=2.AO=2.\sqrt{AB^2-BO^2}=2.\sqrt{4a^2-a^2}=2a\sqrt{3}$

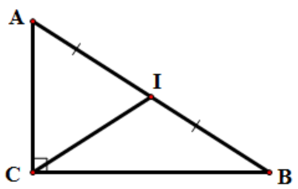
Câu 12: Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Tam giác ABC đều **B.** Tam giác ABC cân tại C

C. Tam giác ABC vuông tại C **D.** Tam giác ABC cân tại B

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của AB. Ta có:

$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|=AB$

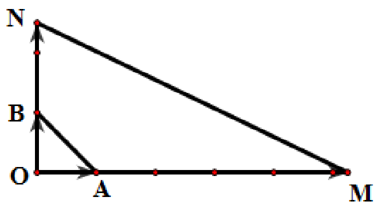
$\Leftrightarrow\left|2.\overrightarrow{CI}\right|=AB\Leftrightarrow 2CI=AB\Leftrightarrow CI=\frac{1}{2}AB\Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại C.

Câu 13: Cho tam giác OAB vuông cân tạ O với $OA=OB=a$. Độ dài của véc tơ $\vec{u}=\frac{21}{4}\overrightarrow{OA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

A. $\dfrac{a\sqrt{140}}{4}$ **B.** $\dfrac{a\sqrt{321}}{4}$ **C.** $\dfrac{a\sqrt{520}}{4}$ **D.** $\dfrac{a\sqrt{541}}{4}$

Lời giải

Chọn D



Dựng điểm M,N sao cho: $\overrightarrow{OM}=\dfrac{21}{4}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

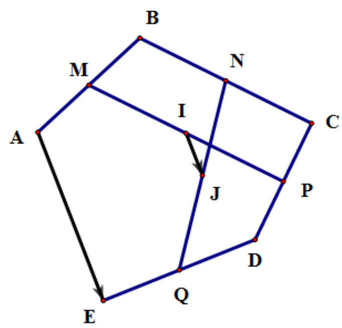
$$\left|\vec{u}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|=\left|\overrightarrow{NM}\right|=MN=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2+\left(\frac{5a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{541}}{4}.$$

Câu 14: Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DE. Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ **B.** $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ **C.** $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ **D.** $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AE}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}\\ \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\right),\ \overrightarrow{PN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

Suy ra: $2\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}\right)-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

Câu 15: Cho đoạn thẳng AB. Gọi M là một điểm trên AB sao cho $AM=\dfrac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MA}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. **C.** $\overrightarrow{BM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

Câu 16: Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA = \frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** ?

A. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ **B.** $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$ **C.** $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$ **D.** $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D

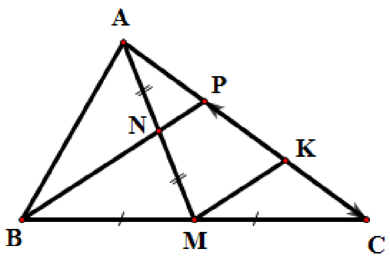
Ta thấy $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ là sai.

Câu 17: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM. Đường thẳng BN cắt AC tại P. Khi đó $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

A. $-\frac{4}{3}$ **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** $-\frac{3}{2}$ **D.** $-\frac{5}{3}$

Lời giải

Chọn C



Kẻ $MK // BP (K \in AC)$. Do M là trung điểm của BC nên suy ra K là trung điểm của CP

Vì $MK // BP \Rightarrow MK // NP$ mà N là trung điểm của AM nên suy ra P là trung điểm của AK

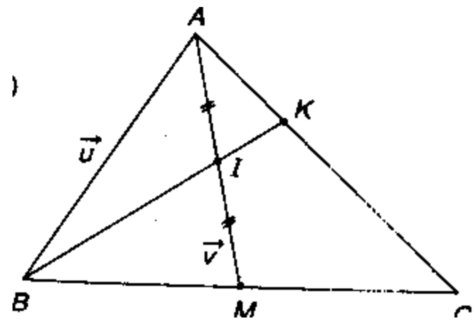
Do đó: $AP = PK = KC$. Vậy $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CP} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$.

DẠNG 2: HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM và K là trung điểm AC sao $AK = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải



Ta có $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow 4\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK}=4\overrightarrow{BI} \Rightarrow \overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Rightarrow B,\ I,\ K$ thẳng hàng.

Câu 2: Cho tam giác ABC. Hai điểm $M,\ N$ được xác định bởi hệ thức: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Chứng minh $MN//AC$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Theo giả thiết $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}$. Mà A,B,C không thẳng hàng nên bốn điểm A,B,C,M là bốn đỉnh của hình bình hành $\Rightarrow M$ không thuộc AC.

Vậy $MN//AC$.

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

A. $AB=AC$ **B.** $\exists k\neq 0: \overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$ **C.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm M

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho ΔABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$ **B.** $\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}$ **C.** $5\vec{a}+\vec{b},-10\vec{a}-2\vec{b}$ **D.** $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-10\vec{a}-2\vec{b}=-2.(5\vec{a}+\vec{b})\Rightarrow 5\vec{a}+\vec{b}$ và $-10\vec{a}-2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $-3\vec{a}+\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+6\vec{b}$ **B.** $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $2\vec{a}+\vec{b}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ **D.** $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

A. $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$ **B.** $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$

C. $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$ **D.** $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

Lời giải

Chọn D

Câu 5: Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. -7 **B.** 7 **C.** 5 **D.** 6

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hai vec tơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương là: $\frac{x+1}{3}=\frac{4}{-2}\Leftrightarrow x=-7$.

Câu 6: Biết rằng hai vec tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vec tơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{3}{2}$ **C.** $-\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn C

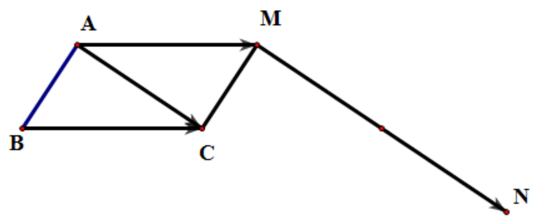
Câu 7: Cho tam giác ABC. Hai điểm M,N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $MN\perp AC$ **B.** $MN // AC$

C. M nằm trên đường thẳng AC **D.** Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M \notin AC$ (1)

Cộng vế theo vế hai đẳng thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, ta được:
$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-3\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (2)

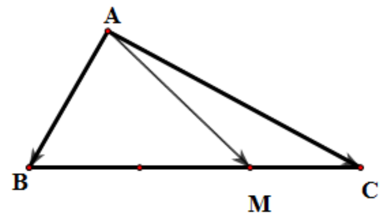
Từ (1) và (2) suy ra $MN // AC$.

DẠNG 3: BIỂU THỊ MỘT VECTƠ THEO HAI VECTƠ KHÔNG CÙNG PHƯƠNG

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

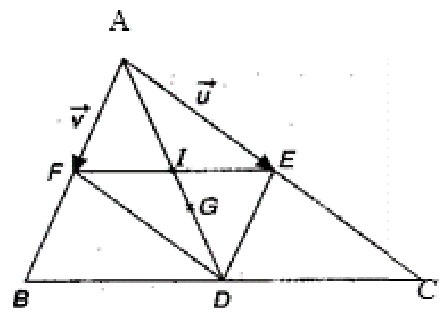
Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (đpcm).

Câu 2: Cho ΔABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AE}, \vec{v}=\overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DC}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Lời giải



Ta có: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

Ta có $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$

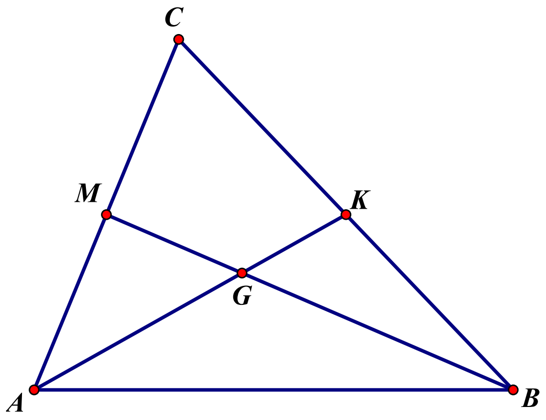
$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{2}{3}(\vec{u}+\vec{v})$

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}=0.\vec{u}+(-1)\vec{v}$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}=\vec{u}-\vec{v}$

Câu 3: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC, trọng tâm G. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AK}$, $\vec{v}=\overrightarrow{BM}$

Lời giải



* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$

* $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BK}=2\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GK}\right)=2.\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BM}$

* $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC})=-(\overrightarrow{AK}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

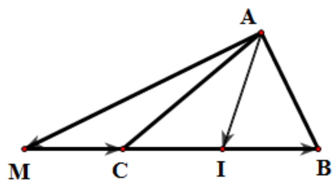
Câu 1: Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của BC. Khi đó C là trung điểm của MI. Ta có:

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+2\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

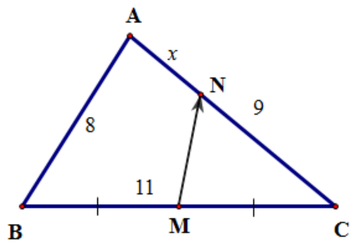
Câu 2: Cho tam giác ABC biết $AB=8,AC=9,BC=11$. Gọi M là trung điểm BC và N là điểm trên đoạn AC sao cho $AN=x(0<x<9)$. Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
B. $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

C. $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
D. $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{x}{9}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

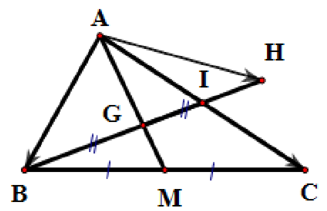
Câu 3: Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm và H là điểm đối xứng với B qua G. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
B. $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
D. $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn A



Gọi M,I lần lượt là trung điểm của BC và AC.

Ta thấy $AHCG$ là hình bình hành nên

$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}$

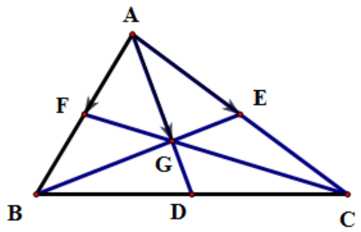
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi các điểm D,E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CA và AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ **B.** $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$ **C.** $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$ **D.** $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$.

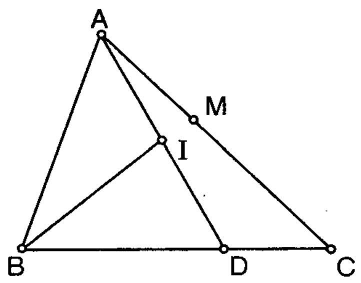
Câu 5: Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ và I là trung điểm của cạnh AD, M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Vecto $\overrightarrow{BI}$ được phân tích theo hai vecto $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A. $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. **B.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: I là trung điểm của cạnh AD nên

$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}BC\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

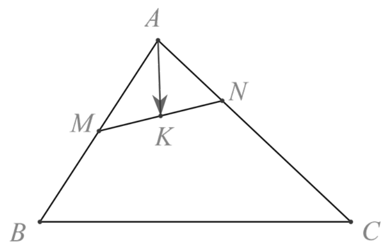
Câu 6: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm thuộc AC sao cho $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}$. K là trung điểm của MN. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có M là trung điểm AB nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{NA}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

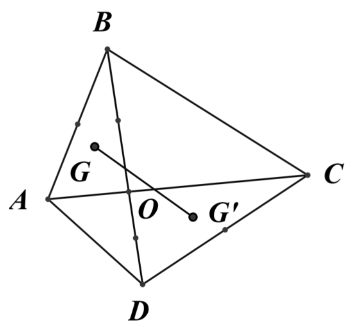
Do đó $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 7: Cho tứ giác $ABCD$, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi G theo thứ tự là trọng tâm của tam giác OAB và OCD. Khi đó $\overrightarrow{GG'}$ bằng:

A. $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **B.** $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **C.** $3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Lời giải

Chọn D



Vì G' là trọng tâm của tam giác OCD nên $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$. (1)

Vì G là trọng tâm của tam giác OAB nên: $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GO}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$ (2)

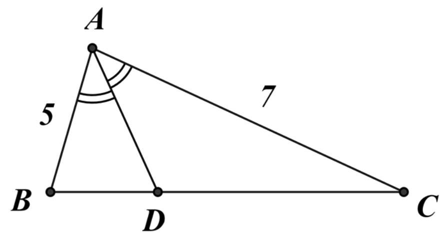
Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)$.

Câu 8: Cho tam giác ABC với phân giác trong AD. Biết $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$. Khi đó $\overrightarrow{AD}$ bằng:

A. $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$. **B.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **C.** $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$. **D.** $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB}-\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C



Vì AD là phân giác trong của tam giác ABC nên:

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{5}{7}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\frac{5}{7}\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NC=2NA$. Gọi K là trung điểm của MN. Khi đó:

A. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

C. $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ **D.** $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn C

Câu 10: Cho tam giác ABC, N là điểm xác định bởi $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G là trọng tâm tam giác ABC. Hệ thức tính $\overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AN}$ là:

A. $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ **B.** $\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

C. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ **D.** $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AG}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$

Lời giải

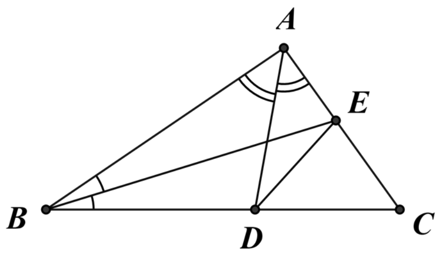
Chọn C

Câu 11: Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC. Biết $AB=4$, $BC=5$ và $CA=6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

A. $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}-\frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A



AD là phân giác trong của tam giác ABC nên $\frac{CD}{DB}=\frac{AC}{AB}=\frac{6}{4}\Rightarrow\frac{CD}{CD+DB}=\frac{6}{6+4}$

$\Rightarrow\frac{CD}{CB}=\frac{6}{10}\Rightarrow\overrightarrow{CD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

Tương tự: $\frac{CE}{CA}=\frac{5}{9}\Rightarrow\overrightarrow{CE}=\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$.

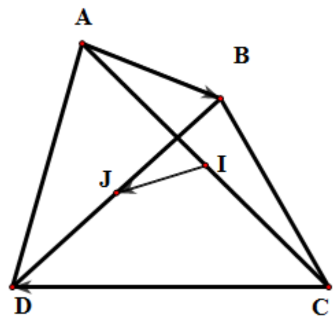
Vậy $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CD}=\frac{5}{9}\overrightarrow{CA}-\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$.

DẠNG 4: ĐẲNG THỨC VECTƠ CHỨA TÍCH CỦA VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DJ}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{IJ}=(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{DJ})$

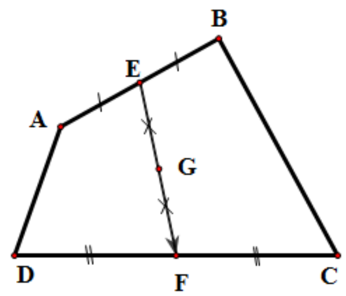
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}=\vec{0}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

Câu 2: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$

b) Gọi G là trung điểm của EF. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}\right)+\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}\right)=2\overrightarrow{EF}+\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}\right)+\left(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}\right)$

$=2\overrightarrow{EF}+\vec{0}+\vec{0}=2\overrightarrow{EF}\ \ (1)$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}\right)+\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}\right)=2\overrightarrow{EF}+\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}\right)+\left(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC}\right)$

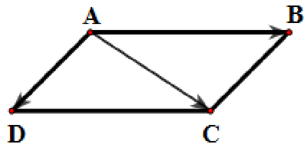
$=2\overrightarrow{EF}+\vec{0}+\vec{0}=2\overrightarrow{EF}\ \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=2\left(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}\right)=2\vec{0}=\vec{0}$.

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$

Lời giải



$$VT=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}=VP.$$

Câu 4: Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$.

Lời giải

$$VP=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$$

$$=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$$

$$=3\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}$$

$$=3\overrightarrow{GG'}-(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=3\overrightarrow{GG'}=VP.$$

2 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:

A. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$

B. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$

C. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

D. $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:

A. $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ **D.** $2\overrightarrow{GO}=-3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

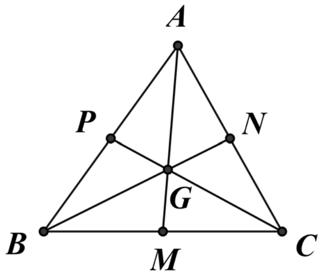
Chọn B

Câu 3: Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G. Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

A. $\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CG}\right)$ **B.** $3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GP}\right)$ **C.** $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\right)$ **D.** $\vec{0}$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)=\vec{0}$.

Câu 4: Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$ **B.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$ **D.** $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn D

Câu 5: Cho tam giác đều ABC tâm O. Điểm M là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là D,E,F. Hệ thức giữa các vectơ $\overrightarrow{MD},\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF},\overrightarrow{MO}$ là:

A. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N là trung điểm AB và DC. Lấy các điểm P,Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB}=-2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. **B.** $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$.

C. $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$. **D.** $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA}\right)$.

Câu 7: Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm M bất kỳ, ta luôn có:

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ **C.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MI}$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng: Với điểm M bất kỳ, ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

Câu 8: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta luôn có:

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$

Lời giải

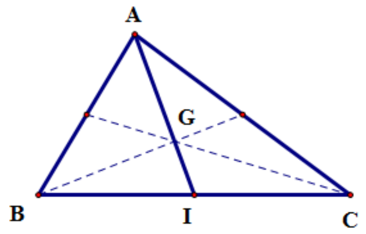
Chọn C

Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác: Với mọi điểm M, ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Câu 9: Cho ΔABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$ **B.** $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ **C.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$ **D.** $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$

Lời giải



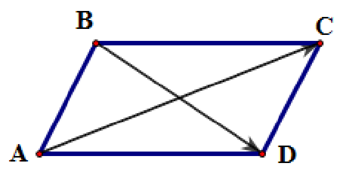
Áp dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, ta có: $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

Câu 10: Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng**?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ **C.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$ **D.** $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$

Lời giải

Chọn A



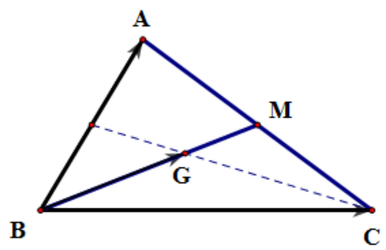
Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{BC}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})=2\overrightarrow{BC}$.

Câu 11: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$ **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}$ **C.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}$ **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Lời giải

Chọn B



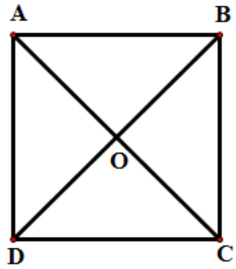
Gọi M là trung điểm của AC. Khi đó: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}=2.\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}=3\overrightarrow{BG}$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm là O. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$ **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ **C.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ **D.** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=4\overrightarrow{AB}$

Lời giải

Chọn D



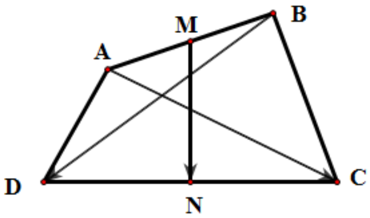
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$.

Câu 13: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$ bằng:

A. $\overrightarrow{MN}$ **B.** $2\overrightarrow{MN}$ **C.** $3\overrightarrow{MN}$ **D.** $-2\overrightarrow{MN}$

Lời giải

Chọn B



Ta có: $+\underline{\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

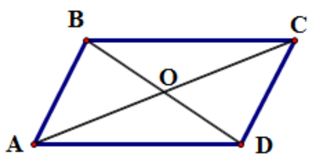
Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O và điểm M bất kì. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$ **B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$

C. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MO}$ **D.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

Lời giải

Chọn D



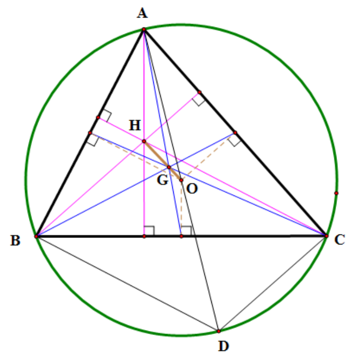
Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})=2\overrightarrow{MO}+2\overrightarrow{MO}=4\overrightarrow{MO}$

Câu 15: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{OH}=4\overrightarrow{OG}$ **B.** $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ **C.** $\overrightarrow{OH}=2\overrightarrow{OG}$ **D.** $3\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OG}$

Lời giải

Chọn B



Gọi D là điểm đối xứng với A qua O. Ta có: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}\,(1)$

Vì $HBDC$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\,(2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra:

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}\Leftrightarrow(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{HO}$$

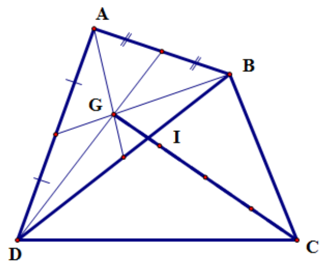
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{HO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{HO}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}.$$

Câu 16: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, I là điểm trên GC sao cho $IC=3IG$. Với mọi điểm M ta luôn có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ bằng:

A. $2\overrightarrow{MI}$ **B.** $3\overrightarrow{MI}$ **C.** $4\overrightarrow{MI}$ **D.** $5\overrightarrow{MI}$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $3\overrightarrow{IG}=-\overrightarrow{IC}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABD nên
$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=3\overrightarrow{IG}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=-\overrightarrow{IC}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Khi đó:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}$$

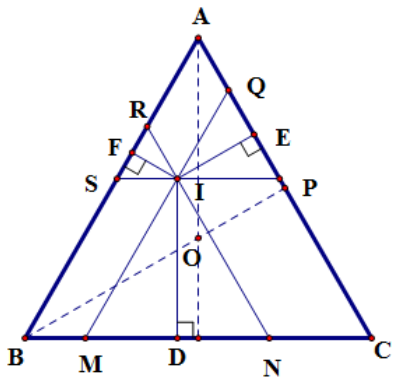
$$=4\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})=4\overrightarrow{MI}+\vec{0}=4\overrightarrow{MI}$$

Câu 17: Cho tam giác đều ABC có tâm O. Gọi I là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC. Hạ ID,IE,IF tương ứng vuông góc với BC,CA,AB. Giả sử $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\frac{a}{b}\overrightarrow{IO}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a+b$ bằng:

A. 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn A



Qua điểm I dựng các đoạn $MQ//AB, PS//BC, NR//CA$.

Vì ABC là tam giác đều nên các tam giác IMN, IPQ, IRS cũng là tam giác đều.

Suy ra D, E, F lần lượt là trung điểm của MN, PQ, RS.

Khi đó: $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IQ}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IR}+\overrightarrow{IS}\right)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IR}\right)+\left(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IS}\right)+\left(\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{IP}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)$

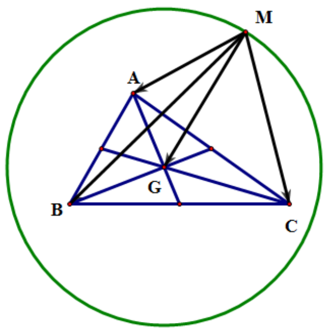
$=\frac{1}{2}.3\overrightarrow{IO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{IO}\Rightarrow a=3, b=2$. Do đó: $a+b=5$.

Câu 18: Cho tam giác ABC, có bao nhiêu điểm M thoả mãn: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=1$

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** vô số

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG=1\Rightarrow MG=\frac{1}{3}$

Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=1$ là đường tròn tâm G bán kính $R=\frac{1}{3}$.

Câu 19: Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$. Hãy xác định vị trí của điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$.

A. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$

B. D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$
C. D là trọng tâm của tam giác ABC
D. D là trực tâm của tam giác ABC

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$ (Với I là trung điểm của AB)

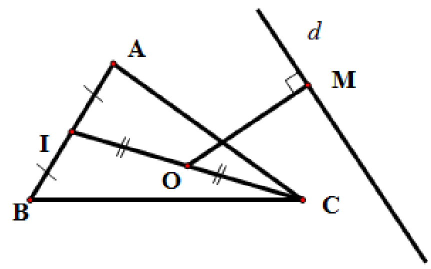
Vậy vectơ $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trú điểm M. Khi đó: $\overrightarrow{CD} = \vec{v} = 2\overrightarrow{CI} \Rightarrow I$ là trung điểm của CD

Vậy D D là điểm thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Câu 20: Cho tam giác ABC và đường thẳng d. Gọi O là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Tìm điểm M trên đường thẳng d sao cho vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất.
A. Điểm M là hình chiếu vuông góc của O trên d
B. Điểm M là hình chiếu vuông góc của A trên d
C. Điểm M là hình chiếu vuông góc của B trên d
D. Điểm M là giao điểm của AB và d

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của AB.

Khi đó: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow O$ là trung điểm của IC

Ta có:
$\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OM} = -4\overrightarrow{OM}$

Do đó $\left|\vec{v}\right| = 4OM$.

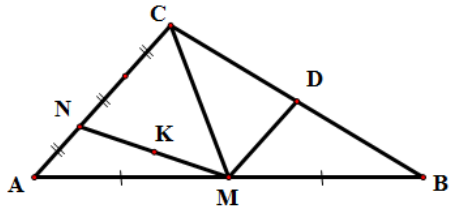
Độ dài vectơ $\vec{v}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $4OM$ nhỏ nhất hay M là hình chiếu vuong góc của O trên d.

Câu 21: Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của AB và N thuộc cạnh AC sao cho $NC = 2NA$. Hãy xác định điểm K thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ và điểm D thỏa mãn: $3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
A. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của BC
B. K là trung điểm của BC và D là trung điểm của MN
C. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AB

D. K là trung điểm của MN và D là trung điểm của AC

Lời giải

Chọn A



Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AN} \end{cases} \Rightarrow 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow 3.2\overrightarrow{AM} + 2.3\overrightarrow{AN} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right)$$

Suy ra K là trung điểm của MN

Ta có:

$$3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} - 12\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AK}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} + 12\overrightarrow{AK} = 12\overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow 12\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 12\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Suy ra D là trung điểm của BC.

Câu 22: Cho hình bình hành ABCD, điểm M thỏa $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$. Khi đó điểm M là:

A. trung điểm AC
B. điểm C
C. trung điểm AB
D. trung điểm AD

Lời giải

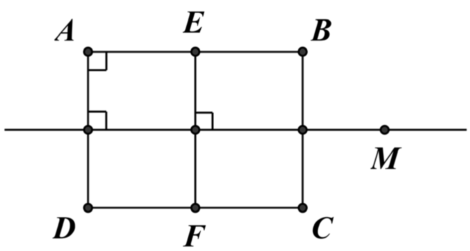
Chọn A

Câu 23: Cho hình chữ nhật $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$ là:

A. Đường tròn đường kính AB.
B. Đường tròn đường kính BC.
C. Đường trung trực của cạnh AD.
D. Đường trung trực của cạnh AB.

Lời giải

Chọn C



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và DC.

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{ME}\right| = \left|2\overrightarrow{MF}\right| \Leftrightarrow ME = MF$$

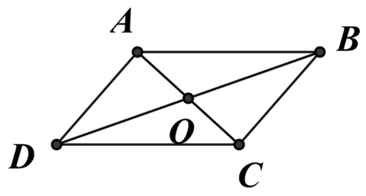
Do đó M thuộc đường trung trực của đoạn EF hay M thuộc đường trung trực của cạnh AD.

Câu 24: Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right|$ là:

A. Một đường thẳng. **B.** Một đường tròn.
C. Toàn bộ mặt phẳng $(ABCD)$. **D.** Tập rỗng.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$. Ta có:

$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{MO}\right|=\left|2\overrightarrow{MO}\right|$

$\Leftrightarrow MO=MO$ (đúng với mọi M)

Vậy tập hợp các điểm M là toàn bộ mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 25: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $2\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$. Tập hợp M là:

A. Một đường tròn **B.** Một đường thẳng
C. Một đoạn thẳng **D.** Nửa đường thẳng

Lời giải

Chọn B

Câu 26: Cho tam giác ABC. Có bao nhiêu điểm M thỏa $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=3$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Lời giải

Chọn D

Câu 27: Cho tam giác ABC và điểm M thỏa $\left|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$. Tập hợp M là:

A. Một đoạn thẳng **B.** Một đường tròn
C. Nửa đường tròn **D.** Một đường thẳng

Lời giải

Chọn B

Câu 28: Cho năm điểm A,B,C,D,E. Khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$

B. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=3\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}\right)$

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\dfrac{\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}}{4}$

D. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

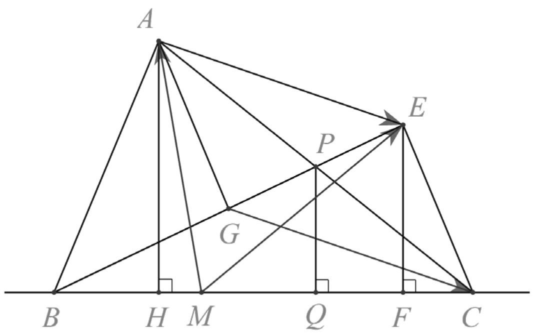
$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$ (đúng) ĐPCM.

Câu 29: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ME}$.

Kẻ $EF\perp BC$ $\left(F\in BC\right)$. Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|\overrightarrow{ME}\right|=ME\geq EF$.

Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{GC}\right|$ nhỏ nhất khi $M\equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC, Q là hình chiếu vuông góc của P lên BC $\left(Q\in BC\right)$.

Khi đó P là trung điểm GE nên $BP=\frac{3}{4}BE$.

Ta có ΔBPQ và ΔBEF đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF}=\frac{BP}{BE}=\frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$.

PQ là đường trung bình ΔAHC nên Q là trung điểm HC hay $\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$.

Suy ra $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{HC}=\frac{5}{6}.\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{8}\overrightarrow{BC}.$

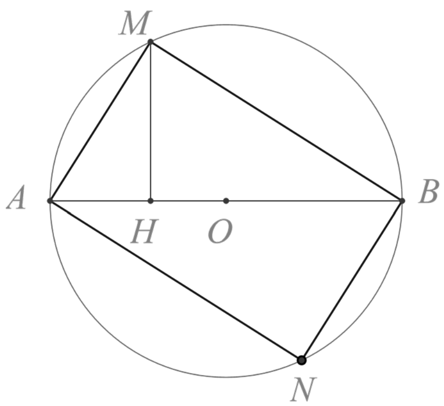
Do đó $\overrightarrow{BF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{5}{6}\overrightarrow{BC}$.

Câu 30: Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a. Một điểm M di động sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB. Tính độ dài lớn nhất của MH ?

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi N là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MN}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|$ hay $MN=AB$.

Suy ra $MANB$ là hình chữ nhật nên $\widehat{AMB}=90^o$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB.

MH lớn nhất khi H trùng với tâm O hay $\max MH=MO=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{a}{2}$.

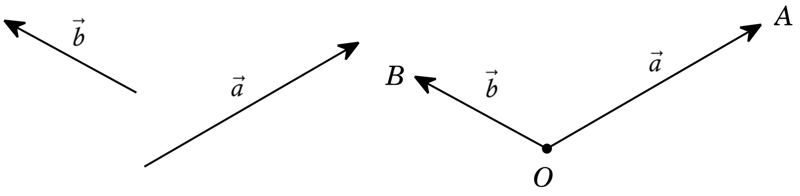
CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.



Chú ý. Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

2. Tích vô hướng của hai vecto: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.
- Khi $\vec{a}=\vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có: $\boxed{\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}\right|.\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2}$

3. Tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân

phối);

- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
- $\vec{a}^2\ge 0,\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow \vec{a}=0$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2-\vec{b}^2$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông…

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B}=50^\circ$.Hệ thức nào sau đây sai?

A. $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=130^\circ$. **B.** $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=40^\circ$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=50^\circ$. **D.** $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=40^\circ$.

Câu 2: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120°?

A. $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)$. **B.** $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)$. **C.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. $P=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\frac{3}{2}$. **C.** $P=-\frac{3}{2}$. **D.** $P=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 150°.

Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\frac{1}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. 180°. **B.** 360°. **C.** 270°. **D.** 120°.

Câu 7: Cho tam giác ABC với $\hat{A}=60^\circ$. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)$.

A. 120° **B.** 360° **C.** 270° **D.** 240°

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=0$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-1$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$.

A. 45° **B.** 405° **C.** 315° **D.** 225°

Câu 10: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)$.

A. 360° **B.** 180° **C.** 80° **D.** 160°

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A.

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=180^o$. **B.** $\alpha=0^o$. **C.** $\alpha=90^o$. **D.** $\alpha=45^o$.

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^o$. **B.** $\alpha=45^o$. **C.** $\alpha=60^o$. **D.** $\alpha=120^o$.

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^o$. **B.** $\alpha=180^o$. **C.** $\alpha=60^o$. **D.** $\alpha=45^o$.

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$ **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

C. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$ **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$

Câu 8: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$ **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}a^2$ **C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}a^2$

Câu 9: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA}\right)=150^0$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\frac{a^2}{2}$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c$, $AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$

Câu 12: Cho ba điểm A,B,C thỏa $AB=2$ cm, $BC=3$ cm, $CA=5$ cm Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=13$ **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=15$ **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=17$ **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=19$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ Tính $P=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$

A. $P=b^2-c^2$ **B.** $P=\frac{c^2+b^2}{2}$ **C.** $P=\frac{c^2+b^2+a^2}{3}$ **D.** $P=\frac{c^2+b^2-a^2}{2}$

Câu 14: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$

A. $P=-1$ **B.** $P=3a^2$ **C.** $P=-3a^2$ **D.** $P=2a^2$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-26$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

A. $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

A. $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

A. $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{2}$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{\circ}$ **B.** $\alpha=60^{\circ}$ **C.** $\alpha=45^{\circ}$ **D.** $\alpha=30^{\circ}$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$

A. $\alpha=45^{\circ}$ **B.** $\alpha=60^{\circ}$ **C.** $\alpha=90^{\circ}$ **D.** $\alpha=135^{\circ}$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{1}{2}$ **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{2}{5}$ **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15° **B.** 60° **C.** 120° **D.** 135°

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

B. Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$

D. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2=\overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=IM^2-IA^2$

Câu 2. Cho bốn điểm A,B,C,D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}=0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=AB^2$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2+bIB^2+cIC^2=abc$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Câu 2: Cho ba điểm $O,\ A,\ B$ không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều. **B.** tam giác OAB cân tại O.

C. tam giác OAB vuông tại O. **D.** tam giác OAB vuông cân tại O.

Câu 3: Cho $M,\ N,\ P,\ Q$ là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}\right) = MN^2 - PQ^2$.

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}a^2$

Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = -4$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = 0$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = 4$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN} = 16$.

Câu 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8,\ AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = 64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = -64$.

Câu 8: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 24$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 26$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 28$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 32$.

Câu 9: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 0$. **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;1),\ B(2;4),\ C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\dfrac{1}{4};1\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$. **C.** $I\left(1;\dfrac{1}{4}\right)$. **D.** $I\left(1;-\dfrac{1}{4}\right)$.

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0),\ B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7;0)$. **B.** $D(7;0),\ D(2;9)$. **C.** $D(0;7),\ D(9;2)$. **D.** $D(9;2)$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a}=(x_1;y_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m$ **B.** $3k=2m$ **C.** $2k+3m=0$ **D.** $3k+2m=0$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

B. $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

D. $\vec{u}=-\vec{v}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$.

B. Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.

D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều.

B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

C. Tam giác ABC cân tại B.

D. Tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

A. $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP vuông tại M. Biết điểm $M(2;1)$, $N(3;-2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy. Tính diện tích tam giác MNP.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:
Cho A,B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $|\overrightarrow{AM}|=k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R=k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\vec{a}=0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hai điểm A,B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2$

Câu 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0$

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=k$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 2: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 3: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 4: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2a^2$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Câu 6: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\dfrac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R. Tính R.

A. $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $R=\dfrac{a}{4}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh $18\,\text{cm}$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. Tập rỗng. **B.** Đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R=3\,\text{cm}$. **D.** Một đường thẳng.

DẠNG 6: CỰC TRỊ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Câu 2. Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm toạ độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M\left(\dfrac{18}{7};0\right)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M(3;0)$. **D.** $M\left(\dfrac{17}{7};0\right)$.

Câu 3: Cho $M(-1;-2)$, $N(3;2)$, $P(4;-1)$. Tìm E trên Ox sao cho $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|$ nhỏ nhất.

A. $E(4;0)$. **B.** $E(3;0)$. **C.** $E(1;0)$. **D.** $E(2;0)$.

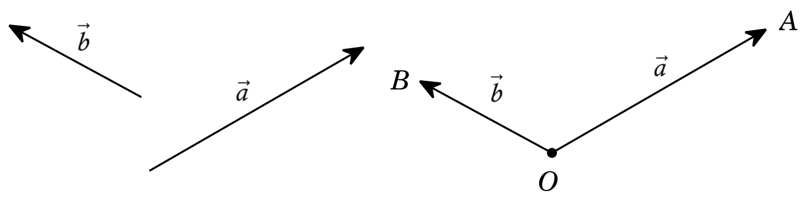
CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I LÝ THUYẾT.

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0^0 đến 180^0 được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90^0$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a}\perp\vec{b}$ hoặc $\vec{b}\perp\vec{a}$.



Chú ý. Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

2. Tích vô hướng của hai vecto: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=0$

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.
- Khi $\vec{a}=\vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có: $\boxed{\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a}\right|.\cos 0^0=\left|\vec{a}\right|^2}$

3. Tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân

phối);

- $\left(k\vec{a}\right).\vec{b} = k\left(\vec{a}.\vec{b}\right) = \vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$;
- $\vec{a}^2 \geq 0,\ \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2$;
- $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTƠ.

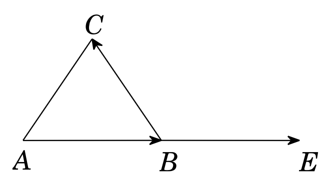
1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vectơ.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông…

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $P = \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$

Lời giải



Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{CBE} = 180 - \widehat{CBA} = 120^0$

$\longrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos 120^0 = -\dfrac{1}{2}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BC}\right)=130^{\circ}$. **B.** $\left(\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AC}\right)=40^{\circ}$. **C.** $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB}\right)=50^{\circ}$. **D.** $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=40^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

(Bạn đọc tự vẽ hình)

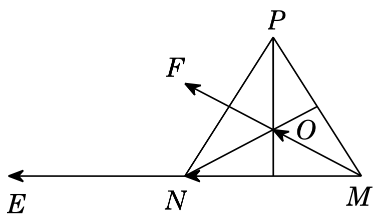
Vì $\left(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CB}\right)=180^{0}-\widehat{ACB}=180^{0}-40^{0}=140^{0}$.

Câu 2: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120°?

A. $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)$. **B.** $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)$. **C.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$.

Lời giải

Chọn A



• Vẽ $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}\right)=\left(\overrightarrow{NE},\overrightarrow{NP}\right)$

$=\widehat{PNE}=180^{\circ}-\widehat{MNP}=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$.

• Vẽ $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{MO}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON}\right)=\left(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ON}\right)=\widehat{NOF}=60^{\circ}$

• Vì $MN\perp OP\Rightarrow\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP}\right)=90^{\circ}$.

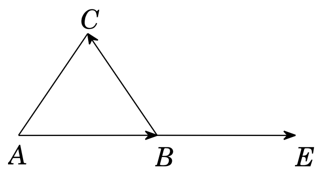
• Ta có $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)=\widehat{NMP}=60^{\circ}$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC. Tính $P=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. $P=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $P=\frac{3}{2}$. **C.** $P=-\frac{3}{2}$. **D.** $P=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Vẽ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Khi đó $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{CBE}=180^{\circ}-\widehat{CBA}=120^{\circ}$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) = \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

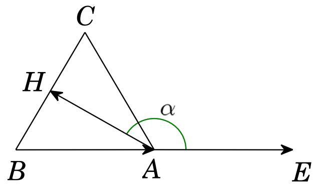
Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{3}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}\right)$.

A. 30°. **B.** 60°. **C.** 120°. **D.** 150°.

Lời giải

Chọn D



Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}\right) = \widehat{HAE} = \alpha$ (hình vẽ)

$\left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}\right) = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

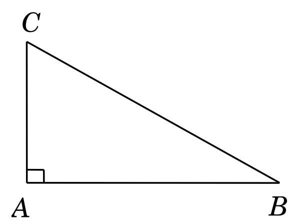
Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{1}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Xác định được $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) = 180^\circ - \widehat{ACB}$

Ta có $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^{\circ}-\widehat{ACB}=120^{\circ}$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\cos 120^{\circ}=-\dfrac{1}{2}$

Câu 6: Cho tam giác ABC. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. 180°. **B.** 360°. **C.** 270°. **D.** 120°.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^{\circ}-\widehat{ABC}\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^{\circ}-\widehat{BCA}\\ \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=180^{\circ}-\widehat{CAB}\end{cases}$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)=540^{\circ}-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}+\widehat{CAB}\right)=540^{\circ}-180^{\circ}=360^{\circ}$

Câu 7: Cho tam giác ABC với $\hat{A}=60^{\circ}$. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)$.

A. 120° **B.** 360° **C.** 270° **D.** 240°

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=180^{\circ}-\widehat{ABC}\\ \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=180^{\circ}-\widehat{BCA}\end{cases}$

$\longrightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)=360^{\circ}-\left(\widehat{ABC}+\widehat{BCA}\right)$

$=360^{\circ}-\left(180^{\circ}-\widehat{BAC}\right)=360^{\circ}-180^{\circ}+60^{\circ}=240^{\circ}$

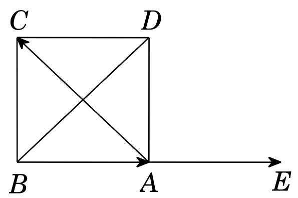
Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=0$. **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=-1$.

Lời giải

Chọn B



Vẽ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

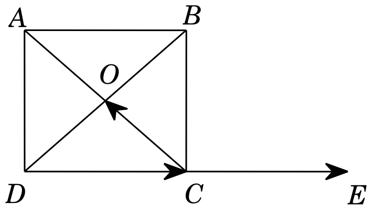
Khi đó $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)=\cos\widehat{CAE}=\cos 135^0=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)$.

A. 45° **B.** 405° **C.** 315° **D.** 225°

Lời giải

Chọn C



• Ta có $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=0^{\circ}$.

.

• Ta có $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)=180^{\circ}$

• Vẽ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}$, khi đó

$\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CE}\right)=\widehat{OCE}=135^{\circ}$

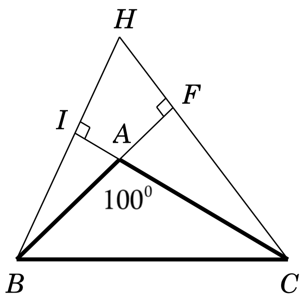
Vậy $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC}\right)=0^{\circ}+180^{\circ}+135^{\circ}=315^{\circ}$

Câu 10: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)$.

A. 360° **B.** 180° **C.** 80° **D.** 160°

Lời giải

Chọn D



Ta có $\begin{cases} \left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)=\widehat{BHA} \\ \left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)=\widehat{BHC} \\ \left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{CHA} \end{cases}$

$\longrightarrow \left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right)+\left(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC}\right)+\left(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA}\right)=\widehat{BHA}+\widehat{BHC}+\widehat{CHA}$

$=2\widehat{BHC}=2\left(180^\circ-100^\circ\right)=160^\circ$.

(do tứ giác $HIAF$ nội tiếp)

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

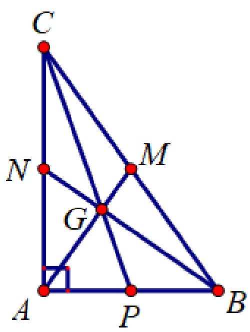
Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a$, $BC=2a$ và G là trọng tâm.

a) Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

b) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

c) Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}$

Lời giải



Hình 2.2

a) * Theo định nghĩa tích vô hướng ta có

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=2a^2\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$.

Mặt khác $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\cos\widehat{ABC}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

Nên $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$

* Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=-\left|\overrightarrow{CB}\right|.\left|\overrightarrow{CA}\right|\cos\widehat{ACB}$

Theo định lý Pitago ta có $CA=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$

Suy ra $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-a\sqrt{3}.2a.\frac{a\sqrt{3}}{2a}=-3a^2$

b) Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}=-3a^2$. Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ và hằng đẳng thức

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)^2=AB^2+BC^2+CA^2+2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}\right)$ Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)=-4a^2$

c) Tương tự cách 2 của câu b) vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)$

Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2=\left(\frac{2}{3}AM\right)^2=\frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2=\frac{4}{9}BN^2=\frac{4}{9}\left(AB^2+AN^2\right)=\frac{4}{9}\left(a^2+\frac{3a^2}{4}\right)=\frac{7a^2}{9}$$

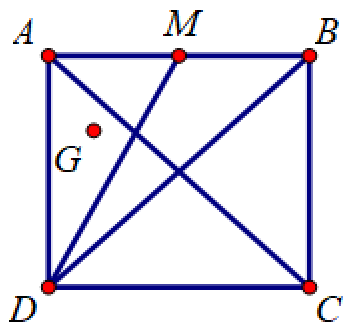
$$GC^2=\frac{4}{9}CP^2=\frac{4}{9}\left(AC^2+AP^2\right)=\frac{4}{9}\left(3a^2+\frac{a^2}{4}\right)=\frac{13a^2}{9}$$

Suy ra $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}=-\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9}+\frac{7a^2}{9}+\frac{13a^2}{9}\right)=-\frac{4a^2}{3}$.

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)$

Lời giải



Hình 2.3

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\widehat{ACB}$

($\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$)

Mặt khác $\widehat{ACB}=45^0$ và theo định lý Pitago ta có :

$AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

Suy ra $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=a.a\sqrt{2}\cos 45^0=a^2$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$ và

$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{CB}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{CG}=-\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)=-\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

Ta lại có $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)$

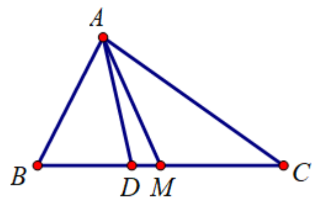
Nên $\overrightarrow{CG}.\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DM}\right)=\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right)=\frac{5}{4}AB^2+4AD^2=\frac{21a^2}{4}$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $BC=a,\ CA=b,\ AB=c$. M là trung điểm của BC, D là chân đường phân giác trong góc A .

a) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

Lời giải



Hình 2.3

a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)^2\right]=\frac{1}{2}\left[AB^2+AC^2-CB^2\right]=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)$

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC\cos A=cb\cos A$

Suy ra $\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)=cb\cos A$ hay $\cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$

b) * Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)$ nên

$$\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}\left(c^2+2.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+b^2\right)=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$

Suy ra $\overrightarrow{BD}=\frac{BD}{DC}\overrightarrow{DC}=\frac{b}{c}\overrightarrow{DC}$ (*)

Mặt khác $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{b}{c}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow(b+c)\overrightarrow{AD}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow(b+c)^2\overrightarrow{AD}^2=\left(b\overrightarrow{AB}\right)^2+2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}+\left(c\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow(b+c)^2\overrightarrow{AD}^2=b^2c^2+2bc.\frac{1}{2}\left(c^2+b^2-a^2\right)+c^2b^2\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}^2=\frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)$$

Hay $\overrightarrow{AD}^2=\frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$

Nhận xét **:** Từ câu b) suy ra độ dài đường phân giác kẻ từ đỉnh A là $l_a=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)}$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=-1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a},\vec{b})=0^0 \longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=180^\circ$. **B.** $\alpha=0^\circ$. **C.** $\alpha=90^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1 \longrightarrow (\vec{a},\vec{b})=180^0$

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}.\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=30^\circ$. **B.** $\alpha=45^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-3}{3.2}=-\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a},\vec{b})=120^0$$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^\circ$. **B.** $\alpha=180^\circ$. **C.** $\alpha=60^\circ$. **D.** $\alpha=45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v} \longrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)(\vec{a}+\vec{b})=0 \Leftrightarrow \frac{2}{5}\vec{a}^2-\frac{13}{5}\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}^2=0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a}\vec{b}=-1$

Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=-1 \longrightarrow (\vec{a},\vec{b})=180^0$

Câu 5: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)$ **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$

C. $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$ **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right).\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và **D.**

Ta có $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=4\vec{a}\vec{b}\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{4}\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$ **Chọn C**

- A đúng, vì $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}.\vec{b}$
- B đúng, vì $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right).\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\vec{a}.\vec{b}$

$\longrightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2\right)$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=120^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a.\cos 120^0=-\frac{a^2}{2}$

Câu 8: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$ **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}a^2$ **C.** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}a^2$

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ là góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=60^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a.a.\cos 60^0=\frac{a^2}{2}\longrightarrow$ **A đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{C}$ nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=120^0$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a.a.\cos 120^0=-\frac{a^2}{2}\longrightarrow$ **B đúng.**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=120^0$

Do đó $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=GA.GB.\cos\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)=\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a}{\sqrt{3}}.\cos 120^0=-\frac{a^2}{6}\longrightarrow$ **C sai. Chọn C**

- Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=30^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AG}=AB.AG.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG}\right)=a.\frac{a}{\sqrt{3}}.\cos 30^0=\frac{a^2}{2}\longrightarrow$ **D đúng.**

Câu 9: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$ **B.** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA}\right)=150^0$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{A}$ nên $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=120^0$

Do đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC.CB.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a.a.\cos 120^0=-\frac{a^2}{2}$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=a^2$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Chọn A

Xác định được góc $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$ là góc ngoài của góc $\widehat{B}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=135^0$

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=a.a\sqrt{2}.\cos 135^0=-a^2$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c,\ AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2$ **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=c^2$ **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$ **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA.BC.\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = BA.BC.\cos\widehat{B} = c.\sqrt{b^2+c^2}.\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = c^2$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$

Câu 12: Cho ba điểm A,B,C thỏa $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 13$ **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 15$ **C.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 17$ **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm $A,\ B,\ C$ thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4;-1)$. nằm giữa $A,\ C$.

Khi đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB.\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = 3.5.\cos 0^0 = 15$

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} + CA^2$

$\longrightarrow \overrightarrow{CB}\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}\left(CB^2+CA^2-AB^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(3^2+5^2-2^2\right) = 15$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ Tính $P = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ **B.** $P = \dfrac{c^2+b^2}{2}$ **C.** $P = \dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$ **D.** $P = \dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

$= \left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$

Câu 14: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)$

A. $P = -1$ **B.** $P = 3a^2$ **C.** $P = -3a^2$ **D.** $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

Ta có $P = \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$

$= -CA.CD\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right) - AC^2 = -a\sqrt{2}.a.\cos 45^0 - \left(a\sqrt{2}\right)^2 = -3a^2$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(2;10)$, $C(-4;2)$ Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 40$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -40$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 26$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -26$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;11)$, $\overrightarrow{AC}=(-7;3)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(-1).(-7)+11.3=40$ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}$

A. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-4$. **B.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=0$. **C.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=4$. **D.** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=16$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO}=(-3;1)$, $\overrightarrow{OB}=(2;10)$. Suy ra $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}=-3.2+1.10=4$.

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}.\vec{b}$

A. $\vec{a}.\vec{b}=-30$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=3$. **C.** $\vec{a}.\vec{b}=30$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=43$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a}=(4;6)$ và $\vec{b}=(3;-7)$

Suy ra $\vec{a}.\vec{b}=4.3+6.(-7)=-30$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}.\vec{a}=9$ và $\vec{c}.\vec{b}=-20$

A. $\vec{c}=(-1;-3)$ **B.** $\vec{c}=(-1;3)$ **C.** $\vec{c}=(1;-3)$ **D.** $\vec{c}=(1;3)$

Lời giải

Chọn B

Gọi $\vec{c}=(x;y)$

Ta có $\begin{cases}\vec{c}.\vec{a}=9\\ \vec{c}.\vec{b}=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3x+2y=9\\ -x-7y=-20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases} \longrightarrow \vec{c}=(-1;3)$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$.

Tính $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})$.

A. $P=0$ **B.** $P=18$ **C.** $P=20$ **D.** $P=28$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{b}+\vec{c}=(6;6)$. Suy ra $P=\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=1.6+2.6=18$.

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-1.2+1.0}{\sqrt{(-1)^2+1^2}.\sqrt{2^2+0^2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=90^{O}$ **B.** $\alpha=60^{O}$ **C.** $\alpha=45^{O}$ **D.** $\alpha=30^{O}$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{4.1+3.7}{\sqrt{16+9}.\sqrt{1+49}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^0$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$

A. $\alpha=45^{O}$ **B.** $\alpha=60^{O}$ **C.** $\alpha=90^{O}$ **D.** $\alpha=135^{O}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|}=\dfrac{1.(-3)+2.(-1)}{\sqrt{1+4}.\sqrt{9+1}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow\left(\vec{x},\vec{y}\right)=135^0$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{1}{2}$ **B.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{2}{5}$ **D.** $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(4;-3)$.

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{-2.4+(-1).(-3)}{\sqrt{4+1}.\sqrt{16+9}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15^{O} **B.** 60^{O} **C.** 120^{O} **D.** 135^{O}

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA}=(3;-1)$ và $\overrightarrow{BC}=(-4;-2)$. Suy ra:

$$\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{3.(-4)+(-1).(-2)}{\sqrt{9+1}.\sqrt{16+4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow \widehat{B}=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=135^{O}$$

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau. **B.** Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

C. $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)$ **D.** Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(8;4)$, $\overrightarrow{AD}=(5;-5)$, $\overrightarrow{CB}=(-2;4)$, $\overrightarrow{CD}=(-5;5)$

$$\text{Suy ra}\begin{cases}\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{8.5+4.(-5)}{\sqrt{8^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\ \cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{(-2).(-5)+4.(-5)}{\sqrt{2^2+4^2}.\sqrt{5^2+5^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=0\Rightarrow \widehat{BAD}+\widehat{BCD}=180^{0}$$

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vectơ nhờ đẳng thức $AB^2=\overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vectơ
- Sử dụng hằng đẳng thức vectơ về tích vô hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Lời giải

Đẳng thức cần chứng minh được viết lại là $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2$

Để làm xuất hiện $\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IA}$ ở VP, sử dụng quy tắc ba điểm để xen điểm I vào ta được

$VT = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right)$

$= \overrightarrow{IM}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = VP$ (đpcm).

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\right) + \overrightarrow{DB}.\left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right) + \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right)$

$= \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} = 0$

(đpcm)

Gọi H là giao của hai đường cao xuất phát từ đỉnh A, B.

Khi đó ta có $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0,\ \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (1)

Từ đẳng thức (*) ta cho điểm D trùng với điểm H ta được

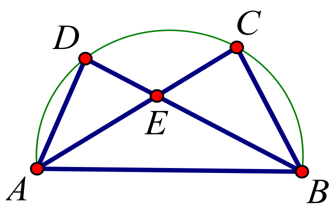
$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$ (2)

Từ (1) (2) ta có $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ suy ra BH vuông góc với AC

Hay ba đường cao trong tam giác đồng quy (đpcm).

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD} = AB^2$

Lời giải



Hình 2.4

Ta có $VT = \overrightarrow{AE}.\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{BE}.\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD}$

Vì AB là đường kính nên $\widehat{ADB} = 90^0$, $\widehat{ACB} = 90^0$

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC} = 0,\ \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{AD} = 0$

Do đó $VT = \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) = \overrightarrow{AB}^2 = VP$ (đpcm).

Câu 4. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$

Lời giải

Ta có: $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \left(a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + 2ab\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + 2bc\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} + 2ca\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IA} = 0$

$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 + ab\left(IA^2 + IB^2 - AB^2\right) +$

$+ bc\left(IB^2 + IC^2 - BC^2\right) + ca\left(IA^2 + IC^2 - CA^2\right) = 0$

$\Rightarrow \left(a^2 + ab + ca\right)IA^2 + \left(b^2 + ba + bc\right)IB^2 +$

$+ \left(c^2 + ca + cb\right)IC^2 - \left(abc^2 + ab^2c + a^2bc\right) = 0$

$\Rightarrow (a + b + c)\left(a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2\right) = (a + b + c)abc$

$\Rightarrow a^2IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 = abc$ (đpcm).

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. **D.** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right).\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2\right) = \dfrac{1}{2}\left(AC^2 - AB^2\right) = \dfrac{b^2 - c^2}{2}$

Câu 2: Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều. **B.** tam giác OAB cân tại O.

C. tam giác OAB vuông tại O. **D.** tam giác OAB vuông cân tại O.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$

Câu 3: Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}\left(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

C. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$. **D.** $\left(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ}\right)\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}\right)=MN^2-PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\widehat{BAC}=45^0$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^0=a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$

Câu 5: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

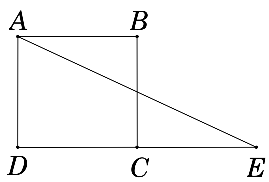
A. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=5a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right).\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AB}$



$=DE.AB.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB}\right)=DE.AB.\cos 0^0=2a^2$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{AC}{4}$.

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

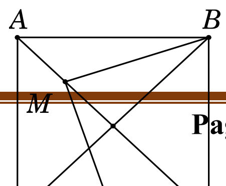
A. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=-4$. **B.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=0$. **C.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=4$. **D.** $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với • nhau.

• $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.



$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Suy ra:

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(0+3a^2-3a^2-0\right)=0.$$

Câu 7: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8,\ AD=5.$ Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64.$

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

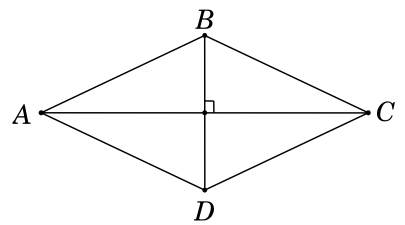
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+0=-AB^2=-64$.

Câu 8: Cho hình thoi $ABCD$ có $AC=8$ và $BD=6.$ Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24.$ **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=26.$ **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=28.$ **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=32.$

Lời giải

Chọn D



Gọi $O=AC\cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có

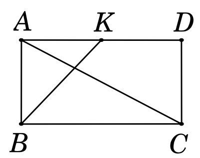
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}+0=\frac{1}{2}AC^2=32.$$

Câu 9: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=0.$ **B.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=-a^2\sqrt{2}.$ **C.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}.$ **D.** $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}=2a^2.$

Lời giải

Chọn A



Ta có $AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}.$

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$

$\longrightarrow \overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = 0.$

$\longrightarrow \cos\widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2\widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16}$ (vì $\widehat{ABC}$ nhọn).

Mặt khác góc giữa hai vecto $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc $\widehat{ABC}$

Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \cos\left(180^0 - \widehat{ABC}\right) = -\cos\widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A. $I\left(\frac{1}{4};1\right)$. **B.** $I\left(-\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $I\left(1;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $I\left(1;-\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = (x+4; y-1) \\ \overrightarrow{BI} = (x-2; y-4) \\ \overrightarrow{CI} = (x-2; y+2) \end{cases}$.

Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IB^2 = IC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 = (x-2)^2 + 9 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}.$

Câu 11: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.

A. $D(7;0)$. **B.** $D(7;0)$, $D(2;9)$. **C.** $D(0;7)$, $D(9;2)$. **D.** $D(9;2)$.

Lời giải

Chọn B

Để tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, ta cần có một cặp cạnh đối song song không bằng nhau và cặp cạnh còn lại có độ dài bằng nhau. Gọi $D(x;y)$.

• Trường hợp 1: $\begin{cases} AB \,//\, CD \\ AB \neq CD \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ (với $k \neq -1$)

$\Leftrightarrow (x-0;y-7)=(-2k;2k) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2k \\ y=2k+7 \end{cases}$. (1)

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AD}=(x-2;y) \Rightarrow AD=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \\ \overrightarrow{BC}=(0;5) \Rightarrow BC=5 \end{cases} \longrightarrow AD=BC \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=25.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có $(-2k-2)^2+(2k+7)^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-1(\text{loại}) \\ k=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \longrightarrow D(7;0).$

• Trường hợp 2: $\begin{cases} AD \,//\, BC \\ AD \neq BC \end{cases}$. Làm tương tự ta được $D=(2;9)$.

Vậy $D(7;0)$ hoặc $D(2;9)$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a}=(x_1;y_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2)$. Khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j}$ và $\vec{v}=k\vec{i}-4\vec{j}$. Tìm k để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};-5\right), \vec{v}=(k;-4)$.

Yêu cầu bài toán: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{1}{2}k+(-5)(-4)=0 \Leftrightarrow k=-40$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C.

Lời giải

Ta có $C \in Ox$ nên $C(c;0)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{CA}=(-2-c;4) \\ \overrightarrow{CB}=(8-c;4) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại C nên $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow (-2-c).(8-c)+4.4=0$

$\Leftrightarrow c^2-6c=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=6 \to C(6;0) \\ c=0 \to C(0;0) \end{array}\right.$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.

Lời giải

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=(x-2;y-4)\\ \overrightarrow{BC}=(6;-2)\\ \overrightarrow{BA'}=(x+3;y-1)\end{cases}$.

Vì A' là chân đường cao vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC nên

$\begin{cases}AA'\perp BC\\ B,\ C,\ A' \text{ thẳng hàng}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2).6+(y-4).(-2)=0\\ \dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y-1}{-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-2y=4\\ -2x-6y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\ y=-\dfrac{1}{5}\end{cases}.$$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,\ m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $(\vec{a}+\vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $2k=2m$ **B.** $3k=2m$ **C.** $2k+3m=0$ **D.** $3k+2m=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})\Leftrightarrow\vec{c}(\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 2k+3m=0$.

Câu 2: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **B.** $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$. và $\vec{v}$ cùng phương.

C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. **D.** $\vec{u}=-\vec{v}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$. **B.** Tam giác ABC đều.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. **D.** Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(1;7)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{BC}=(-7;1)\Rightarrow BC=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{CD}=(-1;-7)\Rightarrow CD=5\sqrt{2} \\ \overrightarrow{DA}=(7;-1)\Rightarrow DA=5\sqrt{2} \end{cases} \longrightarrow AB=BC=CD=DA=5\sqrt{2}.$

Lại có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1(-7)+7.1=0$ nên $AB\perp BC$.

Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác ABC đều. **B.** Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.

C. Tam giác ABC cân tại B. **D.** Tam giác ABC vuông cân tại A.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$.

Suy ra $\begin{cases} AB=AC=2\sqrt{2} \\ AB^2+AC^2=BC^2 \end{cases}$. Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(0;6)$. **B.** $C(5;0)$. **C.** $C(3;1)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $C\in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-4;-1) \\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(-4).(-1)+(-1)(c-2)=0\Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}=(a+3;b) \ \& \ \overrightarrow{BC}=(-1;6) \\ \overrightarrow{BH}=(a-3;b) \ \& \ \overrightarrow{AC}=(5;6) \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3).(-1)+b.6=0 \\ (a-3).5+b.6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a+6b=7.$$

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm toạ độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

A. $A'(1;-4)$. **B.** $A'(-1;4)$. **C.** $A'(1;4)$. **D.** $A'(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AA'}=(x-4;y-3) \\ \overrightarrow{BC}=(-5;-15) \\ \overrightarrow{BA'}=(x-2;y-7) \end{cases}$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} AA'\perp BC \\ B,\ A',\ C \text{ thang hang} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}=0 & (1) \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC} & (2) \end{cases}$.

- $(1)\Leftrightarrow -5(x-4)-15(y-3)=0 \Leftrightarrow x+3y=13$.
- $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-7}{-15} \Leftrightarrow 3x-y=-1$.

Giải hệ $\begin{cases} x+3y=13 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \longrightarrow A'(1;4)$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho khi đó ta có:

$\overrightarrow{AH}(a+3;b),\overrightarrow{BC}(-1;6) \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow -a-3+6b=0$

$\overrightarrow{BH}(a-3;b),\overrightarrow{AC}(5;6) \Rightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow 5a-15+6b=0$

Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} -a+6b=3 \\ 5a+6b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a+6b=7$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP vuông tại M. Biết điểm $M(2;1)$, $N(3;-2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy. Tính diện tích tam giác MNP.

A. $\frac{10}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn A

P nằm trên $Oy \Rightarrow P(0;p)$ mà MNP vuông tại $M \Rightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN} = 0$.

$\Leftrightarrow -2-3p+3=0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{3}$.

$\left|\overrightarrow{MP}\right| = \frac{2\sqrt{10}}{3}$, $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow S = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{10}}{3}\sqrt{10} = \frac{10}{3}$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:
Cho A,B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A, bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA}.\vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vecto $\vec{a}$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hai điểm A,B cố định có độ dài bằng a, vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2$

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm của AB ta có

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = \frac{3a^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = \frac{3a^2}{4}$ (Do $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$)

$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}$

$\Leftrightarrow MI = a$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a$.

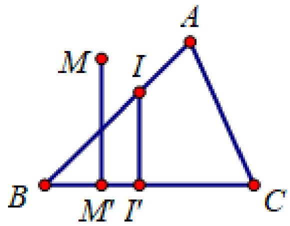
b) Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MA^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB tại A.

Câu 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0$

Lời giải



Gọi I là điểm xác định bởi $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Khi đó $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{CB}\right)\overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow\left[\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\right].\overrightarrow{BC}=3BC^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC}=BC^2$

Gọi M',I' lần lượt là hình chiếu của M,I lên đường thẳng BC Theo công thức hình chiếu ta có $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}$ do đó $\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}=BC^2$

Vì $BC^2>0$ nên $\overrightarrow{M'I'}$, $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng suy ra

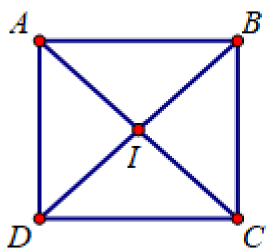
$\overrightarrow{M'I'}.\overrightarrow{BC}=BC^2 \Leftrightarrow M'I'.BC=BC^2 \Leftrightarrow M'I'=BC$

Do I cố định nên I' cố định suy ra M' cố định.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua M' và vuông góc với BC .

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=k$

Lời giải



Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)$

$$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}\right) + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$

$$= MI^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$$

Tương tự $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MI^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$

Nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = k \Leftrightarrow 2MI^2 + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = k$

$\Leftrightarrow 2MI^2 - IB^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{k}{2} + IA^2$

$\Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{k}{2} + a^2$

$\Leftrightarrow MI = \sqrt{\dfrac{k}{2} + IA^2} = \sqrt{\dfrac{k + a^2}{2}}$

Nếu $k < -a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng

Nếu $k = -a^2$ thì $MI = 0 \Leftrightarrow M \equiv I$ suy ra tập hợp điểm M là điểm I

Nếu $k > -a^2$ thì $MI = \sqrt{\dfrac{k + a^2}{2}}$

suy ra tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \sqrt{\dfrac{k + a^2}{2}}$.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI.

Câu 2: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MG}.$ $(*)$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB\perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG.

Câu 3: Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow MA\perp BC.$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

Câu 4: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2a^2$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B. Khi đó $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}^2=2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN}=0 \Leftrightarrow CN\perp AB$.

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB.

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-16$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)$

$=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}$.

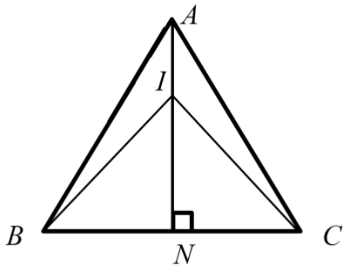
Theo giả thiết, ta có $MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=-16 \Leftrightarrow MI^2=\dfrac{AB^2}{4}-16=\dfrac{8^2}{4}-16=0 \longrightarrow M\equiv I$.

Câu 6: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2+MB^2+MC^2=\dfrac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R. Tính R.

A. $R=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. **B.** $R=\dfrac{a}{4}$. **C.** $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $R=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm đoạn BC.

Gọi I là điểm thỏa: $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IN}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$, nên điểm I thuộc đoạn thẳng AN sao cho $IN=2IA$.

Khi đó: $IA=\dfrac{1}{3}AN=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

$IB^2=IC^2=IN^2+BN^2=\dfrac{a^2}{3}+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{7a^2}{12}$.

Ta có: $4MA^2+MB^2+MC^2=\dfrac{5a^2}{2}\Leftrightarrow 4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2=\dfrac{5a^2}{2}$.

$\Leftrightarrow 6MI^2+4IA^2+IB^2+IC^2=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow 6MI^2+4.\dfrac{a^2}{12}+2.\dfrac{7a^2}{12}=\dfrac{5a^2}{2}\Leftrightarrow MI=\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

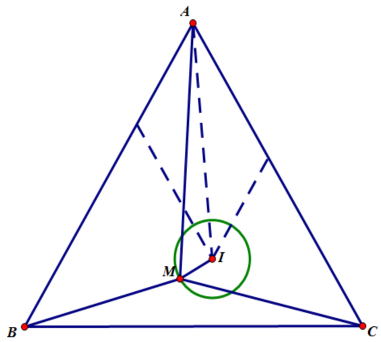
Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh $18\,\text{cm}$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ là

A. Tập rỗng. **B.** Đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R=3\,\text{cm}$. **D.** Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=18$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó: $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right| \Leftrightarrow 9\left|\overrightarrow{MI}\right|=18 \Leftrightarrow IM=2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn cố định có bán kính $R=2\,\text{cm}$.

DẠNG 6: CỰC TRỊ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông tại A.

b) Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}(8;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3.8+4.6=0$

Do đó $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ hay tam giác ABC vuông tại A.

b) AH khi H là hình chiếu của A lên BC

Gọi $H(x;y)$ là hình chiếu của A lên BC.

Ta có $\overrightarrow{AH}(x-1;y-2)$, $\overrightarrow{BH}(x+2;y-6)$, $\overrightarrow{BC}(11;2)$

$AH\perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow 11(x-1)+2(y-2)=0$

Hay $11x+2y-15=0$ (1)

Mặt khác $\overrightarrow{BH},\overrightarrow{BC}$ cùng phương nên $\frac{x+2}{11}=\frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x-11y+70=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $x=\frac{1}{5}$, $y=\frac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của A lên BC là $H\left(\frac{1}{5};\frac{32}{5}\right)$.

Câu 2. Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm toạ độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Gọi $B(b;0)$, $C(0;c)$ với $b \geq 0$, $c > 0$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}(b-2;-1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;c-1)$

Theo giả thiết ta có tam giác ABC vuông tại A nên
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (b-2)(-2)-1.(c-1)=0 \Leftrightarrow c=-2b+5$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{(b-2)^2+1}.\sqrt{2^2+(c-1)^2}$

$= (b-2)^2+1 = b^2-4b+5$

Vì $c>0$ nên $-2b+5>0 \Rightarrow 0 \leq b < \frac{5}{2}$

Xét hàm số $y = x^2-4x+5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$

Bảng biến thiên

x	0		2		$\frac{5}{2}$
y	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^2-4x+5$ với $0 \leq x < \frac{5}{2}$ là $y=5$ khi $x=0$. Do đó diện tích tam giác ABC lớn nhất khi và chỉ khi $b=0$, suy ra $c=5$.

Vậy $B(0;0)$, $C(0;5)$ là điểm cần tìm.

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $M\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $M\left(0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $M \in Oy$ nên $M(0;m)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1;-1-m) \\ \overrightarrow{MB} = (3;2-m) \end{cases}$.

Khi đó $MA^2+MB^2 = \left|\overrightarrow{MA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{MB}\right|^2 = 1^2+(-1-m)^2+3^2+(2-m)^2 = 2m^2-2m+15$.

$=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{29}{2}\geq\frac{29}{2};\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Suy ra $\left\{MA^2+MB^2\right\}_{\min}=\frac{29}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{1}{2}\longrightarrow M\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M\left(\frac{18}{7};0\right)$. **B.** $M(4;0)$. **C.** $M(3;0)$. **D.** $M\left(\frac{17}{7};0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Do M trên trục hoành $\Rightarrow M(x;0)$, $\overrightarrow{AB}=(1;-1)\Rightarrow AB=\sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AM}=(x-2;3)$, $\overrightarrow{BM}=(x-3;4)$

Ta có chu vi tam giác AMB: $P_{ABM}=\sqrt{2}+\sqrt{(x-2)^2+3^2}+\sqrt{(x-3)^2+4^2}$

$=\sqrt{2}+\sqrt{(x-2)^2+3^2}+\sqrt{(3-x)^2+4^2}\geq\sqrt{2}+\sqrt{(x-2+3-x)^2+(3+4)^2}$

$\Leftrightarrow P_{ABM}\geq 6\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{x-2}{3-x}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\frac{17}{7}\Rightarrow M\left(\frac{17}{7};0\right)$.

Cách 2: Lấy đối xứng A qua Ox ta được $A'(2;3)$. Ta có $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Dấu bằng xảy ra khi M trùng với giao điểm của $A'B$ với Ox.

Câu 3: Cho $M(-1;-2)$, $N(3;2)$, $P(4;-1)$. Tìm E trên Ox sao cho $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|$ nhỏ nhất.

A. $E(4;0)$. **B.** $E(3;0)$. **C.** $E(1;0)$. **D.** $E(2;0)$.

Lời giải

Chọn D

Do $E\in Ox\Rightarrow E(a;0)$.

Ta có: $\overrightarrow{EM}=(-1-a;-2)$; $\overrightarrow{EN}=(3-a;2)$; $\overrightarrow{EP}=(4-a;-1)$

Suy ra $\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}=(6-3a;-1)$.

Do đó: $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|=\sqrt{(6-3a)^2+(-1)^2}=\sqrt{(6-3a)^2+1}\geq 1$.

Giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EP}\right|$ bằng 1.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $6-3a=0\Leftrightarrow a=2$.

Vậy $E(2;0)$.

CHƯƠNG V

VECTƠ

BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1: Cho hai vectơ $\vec{u}=(2;-1)$, $\vec{v}=(-3;4)$. Tích $\vec{u}.\vec{v}$ là

A. 11. **B.** −10. **C.** 5. **D.** −2.

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(-3;1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 13. **D.** -1.

Câu 3: Cho $A(0;3)$; $B(4;0)$; $C(-2;-5)$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. 16. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{j}-2\vec{i}$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-4$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=4$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=2$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

Câu 5: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{v}=(2;-1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-1$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=5\sqrt{2}$.

Câu 6: Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}.\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$.

Câu 9: Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

C. $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2=|\vec{a}.\vec{b}|^2$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\hat{A}=90^0$, $\hat{B}=60^0$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\frac{-a^2}{2}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a; AC=a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. -1. **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** -1. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo AC bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 16: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo BD bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 17: Cho các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=x, |\vec{b}|=y$ và $|\vec{z}|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$.

Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $A=\frac{3x^2-z^2+y^2}{2}$. **B.** $A=\frac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. **C.** $A=\frac{3y^2-x^2-z^2}{2}$. **D.** $A=\frac{3z^2+x^2+y^2}{2}$.

Câu 18: Cho ΔABC đều; $AB=6$ và M là trung điểm của BC. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

A. -18. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -27.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại B, $BC=a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$. **B.** $\frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-3a^2$.

Câu 20: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a},\vec{b})=30^0$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 21: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D; $AB=AD=a, CD=2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-a^2$. **B.** 0. **C.** $\frac{3a^2}{2}$. **D.** $\frac{-a^2}{2}$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a; BC=2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2a^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 16. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 24: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=30°, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

A. $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60°$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0. **D.** a^2.

Câu 26: Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$ thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8, AD=5$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$.

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 28: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha=90^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=45^0$. **D.** $\alpha=180^0$.

Câu 29: Tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;4)$, $C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

A. $90°$. **B.** $36°52'$. **C.** $143°7'$. **D.** $53°7'$.

Câu 30: Cho hai véctơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác véctơ-không thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=-|\vec{a}|.|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:

A. $(\vec{a};\vec{b})=45^0$. **B.** $(\vec{a};\vec{b})=0^0$. **C.** $(\vec{a};\vec{b})=180^0$. **D.** $(\vec{a};\vec{b})=90^0$.

Câu 31: Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}|=4; |\vec{b}|=3; |\vec{a}-\vec{b}|=4$. Gọi α là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

A. $\alpha=60^0$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{3}{8}$.

Câu 32: Cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$. Tính góc α giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha=60°$. **B.** $\alpha=120°$. **C.** $\alpha=45°$. **D.** $\alpha=135°$.

Câu 34: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$ và $\vec{b}=(3;-6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $0°$. **B.** $90°$. **C.** $180°$. **D.** $60°$.

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}|-\vec{a}|.|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Câu 36: Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b}=(3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc $45°$

A. $y=-9$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=9 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-9 \end{array}\right.$. **D.** $y=-1$.

Câu 37: Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$ và hai véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38: Tìm x để hai vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào đúng?

A. $\vec{u}=-\vec{v}$. **B.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

C. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **D.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(6;0)$. **B.** $C(0;6)$. **C.** $C(-6;0)$. **D.** $C(0;-6)$.

Câu 41: Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

Câu 42: Cho tam giác ABC có $A(-1;0), B(4;0), C(0;m)$, $m\neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

A. $m=-\sqrt{6}$. **B.** $m=\pm 3\sqrt{6}$. **C.** $m=3\sqrt{6}$. **D.** $m=\pm\sqrt{6}$.

Câu 43: Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích $DABC$ là

A. 6. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 44: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. **B.** $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. **D.** $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Câu 45: Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 46: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0); B(-1;1); C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H(-1;-9)$. **B.** $H(-8;-27)$. **C.** $H(-2;5)$. **D.** $H(3;14)$.

Câu 47: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy; cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và trọng tâm là $G\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M.

A. $M(0;-3)$. **B.** $M(0;3)$. **C.** $M(0;4)$. **D.** $M(0;-4)$.

Câu 48: Trên hệ trục tọa độ xOy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$. Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

A. $(1;-4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

Câu 49: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=2MC, AC=3AN, AP=x, x>0$. Tìm x để AM vuông góc với NP.

A. $x=\frac{5a}{12}$. **B.** $x=\frac{a}{2}$. **C.** $x=\frac{4a}{5}$. **D.** $x=\frac{7a}{12}$.

Câu 50: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Biết $A(3;-1),B(-1;2)$ và $I(1;-1)$ là trọng tâm tam giác ABC. Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Tính $a+3b$.

A. $a+3b=\frac{2}{3}$. **B.** $a+3b=-\frac{4}{3}$. **C.** $a+3b=1$. **D.** $a+3b=-2$.

Câu 51: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, các cạnh đáy $AD=a$ và $BC=3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM\perp CD$

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Câu 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0),B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Câu 53: Cho hai điểm B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

C. Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

Câu 54: Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

A. Đường tròn đường kính AB.
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC.
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

Câu 55: Cho tam giác ABC, điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB ,điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

A. Đường tròn đường kính IJ. **B.** Đường tròn đường kính IK.
C. Đường tròn đường kính JK. **D.** Đường trung trực đoạn JK.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ

Câu 56: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho $\overrightarrow{AB}=(6;2)$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|$?

A. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{10}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=20$. **C.** $AB=4\sqrt{10}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=2\sqrt{10}$.

Câu 57: Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(-3;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=\sqrt{13}$. **B.** $AB=3\sqrt{2}$. **C.** $AB=4$. **D.** $AB=5$.

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2)$; $B(-1;1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M. Khi đó độ dài đoạn OM bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Câu 59: Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Chọn khẳng định đúng

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng. **D.** Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(-1;4), B(2;5), C(-2;7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là cặp số nào?

A. $(-2;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(0;12)$. **D.** $(2;6)$.

Câu 61: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1;-17); B(-11;-25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC=\sqrt{13}$.

A. $C(-14;-27)$. **B.** $C(-8;-23)$.

C. $C(-14;-27)$ và $C(-8;-23)$. **D.** $C(14;27)$ và $C(8;23)$.

Câu 62: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(3;1)$. Giả sử $A(a;0)$ và $B(0;b)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $T=10$. **B.** $T=9$. **C.** $T=5$. **D.** $T=17$.

CHƯƠNG V VECTƠ

BÀI 3. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÍCH VÔ HƯỚNG

Câu 1: Cho hai vectơ $\vec{u}=(2;-1)$, $\vec{v}=(-3;4)$. Tích $\vec{u}.\vec{v}$ là

A. 11. **B.** -10. **C.** 5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Với $\begin{cases}\vec{u}=(2;-1)\\ \vec{v}=(-3;4)\end{cases} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v}=2.(-3)+(-1)4=-10$

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(-3;1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

A. -5. **B.** 1. **C.** 13. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b}=2.(-3)+5.1=-1$.

Câu 3: Cho $A(0;3)$; $B(4;0)$; $C(-2;-5)$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. 16. **B.** 9. **C.** -10. **D.** -9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(-6;-5)$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=4.(-6)+(-3).(-5)=-9$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{j}-2\vec{i}$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-4$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=4$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=2$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=-2$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết ta có $\vec{u}=(1;3)$ và $\vec{v}=(-2;2)$.

Khi đó $\vec{u}.\vec{v}=1.(-2)+3.2=4$.

Câu 5: Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{v}=(2;-1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v}=-1$. **B.** $\vec{u}.\vec{v}=1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}=(2;-3)$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}=5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\vec{u}=(1;3)$.

Vậy $\vec{u}.\vec{v}=1.2+3.(-1)=-1$.

Câu 6: Cho hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác véctơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}.\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(\vec{a},\vec{b})$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai véctơ.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$.Tích vô hướng của hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

A. $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$. **D.** $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ $=4a.4a.\cos 60^\circ$ $=4a.4a.\frac{1}{2}=8a^2$.

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a^2$.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB\perp CD$ do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.

Câu 9: Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

C. $|\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2=|\vec{a}.\vec{b}|^2$. **D.** $\vec{a}.\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

Lời giải

Chọn C

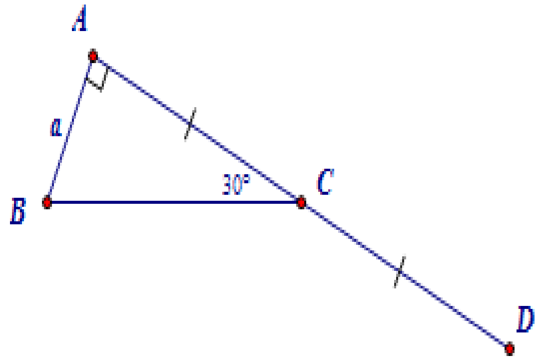
$\left|\vec{a}.\vec{b}\right|^2 = \left[\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right]^2 = \left|\vec{a}\right|^2.\left|\vec{b}\right|^2.\cos^2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ nên C sai.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^0$, $\hat{B} = 60^0$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng với A qua C.

Khi đó: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = CD.CB.\cos 150° = a\sqrt{3}.2a.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$.

Câu 11: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \frac{-a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

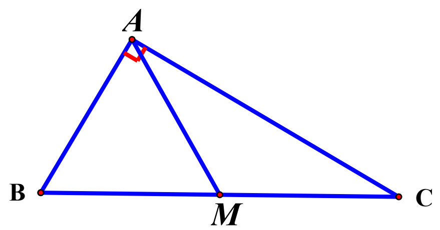
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right) = a.a.\cos 120° = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** a^2. **C.** $-a^2$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \dfrac{BC}{2}$.

$AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a$.

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB} = 60°$.

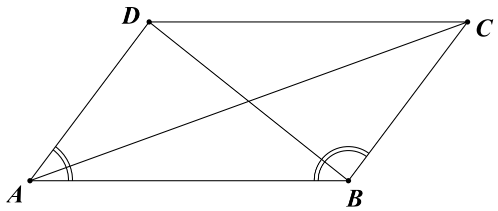
Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = -a.a.\cos 60° = -\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 13: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B



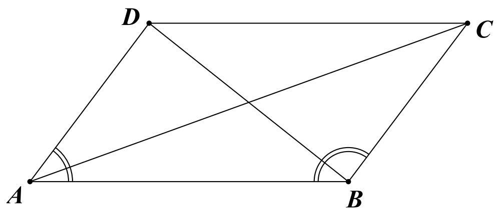
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) = AB.AD.\cos\widehat{BAD} = 2.1.\cos 60° = 1$.

Câu 14: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60°$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. -1. **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** -1. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Theo giả thiết: $\widehat{BAD} = 60° \Rightarrow \widehat{ABC} = 120°$.

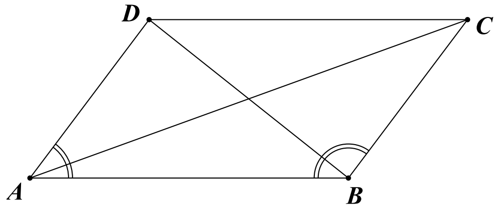
$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right) = AB.BC.\cos\widehat{ABC} = 2.1.\cos 120° = -1$.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2$, $AD = 1$, $\widehat{BAD} = 60°$. Độ dài đường chéo AC bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

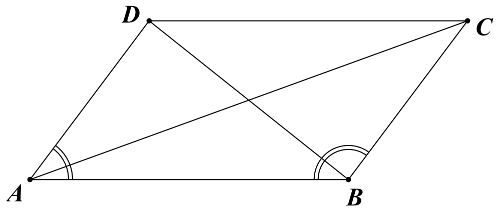
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow \overrightarrow{AC}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow AC^2=2^2+1^2+2.1\Rightarrow AC=\sqrt{7}$.

Câu 16: Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2$, $AD=1$, $\widehat{BAD}=60°$. Độ dài đường chéo BD bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow BD^2=2^2+1^2+2.(-1)$

$\Rightarrow BD=\sqrt{3}$.

Câu 17: Cho các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}|=x$, $|\vec{b}|=y$ và $|\vec{z}|=c$ và $\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$. Tính $A=\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$.

A. $A=\dfrac{3x^2-z^2+y^2}{2}$. **B.** $A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. **C.** $A=\dfrac{3y^2-x^2-z^2}{2}$. **D.** $A=\dfrac{3z^2+x^2+y^2}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-2\vec{c}$.

$\Rightarrow \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2A=4\vec{c}^2$.

$\Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\left(-2\vec{c}\right)^2$.

Sử dụng tính chất bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài ta có:

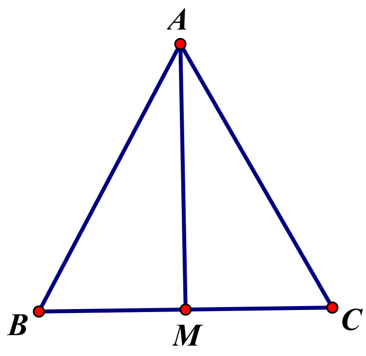
$x^2+y^2+z^2+2A=4z^2\Rightarrow A=\dfrac{3z^2-x^2-y^2}{2}$. Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 18: Cho ΔABC đều; $AB=6$ và M là trung điểm của BC. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

A. -18. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=\widehat{BAM}=30°$.

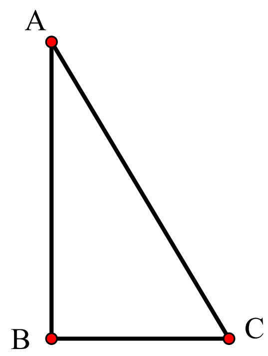
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AM}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right)=-6.\dfrac{6\sqrt{3}}{2}.\cos 30°=-27$.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại B, $BC=a\sqrt{3}$. Tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

A. $3a^2$. **B.** $\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=-AC.CB.\cos\widehat{ACB}=-AC.CB.\dfrac{CB}{AC}=-BC^2=-3a^2$.

Câu 20: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $\left|\vec{a}\right|=2,\ \left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ và $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^0$. Tính $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

A. $\sqrt{11}$. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=a^2+b^2+2\vec{a}\vec{b}=a^2+b^2+2\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$,

$\Rightarrow\left(\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\right)^2=4+3+2.2.\sqrt{3}.\cos 30^0=13\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{13}$.

Câu 21: Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D; $AB=AD=a, CD=2a$. Khi đó tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ bằng

A. $-a^2$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{3a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{-a^2}{2}$.

Lời giải

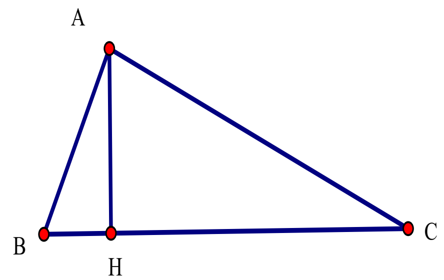
Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=AD^2-2AB^2-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ $=AD^2-2AB^2=-a^2$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a; BC=2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=2a^2$. **D.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH\perp BC, H\in BC$.

Có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=BH.BC=BA^2=a^2$.

Câu 23: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=4$. Kết quả $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. 16. **B.** 0. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Vì $\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=\widehat{ABC}$ nên $\cos\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=\cos\widehat{ABC}=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\right)=AB.BC.\dfrac{4}{BC}=4.4=16$

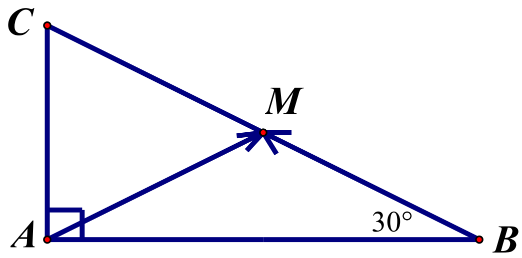
Câu 24: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B}=30°, AC=2$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$.

A. $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

Lời giải

.

Chọn A



Ta có: $P = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}).\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$

$BC = \dfrac{AC}{\sin 30°} = 4;\ AB = AC.\cot 30° = 2\sqrt{3}; BM = 2$

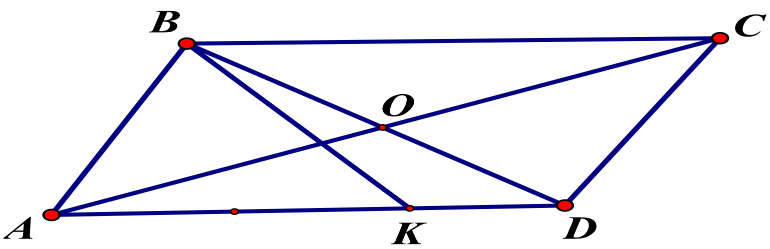
$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4;\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3}.2.\cos 150° = -6\ \Rightarrow P = -2 \Rightarrow$ Chọn A

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60°$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC}$

A. $3a^2$. **B.** $6a^2$. **C.** 0. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \dfrac{2}{3}AD^2 - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BK}.\overrightarrow{AC} = -4a^2 + \dfrac{2}{3}.9a^2 - \dfrac{1}{3}2a.3a.cos60° = a^2$

Câu 26: Cho tam giác *ABC* có *AB=5, AC=8, BC=7* thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20. **B.** 40. **C.** 10. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2.5.8} = \dfrac{1}{2}$

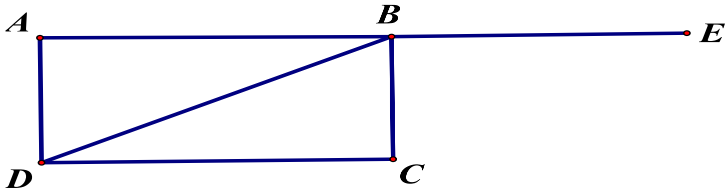
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 5.8.\dfrac{1}{2} = 20$

Câu 27: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8, AD = 5$. Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=62$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-64$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-62$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=64$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử E là điểm đối xứng với A qua B ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$

Xét ΔABD có $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{89}$

Xét ΔABD có $cos\widehat{ABD}=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{8}{\sqrt{89}}$ suy ra $cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD}\right)=cos\widehat{DBE}=-cos\widehat{ABD}=-\dfrac{8}{\sqrt{89}}$

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BD}\right)=8.\sqrt{89}.\left(\dfrac{-8}{\sqrt{89}}\right)=-64$

DẠNG 2. XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI VÉCTƠ

Câu 28: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$.

A. $\alpha=90^0$. **B.** $\alpha=0^0$. **C.** $\alpha=45^0$. **D.** $\alpha=180^0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.cos\alpha$. Mà $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$ nên $cos\alpha=-1$. Suy ra, $\alpha=180^0$.

Câu 29: Tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(0;4)$, $C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

A. $90°$. **B.** $36°52'$. **C.** $143°7'$. **D.** $53°7'$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2);\overrightarrow{AC}=(2;-1)$.

$$\cos\widehat{BAC}=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{-2-2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=\frac{-4}{5}\Rightarrow\widehat{BAC}=143°7'.$$

Câu 30: Cho hai véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác véctơ-không thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng:

A. $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=45^0$. **B.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=0^0$. **C.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=180^0$. **D.** $\left(\vec{a};\vec{b}\right)=90^0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}| \\ \vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a};\vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a};\vec{b}) = 180^0$.

Câu 31: Cho hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a}-\vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai véctơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn phát biểu **đúng**.

A. $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$|\vec{a}-\vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a}-\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 2.4.3.\cos\alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{3}{8}$$

Câu 32: Cho hai vectơ $\vec{a} = (4;3)$ và $\vec{b} = (1;7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. 45^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{4.1+3.7}{\sqrt{4^2+3^2}.\sqrt{1^2+7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\alpha = 45^0$.

Câu 33: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (3;-7)$. Tính góc α giữa hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 60°$. **B.** $\alpha = 120°$. **C.** $\alpha = 45°$. **D.** $\alpha = 135°$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{2.3+5.(-7)}{\sqrt{4+25}.\sqrt{9+49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135°.$

Câu 34: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (2;1)$ và $\vec{b} = (3;-6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $0°$. **B.** $90°$. **C.** $180°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn B

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{2.3+1.(-6)}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{3^2+(-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 90°.$$

Câu 35: Cho hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}|-\vec{a}|.|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a};\vec{b}$ là

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|-\vec{a}\right|$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left|-\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 60°$.

Câu 36: Cho véc tơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì véc tơ $\vec{b} = (3;y)$ tạo với véctơ $\vec{a}$ một góc 45°

A. $y = -9$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=9 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-9 \end{array}\right.$. **D.** $y = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \frac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}}$.

Góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 45° suy ra $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{3-2y}{\sqrt{5}.\sqrt{9+y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{90+10y^2} = 6-4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6-4y \geq 0 \\ 90+10y^2 = (6-4y)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1$.

Câu 37: Cho hai vecto $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2}$, $\left|\vec{b}\right| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\left(2\vec{a}-\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2.\left|\vec{a}\right|^2 - \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2.\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2^2 + \sqrt{2}.2.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 90°$.

DẠNG 3. ỨNG DỤNG TÍCH VÔ HƯỚNG CHỨNG MINH VUÔNG GÓC

Câu 38: Tìm x để hai vecto $\vec{a} = (x;2)$ và $\vec{b} = (2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

A. 3. **B.** 0. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0 \Leftrightarrow 2x-6=0 \Leftrightarrow x=3$

Vậy $x=3$.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào đúng?

A. $\vec{u}=-\vec{v}$. **B.** $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.
C. $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. **D.** $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{u}.\vec{v}=3.(-8)+4.6=0$. Do đó, $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Câu 40: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A.

A. $C(6;0)$. **B.** $C(0;6)$. **C.** $C(-6;0)$. **D.** $C(0;-6)$.

Lời giải

Chọn B

$C\in Oy \Leftrightarrow C(0;y)$

$\overrightarrow{AB}=(-4;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1;y-2)$.

Ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác vuông tại A $\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{AC}\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow y=6.$

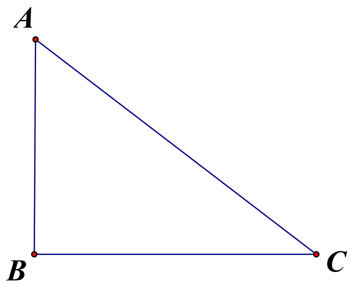
Vậy $C(0;6)$.

Câu 41: Cho tam giác ABC có $A(-1;2), B(0;3), C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

A. $(0;3)$. **B.** $(0;-3)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;0)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1);\overrightarrow{AC}=(6;-4);\overrightarrow{BC}=(5;-5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=1.5+1.(-5)=0$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0;3)$.

Câu13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(1;2)$ và $\vec{v}=(4m;2m-2)$. Tìm m để vectơ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=-\frac{1}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn A

Hai vectơ $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow 4m+2.(2m-2)=0\Leftrightarrow 8m-4=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 42: Cho tam giác ABC có $A(-1;0),B(4;0),C(0;m)$, $m\neq 0$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.

A. $m=-\sqrt{6}$. **B.** $m=\pm 3\sqrt{6}$. **C.** $m=3\sqrt{6}$. **D.** $m=\pm\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, suy ra $G\left(1;\frac{m}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{GA}=\left(-2;-\frac{m}{3}\right)$; $\overrightarrow{GB}=\left(3;-\frac{m}{3}\right)$.

Để tam giác GAB vuông tại G thì $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}=0\Leftrightarrow -6+\frac{m^2}{9}=0\Leftrightarrow m=\pm 3\sqrt{6}$.

Câu 43: Cho tam giác ABC có $A(1;-1),B(3;-3),C(6;0)$. Diện tích $DABC$ là

A. 6. **B.** $6\sqrt{2}$. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(3;3)$

Ta thấy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{1}{2}.2\sqrt{2}.3\sqrt{2}=6$

Câu 44: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

A. $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$.
B. $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.
C. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$.
D. $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Lời giải

Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi $A(x;y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB=AC \\ AB\perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2=AC^2 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2+(3-y)^2=(3-x)^2+(1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x)+(3-y)(1-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x^2-2x=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\ y=0 \\ x=2,\ y=4 \end{array}\right..$$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

Câu 45: Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4),B(3;4),C(3;0)$.

A. $\frac{5}{2}$.
B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.
C. 5.
D. 3.

Lời giải

Chọn A

Tính được $AB=3,BC=4$ và $AC=5$. Suy ra $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B. Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=\frac{1}{2}AC=\frac{5}{2}$.

Câu 46: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0);B(-1;1);C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

A. $H(-1;-9)$.
B. $H(-8;-27)$.
C. $H(-2;5)$.
D. $H(3;14)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH\perp BC \\ BH\perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} (1)$.

Ta có:

$\overrightarrow{AH}=(x-1;y);\overrightarrow{BC}=(6;-2);\overrightarrow{BH}=(x+1;y-1),\overrightarrow{AC}=(4;-1)$.

Suy ra: $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}6(x-1)-2.y=0\\4(x+1)-1.(y-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x-2y=6\\4x-y=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8\\y=-27\end{cases}$.

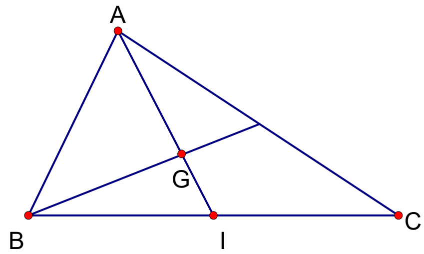
Vậy $H(-8;-27)$.

Câu 47: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy; cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và trọng tâm là $G\left(-2;\frac{2}{3}\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên tia Oy sao cho tam giác MBC vuông tại M.

A. $M(0;-3)$. **B.** $M(0;3)$. **C.** $M(0;4)$. **D.** $M(0;-4)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có G là trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=3x_G-x_A-x_B\\y_C=3y_G-y_A-y_B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_C=3(-2)-(-1)-1=-6\\y_C=3.\dfrac{2}{3}-1-3=-2\end{cases}$

$\Rightarrow C(-6;-2)$

Ta có $M\in Oy\Rightarrow M(0;m)$

Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:

$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_B+x_C}{2}\\y_I=\dfrac{y_B+y_C}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_I=-\dfrac{5}{2}\\y_I=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Ta có

$\overrightarrow{BM}=(-1;m-3);\overrightarrow{CM}=(6;m+2);\overrightarrow{CB}=(7;5);\overrightarrow{IM}=\left(\dfrac{5}{2};m-\dfrac{1}{2}\right)$

ΔMBC vuông cân tại M khi: $\begin{cases}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=0\\\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{CB}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-3)(m+2)-6=0\\5\left(m-\dfrac{1}{2}\right)+7.\dfrac{5}{2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-12=0\\m=-3\end{cases}\Leftrightarrow m=-3\Rightarrow M(0;-3)$.

Câu 48: Trên hệ trục tọa độ xOy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$, $C(-3;-8)$.Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC là

A. $(1;-4)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $D(x;y)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC ta có $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ và D, B, C thẳng hàng

Mà $\overrightarrow{AD}=(x-4;y-3)$; $\overrightarrow{BC}=(-5;-15)$; $\overrightarrow{BD}=(x-2;y-7)$ nên ta có hệ

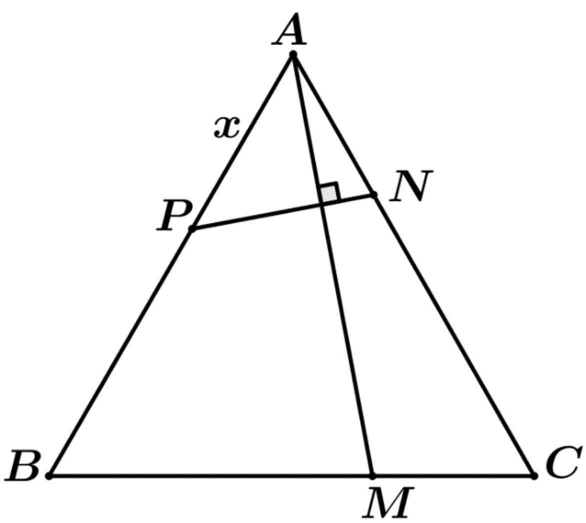
$$\begin{cases} x-4+3(y-3)=0 \\ 3(x-2)-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}.$$

Câu 49: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Lấy M,N,P lần lượt nằm trên ba cạnh BC,CA,AB sao cho $BM=2MC, AC=3AN, AP=x, x>0$. Tìm x để AM vuông góc với NP.

A. $x=\frac{5a}{12}$. **B.** $x=\frac{a}{2}$. **C.** $x=\frac{4a}{5}$. **D.** $x=\frac{7a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=\vec{b} \\ \overrightarrow{AC}=\vec{c} \end{cases}$, ta có $|\vec{b}|=|\vec{c}|=a$ và $\vec{b}.\vec{c}=a.a.cos60^0=\frac{a^2}{2}$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{3}(\vec{b}+2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{a}\overrightarrow{AB}=-\frac{x}{a}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3a}(-3x\vec{b}+a\vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có $AM\perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0 \Leftrightarrow (\vec{b}+2\vec{c})(-3x\vec{b}+a\vec{c})=0$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a\left(\vec{b}.\vec{c}\right) - 6x\left(\vec{b}.\vec{c}\right) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

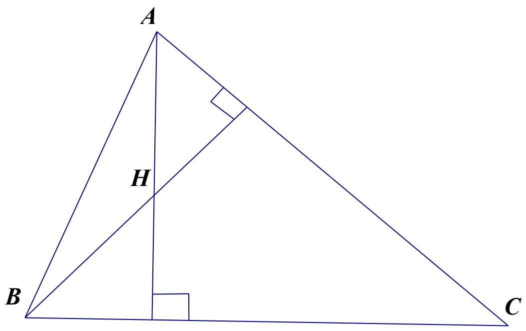
$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

Câu 50: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC. Biết $A(3;-1), B(-1;2)$ và $I(1;-1)$ là trọng tâm tam giác ABC. Trực tâm H của tam giác ABC có tọa độ $(a;b)$. Tính $a+3b$.

A. $a+3b=\frac{2}{3}$. **B.** $a+3b=-\frac{4}{3}$. **C.** $a+3b=1$. **D.** $a+3b=-2$.

Lời giải

Chọn A



Giả sử $C(x_C;y_C)$ và $H(x_H;y_H)$. Có I là trọng tâm tam giác ABC nên ta có

$$\begin{cases} \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = x_I \\ \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1;-4)$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (x_H-3; y_H+1); \overrightarrow{BC} = (2;-6)$

$\overrightarrow{BH} = (x_H+1; y_H-2); \overrightarrow{AC} = (-2;-3)$

H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H-3) - 6(y_H+1) = 0 \\ -2(x_H+1) - 3(y_H-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{10}{3} \\ y_H = -\dfrac{8}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

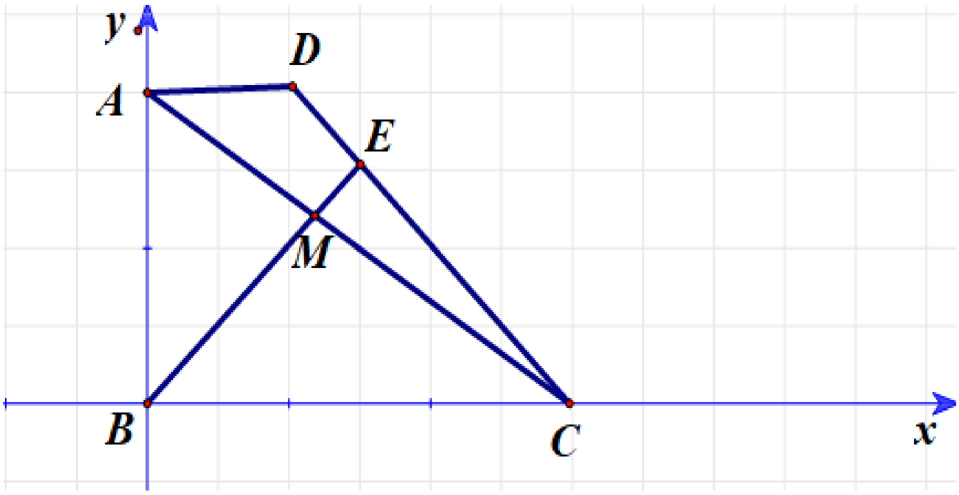
Câu 51: Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB=2a$, các cạnh đáy $AD=a$ và $BC=3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B, điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox.



Theo bài ra ta có $B(0;0),\ A(0;2),\ C(3;0),\ D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC}=(3;-2)$. Phương trình tham số của đthẳng AC là $\begin{cases} x=3t \\ y=2-2t \end{cases}$

Gọi $M\in AC\Rightarrow M(3t;2-2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM}=(3t;2-2t)$ và $\overrightarrow{DC}=(2;-2)$.

Để $BM\perp DC$ thì $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{DC}=0\Leftrightarrow 6t-4+4t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{2}{5}\ \Rightarrow M\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{-4}{5}\right)\Rightarrow AM=\dfrac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC}=(3;-2)\Rightarrow AC=\sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}}=\dfrac{2}{5}$.

Câu 52: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0),B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

A. $a+6b=5$. **B.** $a+6b=6$. **C.** $a+6b=7$. **D.** $a+6b=8$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AH}=(a+3;b)$, $\overrightarrow{BC}=(-1;6)$, $\overrightarrow{BH}=(a-3;b)$, $\overrightarrow{AC}=(5;6)$.

Vì H là trực tâm ΔABC nên $\begin{cases} AH\perp BC \\ BH\perp AC \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a+6b=3 \\ 5a+6b=15 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases}$.

$\Rightarrow a+6b=7$.

Câu 53: Cho hai điểm B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC. **B.** Đường tròn $(B;BC)$.

C. Đường tròn $(C;CB)$. **D.** Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CM}^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{MB}=0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC.

Câu 54: Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là :

A. Đường tròn đường kính AB.

B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC.

D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{CA}\right).\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0$.

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

Câu 55: Cho tam giác ABC, điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB, điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

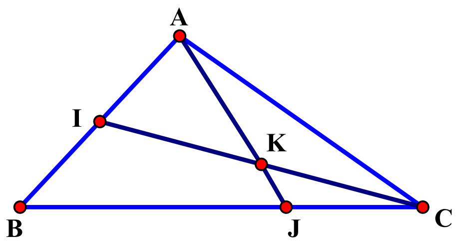
A. Đường tròn đường kính IJ.

B. Đường tròn đường kính IK.

C. Đường tròn đường kính JK.

D. Đường trung trực đoạn JK.

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}}{4}+\frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{KJ}$ nên

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{AK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Lại có $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}=3\overrightarrow{MK}+3\overrightarrow{KJ}=3\overrightarrow{MJ}$.

Như vậy $\left(3\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AK}\right).\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{MJ}\right).\left(4\overrightarrow{MK}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MK}=0$.

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK.

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN ĐỘ DÀI VÉCTƠ

Câu 56: Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho $\overrightarrow{AB}=(6;2)$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}\right|$?

A. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{10}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=20$. **C.** $AB=4\sqrt{10}$. **D.** $\overrightarrow{AB}=2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

Câu 57: Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(-3;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. $AB=\sqrt{13}$. **B.** $AB=3\sqrt{2}$. **C.** $AB=4$. **D.** $AB=5$.

Lời giải

Chọn D

$AB=\sqrt{(-3-1)^2+(3-0)^2}=5$.

Câu 58: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;2)$; $B(-1;1)$. Điểm M thuộc trục Oy thỏa mãn tam giác MAB cân tại M. Khi đó độ dài đoạn OM bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điểm M thuộc trục $Oy \Rightarrow M(0;y)$.

Ta có tam giác MAB cân tại $M \Leftrightarrow MA=MB \Leftrightarrow \sqrt{1^2+(2-y)^2}=\sqrt{(-1)^2+(1-y)^2}$

$\Leftrightarrow 4-4y=1-2y \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$. Vậy $OM=\frac{3}{2}$.

Câu 59: Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(2;1)$, $B(2;-1)$, $C(-2;-3)$, $D(-2;-1)$. Xét ba mệnh đề:

(I) $ABCD$ là hình thoi.

(II) $ABCD$ là hình bình hành.

(III) AC cắt BD tại $M(0;-1)$.

Chọn khẳng định đúng

A. Chỉ (I) đúng. **B.** Chỉ (II) đúng.

C. Chỉ (II) và (III) đúng. **D.** Cả (I), (II), (III) đều đúng.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2)$; $\overrightarrow{DC}=(0;-2)$; $\overrightarrow{AC}=(-4;-4)$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Nên $ABCD$ là hình bình hành. Vậy mệnh đề đúng.

Suy ra AC cắt BD tại trung điểm mỗi đường và điểm đó có tọa độ $M=(0;-1)$, suy ra đúng.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-2)$, suy ra $AB=|-2|=2$; $\overrightarrow{AD}=(-4;-2)$, suy ra $AD=\sqrt{20}$, nên $AB\neq AD$, suy ra $ABCD$ không là hình thoi. Mệnh đề sai.

Câu 60: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có $A(-1;4), B(2;5), C(-2;7)$. Hỏi tọa độ điểm I tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là cặp số nào?

A. $(-2;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(0;12)$. **D.** $(2;6)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(3;1)\Rightarrow AB=\sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AC}=(-1;3)\Rightarrow AC=\sqrt{10}$.

$\overrightarrow{BC}=(-4;2)\Rightarrow BC=\sqrt{20}$.

Nhận thấy $AB^2+AC^2=BC^2$ và $AB=AC$ nên ΔABC là tam giác vuông cân tại A, suy ra tâm I là trung điểm cạnh huyền BC. Vậy $I(0;6)$.

Câu 61: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các điểm $A(1;-17); B(-11;-25)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc tia BA sao cho $BC=\sqrt{13}$.

A. $C(-14;-27)$. **B.** $C(-8;-23)$.

C. $C(-14;-27)$ và $C(-8;-23)$. **D.** $C(14;27)$ và $C(8;23)$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $C(x_C;y_C)$. Theo bài ra ta có C thuộc tia BA nên $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

Với $\overrightarrow{BC}=(x_C+11;y_C+25)$; $\overrightarrow{BA}=(12;8)$ ta có: $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{BA}$ $(k>0)$ $\Leftrightarrow \dfrac{x_C+11}{12}=\dfrac{y_C+25}{8}=k$

$\Leftrightarrow 8x_C-12y_C-212=0 \Leftrightarrow y_C=\dfrac{8x_C-212}{12} \Leftrightarrow y_C=\dfrac{2x_C-53}{3}$ (1)

+) $BC=\sqrt{13} \Leftrightarrow \sqrt{(x_C+11)^2+(y_C+25)^2}=\sqrt{13} \Leftrightarrow (x_C+11)^2+(y_C+25)^2=13$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được:

$$\left(x_C+11\right)^2+\left(\frac{2x_C-53}{3}+25\right)^2=13 \Leftrightarrow \left(x_C+11\right)^2+\left(\frac{2x_C+22}{3}\right)^2=13 \Leftrightarrow \frac{13}{9}\left(x_C+11\right)^2=13$$

$$\Leftrightarrow \left(x_C+11\right)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_C=-14 \\ x_C=-8 \end{array}\right.$$

Với $x_C=-14$ thế vào (1) ta được: $y_C=\dfrac{2.(-14)-53}{3}=-27$.

Khi đó $k=\dfrac{-14+11}{12}=\dfrac{-3}{12}=\dfrac{-1}{4}<0$.

Với $x_C=-8$ thế vào (1) ta được: $y_C=\dfrac{2.(-8)-53}{3}=-23$.

Khi đó $k=\dfrac{-8+11}{12}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}>0$.

Vậy $C\left(-8;-23\right)$.

Câu 62: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M\left(3;1\right)$. Giả sử $A\left(a;0\right)$ và $B\left(0;b\right)$ là hai điểm sao cho tam giác MAB vuông tại M và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $T=10$. **B.** $T=9$. **C.** $T=5$. **D.** $T=17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MA}=\left(a-3;-1\right)$, $\overrightarrow{MB}=\left(-3;b-1\right)$. MAB là tam giác vuông tại M khi và chỉ khi

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow -3\left(a-3\right)-\left(b-1\right)=0 \Leftrightarrow b=10-3a$ $(*)$

Với $a\geq 0,\, b\geq 0$ suy ra $0\leq a\leq \dfrac{10}{3}$ $(**)$

$$S_{MAB}=\frac{1}{2}MA.MB=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a-3\right)^2+1}.\sqrt{9+\left(b-1\right)^2}=\frac{3}{2}\left(a^2-6a+10\right)=\frac{3}{2}\left(a-3\right)^2+\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}.$$

Do đó $\min S_{MAB}=\dfrac{3}{2}$ đạt được khi $a=3$, khi đó $b=1$.

Vậy $T=a^2+b^2=10$.