UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM 2020
Môn thi: **Toán**
Thời gian làm bài: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ nhất: **24/9/2019**

Câu 1 (5,0 điểm)

Cho hai dãy số $(u_n), (v_n)$ xác định như sau $u_0 = a; v_0 = b$ với hằng số thực a, b cho trước thỏa mãn $0 < a < b$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}.v_n}$ với mọi số tự nhiên n.

a) Chứng tỏ hai dãy đã cho đều hội tụ và có giới hạn bằng nhau.

b) Tìm giới hạn đó theo a, b.

Câu 2 (5,0 điểm)

Cho số nguyên tố p. Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện

$$2020^{n+2019} \equiv n + 2018 \pmod{p}.$$

Câu 3 (5,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K, các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 4 (5,0 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ có hệ số thực và bậc là số tự nhiên lẻ sao cho:

$$f(x^2 - 1) = f^2(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

------------ **Hết** ------------

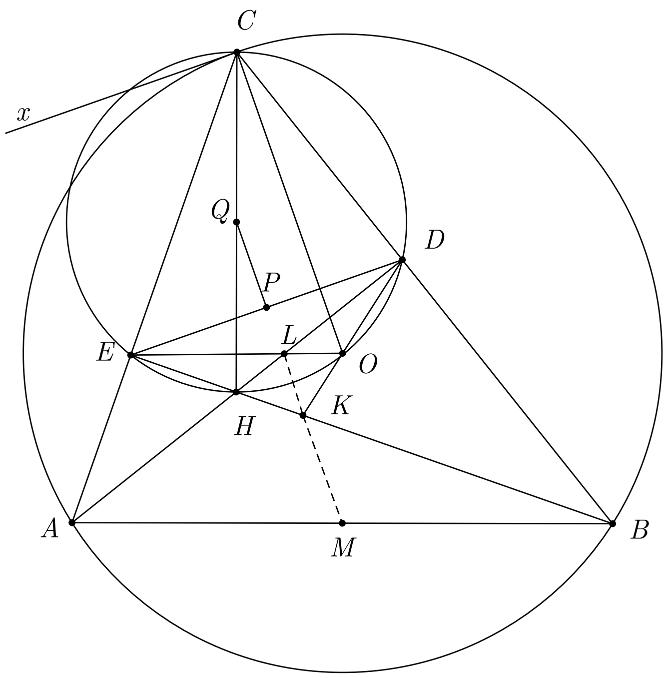
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:...*Số báo danh :*…………..

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM 2020
Môn thi: **Toán**
(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1.a	Cho 2 dãy số (u_n), (v_n) xác định như sau: $u_0=a; v_0=b$ với hằng số thực a,b cho trước thỏa mãn $0<a<b$ và $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$, $v_{n+1}=\sqrt{u_{n+1}.v_n}$ với mọi số tự nhiên n. a) Chứng tỏ hai dãy đã cho đều hội tụ và có giới hạn bằng nhau.	**2,0**
	Ta chứng minh quy nạp rằng $u_n<u_{n+1}<v_n$ và $u_{n+1}<v_{n+1}<v_n$ với mọi n. Do đó, 2 dãy đã cho là đơn điệu và bị chặn bởi $u_0=a; v_0=b$ nên hội tụ.	1,0
	Từ $u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$, cho qua giới hạn ta được $\lim u_{n+1}=\dfrac{\lim u_n+\lim v_n}{2}$ hay $\lim u_n=\lim v_n$ (đpcm).	1,0
1.b	b) Tìm giới hạn đó theo a,b.	**3,0**
	Do $0<a<b$ nên đặt $\dfrac{a}{b}=\cos\alpha$ với $\alpha\in(0;\dfrac{\pi}{2})$. Ta chứng minh rằng $u_n=b\cos\dfrac{\alpha}{2^1}.\cos\dfrac{\alpha}{2^2}...\cos\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2^n}$	1,0
	Và $v_n=b\cos\dfrac{\alpha}{2^1}.\cos\dfrac{\alpha}{2^2}...\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$ với mọi số nguyên dương n.	1,0
	Từ đó rút gọn biểu thức ta được $v_n=\dfrac{b\sin\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{b\sin\alpha}{\alpha}$. Vậy $\lim u_n=\lim v_n=\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\left(\dfrac{a}{b}\right)}$.	1,0
2	Cho số nguyên tố p. Chứng minh rằng, tồn tại vô số số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $2020^{n+2019}\equiv n+2018 (\text{mod } p)$.	**5,0**
	Ta xét 2 trường hợp. *Trường hợp 1*. Nếu p là ước nguyên tố của 2020, khi đó, chỉ cần chọn $n+2018 \vdots p$ là thỏa mãn. Việc này chứng tỏ tìm được vô số n.	1,0
	Trường hợp 2. Nếu p không là ước nguyên tố của 2020, khi đó $(p,2020)=1$. Chọn $\begin{cases} n+2019\equiv 0 (\text{mod } p-1)\\ n+2018\equiv 1(\text{mod } p)\end{cases}$	2,0

	Theo định lí Fecma $a^{p-1}\equiv 1(\bmod p)$ ta được $2020^{p-1}\equiv 1(\bmod p)\Rightarrow 2020^{n+2019}\equiv 1(\bmod p)$ nên $2020^{n+2019}\equiv n+2018(\bmod p)$ (thỏa mãn đề bài).	1,0
	Lại có, theo định lí Trung Hoa về dư thì hệ phương trình đồng dư luôn có nghiệm n vì $\left(p, p-1\right)=1$ nên có vô số tự nhiên n thỏa mãn. (đpcm)	1,0
3	Cho tam giác nhọn ABC không cân. Gọi H, O lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; D, E lần lượt là chân đường cao hạ từ các đỉnh A, B của tam giác ABC. Các đường thẳng OD và BE cắt nhau tại K, các đường thẳng OE và AD cắt nhau tại L. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Chứng minh ba điểm K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi bốn điểm C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.	**5,0**
	 Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác HAB và ba điểm K, L, M ta có: K, L, M thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}.\frac{\overline{LH}}{\overline{LA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=1$ $\Leftrightarrow \frac{\overline{KB}}{\overline{KH}}=-\frac{\overline{LA}}{\overline{LH}}$ (1)	0,5
	Ta lại có $\frac{KB}{KH}=\frac{S_{BOD}}{S_{HOD}}$ (cùng cạnh đáy OD), $\frac{LA}{LH}=\frac{S_{AOE}}{S_{HOE}}$ (cùng cạnh đáy OE) và gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $c=AB$ thì $S_{AOE}=\frac{1}{2}AE.d(O,AE)=\frac{1}{2}c.\cos A.R.\cos B=\frac{1}{2}R.c.\cos A.\cos B$ Tương tự $S_{BOD}=\frac{1}{2}R.c.\cos A.\cos B$ Nên $S_{AOE}=S_{BOD}$.	1,0
	Từ các kết quả trên ta có $(1)\Leftrightarrow S_{HOD}=S_{HOE}$ khi và chỉ khi $OH \parallel DE$ (nếu H và O cùng phía đối với DE) hoặc OH đi qua trung điểm ED (nếu H và O khác phía đối với DE).	0,5
	Trước hết, vẽ tiếp tuyến Cx của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C, dễ dàng chứng minh $\angle CED=\angle ABC=\angle ACx$ suy ra $DE \parallel Cx$ từ đó dẫn đến CO vuông góc với DE (2).	0,5
	Ta chứng minh (1) xảy ra khi chỉ khi $OH \parallel DE$. Thật vậy, nếu xảy ra trường hợp còn lại, tức là OH đi qua trung điểm ED. Khi đó, gọi P, Q lần lượt là trung điểm của ED, HC. Dễ thấy tứ giác $CEHD$ nội tiếp đường tròn tâm Q, suy ra QP vuông góc với ED. Kết hợp (2) suy ra $QP \parallel CO$.	2,0

	Xét tam giác CHO có Q là trung điểm HC và $QP \parallel CO$ suy ra P là trung điểm OH nên $EHDO$ là hình bình hành, suy ra $OD \parallel EH$. Điều này trái với giả thiết OD cắt BE.	
	Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi $OH \parallel DE$, mà do (1) nên điều này khi và chỉ khi $CO \perp OH$ khi và chỉ khi C, D, O, H cùng nằm trên một đường tròn.	0,5
4	Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ hệ số thực, có bậc là số tự nhiên lẻ sao cho $f(x^2-1) = f^2(x) - 1, \forall x \in \mathbb{R}$	**5,0**
	Thay x bằng $-x$ ta có $f^2(-x) - 1 = f\left((-x)^2 - 1\right) = f(x^2-1) = f^2(x) - 1$ Suy ra $f^2(-x) = f^2(x)$ Nên $\begin{cases} f(-x) = f(x) & \forall x \in A \\ f(-x) = -f(x) & \forall x \in B \end{cases}$ trong đó $A \cup B = \mathbb{R}$.	0,5
	Nếu tập A vô hạn hay phương trình $f(-x) - f(x) = 0$ có vô số nghiệm mà bậc của f là hữu hạn nên $f(-x) - f(x) \equiv 0 \Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ (1) Lại có $\deg f$ là lẻ nên trong hai giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(-x)$ có đúng một giới hạn là $+\infty$ và một là $-\infty$, do đó tồn tại x_0 (đủ lớn) sao cho $f(x)$ và $f(-x)$ trái dấu (suy ra không bằng nhau) khi $x > x_0$ điều này mâu thuẫn với (1) nên tập A không thể là vô hạn. Suy ra tập B là vô hạn hay phương trình $f(x) + f(-x) = 0$ có vô số nghiệm mà bậc của f là hữu hạn nên $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.	1,0
	Chọn $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -f(0) \\ f(-1) = f^2(0) - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-1) = -1 \end{cases}$ và $f(1) = 1$.	0,5
	Xét dãy số $a_0 = 1; a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ Dễ thấy $a_n > 1, \forall n \geq 0$ Ta chứng minh $a_{n+1} > a_n, \forall n \geq 0 \quad (1)$. Thật vậy $n = 0 \Rightarrow a_1 = \sqrt{2} > 1 = a_0$ bài toán đúng với $n = 1$ Giả sử (1) đúng đến n, suy ra $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1} + 1} > \sqrt{a_n + 1} = a_{n+1}$. Vậy (1) được chứng minh.	1,5
	Bây giờ ta chứng minh $f(a_n) = a_n$, $n \geq 0$ (2) bằng quy nạp. Với $n = 0 \Rightarrow f(a_0) = f(1) = a_0$ suy ra (2) đúng với $n = 0$ Giả sử $f(a_n) = a_n$ ta chứng minh $f(a_{n+1}) = a_{n+1}$, ta có $f^2(a_{n+1}) = 1 + f(a^2{}_{n+1} - 1) = 1 + f(a_n) = 1 + a_n = a^2{}_{n+1}$ $\Rightarrow f(a_{n+1}) = a_{n+1}$ hoặc $f(a_{n+1}) = -a_{n+1}$	1,0

	Nếu $f\left(a_{n+1}\right)=-a_{n+1}\Rightarrow f^{2}\left(a_{n+1}\right)=1+f\left({a^{2}}_{n+2}-1\right)=1+f\left(a_{n+1}\right)=1-a_{n+1}<0$ (vô lí) do đó $f\left(a_{n+1}\right)=a_{n+1}$.	
	Vậy (2) được chứng minh, do đó phương trình $f\left(x\right)=x$ có vô số nghiệm nên $f\left(x\right)=x$ với mọi $x\in R$. Thử lại ta thấy $f\left(x\right)=x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.	0,5

---------------Hết---------------

UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM 2020
Môn thi: **Toán**
Thời gian làm bài: **180 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
Ngày thi thứ hai: **25/9/2019**

Câu 5 (7,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(xy-1)+f(x)f(y)=2xy-1 \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 6 (7,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC, D là một điểm bất kì trên cạnh BC. Trên cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $ED=EC$, $FD=FB$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BDF, CDE.

a) Gọi H là trực tâm của tam giác JDK. Chứng minh rằng tứ giác $IJHK$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng khi D chuyển động trên BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK luôn đi qua một điểm cố định khác điểm I.

Câu 7 (6,0 điểm)

Cho một đa giác đều $A_1A_2...A_{20}$ có 10 đỉnh của đa giác được tô màu xanh, 10 đỉnh còn lại được tô màu đỏ. Ta nối các đỉnh với nhau.

a) Gọi a là số các đoạn thẳng nối hai đỉnh màu đỏ liên tiếp, b là số các đoạn thẳng nối hai đỉnh màu xanh liên tiếp. Chứng minh $a=b$.

b) Xét tập hợp S gồm đường chéo A_1A_4 và tất cả các đường chéo khác của đa giác mà có cùng độ dài với nó. Chứng minh trong tập hợp đó, số đường chéo có hai đầu là màu đỏ bằng với số đường chéo có hai đầu là màu xanh. Gọi k là số đường chéo có hai đầu là màu xanh trong , tìm tất cả các giá trị có thể có của .

------------ **Hết** ------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

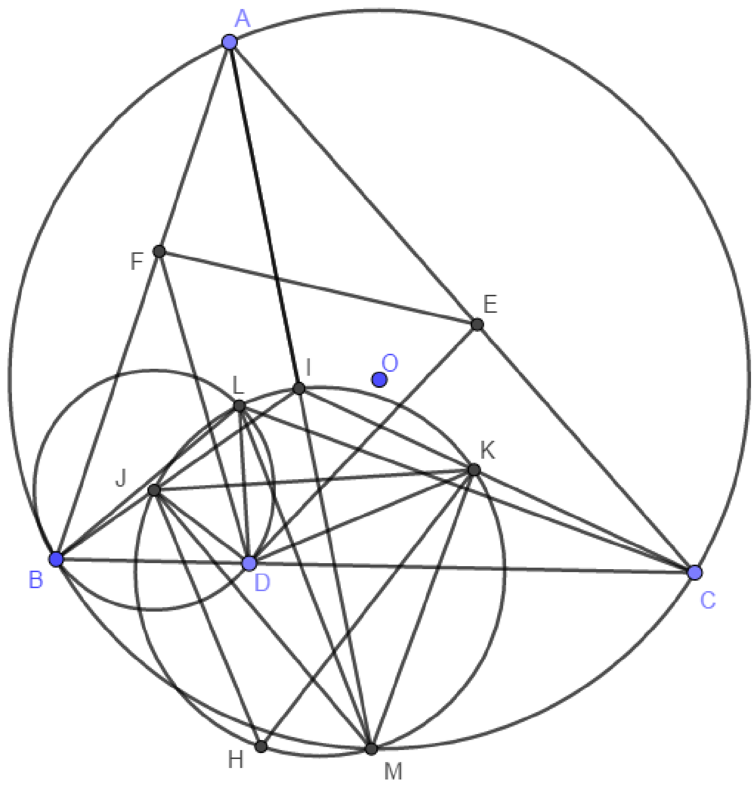
Họ và tên thí sinh:..Số báo danh :…………..

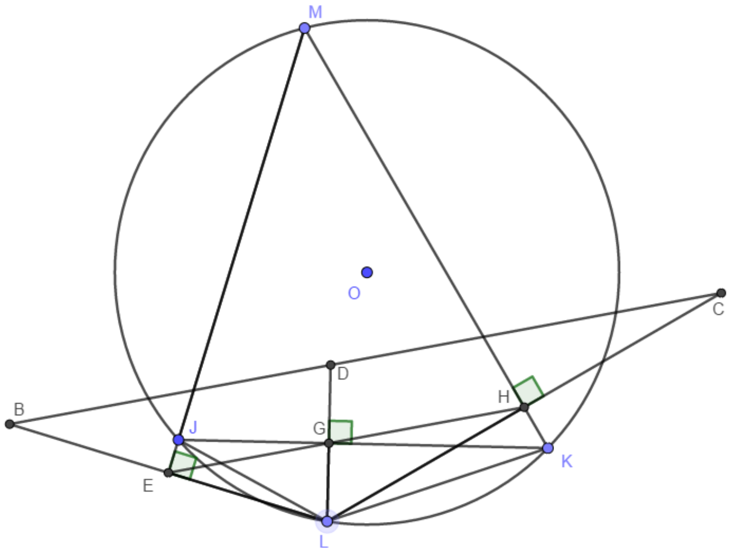
UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

(Đề thi có 04 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI CHỌN ĐỘI TUYỂN
DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA NĂM 2020
Môn thi: **Toán**
Ngày thi thứ hai: **25/9/2019**

Câu	Đáp án	Điểm
5	Tìm tất cả các hàm $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thảo mãn điều kiện: $f(xy-1)+f(x)f(y)=2xy-1$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. (1)	**7,0**
	Thay $x=0$ vào (1), ta có $f(-1)+f(x).f(0)=-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Nếu $f(0)\neq 0$ thì f sẽ là hàm hằng. Thay vào (1) dễ thấy không thỏa mãn. Vì vậy $f(0)=0$. Thay $x=y=1$ vào phương trình (1) ta thu được $\left(f(1)\right)^2=1$. Nghĩa là $f(1)=1$ hoặc $f(1)=-1$.	**1,0**
	Trường hợp 1: $f(1)=1$. Thay x bởi xy và $y=1$ vào phương trình (1) ta thu được $f(xy-1)+f(xy)=2xy-1$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. Kết hợp (1) ta thu được: $f(xy)=f(x)f(y)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ (2)	**1,0**
	Tiếp theo ta thay $y=1$ vào phương trình (1) ta nhận được $f(x-1)+f(x)=2x-1$ hay $f(x-1)=2x-1-f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.(3) Lại thay và x bởi $x+1$ và $y=1$ vào phương trình (1) ta nhận được $f(x+1)+f(x)=2x+1$ hay $f(x+1)=2x+1-f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.(4) Cho y bởi x vào phương trình (1) và sử dụng (2) (3) và (4) ta nhận được $2x^2-1=f(x^2-1)+f^2(x)=f(x-1).f(x+1)+f^2(x)$ $=(2x-1-f(x)).(2x+1-f(x))+f^2(x)=2f^2\left(x\right)-4xf\left(x\right)+4x^2-1$ Suy ra $2\left(f(x)-x\right)^2=0$ dẫn đến $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.	**2,0**
	Trường hợp 2: $f\left(1\right)=-1$. Bằng cách thay tương tự như ở trường hợp 1, ta có: $f\left(xy\right)=-f\left(x\right)f\left(y\right)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. (5) $f\left(x-1\right)=2x-1+f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. (6) $f(x+1)=-2x-1+f(x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. (7) Tiếp theo, thay y bởi x vào phương trình (1) và sử dụng (5) (6) và (7) ta nhận được $2x^2-1=f(x^2-1)+f^2(x)=-f(x-1).f(x+1)+f^2(x)$ $=-(2x-1+f(x)).(-2x-1+f(x))+f^2(x)$ $=2f\left(x\right)+4x^2-1$ Suy ra $f(x)=-x^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.	**2,0**
	Thử lại ta thấy cả hai hàm ở cả hai trường hợp đều thỏa mãn đề bài.	**1,0**

	Vậy có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. và $f(x)=-x^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.	
6	Cho tam giác nhọn ABC, D là một điểm bất kì trên cạnh BC. Trên cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $ED=EC$, $FD=FB$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BDF, CDE. a) Gọi H là trực tâm của tam giác JDK. Chứng minh rằng $IJHK$ nội tiếp. b) Chứng minh rằng khi D chuyển động trên BC, đường tròn ngoại tiếp tam giác IJK luôn đi qua một điểm cố định khác I.	**7,0**
		
6.a	Do các tam giác FBD, EDC lần lượt cân tại F, E nên $JD=JB$, $KD=KC$. Ta có $\angle JDK=180^0-\angle JDB-\angle KDC=180^0-\angle IBC-\angle ICB=\angle BIC=\angle JIK$ Lại có H là trực tâm tam giác JDK nên $\angle JHK=180^0-\angle JDK$, suy ra $\angle JHK+\angle JIK=180^0$ Vậy tứ giác $IJHK$ nội tiếp.	**2,0**
6.b	**Trước hết ta chứng minh bổ đề sau (bài toán Simson đảo)** Cho tam giác MJK. Từ điểm L nằm ngoài tam giác. Gọi B, C, D lần lượt là điểm đối xứng của L qua MJ, MK, JK. Giả sử B, C, D thẳng hàng. Chứng minh rằng $MJLK$ là tứ giác nội tiếp.	

		
	Chứng minh bổ đề: Gọi giao của BL, DL, CL với MJ, JK, KM lần lượt là E, G, H. Do B, C, D thẳng hàng $\Rightarrow$ E, G, H thẳng hàng. Tứ giác $JGLE$ và $GHKL$ nội tiếp $\triangle JLK \sim \triangle ELH$ (g.g) $\Rightarrow \angle JLK = \angle ELH$ mà $\angle ELH + \angle EMH = 180^0$ $\Rightarrow \angle JLK + \angle EMH = 180^0$ $\Rightarrow MJLK$ nội tiếp (đpcm).	**1,0**
	Quay trở lại bài toán: Gọi M là điểm chính giữa cung BC của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, L là điểm đối xứng với D qua JK. Ta có $\angle JIK = \angle JDK = \angle JLK$ suy ra $L \in (IJK)$.	**1,0**
	Mặt khác, $JL = JD = JB$, $KL = KD = KC$ nên $\angle LJB = 2\angle LDB = \angle LKC$, suy ra $\angle BLJ = \angle CLK$.	**1,0**
	Ta thu được $\angle BLC = \angle JLK = \angle BIC = \angle JIK$, suy ra $L \in (BIC)$ hay $ML = MB = MC$. Suy ra JM, KM lần lượt là trung trực của LB, LC .	**1,0**
	Vậy điểm đối xứng với L qua 3 cạnh tam giác JMK là B, C, D. Mà B, C, D thẳng hàng, theo bổ đề trên suy ra $LJMK$ nội tiếp. Vậy (IJK) luôn đi qua điểm M cố định (đpcm).	**1,0**
7	Cho một đa giác đều $A_1A_2...A_{20}$ có 10 đỉnh của đa giác được tô màu xanh, 10 đỉnh còn lại được tô màu đỏ. Ta nối các đỉnh với nhau. a) Gọi a là số các đoạn thẳng nối hai đỉnh đỏ liên tiếp, b là số các đoạn thẳng nối hai đỉnh xanh liên tiếp. Chứng minh $a = b$. b) Xét tập hợp S gồm đường chéo A_1A_4 và tất cả các đường chéo khác của đa giác mà có cùng độ dài với nó. Chứng minh trong tập hợp đó, số đường chéo có hai đầu là màu đỏ bằng với số đường chéo có hai đầu là màu xanh. Gọi k là số đường chéo có hai đầu là màu xanh trong S, tìm tất cả các giá trị có thể có của k.	**6,0**
7.a.	Ta chia dãy các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_{20}$ thành các cụm đỏ và cụm xanh, trong đó: • Cụm đỏ là cụm đỉnh gồm các đỉnh đỏ liên tiếp. • Cụm xanh là cụm đỉnh gồm các đỉnh xanh liên tiếp. Giả sử ta có n cụm đỉnh xanh là : $X_1, X_2, ..., X_n$ $(1 \le n \le 10)$ và $x_1, x_2, ..., x_n$ tương ứng là số đỉnh xanh trong các cụm đó ($x_i \ge 1 \;\; \forall i = \overline{1, n}$). Nếu $n = 1$, tức là chỉ có một cụm xanh hay 10 đỉnh xanh cạnh nhau, do đó 10 đỉnh đỏ cũng phải cạnh nhau, tức là cũng chỉ có một cụm đỏ. Nếu $n \ge 2$ thì mỗi cụm điểm xanh nằm giữa hai cụm đỉnh đỏ và ngược lại mỗi cụm đỉnh đỏ	**1,0**

	lại nằm giữa hai cụm màu xanh nên số cụm đỉnh xanh sẽ bằng số cụm đỉnh đỏ bằng n .	
	Giả sử n cụm đỉnh đỏ là: $D_1, D_2, ..., D_n$ và $d_1, d_2, ..., d_n$ tương ứng là số đỉnh đỏ trong các cụm đó ($d_i \geq 1 \ \forall i = \overline{1,n}$). Do trong một cụm X_i có x_i đỉnh xanh cạnh nhau nên có $x_i - 1$ cặp đỉnh xanh liên tiếp. Nên $a = (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + ... + (x_n - 1) = x_1 + ... + x_n - n = 10 - n$. Tương tự $b = (d_1 - 1) + ... + (d_n - 1) = d_1 + ... + d_n - n = 10 - n$. Vậy $a = b$ (đpcm).	**1,0**
7.b.	Trước hết, ta xét dãy các đỉnh (gồm tất cả 20 đỉnh): $A_1 \to A_4 \to A_7 \to A_{10} \to A_{13} \to A_{16} \to A_{19}$ $\to A_2 \to A_5 \to A_8 \to A_{11} \to A_{14} \to A_{17} \to A_{20}$ (*) $\to A_3 \to A_6 \to A_9 \to A_{12} \to A_{15} \to A_{18} \to A_1$ Các đường chéo nối 2 đỉnh liên tiếp trong dãy trên đều có cùng độ dài với A_1A_4 nên tất cả đều thuộc S . Ngoài ra, dễ thấy rằng tất cả các đường chéo thuộc S cũng tạo thành bởi 2 đỉnh liên tiếp nào đó trong dãy trên.	**2,0**
	Tương tự câu a) ta chia dãy các đỉnh (*) thành các cụm đỏ và cụm xanh, trong đó: • Cụm đỏ là cụm đỉnh gồm các đỉnh đỏ liên tiếp trong dãy đỉnh (*) . • Cụm xanh là cụm đỉnh gồm các đỉnh xanh liên tiếp trong dãy đỉnh (*). Và ta cũng thu được số cụm đỉnh xanh sẽ bằng số cụm đỉnh đỏ, giả sử bằng m $(1 \leq m \leq 10)$	**1,0**
	Ta có số đường chéo có hai đầu màu đỏ trong tập S cũng chính là số đoạn thẳng nối hai đỉnh đỏ liên tiếp trong dãy (*) và số đường chéo có hai đầu màu xanh trong tập S cũng chính là số đoạn thẳng nối hai đỉnh xanh liên tiếp trong dãy (*) . Nên theo câu a) số đường chéo có hai đầu màu đỏ trong tập S sẽ bằng số đường chéo có hai đầu màu xanh trong tập S và bằng $k = 10 - m$, do $1 \leq m \leq 10$ nên $k \in \{0, 1, ..., 9\}$.	**1,0**