SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO LẠNG SƠN **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12 NĂM HỌC 2021 - 2022 **Môn thi: TOÁN lớp 12 CHUYÊN** Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*) (*Đề thi gồm 01 trang, 05 câu*)

Câu 1 (4 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1 \\ 3\sqrt{x+2y-2}+x\sqrt{x-2y+6}=10 \end{cases}$.

Câu 2 (4 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=a>0 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{2+u_n}, \forall n\ge 1, n\in\mathbb{N} \end{cases}$.

a) Chứng minh rằng $|u_n-1|\le \dfrac{1}{2^{n-1}}|a-1|$ với mọi $n\ge 1, n\in\mathbb{N}$ và dãy số (u_n) có giới hạn.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $u_{2k+1}>u_{2k-1}$ và $u_{2k+2}<u_{2k}$ với mọi $k\ge 1, k\in\mathbb{N}$.

Câu 3 (4 điểm). Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=y+f^2(x) \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R} \ (1).$$

a) Giả sử rằng $f(0)=0$, chứng minh rằng $f(x)$ là song ánh.

b) Tìm $f(0)$ và tất cả các hàm số thỏa mãn (1).

Câu 4 (6 điểm). Cho tam giác ABC có ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi S, T lần lượt là trung điểm của AB, AC. Đường thẳng ST cắt BE, CF lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MTH, NSH vuông góc với AH.

b) Gọi P, P' lần lượt là ảnh đối xứng của B, E qua CH. Gọi Q, Q' lần lượt là ảnh đối xứng của C, F qua BH. Chứng minh rằng P, Q, P', Q' đồng viên.

c) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ nằm trên đường thẳng *Euler* của tam giác ABC.

Câu 5 (2 điểm).

a) Cho số nguyên dương n. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn tính chất: khi lấy ra k phần tử phân biệt bất kì từ tập hợp $\{1;2;3;...;2n\}$ (gồm $2n$ số nguyên dương liên tiếp) thì luôn có 2 phần tử được lấy ra mà số này chia hết cho số kia.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho ước nguyên tố lớn nhất của n^4+1 lớn hơn $2n$.

---------------------**Hết**---------------------

Họ và tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Chữ kí giám thị số 1:...Chữ kí giám thị số 2:.............................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **LẠNG SƠN**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH** **LỚP 12 NĂM HỌC 2021 - 2022**

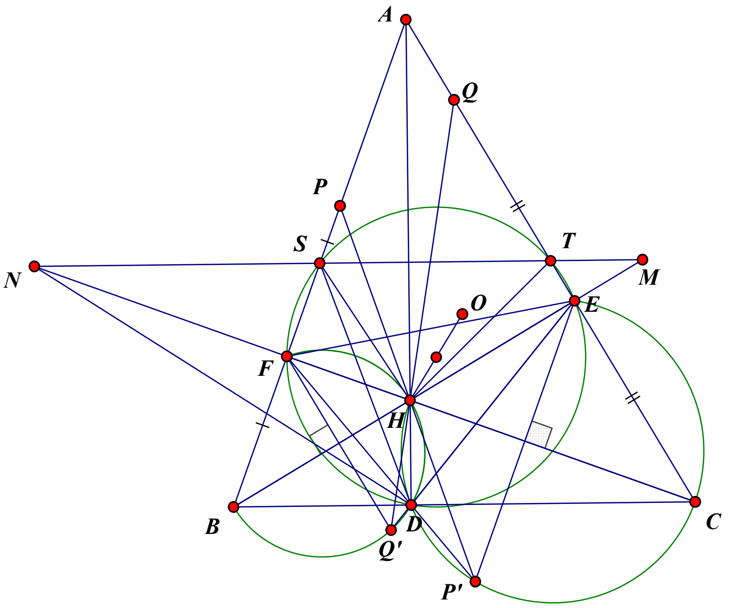
HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN LỚP 12 CHUYÊN

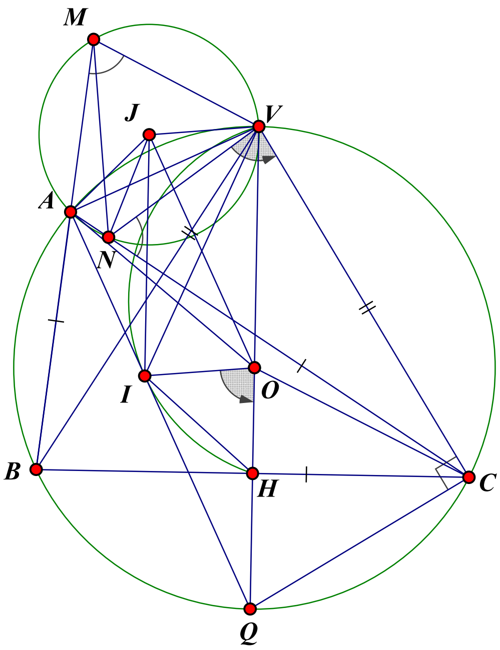
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

Chú ý: Những cách giải khác HDC mà đúng thì cho điểm theo thang điểm đã định.

Câu	Nội dung	Điểm
1 **(4 đ)**	$\begin{cases}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=1 & (1)\\ 3\sqrt{x+2y-2}+x\sqrt{x-2y+6}=10 & (2)\end{cases}$ Điều kiện $\begin{cases}x+2y-2\ge 0\\ x-2y+6\ge 0\end{cases}$. Nhận xét từ (1) có $\sqrt{y^2+1}-y>0\ \forall y\in\mathbb{R}$. Vậy (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x=\dfrac{1}{\sqrt{y^2+1}-y}=\sqrt{y^2+1}+y$	1,0
	Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+1}+t$ Có $f'(t)=\dfrac{t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}>0$, $\forall\, t\in R\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến, liên tục trên $\mathbb{R}$. Vậy phương trình $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$	1,0
	Khi đó $(2)\Leftrightarrow 3\sqrt{3x-2}+x\sqrt{6-x}=10\ \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{3x-2}-2\right)+(x-2)\sqrt{6-x}+2\left(\sqrt{6-x}-2\right)=0$ $\Leftrightarrow \dfrac{3(3x-6)}{\sqrt{3x-2}+2}+(x-2)\sqrt{6-x}+\dfrac{2(2-x)}{\sqrt{6-x}+2}=0$ $\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{9}{\sqrt{3x-2}+2}+\sqrt{6-x}-\dfrac{2}{\sqrt{6-x}+2}\right)=0\quad (3)$.	1,0
	Điều kiện: $x\le 6\Rightarrow \sqrt{3x-2}+2\le 6\Rightarrow \dfrac{9}{\sqrt{3x-2}+2}\ge\dfrac{3}{2}$. Mặt khác $\dfrac{2}{\sqrt{6-x}+2}\le\dfrac{2}{2}=1$. Do đó $\dfrac{9}{\sqrt{3x-2}+2}+\sqrt{6-x}\ge\dfrac{3}{2}>1\ge\dfrac{2}{\sqrt{6-x}+2}$ $\Rightarrow \dfrac{9}{\sqrt{3x-2}+2}+\sqrt{6-x}-\dfrac{2}{\sqrt{6-x}+2}>0,\ \forall\, x\in\left[\dfrac{3}{2};6\right]$. Từ đó: $(3)\Leftrightarrow x=2=y$ (TMĐK). Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(2;2)$.	1,0
2 **(4 đ)**	Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=a>0\\ u_{n+1}=\dfrac{3}{2+u_n},\forall n\ge 1,n\in\mathbb{N}\end{cases}$. **a)** Chứng minh rằng $\lvert u_n-1\rvert\le\dfrac{1}{2^{n-1}}\lvert a-1\rvert$ với mọi $n\ge 1,n\in\mathbb{N}$ và dãy số (u_n) có giới hạn. **b)** Tìm tất cả các giá trị của a để $u_{2k+1}>u_{2k-1}$ và $u_{2k+2}<u_{2k}$ với mọi $k\ge 1,k\in\mathbb{N}$.	

	a/ Dễ thấy rằng $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N},n\ge 1$. Ta có $u_{n+1}-1=\frac{3}{2+u_n}-1$, suy ra $\left|u_{n+1}-1\right|=\frac{\left|u_n-1\right|}{u_n+2}\le\frac{1}{2}\left|u_n-1\right|$ (vì $u_n>0$)	1,0
	Do đó $\left|u_{n+1}-1\right|=\frac{\left|u_n-1\right|}{u_n+2}\le\frac{1}{2}\left|u_n-1\right|\le\frac{1}{2^2}\left|u_{n-1}-1\right|\le...\le\frac{1}{2^n}\left|u_1-1\right|=\frac{1}{2^n}\left|a-1\right|$ suy ra $\left|u_n-1\right|\le\frac{1}{2^{n-1}}\left|a-1\right|$ (*). Lưu ý với $a=1\Rightarrow u_n=1,\forall n\ge 1$ thì bất đẳng thức vẫn đúng trở thành đẳng thức $\left|u_n-1\right|=0$.	1,0
	Ta thấy rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\left|a-1\right|=0$, theo (*) và nguyên lí kẹp thì suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\left|u_n-1\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$.	1,0
	b/ Dễ thấy $u_2=\frac{3}{2+a};u_3=\frac{3}{2+\frac{3}{2+a}}=\frac{6+3a}{7+2a}\Rightarrow u_3-u_1=\frac{6+3a}{7+2a}-a=\frac{-2a^2-4a+6}{7+2a}=\frac{-2(a-1)(a+3)}{(7+2a)}$ Do đó $u_3>u_1\Leftrightarrow -2(a-1)(a+3)>0\Leftrightarrow a<1$.	0,5
	Xét hàm số $f(x)=\frac{3}{2+x}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{(2+x)^2}<0,\forall x>0$ nên hàm số nghịch biến. Vì $u_{n+1}=f(u_n)$ nên suy ra $u_4=f(u_3)<f(u_1)=u_2$. Giả sử rằng $u_{2n+1}>u_{2n-1};u_{2n}<u_{2n-2}$ thì suy ra $\begin{cases}u_{2n+2}=f(u_{2n+1})<f(u_{2n-1})=u_{2n}\\u_{2n+3}=f(u_{2n+2})>f(u_{2n})=u_{2n+1}\end{cases}$, theo nguyên lí quy nạp thì ta có $u_{2k+1}>u_{2k-1};u_{2k+2}<u_{2k}$ với mọi $k\in\mathbb{N},k\ge 1$. Vậy $a\in(0;1)$ là điều kiện cần tìm.	0,5
3 **(4 đ)**	Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(xf(x)+f(y))=y+f^2(x)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ (1). **a)** Giả sử rằng $f(0)=0$, chứng minh rằng $f(x)$ là song ánh. **b)** Tìm tất cả các hàm số thỏa mãn (1).	
	a/ Cho $x=0$ vào (1) ta được $f(f(y))=y+f^2(0)=y$ (*), rõ ràng là y chạy khắp $\mathbb{R}$ nên f là toàn ánh.	1,0
	Giả sử có $f(x)=f(y)\Rightarrow f(f(x))=f(f(y))$ kết hợp với (*) thì suy ra $x=y$, vậy f là đơn ánh. Do đó, f là song ánh.	1,0
	b/ Cho $x=0$ vào (1) thì ta được $f(f(y))=y+f^2(0)$ (**). Suy ra f là toàn ánh nên tồn tại t sao cho $f(t)=0$. Thay $x=0;y=t$ vào (1) thì ta được $f(0)=t+f^2(0)$. Thay $x=y=t$ vào (1) suy ra $f(f(t))=t+f^2(t)=t$. Do đó $t=f(f(t))=f(0)=t+f^2(0)$ suy ra $f(0)=0$.	1,0
	Vậy thì (**) suy ra $f(f(y))=y$. Thay x bởi $f(x)$ vào (1) thì ta được $f(f(x)f(f(x))+f(y))=y+\left[f(f(x))\right]^2\Rightarrow f(xf(x)+f(y))=x^2+y$, so sánh với (1) suy ra $f^2(x)=x^2$. Từ đây dẫn đến 2 trường hợp $f(1)=1$ hoặc $f(1)=-1$.	0,5

	TH1: Nếu $f(1)=1$, thay $x=1$ vào (1) ta được $f(1+f(y))=1+y$, do đó $(1+y)^2=f^2(1+f(y))=(1+f(y))^2=1+2f(y)+f^2(y)=1+2f(y)+y^2$, so sánh đầu và cuối của dãy đẳng thức thì $f(y)=y$. TH2: Nếu $f(1)=-1$, thay $x=-1$ vào (1) thì ta được $f(-1+f(y))=1+y$, do đó $(1+y)^2=f^2(-1+f(y))=[-1+f(y)]^2=1-2f(y)+f^2(y)=1-2f(y)+y^2$, so sánh đầu và cuối của dãy đẳng thức thì $f(y)=-y$. Do đó, $f(x)\equiv x$ hoặc $f(x)\equiv -x$ là tất cả các hàm số thỏa mãn bài toán.	0,5
4 **(6 đ)**	Cho tam giác ABC có ba đường cao AD,BE,CF cắt nhau tại H. Gọi S,T lần lượt là trung điểm của AB,AC. Đường thẳng ST cắt BE,CF lần lượt tại M,N. **a)** Chứng minh rằng đường thẳng nối tâm hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác MTH,NSH vuông góc với AH. **b)** Gọi P,P' lần lượt là ảnh đối xứng của B,E qua CH. Gọi Q,Q' lần lượt là ảnh đối xứng của C,F qua BH. Chứng minh rằng P,Q,P',Q' đồng viên. **c)** Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ nằm trên đường thẳng *Euler* của tam giác ABC.	
	 **a**/ Dễ thấy rằng tứ giác $BFHD$ nội tiếp nên $\widehat{FHD}=180^0-B$. Vì $NS \parallel BC$ nên $\widehat{NSD}=180^0-\widehat{BDS}$.	1,0
	Dễ thấy tam giác ABD vuông tại D nên $SB=SD=SA\Rightarrow \widehat{BDS}=B$. Do đó, $\widehat{NHD}=\widehat{NSD}=180^0-B$ nên tứ giác $NSHD$ nội tiếp.	1,0
	Tương tự thì $MTHD$ nội tiếp. Vậy thì AH là trục đẳng phương của $(MTHD),(NSHD)$ tức là đường nối hai tâm sẽ vuông góc với AH.	1,0
	b/ Theo tính chất đối xứng trục CH, vì B,H,E thẳng hàng nên ảnh đối xứng của chúng là P',H,P thẳng hàng. Tương tự cho bộ Q',H,Q thẳng hàng	1,0
	Theo tính chất phép đối xứng trục $HP'=HE;HP=HB;HQ'=HF;HQ=HC$. Chú ý rằng $BFEC$ nội tiếp, ta có $HP.HP'=HB.HE=HC.HF=HQ.HQ'$ suy ra P,Q,P',Q' đồng viên.	1,0

	c/ Dễ thấy rằng phép nghịch đảo tâm H là $I\left(H;HB.HE\right):P\mapsto P',Q\mapsto Q'$ nên đường tròn $\left(HPQ\right)$ biến thành $P'Q'$. Để chứng minh tâm của $\left(HPQ\right)$ nằm trên OH ta chỉ cần chỉ ra rằng $P'Q'\perp OH$ (*) là xong. Chú ý rằng $EF=FP'=EQ'$; F,D,P' thẳng hàng và E,D,Q' thẳng hàng, H là tâm nội tiếp tam giác DEF. Nên ta phát biểu lại (*) ở dạng bài toán sau đây: ***Bổ đề***: Cho tam giác ABC nội tiếp $\left(O\right)$ và ngoại tiếp $\left(I\right)$. Lấy M,N trên các tia CA,BA sao cho $CN=BM=BC$. Khi đó, MN vuông góc với OI.  	0,5
	Chứng minh bổ đề: Gọi V là trung điểm của cung BC chứa A. Dễ thấy $\Delta BVM=\Delta CVN$ suy ra $\widehat{VNC}=\widehat{BMV}$ nên tứ giác $AMVN$ nội tiếp $\left(I\right)$. Gọi Q là trung điểm cung BC không chứa A. Dễ thấy $QI=QC$, gọi H là trung điểm của BC. Ta có $\widehat{IQO}=\widehat{NCV}$. Chú ý hệ thức lượng tam giác và O,H là trung điểm của QV,CB nên $\frac{QI}{QO}=\frac{QC}{QO}=\frac{QC.CV}{QO.CV}=\frac{CH.QV}{QO.CV}=2.\frac{CH}{CV}=\frac{CB}{CV}=\frac{CN}{CV}$. Do đó $\Delta IQO\sim\Delta NCV\Rightarrow\widehat{IOQ}=\widehat{NVC}$ (1).Dễ thấy $\widehat{VAC}=\widehat{VBC}=\widehat{VCB}=\widehat{MAV}$ nên suy ra $VM=VN$ và $\Delta VMN\sim\Delta VBC$. Vậy phép vị tự quay tâm V biến $M,N,\left(J\right)\mapsto B,C,\left(O\right)$ tức là $\widehat{JVO}=\widehat{NVC}$ (2). Kết hợp (1) và (2) suy ra $\widehat{JVO}=\widehat{IOQ}$ nên $VJ\parallel IO$. Hơn nữa, $\frac{OQ}{OI}=\frac{VC}{VN}=\frac{VO}{VJ}\Rightarrow OI=VJ$, do đó $VJIO$ là hình bình hành nên $VJ\parallel OI$. Tam giác VMN cân nên $MN\perp VJ$. Vậy thì $MN\perp OI$. Áp dụng bổ đề cho tam giác DEF với H là tâm nội tiếp, tâm ngoại tiếp là tâm Euler tức là trung điểm của OH. Suy ra $P'Q'\perp OH$.	0,5
5 **(2 đ)**	**a)** Cho số nguyên dương n. Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất thỏa mãn tính chất: khi lấy ra k phần tử phân biệt bất kì từ tập hợp $\left\{1;2;3;...;2n\right\}$ (gồm $2n$ số nguyên dương liên tiếp) thì luôn có 2 phần tử được lấy ra mà số này chia hết cho số kia. **b)** Chứng minh rằng tồn tại vô hạn số nguyên dương n sao cho ước nguyên tố lớn nhất của n^4+1 lớn hơn $2n$.	

	a/ Ta chỉ ra với $k = n+1$ thì luôn thỏa mãn. Thật vậy, viết các số từ 1 đến $2n$ ở dạng $2^i.j$ với j lẻ với j từ 1 đến 2n, vậy chỉ tồn tại đúng n số lẻ j. Theo nguyên lí Dirichlet thì $n+1$ số được lấy ra bất kì thì luôn có 2 số có cùng j tức là 2 số này có dạng $2^a j; 2^b j$, nếu $a \ge b$ thì $2^a j \vdots 2^b j$.	0,5
	Số $k < n+1$ sẽ không thỏa mãn, cụ thể trong tập $\{1; 2; ...; 2n\}$ ta lấy n phần tử là $\{n+1; n+2; ...; 2n\}$ thì không có số nào chia hết cho số còn lại, thật vậy xét hai số bất kì $n+a; n+b$ với $1 \le a < b \le n$, giả sử $n+b = k(n+a)$ với $k \ge 2$ thì suy ra $k(n+a) \le 2n \Leftrightarrow (k-2)n + ka \le 0 \Rightarrow k < 2$ (vô lý).	0,5
	b/ Gọi Ω là tập các ước nguyên tố của n^4+1 với tất cả các số nguyên dương n. Nếu tập Ω là hữu hạn và chỉ gồm các ước nguyên tố $p_1, p_2, .., p_k$ thì ta xét số $A = (p_1.p_2...p_k)^4 + 1$, rõ ràng ước nguyên tố p của số A này không thể trùng với các $p_1, p_2, .., p_k$ vì A không chia hết cho $p_1, p_2, .., p_k$. Do đó tập Ω là vô hạn.	0,5
	Với ước nguyên tố lẻ $p \in \Omega$ ta lấy số m tương ứng để $m^4 + 1 \vdots p$, gọi r là số dư khi chia m cho p, rõ ràng là $0 < r < p$. Vì $m^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow r^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (1), do đó $(p-r)^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (2) Lấy n là số bé nhất trong 2 số r và $p-r$, chú ý rằng $r \ne p-r$ vì p lẻ, thì suy ra $n < \dfrac{r+p-r}{2} = \dfrac{p}{2}$ hay là $p > 2n$, hơn nữa theo (1) và (2) thì ta có $n^4 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Vì tập Ω là vô hạn nên suy ra tồn tại vô hạn n.	0,5

--------------------Hết--------------------