

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
ĐỒNG NAI NĂM HỌC 2021 – 2022

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: TOÁN CHUYÊN

Thời gian làm bài: 180 phút

Ngày thi: 18 tháng 02 năm 2022

(Đề thi gồm một trang, có năm bài)

Bài 1. (4 điểm)

Cho đa thức hệ số thực $f(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ có 4 nghiệm dương phân biệt nhỏ hơn 8. Phương trình $f(x^5 - 5x + 4) = 0$ có bao nhiêu nghiệm thực? Tại sao?

Bài 2. (4 điểm)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 + x = \sqrt[3]{1 - 3xy^2} + 1 \\ y + x\sqrt{3} = \sqrt[3]{2 - 3x^2y} + \sqrt{\frac{2}{y} - y^2} \end{cases}$$
 với $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 3. (4 điểm)

Dãy số dương (u_n) thỏa mãn $u_0 = 2; u_1 = 4; u_{n+2} = 2\sqrt{4u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}} + u_n, n = 0; 1; 2; \dots$

1) Chứng minh rằng $u_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ với $n = 0; 1; 2; 3; \dots$

2) Đặt $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$, chứng minh rằng dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn là

$$L \text{ và } L \leq \frac{6\sqrt{3} - 7}{4}.$$

Bài 4. (4 điểm)

Tam giác ABC nhọn không cân có M là trung điểm BC và P là điểm di chuyển trên đoạn thẳng AM . Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt đường thẳng AC ở E ; đường tròn ngoại tiếp tam giác APC cắt đường thẳng AB ở F . Lấy T khác A trên AM sao cho A, E, F, T đồng viên

1) Chứng minh tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF thuộc một đường thẳng cố định khi P di động trên AM

2) Lấy K đối xứng A qua IM , giả sử KT cắt AB ở X , KE cắt AM ở Y và EF cắt BC cắt ở G . Chứng minh XY qua G .

Bài 5. (4 điểm)

Cho số nguyên dương n và một dãy tăng các số nguyên dương $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sao cho với mọi $i \neq j, a_i$ chia hết cho $a_j - a_i$. Chứng minh rằng $\left(\frac{a_i}{i}\right)_{i=1,2,\dots,n}$ là một dãy không tăng.

-----HẾT-----

Họ & tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay!