SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH QUẢNG NAM	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT NĂM HỌC 2023-2024 ĐỢT 1
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN** **Thời gian: 180 phút** (không kể thời gian giao đề) **Ngày thi: 29/9/2023**

Câu 1 (3,0 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y+1}+x^2-y^2+x-3y-2=0 \\ 27x^2y+27x^2-54xy-76x-20y=22+\sqrt[3]{80x+y-7} \end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R}).$$

Câu 2 (2,0 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1>0 \\ u_{n+1}=\dfrac{1+u_n^2}{2u_n^2}, \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$.

Chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$. Đường tròn (O) lần lượt tiếp xúc với ba cạnh AB,BC,CA tại ba điểm M,N,K. Gọi S,R lần lượt là giao điểm của đường phân giác ngoài góc A của tam giác ABC với hai đường thẳng KN,MN. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng MS và KR, đường thẳng AN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là J.

a) Chứng minh I thuộc (O) và $\dfrac{\sin\widehat{MKN}}{\sin\widehat{KMN}}=\dfrac{KI}{KJ}$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là D, OD cắt MK tại E. Gọi (T) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với BC tại N. Chứng minh (T) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EN là đường phân giác của góc BEC.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3.

a) Xét đa thức $f(x)=(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)=x^{p-1}+a_{p-2}x^{p-2}+\dots+a_1x+(p-1)!$.
Chứng minh $a_i\,\vdots\,p$ với mọi $i=1,2,\dots,p-2$.

b) Chứng minh $\left(\dfrac{(p-1)!}{1}\right)^p+\left(\dfrac{(p-1)!}{2}\right)^p+\dots+\left(\dfrac{(p-1)!}{p-1}\right)^p$ chia hết cho p^3.

Câu 5 (3,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 6 (2,0 điểm). Tô màu tất cả các đỉnh của đa giác đều (T) có 12 đỉnh bằng hai màu khác nhau, mỗi đỉnh tô một màu.

a) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho không có tam giác đều nào mà tất cả các đỉnh của nó cùng màu (các đỉnh của nó là đỉnh của (T))?

b) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho có ít nhất một đa giác đều mà tất cả các đỉnh của nó cùng màu (các đỉnh của nó là đỉnh của (T))?

Câu 7 (3,0 điểm). Cho ba số thực x,y,z thuộc khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn $(1-x)(1-y)(1-z)=xyz$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}+x+y+z$.

—HẾT—

**Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay; cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

**Họ và tên thí sinh:* .... *Số báo danh:* ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2023 – 2024 ĐỢT 1

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN
Môn: TOÁN
(Hướng dẫn chấm này gồm có 10 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (3,0đ)	*Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y+1}+x^2-y^2+x-3y-2=0 \\ 27x^2y+27x^2-54xy-76x-20y=22+\sqrt[3]{80x+y-7} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.	**3,0**
	- Điều kiện: $x \geq 0,\ y \geq -1$. - Nhận xét: $(x;y)=(0;-1)$ là nghiệm của hệ. - Xét $(x;y) \neq (0;-1)$: Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với phương trình $(\sqrt{x}-\sqrt{y+1})+(x^2-y^2)+(2x-2y)-x-y-2=0$	
	$\Leftrightarrow \dfrac{x-y-1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}+(x+y+2)(x-y-1)=0$	
	$\Leftrightarrow (x-y-1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}+x+y+2\right)=0$ $\Leftrightarrow y=x-1$ (vì $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}}+x+y+2>0$)	
	Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được: $27x^3-54x^2-42x=2+\sqrt[3]{81x-8}$	
	$\Leftrightarrow (3x-2)^3+(3x-2)=\left(\sqrt[3]{81x-8}\right)^3+\sqrt[3]{81x-8}$ (**)	
	Hàm số $f(t)=t^3+t$ có $f'(t)=3t^2+1>0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó, pt (**) $\Leftrightarrow 3x-2=\sqrt[3]{81x-8} \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}$ hoặc $x=\dfrac{3-2\sqrt{6}}{3}$ (loại)	
	Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm: $(0\,;-1)$, $\left(\dfrac{3+2\sqrt{6}}{3}\,;\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.	

Câu 2 (2,0đ)	*Cho dãy số* (u_n) *được xác định như sau:* $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. *Chứng minh dãy số* (u_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*	**2,0**
	- Nhận xét: $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{u_n^2}}$	
	Đặt $x_n = \dfrac{1}{u_n}$. Khi đó ta có: $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_{n+1} = \dfrac{2}{1+x_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ - Nhận xét: $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$	
	Xét $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ $(x > 0)$ và $g(x) = f\left(f(x)\right)$ $f'(x) = \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} < 0$ $\forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$ và $g(x)$ đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$.	
	Do $g(x)$ đồng biến nên $\left(x_{2n}\right)$ là dãy số đơn điệu và $0 < x_{2n} < 2$. Suy ra $\left(x_{2n}\right)$ có giới hạn. Giả sử $\lim x_{2n} = \alpha$, khi đó $0 \le \alpha \le 2$ (α là nghiệm của phương trình $g(x) = x$)	
	- Tương tự, dãy số $\left(x_{2n+1}\right)$ cũng có giới hạn, gọi giới hạn đó là β $(0 \le \beta \le 2)$ Từ $x_{n+1} = \dfrac{2}{1+x_n^2}$, suy ra $\begin{cases} \alpha = \dfrac{2}{1+\beta^2} \\ \beta = \dfrac{2}{1+\alpha^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha(1+\beta^2) \\ 2 = \beta(1+\alpha^2) \end{cases} \Rightarrow (\alpha-\beta)(\alpha\beta-1) = 0$ (*)	
	* Khi $\alpha\beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta = 2$. Khi đó α, β là hai nghiệm của phương trình: $X^2 - 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 1$.	
	* Khi $\alpha = \beta$, từ hệ trên ta có: $\alpha^3 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$.	
	Do đó $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = 1$. Suy ra dãy số $\left(x_n\right)$ có giới hạn là 1. Mà $x_n = \dfrac{1}{u_n}$ nên dãy số $\left(u_n\right)$ có giới hạn là 1.	

*** Cách khác:** Ta có $u_n > 0, \forall n$. Đặt $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2u_n^2}, \forall n \in \mathbb{N}^* (1)$

Từ (1) suy ra $u_{n+1} = \dfrac{1}{2u_n^2} + \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{2}, \forall n$. Do đó $u_n > \dfrac{1}{2}, \forall n \ge 2$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{1+x^2}{2x^2}, x \in \left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, có $f'\left(x\right) = \dfrac{-1}{x^3} < 0, \forall x > \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $f\left(x\right) < f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}, \forall x > \dfrac{1}{2}$.

Dãy số $\left(u_n\right)$ có dạng $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$. Suy ra $\frac{1}{2}<u_n<\frac{5}{2}, \forall n\geq 3$, tức là dãy $\left(u_n\right)$ bị chặn.

Vì $f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ nên $f\left(f\left(x\right)\right)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. Do đó hai dãy $\left(u_{2n}\right)$ và $\left(u_{2n+1}\right)$ có tính đơn điệu ngược nhau.

Kết hợp với dãy $\left(u_n\right)$ bị chặn suy ra hai dãy $\left(u_{2n}\right)$ và $\left(u_{2n+1}\right)$ có giới hạn.

Đặt $\lim u_{2n}=a\in\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$, $\lim u_{2n+1}=b\in\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right]$. Qua giới hạn từ (1), ta được:

$$\begin{cases} a=\dfrac{1+b^2}{2b^2} \\ b=\dfrac{1+a^2}{2a^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab^2=1+b^2 (2) \\ 2a^2b=1+a^2 \end{cases} \left(I\right)$$

Suy ra $2a^2b-2ab^2=a^2-b^2 \Leftrightarrow \left(a-b\right)\left(2ab-\left(a+b\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b(3) \\ 2ab=a+b(4) \end{array}\right.$

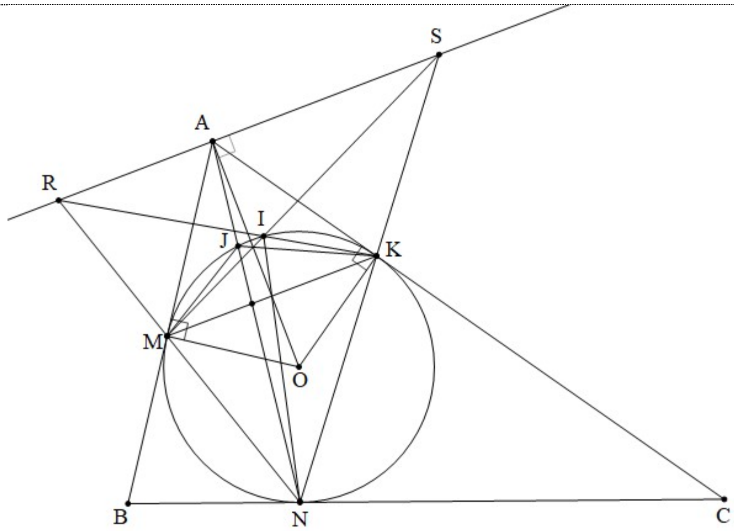
Thay (3) vào (2), ta được $2a^3=a^2+1 \Leftrightarrow a=1$, suy ra $a=b=1$.

Thay (4) vào (2), ta được $\left(a+b\right)b=1+b^2 \Leftrightarrow ab=1 \Rightarrow a+b=2$.

Do đó a,b là nghiệm phương trình $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$. Suy ra $a=b=1$.

Như vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $a=b=1$.

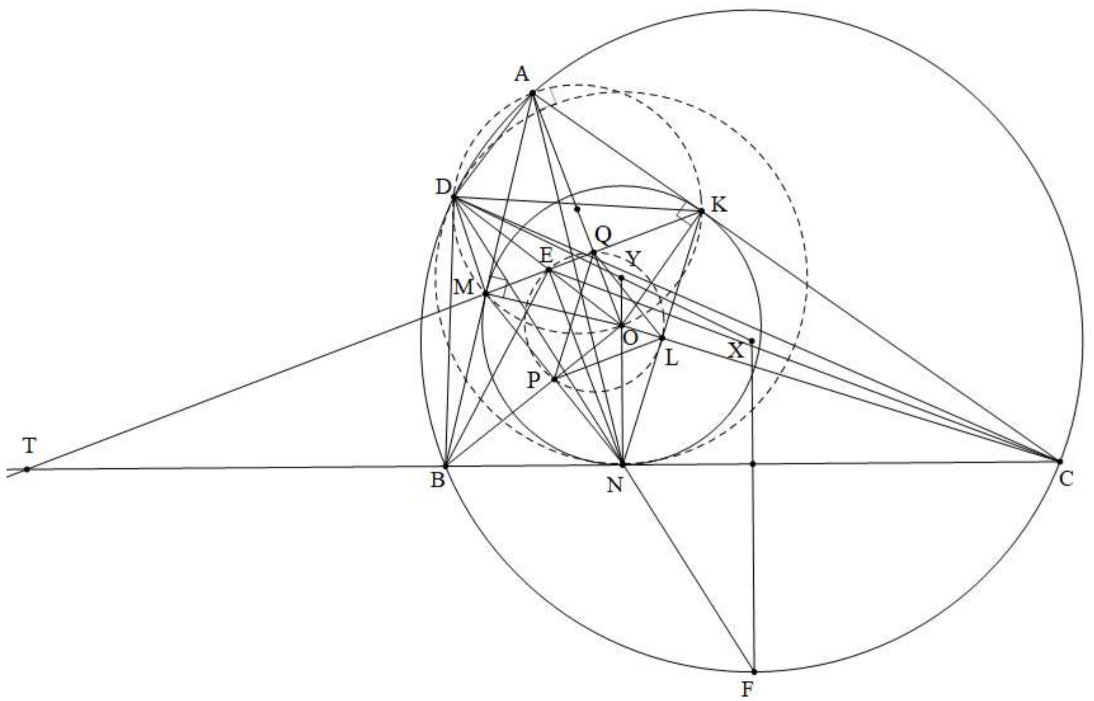
Suy ra $\lim u_{2n}=\lim u_{2n+1}=1$, do đó $\lim u_n=1$.

Câu 3 (5,0đ)	*Cho tam giác nhọn* ABC $(AB < AC)$. *Đường tròn* (O) *lần lượt tiếp xúc với ba cạnh* AB, BC, CA *tại ba điểm* M, N, K. *Gọi* S, R *lần lượt là giao điểm của đường phân giác ngoài góc* A *của tam giác* ABC *với hai đường thẳng* KN, MN. *Gọi* I *là giao điểm của hai đường thẳng* MS *và* KR, *đường thẳng* AN *cắt đường tròn* (O) *tại điểm thứ hai là* J.	**5,0**
3a (1,5đ)	*a) Chứng minh* I *thuộc* (O) *và* $\dfrac{\sin\widehat{MKN}}{\sin\widehat{KMN}} = \dfrac{KI}{KJ}$.	**1,5**
	 *(Học sinh không vẽ hình – không chấm)*	
	Ta có: $RS // KM \Rightarrow \widehat{ARN} = \widehat{KMN} = \widehat{NKC}$ Do đó tứ giác $AKNR$ nội tiếp đường tròn.	
	Tương tự, tứ giác $AMNS$ nội tiếp đường tròn. $\Rightarrow \widehat{RKN} + \widehat{SMN} = \widehat{RAN} + \widehat{SAN} = 180^0$. Do đó tứ giác $MNKI$ nội tiếp đường tròn hay $I \in (O)$	
	Ta có: $\widehat{IMK} = \widehat{ISA} = \widehat{ANM} \Rightarrow KI = MJ$	
	Tứ giác $MNKJ$ nội tiếp (O) có giao điểm hai tiếp tuyến tại M, K nằm trên đường thẳng NJ nên $MNKJ$ là tứ giác điều hòa. Do đó $\dfrac{MN}{KN} = \dfrac{MJ}{KJ}$	
	$\Leftrightarrow \dfrac{MN}{KN} = \dfrac{KI}{KJ} \Leftrightarrow \dfrac{\sin\widehat{MKN}}{\sin\widehat{KMN}} = \dfrac{KI}{KJ}$	

*** Lưu ý:** Ta có: $AKNR$ và $AMNS$ đều nội tiếp đường tròn. Do đó A là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $NKIMRS$. Mà A thuộc RS nên tứ giác $MNKI$ nội tiếp. Suy ra $I \in (O)$.

Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai là D, OD cắt MK tại E. Gọi (T) là đường tròn đi qua D và tiếp xúc với BC tại N. Chứng minh rằng (T) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và EN là đường phân giác của góc BEC.

3,5



3b (3,5đ)

Ta có: $\widehat{DBM} = \widehat{DCK}$; $\widehat{MDK} = \widehat{MAK} = \widehat{BDC} \Rightarrow \widehat{MDB} = \widehat{KDC}$

Suy ra hai tam giác DBM và DCK đồng dạng

Do đó $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{BM}{CK} = \dfrac{BN}{CN} \Rightarrow$ DN là phân giác của $\widehat{BDC}$.

Gọi X là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, Y là tâm của đường tròn (T).

Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng DN và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó F là điểm chính giữa của cung nhỏ BC.

$\Rightarrow YN // XF$ (cùng vuông góc với BC)

$\Rightarrow \widehat{NDY} = \widehat{DNY} = \widehat{DFX} = \widehat{FDX}$

$\Rightarrow X, Y, D$ thẳng hàng. Suy ra (T) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi L, P, Q lần lượt là trung điểm của KN, MN, KM; r là bán kính của (O)

$\overline{OQ}.\overline{OA} = \overline{OP}.\overline{OB} = \overline{OL}.\overline{OC} = r^2$.

Suy ra phép nghịch đảo $I_O^{r^2}$ tâm O, phương tích r^2 biến tam giác ABC thành tam giác QPL.

Do đó $I_O^{r^2} : (ABC) \to (QPL)$ (với (QPL) đường tròn Euler của tam giác MNK)

Mà $\overline{OD}.\overline{OE} = \overline{OA}.\overline{OQ} = r^2 \Rightarrow I_O^{r^2} : D \to E$

Lại có $D \in (ABC)$ nên $E \in (QPL)$

Suy ra E là chân đường cao vẽ từ N của tam giác MNK hay EN vuông góc MK

Do $\dfrac{BN}{CN} \cdot \dfrac{CK}{AK} \cdot \dfrac{AM}{BM} = 1$ nên theo định lí CEVA thì AN, BK, CM đồng quy tại 1 điểm Gergone

Gọi T là giao điểm của MK và BC, ta có $(TNBC) = -1 \Rightarrow E(TNBC) = -1$

Mà ET vuông góc EN nên EN là phân giác của góc $\widehat{BEC}$.

	Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. *a) Xét đa thức* $f(x)=(x+1)(x+2)...(x+p-1)=x^{p-1}+a_{p-2}x^{p-2}+...+a_1x+(p-1)!$ *Chứng minh rằng* $a_i \vdots p$ *với mọi* $i=1, 2, ..., p-2$. *b) Chứng minh* $\left(\frac{(p-1)!}{1}\right)^p+\left(\frac{(p-1)!}{2}\right)^p+...+\left(\frac{(p-1)!}{p-1}\right)^p$ *chia hết cho* p^3.	**2,0**
	a) $f(x)=(x+1)(x+2)...(x+p-1)=x^{p-1}+a_{p-2}x^{p-2}+...+a_1x+(p-1)!$ Xét đa thức bậc $p-2$: $Q(x)=f(x)-(x^{p-1}-1)$ Ta có $Q(1)\equiv Q(2)\equiv ...\equiv Q(p-1)\equiv 0 \pmod p$ Suy ra $Q(x)$ có $p-1$ nghiệm theo modulo p, mà $Q(x)$ là đa thức bậc $p-2$ nên các hệ số $a_i \vdots p$.	0,5
Câu 4 (2,0đ)	b) Ta có: $\left(\frac{(p-1)!}{k}\right)^p+\left(\frac{(p-1)!}{p-k}\right)^p=\left(\frac{(p-1)!}{k(p-k)}\right)^p\left(k^p+(p-k)^p\right)$ $k^p+(p-k)^p=k^p-k^p+C_p^1.k^{p-1}.p^1-C_p^2.k^{p-2}.p^2+C_p^3.k^{p-3}.p^3-...$ $=p^2.k^{p-1}-C_p^2.k^{p-2}.p^2+C_p^3.k^{p-3}.p^3-...$ Mà $-C_p^2.k^{p-2}.p^2+C_p^3.k^{p-3}.p^3-...$ chia hết cho p^3 nên $k^p+(p-k)^p\equiv p^2.k^{p-1} \pmod{p^3}$ Do đó, ta chỉ cần chứng minh tổng của các số hạng $\left(\frac{(p-1)!}{k(p-k)}\right)^p.k^{p-1}$ chia hết cho p, với $k=1,2,...\frac{p-1}{2}$. Ta có $k^{p-1}\equiv 1 \pmod p$ và $a^p\equiv a \pmod p$, với $a=\frac{(p-1)!}{k(p-k)}$ (định lý nhỏ của Fermat) Ta đi chứng minh $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{(p-1)!}{k(p-k)}$ chia hết cho p. Ta có $\frac{(p-1)!}{k(p-k)}=\frac{1}{p}\left(\frac{(p-1)!}{k}+\frac{(p-1)!}{p-k}\right)$. Do đó, ta đi chứng minh: $\frac{(p-1)!}{1}+\frac{(p-1)!}{2}+...+\frac{(p-1)!}{p-1}=(p-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-1}\right)$ chia hết cho p^2 Theo định lí Viet cho $f(x)$ thì $a_1=(p-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-1}\right)$. Từ a) thay $x=-p$ vào $f(x)$ ta được $f(-p)=(-p+1)(-p+2)...(-1)=(-1)^{p-1}(p-1)!=(p-1)!$ (do p là số lẻ) Mà $f(-p)=(-p)^{p-1}+a_{p-2}(-p)^{p-2}+...+a_1(-p)+(p-1)!$ Suy ra $(-p)^{p-1}+a_{p-2}(-p)^{p-2}+...+a_2(-p)^2=a_1p$ (*) Vì $a_i \vdots p$ nên VT(*) $\vdots p^3$, do đó $a_1p \vdots p^3$ hay $a_1 \vdots p^2$. Vậy $(p-1)!\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-1}\right)\vdots p^2$ hay $\frac{(p-1)!}{1}+\frac{(p-1)!}{2}+...+\frac{(p-1)!}{p-1}$ chia hết cho p^2. Suy ra điều phải chứng minh.	1,5

*** Lưu ý:** Học sinh có thể nêu $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{p-1}\equiv 0 \pmod{p^2}$ (Do định lí **Wolstenholme**)

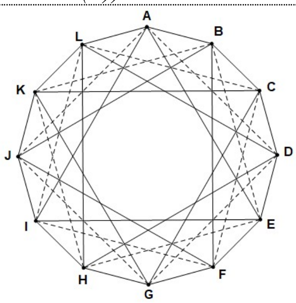
Câu 5 **(3,0đ)**	*Tìm tất cả hàm số* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *thỏa mãn* $f\left(x+f(x+y)\right)+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$ *(*).*	**3,0**
	Thay $y=1$ ta được $f\left(x+f(x+1)\right)=x+f(x+1)$ **(1)** Khi đó, $x+f(x+1)$ là điểm cố định của hàm f với bất kỳ $x\in\mathbb{R}$.	
	- TH1: $f(0)\neq 0$ + Thay $x=0$ ta được $f\left(f(y)\right)+f(0)=f(y)+yf(0)$ Nếu y_0 là điểm cố định của hàm f thì ta có: $f\left(f(y_0)\right)+f(0)=f(y_0)+y_0f(0)\Leftrightarrow y_0+f(0)=y_0+y_0f(0)\Leftrightarrow y_0=1.$ Do đó: $x+f(x+1)=1\Rightarrow f(x)=2-x$ với mọi $x\in$ R. Thử lại $f(x)=2-x$ thỏa mãn.	
	- TH2: $f(0)=0$ + Thay $y=0$ và x bởi $x+1$ ta được $f\left(x+f(x+1)+1\right)=x+f(x+1)+1$ **(2)** Khi đó, $x+f(x+1)+1$ là điểm cố định của hàm f với bất kỳ $x\in\mathbb{R}$.	
	+ Thay $x=1$ ta được $f\left(1+f(y+1)\right)+f(y)=1+f(y+1)+yf(1)$ **(3)** + Thay $x=-1$ vào (1) ta được $f\left(-1\right)=-1$ + Thay $y=-1$ vào (3) ta được $f\left(1\right)=1$ Do đó, (3) viết lại $f\left(1+f(y+1)\right)+f(y)=1+f(y+1)+y$ **(4)**	
	Từ (4), nếu y_0, y_0+1 là điểm cố định thì y_0+2 cũng là điểm cố định. Do đó, từ (1) và (2) suy ra $x+f(x+1)+2$ cũng là điểm cố định của hàm f với bất kỳ $x\in\mathbb{R}$ Tức là $f(x+f(x+1)+2)=x+f(x+1)+2$.	
	+ Thay x bởi $x-2$ ta được $f(x+f(x-1))=x+f(x-1)$ + Từ (*), thay $y=-1$ ta được $f\left(x+f(x-1)\right)+f(-x)=x+f(x-1)-f(x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$. Tức f là hàm số lẻ.	
	+ Từ (*), thay (x,y) bởi $(-1,-y)$ ta được $f\left(-1+f(-1-y)\right)+f(y)=-1+f(-1-y)-yf(-1)$ $\Leftrightarrow -f\left(1+f(1+y)\right)+f(y)=-1-f(1+y)+y$ **(5)** Từ (4) và (5), cộng vế theo vế suy ra được: $f(y)=y$ với bất kỳ $y\in\mathbb{R}$ hay $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Thử lại $f(x)=x$ thỏa mãn.	
	Vậy có hai hàm số thỏa đề là: $f(x)=x,\ f(x)=2-x$.	

Câu 6 (2,0đ)

Tô màu tất cả các đỉnh của đa giác đều (T) có 12 đỉnh bằng hai màu khác nhau, mỗi đỉnh tô một màu.

a) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho không có tam giác đều nào mà tất cả các đỉnh của nó cùng màu (các đỉnh của nó là đỉnh của (T))?

b) Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho có ít nhất một đa giác đều mà tất cả các đỉnh của nó cùng màu (các đỉnh của nó là đỉnh của (T))?



a) Số cách tô màu một tam giác đều không có tất cả các đỉnh cùng màu là $2^3 - 2 = 6$ cách.
Suy ra cách tô màu sao cho không có tam giác đều cùng màu là: $6.6.6.6 = 1296$ cách — **0,5**

b) Trước hết, ta đi tính số cách tô màu sao cho **không có đa giác đều nào** mà tất cả các đỉnh của nó cùng màu.

- Để cho gọn, ta nói một *đa giác đều cùng màu* để thay cho đa giác đều có tất cả các đỉnh cùng màu. Giả sử hai màu đó là đỏ và xanh.
- Hiển nhiên chỉ cần quan tâm đến tam giác đều và hình vuông. Các đỉnh của đa giác đều *(T)* có 12 cạnh tạo thành **4 tam giác đều** và **3 hình vuông**.

* Trong 1296 cách tô màu sao cho không có tam giác đều cùng màu, **có cách để tô hình vuông cùng màu**.

- **Để có** một hình vuông cùng màu ta làm như sau:
  + Chọn ra 1 hình vuông có C_3^1 cách chọn.
  + Hình vuông được tô một màu, có 2 cách.
  + Mỗi đỉnh của hình vuông tương ứng là 1 đỉnh tam giác đều; để tam giác đều này không cùng 1 màu thì hai đỉnh còn lại có 3 cách.

Do đó để có một hình vuông ta có: $C_3^1.2(3.3.3.3) = 486$ cách.

(Nếu đỉnh đó màu đỏ thì hai đỉnh kia của tam giác đều không cùng màu phải là: đỏ-xanh, xanh-đỏ, xanh-xanh (đỉnh thứ ba của tam giác đều không cùng màu là một đỉnh của hình vuông cùng màu đang xét); Mỗi đỉnh hình vuông là 1 đỉnh của 1 tam giác đều, với 4 đỉnh tương ứng 4 tam giác đều, khi đó đủ tất cả các đỉnh của đa giác đều 12 đỉnh, nên không thể xảy ra khả năng còn tam giác đều cùng màu).

- **Để có** hai hình vuông mà mỗi hình cùng màu ta làm như sau:
  + Chọn ra 2 hình vuông có C_3^2 cách chọn.
  (cả 3 đỉnh của tam giác đều không thể là các đỉnh trên hai hình vuông)
  + Cả hai hình vuông tô cùng một màu ta có **2 cách**; khi đó mỗi tam giác đều luôn có 2 đỉnh (cùng màu) từ 8 đỉnh của hai hình vuông, do đó đỉnh còn lại phải khác màu có **1 cách**.
  + Hai hình vuông, mỗi hình mỗi màu: có 2 cách;
  Hình vuông còn lại có 4 đỉnh, mỗi đỉnh tương ứng là 1 đỉnh của tam giác đều mà hai đỉnh có 2 màu khác nhau trong 8 đỉnh của hai hình vuông *(đỉnh còn lại là đỉnh của hình vuông còn lại, khi đó hiển nhiên tam giác đều này không cùng màu*). Do đó có 2.2.2.2 cách. Vậy để có hai hình vuông ta có: $C_3^2\left[2.1 + 2.(2.2.2.2)\right] = 102$ cách

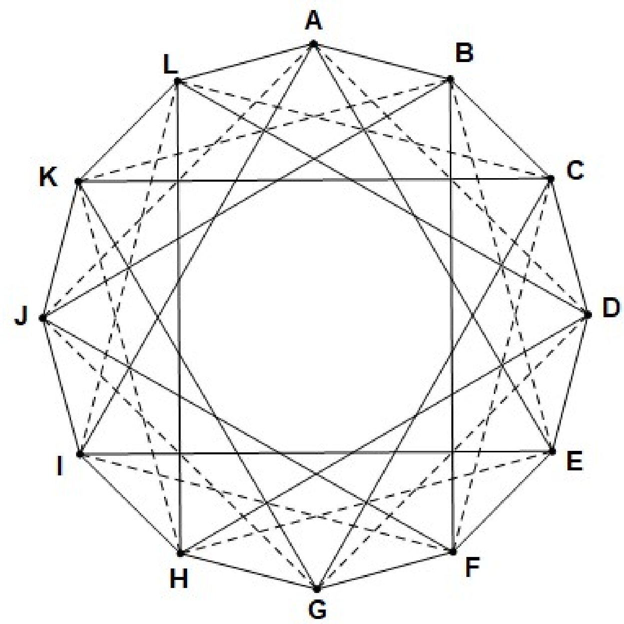
- **Để có** ba hình vuông mà mỗi hình cùng màu *(chỉ cần xét ba hình vuông với mỗi hình cùng màu nhưng cả ba hình không cùng một màu (vì xét từ khả năng không có tam giác đều nào cùng màu nên tất cả khả năng này không xảy ra 3 hình vuông cùng một màu))* ta có: 2.2.2 - 2 = **6 cách**.

Suy ra các cách tô màu để **không có đa giác đều** nào cùng màu là:
$1296 - (486 - (102 - 6)) = 906$ cách

Vậy số cách tô màu mà ít nhất một đa giác đều cùng màu là: $2^{12} - 906 = 3190$ cách.

1,5

- **Lưu ý:**



Quy ước: Một đa giác có tất cả các đỉnh cùng màu gọi là đa giác cùng màu.

* Có 4 tam giác đều, các tam giác đều này không có đỉnh chung, mỗi tam giác có 6 cánh tô tạo thành tam giác không cùng màu. Suy ra có $6^4 = 1296$ cách. Trong số này, ta xét 3 trường hợp

a. Có đúng 3 hình vuông cùng màu và 3 hình vuông này không cùng màu với nhau có 6 cách tô.
b. Có đúng 2 hình vuông cùng màu có $C_3^2.2.(2^4 - 2) = 84$ cách. (Chú ý không có trường hợp 3 hình vuông cùng màu mà cùng màu với nhau)
c. Có đúng 1 hình vuông cùng màu có $C_3^1.(2.3^4 - 6 - \frac{2}{3}.84) = 300$ cách. (Do 4 đỉnh của hình vuông là 4 đỉnh của các tam giác đều khác nhau và với mỗi cách tô màu 1 đỉnh hình vuông cùng màu có 3 cách tô màu 2 đỉnh còn lại của tam giác đều tương ứng)

* Số cách tô không có tam giác đều cùng màu, tứ giác đều cùng màu và khi đó cũng không có lục giác đều cùng màu và 12-giác đều cùng màu là $1296 - 6 - 84 - 300 = 906$.

* Vậy số cách tô có ít nhất 1 đa giác đều cùng màu là $2^{12} - 906 = 3190$ cách.

Câu 7 (3,0đ)	*Cho ba số thực* x,y,z *thuộc khoảng* $(0;1)$ *và thỏa mãn* $(1-x)(1-y)(1-z)=xyz$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $T=\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}+x+y+z$.	**3,0**
	Ta có: $T\ge 2\sqrt{\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\right)(x+y+z)}\ge 2\sqrt{\dfrac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2y+y^2z+z^2x}(x+y+z)}$ (*Sử dụng bất đẳng thức* $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}\ge\dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$)	
	Hơn nữa, ta có $\dfrac{(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)}{x^2y+y^2z+z^2x}\ge 3$ (*) Thật vậy, (*) $\Leftrightarrow (x^3+xy^2)+(y^3+yz^2)+(z^3+zx^2)\ge 2x^2y+2y^2z+2z^2x$ (BĐT này luôn đúng, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$) Do đó $T\ge 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$	
	- *Nhận xét:* Trong ba số x,y,z luôn có ít nhất hai số, sao cho chúng cùng *lớn hơn hoặc bằng* hoặc cùng *nhỏ hơn hoặc bằng* số m tùy ý. Giả sử, hai số đó là x,y và $m=\dfrac{1}{2}$. Khi đó ta có: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\ge 0\Leftrightarrow 4xy\ge 2x+2y-1\Leftrightarrow 4xyz\ge 2xz+2yz-z$ (1)	
	Từ giả thiết: $(1-x)(1-y)(1-z)=xyz\Leftrightarrow 4xyz+2x+2y+2z=2xy+2yz+2zx+2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $2(1-x)(1-y)\ge z\Leftrightarrow 2(1-x)(1-y)(1-z)\ge z(1-z)$ $\Leftrightarrow 2xyz\ge z(1-z)\Leftrightarrow 2xy\ge(1-z)\Leftrightarrow 2xy+z\ge 1$.	
	Hơn nữa: $x^2+y^2+z^2-(2xy+z)=(x-y)^2+(z-\dfrac{1}{2})^2-\dfrac{1}{4}\ge-\dfrac{1}{4}$ $\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge-\dfrac{1}{4}+(2xy+z)\ge-\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{3}{4}$	
	$\Rightarrow T\ge 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}\ge 2\sqrt{3.\dfrac{3}{4}}=3$ Vậy $\min T=3$ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.	

--------------- **HẾT** ---------------

Chú ý: *Nếu học sinh có lời giải đúng, khác với đáp án, Giám khảo căn cứ thang điểm câu tương ứng cho điểm phù hợp.*