

Câu 1 (4.0 điểm). Cho parabol (P): $y = ax^2 + bx - 1$ (a, b là hệ số thực).

a) Tìm các giá trị của a, b để parabol (P) có đỉnh $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{11}{2}\right)$.

b) Với giá trị của a, b tìm được ở câu a), tìm giá trị của k để đường thẳng Δ có phương trình $y = (k + 6)x + 1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên đường thẳng d có phương trình $4x + 2y - 3 = 0$.

Câu 2 (2.0 điểm). Giải bất phương trình: $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} \geq \sqrt{2x-1}$.

Câu 3 (2.0 điểm). Tìm m để bất phương trình: $\frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} \geq -1$ có nghiệm với mọi x thuộc R.

Câu 4 (4.0 điểm). Một nông trại dự định trồng cà rốt và khoai tây trên khu đất có diện tích 5 ha. Để chăm bón các loại cây này, nông trại phải dùng phân vi sinh. Nếu trồng cà rốt trên 1 ha cần dùng 3 tấn phân vi sinh và thu được 50 triệu đồng tiền lãi. Nếu trồng khoai tây trên 1 ha cần dùng 5 tấn phân vi sinh và thu được 75 triệu đồng tiền lãi. Hỏi nông trại cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được tổng số tiền lãi cao nhất? Biết rằng số phân vi sinh cần dùng không được vượt quá 18 tấn.

Câu 5 (4.0 điểm).

a) Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c. Tìm b, c biết $m_b = 4$, $m_c = 2$ và $a = 3$ (trong đó m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến qua đỉnh B, C của tam giác).

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho tam giác ABC, biết A(5; 4), B(3; -2), C(1; -5). Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6 (3.0 điểm). Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} y^2 + (y-3)x - 4y = -3 \\ 2^3\sqrt{x-2} + 5\sqrt{2-y} = 12 \end{cases}$$

Câu 7 (1.0 điểm). Cho ba số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

-----HẾT-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị coi thi số 1: Chữ ký giám thị coi thi số 2:

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

I. Hướng dẫn chung

1. Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
2. Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Ban chấm thi.
3. Sau khi cộng điểm toàn bài, làm tròn đến 0,5 điểm.

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	a) Vì (P) có đỉnh $I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{11}{2}\right)$ nên $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{2} \end{cases}$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 3a - 2b + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}$. Vậy a = 2, b = 6	1,0
	b) Để đường thẳng cắt Parabol tại hai điểm phân biệt thì phương trình: $2x^2 + 6x - 1 = kx + 6x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ hay phương trình: $2x^2 - kx - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ có $\Delta = k^2 + 16 > 0$. Khi đó, giao điểm $M(x_1; (k+6)x_1 + 1)$, $N(x_2; (k+6)x_2 + 1)$, nên trung điểm của đoạn MN là $I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{(k+6)x_1+1+(k+6)x_2+1}{2}\right)$.	1,0
	Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = k/4$ nên $I\left(\frac{k}{4}; \frac{k^2 + 6k + 4}{4}\right)$ Do I thuộc đường thẳng $4x + 2y - 3 = 0$ nên $k^2 + 8k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -4 \pm 3\sqrt{2}$ là giá trị thỏa mãn bài toán.	1,0
Câu 2 (2,0 điểm)	a) $\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ (\sqrt{2x-1} + \sqrt{x})^2 \leq x+3 \end{cases}$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2-x \geq 0 \\ (2x-1)x \leq (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ 2x^2 - x \leq 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 4 \leq 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $[1/2; 1]$.	0,5
Câu 3 (2,0 điểm)	Ta có: $2x^2 - 3x + 2 > 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên: $\frac{x^2 + 5x + m}{2x^2 - 3x + 2} \geq -1 \Leftrightarrow x^2 + 5x + m \geq -(2x^2 - 3x + 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + m + 2 \geq 0$ (*)	1,0
	Để BPT đã cho có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (*)$ có nghiệm với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$ (Vi a = 3 > 0) $\Leftrightarrow 1 - 3(m+2) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -5/3$. Vậy $m \geq -5/3$ làm giá trị thỏa mãn bài toán.	1,0

	<p>Giả sử trồng x (ha) cà rốt và y (ha) khoai tây. Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$ và $x + y \leq 5$ Số phân vi sinh cần dùng là: $3x + 5y$ (tấn). Ta có $3x + 5y \leq 18$ Số tiền thu được là $T = 50x + 75y$ (triệu đồng).</p>		1,0
<p>Câu 4 (4,0 điểm)</p>	<p>Ta cần tìm x, y thỏa mãn: $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 5 \\ 3x + 5y \leq 18 \end{cases} \quad (I)$ sao cho $T = 50x + 75y$ đạt giá trị lớn nhất.</p>		1,0
	<p>Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình (I) là miền đa giác OABC (Kẻ cả tứ giác, như hình vẽ), với $O(0; 0)$, $A\left(0; \frac{18}{5}\right)$, $B\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $C(5; 0)$.</p>		1,0
	<p>Vì biểu thức $T = 50x + 75y$ đạt giá trị lớn nhất chỉ tại các đỉnh của miền đa giác nên ta thấy T lớn nhất tại đỉnh $B\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$. Vậy để lãi nhất khi $x = 3,5$ ha, $y = 1,5$ ha.</p>		1,0
	<p>a) Theo công thức: $\begin{cases} m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases}$</p>		0,5
	<p>Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} 16 = \frac{9 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \\ 4 = \frac{9 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b^2 + 2c^2 = 46 \\ 2b^2 - c^2 = -2 \end{cases}$</p>		0,5
<p>Câu 5 (4,0 điểm)</p>	<p>$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 14 \\ c^2 = 30 \end{cases}$</p>		0,5
	<p>Vì b, c dương nên $\begin{cases} b = \sqrt{14} \\ c = \sqrt{30} \end{cases}$</p>		0,5
	<p>b) Gọi G là trọng tâm của $\Delta ABC \Rightarrow G(3; -1)$. Ta có $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$, với mọi điểm M.</p>		1,0
	<p>Suy ra $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3 \overline{MG}$. Khi đó $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \overline{MG}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của G trên trục hoành $\Rightarrow M(3; 0)$.</p>		1,0
	<p>Điều kiện: $\begin{cases} x \in R \\ y \leq 2 \end{cases}$. Từ phương trình (1) $\Leftrightarrow (y - 3)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$ (Vi $y \leq 2$)</p>		1,0
	<p>Với $y = 1 - x$ thay vào (2), ta được: $2\sqrt[3]{x-2} + 5\sqrt{x+1} = 12$</p>		
<p>Câu 6 (3,0 điểm)</p>	<p>$\Leftrightarrow 2(\sqrt[3]{x-2} - 1) + 5(\sqrt{x+1} - 2) = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{x-2-1}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1} + 5 \cdot \frac{x+1-4}{\sqrt{x+1} + 2} = 0$</p>		2,0
	<p>$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{2}{\sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{x-2} + 1} + \frac{5}{\sqrt{x+1} + 2} \right) = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Vậy hệ có nghiệm $(3; -2)$</p>		

	<p>Áp dụng BĐT Côsi cho ba số dương, ta được:</p> $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} \cdot \sqrt{\frac{a^3}{b^3}} \cdot 1} = 3 \cdot \frac{a}{b} \quad (1)$ <p>Tương tự, ta có: $\sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + 1 \geq 3 \cdot \frac{b}{c} \quad (2)$, $\sqrt{\frac{c^3}{a^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} + 1 \geq 3 \cdot \frac{c}{a} \quad (3)$</p>	0,25
<p>Câu 7 (1,0 điểm)</p>	<p>Cộng vế với vế của (1), (2) và (3), ta được:</p> $2 \left(\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \right) + 3 \geq 3 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \quad (*)$	0,25
	<p>Mặt khác $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq 3 \quad (**)$</p>	0,25
	<p>Cộng vế với vế của (*) và (**), ta được: $\sqrt{\frac{a^3}{b^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{c^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{a^3}} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \quad (\text{Đpcm})$</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.</p>	0,25