SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

SỐ BÁO DANH:……………

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2023-2024
VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2024-2025
Khóa ngày 02 tháng 4 năm 2024
Môn thi: TOÁN

BÀI THI THỨ NHẤT

Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
Đề gồm có 01 trang và 04 câu.

Câu 1 (2,5 điểm): Giải các phương trình sau:

a) $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x).\tan^2 x$.

b) $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2 + \log_2(x+1) = \log_2(5-x)$.

Câu 2 (2,5 điểm):

a) Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\begin{cases} u_1 = 2024 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}, \ \forall n \ge 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a, b là hai số thực tùy ý mà $ab > 0$. Chứng minh rằng tồn tại số thực α thỏa mãn $af(2023) + bf(2024) - (a+b)f(\alpha) = 0$.

Câu 3 (1,5 điểm): Một mật khẩu thẻ của ngân hàng X là một dãy gồm 6 chữ số.

a) Có bao nhiêu mật khẩu thẻ của ngân hàng X có 6 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 6 và chữ số 8.

b) Tính số mật khẩu thẻ của ngân hàng X có tổng 6 chữ số bằng 16.

Câu 4 (3,5 điểm):

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC, M là điểm thuộc cạnh SA, điểm N di động trên cạnh đáy BC (N khác B, C).

a) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ΔABC và ΔSBC. Chứng minh rằng G_1G_2 song song với mặt phẳng (SAB).

b) Mặt phẳng (α) chứa $C'M$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Xác định vị trí của điểm M để $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2024$.

c) Mặt phẳng (β) đi qua N đồng thời song song với hai đường thẳng SB và AC. Xác định đa giác tạo bởi giao tuyến của mặt phẳng (β) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$ và tìm vị trí của điểm N để đa giác đó có diện tích lớn nhất.

------------HẾT------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH

HƯỚNG DẪN CHẤM

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2023-2024
VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2024-2025
Khóa ngày 02 tháng 4 năm 2024
Môn thi: TOÁN

BÀI THI THỨ NHẤT

Đáp án này gồm có 06 trang

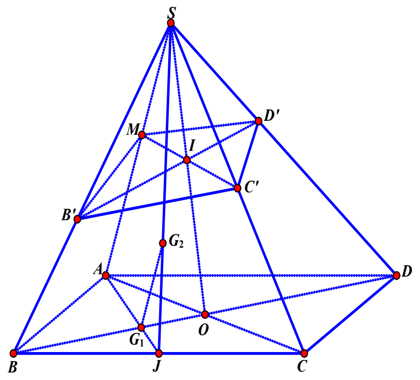
YÊU CẦU CHUNG

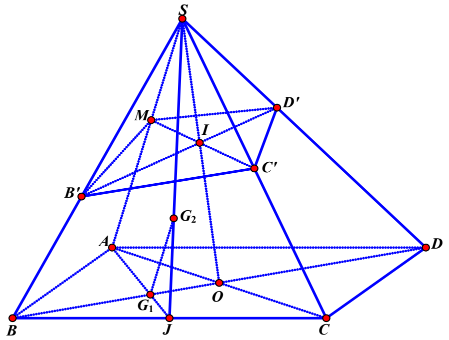
** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*
** Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.*
** Ở câu 4 nếu học sinh không vẽ hình ở phần nào thì cho điểm 0 ở phần đó.*
** Điểm thành phần của mỗi câu được chia đến 0,25 điểm. Đối với những phần được chia đến 0,5 điểm thì tổ giám khảo thống nhất để chia đến 0,25 điểm.*
** Học sinh có cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.*
** Điểm của toàn bài là tổng điểm (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a	**a) Giải các phương trình** $5\sin x-2=3(1-\sin x).\tan^2 x$.	**1,25**
	Đk: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. Ta có $5\sin x-2=3(1-\sin x).\tan^2 x\Leftrightarrow 5\sin x-2=3(1-\sin x).\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$	0,50
	$\Leftrightarrow 5\sin x-2=3\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0\Leftrightarrow(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{1}{2}\\ \sin x=-2\ (VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.	0,25
	Vậy $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.	0,25
Câu 1b	**b) Giải phương trình** $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2+\log_2(x+1)=\log_2(5-x)$.	**1,25**
	Đk: $-1<x<5;\ x\neq 1$. Ta có $\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2+\log_2(x+1)=\log_2(5-x)$	

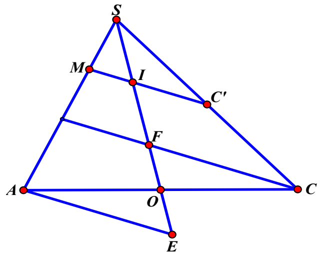
	$\Leftrightarrow \log_2\left\|x-1\right\|+\log_2\left(x+1\right)=\log_2\left(5-x\right)$	0,25
	$\Leftrightarrow \log_2\left\|x-1\right\|\left(x+1\right)=\log_2\left(5-x\right)\Leftrightarrow \left\|x-1\right\|\left(x+1\right)=5-x$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-1)(x+1)=5-x \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x<1 \\ (-x+1)(x+1)=5-x \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x^2+x-6=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x<1 \\ x^2-x+4=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=2$ thỏa mãn.	0,25
	Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.	0,25
Câu 2a	**a) Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thoả mãn $\begin{cases} u_1=2024 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n\left(u_n^2+3\right)}{3u_n^2+1},\ \forall n\ge 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số $\left(u_n\right)$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.**	**1,50**
	Ta chứng minh $u_n>1,\ \forall n\ge 1$ bằng quy nạp. Dễ thấy $u_1=2024>1$. Giả sử $u_k>1,\ \forall k\ge 1$. Ta thấy $u_{k+1}-1=\dfrac{u_k\left(u_k^2+3\right)}{3u_k^2+1}-1=\dfrac{\left(u_k-1\right)^3}{3u_k^2+1}>0\Rightarrow u_{k+1}>1$. Suy ra $u_n>1,\ \forall n\ge 1$.	0,50
	Mặt khác $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n\left(u_n^2+3\right)}{3u_n^2+1}-u_n=\dfrac{2u_n\left(1-u_n^2\right)}{3u_k^2+1}<0,\forall n\ge 1$ nên $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.	0,25
	Dãy $\left(u_n\right)$ giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn.	0,25
	Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=x\ \left(x\ge 1\right)$. Khi đó $x=\dfrac{x(x^2+3)}{3x^2+1}\Leftrightarrow x=1$ do $x\ge 1$.	0,25
	Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$	0,25
Câu 2b	**b) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và a,b là hai số thực tùy ý mà $ab>0$. Chứng minh rằng tồn tại số thực α thỏa mãn $af(2023)+bf(2024)-(a+b)f(\alpha)=0$.**	**1,00**
	Đặt $g(x)=af(2023)+bf(2024)-(a+b)f(x)$, khi đó $g(x)$ cũng là hàm số liên tục trên đoạn $[2023;2024]$. Ta có $g(2023)=af(2023)+bf(2024)-(a+b)f(2023)=b[f(2024)-f(2023)]$ và $g(2024)=af(2023)+bf(2024)-(a+b)f(2024)=a[f(2023)-f(2024)]$. Do đó $g(2023).g(2024)=-ab[f(2024)-f(2023)]^2$.	0,25
	Nếu $f(2023)=f(2024)$ thì $\left[\begin{array}{l} \alpha=2023 \\ \alpha=2024 \end{array}\right.$ thỏa mãn bài toán.	0,25

	Nếu $f(2023) \neq f(2024)$ thì $g(2023).g(2024) = -ab[f(2024) - f(2023)]^2 < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm $x = \alpha \in (2023; 2024)$.	0,25
	Vậy luôn tồn tại số thực α để $af(2023) + bf(2024) - (a+b)f(\alpha) = 0$.	0,25
Câu 3a	**Một mật khẩu thẻ của ngân hàng X là một dãy gồm 6 chữ số.** **a) Có bao nhiêu mật khẩu thẻ của ngân hàng X có 6 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 6 và chữ số 8.**	**0,50**
	Giả sử mật khẩu thẻ của ngân hàng X có dạng $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}$. Có A_6^2 cách chọn vị trí và sắp xếp hai chữ số 6 và 8. Sau đó có A_8^4 cách chọn và sắp xếp 4 chữ số còn lại.	**0,25**
	Suy ra có $A_6^2 \cdot A_8^4 = 50400$ mật khẩu thẻ của X ngân hàng có 6 chữ số khác nhau trong đó có chữ số 6 và chữ số 8.	**0,25**
Câu 3b	**b) Tính số mật khẩu thẻ của ngân hàng X có tổng 6 chữ số bằng 16.**	**1,00**
	Nhận xét: Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_m = n$, (*) với $m, n \in \mathbb{Z}^+$ là C_{m+n-1}^{m-1}. Thật vậy, Đặt $y_i = x_i + 1, \forall i = \overline{1,m}$ phương trình trên trở thành $y_1 + y_2 + ... + y_m = n + m$, (**) Xét một dãy chứa $m+n$ ký tự gồm $n+m$ số 1. Khi đó $m+n$ ký tự tạo ra $m+n-1$ khoảng trống, ta sử dụng $m-1$ vách ngăn đặt vào $m+n-1$ khoảng trống đó tạo ra m dãy ký tự con. Mỗi bộ các số $x_i, i = \overline{1,m}$ là tổng các chữ số 1 trong từng dãy con nhận được là một nghiệm của phương trình (**). Vậy số nghiệm của phương trình là C_{m+n-1}^{m-1}.	0,25
	Ta thấy rằng mỗi mật khẩu của thẻ ngân hàng X thỏa mãn bài toán tương ứng với một nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 16$ với $x_i \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}, \forall i = \overline{1;..;6}$. Do đó, số mật khẩu thẻ của ngân hàng X có tổng 6 chữ số bằng 16 bằng số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 16$ với $x_i \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}, \forall i = \overline{1;..;6}$.	0,25
	Đặt E là tập các nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 16$ với $x_i \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}, \forall i = \overline{1;...;6}$; $E^* = \left\{(x_1; \ldots; x_6) \mid x_1 + \ldots + x_6 = 16; x_i \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1;...;6}\right\}$ và	0,25

	$A_i=\left\{(x_1;\ x_2;\ldots;\ x_6)\in E^* \mid x_i>9\right\},\ i=\overline{1;\ldots;6}$. Khi đó $E=E^*\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{6}A_i\right)$. Xét E^*: Theo nhận xét trên thì $\left\|E^*\right\|=C_{21}^5$. Xét các A_i: Đặt $y_i=x_i-10;\ y_j=x_j,\ \forall j\neq i$ ta được $$\begin{cases} y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6=6 \\ y_i\in\mathbb{N},\ \forall i=\overline{1;\ldots;6} \end{cases} \quad (1).$$ Số phần tử của A_i bằng số nghiệm của (1). Theo nhận xét trên thì $\left\|A_i\right\|=C_{11}^5$.	
	Vì không thể có phần tử $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_6)\in E^*$ mà có hai chữ số $x_i,\ x_j>9$ nên $$A_i\cap A_j=\varnothing,\ \forall i\neq j\Rightarrow\left\|\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right\|=6\left\|A_i\right\|=6\cdot C_{11}^5.$$ Vậy số mật khẩu thẻ của ngân hàng X thỏa mãn bài toán là $$\left\|E^*\right\|-\left\|\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right\|=\left\|E^*\right\|-6\left\|A_i\right\|=C_{21}^5-6\cdot C_{11}^5=17577.$$ ***Lưu ý:*** *Nếu học sinh áp dụng kết quả bài toán chia kẹo Euler mà không chứng minh thì trừ 0,25 điểm.*	0,25
Câu 4a	**Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi C' là trung điểm của SC, M là điểm thuộc cạnh SA, điểm N di động trên cạnh đáy BC (N khác B, C).** **a) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác ΔABC và ΔSBC. Chứng minh rằng G_1G_2 song song với mặt phẳng (SAB).**	**1,00**
	 	
	Gọi J là trung điểm của BC. Ta có $\dfrac{JG_1}{JA}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{JG_2}{JS}$.	0,50
	$\Rightarrow G_1G_2\,//\,SA\Rightarrow G_1G_2\,//\,(SAB)$	0,50
Câu 4b	**b) Mặt phẳng (α) chứa $C'M$ cắt các cạnh $SB,\ SD$ lần lượt tại $B',\ D'$. Xác định vị trí của điểm M để $\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}=2024$.**	**1,00**

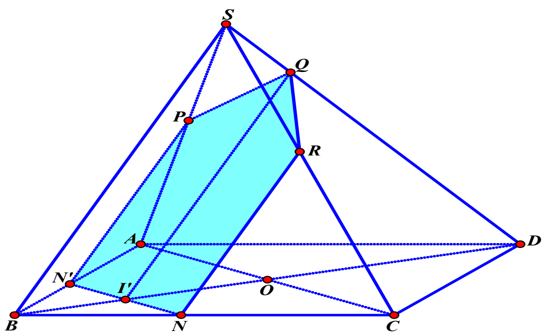
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Gọi O là tâm của hình bình hành, $I = C'M \cap B'D'$. Xét tam giác SAC. Qua $A,\ C$ lần lượt kẻ các đường thẳng song song với $C'M$, cắt SO tại $E,\ F$.



</td>
<td>0,25</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
Ta có $\dfrac{SA}{SM} = \dfrac{SE}{SI};\ \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SF}{SI} \Rightarrow \dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SE+SF}{SI} = 2\dfrac{SO}{SI}$.

Tương tự $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = 2\dfrac{SO}{SI}$.
</td>
<td>0,25</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>$\Rightarrow \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = \dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SA}{SM} + 2$</td>
<td>0,25</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>
Vì $\dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'} = 2024 \Leftrightarrow \dfrac{SA}{SM} = 2022 \Leftrightarrow SA = 2022.SM$.

Vậy M là điểm thuộc cạnh SA sao cho $SA = 2022.SM$.
</td>
<td>0,25</td>
</tr>
<tr>
<td>Câu 4c</td>
<td>c) Mặt phẳng (β) đi qua N đồng thời song song với hai đường thẳng SB và AC. Xác định đa giác tạo bởi giao tuyến của mặt phẳng (β) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$ và tìm vị trí của điểm N để đa giác đó có diện tích lớn nhất.</td>
<td>1,50</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>


</td>
<td></td>
</tr>
</table>

	Từ N kẻ đường thẳng song song với AC, lần lượt cắt AB, BD tại N', I'. Khi đó I' là trung điểm của NN'. Từ N, N', I' lần lượt kẻ các đường thẳng song song với SB, chúng cắt SC, SA, SD lần lượt tại R, P, Q. Đa giác tạo bởi giao tuyến của mặt phẳng (β) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $NN'PQR$.	0,25
	Gọi $O = AC \cap BD$. Đặt $BN = xBC\ (0 < x < 1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{NN'}{AC} = \frac{BI'}{BO} = \frac{BN}{BC} = x \\ \frac{NR}{SB} = \frac{CN}{BC} = \frac{AN'}{AB} = \frac{N'P}{SB} = 1 - x \end{cases}$.	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} \frac{I'Q}{SB} = \frac{I'D}{BD} = \frac{2-x}{2} \\ NN' = xAC; NR = N'P = (1-x)SB \end{cases}$	0,25
	$\Rightarrow S_{NN'PQR} = 2S_{NI'QR} = (NR + I'Q).NH = \left[(1-x)SB + \frac{2-x}{2}SB\right].NI'.\sin(NI', I'Q)$ với là H là hình chiếu của N lên $I'Q$.	0,25
	$= \frac{(4-3x)SB}{2}.\frac{x.AC}{2}.\sin(AC, SB) = \frac{1}{12}.(4-3x).(3x).SB.AC.\sin(AC, SB)$.	0,25
	Ta có: $(4-3x).(3x) \le \frac{1}{2}(4-3x+3x)^2 = 8 \Rightarrow S_{NN'PQR} \le \frac{2}{3}SB.AC.\sin(AC, SB)$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4 - 3x = 3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow BN = \frac{2}{3}BC$.	0,25

-------------HẾT-------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	**KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2023-2024 VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2024-2025**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Khóa ngày 02 tháng 4 năm 2024**
	Môn thi: TOÁN
	BÀI THI THỨ HAI
SỐ BÁO DANH:……………	Thời gian: 180 phút *(không kể thời gian giao đề)*
	Đề gồm có 01 trang và 05 câu.

Câu 1. (*2,0 điểm*)

a) Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là các số thực với $a>0$ và $ab\ge\frac{1}{8}$. Chứng minh rằng $f(b^2-4ac)\ge 0$.

b) Tìm độ dài ba cạnh a,b,c của một tam giác thỏa mãn $\begin{cases}\dfrac{abc}{-a+b+c}=40\\ \dfrac{abc}{a-b+c}=60\\ \dfrac{abc}{a+b-c}=120\end{cases}$

Câu 2. (*2,0 điểm*) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(u_n^3-2\right),\forall n\in\mathbb{N}^*.\end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_n>2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) Đặt $v_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\left(u_k+1\right)^2\left(u_k-2\right)}{u_{k+1}u_k},\forall n\ge 1$. Chứng minh rằng (v_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 3. ***(3,5 điểm)*** Cho tam giác ABC và điểm P thuộc miền trong tam giác (không nằm trên các cạnh của tam giác). Lấy điểm Q sao cho các đường thẳng AQ, BQ, CQ lần lượt đối xứng với các đường thẳng AP, BP, CP qua phân giác trong của các góc A, B, C. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên AB, AC và K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên AB, AC.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N, K, L cùng nằm trên một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

b) Gọi T là giao điểm của MN và KL. Chứng minh rằng AT vuông góc PQ.

Câu 4. ***(1,5 điểm)*** Cho đa giác lồi n đỉnh $(n\in\mathbb{N},n\ge 4)$. Ta kẻ tất cả các đường chéo. Biết rằng không có 3 đường chéo nào đồng quy tại một điểm thuộc miền trong của đa giác đã cho. Tính số miền đa giác được tạo thành bên trong của đa giác lồi đó (ta chỉ tính các đa giác mà bên trong nó không có điểm nào thuộc đường chéo của đa giác ban đầu).

Câu 5. ***(1,0 điểm)*** Tìm tất cả các số nguyên tố p,q thỏa mãn $(5^p-2^p)(5^q-2^q)\,\vdots\,pq$.

-------------Hết------------

SỞ GD&ĐT QUẢNG BÌNH	KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 NĂM HỌC 2023-2024 VÀ CHỌN ĐỘI DỰ TUYỂN DỰ THI CHỌN HSG QUỐC GIA NĂM HỌC 2024-2025
HƯỚNG DẪN CHẤM	**Khóa ngày 02 tháng 4 năm 2024**
	Môn thi: TOÁN
	BÀI THI THỨ HAI
	Đáp án này gồm có 05 trang

YÊU CẦU CHUNG

** Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận lôgic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết và rõ ràng.*

** Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước giải sau có liên quan.*

** Ở câu 3 nếu học sinh không vẽ hình ở phần nào thì cho điểm 0 ở phần đó.*

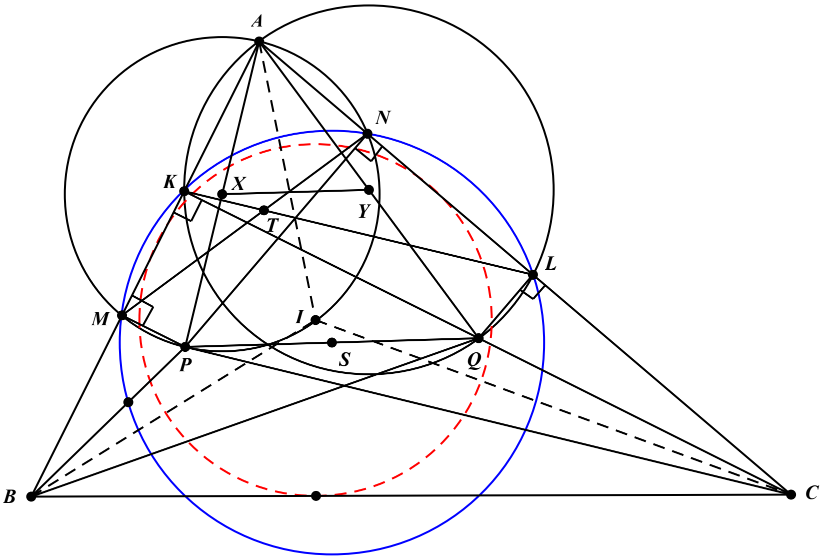
** Điểm thành phần của mỗi câu được chia đến 0,25 điểm. Đối với những phần được chia đến 0,5 điểm thì tổ giám khảo thống nhất để chia đến 0,25 điểm.*

** Học sinh có cách giải đúng nhưng khác đáp án, tổ chấm trao đổi và thống nhất điểm chi tiết nhưng không được vượt quá số điểm dành cho bài hoặc phần đó. Mọi vấn đề phát sinh trong quá trình chấm phải được trao đổi trong tổ chấm và chỉ cho điểm theo sự thống nhất của cả tổ.*

** Điểm của toàn bài là tổng điểm (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1a	**a) Cho tam thức bậc hai** $f(x)=ax^2+bx+c$**, trong đó** a,b,c **là các số thực với** $a>0$ **và** $ab\ge\frac{1}{8}$**. Chứng minh rằng** $f(b^2-4ac)\ge 0$**.**	***1,0 điểm***
	Đặt $\Delta=b^2-4ac$. Nếu $\Delta\le 0$ thì $f(x)\ge 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên $f(\Delta)\ge 0$ (do $a>0$).	0,25
	Nếu $\Delta>0$ và $x_1<x_2$ là hai nghiệm của phương trình $f(x)=0$ thì $f(\Delta)\ge 0\Leftrightarrow(\Delta-x_1)(\Delta-x_2)\ge 0$ (*) (do $a>0$).	0,25
	Để chứng minh (*) đúng, ta chỉ cần chứng minh $\Delta\ge x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. Ta có $\Delta+\dfrac{b}{2a}\ge 2\sqrt{\Delta.\dfrac{b}{2a}}\ge 2\sqrt{\Delta.\dfrac{1}{16a^2}}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.	0,25
	Suy ra $\Delta\ge\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\Leftrightarrow\Delta\ge x_2$. Vậy ta có điều phải chứng minh.	0,25
Câu 1b	**b) Tìm độ dài ba cạnh** a,b,c **của một tam giác thỏa mãn** $\begin{cases}\dfrac{abc}{-a+b+c}=40\\ \dfrac{abc}{a-b+c}=60\\ \dfrac{abc}{a+b-c}=120\end{cases}$	***1,0 điểm***

	Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} \frac{1}{ab}+\frac{1}{ca}-\frac{1}{bc}=\frac{1}{40} \\ \frac{1}{ab}-\frac{1}{ca}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{60} \\ -\frac{1}{ab}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{120} \end{cases}$ (1)	0,25
	Cộng theo vế 3 phương trình trên, ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{20}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} \frac{1}{bc}=\frac{1}{80} \\ \frac{1}{ca}=\frac{1}{60} \\ \frac{1}{ab}=\frac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=48 \\ bc=80 \\ ca=60 \end{cases}$ (3)	0,25
	Suy ra $(abc)^2=230400 \Leftrightarrow abc=480$. Kết hợp với (3) ta có $\begin{cases} a=6 \\ b=8 \\ c=10 \end{cases}$.	0,25
Câu 2a	**Cho dãy số (u_n) xác định bởi** $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}\left(u_n^3-2\right), \forall n\in\mathbb{N}^*. \end{cases}$ **a) Chứng minh rằng $u_n>2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.**	***1,0 điểm***
	Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n>2, \forall n\in\mathbb{N}^*$ (*). Với $n=1$ thì (*) đúng. Giả sử (*) đúng với $n=k\geq 1$, tức là $u_k>2$.	0,5
	Khi đó $u_{k+1}-2=\frac{1}{3}(u_k-2)\left(u_k^2+2u_k+4\right)>0 \Rightarrow u_{k+1}>2$. Vậy (*) đúng với $n=k+1$. Theo nguyên lí quy nạp thì (*) đúng với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.	0,5
Câu 2b	**b) Đặt $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(u_k+1)^2(u_k-2)}{u_{k+1}u_k}, \forall n\geq 1$. Chứng minh rằng (v_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.**	***1,0 điểm***
	Từ $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n+1)^2(u_n-2)$ và (*) suy ra dãy (u_n) tăng.	0,25
	Giả sử (u_n) bị chặn trên khi đó (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L, (L\geq 3)$. Ta có $\begin{cases} L=\frac{1}{3}\left(L^3-2\right), \text{ vô lí.} \\ L\geq 3 \end{cases}$ Do đó (u_n) không bị chặn trên, nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ (1).	0,25

	Ta có $\sum_{k=1}^{n}\frac{(u_k+1)^2(u_k-2)}{u_{k+1}u_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3(u_{k+1}-u_k)}{u_{k+1}u_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{u_k}-\frac{3}{u_{k+1}}\right)=1-\frac{3}{u_{n+1}}$ (2).	0,25
	Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(u_k+1)^2(u_k-2)}{u_{k+1}u_k}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{u_{n+1}}\right)=1.$	0,25
Câu 3a	**Cho tam giác ABC và điểm P thuộc miền trong tam giác (không nằm trên các cạnh của tam giác). Lấy điểm Q sao cho các đường thẳng AQ, BQ, CQ lần lượt đối xứng với các đường thẳng AP, BP, CP qua phân giác trong của các góc A, B, C. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của P lên AB, AC và K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của Q lên AB, AC.** **a) Chứng minh rằng các điểm M, N, K, L cùng nằm trên một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.**	***1,5 điểm***
		
	Ta có tứ giác $AMPN$ nội tiếp đường tròn đường kính AP nên $\widehat{APM}=\widehat{ANM}$. Tương tự, $\widehat{AQL}=\widehat{AKL}$.	0,5
	Lại có AP và AQ đối xứng qua phân giác trong góc A nên $\widehat{PAM}=\widehat{QAL}$, suy ra $\widehat{APM}=\widehat{AQL}$, do đó $\widehat{ANM}=\widehat{AKL}$, kéo theo $\widehat{MKL}=\widehat{MNL}$. Vậy các điểm M,N,K,L cùng nằm trên một đường tròn.	0,5
	Để ý rằng $PQKM$ và $PQLN$ là các hình thang vuông nên các đường trung trực của KM, NL cắt nhau tại trung điểm S của PQ. Đó là tâm đường tròn cần tìm.	0,5
Câu 3b	**b) Gọi T là giao điểm của MN và KL. Chứng minh rằng AT vuông góc PQ.**	***2,0 điểm***
	Gọi X,Y là trung điểm AP, AQ. Khi đó X, Y là tâm đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMPN$ và $AKQL$.	0,5

	Ta có MN, KL lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn (X) và $(S);(Y)$ và (S). Do đó T là tâm đẳng phương của ba đường tròn $(X),(Y),(S)$.	
	Suy ra AT là trục đẳng phương của hai đường tròn (X) và (Y). Do đó $AT \perp XY$.	0,5
	Mặt khác XY là đường trung bình của tam giác APQ nên $XY \parallel PQ$.	0,5
	Vậy $AT \perp PQ$.	0,5
Câu 4	**Cho đa giác lồi n đỉnh $(n \in \mathbb{N}, n \geq 4)$. Ta kẻ tất cả các đường chéo. Biết rằng không có 3 đường chéo nào đồng quy tại một điểm thuộc miền trong của đa giác đã cho. Tính số miền đa giác được tạo thành bên trong của đa giác lồi đó (ta chỉ tính các đa giác mà bên trong nó không có điểm nào thuộc đường chéo của đa giác ban đầu).**	***1,5 điểm***
	Gọi $a_3; a_4; ...; a_m$ lần lượt là số miền tam giác; tứ giác; ngũ giác;…; m-giác được tạo thành. Ta cần tính $S = a_3 + a_4 + ... + a_m$.	0,25
	Trước hết; ta đếm tổng tất cả các đỉnh của các miền đa giác. Ta thấy ngay tổng này bằng $A = 3a_3 + 4a_4 + ... + m.a_m$.	0,25
	Hơn nữa, nếu đếm như vậy thì mỗi giao điểm của 2 đường chéo sẽ được tính 4 lần (do giao điểm đó thuộc 4 miền). Mỗi đỉnh của đa giác ban đầu sẽ được đếm $n-2$ lần (do thuộc $n-2$ miền). Như vậy, $A = 3a_3 + 4a_4 + ... + m.a_m = 4.C_n^4 + n(n-2)$ (1)	0,25
	Tiếp theo, ta đếm tổng tất cả các góc trong các miền của đa giác. Ta có tổng này bằng $$B = 180^0.a_3 + 180^0.2.a_4 + 180^0.3.a_5 + ... + 180^0.(m-2)a_m.$$	0,25
	Mặt khác, tổng các góc trên chính là tổng các góc của đa giác ban đầu ($180^0.(n-2)$) cộng với 360^0 nhân tổng các giao điểm của các đường chéo. Như vậy, $$B = 180^0.a_3 + 180^0.2.a_4 + 180^0.3.a_5 + ... + 180^0.(m-2)a_m$$ $$= 180^0(n-2) + 360^0.C_n^4.$$ Suy ra $a_3 + 2a_4 + ... + (m-2).a_m = 2.C_n^4 + (n-2)$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $S = 1 + C_n^4 + \frac{1}{2}n(n-3)$.	0,25
Câu 5	**Tìm tất cả các số nguyên tố p, q thỏa mãn $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q) \vdots pq$.**	***1,0 điểm***
	Giả sử $p \leq q$. Do $(5^p - 2^p)$ và $(5^q - 2^q)$ đều là số lẻ nên $3 \leq p \leq q$.	0,25

	Ta có $p=q=3$ thỏa mãn. Nếu $p=3$, $q>3$ thì ta có $117\left(5^q-2^q\right)\vdots 3q \Leftrightarrow 39\left(5^q-2^q\right)\vdots q$ và $5^q-2^q\equiv 5-2\equiv 3\left(\bmod q\right)$ theo định lý Fermat nhỏ nên $q\mid 39$, do đó $q=13$. Suy ra $(p;q)=(3;13),(13;3)$ là hai cặp số nguyên tố p,q thỏa mãn bài toán.	
	Nếu $5\le p\le q$ ta có $5^p-2^p\equiv 5-2\equiv 3\left(\bmod p\right)$ nên từ giả thiết suy ra $5^q-2^q\vdots p$. Lại có $5^{p-1}\equiv 2^{p-1}\equiv 1\left(\bmod p\right)$ nên $5^{p-1}-2^{p-1}\vdots p$.	0,25
	Do $q>p-1$ nên $(q;p-1)=1$. Suy ra tồn tai $m,n\in\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $$mq-(p-1)n=1 \text{ hoặc } nq-(p-1)m=1 \qquad (*)$$ Suy ra $\begin{cases}5^{p-1}\equiv 2^{p-1}\left(\bmod p\right)\\ 5^q\equiv 2^q\left(\bmod p\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5^{n(p-1)}\equiv 2^{n(p-1)}\left(\bmod p\right)\\ 5^{mq}\equiv 2^{mq}\left(\bmod p\right)\end{cases}$, hoặc $\begin{cases}5^{m(p-1)}\equiv 2^{m(p-1)}\left(\bmod p\right)\\ 5^{nq}\equiv 2^{nq}\left(\bmod p\right)\end{cases}$ Do đó $5^{n(p-1)}2^{mq}\equiv 2^{n(p-1)}5^{mq}\left(\bmod p\right)$ hoặc $5^{m(p-1)}2^{nq}\equiv 2^{m(p-1)}5^{nq}\left(\bmod p\right)$.	0,25
	Kết hợp $(*)$, sau khi rút gọn hai vế ta được $5\equiv 2\left(\bmod p\right)$ hay $p=3$ (loại vì đang xét $p>5$). Vậy $(p;q)=(3;3),(3;13),(13;3)$ là tất cả các cặp số nguyên tố p,q thỏa mãn bài toán.	0,25

-------------HẾT-------------