SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
LẠNG SƠN

TOANMATH.com

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN TOÁN – LỚP 12
NĂM HỌC 2020 - 2021

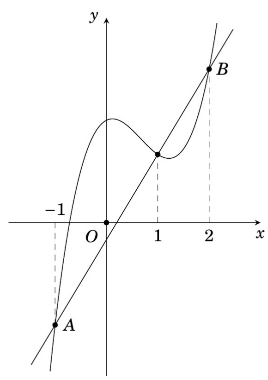
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Đề thi gồm 01 trang + 05 bài toán tự luận

Câu 1. ***(4 điểm)***

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+\frac{1}{3}x+c$ và đường thẳng $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như trong hình vẽ bên và $AB=5$. Giải phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)+x^2+2$.



Câu 2. ***(6 điểm)***

Giải hệ phương trình trong tập số thực $\begin{cases} x^3-6x^2+13x=y^3+y+10 \\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{5-x-y}=3-y \end{cases}$.

a) Giải phương trình $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$.

b) Giải phương trình $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$.

Câu 3. ***(2,0 điểm)*** Gọi S là tập hợp các số có 5 chữ số đôi một khác nhau $\overline{abcde}$ với $a,b,c,d,e\in\{1,2,3,...,9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn và thỏa mãn $a<b<c<d<e$.

Câu 4. ***(2 điểm)*** Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá lên them 20 nghìn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để số tiền thu được của khách sạn trong 1 ngày là lớn nhất.

Câu 5. ***(6 điểm)*** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C', ABC.A'B'C'$, M là trung điểm AA', G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

a) Gọi $I=MB'\cap A'B; J=MC'\cap A'C$. Tính thể tích $V_{A'.B'C'IJ}$.

b) Tính khỏng cách giữa hai đường thẳng BC, MG.

c) Gọi là mặt phẳng qua và song song với . Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng và $\left(P\right)$ và $\left(A'B'C'\right)$.

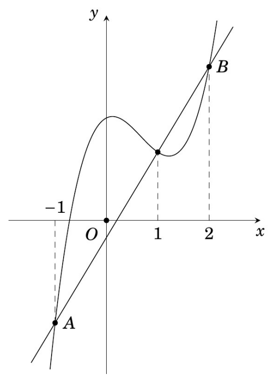
HẾT

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. ***(4 điểm)***

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có hai điểm cực trị trái dấu.

b) Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+\frac{1}{3}x+c$ và đường thẳng $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như trong hình vẽ bên và $AB=5$. Giải phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)+x^2+2$.



Lời giải

a) Ta có $y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right)=3\left(-x^2+2x+m^2-1\right)$.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0\Rightarrow x_1,x_2$ là hai điểm cực trị

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1x_2=m^2-1\end{cases}$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow$ phương trình $y'=0$ có hai nghiệm trái dấu, nghĩa là

$$x_1x_2<0\Leftrightarrow -m^2+1<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>1\\m<-1\end{array}\right..$$

b) Đặt $g\left(x\right)=mx+n$ (với $m>0$).

Ta có $A\left(-1;-m+n\right)$, $B\left(2;2m+n\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(3;3m\right)$.

Ta lại có $AB=5\Leftrightarrow 9+9m^2=25\Leftrightarrow m^2=\frac{16}{9}\Rightarrow m=\frac{4}{3}$ (vì $m>0$).

Do đó $g\left(x\right)=\frac{4}{3}x+n$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy $f\left(x\right)-g\left(x\right)=a\left(x^2-1\right)\left(x-2\right)=a\left(x^3-2x^2-x+2\right)$.

Mặt khác, ta lại có $f\left(x\right)-g\left(x\right)=ax^3+bx^2-x+c-n$.

Đồng nhất hệ số, ta được $\begin{cases}b=-2a\\-a=-1\\2a=c-n\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)-g\left(x\right)=x^3-2x^2-x+2$.

Do đó

$f\left(x\right)=g\left(x\right)+x^2+2$

$\Leftrightarrow f\left(x\right)-g\left(x\right)-x^2-2=0$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2-x^2-2=0$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$.

Câu 2. ***(6 điểm)***

a) Giải hệ phương trình trong tập số thực $\begin{cases} x^3-6x^2+13x=y^3+y+10 \\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{5-x-y}=3-y \end{cases}$.

b) Giải phương trình $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$.

Lời giải

a) $\begin{cases} x^3-6x^2+13x=y^3+y+10 \\ \sqrt{2x+y+2}-\sqrt{5-x-y}=3-y \end{cases}$.

Ta có $x^3-6x^2+13x=\left(x-a\right)^3+\left(x-a\right)+10$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+13x=x^3-3x^2a+3xa^2-a^3+x-a+10 \Rightarrow a=2$

Nên $x^3-6x^2+13x=y^3+y+10 \Leftrightarrow \left(x-2\right)^3+\left(x-2\right)=y^3+y$, dễ thấy hàm số $f\left(t\right)=t^3+t \Rightarrow f'\left(t\right)=3t^2+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra ta được $x-2=y$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được

$\sqrt{3x}-\sqrt{7-2x}=5-x$ điều kiện $0\le x\le \dfrac{7}{2}$

Khi đó phương trình đã cho được viết lại $\left(\sqrt{3x}-3\right)-\left(\sqrt{7-2x}-1\right)=3-x$

$\Leftrightarrow \dfrac{3\left(x-3\right)}{\sqrt{3x}+3}-\dfrac{7-2x-1}{\sqrt{7-2x}+1}+\left(x-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \dfrac{3}{\sqrt{3x}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{7-2x}+1}+1=0 \ \left(\text{VN}\right) \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

b) Giải phương trình $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$.

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)+\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=\left(\sin x+\cos x\right)^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ 1+\sin x\cos x=\sin x+\cos x \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ \sin x=1 \\ \cos x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=k2\pi \end{array}\right.$.

Câu 3. ***(2,0 điểm)*** Gọi S là tập hợp các số có 5 chữ số đôi một khác nhau $\overline{abcde}$ với $a,b,c,d,e\in\{1,2,3,...,9\}$. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn và thỏa mãn $a<b<c<d<e$.

Lời giải

Lập số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau từ các số $\{1,2,3,...,9\}$ là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử nên $n(S)=A_9^5=9.8.7.6.5=15120$.

Chọn ngẫu nhiên một số từ S có $n(\Omega)=C_{15120}^1=15120$.

Gọi A là biến cố: "Số được chọn là số chẵn và thỏa mãn $a<b<c<d<e$"

TH1: $e=6$: có $C_5^4=5$ cách lập số thỏa mãn biến cố A.

TH2: $e=8$: có $C_7^4=35$ cách lập số thỏa mãn biến cố A.

Do đó: $n(A)=35+5=40$. Vậy $P(A)=\dfrac{40}{15120}=\dfrac{1}{378}$.

Câu 4. ***(2 điểm)*** Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá lên them 20 nghìn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để số tiền thu được của khách sạn trong 1 ngày là lớn nhất.

Lời giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khác sạn cần đặt ra $(x>400)$. Giá chênh lệch sau khi tăng là $x-400$. Số phòng cho thuê giảm nếu giá tăng là $2.\dfrac{(x-400)}{20}=\dfrac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50-\dfrac{x-400}{10}=90-\dfrac{x}{10}$. Tổng doanh thu trong ngày là:

$f(x)=x\left(90-\dfrac{x}{10}\right)=90x-\dfrac{x^2}{10}$. \

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ với $x>400$.

Ta có: $f'(x)=90-\dfrac{x}{5}, f'(x)=0\Rightarrow x=450.$

Mặc khác: $\max\limits_{x\in(400;+\infty)} f(x)=f(450)=20250$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày $2.025.000$ (đồng).

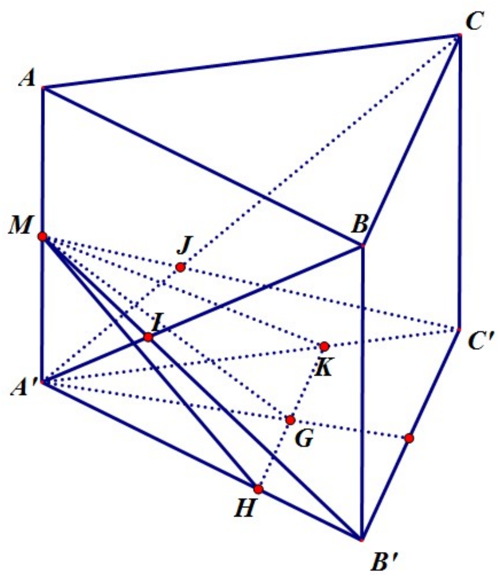
Câu 5. ***(6 điểm)*** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$, $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm AA', G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

a) Gọi $I = MB' \cap A'B; J = MC' \cap A'C$. Tính thể tích $V_{A'.B'C'IJ}$.

b) Tính khỏng cách giữa hai đường thẳng BC, MG.

c) Gọi là mặt phẳng qua và song song với . Tính tan góc tạo bởi mặt phẳng và (P) và $(A'B'C')$.

Lời giải



a) Ta có $\frac{MI}{MB'} = \frac{MJ}{MC'} = \frac{1}{3}$.

Đặt $V = V_{MA'B'C'}$.

$V_{A'.B'C'IJ} = V - V_{MA'IJ} = \frac{8}{9}V = \frac{8}{9}.\frac{1}{3}.2.\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(2\sqrt{3}\right)^2 = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

b) Lấy $H \in A'B', K \in A'C'$ sao cho $HK // BC$ và $G \in HK$.

$d\left(BC, MG\right) = d\left(BC, \left(MHK\right)\right) = d\left(B, \left(MHK\right)\right) = \frac{5}{2}d\left(A, \left(MHK\right)\right)$.

Có $HK \perp \left(MA'G\right)$, kẻ $A'O \perp MG \Rightarrow A'O \perp \left(MHK\right)$.

Ta có $\frac{1}{A'O^2} = \frac{1}{A'M^2} + \frac{1}{A'G^2} \Rightarrow A'O = \sqrt{2}$.

$\Rightarrow d\left(BC, MG\right) = \frac{5}{2}.\sqrt{2}$.

c) Góc tạo bởi mặt phẳng (P) và $(A'B'C')$ là $\widehat{MGA'}$, ta có $\tan\widehat{MGA'} = \frac{MA'}{GA'} = 1$.

HẾT