SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC
TRƯỜNG THPT LIỄN SƠN
ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 THPT CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2020-2021
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
(Dành cho học sinh THPT không chuyên)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{3\sin 5x-4\cos 5x-2m+3}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Giải phương trình: $\cos 2x-\tan^2 x=\dfrac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$

Câu 2 (2,0 điểm). Xung quanh bờ ao của gia đình bác Nam trồng 20 cây chuối. Do không còn phù hợp bác muốn thay thế để trồng bưởi, lần đầu bác chặt ngẫu nhiên 4 cây. Tính xác suất để trong 4 cây bác Nam chặt không có hai cây nào gần nhau.

Câu 3 (2,0 điểm). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=4(n+2)$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Niu – tơn của $P=x(1-2x)^n+x^2(1+3x)^{2n}$.

Câu 4 (2,0 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$u_1=\dfrac{1}{3},\ u_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}u_n-\dfrac{(n+1)(2n+1)}{\left[(n+1)^2+2\right](n^2+2)};n\in\mathbb{N}^*$. Tính $\lim\dfrac{2021nu_n}{2020}$

Câu 5 (2,0 điểm). Giải bất phương trình $\dfrac{1+2\sqrt{x}-2\sqrt{x^2+3x+1}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}}>1$.

Câu 6 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-5;2)$. $M(-1;-2)$ là điểm nằm bên trong hình bình hành sao cho $\widehat{MDC}=\widehat{MBC}$ và $MB\perp MC$. Tìm tọa độ điểm D biết $\tan\widehat{DAM}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 7 (4,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M là điểm nằm trên SB sao cho $\overrightarrow{SM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SB}$.

a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA. Tính theo a diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$.

b. E là một điểm thay đổi trên cạnh AC. Xác định vị trí điểm E để ME vuông góc với CD.

Câu 8 (2,0 điểm). Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T=\dfrac{4}{a+b}+\dfrac{4}{b+c}+\dfrac{4}{c+a}+\dfrac{a^2+b^2+c^2-1}{2abc}$.

-------------Hết-----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:………………………….…………..……….…….….…; Số báo danh……………………

TRƯỜNG THPT LIỄN SƠN

(Đáp án có 06 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 11 THPT CẤP TRƯỜNG

NĂM HỌC 2020-2021

ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN 11

(Dành cho học sinh THPT không chuyên)

I. LƯU Ý CHUNG:

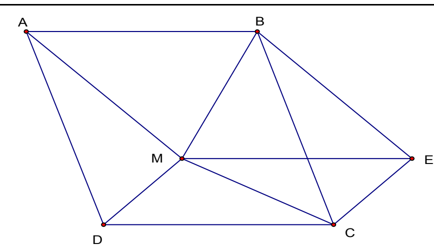
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.
- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

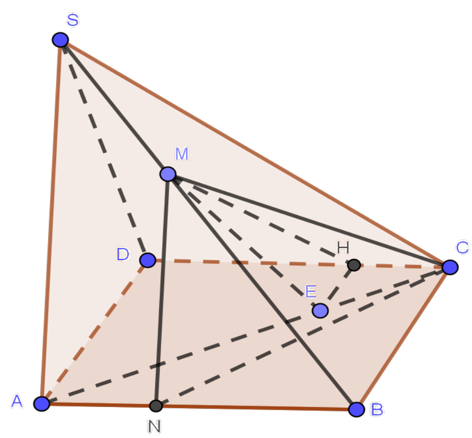
II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1	**Câu 1 (4,0 điểm).** a) Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\cos x}{\sqrt{3\sin 5x-4\cos 5x-2m+3}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. b) Giải phương trình: $\cos 2x-\tan^2 x=\dfrac{\cos^2 x-\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$	
	1a.(2,0 điểm)	
	Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)=3\sin 5x-4\cos 5x-2m+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.	0,5
	Ta có: $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{3}{5}\sin 5x-\dfrac{4}{5}\cos 5x>\dfrac{2m-3}{5},\forall x\in\mathbb{R}$.	0,5
	$\Leftrightarrow\sin(5x-\varphi)>\dfrac{2m-3}{5},\forall x\in\mathbb{R}$ với $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{3}{5}\\\sin\varphi=\dfrac{4}{5}\end{cases}$	0,5
	Do $-1\le\sin(5x-\varphi)\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{2m-3}{5}<-1\Leftrightarrow m<-1$. Vậy $m<-1$.	0,5
	1b.(2,0 điểm)	
	Điều kiện: $x\ne\dfrac{\pi}{2}+l\pi\quad(l\in\mathbb{Z})$ Suy ra $(1)\Leftrightarrow\cos 2x-\tan^2 x=1-\cos x-(1+\tan^2 x)$	0,5
	$\Leftrightarrow\cos 2x=-\cos x\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-1\\\cos x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$	0,5
	$\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	0,5
	$\cos x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ Kết hợp với điều kiện, phương trình đã cho có nghiệm $x=\pi+k2\pi$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$	0,5

2	**Câu 2 (2,0 điểm).** Xung quanh bờ ao của gia đình bác Nam trồng 20 cây chuối. Do không còn phù hợp bác muốn thay thế để trồng bưởi, lần đầu bác chặt ngẫu nhiên 4 cây. Tính xác suất để trong 4 cây bác Nam chặt không có hai cây nào gần nhau.	
	Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$ Trường hợp 1: Cả 4 cây được chặt ở gần nhau có 20 cách	**0,5**
	Trường hợp 2: Trong 4 được chặt có đúng 3 cây gần nhau - Chặt 3 cây gần nhau có 20 cách - Mỗi 3 cây gần nhau có 15 cây không gần 3 cây đó. Vậy trường hợp này có: 20 X 15 = 300 cách	**0,5**
	Trường hợp 3: Trong 4 cây được chặt có đúng 2 cây gần nhau: - Chặt đúng 2 cây ở gần nhau có 20 cách - Với mỗi 2 cây gần nhau có 16 cây không ở gần hai cây này. Trong 16 cây lại có 15 cặp cây gần nhau. Chọn hai cây không gần nhau trong 16 cây có: $C_{16}^2 - 15 = 105$ Vậy trường hợp này có: 20.105 = 2100 cách	**0,5**
	Trường hợp 4: Trong 4 cây được chặt có đúng hai cặp cây gần nhau - Chọn một cặp cây gần nhau có 20 cách - Mỗi cách chọn một cặp cây gần nhau lại có 15 cặp cây gần nhau được chọn từ 16 cây. Vậy trường hợp này có $\frac{20.15}{2} = 150$ cách Vậy $n(A) = 4845 - (20 + 300 + 2100 + 150) = 2275$ Suy ra: $P(A) = \frac{2275}{4845} = \frac{455}{969}$	**0,5**
3	**Câu 3 (2,0 điểm).** Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 4(n+2)$. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển nhị thức Niu – tơn của $P = x(1-2x)^n + x^2(1+3x)^{2n}$.	
	ĐK: n nguyên dương, ta có $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 4(n+2)$ tương đương với $\frac{(n+4)!}{(n+1)!.3!} - \frac{(n+3)!}{n!.3!} = 4(n+2) \Leftrightarrow \frac{(n+4)(n+3)}{6} - \frac{(n+3)(n+1)}{6} = 4$ $\Leftrightarrow 3n = 15 \Leftrightarrow n = 5.$	**0,5**
	Với $n = 5,$ ta có $P = x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ Xét khai triển: $x(1-2x)^5 = x\sum_{k=0}^{5} C_5^k(-2x)^k$, suy ra hệ số chứa x^5 ứng với $k = 4$ và ta có $a_5 = C_5^4(-2)^4 = 80$ Xét khai triển: $x^2(1+3x)^{10} = x^2\sum_{m=0}^{10} C_{10}^k(3x)^m$, suy ra hệ số chứa x^5 ứng với $m = 3$ và ta có $a_5 = C_{10}^3.3^3 = 3240.$	**1,0**
	Vậy hệ số của x^5 trong khai triển là: $a_5 = 80 + 3240 = 3320.$	**0,5**
4	**Câu 4 (2,0 điểm).** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $u_1 = \frac{1}{3},\ u_{n+1} = \frac{n+1}{n}u_n - \frac{(n+1)(2n+1)}{\left[(n+1)^2+2\right](n^2+2)}; n \in \mathbb{N}^*$. Tính $\lim \frac{2021nu_n}{2020}$	

	$\dfrac{u_{n+1}}{n+1}=\dfrac{u_n}{n}-\dfrac{(2n+1)}{\left[(n+1)^2+2\right](n^2+2)}$ $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1}=\dfrac{u_n}{n}-\left[\dfrac{1}{(n^2+2)}-\dfrac{1}{\left[(n+1)^2+2\right]}\right]$ $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{n+1}-\dfrac{1}{\left[(n+1)^2+2\right]}=\dfrac{u_n}{n}-\dfrac{1}{(n^2+2)}$	**0,75**
	Đặt: $v_n=\dfrac{u_n}{n}-\dfrac{1}{(n^2+2)}$, $n\in \mathbb{N}^*$. Ta có $v_1=0$ và $v_{n+1}=v_n, \forall n\ge 1$. Suy ra $v_n=0$ $\dfrac{u_n}{n}-\dfrac{1}{(n^2+2)}=0\Leftrightarrow u_n=\dfrac{n}{n^2+2}$, $n\in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow u_n=\dfrac{n}{n^2+2}$	**0,75**
	Suy ra $\lim \dfrac{2021nu_n}{2020}=\lim\left(\dfrac{2021n}{2020}.\dfrac{n}{n^2+2}\right)=\dfrac{2021}{2020}$	**0,5**
5	**Câu 5 (2,0 điểm).** Giải bất phương trình $\dfrac{1+2\sqrt{x}-2\sqrt{x^2+3x+1}}{1-2\sqrt{x^2-x+1}}>1$.	
	Điều kiện $x\ge 0$ Ta có $2\sqrt{x^2-x+1}=2\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}\ge\sqrt{3}>1$ nên $1-2\sqrt{x^2-x+1}<0$ Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow 1+2\sqrt{x}-2\sqrt{x^2+3x+1}<1-2\sqrt{x^2-x+1}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x^2-x+1}<\sqrt{x^2+3x+1}$	**0,5**
	Nếu $x=0$ thì bất phương trình trở thành $1<1$ (vô lý) Nếu $x>0$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow 1+\sqrt{x+\dfrac{1}{x}-1}<\sqrt{x+\dfrac{1}{x}+3}$	**0,5**
	Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$ với $t\ge 2$, bất phương trình trở thành $1+\sqrt{t-1}<\sqrt{t+3}$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{t-1}<3\Leftrightarrow t<\dfrac{13}{4}$	**0,5**
	Với $t<\dfrac{13}{4}$ thì $x+\dfrac{1}{x}<\dfrac{13}{4}\Leftrightarrow 4x^2-12x+4<0\Leftrightarrow \dfrac{13-\sqrt{105}}{8}<x<\dfrac{13+\sqrt{105}}{8}$ Vậy bất phương trình có nghiệm là $\dfrac{13-\sqrt{105}}{8}<x<\dfrac{13+\sqrt{105}}{8}$	**0,5**
6	**Câu 6 (2,0 điểm).** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-5;2)$.	

	$M(-1;-2)$ là điểm nằm bên trong hình bình hành sao cho $\widehat{MDC}=\widehat{MBC}$ và $MB\perp MC$. Tìm tọa độ điểm D biết $\tan\widehat{DAM}=\frac{1}{2}$.	
	Gọi E là điểm thứ tư của hình bình hành $MABE$, dễ thấy $MECD$ cũng là hình bình hành nên $\widehat{MEC}=\widehat{MDC}$. Mà $\widehat{MDC}=\widehat{MBC}$ suy ra $\widehat{MEC}=\widehat{MBC}$ hay tứ giác $BECM$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{BMC}+\widehat{BEC}=180^o\Rightarrow\widehat{BEC}=180^o-90^o=90^o$	**0,5**
	Ta có $\Delta AMD=\Delta BEC\ (c.c.c)\Rightarrow\widehat{AMB}=\widehat{BEC}=90^o$ hay ΔAMD vuông tại M	**0,5**
	Vì $\tan\widehat{DAM}=\frac{DM}{MA}=\frac{1}{2}\Rightarrow DM=\frac{1}{2}MA$. Ta có $MA=4\sqrt{2}\Rightarrow MD=2\sqrt{2}\Rightarrow AD^2=MA^2+MD^2=40$.	**0,5**
	Giả sử $D(x;y)$ ta có $\begin{cases}AD^2=40\\MD^2=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+5)^2+(y-2)^2=40\\(x+1)^2+(y+2)^2=8\end{cases}$. Giải hệ phương trình trên được hai nghiệm: $(-3;-4),(1;0)$. Vậy có hai điểm D thỏa mãn đề bài là: $D(-3;-4),D(1;0)$.	**0,5**
		
7	**Câu 7 (4,0 điểm).** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M là điểm nằm trên SB sao cho $\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SB}$. a. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA. Tính theo a diện tích thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$. b. E là một điểm thay đổi trên cạnh AC. Xác định vị trí điểm E để ME vuông góc với CD.	
	7a.(2 điểm)	
	Từ M kẻ $MN//SA\ (N\in AB)$. Khẳng định thiết diện là tam giác CMN.	**0,5**
	Ta có: $\frac{MN}{SA}=\frac{BM}{BS}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN=\frac{2a}{3}$. Xét ΔSMC có: $MC^2=SM^2+SC^2-2.SM.SC.\cos MSC=\frac{a^2}{9}+a^2-2.\frac{a}{3}.a.\frac{1}{2}=\frac{7a^2}{9}$ $\Rightarrow MC=\frac{a\sqrt{7}}{3}$. $CN=\sqrt{BN^2+CB^2}=\sqrt{\frac{4a^2}{9}+a^2}=\frac{\sqrt{13}a}{3}$.	**0,5**

	Có $\cos CMN = \dfrac{MN^2 + MC^2 - CN^2}{2.MC.MN} = \dfrac{\dfrac{4a^2}{9} + \dfrac{7a^2}{9} - \dfrac{13a^2}{9}}{2.\dfrac{a\sqrt{7}}{3}.\dfrac{2a}{3}} = -\dfrac{\sqrt{7}}{14}$. Suy ra $\sin CMN = \sqrt{1 - \cos^2 CMN} = \dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.	**0,5**
	Diện tích thiết diện là: $S_{\Delta CMN} = \dfrac{1}{2}.MC.MN.\sin CMN = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{7}}{3}.\dfrac{2a}{3}.\dfrac{3\sqrt{21}}{14} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^2$ (đvdt).	**0,5**
		
	7b (2,0 điểm)	
	Đặt $CE = xCA$. Kẻ $EH \perp CD$ $(H \in CD) \Rightarrow EH // AD$ nên $CH = xCD$ Suy ra $\overrightarrow{CH} = x\overrightarrow{CD}$.	**0,5**
	$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{CH} - \overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CD} - (\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB})$ $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HE}$	**0,5**
	Để ME vuông góc CD điều kiện là: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HE}).\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CD} = 0$ do $HE \perp CD$. $\Leftrightarrow \left[x\overrightarrow{CD} - (\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CS} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB})\right].\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow x\overrightarrow{CD}^2 - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD} = 0$ do $CB \perp CD$	**0,5**
	Do ΔSCD đều nên $\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD} = CS.CD.\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}a^2$. Do đó $x.a^2 - \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2(x - \dfrac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$. Vậy E thuộc đoạn AC thỏa mãn $CE = \dfrac{1}{3}CA$.	**0,5**
8	**Câu 8 (2,0 điểm).** Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \dfrac{4}{a+b} + \dfrac{4}{b+c} + \dfrac{4}{c+a} + \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - 1}{2abc}$.	
	Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác có chu vi bằng 1 nên $a, b, c \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$	**0,25**

	$T=\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1-b}+\frac{4}{1-c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5b-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}$	**0,5**
	Ta có $\frac{5a-1}{a-a^2}-(18a-3)=\frac{(3a-1)^2(2a-1)}{a-a^2}\le 0,\forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow \frac{5a-1}{a-a^2}\le(18a-3),\forall a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$ Tương tự ta có : $\frac{5b-1}{b-b^2}\le(18b-3),\forall b\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $\frac{5c-1}{c-c^2}\le(18c-3),\forall c\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$	**0,75**
	Suy ra $T=\frac{5a-1}{a-a^2}+\frac{5b-1}{b-b^2}+\frac{5c-1}{c-c^2}\le 18(a+b+c)-9=9$ Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}\Rightarrow T_{max}=9$ đạt được $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$	**0,5**

----------------------Hết----------------------