SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU	ĐỀ THI OLYMPIC 27/4 - NĂM HỌC 2017- 2018 MÔN THI: TOÁN LỚP 11
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Ngày thi: 06/03/2018 *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề*

Bài 1 (5,0 điểm):

1) Giải phương trình $2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)-\left(1+2\cos 2x\right)\sin x=\sqrt{3}\cos 3x$.

2) Cho tam giác ABC không tù và thỏa mãn $2\left(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C\right)+3\cos A\cos B\cos C=\dfrac{9}{8}$.

Chứng minh ABC là một tam giác đều.

Bài 2 (2,0 điểm): Cho khai triển sau:

$$\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018}=a_{2018}x^{2018}+a_{2017}x^{2017}+...+a_1x+a_0+\frac{b_1}{x+1}+\frac{b_2}{(x+1)^2}+...+\frac{b_{2018}}{(x+1)^{2018}} \text{ với } x\neq -1.$$

Hãy tính hệ số a_0 và tổng $S=b_1+b_2+...+b_{2018}$.

Bài 3 (5,0 điểm): Cho đoạn AB vuông góc mặt phẳng (P) tại điểm B. Trong (P) lấy điểm H thỏa $BH=BA=a\,(a>0)$. Vẽ đường thẳng d nằm trong (P) và qua H, d vuông góc với BH. Hai điểm M, N di động trên d và thỏa mãn $\widehat{MAN}=90^\circ$. Đường thẳng qua A và vuông góc mặt phẳng (AMN) cắt (P) tại điểm K.

1) Chứng minh rằng B là trực tâm của tam giác KMN .

2) Gọi α,β lần lượt là số đo các góc tạo bởi BM với mp(AKN), BN với mp(AKM). Chứng minh $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=\dfrac{1}{2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của $\alpha+\beta$.

Bài 4 (4,0 điểm): Cho dãy số (a_n) xác định bởi công thức:

$$\begin{cases} a_1=1; a_2=2; \\ na_{n+2}=(3n+2)a_{n+1}-2(n+1)a_n; n=1;2;3;... \end{cases}$$

1) Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy (a_n).

2) Chứng minh $\sqrt{a_1-1}+\sqrt{a_2-1}+...+\sqrt{a_n-1}\geq\dfrac{n(n-1)}{2};\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3) Tính $\lim\left(\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}+...+\dfrac{a_n}{3^n}\right)$.

Bài 5 (4,0 điểm):

1) Tìm tất cả các giá trị của a để giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(ax+\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}\right)$ có giá trị hữu hạn.

2) Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+f(x)+f(y)+2xy \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$

---------------- HẾT ----------------

Họ và tên thí sinh.. Số báo danh ....

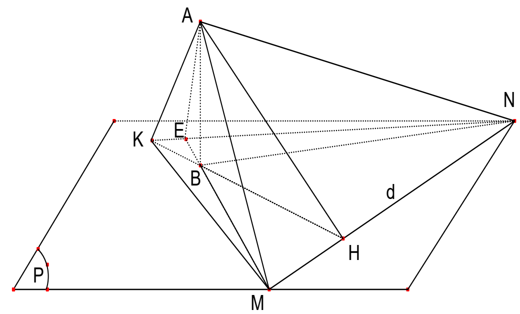
Chữ ký của giám thị 1 ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH BÀ RỊA – VŨNG TÀU	KỲ THI OLYMPIC 27/4 - NĂM HỌC 2017- 2018 MÔN THI: TOÁN LỚP 11

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Bài	Nội dung	Điểm
1.1 **(2,5 đ)**	$2\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)-\left(1+2\cos 2x\right)\sin x=\sqrt{3}\cos 3x$ $\Leftrightarrow 2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-\sin x-2\sin x\cos 2x=\sqrt{3}\cos 3x$	0,25
	$\Leftrightarrow 2\cos 2x-\sin x-\sin 3x+\sin x=\sqrt{3}\cos 3x$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 3x=\cos 2x$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}\cos 3x+\sin\frac{\pi}{6}\sin 3x=\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x$	0,25x2
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{6}=2x+k2\pi\\ 3x-\frac{\pi}{6}=-2x+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{\pi}{30}+k\frac{2\pi}{5}\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right)$	0,5x2
1.2 **(2,5đ)**	Ta có $\cos A\cos B\cos C=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B\right)+\cos\left(A-B\right)\right]\cos C$	0,25
	$=\frac{1}{2}\left[-\cos^2 C-\cos\left(A-B\right)\cos\left(A+B\right)\right]$	0,25
	$=\frac{1}{2}\left[-\cos^2 C-\frac{1}{2}\left(\cos 2A+\cos 2B\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1\right)$	0,25x2
	Do đó $gt \Leftrightarrow 2\left(\cos^3 A+\cos^3 B+\cos^3 C\right)-\frac{3}{2}\left(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C-1\right)=\frac{9}{8}$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(16\cos^3 A-12\cos^2 A+1\right)+\left(16\cos^3 B-12\cos^2 B+1\right)$ $+\left(16\cos^3 C-12\cos^2 C+1\right)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left(2\cos A-1\right)^2\left(4\cos A+1\right)+\left(2\cos B-1\right)^2\left(4\cos B+1\right)$ $+\left(2\cos C-1\right)^2\left(4\cos C+1\right)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \cos A=\cos B=\cos C=\frac{1}{2}$ (Do $4\cos A+1>0, 4\cos B+1>0, 4\cos C+1>0$).	0,25x2
	$\Leftrightarrow A=B=C=60^0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều (đpcm).	0,25
2 **(2,0đ)**	Đặt $f(x)=\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)^{2018}$ ta có $f(0)=a_0+b_1+...+b_{2018}=2^{2018}$. Vậy $a_0+S=2^{2018}$.(1)	0,5
	$f(x)=\left(x+1+\frac{1}{x+1}\right)^{2018}=\sum_{k=0}^{2018}C_{2018}^k(x+1)^{2k-2018}$ $=\sum_{k=0}^{1008}\frac{C_{2018}^k}{(x+1)^{2018-2k}}+\sum_{k=1009}^{2018}C_{2018}^k(x+1)^{2k-2018}$	0,5
	$b_1=b_3=...=b_{2017}=0 \Rightarrow S=b_2+b_4+...+b_{2018}=C_{2018}^{1008}+C_{2018}^{1007}+...+C_{2018}^{1}+C_{2018}^{0}$	0,25

	$a_0 = C_{2018}^{1009} + C_{2018}^{1010} + ... + C_{2018}^{2017} + C_{2018}^{2018} = C_{2018}^{1009} + S, (do\, C_n^k = C_n^{n-k})\,(2)$	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra: $S = 2^{2017} - \dfrac{2017!}{1009}; \quad a_0 = 2^{2017} + \dfrac{2017!}{1009}.$	0,5
3.1 (2,5đ)	- Xác định vị trí M, N trên d: Tam giác AMN vuông tại A và có đường cao AH ($MN \perp AB, BH$) nên M, N khác phía đối với H. - Xác định vị trí K: trong (ABH) dựng K thuộc BH và $\widehat{KAH} = 90^\circ$ ($BH = BA = a$ nên B là trung điểm KH), - Chứng minh: $AK \perp (AMN)$.  	0,5 0,5 0,5
	- $AM \perp AN, AK \Rightarrow AM \perp KN$. Mà $AB \perp (P) \Rightarrow KN \perp AB$, vậy $KN \perp BM$.	0,5
	- $KH \perp MN(cmt), KH \cap BM = B$ nên B là trực tâm tam giác KMN.	0,5
3.2 (2,5đ)	$AM \perp (AKN) \Rightarrow (BM,(AKN)) = \widehat{MEA} = \widehat{MAB} = \alpha$, tương tự $\widehat{NAB} = \beta$.	1,0
	$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \left(\dfrac{AB}{AM}\right)^2 + \left(\dfrac{AB}{AN}\right)^2 = \dfrac{AB^2}{AH^2} = \dfrac{1}{2}$, (do tam giác ABH vuông cân tại B). (*Cách khác: chứng minh, áp dụng hệ thức* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,\ \gamma = \widehat{KAB} = 45^0$)	0,5
	$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) = -\dfrac{1}{2}$. $\alpha, \beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \cos(\alpha - \beta) \le 1$. Vậy $\cos(\alpha+\beta) \le -\dfrac{1}{2}$.(1)	0,5
	$\alpha, \beta \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \alpha + \beta < \pi$ và hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $(0;\pi)$ nên từ (1) ta có $\alpha + \beta \ge \dfrac{2\pi}{3}$. Kết luận: $\min(\alpha+\beta) = \dfrac{2\pi}{3}$ đạt khi $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow HM = HN = a\sqrt{2}$.	0,5
4.1 (2,0đ)	$na_{n+2} = (3n+2)a_{n+1} - 2(n+1)a_n \Leftrightarrow n(a_{n+2} - a_{n+1}) = 2(n+1)(a_{n+1} - a_n) \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+2} - a_{n+1}}{n+1} =$	0,5
	Đặt $x_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{n}$, ta có $x_1 = a_2 - a_1 = 1; x_{n+1} = 2x_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (x_n) là cấp số nhân với công bội $q = 2$, nên $x_n = x_1.q^{n-1} = 2^{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5
	Suy ra $a_{n+1} - a_n = n.2^{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a_n = a_1 + 1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + ... + (n-1)2^{n-2}$ $\Rightarrow a_n = 2 + [2.2^1 + 3.2^2 + ... + (n-1)2^{n-2}]; \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5
	Xét $2a_n = 4 + [2.2^2 + 3.2^3 + ... + (n-2)2^{n-2} + (n-1)2^{n-1}]$ $\Rightarrow 2a_n - a_n = (n-1)2^{n-1} - (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-2}) \Rightarrow a_n = (n-1)2^{n-1} - (2^{n-1} - 2) = (n$	0,5
4.2 (1,0đ)	$2^{n-1} = (1+1)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1} \ge 1 + (n-1) = n; \forall n \ge 2$ $\Rightarrow a_n = (n-2)2^{n-1} + 2 \ge (n-2)n + 2 = (n-1)^2 + 1; \forall n \ge 2 \Rightarrow \sqrt{a_n - 1} \ge n - 1; \forall n \ge 2$	0,5
	$\sqrt{a_1 - 1} + \sqrt{a_2 - 1} + ... + \sqrt{a_n - 1} \ge 0 + 1 + 2 + ... + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}; \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,5

4.3 (1,0đ)	Ta có $\frac{a_k}{3^k}=\frac{(k-2)2^{k-1}+2}{3^k}=\frac{k}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^k-\left(\frac{2}{3}\right)^k+2.\left(\frac{1}{3}\right)^k;\forall k\in\mathbb{N}^*$ $\Rightarrow \frac{a_1}{3^1}+\frac{a_2}{3^2}+...+\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{2}S_n-T_n+2P_n$, với $S_n=1\left(\frac{2}{3}\right)^1+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+n\left(\frac{2}{3}\right)^n$; $T_n=\left(\frac{2}{3}\right)^1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n;P_n=\left(\frac{1}{3}\right)^1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+...+\left(\frac{1}{3}\right)^n$; Xét $\frac{2}{3}S_n=1\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^3+...+(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ $\Rightarrow S_n-\frac{2}{3}S_n=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+...+\left(\frac{2}{3}\right)^n-n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\Rightarrow S_n=3T_n-2n\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Vậy $\frac{a_1}{3^1}+\frac{a_2}{3^2}+...+\frac{a_n}{3^n}=\frac{1}{2}T_n+2P_n-n\left(\frac{2}{3}\right)^n$.	0,5
	$\lim T_n=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}=2;\lim P_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=C_n^0+C_n^1\left(\frac{1}{2}\right)+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+...\ge C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{n(n-1)}{8};\forall n\ge 2$ $\Rightarrow 0<n\left(\frac{2}{3}\right)^n\le\frac{8}{n-1};\forall n\ge 2\Rightarrow \lim n\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. Vậy $\lim\left(\frac{a_1}{3^1}+\frac{a_2}{3^2}+...+\frac{a_n}{3^n}\right)=2$.	0,5
5.1 (2,0 đ)	Nếu $a\ne 1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(ax+\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(a+\sqrt{1+\frac{2}{x}}-2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$ $=\begin{cases}+\infty \text{ khi } a>1\\-\infty \text{ khi } a<1\end{cases}$.	0,25 0,25
	Nếu $a=1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(ax+\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(x+\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}\right)$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right)+(2x+1)-2\sqrt{x^2+x}\right]$	0,25 0,25
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}+\frac{1}{2x+1+2\sqrt{x^2+x}}\right]$	0,25
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{2+\frac{1}{x}+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right]=-\frac{1}{4}$.	0,25x2
	Vậy $a=1$ là giá trị cần tìm.	0,25
5.2 (2,0đ)	Giả sử $f(x)$ là một hàm số thỏa mãn giả thiết bài toán. $f(x+y)+f(x)f(y)=f(xy)+f(x)+f(y)+2xy$ (1) $\Leftrightarrow f(x+y)-1+[f(x)-1][f(y)-1]=f(xy)-1+2xy+1$. Đặt $g(x)=f(x)-1$ ta có phương trình $g(x+y)+g(x)g(y)=g(xy)+2xy+1,\forall x,y\in\mathbb{R}$ (2)	0,25

	Kí hiệu $P(a,b)$ chỉ việc thay x bởi a và thay y bởi b vào phương trình (2) $P(x,0) \Rightarrow g(x)+g(x)g(0)=g(0)+1 \Leftrightarrow [g(0)+1][g(x)-1]=0 \quad (3)$. Nếu $g(0)+1 \neq 0$ thì từ (3) suy ra $g(x)=1, \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (2) ta thấy hàm số này không thỏa mãn, do đó $g(0)=-1$.	0,25
	$P(1,-1) \Rightarrow g(0)+g(1)g(-1)=g(-1)-1 \Leftrightarrow [g(1)-1]g(-1)=0$ Nếu $g(1)=1$ thì $P(x;1) \Rightarrow g(x+1)=2x+1=2(x+1)-1 \Rightarrow g(x)=2x-1, \forall x$. Ta thấy hàm số này thỏa mãn (2).	0,25
	Nếu $g(1) \neq 1$ thì $g(-1)=0$. Đặt $a=g(1)$. $P(x,1) \Rightarrow g(x+1)+ag(x)=g(x)+2x+1 \Leftrightarrow g(x+1)=(1-a)g(x)+2x+1, \forall x \in \mathbb{R}$	0,25
	$P(-x,-1) \Rightarrow g(-x-1)=g(x)+2x+1 \Leftrightarrow g(x)=g(-x-1)-(2x+1)$. Thay vào (4) ta được $g(x+1)=(1-a)[g(-x-1)-(2x+1)]+2x+1=(1-a)g(-x-1)+a(2x+1), \forall x \in$ $\Rightarrow g(x)=(1-a)g(-x)+a(2x-1), \forall x \in \mathbb{R} \quad (5)$ $\Rightarrow g(-x)=(1-a)g(x)+a(-2x-1), \forall x \in \mathbb{R}$. Thay vào (5) ta được $g(x)=(1-a)[(1-a)g(x)+a(-2x-1)]+a(2x-1)$ $\Leftrightarrow (a^2-2a)g(x)=-2a^2x-(a^2-2a), \forall x \in \mathbb{R} \ (6)$	0,25
	Rõ ràng từ (6) suy ra $a \neq 2$. Nếu $a \neq 0$ thì từ (6) suy ra $g(x)=-\dfrac{2a}{a-2}x-1, \forall x \in \mathbb{R}$ Thay vào (2) ta được $\dfrac{4(a^2+a-2)}{(a-2)^2}xy=0, \forall x,y \Leftrightarrow a=-2$ (Vì $a=g(1) \neq 1$) $\Rightarrow g(x)=-x-1, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số này thỏa mãn (2).	0,25
	Nếu $a=0$ thì từ (5) suy ra $g(x)=g(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. $P(x,-x) \Rightarrow g(0)+g(x)g(-x)=g(-x^2)-2x^2+1$ $\Rightarrow -1+g^2(x)=g(x^2)-2x^2+1 \ (7)$ $P(x,x) \Rightarrow g(2x)+g^2(x)=g(x^2)+2x^2+1 \ (8)$ Từ (7) và (8) $\Rightarrow g(2x)=4x^2-1 \Rightarrow g(x)=x^2-1, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số này thỏa mãn (2).	0,25
	Do $f(x)=g(x)+1$ nên các hàm số cần tìm là $f(x)=2x, f(x)=-x, f(x)=x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.	0,25

---------------- HẾT ----------------