

Bài I (4,0 điểm) Giải các phương trình sau:

1) $(\sin x + \cos x)(2 \sin x + 1) = 2 + 2 \sin 2x.$

2) $\frac{1}{\tan x} + \frac{\sin x}{\cos x - 1} = 1 - 2 \sin x.$

Bài II (2,0 điểm) Tính các giới hạn sau:

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 3n).$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sqrt[3]{1+2x} - 1}{x}.$

Bài III (3,0 điểm) Cho bất phương trình $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 2} + \log_{\frac{1}{2}} (3x^2 + x + m) + 1 < 0.$

1) Giải bất phương trình đã cho khi $m = 2.$

2) Tìm các giá trị của m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(-2; 3).$

Bài IV (1,0 điểm) Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 7 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số 0 xuất hiện đúng 3 lần. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , tính xác suất để số đó chia hết cho 5.

Bài V (6,0 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, các cạnh còn lại của hình chóp bằng $a.$

Gọi I là trung điểm $AC.$

1) Chứng minh SI vuông góc với đường thẳng $BC.$

2) Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và $SC.$

3) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $SAC.$ Một mặt phẳng đi qua G và G' cắt hai cạnh SA, SC lần lượt tại M và $N.$ Khi MN đạt giá trị nhỏ nhất, tính diện tích của tam giác $GMN.$

Bài VI (4,0 điểm)

1) Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1$ và công sai $d > 0.$ Chứng minh

$$\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2023} u_{2024}} < \frac{1}{d}.$$

2) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - n + 1, \forall n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số $(u_n).$ Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3^n}.$

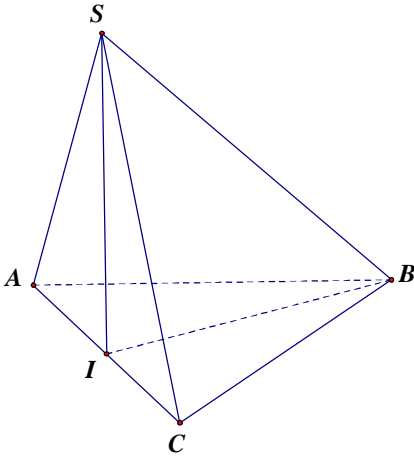
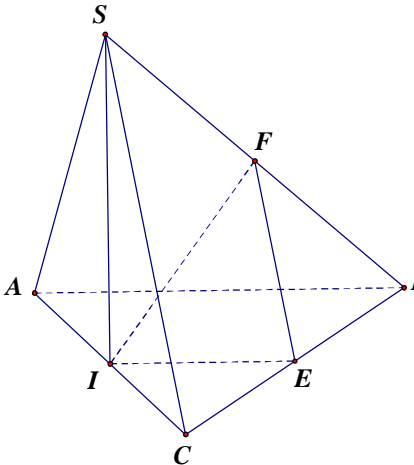
-----**HẾT**-----
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

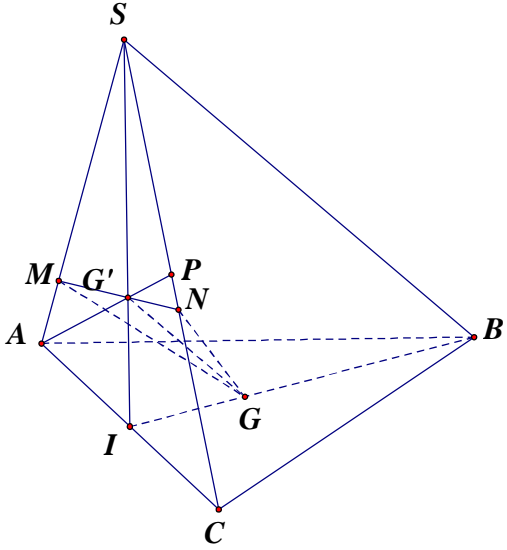
Họ tên thí sinh:.....Số báo danh:.....
Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Bài I.1	1) $(\sin x + \cos x)(2 \sin x + 1) = 2 + 2 \sin 2x$	2,0đ
	Ta có $(\sin x + \cos x)(2 \sin x + 1) = 2(1 + 2 \sin x \cos x)$	0,5
	$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2 \sin x + 1) = 2(\sin x + \cos x)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 \\ 2 \sin x + 1 = 2(\sin x + \cos x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$	0,5
Bài I.2	2) $\frac{1}{\tan x} + \frac{\sin x}{\cos x - 1} = 1 - 2 \sin x$	2,0 đ
	Điều kiện $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos x \neq 1 \end{cases}$	0,25
	Ta có $\frac{1}{\tan x} + \frac{\sin x}{\cos x - 1} = 1 - 2 \sin x \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x - 1} = 1 - 2 \sin x$ $\Leftrightarrow \frac{\cos x(\cos x - 1) + \sin^2 x}{\sin x(\cos x - 1)} = 1 - 2 \sin x \Leftrightarrow \frac{1 - \cos x}{\sin x(\cos x - 1)} = 1 - 2 \sin x$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x} = 2 \sin x - 1 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$	0,5
	Kết hợp điều kiện, phương trình có 2 họ nghiệm là $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$	0,25
Bài II.1	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 3n)$	1,0 đ
	Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 3n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n + \sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n)$	0,25

	$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1+n}} + \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2+2n+1+2n}} \right)$	0,5								
	$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	0,25								
Bài II.2	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sqrt[3]{1+2x} - 1}{x}$	1,0 đ								
	Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} \sqrt[3]{1+2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{1+x} (\sqrt[3]{1+2x} - 1)}{x} + \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \right]$	0,25								
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2\sqrt{1+x}}{(\sqrt[3]{1+2x})^2 + \sqrt[3]{1+2x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} \right]$	0,5								
	$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$	0,25								
Bài III.1	Giải bất phương trình đã cho khi $m = 2$.	2,0 đ								
	Với $m = 2$, bất phương trình đã cho trở thành: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 2} + \log_{\frac{1}{2}} (3x^2 + x + 2) + 1 < 0 \text{ (điều kiện: } x \in \mathbb{R} \text{)}$	0,5								
	$\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 2) + 1 < \log_2 (3x^2 + x + 2) \Leftrightarrow 2(x^2 + 2) < 3x^2 + x + 2$	0,5								
	$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -2 \end{cases}$	0,5								
	Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.	0,5								
Bài III.2	Tìm m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x thuộc khoảng $(-2; 3)$.	1,0 đ								
	Ta có $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 2} + \log_{\frac{1}{2}} (3x^2 + x + m) + 1 < 0$ $\Leftrightarrow \log_2 (x^2 + 2) + 1 < \log_2 (3x^2 + x + m)$	0,25								
	$\Leftrightarrow 2(x^2 + 2) < 3x^2 + x + m$ $\Leftrightarrow m > -x^2 - x + 4 \text{ (*)}$	0,25								
	Xét hàm số $f(x) = -x^2 - x + 4$ trên $(-2; 3)$ ta có bảng biến thiên									
	<table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tbody> <tr> <td style="width: 15%;">x</td> <td style="width: 20%;">-2</td> <td style="width: 20%;">$-\frac{1}{2}$</td> <td style="width: 20%;">3</td> </tr> <tr> <td style="width: 15%;">$f(x)$</td> <td style="width: 20%;">2</td> <td style="width: 20%;">$\frac{17}{4}$</td> <td style="width: 20%;">-8</td> </tr> </tbody> </table>	x	-2	$-\frac{1}{2}$	3	$f(x)$	2	$\frac{17}{4}$	-8	0,25
x	-2	$-\frac{1}{2}$	3							
$f(x)$	2	$\frac{17}{4}$	-8							

	Bất phương trình đã cho nghiệm đúng $\forall x \in (-2;3)$ khi và chỉ khi bất phương trình (*) nghiệm đúng $\forall x \in (-2;3)$. Suy ra $m > \text{Max}_{(-2;3)} f(x) \Leftrightarrow m > \frac{17}{4}$.	0,25	
Bài IV	Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 7 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc S , tính xác suất để số đó chia hết cho 5.	1,0 đ	
	Số STN có 7 chữ số trong đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần là: $C_6^3 \cdot 9^4$ (số).	0,25	
	Số STN có 7 chữ số không chia hết cho 5 và trong đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần là: $C_5^3 \cdot 9^3 \cdot 8$ (số).	0,25	
	Suy ra số STN có 7 chữ số chia hết cho 5 và trong đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần là: $C_6^3 \cdot 9^4 - C_5^3 \cdot 9^3 \cdot 8$ (số).	0,25	
	Vậy xác suất cần tính là $P = \frac{C_6^3 \cdot 9^4 - C_5^3 \cdot 9^3 \cdot 8}{C_6^3 \cdot 9^4} = \frac{5}{9}$.	0,25	
Câu V.1	Chứng minh $SI \perp BC$.	2,0 đ	
		<p>Từ giả thiết suy ra $\Delta SAC, \Delta ABC$ đều.</p> <p>Do I là trung điểm $AC \Rightarrow SI = BI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.</p> <p>Xét ΔSBI có $SI^2 + BI^2 = SB^2$ Suy ra ΔSBI vuông cân tại I. $\Rightarrow SI \perp IB$. Do ΔSAC đều nên $SI \perp AC$. Suy ra $SI \perp (ABC) \Rightarrow SI \perp BC$.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu V.2	Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AB và SC .	2,0 đ	
		<p>Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC, SB. Suy ra $\begin{cases} IE \parallel AB \\ EF \parallel SC \end{cases} \Rightarrow (AB, SC) = (EI, EF) = \alpha$.</p> <p>Có $IE = \frac{a}{2}; EF = \frac{a}{2}; IF = \frac{a\sqrt{6}}{4}$</p> <p>$\Rightarrow \cos \widehat{IEF} = \frac{IE^2 + EF^2 - IF^2}{2EI \cdot EF} = \frac{1}{4}$</p> <p>$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}$.</p>	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu	Tính diện tích của tam giác GMN .	2,0 đ	

V.3		
	<p>Nếu $M \equiv A$ hoặc $N \equiv C$ thì $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.</p>	0,25
	<p>Nếu M khác A, N khác C. Gọi P là trung điểm SC. Đặt $SM = x; SN = y (0 < x, y < a)$. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle SAE$ ta có $\frac{MS}{MA} \cdot \frac{G'A}{G'P} \cdot \frac{NP}{NS} = 1$</p>	0,25
	$\Rightarrow \frac{x}{a-x} \cdot 2 \cdot \frac{y-\frac{a}{2}}{y} = 1$ $\Rightarrow \frac{a-x}{x} = \frac{2y-a}{y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{a}$	0,5
	<p>Do $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{4}{x+y} \leq \frac{3}{a} \Rightarrow x+y \geq \frac{4a}{3}$.</p> <p>Áp dụng định lý cosin ta có: $MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2SM \cdot SN \cdot \cos 60^\circ$</p> $= x^2 + y^2 - xy = \frac{1}{4}(x+y)^2 + \frac{3}{4}(x-y)^2 \geq \frac{1}{4}\left(\frac{4a}{3}\right)^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow MN \geq \frac{2a}{3}$	0,5
<p>Câu VI.1</p>	<p>Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow GG' \perp MN$.</p> <p>Suy ra $S_{\triangle GMN} = \frac{1}{2} GG' \cdot MN = \frac{a^2 \sqrt{6}}{18}$.</p>	0,5
<p>Câu VI.1</p>	<p>Chứng minh $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2023} u_{2024}} < \frac{1}{d}$.</p>	2,0 đ
	<p>Do $d > 0$ nên (u_n) là dãy số tăng, suy ra $u_n > 0, \forall n$</p>	0,5
	<p>Ta có $\frac{d}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}, \forall k = 1, 2, \dots$</p>	0,5
	<p>Do đó: $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2023} u_{2024}} = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \dots + \frac{1}{u_{2023}} - \frac{1}{u_{2024}} \right)$</p>	0,5
	<p>$= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{2024}} \right) < \frac{1}{d}$.</p>	0,5
<p>Câu VI.2</p>	<p>Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n). Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3^n}$.</p>	2,0 đ
	<p>Ta có $u_{n+1} = 2u_n - n + 1 \Rightarrow u_{n+1} - n - 1 = 2(u_n - n)$</p>	0,5

	Đặt $v_n = u_n - n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$ Suy ra $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases} \Rightarrow v_n = 2^n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$	0,5
	$\Rightarrow u_n = 2^n + n, \forall n = 1, 2, 3, \dots$	0,5
	Do $2^n = (1+1)^n > n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \frac{u_n}{3^n} < \frac{2 \cdot 2^n}{3^n} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Mà $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{3^n} = 0$.	0,5

Lưu ý: Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.