

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ (1)

1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -4$.

2/ Xác định m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ).

Câu 2 (0,5 điểm). Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$.

Tìm mô đun của số phức $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$

Câu 3 (0,5 điểm). Giải bất phương trình $1 + \log_{\sqrt{2}}(x-1) \leq \log_2(x^2 + x - 4)$.

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (e^{\cos x} + x) \sin x dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1; 2; 3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $4x + y - z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) và tìm tọa độ tiếp điểm M.

Câu 6 (1,0 điểm).

a/ Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$.

b/ Xét tập hợp E gồm các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau tạo thành từ các chữ số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một phân tử của tập hợp E. Tìm xác suất để phân tử chọn được là một số chia hết cho 5.

Câu 7 (1,0 điểm). Cho hình chóp S.ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC) theo a.

Câu 8 (1,0 điểm).

Giải bất phương trình: $(4x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 + x + 2} \leq (4x^2 + 3x + 5)\sqrt{x^2 - 1} + 1$

Câu 9 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh B thuộc đường thẳng $(d_1): 2x - y + 2 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $(d_2): x - y - 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết $M\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $K(9; 2)$ lần lượt là trung điểm của AH, CD và điểm C có tung độ dương.

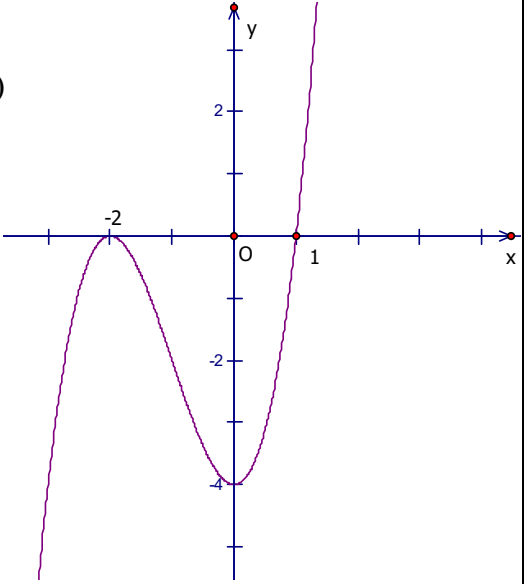
Câu 10 (1,0 điểm).

Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(a+b+c)} - (b^2 + c^2)$.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị không giải thích gì thêm

Câu	Nội dung	Điểm																								
Câu 1 2,0 điểm	Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ (1) 1/ Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -4$.																									
	<p>Với $m = -4$ ta có hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ Tập xác định : \mathbb{R} Sự biến thiên</p> <ul style="list-style-type: none"> Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ Chiều biến thiên $y' = 3x^2 + 6x$ $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ 	0.25																								
	<p>Bảng biến thiên</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">-2</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y'</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td colspan="2" style="padding: 5px;">↗ 0</td> <td colspan="2" style="padding: 5px;">↘ -4</td> <td colspan="2" style="padding: 5px;">↗ $+\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$	y'		+	0	-	0	+		y	$-\infty$	↗ 0		↘ -4		↗ $+\infty$		0.25
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$																			
y'		+	0	-	0	+																				
y	$-\infty$	↗ 0		↘ -4		↗ $+\infty$																				
	<p>Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$</p> <ul style="list-style-type: none"> Cực trị : Hàm số đạt cực đại tại $x = -2, y_{CD} = 0$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = -4$ 	0.25																								
	<ul style="list-style-type: none"> Đồ thị : Đồ thị cắt trục Ox tại điểm $(-2; 0)$ và $(1; 0)$ Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; -4)$ 	0.25																								

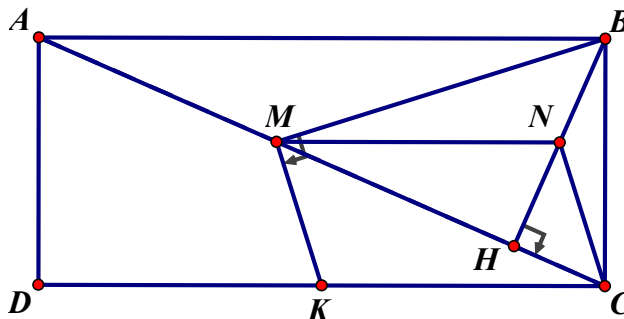
	2/ Xác định m để đồ thị của hàm số (1) có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn tam giác OAB vuông tại O (O là gốc tọa độ).	
	<p>Ta có $y' = 3x^2 + 6x$</p> $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$ <p>Do $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua 2 nghiệm đó nên đths có 2 điểm cực trị là $A(0; m), B(-2; m+4)$</p> $\overline{OA}(0; m), \overline{OB}(-2; m+4)$	0.5
	$\Delta OAB \text{ vuông tại O khi } \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \Leftrightarrow m(m+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$ <p>Do O, A, B tạo thành tam giác nên $m = -4$</p>	0.5
Câu 2 (0,5 điểm)	<p>Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)(z-i) + 2z = 2i$.</p> <p>Tìm mô đun của số phức $w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2}$</p>	
	<p>Ta có $(1+i)(z-i) + 2z = 2i \Leftrightarrow (3+i)z = -1+3i$</p> <p>Suy ra $z = \frac{-1+3i}{3+i} = \frac{(-1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = i$</p>	0.25
	$w = \frac{\bar{z} - 2z + 1}{z^2} = \frac{-i - 2i + 1}{i^2} = -1 + 3i$ <p>Do đó $w = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$</p>	0.25
Câu 3 (0,5 điểm)	<p>Giải bất phương trình Giải bất phương trình $1 + \log_{\sqrt{2}}(x-1) \leq \log_2(x^2 + x - 4)$</p>	
	<p>Đk: ..</p> <p>BPT đã cho tương đương với</p> $\log_2 2 + \log_2(x-1)^2 \leq \log_2(x^2 + x - 4)$ $\Leftrightarrow \log_2(2x^2 - 4x + 2) \leq \log_2(x^2 + x - 4)$	0.25
	$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 \leq x^2 + x - 4$ $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 \leq 0$ $\Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$ <p>Kết hợp đk ta được nghiệm của BPT là $2 \leq x \leq 3$</p>	0.25
Câu 4 (1,0 điểm)	<p>Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} (e^{\cos x} + x) \sin x dx$.</p>	
	$I = \int_0^{\pi} (e^{\cos x} + x) \sin x dx = \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx + \int_0^{\pi} x \sin x dx = I_1 + I_2$	0.25
	<p>Tính $I_1 = \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx$</p> <p>Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$;</p>	0.25

	<p>đổi cận: với $x = 0 \Rightarrow t = 1$ với $x = \pi \Rightarrow t = -1$</p> <p>Ta có $I_1 = \int_{-1}^1 e^t dt = e^t \Big _{-1}^1 = e - \frac{1}{e}$</p>	
	<p>Tính $I_2 = \int_0^{\pi} x \sin x dx$</p> <p>Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}$</p> <p>$I_2 = -x \cos x \Big _0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big _0^{\pi} = \pi$</p>	0.25
	Vậy $I = e + \frac{1}{e} + \pi$	0.25
Câu 5 (1,0 điểm)	Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1;2;3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $4x + y - z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với mặt phẳng (P) và tìm tọa độ tiếp điểm M.	
	Do (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $R = d(I; (P)) = \frac{ -4 + 2 - 3 - 1 }{\sqrt{16 + 1 + 1}} = \sqrt{2}$	0.25
	Mặt cầu (S) có phương trình $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 2$	0.25
	Đường thẳng IM đi qua I, vuông góc với (P) nên có phương trình: $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$	0.25
	Gọi $M(-1 + 4t; 2 + t; 3 - t)$ Do M thuộc (P) nên $4(-1 + 4t) + 2 + t - (3 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 18t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ Vậy $M\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$	0.25
Câu 6 (1,0 điểm)	a/ Cho góc α thỏa mãn $\cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2 \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha}$	
	$\cot \alpha = 2 \Rightarrow \sin \alpha \neq 0$, ta có:	0.25

	$P = \frac{2 \cos \alpha}{2 \sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha} = \frac{\frac{2 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}}{2 \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} + 3 \frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha}} = \frac{2 \cot \alpha \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{2 + 3 \cot^3 \alpha} = \frac{2 \cot \alpha (1 + \cot^2)}{2 + 3 \cot^3 \alpha}$	
	$= \frac{2 \cdot 2 \cdot (1 + 4)}{2 + 3 \cdot 2^3} = \frac{10}{13}$	0.25
	<p>b/ Xét tập hợp E gồm các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau tạo thành từ các chữ số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của tập hợp E. Tìm xác suất để phần tử chọn được là một số chia hết cho 5.</p>	
	<p>Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau tạo thành từ các chữ số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ kể cả số 0 đứng đầu là A_8^5 Số các số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau tạo thành từ các chữ số $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ và có số 0 đứng đầu là A_7^4 Số phần tử của tập E là $A_8^5 - A_7^4 = 5880$</p>	0.25
	<p>Gọi A là biến cố chọn được một số có 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5 Số kết quả thuận lợi A là $A_7^4 + 6A_6^3 = 1560$ Xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{1560}{5880} = \frac{13}{49}$</p>	0.25
Câu 7 (1,0 điểm)	<p>Cho hình chóp S.ABC có $AB = AC = a$, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là 60°. Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ trọng tâm G của tam giác ABC đến mặt phẳng (SBC) theo a.</p>	

	<p>Trong mặt phẳng (ABC), kẻ $AM \perp BC$ ($M \in BC$) thì $SM \perp BC$ nên $\widehat{SMA} = 60^\circ$ là góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC).</p> <p>Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$</p> $SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ <p>Thể tích khối chóp S.ABC là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}$</p>	0.5
	<p>Vì $AM = 3GM$, $AM \cap (SBC) = M$ nên $d(G, (SBC)) = \frac{1}{3} d(A, (SBC))$</p> <p>Trong mặt phẳng (SAM), kẻ $AH \perp SM$ ($H \in SM$) thì $AH \perp (SBC)$ nên $AH = d(A, (SBC))$</p> <p>Trong tam giác vuông SAM có</p> $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{16}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}a}{4}$ <p>Vậy $d(G, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{12}$</p>	0.5
Câu 8 (1,0 điểm).	<p>Giải bất phương trình: $(4x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 + x + 2} \leq (4x^2 + 3x + 5)\sqrt{x^2 - 1} + 1$</p>	
	<p>Đk: $\begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq 1 \end{cases}$</p> <p>Đặt $u = \sqrt{x^2 + x + 2}$, $v = \sqrt{x^2 - 1}$ ($u, v \geq 0$) ta có</p> $4x^2 + x - 1 = u^2 + 3v^2, 4x^2 + 3x + 5 = 3u^2 + v^2$	0.25
	<p>Bất phương trình đã cho có dạng</p> $(u^2 + 3v^2)u \leq (3u^2 + v^2)v + 1 \Leftrightarrow (u - v)^3 \leq 1 \Leftrightarrow u - v \leq 1 \Leftrightarrow u \leq v + 1$	0.25

	<p>Xét $\sqrt{x^2 + x + 2} \leq \sqrt{x^2 - 1} + 1$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 + x + 2 \leq x^2 - 1 + 2\sqrt{x^2 - 1} + 1$</p> <p>$\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - 1} \geq x + 2$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -2 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 4(x^2 - 1) \geq x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 3x^2 - 4x - 8 \geq 0 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x \geq -2 \\ x \leq \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \\ x \geq \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \\ x \geq \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3} \end{cases}$</p> <p>Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3}\right] \cup \left[\frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$</p>	0.5
<p>Câu 9 (1,0 điểm)</p>	<p>Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có đỉnh B thuộc đường thẳng $(d_1): 2x - y + 2 = 0$, đỉnh C thuộc đường thẳng $(d_2): x - y - 5 = 0$. Gọi H là hình chiếu của B trên AC. Xác định tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD biết $M\left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $K(9; 2)$ lần lượt là trung điểm của AH, CD và điểm C có tung độ dương.</p>	
	<p>Gọi N là trung điểm BH</p> <p>Ta có MN là đường trung bình của $\triangle ABH$ suy ra</p> <p>$MN \parallel KC, MN = \frac{1}{2} AB = KC$</p> <p>$\Rightarrow$ MNCK là hình bình hành $\Rightarrow MK \parallel CN$ (1)</p> <p>Do $MN \perp BC, BN \perp MC$ nên N là trực tâm $\triangle BMC \Rightarrow CN \perp BM$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra $MK \perp BM$</p>	0.25



	<p>Đường thẳng BM đi qua M, vuông góc với MK nên có phương trình $9x + 2y - 17 = 0$</p> <p>Do $B = BM \cap d_1$ nên tọa độ B thỏa mãn</p> $\begin{cases} 9x + 2y - 17 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(1; 4)$	0.25
	<p>Gọi $C(c; c - 5)$ với $c > 5$.</p> <p>Do $BC \perp KC \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{KC} = 0$</p> $\overrightarrow{BC} = (c - 1; c - 9)$ $\overrightarrow{KC} = (c - 9; c - 7)$ <p>Do đó $(c - 1)(c - 9) + (c - 9)(c - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ c = 4 \end{cases}$</p> <p>Suy ra $C(9; 4)$ vì $c > 5$.</p>	0.25
	<p>Đường thẳng CM đi qua M và C nên có phương trình $x - 2y - 1 = 0$</p> <p>Đường thẳng BH đi qua B, vuông góc với MC nên có phương trình $2x + y - 6 = 0$</p> <p>Tọa độ H thỏa mãn $\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{5}; \frac{4}{5}\right)$</p> <p>M là trung điểm AH nên $A(1; 0)$</p> <p>Khi đó $D(9; 0)$</p> <p>Vậy các đỉnh hình chữ nhật là $A(1; 0), B(1; 4), C(9; 4), D(9; 0)$</p>	0.25
Câu 10 (1,0 điểm)	<p>Cho 3 số thực không âm a, b, c thỏa mãn $5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$.</p> <p>Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{2(a + b + c)} - (b^2 + c^2)$.</p>	
	<p>Ta có</p> $5a^2 + \frac{5}{2}(b + c)^2 \leq 5a^2 + 5(b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca) \leq 6a(b + c) + 6\frac{(b + c)^2}{4}$ $\Rightarrow 5a^2 - 6a(b + c) + (b + c)^2 \leq 0$ $\Rightarrow \frac{b + c}{5} \leq a \leq b + c$ $\Rightarrow a + b + c \leq 2(b + c)$ <p>Đẳng thức xảy ra khi $a = b + c, b = c$</p>	0.25

	<p>Khi đó</p> $P = \sqrt{2(a+b+c)} - (b^2 + c^2) \leq \sqrt{4(b+c)} - \frac{1}{2}(b+c)^2 = 2\sqrt{b+c} - \frac{1}{2}(b+c)^2$ <p>Đặt $t = \sqrt{b+c}$ ($t \geq 0$)</p> <p>Ta có $P \leq 2t - \frac{1}{2}t^4$</p>	0.25												
	<p>Xét hàm số $f(t) = 2t - \frac{1}{2}t^4$ trên $[0; +\infty)$</p> $f'(t) = 2 - 2t^3$ $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$ <p>Bảng biến thiên</p> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">t</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f'(t)$</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">+</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">0</td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">-</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f(t)$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px; text-align: center;">$\frac{3}{2}$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table> <p style="margin-left: 100px;"> </p> <p>Từ BBT suy ra $\max f(t) = \frac{3}{2}$ khi $t = 1$, do đó</p> $\max P = \frac{3}{2} \text{ khi } a = 1, b = c = \frac{1}{2}$	t	0	1	$+\infty$	$f'(t)$	+	0	-	$f(t)$		$\frac{3}{2}$		0.5
t	0	1	$+\infty$											
$f'(t)$	+	0	-											
$f(t)$		$\frac{3}{2}$												

Chú ý: Nếu thí sinh giải theo cách khác mà vẫn đúng thì cho điểm tối đa theo phần tương ứng x