

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 2$ (1)

a. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b. Với giá trị nào của m thì phương trình $-\frac{1}{2}x^4 + x^2 - m = 0$ có 4 nghiệm

Câu 2 (1,0 điểm).

a. Giải phương trình $\sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1$

b. Cho số phức z thỏa mãn $z(2-i) = 3i + 5$. Tìm môđun của z .

Câu 3 (0,5 điểm). Giải bất phương trình $\log_3(x+1) < \log_{\frac{1}{3}}(5x-1) + 1$.

Câu 4 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2} - y = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 \end{cases}$$

Câu 5 (1,0 điểm). Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x \ln x + 1} dx$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Góc $BAC = 60^\circ$, hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của ΔABC . Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) theo a .

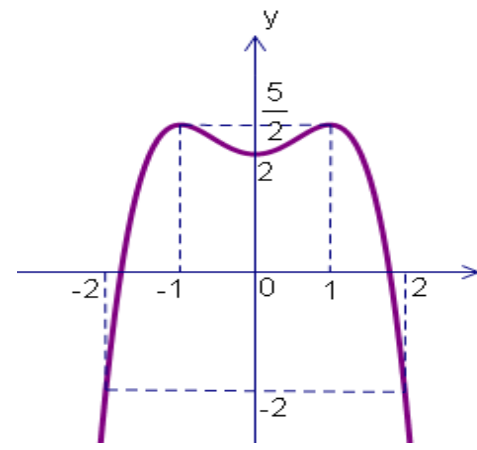
Câu 7 (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm I , đỉnh A thuộc đường thẳng $(\Delta): 2x - y + 1 = 0$, điểm $M(2;1)$, $N(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ lần lượt là trung điểm của BC, IC . Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$, biết điểm A có hoành độ dương.

Câu 8 (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;4;-5)$, $B(2;0;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình: $2x - y + z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ tiếp điểm.

Câu 9 (0,5 điểm). Một hộp đựng 5 viên bi đỏ giống nhau và 6 viên bi xanh cũng giống nhau. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đó ra 4 viên bi. Tính xác suất để 4 viên bi được lấy ra có đủ hai màu và số viên bi màu đỏ lớn hơn số viên bi màu xanh

Câu 10 (1,0 điểm). Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x > 2, y > 3, z > 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:
$$P = \frac{1}{\sqrt{4(x^2 + y^2) + 2z^2 - 16x - 24y + 56}} - \frac{\sqrt{2}}{(x-1)(y-2)(z+\sqrt{2})}$$

-----HẾT-----

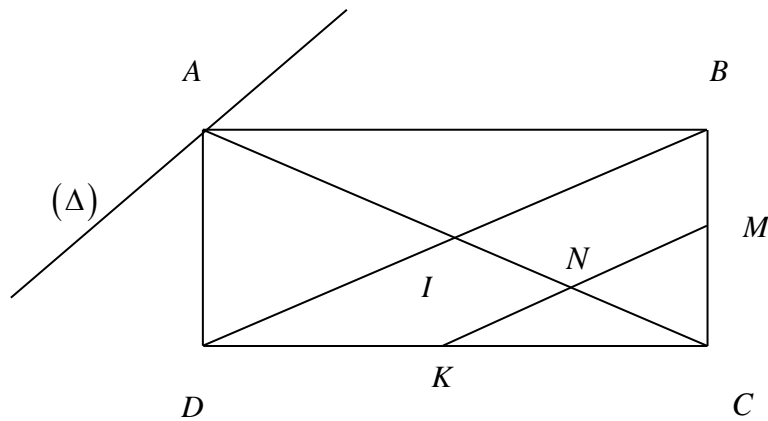
Câu	Đáp án	Điểm																		
Câu 1 (2.0 điểm)	a) (1.0 điểm) $y = -x^4 + 2x^2 + 3$																			
	Ta có $y = -x^4 + 2x^2 + 3$. +) Tập xác định: $D = R$ +) Sự biến thiên: ♦ Chiều biến thiên: $y' = -2x^3 + 2x$ $y' = 0, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$	0,25																		
	♦ Giới hạn, tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận. ♦ Cực trị: Đồ thị hàm số đạt cực đại tại $(1; \frac{5}{2}), (-1; \frac{5}{2})$ cực tiểu tại $(0; 2)$ ♦ Hàm số đb trên mỗi khoảng $(-\infty; -1); (0; 1)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-1; 0); (1; +\infty)$.	0,25																		
	♦ Bảng biến thiên: <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">-1</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y'</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$\nearrow \frac{5}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">$\searrow 2$</td> <td style="padding: 5px;">$\nearrow \frac{5}{2}$</td> <td style="padding: 5px;">$\searrow -\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	y'	+	0	-	0	-	y	$-\infty$	$\nearrow \frac{5}{2}$	$\searrow 2$	$\nearrow \frac{5}{2}$	$\searrow -\infty$	0,25
	x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$														
y'	+	0	-	0	-															
y	$-\infty$	$\nearrow \frac{5}{2}$	$\searrow 2$	$\nearrow \frac{5}{2}$	$\searrow -\infty$															
Đồ thị: Điểm khác của đồ thị : $(-2; -2), (2; -2)$ Đồ thị cắt Oy tại $(0; 3)$ và nhận trục tung làm trục đối xứng. <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  </div>	0,25																			
b) (1.0 điểm)																				

	$-\frac{1}{2}x^4 + x^2 - m = 0(*) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 2 = m + 2$	0,25
	Số nghiệm phương trình (*) bằng số giao điểm của hai đường (C): $y = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 + 2$ và (d): $y = m + 2$	0,25
	Phương trình đã cho có 4 nghiệm khi $2 < m + 2 < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$	0,25
	Vậy: $0 < m < \frac{1}{2}$	0,25
Câu 2 (1.0 điểm)	a. $2\sin x(\cos x - 1) + 2\sin^2 x = 0$ $\Leftrightarrow \sin x(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x - 1 = 0 \end{cases}$	0,25
	Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi$ Với $\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$	0,25
	Vậy phương trình có 2 họ nghiệm. $x = k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	
	b. Ta có $z(2 - i) = 3i + 5$ $\Leftrightarrow z = \frac{3i + 5}{2 - i} = \frac{(3i + 5)(2 + i)}{5} = \frac{7 + 11i}{5}$	0,25
	$ z = \sqrt{\left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{11}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{170}}{5}$	0,25
Câu 3 (0.5 điểm)	Điều kiện $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 5x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$	0,25
	Khi đó: $\log_3(x + 1) < \log_{\frac{1}{3}}(5x - 1) + 3 \Leftrightarrow \log_3[(x + 1)(5x - 1)] < 3$ $\Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 28 < 0 \Leftrightarrow -\frac{14}{5} < x < 2$	0,25
	Kết hợp với điều kiện (*) ta có nghiệm của bất phương trình là: $\frac{1}{5} < x < 2$	
Câu 4 (1.0 điểm)	Đk: $\begin{cases} xy + x - y^2 - y \geq 0 \\ 4y^2 - x - 2 \geq 0 \\ y - 1 \geq 0 \end{cases}$ Ta có (1) $\Leftrightarrow x - y + 3\sqrt{(x - y)(y + 1)} - 4(y + 1) = 0$ Đặt $u = \sqrt{x - y}, v = \sqrt{y + 1} (u \geq 0, v \geq 0)$	0,25

	<p>Khi đó (1) trở thành : $u^2 + 3uv - 4v^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = -4v(vn) \end{cases}$</p>	
	<p>Với $u = v$ ta có $x = 2y + 1$, thay vào (2) ta được : $\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + \sqrt{y - 1} = 2y$ $\Leftrightarrow \sqrt{4y^2 - 2y - 3} - (2y - 1) + (\sqrt{y - 1} - 1) = 0$</p>	0,25
	$\frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{y-2}{\sqrt{y-1} + 1} = 0$ $\Leftrightarrow (y-2) \left(\frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y-1} + 1} \right) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow y = 2 \text{ (vì } \frac{2}{\sqrt{4y^2 - 2y - 3} + 2y - 1} + \frac{1}{\sqrt{y-1} + 1} > 0 \forall y \geq 1)$ <p>Với $y = 2$ thì $x = 5$. Đối chiếu Đk ta được nghiệm của hệ PT là $(5; 2)$</p>	0,25
Câu 5 (1.0 điểm)	<p>a. Ta có : $I = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x \ln x + 1} dx$</p> <p>Đặt : $t = x \ln x + 1 \rightarrow dt = (\ln x + 1) dx$;</p>	0,25
	<p>Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 1$; $x = e \Rightarrow t = e + 1$</p>	0,25
	<p>Khi đó : $I = \int_1^{e+1} \frac{1}{t} dt = (\ln t) \Big _1^{e+1} = \ln(e + 1)$</p>	0,25
	<p>Vậy : $I = \int_1^e \frac{\ln x + 1}{x \ln x + 1} dx = \ln(e + 1)$</p>	0,25
Câu 6 (1.0 điểm)		0,25

<p>* Gọi $O = AC \cap BD$ và H là hình chiếu của S trên (ABCD), khi đó H thuộc BO và SH là đường cao của hình chóp S.ABCD. * Xác định góc giữa (SAC) và (ABCD) Vì $(SAC) \cap (ABCD) = AC$ và $AC \perp (SOB)$, $(SOB) \cap (SAC) = SO$, $(SOB) \cap (ABCD) = OB$ nên $((SAC), (ABCD)) = (SO, OB) = SOB = 60^0$</p>	0,25
<p>Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD}$ (*) Xét tam giác SOH vuông tại H có: $\tan SOH = \frac{SH}{OH} \Rightarrow SH = OH \cdot \tan 60^0 = \frac{1}{3} OB \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{2}$ Vì ABC là tam giác đều nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ suy ra $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ Từ (*) ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$ (đvtt)</p>	0,25
<p>Ta có $BO = 3HO \Rightarrow d(B, (SAC)) = 3d(H, (SAC))$ (Do H là trọng tâm của tam giác ABC). Kẻ $HK \perp SO$., $\Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H, (SAC)) = HK$</p>	0,25
<p>Xét ΔSHO vuông tại H có $SH = \frac{a}{2}$, $HO = \frac{1}{3} AO = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HO^2} \Rightarrow HK = \frac{a}{4}$ Vậy $d(B, (SAC)) = 3 \cdot \frac{a}{4}$</p>	0,25

**Câu
7
(1.0
điểm)**



Gọi K là giao điểm của MN và DC $\Rightarrow N$ là trung điểm KM $\Rightarrow K(-1;0)$

Xét ΔKCM vuông tại C có CN là trung tuyến
 $\Rightarrow CN = \frac{1}{2} KM = \frac{1}{2} \sqrt{10} \Rightarrow AN = 3CN = \frac{3\sqrt{10}}{2}$

0,25

0,25

	$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn tâm N bán kính $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ A thuộc đường thẳng $(\Delta) : 2x - y + 1 = 0$ Tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{90}{4} \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{-11}{5} \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (\text{loại vì } A \text{ có hoành độ dương})$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow A(2;5)$	0,25
	Ta có $\overline{AN} = 3\overline{NC} \Rightarrow C(0;1) \Rightarrow I(1;2)$ M là trung điểm của $BC \Rightarrow B(4;3)$ I là trung điểm $BD \Rightarrow D(-2;1)$	0,25
Câu 8 (1.0 điểm)	Mặt cầu tâm $A(1;4;-5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) có bán kính $R = d(A, (P)) = \frac{ 2 \cdot 1 - 4 - 5 + 1 }{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \sqrt{6}$	0,25
	Phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2 = 6$	0,25
	Gọi tiếp điểm là $H \Rightarrow H$ là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) Gọi Δ là đường thẳng qua $A(1;4;-5)$ và vuông góc với $(P) \Rightarrow$ vector pháp tuyến của mặt phẳng $(P) : \vec{n}(2;1;-1)$ là một vector chỉ phương của Δ Phương trình tham số của Δ : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -5 + t \end{cases}$	0,25
	Ta có $H = \Delta \cap (P)$ Nên tọa độ điểm H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -5 + t \\ 2x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ Thay x, y, z từ 3 phương trình đầu vào phương trình cuối ta được $2(1 + 2t) - (4 - t) + (-5 + t) + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 6t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ Với $t = 1$ ta có $x = 3; y = 3; z = -4$ Vậy tọa độ điểm H là : $H(3;3;-4)$	0,25
Câu 9 (0.5 điểm)	Số phần tử của không gian mẫu là: $C_{11}^4 = 330$. Gọi A là biến cố: “4 viên bi được lấy ra có đủ hai màu và số viên bi màu đỏ lớn hơn số viên bi màu xanh” Trong số 4 viên bi được chọn phải có 3 viên bi đỏ và 1 viên bi xanh	0,25

Số cách chọn 4 viên bi đó là: $n(A) = C_5^3 \cdot C_6^1 = 60$.

Vậy xác suất cần tìm là: $P = \frac{60}{330} = \frac{2}{11}$

0,25

Ta có:

$$P = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 4x - 6y + 14}} - \frac{1}{(x-1)(y-2)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + \frac{z^2}{2} + 1}} - \frac{1}{(x-1)(y-2)\left(\frac{z}{\sqrt{2}} + 1\right)}$$

Đặt $\begin{cases} a = x - 2 \\ b = y - 3 \\ c = \frac{z}{\sqrt{2}} \end{cases}$ ($a, b, c > 0$). Khi đó: $P = \frac{1}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 1}} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)}$

0,25

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+1)^2}{2} \geq \frac{1}{4}(a+b+c+1)^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ta lại có $(a+1)(b+1)(c+1) \leq \left(\frac{a+1+b+1+c+1}{3}\right)^3 = \left(\frac{a+b+c+3}{3}\right)^3$

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Câu 10 (1.0 điểm)

Do đó: $P \leq \frac{1}{a+b+c+1} - \frac{27}{(a+b+c+3)^3}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

0,25

Đặt $t = a_1 + b + c + 1 \Rightarrow t > 1$. Khi đó $P \leq \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$, $t > 1$.

Xét hàm $f(t) = \frac{1}{t} - \frac{27}{(t+2)^3}$, $t > 1$; $f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{81}{(t+2)^4}$;

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (t+2)^4 = 81.t^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4$ (Do $t > 1$).

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

Ta có BBT.

t	1 +∞	4	
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\frac{1}{8}$	0

0,25

Từ bảng biến thiên ta có : $\max f(t) = f(4) = \frac{1}{8} \Leftrightarrow t = 4$

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{1}{8}$, đạt được khi

$$(a; b; c) = (1; 1; 1) \Rightarrow (x, y, z) = (3; 4; \sqrt{2}).$$

0,25