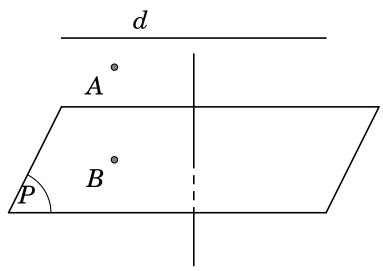
CHƯƠNG 7 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Mở đầu về hình học không gian.

— Đối tượng cơ bản:
. Điểm: kí hiệu A, B, C, ...
. Đường thẳng: kí hiệu a, b, c, d, ...
. Mặt phẳng: kí hiệu (P), (Q), (α), (β), ...

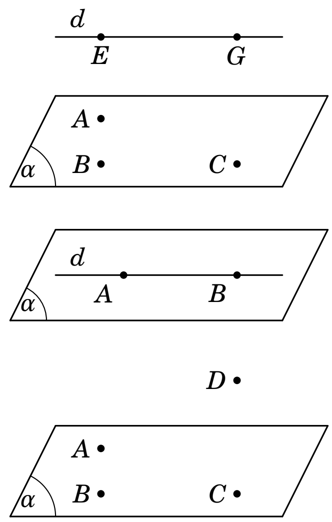


— Quan hệ cơ bản:
. Thuộc: kí hiệu $\in$. Ví dụ $A \in d$, $M \in (P)$ ...
. Chứa, nằm trong: kí hiệu $\subset$. Ví dụ: $d \subset (P)$, $b \subset (\alpha)$.

— Hình biểu diễn của một hình trong không gian:
. Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng biểu diễn bởi đoạn thẳng.
. Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
. Hai đoạn thẳng song song hoặc bằng nhau được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng song song và bằng nhau.
. Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - - -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

② Các tính chất thừa nhận trong hình học không gian.

— Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm phân biệt không thẳng hàng cho trước.
— Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
— Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
— Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.
Từ tính chất này suy ra: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng sẽ có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng chung là duy nhất chứa tất cả các điểm chung của hai mặt phẳng đó. Đường thẳng chung đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
— Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.



③ Điều kiện xác định mặt phẳng.

. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.
. Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.
Mặt phẳng hoàn toàn có thể mở rộng ra đến vô cực.

④ Hình chóp và hình tứ diện.

— Cho đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ nằm trong mặt phẳng (α) và điểm $S \notin (\alpha)$. Lần lượt nối điểm S với các đỉnh $A_1A_2A_3...A_n$ ta được n tam giác SA_1A_2, $SA_2A_3 2$, ... SA_nA_1. Hình gồm đa giác $A_1A_2A_3...A_n$ và n tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ... SA_nA_1 được gọi là hình chóp, kí hiệu hình chóp này là $S.A_1A_2A_3...A_n$. Khi đó ta gọi:

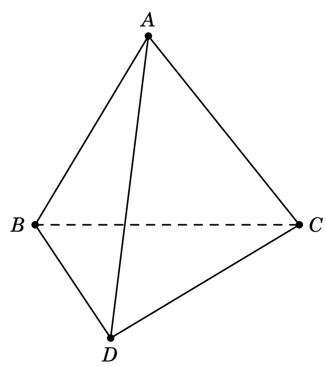
. S là đỉnh của hình chóp.
. $A_1A_2A_3...A_n$ là mặt đáy của hình chóp.
. Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ... SA_nA_1 được gọi là các mặt bên.

Ta gọi hình chóp có đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác,..., lần lượt là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

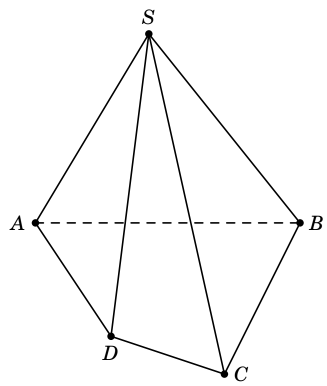
— Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm 4 tam giác ABC, ACD, BCD, ABD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn gọi là tứ diện) và được kí hiệu là $ABCD$.

. Các điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của tứ diện.
. Các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, CA, BD gọi là các cạnh của tứ diện.
. Hai cạnh không đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện của tứ diện.
. Các tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là các mặt của tứ diện.

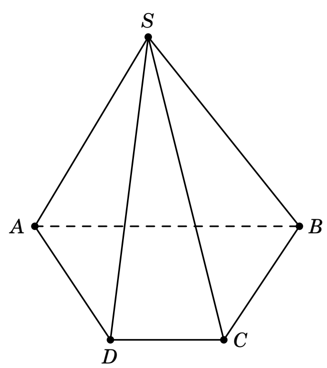
Hình tứ diện có bốn mặt là các tam giác đều gọi là hình tứ diện đều.



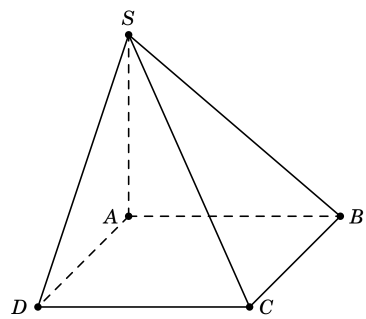
Hình chóp tam giác (Tứ diện)



Hình chóp tứ giác



Hình chóp tứ giác có đáy là hình thang



Hình chóp tứ giác có đáy là hình bình hành

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

— *Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng.*

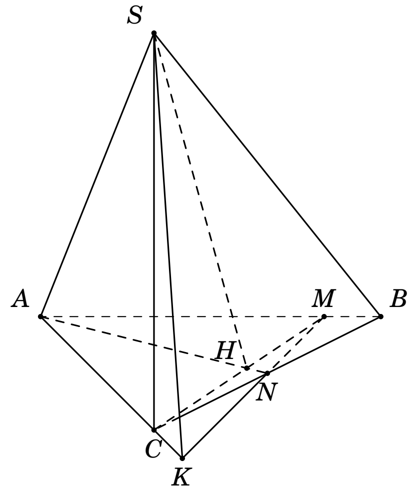
— *Đường thẳng nối hai điểm đó là giao tuyến của chúng.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi M,N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SMN) và (SAC); ② (SAN) và (SCM).

Lời giải.



① Trong (ABC), gọi $K = MN \cap AC$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SMN) \cap (SAC)S \\ K \in (SMN) \cap (SAC). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng SK.

② Trong (ABC), gọi $H = AN \cap CM$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAN) \cap (SCM) \\ H \in (SAN) \cap (SCM). \end{cases}$$

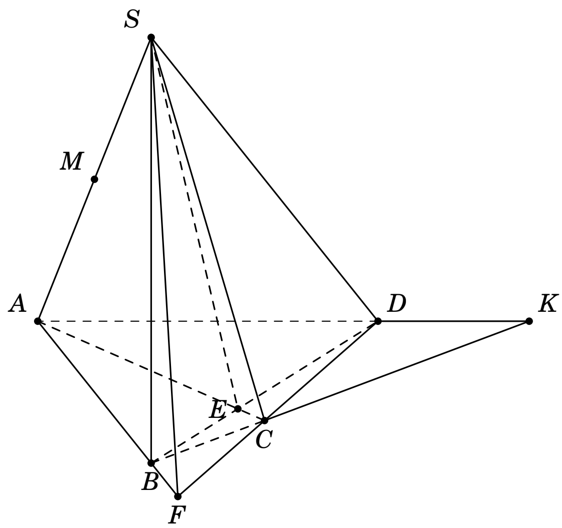
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng SH.

□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, trong đó mặt đáy $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Gọi điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SAC) và (SBD); ② (SAB) và (SCD); ③ (MBC) và (SAD).

Lời giải.



① Trong $(ABCD)$, gọi $E = AC \cap BD$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ E \in (SAC) \cap (SBD). \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là SE.

② Trong $(ABCD)$, gọi $F = AB \cap CD$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ F \in (SAB) \cap (SCD). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SF.

③ Trong $(ABCD)$, gọi $K = AD \cap CB$, ta có

$$\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ K \in (MBC) \cap (SAD). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là MK.

□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K,M lần lượt là hai điểm trên cạnh SA và SC. Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SAN) và (ABM); ② (SAN) và (BCK).

Lời giải.

① Trong (SBC), gọi $E = SN \cap BM$, ta có

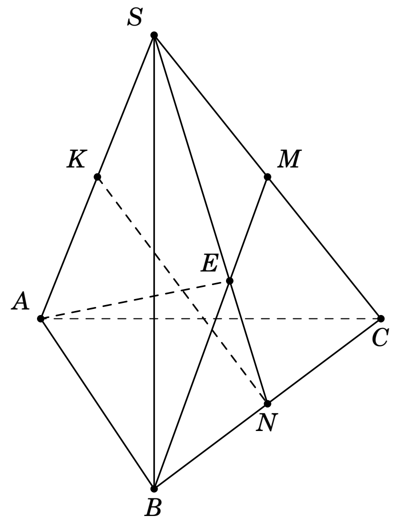
$$\begin{cases} A \in (SAN) \cap (ABM) \\ E \in (SAN) \cap (ABM). \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là AE.

② Ta có

$$\begin{cases} N \in (SAN) \cap (BCK) \\ K \in (SAN) \cap (BCK). \end{cases}$$

Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng là KN.



□

BÀI 2. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M trên đoạn BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SAC) và (SBD);

② (SAD) và (SBC);

③ (SAM) và (SBD);

④ (SDM) và (SAB).

Lời giải.

① Trong $(ABCD)$, gọi $E = AC \cap BD$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ E \in (SAC) \cap (SBD). \end{cases}$$

Vậy đường thẳng giao tuyến là SE.

② Trong $(ABCD)$, gọi $K = AD \cap CB$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SBC) \cap (SAD) \\ K \in (SAD) \cap (SBC). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SK.

③ Trong $(ABCD)$, gọi $F = AM \cap DB$, ta có

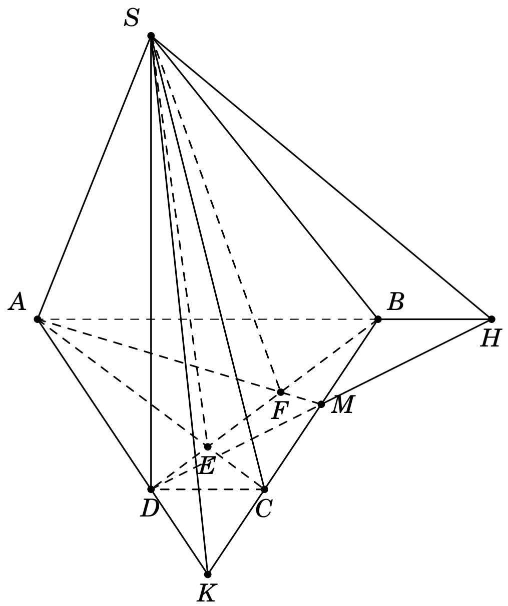
$$\begin{cases} S \in (SAM) \cap (SBD) \\ F \in (SAM) \cap (SBD). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SF.

④ Trong $(ABCD)$, gọi $= DM \cap AB$, ta có

$$\begin{cases} S \in (SDM) \cap (SAB) \\ H \in (SDM) \cap (SAB). \end{cases}$$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng là SH.



□

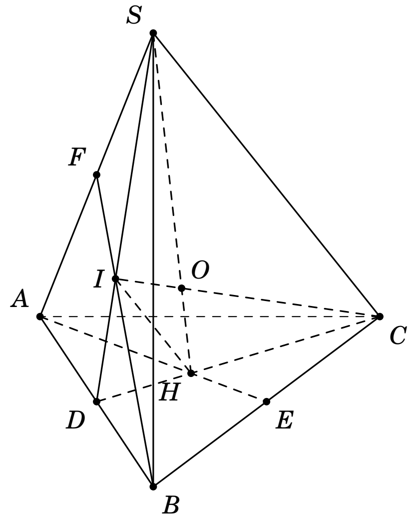
BÀI 3. Cho tứ diện $SABC$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC, SA.

① Tìm giao tuyến SH của hai mặt phẳng (SCD) và (SAE);

② Tìm giao tuyến CI của hai mặt phẳng (SCD) và (BFC);

③ SH và CI có cắt nhau không? Giải thích? Nếu có, gọi giao điểm đó là O, chứng minh $IH \parallel SC$. Tính tỉ số $\dfrac{OH}{OS}$.

Lời giải.



① Trong (ABC), gọi $H = AE \cap CD \equiv H$.
Ta có giao tuyến của (SCD) và (SAE) là SH.

② Trong (SAB), gọi $I = SD \cap BF$.
Ta có giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (BFC) là CI.

③ Ta có CI và SH cùng nằm trong mặt phẳng (SCD).
Xét tam giác SCD có $I \in SD; H \in CD$ nên CI và SH cắt nhau tại O.
Ta có I là trọng tâm tam giác SAB suy ra $\dfrac{ID}{SD} = \dfrac{1}{3}$.
H là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\dfrac{DH}{CD} = \dfrac{1}{3}$.
Suy ra $\dfrac{ID}{SD} = \dfrac{DH}{CD} \Leftrightarrow IH \parallel SC$.
Vậy $\dfrac{OH}{OS} = \dfrac{IH}{SC} = \dfrac{ID}{SD} = \dfrac{1}{3}$.

□

3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Trên cạnh SA lấy điểm M. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SAC) và (SBD).
② (BCM) và (SAD).
③ (CDM) và (SAB).
④ (BDM) và (SAC).

BÀI 5. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trung điểm của CD là M. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SAC) và (SBD).
② (SBM) và (SAC).
③ (SBM) và (SAD).
④ (SAM) và (SBC).

BÀI 6. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$ và $AB > CD$. Lấy điểm M nằm trên đoạn SA. Hãy tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (BDM) và (SAC).
② (BCM) và (SAD).
③ (BCM) và (SCD).

BÀI 7. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Lấy điểm M trên cạnh SA, trung điểm CD là N. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (BMN) và (SAC).
② (BMN) và (SAD).
③ (MCD) và (SBD).
④ (MCD) và (SAB).

BÀI 8. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có hai cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong tam giác SCD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SBM) và (SCD).
② (ABM) và (SCD).
③ (ABM) và (SAC).

BÀI 9. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy I thuộc cạnh SA, J thuộc cạnh SB sao cho IJ không song song với AB. Lấy K là một điểm thuộc miền trong tứ giác $ABCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (IJK) và $(ABCD)$.
② (IJK) và (SAB).
③ (IJK) và (SAD).
④ (IJK) và (SAC).
⑤ (IJK) và (SBD).

BÀI 10. Cho hình chóp $SABC$. Trên cạnh SA, SC lấy điểm M, N sao cho MN không song song với AC. Gọi K là trung điểm của BC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (MNK) và (ABC). ② (MNK) và (SAB).

BÀI 11. Cho hình chóp $SABC$. Trên cạnh SA,SC lấy điểm M,N sao cho MN không song song với AC. Gọi O là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (MNO) và (ABC). ② (MNO) và (SAB).

③ (SMO) và (SBC). ④ (ONC) và (SAB).

BÀI 12. Cho tứ diện $ABCD$ có M là điểm trên cạnh AB, N là điểm trên cạnh AD sao cho $MB = 2MA, AN = 2ND$. Gọi P là điểm nằm trong tam giác BCD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (CMN) và (BCD). ② (MNP) và (SAD).

③ (MNP) và (ABC).

BÀI 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác ABC, N là điểm nằm trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (CDM) và (ABD). ② (BCN) và (ABD).

③ (CMN) và (BCD).

BÀI 14. Cho tứ diện SAC. Lấy điểm E,F lần lượt trên đoạn SA,SB và điểm G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (EFG) và (ABC). ② (EFG) và (SBC).

③ (EFG) và (SGC).

BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABCD$. Hai điểm G,H lần lượt là trọng tâm $\triangle SAB, \triangle SCD$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SGH) và $(ABCD)$. ② (SAC) và (SGH).

③ (SAC) và (BGH). ④ (SCD) và (BGH).

BÀI 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Lấy M thuộc cạnh SC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (SAC) và (SBD). ② (SAD) và (SBC).

③ (ADM) và (SBC).

BÀI 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CD,SA. Hãy tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

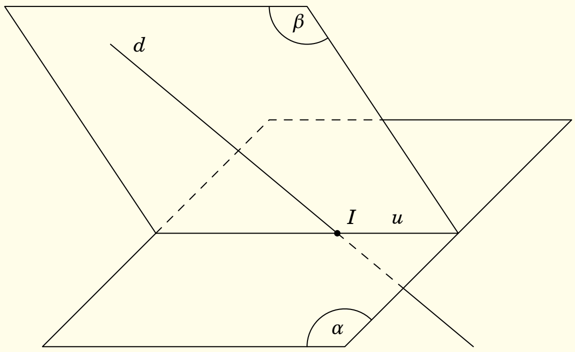
① (MNP) và (SAB). ② (MNP) và (SAD).

③ (MNP) và (SBC). ④ (MNP) và (SCD).

BÀI 18. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi H,K lần lượt là trọng tâm tam giác SAB,SBC và M là trung điểm cạnh AC, $I \in SM$ sao cho $SI > SM$. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

① (IHK) và (ABC). ② (IHK) và (SBC).

DẠNG 1.2. Tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α)



— *Tìm một mặt phẳng phụ (β) chứa d sao cho dễ tạo giao tuyến với (α). Mặt phẳng này thường xác định bởi d và một điểm của (α).*

— *Tìm giao tuyến u của (α) và (β).*

— *Trong (β), d cắt u tại I, mà $u \subset (\alpha)$. Vậy d cắt (α) tại I.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $SABC$ có M là điểm nằm trên tia đối của tia SA, O là điểm nằm trong tam giác ABC. Tìm các giao điểm của

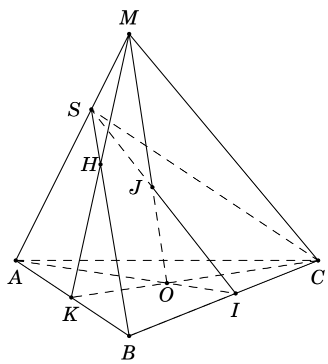
① Đường thẳng BC và mặt phẳng (SOA);

② Đường thẳng MO và mặt phẳng (SBC);

③ Đường thẳng AB và mặt phẳng (MOC);

④ Đường thẳng SB và mặt phẳng (MOC).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (ABC), kéo dài AO cắt BC tại I.
Ta có $\begin{cases} I \in BC \\ I \in AO \subset (SOA) \end{cases} \Rightarrow I$ là giao điểm của BC và (SOA).

② Chọn mặt phẳng phụ chứa MO là (SOA), ta có $(SOA) \cap (SBC) = SI$.
Trong $(SOA) \equiv (SMI)$, gọi J là giao điểm của SI và MO.
Ta có $\begin{cases} J \in MO \\ J \in SI \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow J$ là giao điểm của MO và (SBC).

③ Trong mặt phẳng (ABC), kéo dài CO cắt AB tại K.
Ta có $\begin{cases} K \in AB \\ K \in CO \subset (MOC) \end{cases} \Rightarrow K$ là giao điểm của AB và (MOC).

④ Chọn mặt phẳng phụ chứa SB là (SAB), ta có $(SAB) \cap (MOC) = MK$.
Trong $(SAB) \equiv (MAB)$, gọi H là giao điểm của SB và MK.
Ta có $\begin{cases} H \in SB \\ H \in MK \subset (MOC) \end{cases} \Rightarrow H$ là giao điểm của SB và (MOC).

□

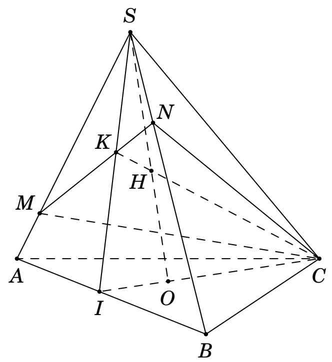
VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $SABC$ có hai điểm M, N lần lượt thuộc hai cạnh SA, SB và O là điểm nằm trong tam giác ABC. Xác định giao điểm của

① Đường thẳng AB và mặt phẳng (SOC);

② Đường thẳng MN và mặt phẳng (SOC);

③ Đường thẳng SO và mặt phẳng (CMN).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (ABC), kéo dài CO cắt AB tại I.

Ta có $\begin{cases} I \in AB \\ I \in CO \subset (SOC) \end{cases} \Rightarrow I$ là giao điểm của AB và (SOC).

② Chọn mặt phẳng phụ chứa MN là (SAB), ta có $(SAB) \cap (SOC) = SI$.
Trong (SAB), gọi K là giao điểm của SI và MN.

Ta có $\begin{cases} K \in MN \\ K \in SI \subset (SOC) \end{cases} \Rightarrow K$ là giao điểm của MN và (SOC).

③ Chọn mặt phẳng phụ chứa SO là (SIC), ta có $(SIC) \cap (CMN) = KC$.
Trong (SIC), gọi H là giao điểm của KC và SO.

Ta có $\begin{cases} H \in SO \\ H \in KC \subset (CMN) \end{cases} \Rightarrow H$ là giao điểm của SO và (CMN).

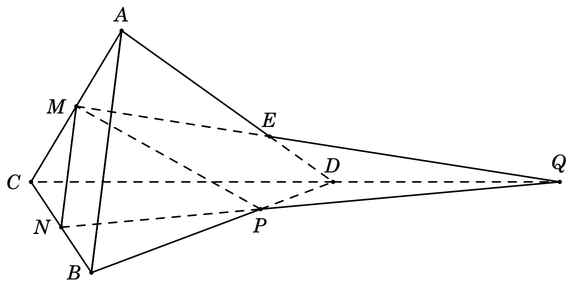
□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Lấy điểm P trên cạnh BD sao cho $PB > PD$. Tìm giao điểm của

① CD và (MNP). ② AD và (MNP).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (BCD), xét tam giác BCD có $\dfrac{NB}{NC} = 1 \neq \dfrac{PB}{PC}$ nên NP và DC cắt nhau giả sử tại Q. Rõ ràng $Q \in CD$ theo cách dựng. Lại có $Q \in NP \subset (MNP)$ nên $Q \in (MNP)$. Vậy $Q = CD \cap (MNP)$.

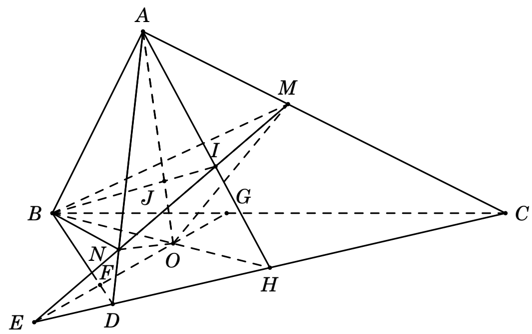
② Trong mặt phẳng (ACD) nối Q với M cắt AD tại E. Dễ thấy $E \in AD$ theo cách dựng. Lại có $E \in MQ \subset (MNP)$ nên $E \in (MNP)$. Vậy $E = AD \cap (MNP)$.

□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AC và AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với CD. Gọi O là điểm thuộc miền trong $\triangle BCD$. Tìm giao điểm của

① BD và (OMN). ② BC và (OMN). ③ MN và (ABO). ④ AO và (BMN).

Lời giải.



Trong mặt phẳng (ACD), vì MN không song song với CD nên ta giả sử MN cắt CD tại E. Trong mặt phẳng (BCD), nối E với O kéo dài cắt BD và BC lần lượt tại F và G.

① Ta có $F \in OE \subset (OMN)$ và $F \in BD$. Suy ra $F = BD \cap (OMN)$.

② Theo cách dựng thì $G \in BC$ và $G \in OE \subset (OMN)$. Vậy $G = BC \cap (OMN)$.

③ Trong mặt phẳng (BCD) kéo dài BO cắt DC tại H. Trong mặt phẳng (ADC) nối H với A cắt MN tại I. Vì $H \in BO \subset (ABO)$ nên $AH \subset (ABO)$. Suy ra $I \in (ABO)$. Vậy $I = MN \cap (ABO)$.

④ Trong mặt phẳng (ABH) nối B với I cắt AO tại J. Rõ ràng $J \in AO$ theo cách dựng và $J \in BI \subset (BMN)$. Vậy $J = AO \cap (BMN)$.

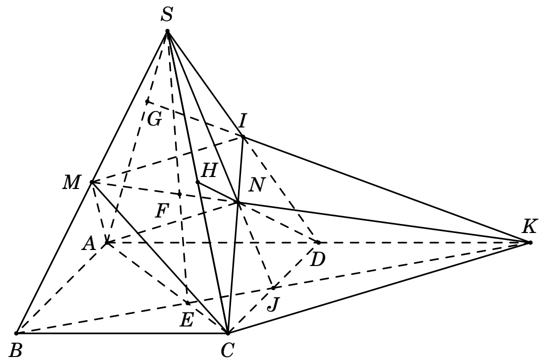
□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB, N là trọng tâm $\triangle SCD$. Xác định giao điểm của

① MN và $(ABCD)$. ② MN và (SAC). ③ SC và (AMN). ④ SA và (CMN).

Lời giải.

Gọi I và J lần lượt là trung điểm của các cạnh SD và DC. Trọng tâm của tam giác SCD là $N = SJ \cap CI$.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ nối B với J cắt AC và AD lần lượt tại E và K. Vì $DK \parallel BC$ nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có
$$\frac{JB}{JK} = \frac{JC}{JD} = 1 \Rightarrow JC = JD.$$
Vậy $\triangle SCD$ và $\triangle SBK$ có chung đường trung tuyến là SJ. Vì thế trọng tâm N của $\triangle SCD$ cũng là trọng tâm của $\triangle SBK$. Suy ra $K \in MN$. Lúc đó $K = MN \cap (ABCD)$.

② Trong mặt phẳng (SBJ) nối S với E cắt MN tại F. Ta có $F = MN \cap (SAC)$.

③ Trong mặt phẳng (SCD) nối N với D kéo dài cắt SC tại H. Vì $D \in AK \subset (AMN)$ nên $ND \subset (AMN)$. Suy ra $H \in (AMN)$. Vậy $H = SC \cap (AMN)$.

④ Theo cách dựng ta thấy $IK = (CMN) \cap (SAD)$. Trong mặt phẳng (SAD) kéo dài IK cắt SA tại G. Lúc đó $G = SA \cap (CMN)$.

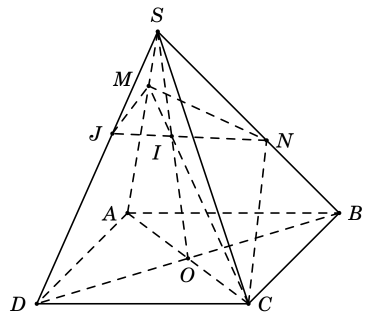
□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O. Trên SA, SB lần lượt lấy hai điểm M và N.

① Tìm giao điểm của SO và (CMN). ② Tìm giao tuyến của (SAD) và (CMN).

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAC) nối S với O cắt MC tại I. Trong mặt phẳng (SBD) kéo dài IN cắt SD tại J. Lúc đó



① $I = SO \cap (CMN)$.

② $J \in (SAD) \cap (CMN)$. Lại có $M \in (SAD) \cap (CMN)$. Vậy $JM = (SAD) \cap (CMN)$.

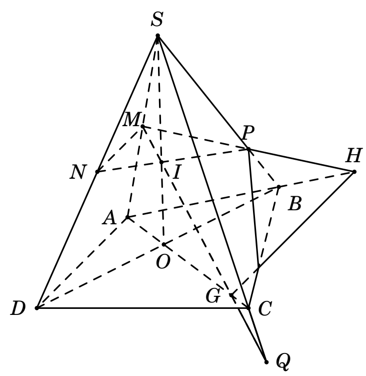
□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh SA, SD và P là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SP = 3PB$.

① Tìm giao điểm Q của SC và (MNP). ② Tìm giao tuyến của (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải.

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Trong mặt phẳng (SBD) gọi I là giao điểm của NP với SO. Lúc đó $I \in (MNP)$ và $MI \subset (SAC)$.



① Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của MI và SC. Vì $Q \in MI$ nên $Q = SC \cap (MNP)$.

② Trong mặt phẳng (SAC) gọi G là giao điểm của MI và AC. Lúc đó $G \in (MNP) \cap (ABCD)$. Trong mặt phẳng (SAB), vì
$$1 = \frac{MS}{MA} \neq \frac{PS}{PB} = 3$$
nên MP và AB cắt nhau. Gọi H là giao điểm của MP và AB. Ta có $H \in (MNP) \cap (ABCD)$. Vậy $GH = (MNP) \cap (ABCD)$. .

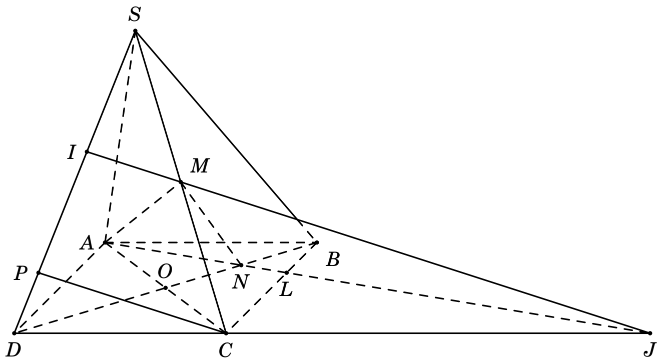
□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SC, N là trung điểm của OB với O là giao điểm của AC và BD.

① Tìm giao điểm I của SD với (AMN).

② Tính tỉ số $\dfrac{SI}{ID}$.

Lời giải.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ nối A với N kéo dài cắt DC tại J và cắt BC tại L. Trong mặt phẳng (SDC) nối J với M kéo dài cắt SD tại I. Vì $J \in AN \subset (AMN)$ nên $MJ \subset (AMN)$. Suy ra $I \in (AMN)$. Vậy $I = SD \cap (AMN)$.

② Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vì $AB \parallel DJ$ nên $\triangle NAB$ đồng dạng với $\triangle NJD$. Suy ra

$$\frac{DJ}{AB} = \frac{DN}{NB} = 3 \Rightarrow DJ = 3AB = 3DC.$$

Trên cạnh SD lấy điểm P sao cho I là trung điểm của SP. Ta có IM là đường trung bình của $\triangle SPC$ nên $IM \parallel PC \Rightarrow IM \parallel IJ$. Áp dụng Định lý Talet trong $\triangle DIJ$ ta có

$$\frac{DI}{DP} = \frac{DJ}{DC} = 3 \Rightarrow DI = 3DP \text{ và } SI = PI = 2DP.$$

Vậy $\dfrac{SI}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

□

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh SA sao cho $MA = 2MS$, K là trung điểm BC và D là điểm đối xứng của G qua A.

① Tìm giao điểm H của SK với (MCD).

② Tính tỉ số $\dfrac{HK}{SK}$.

Lời giải.

① Trong mặt phẳng (SDK) kéo dài DM cắt SK tại H. Lúc đó $H = SK \cap (MCD)$.

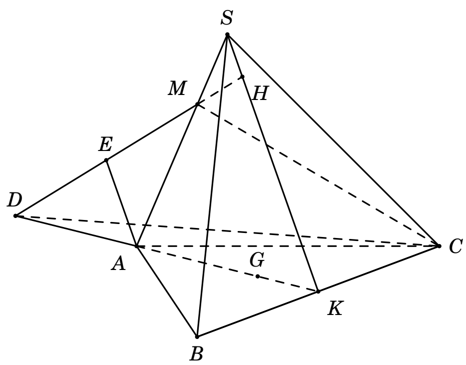
② Trong mặt phẳng (SDK) vẽ đường thẳng qua A và song song với SK cắt DH tại E. Vì $AE \parallel SH$ nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có

$$\frac{AE}{SH} = \frac{MA}{MS} = 2 \Rightarrow SH = \frac{1}{2}AE.$$

Trong $\triangle DHK$ ta có $AE \parallel HK$ nên theo Định lý Talet thì

$$\frac{AE}{HK} = \frac{DA}{DK} = \frac{2}{5} \Rightarrow HK = \frac{5}{2}AE.$$

Ta có $SK = SH + HK = \dfrac{1}{2}AE + \dfrac{5}{2}AE = 3AE$. Vậy $\dfrac{HK}{SK} = \dfrac{5}{6}$.



□

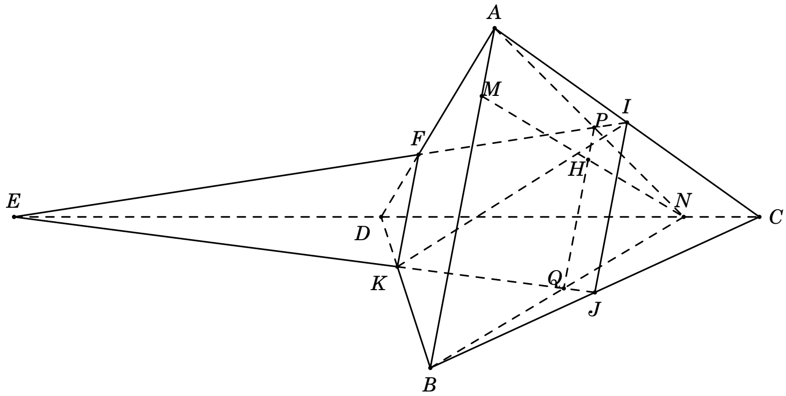
BÀI 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

① Tìm giao điểm E của CD với (IJK). Chứng minh: $DE = DC$.

② Tìm giao điểm F của AD với (IJK). Chứng minh: $FA = 2FD$ và $FK \parallel IJ$.

③ Gọi M và N là hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai cạnh AB và CD. Tìm giao điểm của MN với (IJK).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (BCD) kéo dài JK cắt CD tại E. Lúc đó, dễ thấy $E \in CD$ theo cách dựng. Lại có $E \in KJ \subset (IJK)$. Suy ra $E = CD \cap (IJK)$.

Trong mặt phẳng (BCD) lấy điểm E' thuộc đường thẳng DC sao cho D là trung điểm của $E'C$. Xét $\triangle E'BC$ có BD và $E'J$ là các đường trung tuyến. Vì $BK = 2KD$ nên K là trọng tâm $\triangle E'BC$. Suy ra E', K, J thẳng hàng. Từ đây có $E' = DC \cap KJ$. Vậy $E' \equiv E$. Suy ra $DE = DC$.

② Trong mặt phẳng (ACD), nối I với E cắt AD tại F. Lúc đó rõ ràng $F \in AD$ và vì $F \in EI \subset (IJK)$ nên $F \in (IJK)$. Vậy $F = AD \cap (IJK)$.

Trong $\triangle AEC$, vì các điểm D, I lần lượt là trung điểm của EC và AC nên $F = AD \cap EI$ chính là trọng tâm của $\triangle AEC$. Theo tính chất trọng tâm tam giác ta có $FA = 2FD$.

Vì IJ là đường trung bình của tam giác ABC nên $IJ \parallel AB$. Mặt khác, vì $\dfrac{DK}{DB} = \dfrac{DF}{DA} = \dfrac{1}{3}$ nên theo Định lý Talet ta có $FK \parallel AB$. Từ đó suy ra $FK \parallel IJ$.

③ Trong mặt phẳng (BCD) nối B với N cắt KJ tại Q. Ta có $Q \in (IJK)$. Trong mặt phẳng (ADC) nối A với N cắt EI tại P. Vì $(IJK) \equiv (IEJ)$ nên $P \in EI \subset (IEJ) \Rightarrow P \in (IJK)$. Trong mặt phẳng (ABN) nối P với Q cắt MN tại H. Lúc đó, vì $H \in PQ \subset (IJK)$ nên $H \in (IJK)$. Vậy $H = MN \cap (IJK)$.

□

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$, E là trung điểm của SA. Gọi N là điểm thuộc đoạn AB sao cho $NB = 2NA$ và M là điểm thuộc đoạn CD sao cho $MD = 2MC$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EMN) và (SAD).

② Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EMN)và (SCD).

③ Tìm giao điểm L của đường thẳng EM và mặt phẳng (SBC).

④ Tìm giao tuyến của (CDE) và (SAB). Giao tuyến này cắt SB tại P và cắt AB tại I. Chứng minh: $2SB = 3SP$ và $S_{\triangle IDE} = 3S_{\triangle ICP}$.

Lời giải.

① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài MN và AD cắt nhau tại J. Lúc đó $J \in AD \subset (SAD)$ và $J \in MN \subset (EMN)$. Vì thế $J \in (SAD) \cap (EMN)$. Dễ thấy $E \in (SAD) \cap (EMN)$. Vậy $EJ = (EMN) \cap (SAD)$.

② Trong mặt phẳng (SAD) kéo dài JE cắt SD tại Q. Vì $JE \subset (EJM) \equiv (EMN)$ nên $Q \in (EMN)$. Lúc đó $QM = (EMN) \cap (SCD)$.

③ Trong mặt phẳng (SAB) kéo dài NE và SB cắt nhau tại K. Lúc đó $K \in (EMN) \cap (SBC)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài MN và BC cắt nhau tại H. Ta có $H \in (EMN) \cap (SBC)$. Suy ra $GH = (EMN) \cap (SBC)$. Trong mặt phẳng (EMN) kéo dài KH và EM cắt nhau tại L. Vì $KH \subset (SBC)$ nên $L \in (SBC)$. Vậy $L = EM \cap (SBC)$.

④ Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài CD và AB cắt nhau tại

I. Lúc đó $IE = (CDE) \cap (SAB)$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ vì $BC \parallel AD$ nên áp dụng Định lý Talet với $\triangle IAD$ ta có

$$\frac{IB}{IA} = \frac{IC}{ID} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2} \Rightarrow IB = AB \text{ và } ID = 2IC.$$

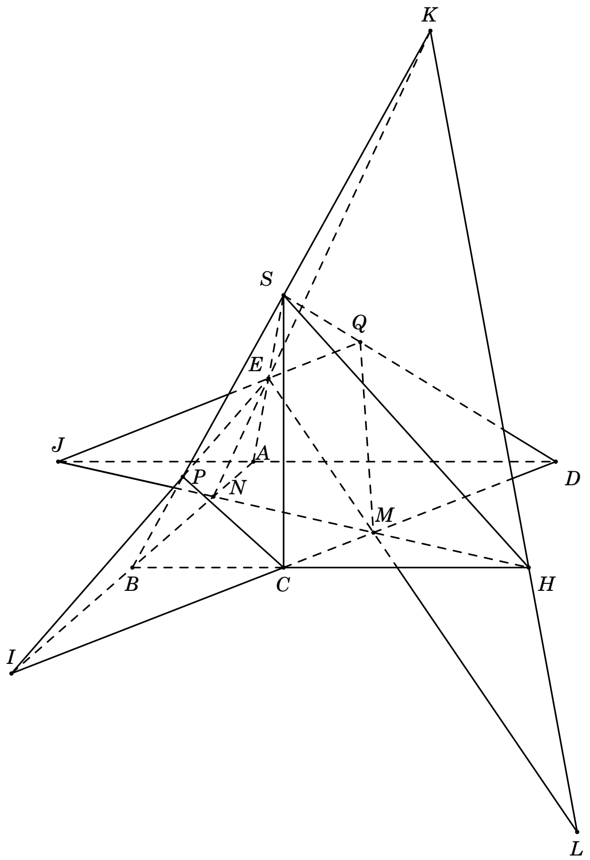
Trong mặt phẳng (SAB) xét $\triangle SIA$ có B và E lần lượt là trung điểm các cạnh IA và SA. Lúc đó $P = IE \cap SB$ là trọng tâm $\triangle SIA$. Theo tính chất trọng tâm thì

$$IE = \frac{3}{2}IP \text{ và } 2SB = 3SP.$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_{\triangle IDE} &= \frac{1}{2}IE \cdot ID \cdot \sin\widehat{EID} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}IP \cdot 2IC \cdot \sin\widehat{EID} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot IP \cdot IC \cdot \sin\widehat{PIC} = 3S_{\triangle ICP}. \end{aligned}$$

Vậy $S_{\triangle IDE} = 3S_{\triangle ICP}$.



□

BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AB đáy lớn và $AB = 3CD$. Gọi N là trung điểm của CD, M là điểm trên cạnh SB thỏa $SM = 3MB$, điểm I trên cạnh SA và thỏa $AI = 3IS$.

① Tìm giao điểm của đường thẳng MN với (SAD).

② Gọi H là giao điểm của CB với (IMN). Tính tỉ số $\dfrac{HB}{HC}$.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAB) vì $\dfrac{1}{3} = \dfrac{IS}{AI} \neq \dfrac{MS}{MB} = 3$ nên IM và AB cắt nhau. Gọi J là giao điểm của IM và AB. Trong mặt phẳng $(ABCD)$ nối J, N cắt AD tại P. Trong mặt phẳng (IMN) nối M, N cắt IP tại K.

① Theo cách dựng, dễ thấy $K \in MN$. Vì $K \in IP \subset (SAD)$ nên $K \in (SAD)$. Vậy $K = MN \cap (SAD)$.

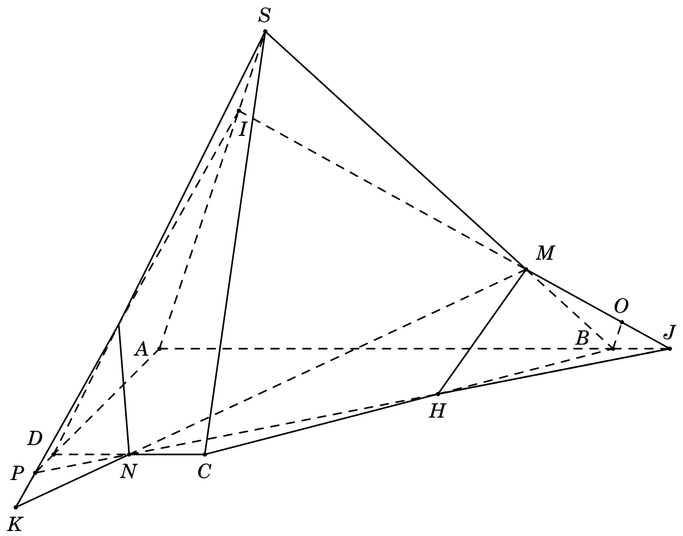
② Vì H là giao điểm của CB với (IMN) nên $H = CB \cap NJ$.

Ta có $NC = \dfrac{1}{2}DC = \dfrac{1}{6}AB$.

Vì $NC \parallel BJ$ nên theo Hệ quả của Định lý Talet ta có:

$$\frac{HB}{HC} = \frac{BJ}{NC} \Rightarrow \frac{HB}{HC} = 6 \cdot \frac{BJ}{AB} = 6 \cdot \frac{BJ}{JA - BJ} = 6 \cdot \frac{1}{\dfrac{JA}{BJ} - 1}.$$

Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng qua B và song song với SA cắt IJ tại O.
Vì $BO \parallel SI$ nên áp dụng Hệ quả Định lý Talet ta có
$$\frac{BO}{SI} = \frac{BM}{MS} = \frac{1}{3}.$$
Vì $BO \parallel AI$ nên áp dụng Định lý Talet trong $\triangle JAI$ ta có
$$\frac{JB}{JA} = \frac{BO}{IA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{BO}{SI} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{JA}{BJ} = 9.$$
Từ đó có $\dfrac{HB}{HC} = 6 \cdot \dfrac{1}{\dfrac{JA}{BJ} - 1} = 6 \cdot \dfrac{1}{9-1} = \dfrac{3}{4}.$



□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

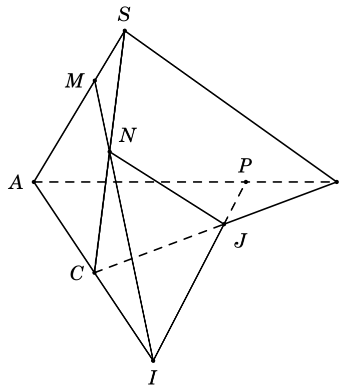
BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy M sao cho $SA = 3SM$, trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $SC = 2SN$. Điểm P thuộc cạnh AB. Tìm giao điểm của:

① MN và (ABC). ② BC và (MNP).

ĐS:

① $MN \cap (ABC) = I$.

② $BC \cap (MNP) = J$.



BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Hãy tìm:

① $(SGC) \cap (ABCD) =?$. ② $AD \cap (SGC) =?$. ③ $SO \cap (SGB) =?$. ④ $SD \cap (BCG) =?$.

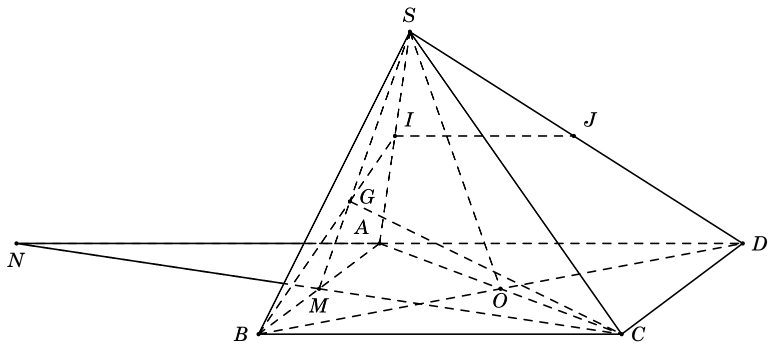
ĐS:

① $(SGC) \cap (ABCD) = MC$.

② $AD \cap (SGC) = N$.

③ $SO \cap (SGB) = S$.

④ $SD \cap (BCG) = J$.



BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA và SB. Lấy điểm M tùy ý trên SD. Tìm giao điểm của

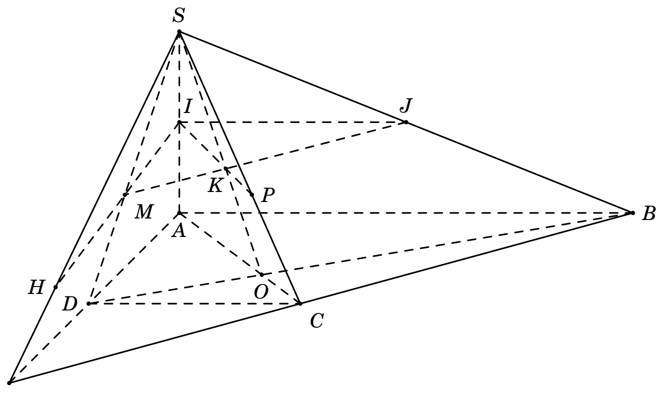
① IM với (SBC). ② JM với (SAC). ③ SC với (IJM).

ĐS:

① $IM \cap (SBC) = H$.

② $JM \cap (SAC) = K$.

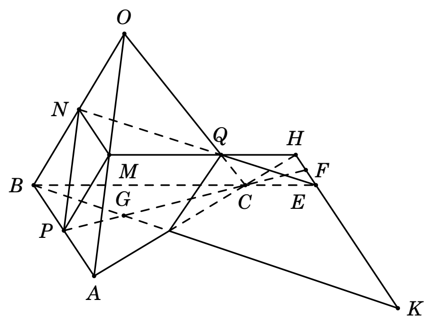
③ $SC \cap (IJM) = P$.



BÀI 14. Cho tứ diện $OABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của OA, OB và AB. Trên cạnh OC lấy điểm Q sao cho $OQ > QC$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giao điểm

① $E = BC \cap (MNQ)$. ② $F = CP \cap (MNQ)$. ③ $K = BG \cap (MNQ)$.

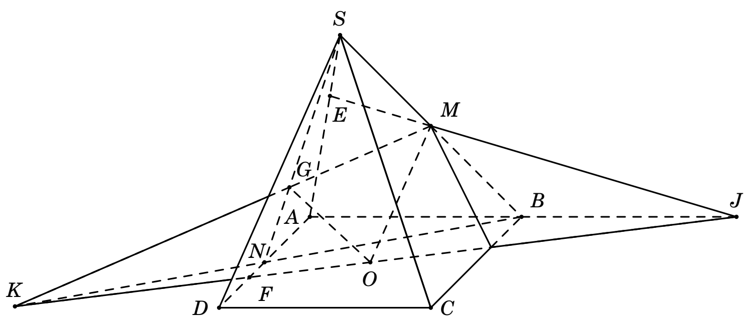
ĐS:



BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm của tam giác SAD. Tìm giao điểm:

① $K = GM \cap (ABCD)$. ② $F = AD \cap (OMG)$. ③ $E = SA \cap (OMG)$.

ĐS:



BÀI 16. Cho tứ diện $S.ABC$, lấy điểm M là trung điểm SA, lấy điểm N là trọng tâm $\triangle SBC$ và P nằm trong $\triangle ABC$.

① Tìm giao điểm của MN và (ABC). ② $SB \cap (MNP) = ?$.

③ $SC \cap (MNP) = ?$. ④ $NP \cap (SAB) = ?$.

⑤ Tứ giác $ABIC$ là hình gì ?

ĐS:

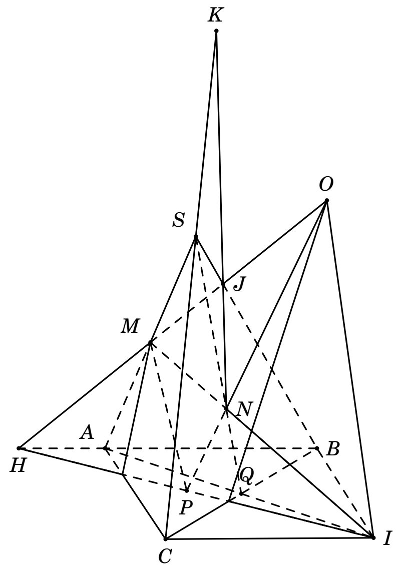
① $MN \cap (ABC) = I$.

② $SB \cap (MNP) = J$.

③ $SC \cap (MNP) = K$.

④ $NP \cap (SAB) = O$.

⑤ Tứ giác $ABIC$ là hình bình hành.

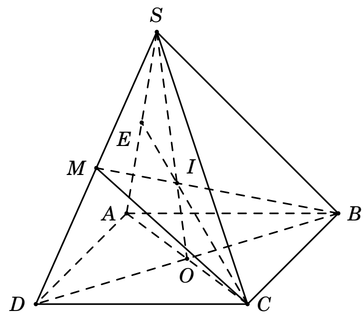


BÀI 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M là trung điểm của SD.

① Tìm $I = BM \cap (SAC)$. Chứng minh: $BI = 2IM$.

② Tìm $E = SA \cap (BCM)$. Chứng minh: E là trung điểm của SA.

ĐS:



BÀI 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $SN = 2ND$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBD) và (SAC).

② Tìm giao điểm E của đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\dfrac{EN}{EM}$.

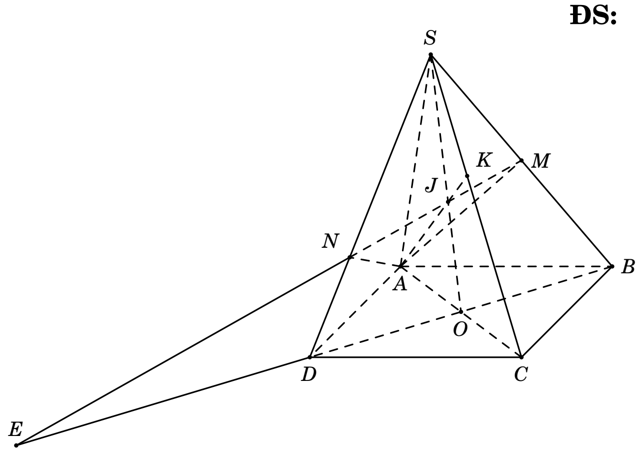
③ Tìm giao điểm K của đường thẳng SC và mặt phẳng (AMN). Gọi J giao điểm của AK và SO. Tính tỉ số: $\dfrac{JK}{JA}$.

ĐS:

① $(SBD) \cap (SAC) = SO$.

② $\dfrac{EN}{EM} = \dfrac{2}{3}$.

③ $\dfrac{JK}{JA} = \dfrac{2}{5}$.

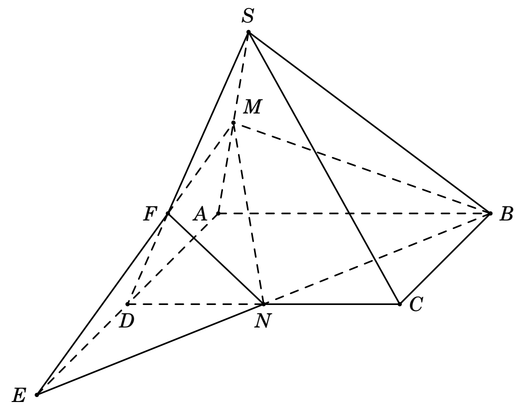


BÀI 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, lần lượt là trung điểm của SA và CD.

① Tìm giao điểm E của AD với (BMN).

② Tìm giao điểm F của SD và (BMN). Chứng minh rằng: $FS = 2FD$.

ĐS:



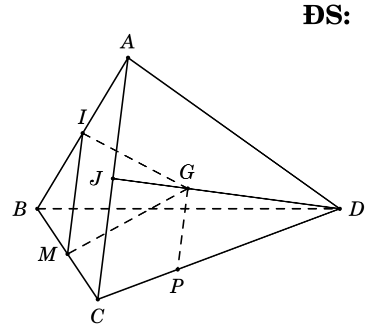
BÀI 20. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, M lần lượt là trung điểm của AB và BC, G là trọng tâm tam giác ACD.

① Tìm giao điểm P của CD và (IMG).

② Tính tỉ số: $\dfrac{PC}{PD}$.

ĐS:

- $\dfrac{PC}{PD} = \dfrac{1}{2}$.



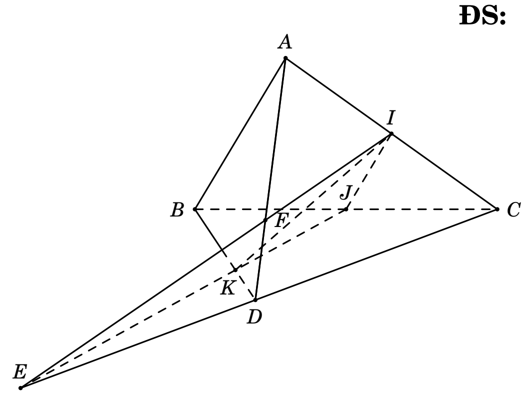
BÀI 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm K sao cho $BK = 2KD$.

① Tìm giao điểm E của đường thẳng CD và (IJK). Chứng minh: $DE = DC$.

② Tìm giao điểm F của đường thẳng AD và (IJK). Tính tỉ số $\dfrac{FA}{FD}$.

ĐS:

- $\dfrac{FA}{FD} = 2$.



DẠNG 1.3. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α).

Phương pháp giải: Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$, trên các đoạn CA, CB, BD lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho MN không song song với AB. Gọi (α) là mặt phẳng xác định bởi ba điểm M, N, P. Xác định thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện $ABCD$?

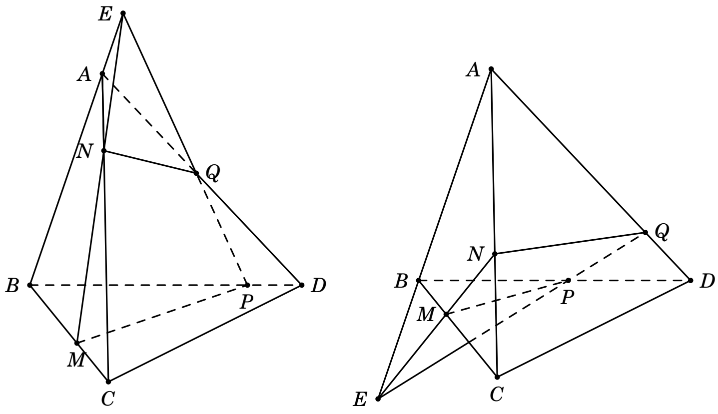
Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC), do MN và AB không song song nên chúng cắt nhau giả sử tại E. Khi đó điểm E nằm ngoài đoạn AB.

Trong mặt phẳng (ABD), gọi Q là giao điểm của EP và AD. Ta có

- $(MNP) \cap (ABC) = MN$.
- $(MNP) \cap (BCD) = MP$.
- $(MNP) \cap (ABD) = PQ$.
- $(MNP) \cap (ACD) = QN$.

Vậy thiết diện cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNQP$. Hay hiết diện cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $MNQP$.



□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $SABC$ và O là một điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên cạnh SA và SC sao cho MN không song song với AC. Xác định thiết diện cắt tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (MNO)?

Lời giải.

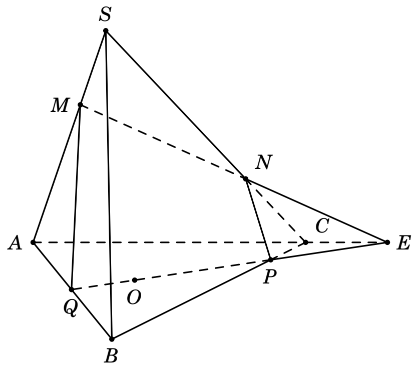
Trong mặt phẳng (SAC), do MN và AC không song song nên chúng cắt nhau giả sử tại E. Khi đó điểm E nằm ngoài đoạn AC.

Trong mặt phẳng (ABC), gọi P, Q lần lượt là giao điểm của EO với BC và AB.

Ta có

- $(MNO) \cap (SAC) = MN$.
- $(MNO) \cap (SBC) = NP$.
- $(MNO) \cap (ABC) = PQ$.
- $(MNO) \cap (SAB) = QM$.

Vậy thiết diện cắt tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (MNO) là tứ giác $MNPQ$.



□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các cạnh SA, SB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho MN không song song với AB. Gọi P là điểm thuộc miền trong tam giác ABC. Xác định giao tuyến của (MNP) và (ABC) từ đó suy ra thiết diện khi cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (MNP).

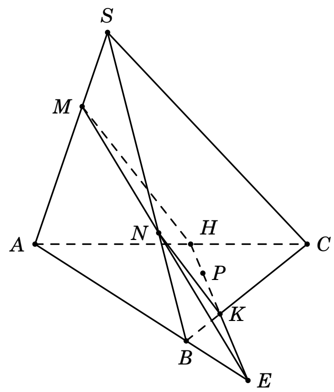
Lời giải.

Trong mặt phẳng (SAB), do MN không song song với AB nên chúng cắt nhau giả sử tại E. Khi đó E nằm ngoài đoạn AB.

Trong mặt phẳng (ABC), gọi K, H lần lượt là giao điểm của EP với các đoạn BC, AC (Vì P thuộc miền trong tam giác (ABC)). Khi đó ta có

- $(MNP) \cap (SAB) = MN$.
- $(MNP) \cap (SBC) = NK$.
- $(MNP) \cap (ABC) = KH$.
- $(MNP) \cap (SAC) = HM$.

Vậy thiết diện cắt hình chóp $S.ABC$ bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MNKH$.



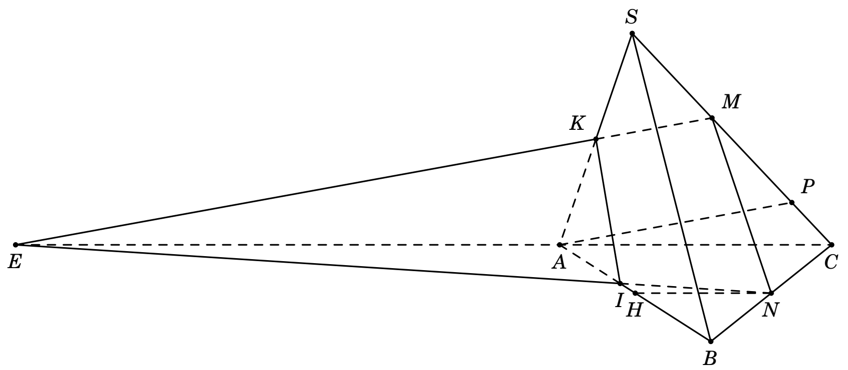
□

BÀI 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi K, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và M là điểm thuộc đoạn SC sao cho $3SM = 2MC$.

① Tìm thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (KMN).

② Mặt phẳng (KMN) cắt AB tại I. Tính tỉ số $\dfrac{IA}{IB}$. **ĐS:** $\dfrac{IA}{IB} = \dfrac{2}{3}$

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (SAC), vì $\dfrac{SM}{MC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{5} \neq \dfrac{1}{2} = \dfrac{SK}{SA}$ nên KM không song song với AC. Gọi E là giao điểm của KM và AC.
Trong mặt phẳng (ABC), gọi I là giao điểm của EN và AB, khi đó I là giao điểm của AB với (KMN). Ta có

- $(KMN) \cap (SAC) = MK$.
- $(KMN) \cap (SAB) = KI$.
- $(KMN) \cap (ABC) = IN$.
- $(KMN) \cap (SBC) = NM$.

Vậy thiết diện cắt tứ diện $SABC$ bởi mặt phẳng (KMN) là tứ giác $MNIK$.

② Trên SC lấy điểm P sao cho M là trung điểm của SP. Khi đó ta có

- $AP \parallel KM$ theo tính chất đường trung bình của tam giác SAP nên $AP \parallel EM \Rightarrow \dfrac{AC}{AE} = \dfrac{PC}{PM} = \dfrac{1}{2}$.
- Gọi H là trung điểm của AB, khi đó $NH \parallel AC$ (Tính chất đường trung bình).
Do đó $\dfrac{IH}{IA} = \dfrac{NH}{AE} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow AI = \dfrac{4}{5}AH = \dfrac{2}{5}AB \Rightarrow \dfrac{AI}{BI} = \dfrac{2}{3}$.

□

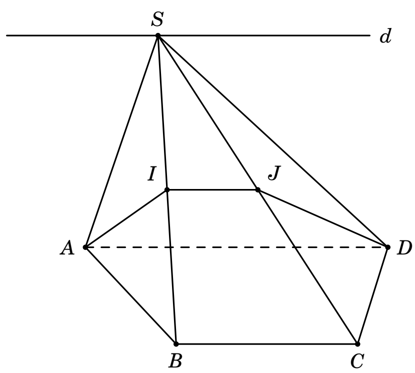
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang thỏa mãn $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB, SC.

① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

② Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ).

③ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ).

Lời giải.



① Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có S là một điểm chung.
Lại có $AD \parallel BC$ theo giả thiết và $S \notin (ABCD)$ nên giao tuyến của (SAD) và (SBC) là đường thẳng d đi qua S và song song với AD, BC.

② Do IJ là đường trung bình của tam giác SBC nên $IJ \parallel BC$ mà $I \notin (ABCD) \Rightarrow IJ \parallel AD$. Vì vậy A, D, I, J xác định mặt phẳng $(ADJI)$ hay $D \in (AIJ)$.
Mặt khác $D \in SD$ nên D là giao điểm của SD với (AIJ).

③ Từ kết quả trên ta có

- $(AIJ) \cap (ABCD) = AD$.
- $(AIJ) \cap (SCD) = DJ$.
- $(AIJ) \cap (SBC) = JI$.
- $(AIJ) \cap (SAB) = IA$.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) là hình thang $ADJI$.

□

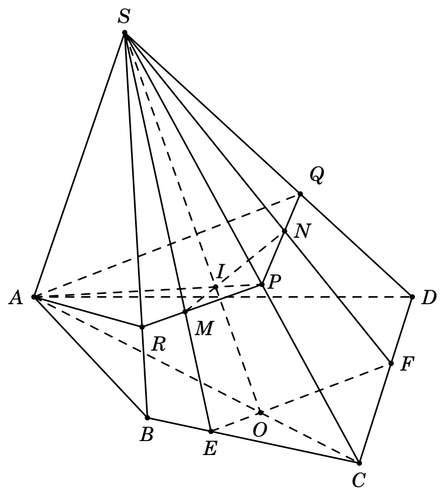
BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC. Lấy điểm N thuộc miền trong tam giác SCD.

① Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng (SAC).

② Tìm giao điểm của SC và mặt phẳng (AMN).

③ Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AMN).

Lời giải.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của AC và EF. Khi đó $SO = (SAC) \cap (SEF)$.
Trong mặt phẳng (SEF), gọi $\{I\} = MN \cap SO$. Ta có $I \in SO \Rightarrow I \in (SAC)$. Mà $I \in MN$ nên $\{I\} = MN \cap (SAC)$.

② Theo chứng minh trên ta suy ra $AI = (AMN) \cap (SAC)$.
Trong mặt phẳng (SAC) gọi P là giao điểm của AI và SC. Khi đó do $P \in AI \Rightarrow P \in (AMN)$. Mà $P \in SC$ nên $\{P\} = SC \cap (AMN)$.

③ Do $M, P \in (SBC)$ nên trong mặt phẳng (SBC), gọi R là giao điểm của PM với SB. Ta có $PM \subset (AMN)$ nên $R \in (AMN)$.
Tương tự, trong mặt phẳng (SCD), gọi Q là giao điểm của PN với SD ta có $Q \in (AMN)$. Vì vậy

- $(AMN) \cap (SAB) = AR$.
- $(AMN) \cap (SBC) = RP$.
- $(AMN) \cap (SCD) = PQ$.
- $(AMN) \cap (SAD) = QA$.

Vậy thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (AMN) là tứ giác $ARPQ$.

□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB và G là trọng tâm tam giác SAD.

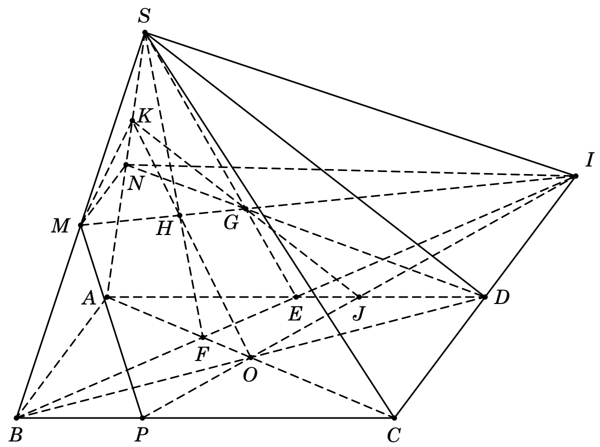
① Tìm giao điểm I của GM với $(ABCD)$. Chứng minh I thuộc đường thẳng CD và $IC = 2ID$.

② Tìm giao điểm J của AD và (OMG). Tính tỉ số $\dfrac{JA}{JD}$. **ĐS:** $\dfrac{JA}{JD} = 2$

③ Tìm giao điểm K của SA và (OMG). Tính tỉ số $\dfrac{KA}{KS}$. **ĐS:** $\dfrac{KA}{KS} = 2$

④ Tìm thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (OMG).

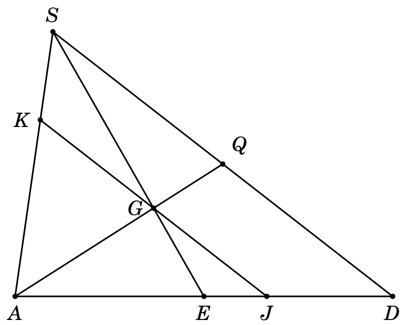
Lời giải.



① Gọi E, N lần lượt là trung điểm của AD, SA. Ta có M là trung điểm của SB, G là trọng tâm của tam giác SAD.
Trong mặt phẳng (SBE) có $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{2}{3} = \dfrac{SG}{SE}$ suy ra MG và BE không song song. Do đó MG và BE cắt nhau.
Lại do $BE \subset (ABCD)$, $\{I\} = MG \cap (ABCD)$ nên $I \in BE$.
Vậy giao điểm I của MG và $(ABCD)$ là giao điểm I của MG và BE.
Do MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$. Suy ra MN, CD xác định mặt phẳng $(MNDC)$.
Lại do G là trọng tâm tam giác SAD nên $G \in ND \Rightarrow G \in (MNDC)$, $I \in MG \Rightarrow I \in (MNDC)$.
Mặt khác $(MNDC) \cap (ABCD) = CD$, $I \in (MNDC)$, $I \in (ABCD)$ nên $I \in CD$.
Mà $AD \parallel BC$ nên $ED \parallel BC \Rightarrow \dfrac{ID}{IC} = \dfrac{ED}{BC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow IC = 2ID$.

② Dễ thấy $I \in (OMG)$. Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi J' là giao điểm của AD và OI. Vì $OI \subset (OMG) \Rightarrow J' \in (OMG)$ nên $AD \cap (OMG) = \{J'\}$.
Mà J là giao điểm của AD và (OMG) (gt) nên $J' \equiv J$. Vậy J là giao điểm của IO và AD.
Dễ thấy J là trọng tâm $\triangle IAC$ nên $\dfrac{JA}{JD} = 2$.

③ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi F là giao điểm của BI và AC suy ra $(SBI) \cap (SAC) = SF$.
Trong mặt phẳng (SBI), gọi H là giao điểm của MI và SF. Ta có $H \in MG \Rightarrow OH \subset (OMG)$ và H thuộc (SAC).
Trong mặt phẳng (SAC), gọi K' là giao điểm của OH và SA. Khi đó do $K' \in OH \Rightarrow K' \in (OMG) \Rightarrow SA \cap (OMG) = \{K'\}$ hay $K' \equiv K$. Vậy K là giao điểm của OH với SA.
Lại có K, G, J là các điểm chung của hai mặt phẳng (OMG) và (SAD) nên K, G, J thẳng hàng.
Gọi Q là trung điểm của SD, vì J là trọng tâm $\triangle IAC$. Xét $\triangle SAD$ có



$$\frac{AG}{AQ} = \frac{2}{3} = \frac{AJ}{AD} \Rightarrow GJ \parallel SD \Rightarrow KJ \parallel SD \Rightarrow \frac{KA}{KS} = \frac{JA}{JD} = 2.$$

④ Từ chứng minh trên ta suy ra

- $(OMG) \cap (SAB) = KM$.
- $(OMG) \cap (SBC) = MP$.
- $(OMG) \cap (ABCD) = PJ$.
- $(OMG) \cap (SAD) = JK$.

Vậy thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi mặt phẳng (OMG) là tứ giác $KMPJ$.

□

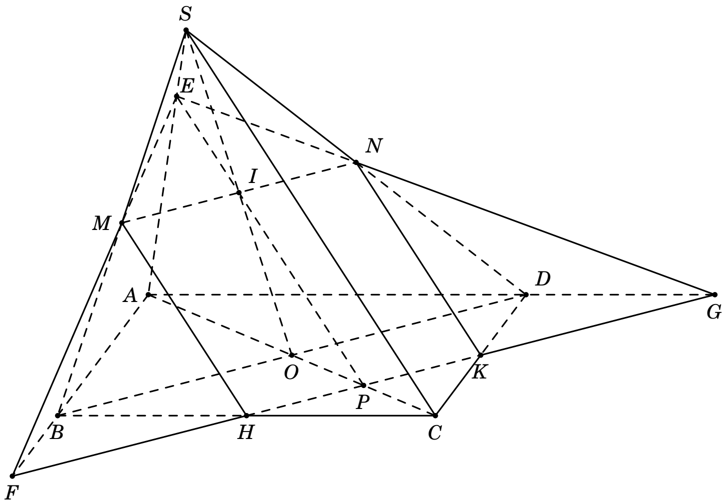
BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC.

① Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAC) và $(ABCD)$.

② Tìm giao điểm của SA với mặt phẳng (MNP).

③ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số mà mặt phẳng (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD. **ĐS:** $\dfrac{ES}{EA} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{HB}{HC} = \dfrac{KD}{KC} = 1$

Lời giải.



① Do M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD nên MN là đường trung bình của tam giác SBD, suy ra $MN \parallel BD$. Ta có $(PMN) \cap (SBD) = MN$.
Trong mặt phẳng (SBD), gọi I là giao điểm của MN và SO. Khi đó vì $I \in SO \Rightarrow I \in (SAC)$, $P \in AC \Rightarrow P \in (SAC)$ suy ra $(PMN) \cap (SAC) = PI$.
Hai mặt phẳng (PMN) và $(ABCD)$ có P là một điểm chung. Mà $MN \parallel BD$, $P \notin MN$, $P \notin BD$ nên giao tuyến của (PMN) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua P, song song với MN và song song với BD, cắt các cạnh BC, CD lần lượt tại H và K.

② Trong mặt phẳng (SAC), gọi E là giao điểm của PI và SA. Ta có

- $E \in PI, PI \subset (PMN) \Rightarrow E \in (PMN)$.
- Mà $E \in SA$ nên E là giao điểm của SA với (PMN).

③ Ta có (PMN) lần lượt giao với các cạnh SA, SB, BC, CD, SD tại các điểm E, M, H, K, N nên

- $(PMN) \cap (SAB) = EM$.
- $(PMN) \cap (SBC) = MH$.
- $(PMN) \cap (ABCD) = HK$.
- $(PMN) \cap (SCD) = KN$.
- $(PMN) \cap (SAD) = NE$.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (PMN) là ngũ giác $EMHKN$. Vì MN là đường trung bình trong tam giác ABD nên I là trung điểm của SO.
Trong tam giác SOC có IP là đường trung bình nên $IP \parallel SC$.
Do đó trong tam giác SAC có $PE \parallel SC$ suy ra $\dfrac{ES}{EA} = \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{1}{3}$.
Lại có P là trung điểm của OC, HK qua P và $HK \parallel BD$ nên HK là đường trung bình của tam giác BCD.
Do đó $\dfrac{HB}{HC} = \dfrac{KD}{KC} = 1$.

□

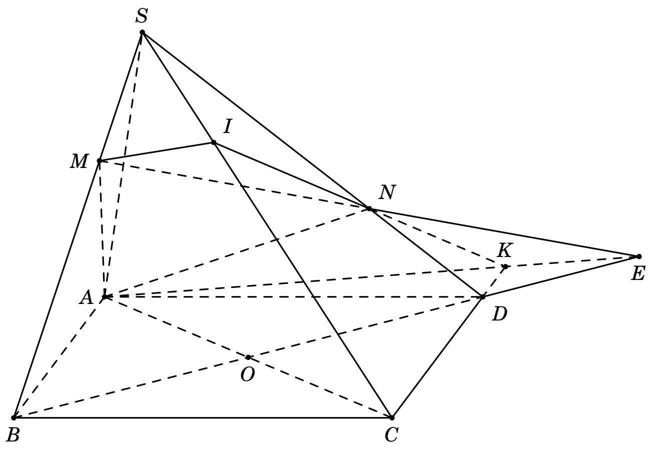
BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Trên các cạnh SB, SD ta lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{3}, \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{2}{3}$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

② Tìm giao điểm I của SC và mặt phẳng (AMN). Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$.

③ Gọi K là giao điểm của IN và CD. Tính tỉ số $\dfrac{KC}{KD}$. **ĐS:** $\dfrac{KC}{KD}=5$

Lời giải.



① Trong mặt phẳng (SBD). Theo bài ra ta có $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{SM}{SB}\neq\dfrac{SN}{SD}$. Do đó MN cắt BD giả sử tại E.
Hai mặt phẳng (AMN) và $(ABCD)$ có hai điểm chung A và E nên $(AMN)\cap(ABCD)=AE$.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của AE và CD. Khi đó

- $K\in AE\Rightarrow K\in(AMN)$.
- $K\in CD\Rightarrow K\in(SCD)$. Suy ra K là một điểm chung của (AMN) và (SCD).
- Mặt khác (AMN) và (SCD) có điểm N chung (vì $N\in SD$).

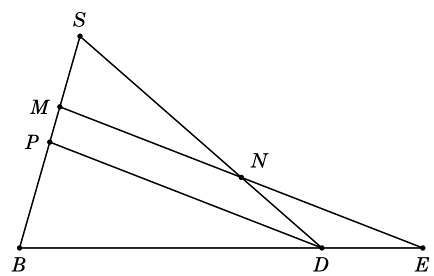
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD) là đường thẳng KN.

② Trong mặt phẳng (SCD), gọi I là giao điểm của KN và SC. Khi đó $I\in KN\Rightarrow I\in(AMN)$. Vậy I là giao điểm của SC và (AMN).
Do (AMN) cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm A, M, I, N nên

- $(AMN)\cap(SAB)=AM$.
- $(AMN)\cap(SBC)=MI$.
- $(AMN)\cap(SCD)=IN$.
- $(AMN)\cap(SAD)=NA$.

Suy ra thiết diện của mặt phẳng (AMN) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AMIN$.

③ Ta có $K\in CD$ và K, I, N thẳng hàng.
Lấy điểm P trên cạnh SB sao cho $PD\parallel MN$.
Khi đó ta có $\dfrac{SM}{SP}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow\dfrac{MP}{MM}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{1}{4}$ vì $BM=2SM$.
Xét tam giác BME, ta cũng có $PD\parallel ME$ nên $\dfrac{ED}{EB}=\dfrac{MP}{MB}=\dfrac{1}{4}$.
Xét tam giác ABE, có $KD\parallel AB$ nên $\dfrac{KD}{AB}=\dfrac{ED}{EB}=\dfrac{1}{4}$.
Suy ra $\dfrac{KD}{DC}=\dfrac{KD}{AB}=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{KD}{KC}=\dfrac{KD}{KD+DC}=\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{1}{5}\Rightarrow\dfrac{KC}{KD}=5$.

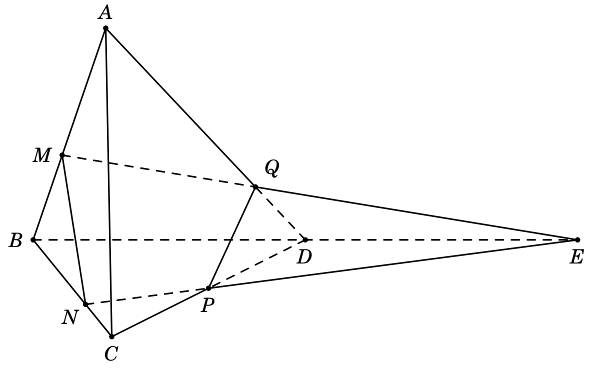


□

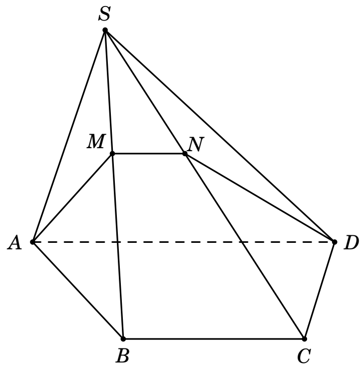
3 BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 8. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB lấy điểm M. Trên cạnh BC lấy điểm N thỏa mãn $BN=2NC$. Gọi P là trung điểm của CD. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNP). **ĐS:**

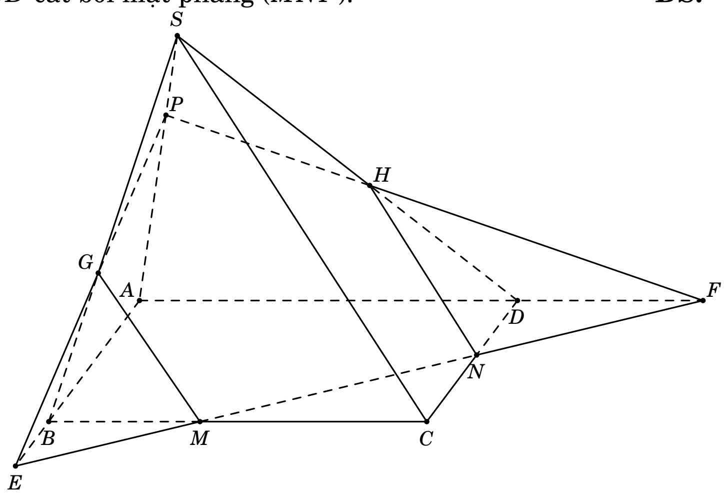
Thiết diện là tứ giác $MNPQ$.



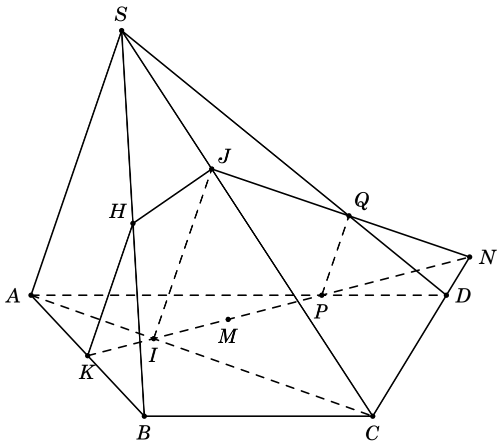
BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD. Lấy điểm M trên cạnh SB. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (AMD). **ĐS:**
Thiết diện là hình thang $AMND$.



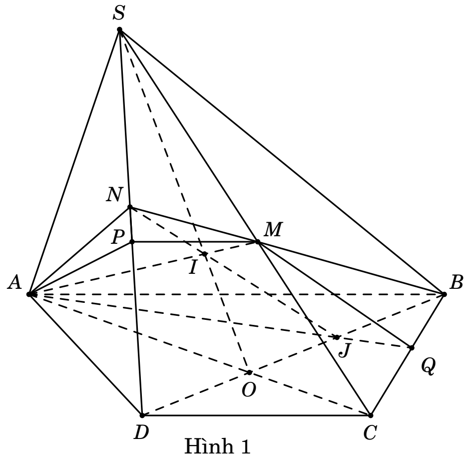
BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CD, SA. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (MNP). **ĐS:**
Thiết diện là ngũ giác $MNHPG$.



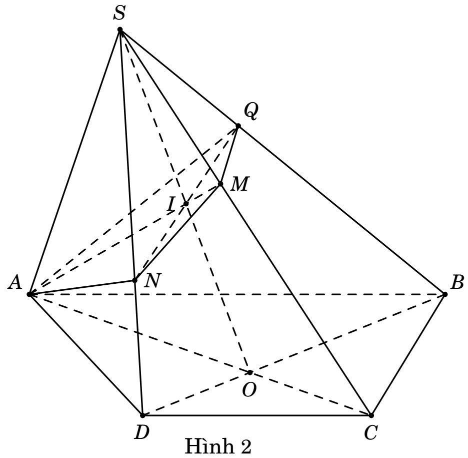
BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB và M là một điểm nằm trong hình thang $ABCD$ sao cho đường thẳng KM cắt hai đường thẳng AD và CD. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (HKM). **ĐS:**
Thiết diện là ngũ giác $HKPQJ$.



BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Lấy các điểm M, N lần lượt trên các cạnh SC và SD. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với các mặt phẳng (ABM) và (AMN). **ĐS:**



Hình 1



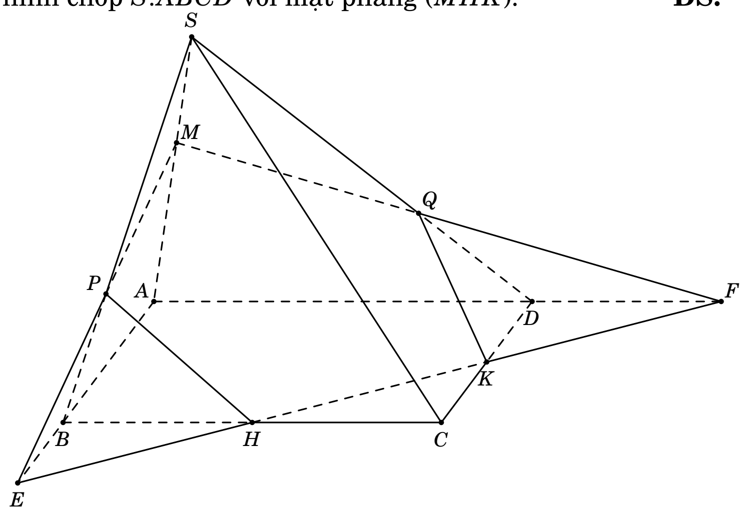
Hình 2

— Thiết diện cắt bởi (ABM) là hình thang $ABMP$.

— Nếu $\dfrac{SM}{SC} > \dfrac{SN}{SD}$ thì thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi (AMN) là tứ giác $ANMQ$ (Hình 1).

— Nếu $\dfrac{SM}{SC} < \dfrac{SN}{SD}$ thì thiết diện cắt hình chóp $S.ABCD$ bởi (AMN) là tứ giác $ANMQ$ (Hình 2).

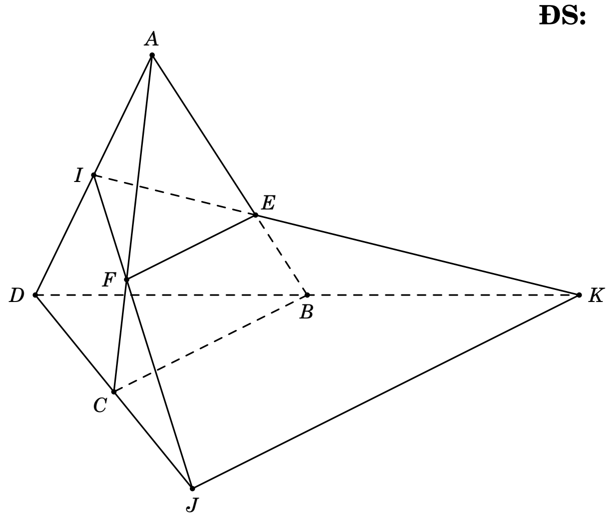
BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Lấy điểm M bất kỳ trên cạnh SA. Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MHK). **ĐS:** Thiết diện là ngũ giác $PMQKH$.



BÀI 14. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của AD, J là điểm đối xứng với D qua C, K là điểm đối xứng với D qua B. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (IJK) và tính diện tích của thiết diện này. **ĐS:**

— Thiết diện là tam giác IEF cân tại I.

— $S_{\triangle IEF} = \dfrac{a^2}{6}$.



BÀI 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi K là trọng tâm của tam giác SAC. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và SD.

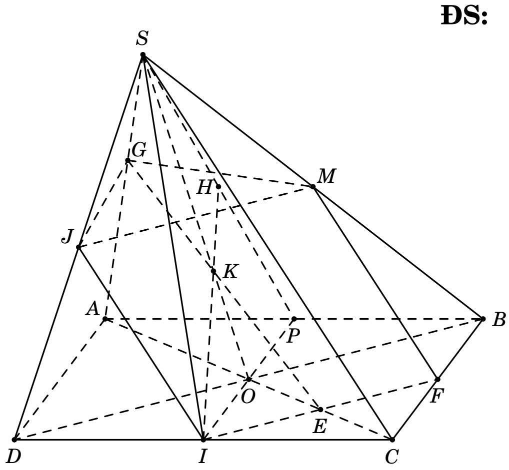
① Tìm giao điểm H của đường thẳng IK với mặt phẳng (SAB).

② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJK).

ĐS:

① $\{H\} = SP \cap IK$.

② Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IJK) là ngũ giác $IJGMF$.



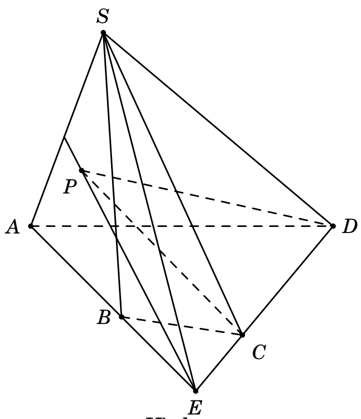
BÀI 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không là hình thang, điểm P nằm trong tam giác SAB và điểm M thuộc cạnh SD sao cho $MD = 2MS$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD).

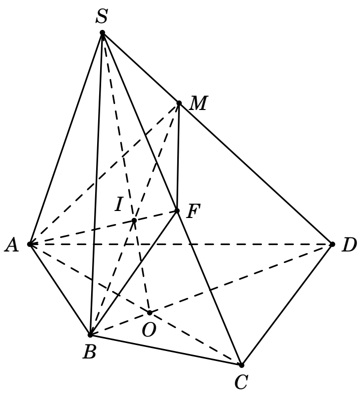
② Tìm giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM).

③ Gọi N là trung điểm của AD. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp $S.ABCD$.

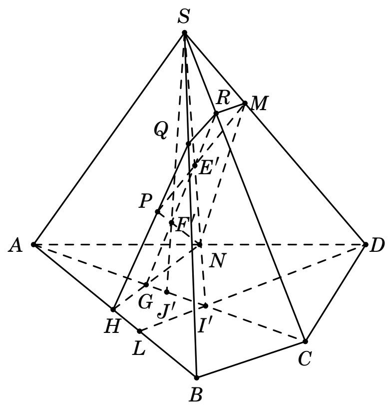
ĐS:



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

① Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (PCD) là đường thẳng PE.

② Giao điểm của SC với mặt phẳng (ABM) là điểm F.

③ Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) và hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MNHQR$.

DẠNG 1.4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Phương pháp giải
Giả sử chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

— *Xét hai mặt phẳng (P) và (Q). Chứng minh ba điểm I, J, K là ba điểm chung của (P) và (Q).*

— *Khi đó I, J, K thuộc giao tuyến của (P) và (Q) hay I, J, K thẳng hàng.*

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $SABC$. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy M, N, P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải.

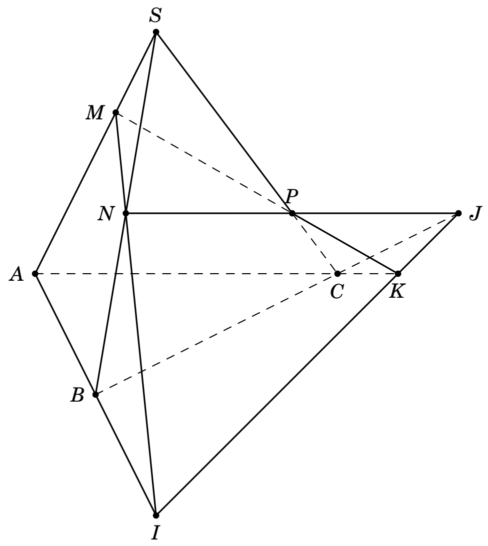
Xét hai mặt phẳng (ABC) và (MNP). Ta có

— $\begin{cases} I \in AB \subset (ABC) \\ I \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABC) \cap (MNP).$ (1)

— $\begin{cases} J \in BC \subset (ABC) \\ J \in NP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow J \in (ABC) \cap (MNP).$ (2)

— $\begin{cases} K \in AC \subset (ABC) \\ K \in MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABC) \cap (MNP).$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra I, J, K cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của (ABC) và (MNP).
Vậy ba điểm I, J, K thẳng hàng.



□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O hai điểm, M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD, điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC.

1. Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP).
2. Tìm giao điểm Q của SA với mặt phẳng (MNP).
3. Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

1. Trong mặt phẳng (SBD), gọi $I = SO \cap MN$.
Ta có $\begin{cases} I \in SO \\ I \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I = SO \cap (MNP).$

2. Trong mặt phẳng (SAC), gọi $Q = SA \cap IP$.
Ta có $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in IP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SA \cap (MNP).$

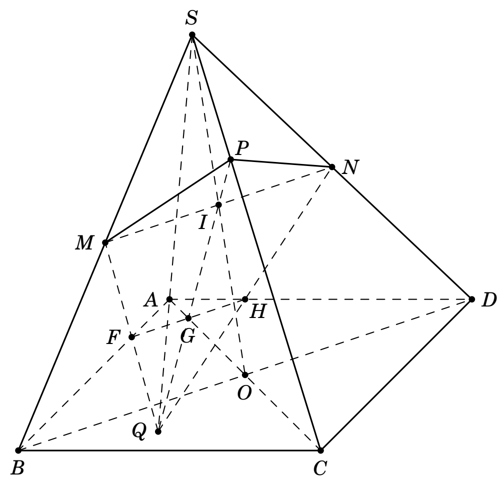
3. Xét hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(MNPQ)$. Ta có

— $\begin{cases} F \in AB \subset (ABCD) \\ F \in QM \subset (MNPQ) \end{cases}$
$\Rightarrow F \in (ABCD) \cap (MNPQ).$ (1)

— $\begin{cases} G \in AC \subset (ABCD) \\ G \in QP \subset (MNPQ) \end{cases}$
$\Rightarrow G \in (ABCD) \cap (MNPQ).$ (2)

— $\begin{cases} H \in AD \subset (ABCD) \\ H \in QN \subset (MNPQ) \end{cases}$
$\Rightarrow H \in (ABCD) \cap (MNPQ).$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra F, G, H cùng thuộc đường thẳng giao tuyến của $(ABCD)$ và $(MNPQ)$.
Vậy ba điểm F, G, H thẳng hàng.

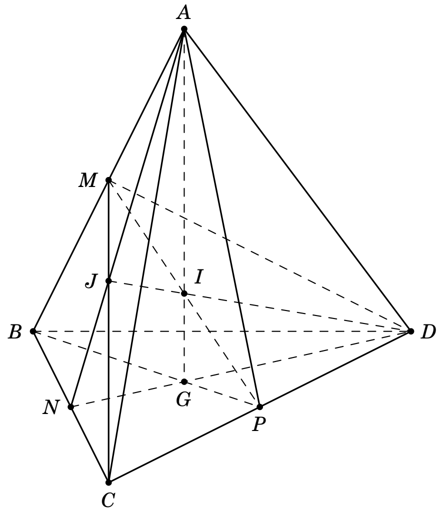


2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

1. Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP).
2. Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải.



① Ta có $A \in (ADN) \cap (ABP)$. (1)

Mặt khác $\begin{cases} G \in DN \in (ADN) \\ G \in BP \in (ABP) \end{cases}$

$\Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(ADN) \cap (ABP) = AG$.

② Xét hai mặt phẳng (CDM) và (ADN). Ta có

+ $D \in (CDM) \cap (ADN)$. (3)

+ $\begin{cases} I \in JD \subset (CDM) \\ I \in AG \subset (AND) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (CDM) \cap (ADN)$. (4)

+ $\begin{cases} J \in CM \subset (CDM) \\ J \in AN \subset (AND) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (CDM) \cap (ADN)$. (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra D, I, J thẳng hàng.

□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$ có K là trung điểm của AB. Lấy I, J lần lượt thuộc AC, BD sao cho $IA = 2IC$ và $JB = 3JD$.

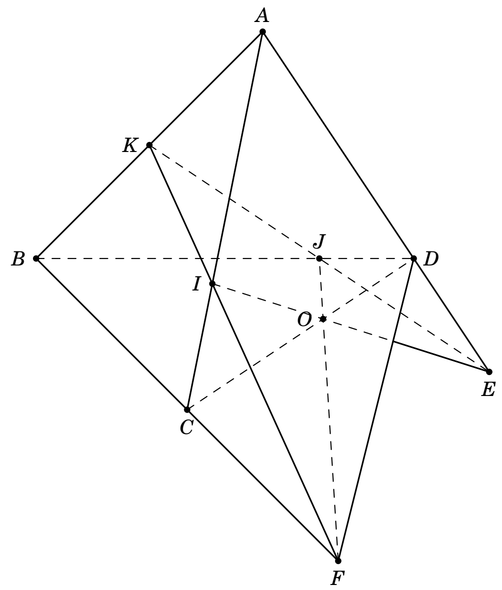
① Tìm giao điểm E của AD và (IJK).

② Tìm giao tuyến d của (IJK) và (BCD).

③ Gọi O là giao điểm của d với CD. Chứng minh I, O, E thẳng hàng.

④ Tính các tỉ số $\dfrac{OI}{OE}$ và $\dfrac{OC}{OD}$. **ĐS:** $\dfrac{OI}{OE} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải.



① Trong (ABD), gọi $AD \cap KJ = E$. Ta có $\begin{cases} E \in AD \\ E \in KJ \subset (IJK) \end{cases}$

$\Rightarrow E = AD \cap (IJK)$.

② Trong (ABC), gọi $KI \cap BC = F$. Ta có

$+ \begin{cases} J \in (IJK) \\ J \in BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow J \in (IJK) \cap (BCD).$ (1)

$+ \begin{cases} F \in KI \subset (IJK) \\ F \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow F \in (IJK) \cap (BCD).$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(IJK) \cap (BCD) = FJ$ hay $d \equiv FJ$.

③ Trong (BCD), $O = FJ \cap CD$.

Xét hai mặt phẳng (IJK) và (ACD). Ta có

$+ \begin{cases} I \in (IJK) \\ I \in AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow I \in (IJK) \cap (ACD).$ (3)

$+ \begin{cases} O \in FJ \subset (IJK) \\ O \in CD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow O \in (IJK) \cap (ACD).$ (4)

$+ \begin{cases} E \in KJ \subset (IJK) \\ E \in AD \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow E \in (IJK) \cap (ACD).$ (5)

Từ (3), (4), (5) suy ra I, O, E thẳng hàng.

④ Áp dụng định lí Menelaus trong các tam giác sau.

Tam giác ABC có K, I, F thẳng hàng

$\Rightarrow \dfrac{FC}{FB} \cdot \dfrac{KB}{KA} \cdot \dfrac{IA}{IC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{FC}{FB} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \Rightarrow \dfrac{FC}{FB} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow C$ là trung điểm của BF.

Tam giác BCD có F, O, J thẳng hàng

$\Rightarrow \dfrac{OC}{OD} \cdot \dfrac{JD}{JB} \cdot \dfrac{FB}{FC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OC}{OD} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{3}{2}$.

Tam giác ABD có K, J, E thẳng hàng

$\Rightarrow \dfrac{ED}{EA} \cdot \dfrac{KA}{KB} \cdot \dfrac{JB}{JD} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{ED}{EA} \cdot 1 \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{ED}{EA} = \dfrac{1}{3}$.

Tam giác AIE có C, O, D thẳng hàng

$\Rightarrow \dfrac{OI}{OE} \cdot \dfrac{DE}{DA} \cdot \dfrac{CA}{CI} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OI}{OE} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 3 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{OI}{OE} = \dfrac{2}{3}$.

Vậy $\dfrac{OI}{OE} = \dfrac{2}{3}$ và $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{3}{2}$.

□

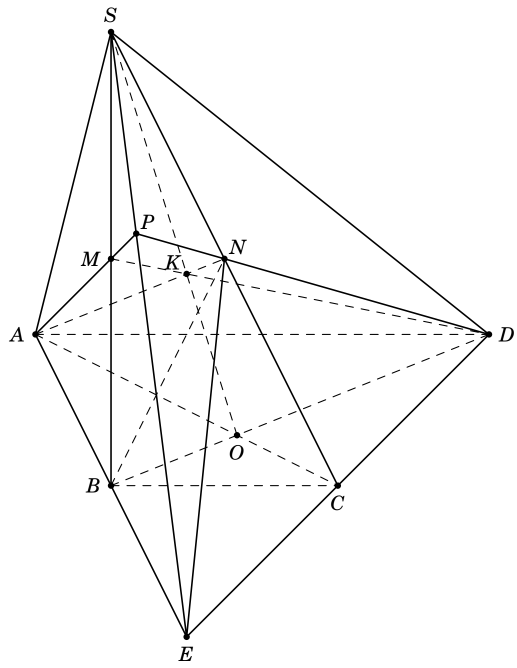
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC và $O = AC \cap BD$.

① Tìm giao tuyến của (ABN) và (SCD). **ĐS:** $(ABN) \cap (SCD) = EN$ với $E = AB \cap CD$

② Tìm giao điểm P của DN và (SAB). **ĐS:** $P = DN \cap SE$

③ Gọi $K = AN \cap DM$. Chứng minh S, K, O thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KO}$. **ĐS:** $\dfrac{KS}{KO} = \dfrac{3}{2}$

Lời giải.



① Ta có $N \in (ABN) \cap (SCD)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $AB \cap CD = E \Rightarrow E \in (ABN) \cap (SCD)$.
Suy ra $(ABN) \cap (SCD) = EN$.

② Trong (SCD), gọi $DN \cap SE = P$
$\Rightarrow P = DN \cap (SAB)$.

③ Xét hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) có
+ $S \in (SAC) \cap (SBD)$. (1)
+ $\begin{cases} K \in AN \subset (SAC) \\ K \in MD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD)$. (2)
+ $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra S, K, O thẳng hàng.
Vì $AD \parallel BC$ nên $\triangle OAD \sim \triangle OCB$
$\Rightarrow \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng định lí Menenalus vào $\triangle SOC$ có A, K, N thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{KS}{KO} \cdot \dfrac{AO}{AC} \cdot \dfrac{NC}{NS} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KS}{KO} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KS}{KO} = \dfrac{3}{2}$.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

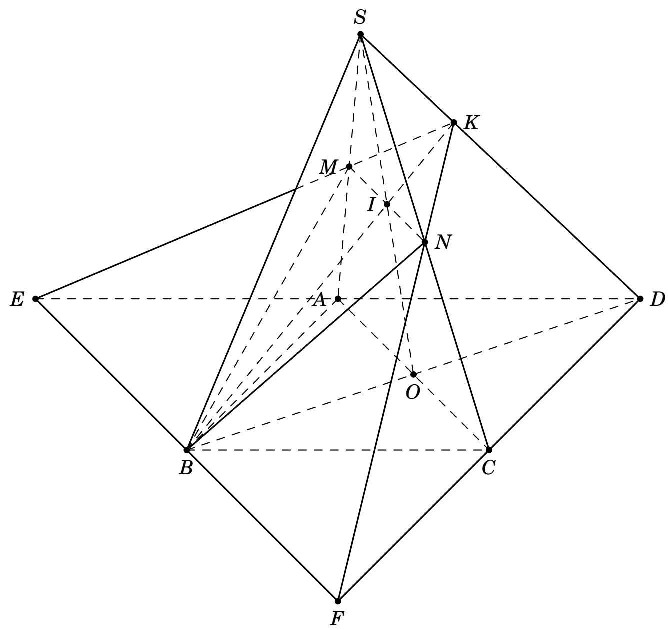
① Tìm giao tuyến của (BMN) với các mặt phẳng (SAB) và (SBC). **ĐS:** $(BMN) \cap (SAB) = BM$ và $(BMN) \cap (SBC) = BN$

② Tìm $I = SO \cap (BMN)$ và $K = SD \cap (BMN)$. **ĐS:** $SO \cap MN = I$ và $SD \cap BI = K$

③ Tìm $E = AD \cap (BMN)$ và $F = CD \cap (BMN)$. **ĐS:** $MK \cap AD = E$ và $NK \cap CD = F$

④ Chứng minh rằng ba điểm B, E, F thẳng hàng. **ĐS:** B, E, F là điểm chung của $(ABCD)$ và (MNP)

Lời giải.



① Ta có $(BMN) \cap (SAB) = BM$ và
$(BMN) \cap (SBC) = BN$.

② Trong (SAC), gọi $SO \cap MN = I$
$\Rightarrow I = SO \cap (BMN)$.
Trong (SBD), gọi $SD \cap BI = K$
$\Rightarrow K = SD \cap (BMN)$.

③ Trong (SAD), gọi $MK \cap AD = E$
$\Rightarrow E = AD \cap (BMN)$.
Trong (SCD), gọi $NK \cap CD = F$
$\Rightarrow F = CD \cap (BMN)$.

④ Xét hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (BMN) có
+ $\begin{cases} B \in (ABCD) \\ B \in (BMN) \end{cases} \Rightarrow B \in (ABCD) \cap (BMN)$. (1)
+ $\begin{cases} E \in AD \subset (ABCD) \\ E \in (BMN) \end{cases}$
$\Rightarrow E \in (ABCD) \cap (BMN)$. (2)
+ $\begin{cases} F \in CD \subset (ABCD) \\ F \in (BMN) \end{cases}$
$\Rightarrow F \in (ABCD) \cap (BMN)$. (3)
Từ (1), (2), (3) suy ra B, E, F thẳng hàng.

□

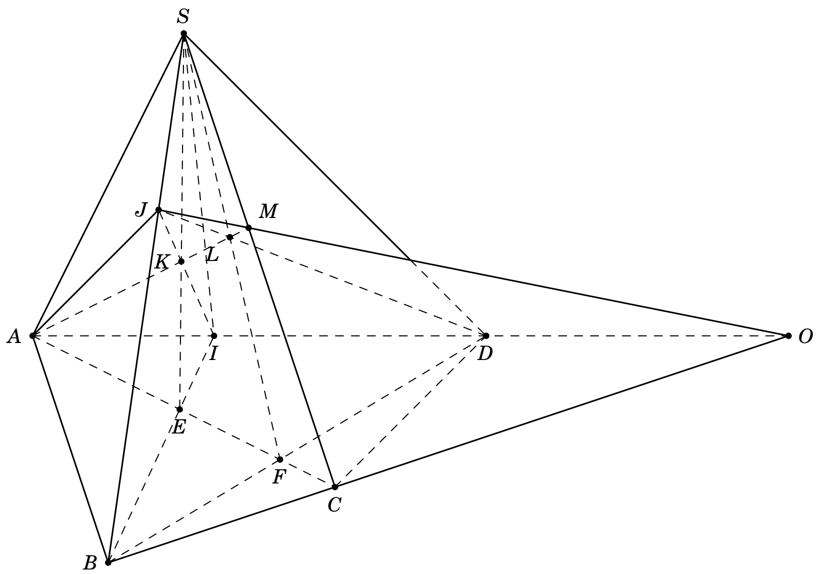
BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I và J là hai điểm trên hai cạnh AD, SB.

① Tìm giao tuyến của (SBI) và (SAC). Tìm giao điểm K của IJ và (SAC).

② Tìm giao tuyến của (SBD) và (SAC). Tìm giao điểm L của DJ và (SAC).

③ Gọi $O = AD \cap BC$, $M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng A, K, L, M thẳng hàng. **ĐS:** A, K, L, M là điểm chung của (SAC) và (AOJ)

Lời giải.



① Ta có $S \in (SBI) \cap (SAC)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $BI \cap AC = E$
$\Rightarrow E \in (SBI) \cap (SAC)$
Suy ra $(SBI) \cap (SAC) = SE$.
Trong (SBI), gọi $IJ \cap SE = K$
$\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$.

② Ta có $S \in (SBD) \cap (SAC)$.
Trong $(ABCD)$, gọi $AC \cap BD = F$
$\Rightarrow F \in (SBD) \cap (SAC)$.
Suy ra $(SBD) \cap (SAC) = SF$.
Trong (SBD), gọi $DJ \cap SF = L$
$\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.

③ Xét (SAC) và (AOJ) có
+ $A \in (SAC) \cap (AOJ)$. (1)
+ $\begin{cases} K \in SE \subset (SAC) \\ K \in IJ \subset (AOJ) \end{cases}$
$\Rightarrow K \in (SAC) \cap (AOJ)$. (2)
+ $\begin{cases} L \in SF \subset (SAC) \\ L \in JD \subset (AOJ) \end{cases}$
$\Rightarrow L \in (SAC) \cap (AOJ)$. (3)
+ $\begin{cases} M \in SC \subset (SAC) \\ M \in OJ \subset (AOJ) \end{cases}$
$\Rightarrow M \in (SAC) \cap (AOJ)$. (4)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra A, K, L, M thẳng hàng.

□

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AC, BD lần lượt lấy ba điểm E, F, G sao cho $AB = 3AE$, $AC = 2AF$, $DB = 4DG$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD).

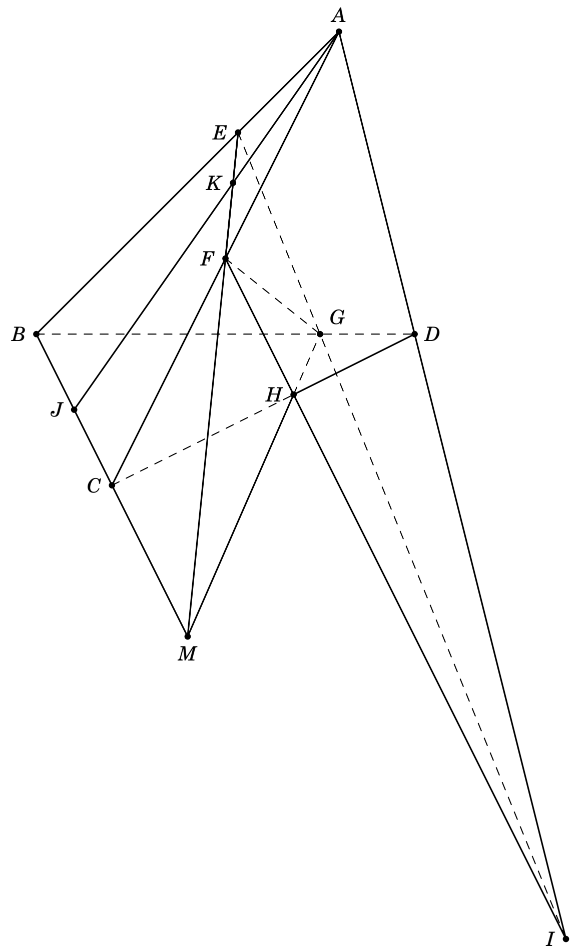
② Tìm giao điểm H của đường thẳng CD với (EFG). Tính tỉ số $\dfrac{HC}{HD}$. **ĐS:** $\dfrac{HC}{HD} = \dfrac{3}{2}$

③ Tìm giao điểm I của đường thẳng AD với (EFG). Tính tỉ số $\dfrac{IA}{ID}$. **ĐS:** $\dfrac{IA}{ID} = \dfrac{3}{2}$.

④ Chứng minh ba điểm F, H, I thẳng hàng.

⑤ Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K. Tính tỉ số $\dfrac{AK}{AJ}$. **ĐS:** $\dfrac{AK}{AJ} = \dfrac{2}{5}$

Lời giải.



① Trong (ABC), gọi $EF \cap BC = M \Rightarrow (EFG) \cap (BCD) = MG$.

② Trong (BCD), gọi $MG \cap CD = H \Rightarrow H = CD \cap (EFG)$.
Áp dụng định lí Menenalus với các tam giác sau.
Tam giác ABC có E, F, M thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{MC}{MB} \cdot \dfrac{EB}{EA} \cdot \dfrac{FA}{FC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MC}{MB} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{MC}{MB} = \dfrac{1}{2}$.
Tam giác BCD có M, H, G thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{HC}{HD} \cdot \dfrac{GD}{GB} \cdot \dfrac{MB}{MC} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{HC}{HD} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{HC}{HD} = \dfrac{3}{2}$.

③ Trong (ABD), goij $AD \cap EG = I \Rightarrow I = AD \cap (EFG)$.
Tam giacs ABD cos E, G, I thẳng hàng
$\Rightarrow \dfrac{IA}{ID} \cdot \dfrac{GD}{GB} \cdot \dfrac{EB}{EA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{IA}{ID} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{IA}{ID} = \dfrac{3}{2}$.

④ Xét hai mặt phẳng (ACD) và (EFG) có

$+ \begin{cases} F \in AC \subset (ACD) \\ F \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow F \in (ACD) \cap (EFG)$. (1)

$+ \begin{cases} H \in CD \subset (ACD) \\ H \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow H \in (ACD) \cap (EFG)$. (2)

$+ \begin{cases} I \in AD \subset (ACD) \\ I \in (EFG) \end{cases} \Rightarrow I \in (ACD) \cap (EFG)$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra F, H, I thẳng hàng.

⑤ Tam giác AJC có K, F, M thẳng hàng
$\dfrac{KA}{KJ} \cdot \dfrac{MJ}{MC} \cdot \dfrac{FC}{FA} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KA}{KJ} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{KA}{KJ} = \dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow \dfrac{AK}{AJ} = \dfrac{2}{5}$.

□

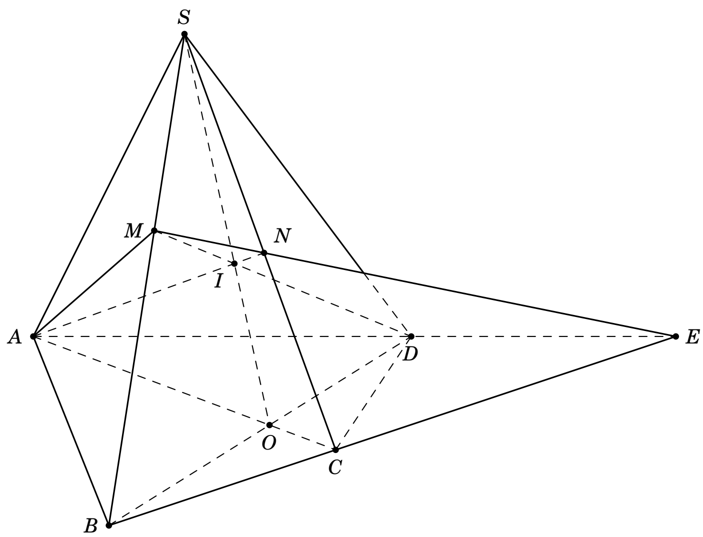
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD.

① Tìm giao điểm N của SC với (AMD).

② Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Lời giải.



① Trong $(ABCD)$, gọi $AD \cap BC = E$.
Trong (SBC), gọi $SC \cap ME = N$
$\Rightarrow N = SC \cap (AMD)$.

② Xét (SAC) và (SBD) có
$+ S \in (SAC) \cap (SBD)$.
$+ \begin{cases} I \in AN \subset (SAC) \\ I \in DM \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$.
$+ \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$
$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$.
Suy ra S, I, O thẳng hàng.

□

BÀI 8. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E, F, H lần lượt là các điểm thuộc cạnh SA, SB, SC.

① Tìm giao điểm $K = SD \cap (EFH)$.

② Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = EH \cap FK$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

③ Gọi $M = AD \cap BC$ và $N = EK \cap FH$. Chứng minh S, M, N thẳng hàng.

④ Gọi $P = AB \cap CD$ và $Q = EF \cap HK$. Chứng minh S, P, Q thẳng hàng.

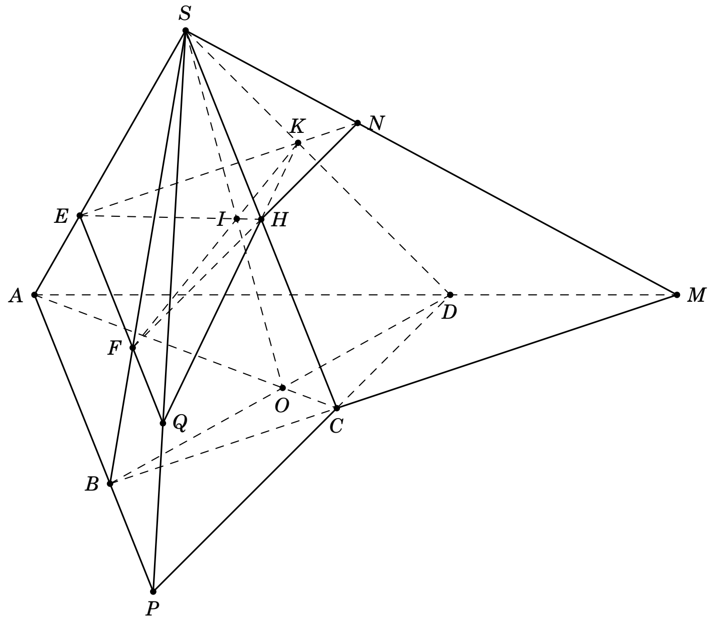
Lời giải.

① Trong (SAC), gọi $I = EH \cap SO$.
Trong (SBD), gọi $FI \cap SD = K$
$\Rightarrow K = SD \cap (EFH)$.

② Hiển nhiên S, I, O thẳng hàng.

③ Chứng minh S, M, N là điểm chung của (SAD) và (SBC).

④ Chứng minh S, P, Q là điểm chung của (SAB) và (SCD).

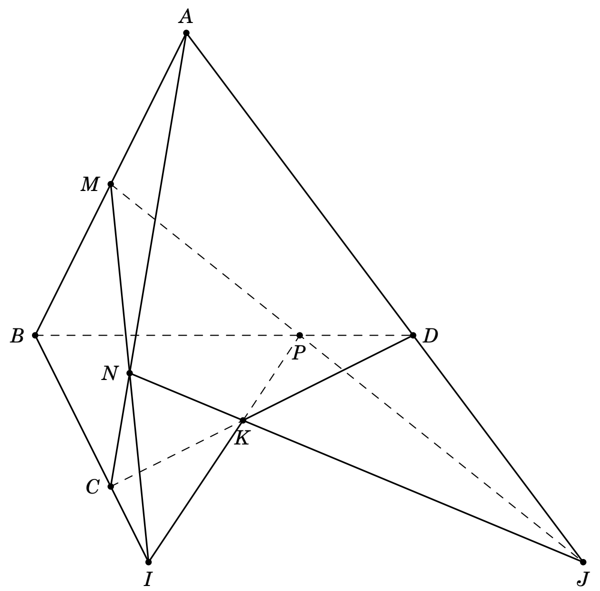


□

BÀI 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc cạnh AB, AC, BD và $MN \cap BC = I$, $MP \cap AD = J$, $NJ \cap IP = K$. Chứng minh C, D, K thẳng hàng.

Lời giải.

Chứng minh C, D, K là điểm chung của hai mặt phẳng (ACD) và (BCD).



□

BÀI 10. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối đôi một không song song và điểm $S \notin (ABCD)$. Lấy điểm I thuộc cạnh AD, lấy điểm J thuộc cạnh SB.

① Tìm $K = IJ \cap (SAC)$.

② Tìm $L = DJ \cap (SAC)$.

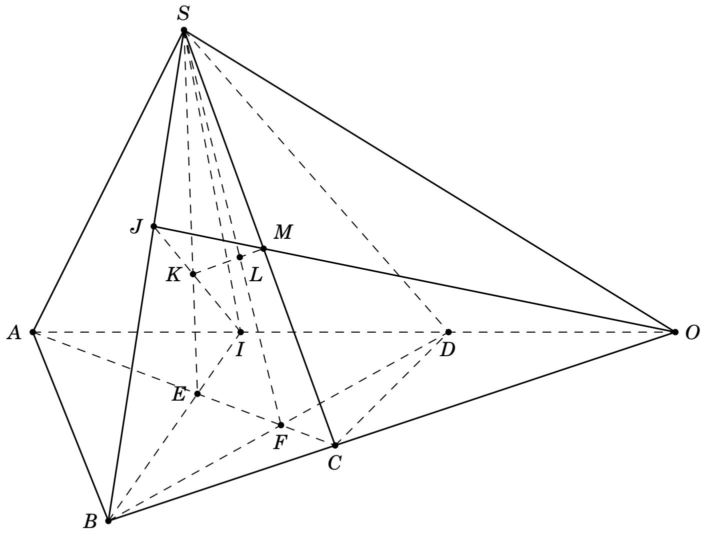
③ Gọi $O = AD \cap BC$, $M = OJ \cap SC$. Chứng minh rằng K, L, M thẳng hàng.

Lời giải.

① Gọi $AC \cap BI = E$; $IJ \cap SE = K$
$\Rightarrow K = IJ \cap (SAC)$.

② Gọi $AC \cap BD = F$; $DJ \cap SF = L$
$\Rightarrow L = DJ \cap (SAC)$.

③ Chứng minh K, L, M là điểm chung của (SAC) và (AOJ).



□

BÀI 11. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là 2 điểm lần lượt nằm trên 2 cạnh BC và SD.

① Tìm giao điểm I của BN và (SAC).

② Tìm giao điểm J của MN và (SAC).

③ Chứng minh I, J, C thẳng hàng.

④ Xác định thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp.

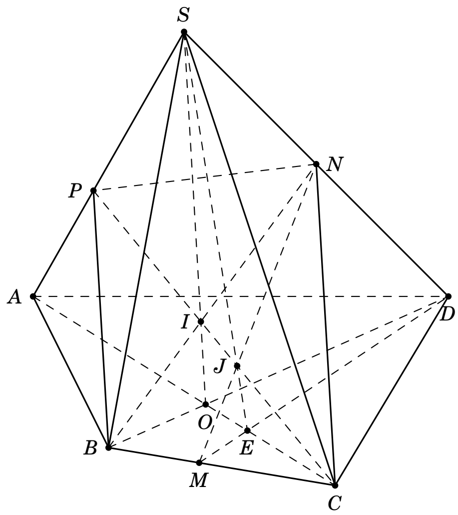
Lời giải.

① Gọi $AC \cap BD = O$; $BN \cap SO = I$
$\Rightarrow I = BN \cap (SAC)$.

② Gọi $AC \cap MD = E$; $MN \cap SE = J$
$\Rightarrow J = MN \cap (SAC)$.

③ Chứng minh I, J, C là điểm chung của (SAC) và (BCN).

④ Gọi $CI \cap SA = P$.
Thiết diện của mặt phẳng (BCN) với hình chóp là tứ giác $BCNP$.



□

BÀI 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, N và B.

① Tìm giao tuyến của (P) với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAD), (SDC).

② Tìm $I = SO \cap (P)$, $K = SD \cap (P)$, $E = DA \cap (P)$, $F = DC \cap (P)$.

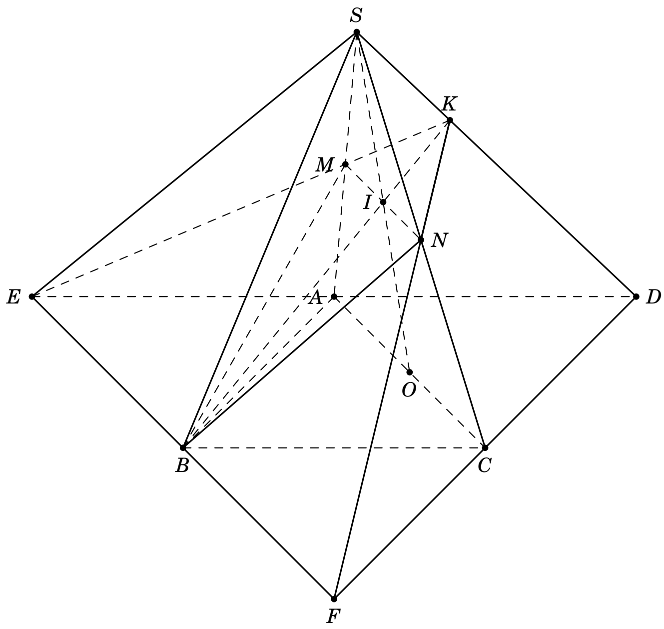
③ Chứng minh rằng ba điểm E, B, F thẳng hàng. **ĐS:** E, B, F là điểm chung của (P) và $(ABCD)$

Lời giải.

① Ta có $(P)\cap(SAB)=BM$; $(P)\cap(SBC)=BN$; $(P)\cap(SAD)=MK$; $(P)\cap(SCD)=NK$.

② $I=SO\cap MN$; $K=BI\cap SD$; $E=DA\cap MK$; $F=DC\cap NK$.

③ Chứng minh E, B, F là điểm chung của (P) và $(ABCD)$.



□

BÀI 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song nhau. Gọi M, E là trung điểm SA, AC và $F\in CD$ sao cho $CD=3CF$.

① Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

② Tìm giao điểm N của SD và (MEF). Tính tỉ số $\dfrac{NS}{ND}$. **ĐS:** $\dfrac{NS}{ND}=\dfrac{1}{2}$

③ Gọi $H=SE\cap CM$ và $K=MF\cap NE$. Chứng minh D, H, K thẳng hàng.

④ Tính các tỉ số sau $\dfrac{HM}{HC}$; $\dfrac{HS}{HE}$; $\dfrac{KM}{KF}$; $\dfrac{KN}{KE}$; $\dfrac{KH}{KD}$. **ĐS:** $\dfrac{HM}{HC}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{HS}{HE}=2$; $\dfrac{KM}{KF}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{KN}{KE}=1$; $\dfrac{KH}{KD}=\dfrac{1}{4}$

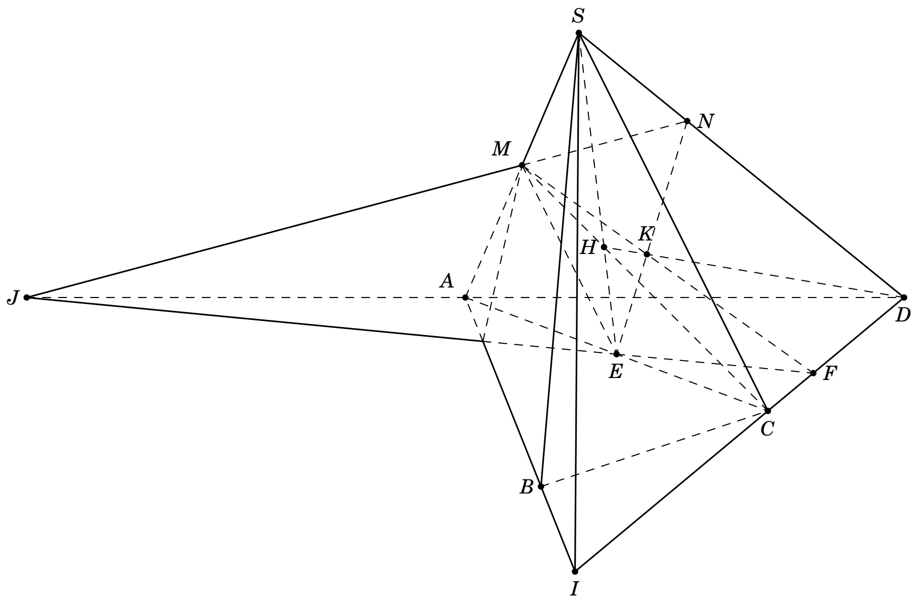
Lời giải.

① Gọi $AB\cap CD=I$
$\Rightarrow (SAB)\cap(SCD)=SI$.

② Gọi $AD\cap EF=J$,
$SD\cap JM=N$
$\Rightarrow N=SD\cap(MEF)$.
$\dfrac{NS}{ND}=\dfrac{1}{2}$

③ Chứng minh D, H, K là điểm chung của (MCD) và (SED).

④ Ta có
$\dfrac{HM}{HC}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{HS}{HE}=2$;
$\dfrac{KM}{KF}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{KN}{KE}=1$;
$\dfrac{KH}{KD}=\dfrac{1}{4}$.



□

DẠNG 1.5. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp: Tìm giao của hai đường thẳng, sau đó chứng minh đường thẳng thứ ba đi qua giao điểm đó.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M,N,P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J. Chứng minh PI, NJ, CD đồng quy.

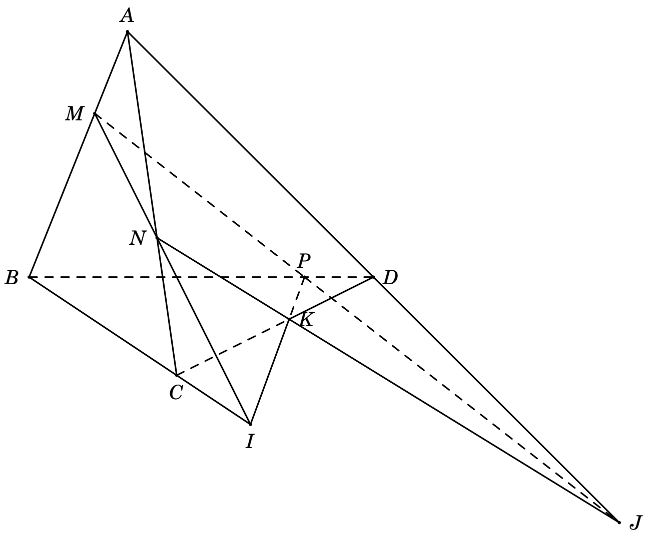
Lời giải.

Trong (BCD): Gọi $K = PI \cap CD$ $\Rightarrow \begin{cases} K \in PI, PI \subset (MIJ) \\ K \in CD, CD \subset (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (MIJ) \cap (ACD)$

$\Rightarrow K \in NJ.$

Vậy PI, NJ, CD đồng quy tại K.



□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD. Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm của AC và BD.

① Tìm giao điểm N của SD và (MAB).

② Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

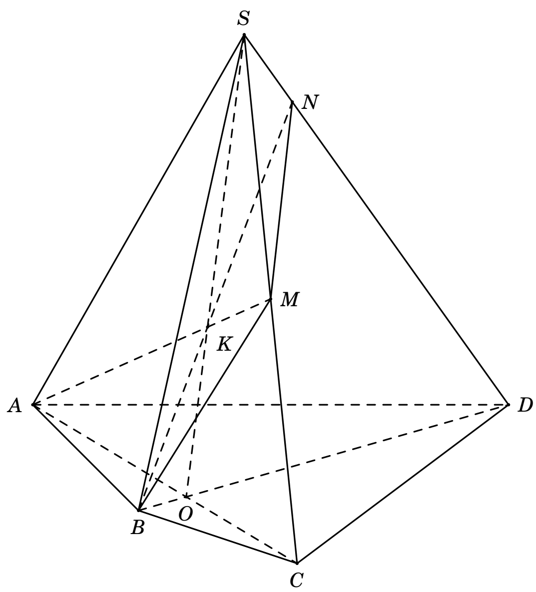
Lời giải.

① Trong (SAC): Gọi $K = AM \cap SO$.

Trong (SBD): Gọi $N = BK \cap SD$ $\Rightarrow \begin{cases} N \in BK, BK \subset (MAB) \\ N \in SD \end{cases}$

$\Rightarrow N = SD \cap (MAB).$

② Ta có $K = AM \cap SO \Rightarrow SO$, AM đi qua K.
Mà $N = BK \cap SD \Rightarrow BN$ cũng đi qua K.
Vậy ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy tại K.



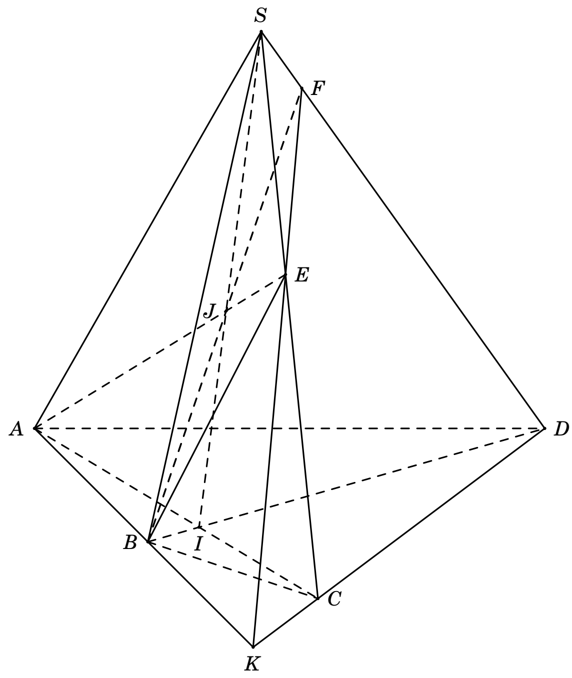
□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Trên cạnh SC lấy một điểm E không trùng với S và C.

① Tìm giao điểm F của đường thẳng SD và (ABE).

② Giả sử AB không song song CD. Chứng minh ba đường thẳng AB, CD, EF đồng quy.

Lời giải.



① Trong $(ABCD)$: Gọi $I = AC \cap BD$.
Trong (SAC): Gọi $J = AE \cap SI$.

$$\text{Trong}(SBD): \text{Gọi} F = BJ \cap SD \Rightarrow \begin{cases} F \in BJ, BJ \subset (ABE) \\ F \in SD \end{cases} \Rightarrow F = SD \cap (ABE).$$

② Ta có

$$\begin{cases} E \in (ABE) \cap (SCD) \\ F \in (ABE) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (ABE) \cap (SCD) = EF.$$

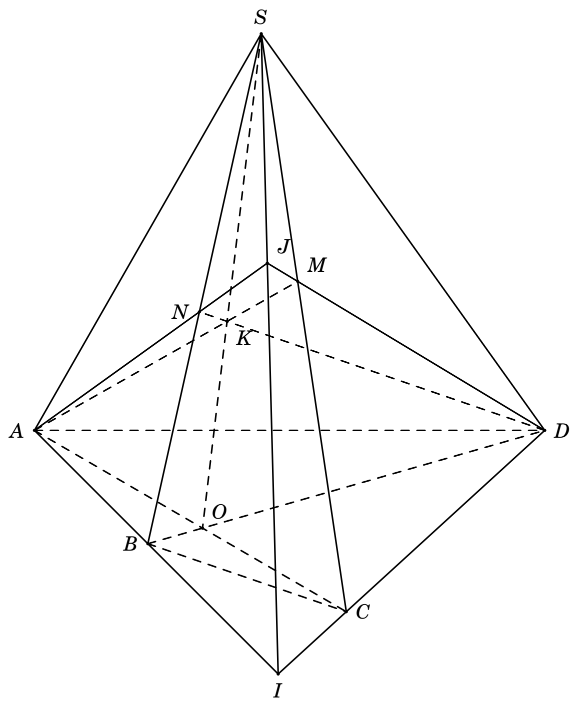
$$\text{Trong}(ABCD): \text{Gọi} K = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} K \in AB, AB \subset (ABE) \\ K \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABE) \cap (SCD) \Rightarrow K \in EF.$$

Vậy AB, CD, EF đồng quy tại K.

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy điểm M trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SB và (ADM). Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh SO, AM, DN đồng quy.

Lời giải.



Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD)$. (1)

$$\text{Trong}(ABCD): \text{Gọi} I = AB \cap CD \Rightarrow \begin{cases} I \in AB, AB \subset (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases}$$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$. (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SI$.
Trong (SID): Gọi $J = DM \cap SI$.

$$\text{Trong}(SAI): \text{Gọi} N = AJ \cap SB \Rightarrow \begin{cases} N \in AJ, AJ \subset (ADM) \\ N \in SB \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ADM).$$

$$\text{Ta có}: \begin{cases} S \in (SAC) \cap (SBD) \\ O \in (SAC) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO.$$

$$\text{Trong}(AJD): \text{Gọi} K = AM \cap DN \Rightarrow \begin{cases} K \in AM, AM \subset (SAC) \\ K \in DN, DN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow K \in SO.$$

Vậy SO, AM, DN đồng quy tại K.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC.

① Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

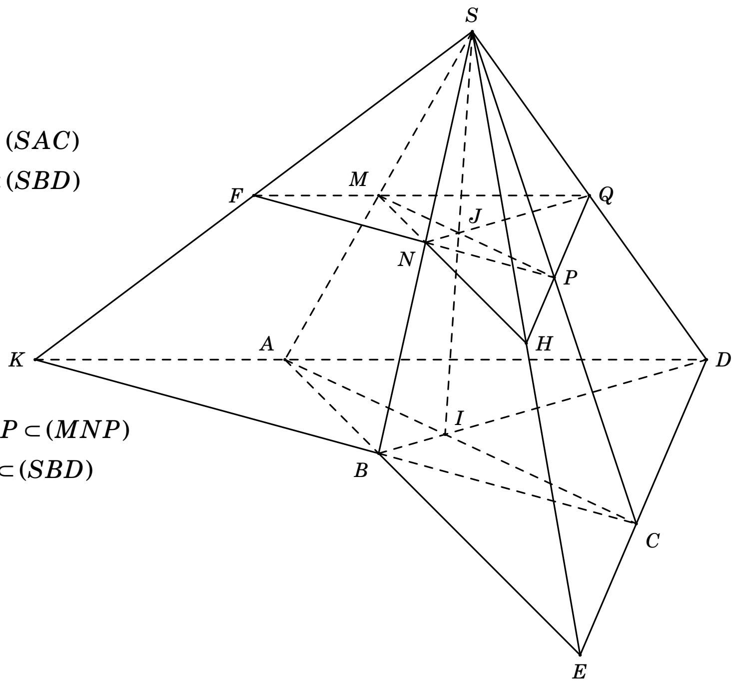
② Tìm giao tuyến của (MNP) và (SBD).

③ Tìm giao điểm Q của SD và (MNP).

④ Gọi $H = MN \cap PQ$. Chứng minh S,H,E thẳng hàng.

⑤ Chứng minh SK, QM, NP đồng quy.

Lời giải.



① Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$. (1)

Trong$(ABCD): I = AC \cap BD \quad \Rightarrow \begin{cases} I \in AC, AC \subset (SAC) \\ I \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD)$. (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = SI$.

② Ta có $N \in (MNP) \cap (SBD)$. (3)

Trong(SAC): Gọi $J = MP \cap SI \quad \Rightarrow \begin{cases} J \in MP, MP \subset (MNP) \\ J \in SI, SI \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (MNP) \cap (SBD)$. (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow (MNP) \cap (SBD) = NJ$.

③

Trong(SBD): Gọi $Q = NJ \cap SD \quad \Rightarrow \begin{cases} Q \in NJ, NJ \subset (MNP) \\ Q \in SD \end{cases}$

$\Rightarrow \quad Q = SD \cap (MNP)$.

④

Trong$(MNPQ): H = MN \cap PQ \quad \Rightarrow \begin{cases} H \in MN, MN \subset (SAB) \\ H \in PQ, PQ \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad H \in (SAB) \cap (SCD)$

$\Rightarrow \quad H \in SE$.

Suy ra S, H, E thẳng hàng.

⑤ Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC)$. (5)

Trong$(ABCD): K = AD \cap BC \quad \Rightarrow \begin{cases} K \in AD, AD \subset (SAD) \\ K \in BC, BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow K \in (SAD) \cap (SBC)$. (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = SK$.

Trong$(MNPQ)$: Gọi $F = QM \cap PN \quad \Rightarrow \begin{cases} F \in QM, QM \subset (SAD) \\ F \in PN, PN \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad F \in (SAD) \cap (SBC)$

$\Rightarrow \quad F \in SK$.

Suy ra SK, QM, NP đồng quy tại F.

□

3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Cho tứ diện $S.ABC$ với I là trung điểm của SA, J là trung điểm của BC. Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC.

① Xác định giao điểm P của MC và (SAB).

② Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC).

③ Tìm giao điểm E của MN và (ABC).

④ Gọi $F = IN \cap AC$. Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của AB,CD. Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$.

① Tìm giao điểm F của IJ và (BCD).

② Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC. Tính tỉ số $\dfrac{EB}{EC}$. **ĐS:** $\dfrac{EB}{EC} = 2$

③ Chứng minh ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H. Tính tỉ số $\dfrac{HC}{HA}$. **ĐS:** $\dfrac{HC}{HA} = 2$

④ Chứng minh $EJ \parallel HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HF.

⑤ Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh ba điểm A,O,G thẳng hàng. Tính tỉ số $\dfrac{OA}{OG}$. **ĐS:** $\dfrac{OA}{OG} = 3$

CHƯƠNG 8

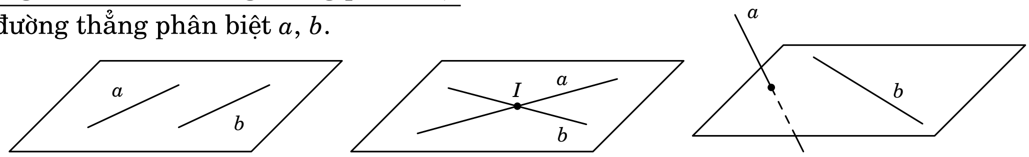
ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

BÀI 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG.

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

① Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt

Cho hai đường thẳng phân biệt a, b.



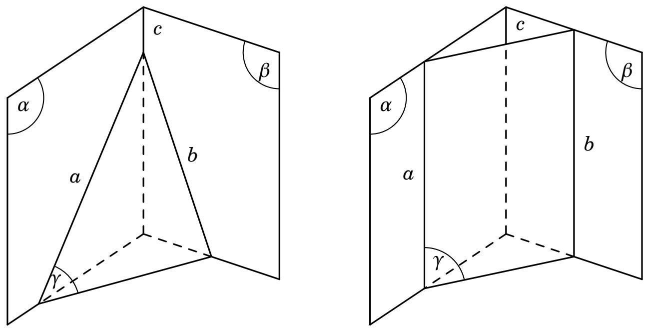
Định nghĩa 1.

- Hai đường thẳng gọi là đồng phẳng nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không đồng phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

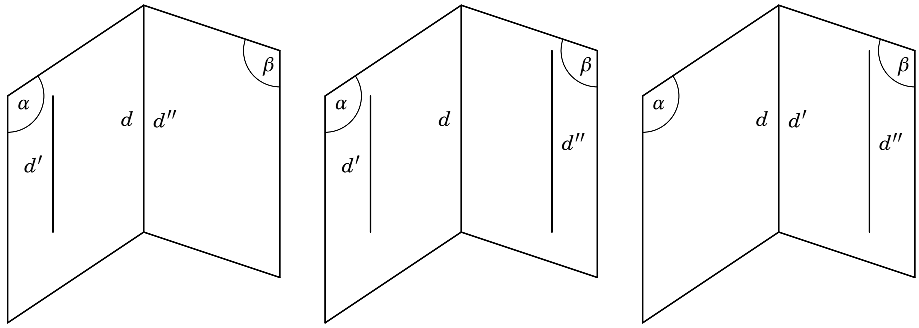
② Tính chất hai đường thẳng song song

Định lí 1. *Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.*

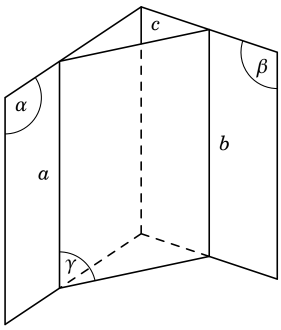
Định lí 2 (Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng). *Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.*



Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



Định lí 3. *Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.*



B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 1.1. Chứng minh hai đường thẳng song song.

Phương pháp giải:

Cách 1. *Chứng minh hai đường thẳng a, b đồng phẳng, rồi dùng các định lí trong hình học phẳng, chẳng hạn định lí đường trung bình, định lí đảo Thales, ... để chứng minh $a \parallel b$.*

Cách 2. *Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với đường thẳng thứ ba. Chẳng hạn, chứng minh*

$$\begin{cases} c \parallel a \\ c \parallel b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

Cách 3. *Áp dụng định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng và hệ quả của nó. Chẳng hạn, chứng minh*

$$\begin{cases} b \parallel c \\ b \subset (\alpha),\ c \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = a \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \parallel b \parallel c \\ a \equiv b \\ a \equiv c. \end{array}\right.$$

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

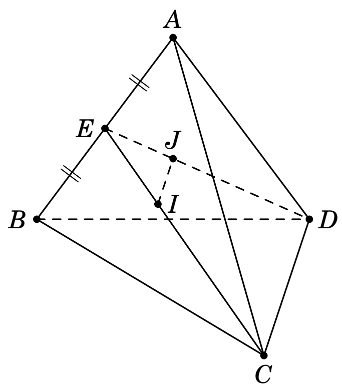
Lời giải.

Gọi E là trung điểm AB. Ta có $\begin{cases} I \in CE \\ J \in DE \end{cases} \Rightarrow IJ$ và CD đồng phẳng.

Vì I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD nên

$$\frac{EI}{EC} = \frac{EJ}{ED} = \frac{1}{3}.$$

Theo định lí đảo Thales suy ra $IJ \parallel CD$ (đpcm).



□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD. Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó suy ra ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

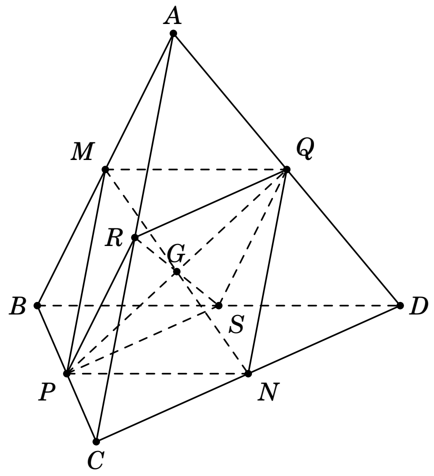
Lời giải.

Vì MP là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $\begin{cases} MP \parallel AC \\ MP = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$ (1)

Vì NQ là đường trung bình của $\triangle ACD$ nên $\begin{cases} NQ \parallel AC \\ NQ = \dfrac{1}{2}AC. \end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} MP \parallel NQ \\ MP = NQ. \end{cases}$

Do đó, $MPNQ$ là hình bình hành. Suy ra MN, PQ cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.
Chứng minh tương tự ta được $PSQR$ là hình bình hành nên PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.
Vậy MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.



□

Nhận xét. *Điểm G nói trên được gọi là trọng tâm của tứ diện.*
Trọng tâm của tứ diện là điểm đồng qui của các đoạn nối trung điểm của các cạnh đối, nó cũng là trung điểm của các cạnh này.

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh

① $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$; ② $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

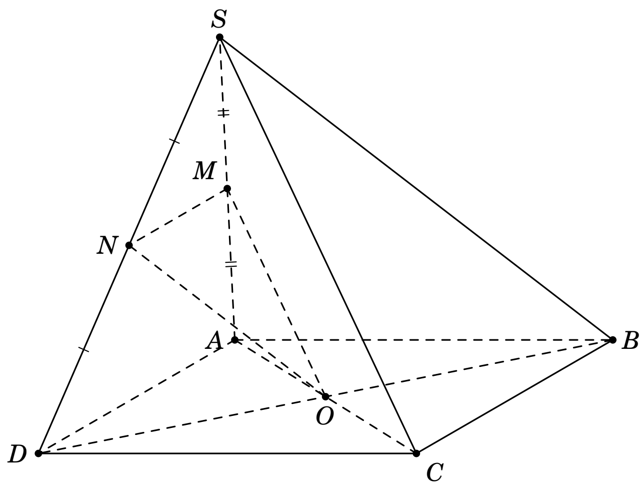
Lời giải.

① Xét tam giác SAD có

— M là trung điểm của SA (giả thiết);
— N là trung điểm của SD (giả thiết).

Suy ra MN là đường trung bình của $\triangle SAD$. Do đó $MN \parallel AD$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AD \text{ (chứng minh trên)} \\ BC \parallel AD \text{ (}ABCD\text{ là hình bình hành)} \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$.



② Xét tam giác ASC có

— M là trung điểm của SA (giả thiết);

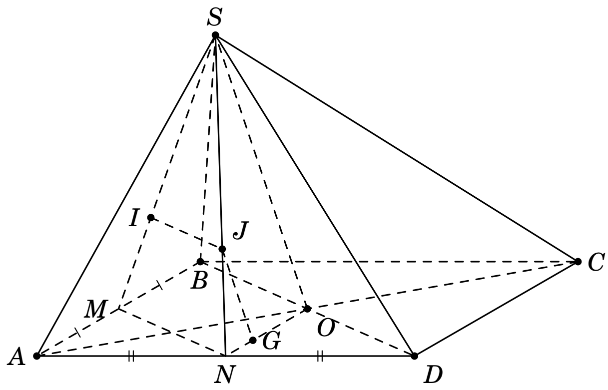
— O là trung điểm của AC (O là tâm của hình bình hành $ABCD$).

Suy ra OM là đường trung bình của $\triangle SAC$. Do đó $MO \parallel SC$.
Tương tự, NO là đường trung bình của $\triangle SDB$ nên $NO \parallel SB$. □

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD và AOD. Chứng minh

① $IJ \parallel MN$; ② $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

Lời giải.



① Xét tam giác SMN có

— $SI = \frac{2}{3}SM$ (I là trọng tâm của $\triangle SAB$);

— $SJ = \frac{2}{3}SN$ (J là trọng tâm của $\triangle SAD$).

suy ra $IJ \parallel MN$ (định lý Ta-lét đảo).

② Vì MN là đường trung bình của $\triangle ABD$ nên $MN \parallel BD$.
Mà $IJ \parallel MN$ (chứng minh trên) nên $IJ \parallel BD$.
Xét tam giác SON có

— $NG = \frac{1}{3}NO$ (G là trọng tâm của $\triangle AOD$);

— $NJ = \frac{1}{3}SN$ (J là trọng tâm của $\triangle SAD$).

suy ra $GJ \parallel SO$ (định lý Ta-lét đảo).

□

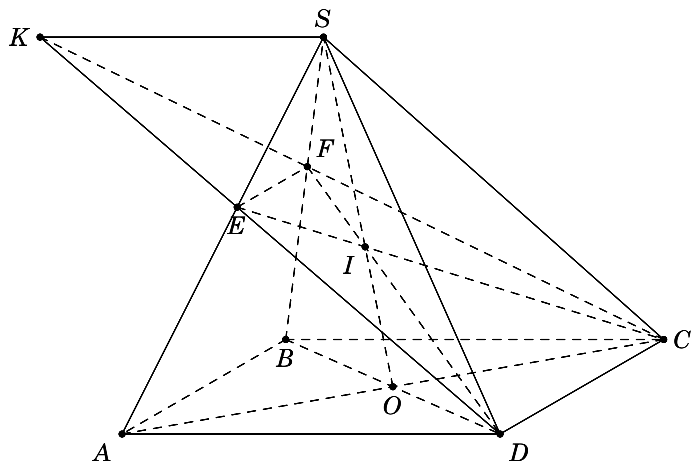
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và I là một điểm trên cạnh SO.

① Tìm giao điểm E và F của mặt phẳng (ICD) lần lượt với các đường SA, SB. Chứng minh $EF \parallel AB$;

② Gọi K là giao điểm của DE và CF. Chứng minh $SK \parallel BC$.

Lời giải.



① Vì $I \in SO$ mà $SO \subset (SBD)$ nên $I \in (SBD)$. Do đó $F = DI \cap SB$ và $E = CI \cap SA$.
Ta có

— $(CDI) \cap (ABCD) = CD$;

— $(SAB) \cap (ABCD) = AB$;

— $(CDI) \cap (SAB) = EF$.

Mà $AB \parallel CD$ ($ABCD$ là hình bình hành) nên $EF \parallel AB \parallel CD$ (tính chất giao tuyến của ba mặt phẳng).

② *Cách 1.* Ta có

— $\begin{cases} K \in ED \subset (SAD) \\ K \in FE \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow K$ là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

— $\begin{cases} S \in (SAD) \\ S \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow S$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Suy ra SK là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

Ta có $\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ (SAD) \cap (SBC) = SK \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow SK \parallel BC \parallel AD.$

Vậy $SK \parallel BC$.

Cách 2. Trong $\triangle SCD$ có $EF \parallel CD$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{KF}{KC} = \frac{EF}{CD}. \qquad (1)$$

Tương tự, trong $\triangle SAB$ có $EF \parallel AB$ nên

$$\frac{SF}{SB} = \frac{EF}{AB} = \frac{EF}{CD}\ (AB = CD). \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{KF}{KC} = \frac{SF}{SB} \Leftrightarrow \frac{KF}{FC} = \frac{SF}{FB}.$$

Xét $\triangle FSK$ và $\triangle FBC$ có

— $\frac{KF}{FC} = \frac{SF}{FB}$ (chứng minh trên);

— $\widehat{SFK} = \widehat{BFC}$ (đối đỉnh).

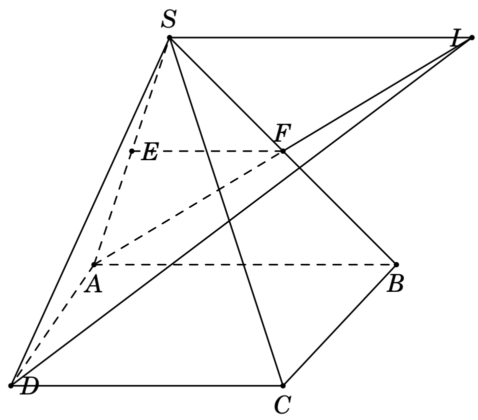
Do đó $\triangle FSK \backsim \triangle FBC$ (cạnh - góc - cạnh) suy ra $SK \parallel BC$.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB.

① Chứng minh $EF \parallel CD$. ② Tìm $I = AF \cap (SCD)$. ③ Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

Lời giải.



① Ta có EF là đường trung bình của tam giác SAB nên $EF \parallel AB$
mà $AB \parallel CD$ (hai đáy của hình thang)
nên $EF \parallel CD$.

② Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có $AB \parallel CD$ nên giao tuyến là đường thẳng $Sx \parallel AB \parallel CD$.
Kéo dài AF cắt Sx tại I.
Ta thấy I là điểm chung của AF và (SCD).

③ Theo ý ②.

□

DẠNG 1.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

Phương pháp giải:

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha),\ b \subset (\beta) \\ a \parallel b \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ax \text{ với } Ax \parallel a \parallel b.$$

1 VÍ DỤ

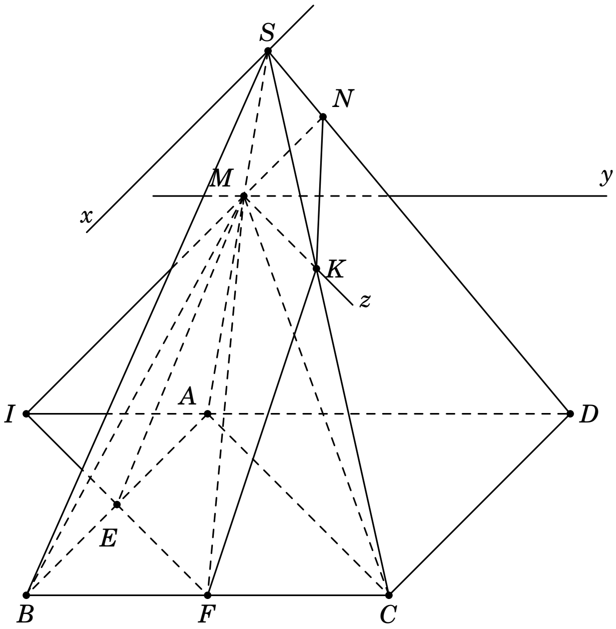
VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA. Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

① Tìm $(SAB) \cap (SCD)$. ② Tìm $(MBC) \cap (SAD)$.

③ Tìm $(MEF) \cap (SAC)$. ④ Tìm $AD \cap (MEF)$.

⑤ Tìm $SD \cap (MEF)$. ⑥ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (MEF).

Lời giải.



① $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB),\ CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$
$\Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ với $Sx \parallel AB \parallel CD$.

② $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC),\ AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$
$\Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = My$ với $My \parallel BC \parallel AD$.

③ $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF),\ AC \subset (SAC) \\ EF \parallel AC \end{cases}$
$\Rightarrow (MEF) \cap (SAC) = Mz$ với $Mz \parallel EF \parallel AC$.

④ Trong $(ABCD)$, gọi $I = EF \cap AD$.
Mà $EF \subset (MEF)$ nên $AD \cap (MEF) = I$.

⑤ Trong (SAD), gọi $N = SD \cap IM$.
Mà $IM \subset (MEF)$ nên $SD \cap (MEF) = N$.

⑥ Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MEF) là ngũ giác $MNKFE$.

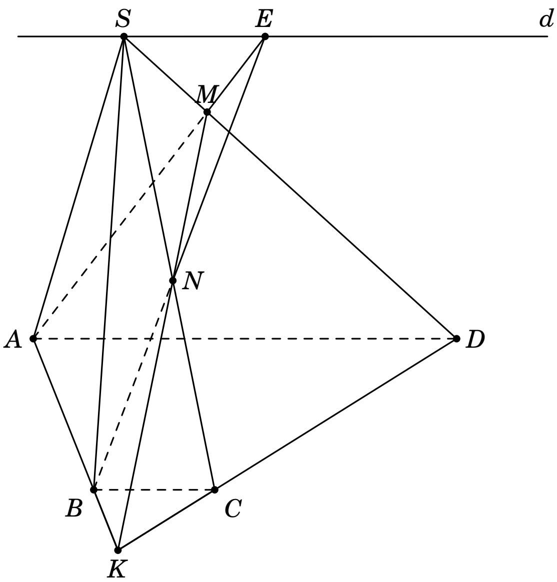
□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Mặt đáy là hình thang có cạnh đáy lớn AD, AB cắt CD tại điểm K. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD.

① Tìm $d = (SAD) \cap (SBC)$ và $N = KM \cap (SBC)$.

② Chứng minh rằng AM, BN và d đồng qui.

Lời giải.



① • $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD),\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
$\Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d$ với $S \in d$, $d \parallel AD \parallel BC$.
• Trong (SCD), gọi $N = KM \cap SC$.
Mà $SC \subset (SBC)$ nên $N = KM \cap (SBC)$.

② $\begin{cases} (SBC) \cap (SAD) = d \\ (SBC) \cap (MAB) = BN \\ (MAB) \cap (SAD) = AM \end{cases}$
Theo định lí về giao tuyến của 3 mặt phẳng, suy ra AM, BN và d hoặc đồng qui hoặc đôi một song song.
Mà AM, d cắt nhau nên AM, BN và d phải đồng qui.

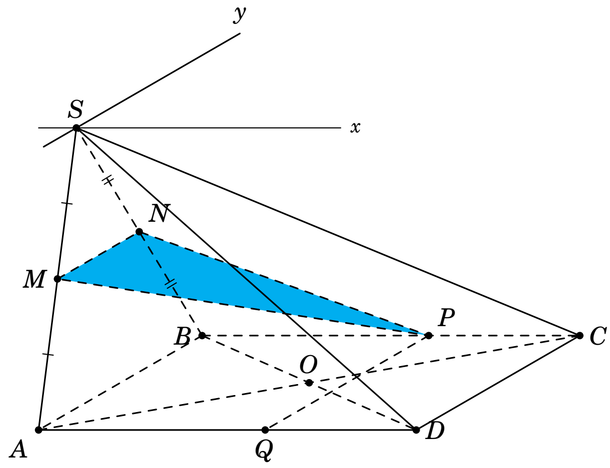
□

2 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi P là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao tuyến của

① (SBC) và (SAD); ② (SAB) và (SCD); ③ (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải.



① Ta có

— $(SBC) \cap (ABCD) = BC$;

— $(SAD) \cap (ABCD) = AD$;

— $AD \parallel BC$ ($ABCD$ là hình bình hành).

Mà S là điểm chung của 2 mặt phẳng (SBC) và (SAD) nên giao tuyến của 2 mặt phẳng (SBC) và (SAD) là đường thẳng $Sx \parallel BC \parallel AD$.

② Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng $Sy \parallel AB \parallel CD$.

③ Vì $MN \parallel AB$ (MN là đường trung bình của $\triangle SAB$) nên qua P kẻ $PQ \parallel AB$ ($Q \in AD$). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ là đường thẳng PQ.

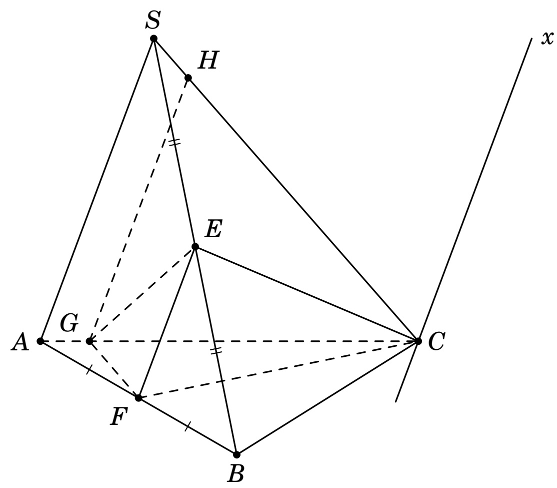
□

BÀI 2. Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB, G là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

① (SAC) và (EFC);

② (SAC) và (EFG).

Lời giải.



① Ta có

— $(SAC) \cap (SAB) = SA$;

— $(EFC) \cap (SAB) = EF$;

— $SA \parallel EF$ (EF là đường trung bình của $\triangle SAB$).

Do đó giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAC) và (EFC) sẽ song song với SA và EF.
Mà C là điểm chung của 2 mặt phẳng (SAC) và (EFC) nên giao tuyến của chúng là đường thẳng $Cx \parallel SA \parallel EF$.

② Vì $EF \parallel SA$ (EF là đường trung bình của $\triangle SAB$) nên qua G kẻ $GH \parallel SA$ ($H \in SC$). Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (EFG) là đường thẳng GH.

□

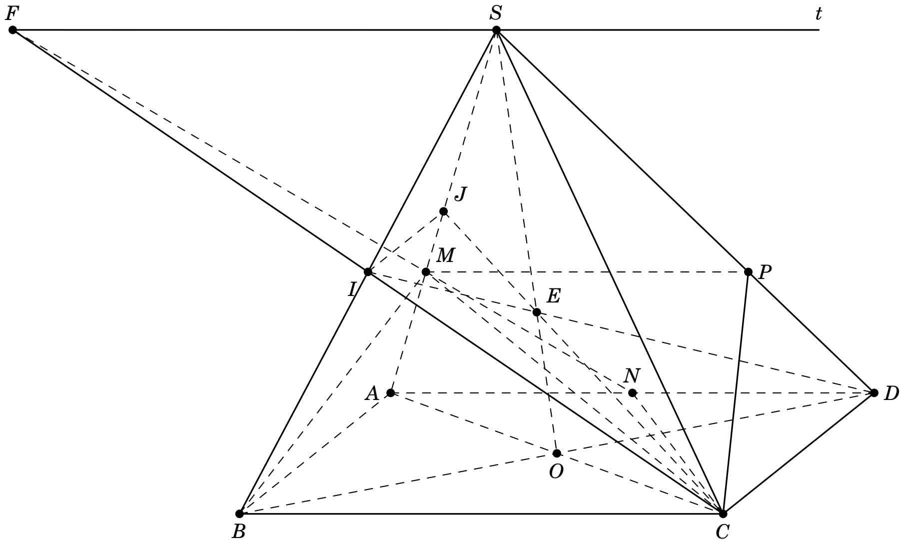
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD.

① Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (MBC).

② Tìm giao điểm I của SB và (CMN), giao điểm J của SA và (ICD).

③ Chứng minh ba đường thẳng ID, JC, SO đồng quy tại E. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SO}$.

Lời giải.



① Vì $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC) \text{ và } AD \subset (SAD) \\ BC \parallel AD \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (MBC) = MP \parallel BC \parallel AD$ (với $P \in SD$).

② Vì $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$
nên $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$.
Gọi $F = MN \cap St$; $I = CF \cap SB$.
Vì $\begin{cases} I \in SB \\ I \in CF \subset (CMN) \end{cases}$ nên $I = SB \cap (CMN)$.
Qua I kẻ đường thẳng song song với AB cắt SA tại J.
Vì $\begin{cases} J \in SA \\ J \in JI \subset (ICD) (\text{vì } IJ \parallel CD \Rightarrow (IJCD) \equiv (ICD)) \end{cases}$ nên $J = SA \cap (ICD)$.

③ Xét 3 mặt phẳng (SAC), (SBD) và $(CDJI)$, ta có

$$\begin{cases} SO = (SAC) \cap (SBD) \\ ID = (SBD) \cap (CDJI) \\ JC = (SAC) \cap (CDJI). \end{cases}$$

Do đó ba đường thẳng ID, JC, SO đồng quy. Gọi điểm đồng quy là E.
Trong mặt phẳng $(SFAD)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $AN \parallel SF$) ta có

$$\frac{MA}{MS} = \frac{AN}{SF} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $SF = AD = BC$ và $SFBC$ là hình bình hành.
$I = SB \cap CF$ nên I là trung điểm của SB.
$\triangle SBD$ có DI và SO là trung tuyến nên E là trọng tâm của $\triangle SBD$.
Vậy $\dfrac{SE}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

□

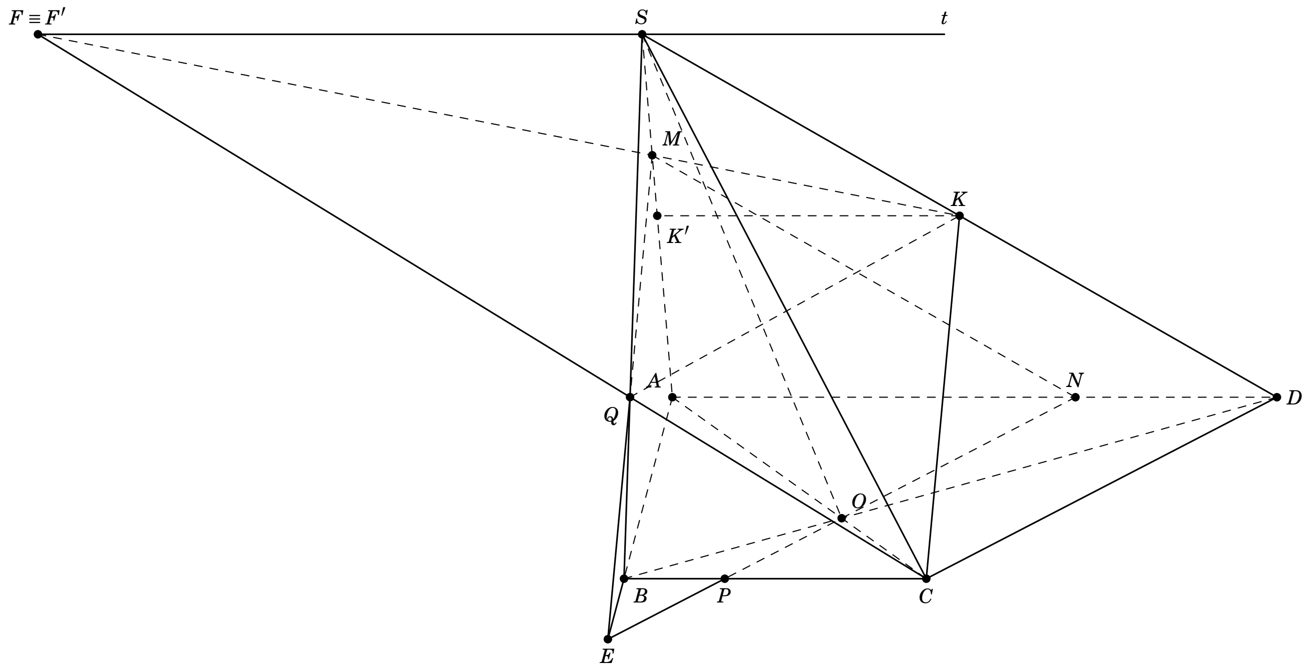
BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các đoạn SA, AD, BC sao cho $MA = 2MS$, $NA = 2ND$, $PC = 2PB$.

① Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC), (SAC) và (SBD).

② Xác định giao điểm Q của SB với (MNP).

③ Gọi K là trung điểm của SD. Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

Lời giải.



① Vì $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD \subset (SAD) \text{ và } BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \end{cases}$

nên $(SAD) \cap (SBC) = St \parallel AD \parallel BC$.

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$ suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

② Gọi $E = NP \cap AB$ và $Q = EM \cap SB$. Vì $\begin{cases} Q \in SB \\ Q \in ME \subset (MNP) \end{cases}$ nên $Q = SB \cap (MNP)$.

③ Gọi $F = MK \cap St$ và $F' = QC \cap St$. Dựa vào các vị trí các điểm Q, C, M và K của giả thiết cho, dễ thấy F và F' cùng nằm về một phía so với mặt phẳng (SAB).

Trong mặt phẳng $(SF'BC)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $SF' \parallel BC$) ta có

$$\frac{QS}{QB} = \frac{BC}{SF'} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Gọi K' là trung điểm của SA. suy ra $\dfrac{MK'}{MS} = \dfrac{1}{2}$.

Trong mặt phẳng $(SFAD)$, áp dụng định lý Thales (để ý rằng $SF \parallel KK'$) ta có

$$\frac{MK'}{MS} = \frac{KK'}{SF} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Từ (1), (2) và $AD = 2BC$ suy ra $SF = SF'$. Do đó $F \equiv F'$, suy ra bốn điểm Q, C, M và K đồng phẳng.

Vậy $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

□

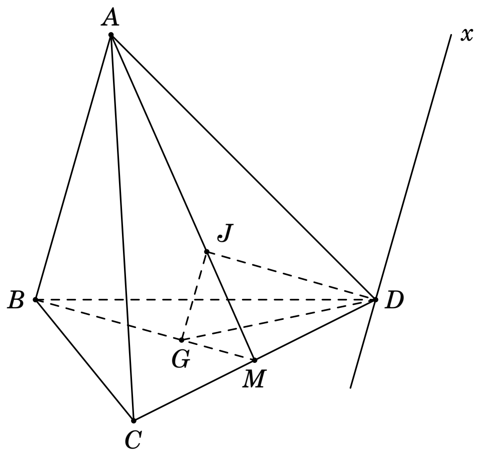
3 BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G, J lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD.

① Chứng minh $GJ \parallel AB$.

② Tìm $(ABD) \cap (GJD)$.

Lời giải.



① Gọi M là trung điểm CD.
Xét tam giác ABM có $\dfrac{MG}{MB} = \dfrac{MJ}{MA} = \dfrac{1}{3}$
Suy ra $GJ \parallel AB$.

② Hai mặt phẳng (ABD) và (GJD) có điểm D chung và $GJ \parallel AB$ nên giao tuyến là đường thẳng $Dx \parallel GJ \parallel AB$.

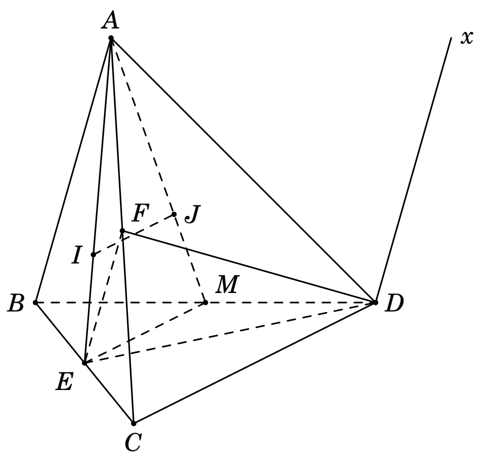
□

BÀI 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ và E, F lần lượt là trung điểm BC, AC.

① Chứng minh $IJ \parallel CD$.

② Tìm $(DEF) \cap (ABD)$.

Lời giải.



① Gọi M là trung điểm BD.
Tam giác AEM có $\dfrac{AI}{AE} = \dfrac{AJ}{AM} = \dfrac{1}{3}$ nên $IJ \parallel ME$.
Mà $ME \parallel CD$ (đường trung bình)
Suy ra $IJ \parallel CD$.

② Hai mặt phẳng (DEF) và (ABD) có điểm chung D và $EF \parallel AB$ nên giao tuyến là đường thẳng $Dx \parallel AB \parallel EF$.

□

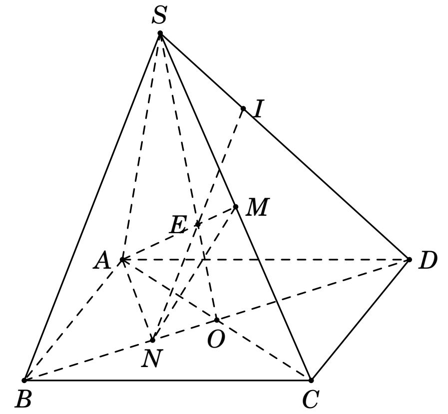
BÀI 7. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm tam giác ABC.

① Tìm $I = SD \cap (AMN)$.

② Chứng minh $NI \parallel SB$.

③ Tìm $(AMN) \cap (SAD)$.

Lời giải.



① Gọi O là giao điểm AC và BD, E là giao điểm SO và AM.
Khi đó NE và SD cắt nhau tại I.
Ta thấy $I \in SD$ và $I \in NE \subset (AMN)$ nên $I = SD \cap (AMN)$.

② Tam giác SOB có $\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$ nên $NE \parallel SB$.
Suy ra $NI \parallel SB$.

③ Hai mặt phẳng (AMN) và (SAD) có hai điểm chung A, I nên $(AMN) \cap (SAD) = AI$.

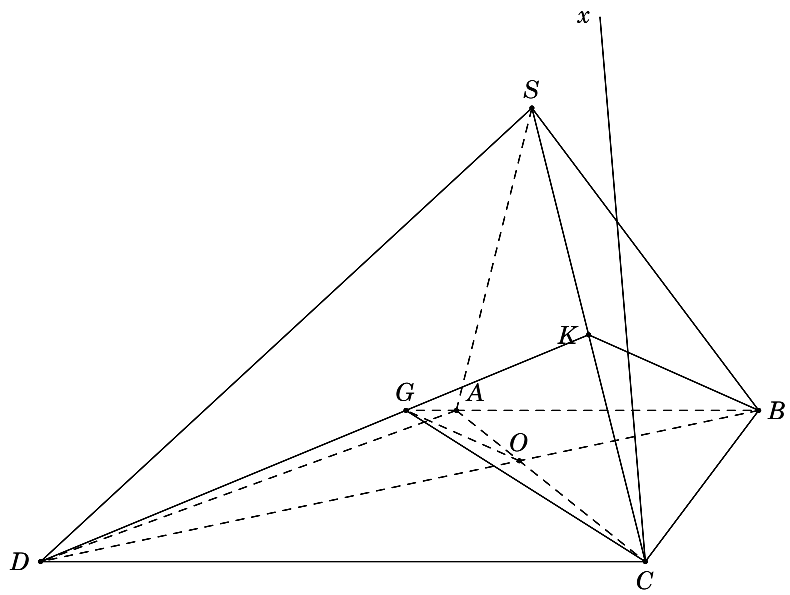
□

BÀI 8. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang ($AB \parallel CD$) với $CD = 2AB$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, K là trung điểm SC, G là trọng tâm tam giác SCD.

① Chứng minh $OG \parallel BK$.

② Tìm $(ACG) \cap (SBC)$.

Lời giải.



① Ta có $\triangle OCD \backsim \triangle OAB$ do $\widehat{COD} = \widehat{AOB}$ và $\widehat{ODC} = \widehat{OBA}$.
Suy ra $\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{CD}{AB} = 2$.
Suy ra $OD = \dfrac{2}{3}DB$.
Tam giác DBK có $\dfrac{DG}{DK} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3}$ nên $OG \parallel BK$.

② Hai mặt phẳng (SBC) và (ACG) có điểm C chung và $OG \parallel BK$ nên giao tuyến là đường thẳng $Cx \parallel OG \parallel BK$.

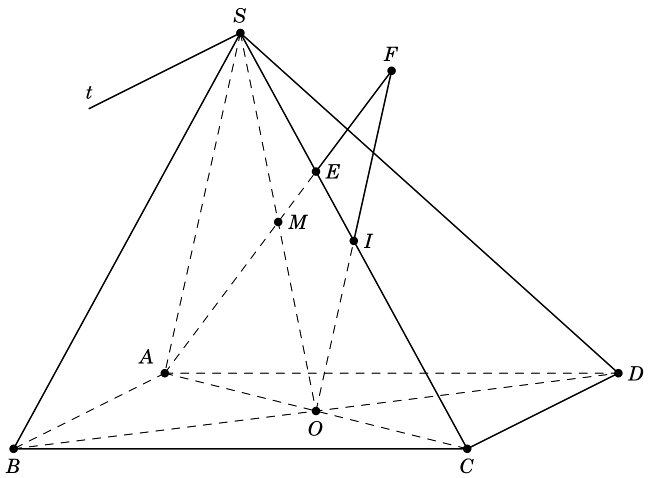
□

BÀI 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Lấy điểm E trên cạnh SC sao cho $EC = 2ES$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD)

② Tìm giao điểm M của đường thẳng AE và mặt phẳng (SBD). Chứng minh M là trung điểm của đoạn thẳng SO.

Lời giải.



① Vì $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB) \text{ và } CD \subset (SCD) \\ AB \parallel CD \end{cases}$

nên $(SAB) \cap (SCD) = St \parallel AB \parallel CD$.

② Gọi $M = AE \cap SO$.

Vì $\begin{cases} M \in AE \\ M \in SO \cap (SBD) \end{cases}$ nên $M = AE \cap (SBD)$.

Gọi I là trung điểm SC, suy ra $\dfrac{EI}{ES} = \dfrac{1}{2}$.

Gọi $F = OI \cap AE$. Trong mặt phẳng (SAC), áp dụng định lý Thales (để ý rằng $OI \parallel SA$)

$$\frac{FI}{SA} = \frac{EI}{ES} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra $FI = OI = \dfrac{SA}{2}$, từ đó dẫn đến $SFOA$ là hình bình hành. Vậy M là trung điểm của SO.

□

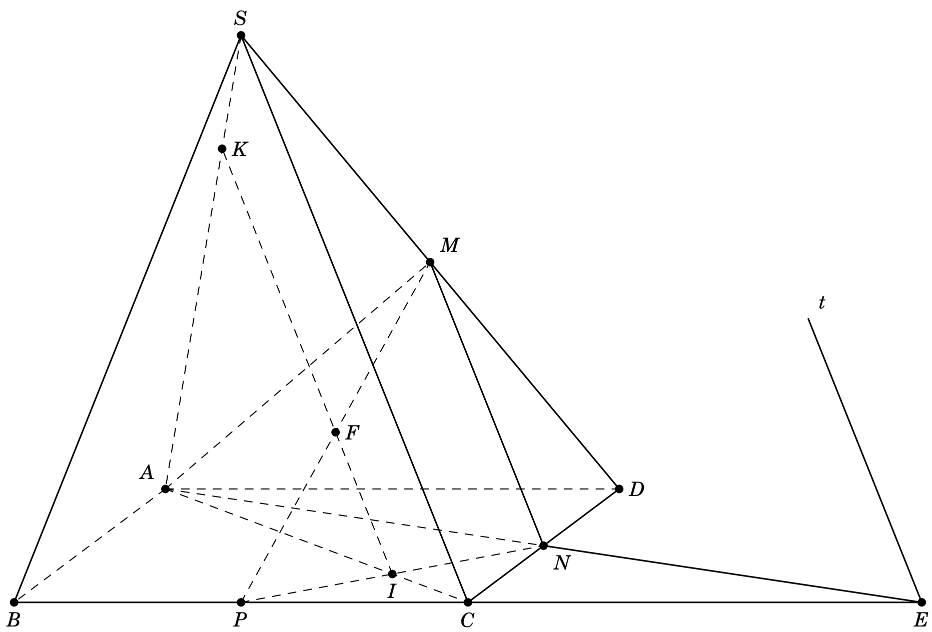
BÀI 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SD, CD, BC.

① Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAC) và (SBC), (AMN) và (SBC).

② Tìm giao điểm I của (PMN) và AC, K của (PMN) và SA.

③ Gọi F là trung điểm của PM, chứng minh ba điểm K, F, I thẳng hàng.

Lời giải.



① Dễ thấy $SC = (SAC) \cap (SBC)$.

Gọi $E = BC \cap AN$

Ta có $\begin{cases} E \in (SBC) \cap (AMN) \\ SC \subset (SBC) \text{ và } MN \subset (AMN) \\ SC \parallel MN \end{cases}$

suy ra $(SBC) \cap (AMN) = Et \parallel SC \parallel MN$.

② Gọi $I = AC \cap PN \Rightarrow \begin{cases} I \in AC \\ I \in PN \subset (PMN) \end{cases} \Rightarrow I = AC \cap (PMN)$.

Gọi K là giao điểm của SA với đường thẳng đi qua I và song song với SC.

Vì $\begin{cases} K \in SA \\ K \in IK \subset (PMN) \text{ (vì } MN \parallel SC) \end{cases}$ nên $K = SA \cap (PMN)$.

③ Theo cách dựng ta có $IK \parallel MN$. (1)

$ABCD$ là hình bình hành nên AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Mà PN là đường trung bình của $\triangle CBD$ nên AC cũng cắt PN tại I là trung điểm của PN.

Suy ra IF là đường trung bình của $\triangle PMN \Rightarrow IF \parallel MN$. (2)

(1) và (2) suy ra K, F, I thẳng hàng.

□

BÀI 2. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 **Vị trí tương đối của hai đường thẳng phân biệt** Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Có ba trường hợp xảy ra:

- Đường thẳng d và (P) có 2 điểm chung phân biệt $\Rightarrow d \subset (P)$.
- Đường thẳng d và (P) có 1 điểm chung duy nhất $\Rightarrow d \cap (P) = A$.
- Đường thẳng d và (P) không có điểm chung nào $\Rightarrow d \parallel (P)$.

Định nghĩa 1. Đường thẳng d và mặt phẳng (P) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

2 **Các định lý**

Định lí 1. *Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).*

Định lí 2. *Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với (α).*

Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng phân biệt cắt nhau và cùng song song với một đương thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

Định lí 3. *Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.*

B DẠNG TOÁN VÀ BÀI TẬP

DẠNG 2.1. Chứng minh dường thẳng a song song với mặt phẳng (P)

Phương pháp: *Chứng minh* $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$.

1 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M vàN lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

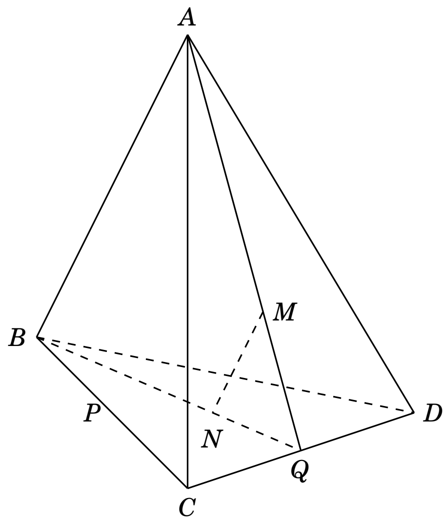
Lời giải.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC và CD.

Khi đó, ta có $\dfrac{QM}{MA} = \dfrac{QN}{NB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MN \parallel AB$.

Vì $\begin{cases} MN \not\subset (ABC) \\ AB \subset (ABC) \\ MN \parallel AB \end{cases}$ nên $MN \parallel (ABC)$.

Tương tự, ta có $\begin{cases} MN \not\subset (ABD) \\ AB \subset (ABD) \\ MN \parallel AB \end{cases}$ nên $MN \parallel (ABD)$.



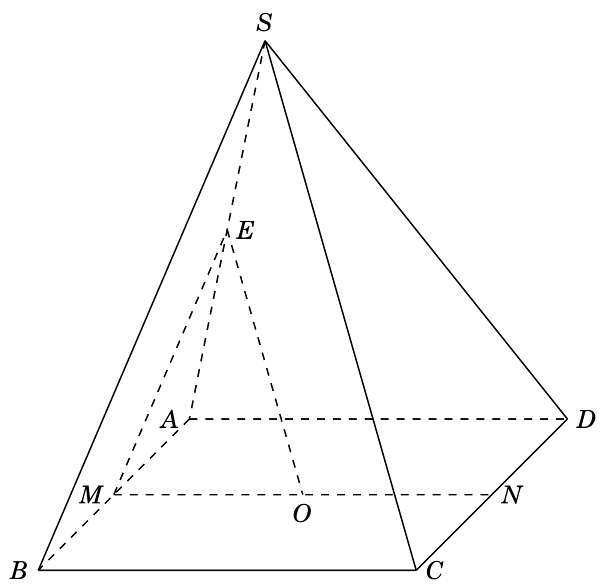
□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

① Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

② Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE).

Lời giải.



① Từ giả thiết, ta suy ra $MN \parallel BC$ và $MN \parallel AD$.

Vì $\begin{cases} MN \not\subset (SBC) \\ BC \subset (SBC) \\ MN \parallel BC \end{cases}$ nên $MN \parallel (SBC)$.

Tương tự, ta có $\begin{cases} MN \not\subset (SAD) \\ AD \subset (SAD) \\ MN \parallel AD \end{cases}$ nên $MN \parallel (SAD)$.

② Từ giả thiết, ta có $\dfrac{AE}{AS} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ME \parallel SB$.

Vì $\begin{cases} SB \not\subset (MNE) \\ ME \subset (MNE) \\ ME \parallel SB \end{cases}$ nên $SB \parallel (MNE)$.

Tương tự, gọi O là tâm của hình bình hành.

Khi đó $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AE}{AS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow EO \parallel SC$.

Vì $\begin{cases} SC \not\subset (MNE) \\ EO \subset (MNE) \\ EO \parallel SC \end{cases}$ nên $SC \parallel (MNE)$.

□

DẠNG 2.2. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng

***Phương pháp**: Áp dụng một trong hai cách sau*

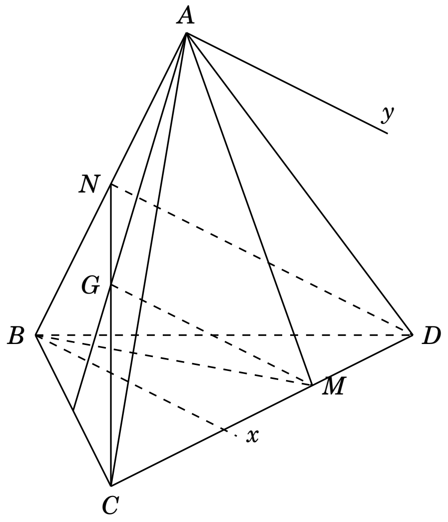
① ***Cách 1**:* $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \subset (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a.$

② ***Cách 2**:* $\begin{cases} a \parallel (P) \\ a \parallel (Q) \\ M \in (P) \cap (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (Q) = Mx \parallel a.$

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

① Chứng minh $MG \parallel (ABD)$. ② Tìm $(ABD) \cap (BGM)$. ③ Tìm $(ABD) \cap (AGM)$.

Lời giải.



① Gọi N là trung điểm của AB. Trong tam giác CDN, ta có $\frac{CM}{CD} = \frac{CG}{CN} = \frac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel ND$. Vì $ND \subset (ABD)$, $GM \not\subset (ABD)$ nên $GM \parallel (ABD)$.

② Vì $\begin{cases} GM \parallel (ABD) \\ B \in (ABD) \cap (BGM) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \cap (BGM) = Bx \parallel GM \parallel ND$.

③ Vì $\begin{cases} GM \parallel (ABD) \\ A \in (ABD) \cap (AGM) \end{cases} \Rightarrow (ABD) \cap (BGM) = Ay \parallel GM \parallel ND$.

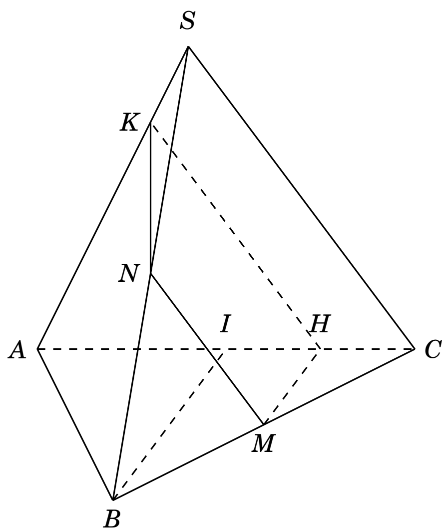
□

DẠNG 2.3. Tìm thiết diện song song với một đường thẳng

Phương pháp: *Để tìm thiết diện của mặt phẳng song song với mặt phẳng (α) đi qua một điểm và song song với hai đường thẳng chéo nhau hoặc (α) chứa một đường thẳng và song song với một đường thẳng sử dụng tích chất sau:* $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (\beta) \\ d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = a \parallel d, (\text{với} M \in a)$.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với BI và SC. Xác định trên hình vẽ các giao điểm của (P) với các cạnh AC, SA, SB. Từ đó suy ra thiết diện của (P) cắt hình chóp.

Lời giải.



Vì $\begin{cases} (P) \parallel SC \\ M \in (P) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SBC) = MN \parallel SC, N \in SB$ (1)

Tương tự, $\begin{cases} (P) \parallel BI \\ M \in (P) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MH \parallel BI, H \in AC$ (2)

Mặt khác, $\begin{cases} (P) \parallel (SC) \\ N \in (P) cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (SAC) = HK \parallel SC, K \in SA$ (3) Từ (1), (2) và (3) ta có thiết diện của (P) với tư diện $ABCD$ là tứ giác $MNKH$.

□

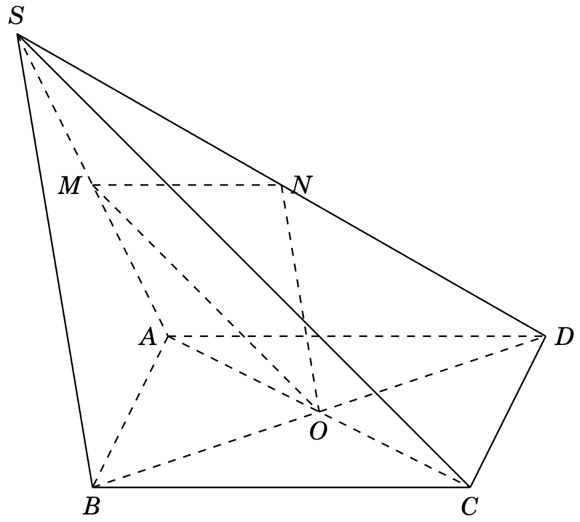
1 BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 550. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Chứng minh rằng:

① $BC \parallel (SAD)$. ② $AD \parallel (SBC)$. ③ $MN \parallel (ABCD)$.

④ $MN \parallel (SBC)$. ⑤ $MO \parallel (SCD)$. ⑥ $NO \parallel (SBC)$.

Lời giải.



① $BC \parallel (SAD)$

Ta có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (SAD)$.

② Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \\ AD \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (SBC)$.

③ Ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel AD$. Khi đó $\begin{cases} MN \parallel AD \\ AD \subset (ABCD) \\ MN \not\subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

④ Ta có $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SD} \Rightarrow MN \parallel AD$, vì $AD \parallel BC$ nên $MN \parallel BC$ Khi đó $\begin{cases} MN \parallel BC \\ BC \subset (SBC) \\ MN \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SBC)$.

⑤ Ta có $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow MO \parallel SC$. Vì $\begin{cases} MO \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ MO \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MO \parallel (SCD)$.

⑥ Ta có $\dfrac{DN}{DS} = \dfrac{DO}{DC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow NO \parallel SB$. Vì $\begin{cases} NO \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \\ NO \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow NO \parallel (SBC)$.

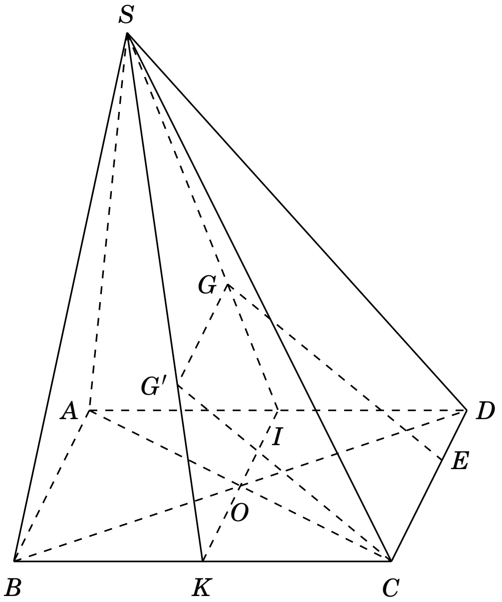
□

BÀI 551. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD.

① Chứng minh $OI \parallel (SAB)$ và $OI \parallel (SCD)$.

② Tìm giao điểm P của IE và (SBC). Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} OI \parallel AB \\ AB \subset (SAB) \\ OI \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SAB)$.

Tương tự, $\begin{cases} OI \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ OI \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SCD)$.

② Vì $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{3} = \dfrac{DE}{DC}$ nên IE không song song với AC. Trong hình chữ nhật $ABCD$, gọi $P = IE \cap BC \Rightarrow P = IE \cap (SBC)$.
Gọi K là trung điểm của BC, G' là trọng tâm tam giác SBC.
Khi đó $\dfrac{SG'}{SK} = \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{G'G}{KI} = \dfrac{2}{3}$,suy ra $G'G \parallel KI \parallel CE$ và $\Rightarrow G'G = \dfrac{2}{3}KI = \dfrac{2}{3}CD = CE$. Do đó tứ giác $G'GEC$ là hình bình hành, suy ra $CG' \parallel CE \Rightarrow CG \parallel (SBC)$.

□

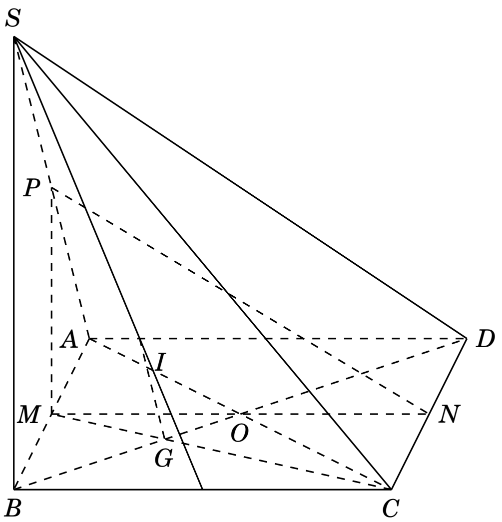
BÀI 552. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.

① Chứng minh $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.

② Gọi P là trung điểm cạnh SA. Chứng minh $SB \parallel (MNP)$ và $SC \parallel (MNP)$.

③ Gọi G, I là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh $GI \parallel (MNP)$.

Lời giải.



① Từ giả thiết, ta có $MN \parallel AD \parallel BC$. Vì $MN \not\subset (SBC)$, $MN \not\subset (SAD)$ nên $MN \parallel (SBC)$ và $MN \parallel (SAD)$.

② Ta có $\dfrac{AP}{AS} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow SB \parallel PM \Rightarrow SB \parallel (MNP)$.
Tương tự, $\dfrac{AO}{AC} = \dfrac{AP}{AS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow PO \parallel SC$ vì $OP \subset (MNP)$ nên $SC \parallel (MNP)$.

③

□

BÀI 553. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB, với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

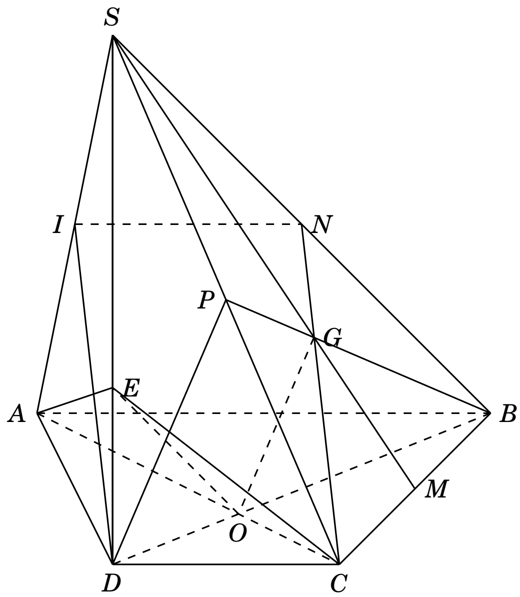
① $DI \parallel (SBC)$. ② $GO \parallel (SCD)$. ③ $SB \parallel (ACE)$.

Lời giải.

① Gọi N là trung điểm SB, khi đó $IN \parallel AB$ và $IN = \frac{1}{2}AB$. Suy ra $IN \parallel CD$, $IN = DC$ suy ra tứ giác $INCD$ là hình bình hành, do đó $ID \parallel NC$. Vậy $ID \parallel (SBC)$.

② $GO \parallel (SCD)$
Gọi P là trung điểm của SC, khi đó $GO \parallel PD$, suy ra $GO \parallel (SCD)$.

③ Ta có $EO \parallel SB$, suy ra $SB \parallel (ACE)$.



□

BÀI 554. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N là trung điểm của các cạnh AB,AD. Gọi I,J thuộc SM,SN sao cho $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3}$. Chứng minh

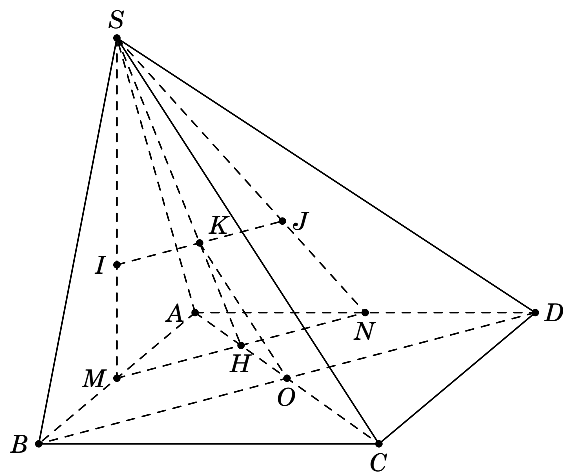
① $MN \parallel (SBD)$. ② $IJ \parallel (SBD)$. ③ $SC \parallel (IJO)$.

Lời giải.

①
Ta có M,N là trung điểm của các cạnh AB,AD.
Suy ra $MN \parallel BD$, mà $BD \subset (SBD)$.
Nên $MN \parallel (SBD)$.

② Ta có $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$. Hay $IJ \parallel BD$.
Mà $BD \subset (SBD)$. Nên $IJ \parallel (SBD)$.

③ Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi H là giao điểm của MN và AC.
Trong mặt phẳng (SMN) gọi K là giao điểm của IJ và SH.
Dễ thấy H là trung điểm của AO, suy ra $\frac{HO}{HC} = \frac{1}{3}$.
Lại có $IJ \parallel MN \Rightarrow IK \parallel MH \Rightarrow \frac{HK}{SH} = \frac{MI}{SM} = \frac{1}{3}$.
Do đó $\frac{HK}{HS} = \frac{HO}{HC} = \frac{1}{3} \Rightarrow KO \parallel SC$.
Mà $KO \subset (IJO) \Rightarrow SC \parallel (IJO)$.

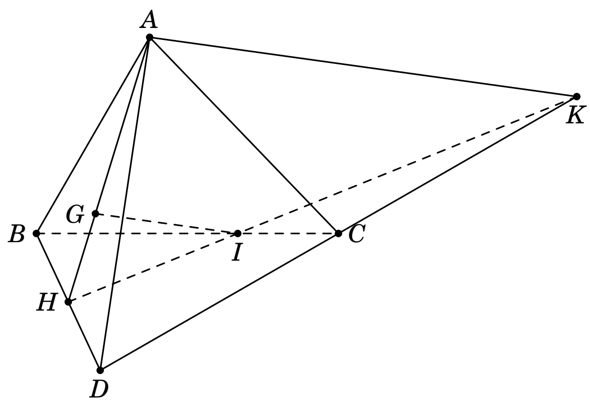


□

BÀI 555. Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm của tam giác ABD và I là điểm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh $IG \parallel (ACD)$.

Lời giải.

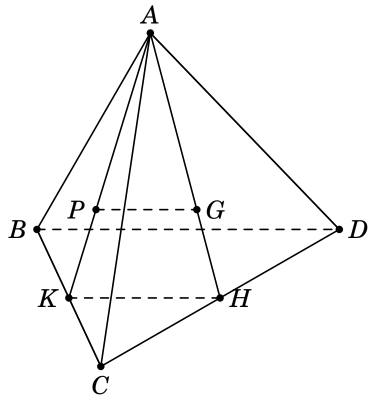
Gọi H là trung điểm của BD. Trong mặt phẳng (BCD), gọi K là giao điểm của HI và CD.
Theo định lý Menelaus có $\frac{BH}{HD} \cdot \frac{IC}{BI} \cdot \frac{KD}{KC} = 1 \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{KD}{KC} = 1 \Leftrightarrow \frac{KD}{KC} = 2$.
Suy ra C là trung điểm của KD, suy ra BC là trung tuyến của $\triangle BDK$.
Mà $BI = 2IC$, suy ra I là trọng tâm của $\triangle BDK$.
Suy ra $\frac{HI}{HK} = \frac{1}{3}$. Lại có G là trọng tâm của $\triangle ABD \Rightarrow \frac{HG}{HK} = \frac{1}{3}$.
Do đó, $GI \parallel AK$, mà $AK \subset (ACD) \Rightarrow IG \parallel (ACD)$.



□

BÀI 556. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và P lần lượt là trọng tâm của tam giác ACD và ABC. Chứng minh rằng $GP \parallel (BCD)$, $GP \parallel (ABD)$.

Lời giải.



Gọi K,H lần lượt là trung điểm của BC và CD. Suy ra $KH \parallel BD$ (1).
Ta có G,P lần lượt là trọng tâm của $\triangle ACD, \triangle ABC$.
Suy ra $\dfrac{AP}{AK}=\dfrac{2}{3}, \dfrac{AG}{AH}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow PG \parallel HK$ (2).
Từ (1) và (2), suy ra $GP \parallel BD$.
Mà $BD \subset (BCD), BD \subset (ABD)$, suy ra $GP \parallel (BCD), GP \parallel (ABD)$.

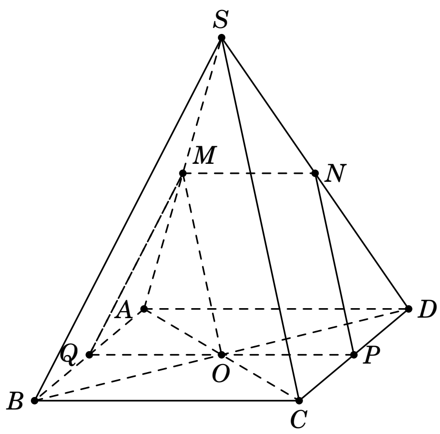
□

BÀI 557. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SA.

① Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.

② Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, đồng thời song song với SC và AD. Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



①

Ta có M,O là trung điểm của SA và AC, suy ra $MO \parallel SC$.
Mà $SC \subset (SCD) \Rightarrow OM \parallel (SCD)$.

② Vì $MO \parallel SC \Rightarrow O \in (\alpha)$.

Ta có $\begin{cases} O \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ AD \parallel (\alpha) \\ AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ$.

Với $PQ \parallel AD, O \in PQ, Q \in AB, P \in CD$.

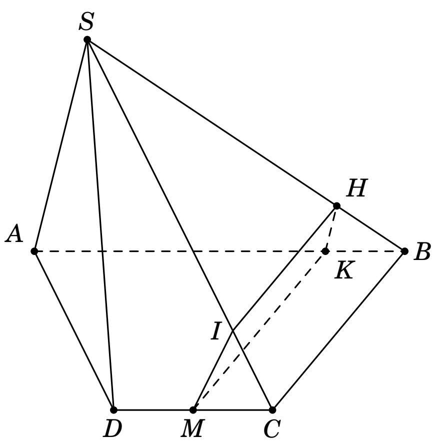
Lại có $\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (SCD) \\ SC \parallel (\alpha) \\ SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PN$, với $PN \parallel SC$.

Có $(\alpha) \cap (SAD) = MN, (\alpha) \cap (SAB) = MQ$.
Nhận thấy P,Q là trung điểm của CD và AB. Suy ra N là trung điểm của SD.
Suy ra $MN \parallel PQ$. Vậy thiết diện là hình thang $MNPQ$.

□

BÀI 558. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của CD, (α) là mặt phẳng qua M, đồng thời song song với SA và BC. Tìm thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải.



Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BC \parallel (\alpha) \\ BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MK$,

với $MK \parallel BC, K \in AB$.

Có $\begin{cases} K \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = KH$, với $KH \parallel SA$.

Lại có $\begin{cases} H \in (\alpha) \cap (SBC) \\ BC \parallel (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = HI$, với $HI \parallel BC$.

Do đó, $\alpha \cap (SCD) = IM$, mà MK, HI đều song song với BC.
Vậy thiết diện của hình chóp là hình thang $MKHI$.

□

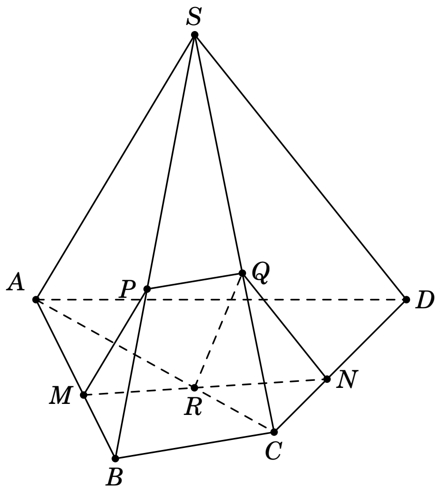
BÀI 559. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA.

① Tìm thiết diện của (α) với hình chóp.

② Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang.

Lời giải.

①



Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = MP$, với $MP \parallel SA$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $R = MN \cap AC$.

Ta có $\begin{cases} R \in (\alpha) \cap (SAC) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = RQ$, với $RQ \parallel SA$.

Ta có $(\alpha) \cap (SCD) = QN$. Vậy thiết diện là tứ giác $MNQP$.

② Ta có $MNQP$ là hình thang $\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} MP \parallel QN & (1) \\ MN \parallel PQ & (2) \end{array}\right.$.

Xét (1) ta có $\begin{cases} SA \parallel MP \\ MP \parallel QN \end{cases} \Rightarrow SA \parallel QN$.

Do đó $\begin{cases} SA \parallel QN \\ QN \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SA \parallel (SCD)$ (vô lý).

Xét (2) ta có $\begin{cases} BC = (ABCD) \cap (SBC) \\ MN \subset (ABCD) \\ PQ \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC$.

Ngược lại, nếu $MN \parallel BC$ thì $\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (SBC) \\ MN \subset (\alpha) \\ BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel PQ$.

Vậy để thiết diện là hình thang thì $MN \parallel PQ$.

□

BÀI 560. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

② Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB, SD. Tìm tỉ số diện tích của $\triangle SME$ với $\triangle SBC$ và tỉ số diện tích của $\triangle SMF$ với $\triangle SCD$.

③ Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao của MF và CD. Chứng minh K, A, J nằm trên đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

Lời giải.

①

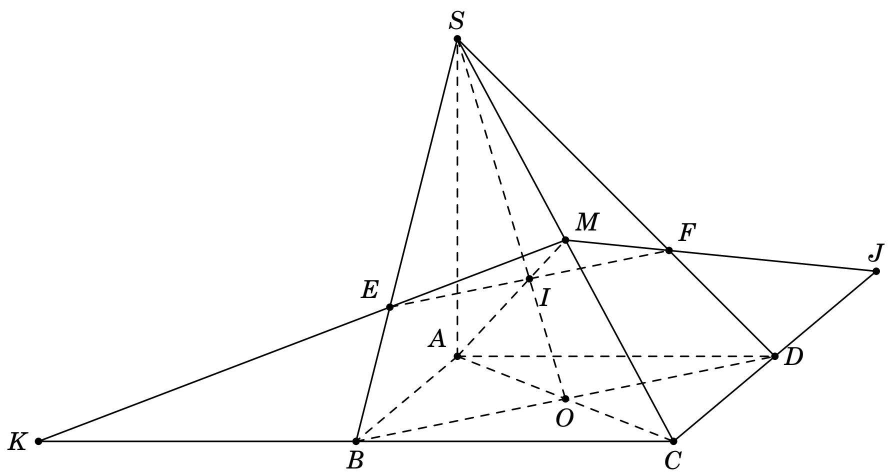
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $AC \cap BD = O$, trong mặt phẳng (SAC), gọi $AM \cap SO = I$.

Ta có $\begin{cases} I \in (P) \cap (SBD) \\ BD \parallel (P) \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow (P) \cap (SBD) = EF$, với $I \in EF, E \in SB, F \in SD$.

Ta có $(P) \cap (SAB) = AE, (P) \cap (SBC) = EM, (P) \cap (SCD) = MF$.

Vậy thiết diện là tứ giác $AEMF$.



② Trong $\triangle SAC$, có I là trọng tâm của tam giác $\Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{EF}{BD} = \dfrac{2}{3}$ (1).

Do đó $\dfrac{S_{\triangle AME}}{S_{\triangle SBC}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SCD}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

③ Ta có $\begin{cases}(MEF)\cap(ABCD)=AK\\(MEF)\cap(ABCD)=AJ\end{cases}\Rightarrow K,A,J$ thẳng hàng.

Theo định lý Menelaus, xét $\triangle SBC$ ta có $\dfrac{MS}{MC}\cdot\dfrac{EB}{ES}\cdot\dfrac{KC}{KB}=1\Leftrightarrow 1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{KC}{KB}=1\Leftrightarrow\dfrac{KC}{KB}=2.$

Hay B là trung điểm của KC. Tương tự, ta có D là trung điểm của CJ.

Do đó, BD là đường trung bình của $\triangle KCJ\Rightarrow\begin{cases}BD\parallel KJ\\BD=\dfrac{1}{2}\cdot KJ\quad(2)\end{cases}$.

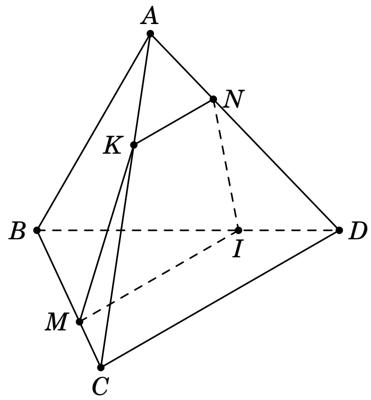
Mà $BD\parallel EF$. Vậy A,K,J nằm trên đường song song với EF.

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{EF}{KJ}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$.

□

BÀI 561. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh BC và AD. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN và song song với CD. Xác định vị trí của hai điểm M,N để thiết diện là hình bình hành.

Lời giải.



Ta có $\begin{cases}M=(\alpha)\cap(BCD)\\CD\parallel(\alpha)\\CD\subset(BCD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(BCD)=MI$, với $MI\parallel CD$.

$\begin{cases}N=(\alpha)\cap(ACD)\\CD\parallel(\alpha)\\CD\subset(ACD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ACD)=NK$, với $NK\parallel CD$.

Ta có $(\alpha)\cap(ABD)=NI,(\alpha)\cap(ABC)=MK$.

Vậy thiết diện là hình thang $MINK$, (vì $MI\parallel NK$).

Lại có $\begin{cases}MI\parallel CD\\KN\parallel CD\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{MI}{CD}=\dfrac{BM}{CB}\\\dfrac{KN}{CD}=\dfrac{AN}{AD}\end{cases}$.

Để thiết diện $MINK$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MI=NK\Leftrightarrow\dfrac{BM}{CD}=\dfrac{AN}{AD}$.

Vậy M,N lần lượt là hai điểm nằm trên BC và AD và $\dfrac{BM}{CD}=\dfrac{AN}{AD}$.

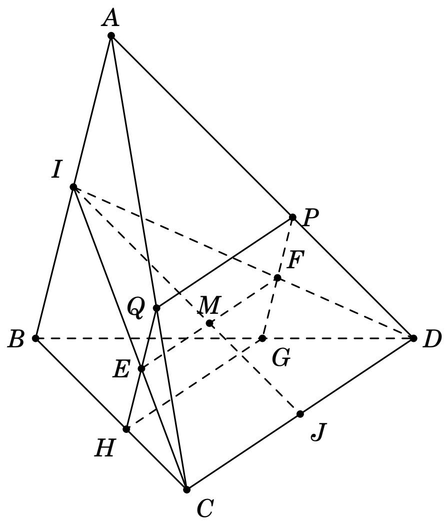
□

BÀI 562. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD.

① Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD).

② Xác định thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P). Thiết diện là hình gì?

Lời giải.



① Gọi $\Delta_1=(P)\cap(ICD)$, ta có

$\begin{cases}M\in(P)\\M\in IJ,IJ\subset(ICD)\end{cases}\Rightarrow M\in\Delta_1.$

$\begin{cases}(P)\parallel CD\\CD\subset(ICD)\\(P)\cap(ICD)=\Delta_1\end{cases}\Rightarrow\Delta_1\parallel CD.$

Vậy Δ_1 là đường thẳng qua M và song song với CD.

Gọi $E=\Delta_1\cap IC,F=\Delta_1\cap TD$, ta được $(P)\cap(ICD)=EF$.

② Gọi $\Delta_2=(P)\cap(ABD)$, ta có

$\begin{cases}F\in(P)\\F\in ID,ID\subset(ABD)\end{cases}\Rightarrow F\in\Delta_2.$

$\begin{cases}(P)\parallel AB\\AB\subset(ABD)\\(P)\cap(ABD)=\Delta_2\end{cases}\Rightarrow\Delta_2\parallel AB.$

Vậy Δ_2 là đường thẳng qua F và song song với AB.

Gọi $G=\Delta_2\cap BD,P=\Delta_2\cap AD$, ta được $(P)\cap(ICD)=GP$.

Gọi $\Delta_3=(P)\cap(ABC)$, ta có

$$\begin{cases}E\in(P)\\E\in IC,IC\subset(ABC)\end{cases}\Rightarrow E\in\Delta_3.$$

Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ (P) \cap (ABC) = \Delta_3 \end{cases} \Rightarrow \Delta_3 \parallel AB.$$

Vậy Δ_3 là đường thẳng qua E và song song với AB.
Gọi $H = \Delta_3 \cap BC, Q = \Delta_3 \cap AC$, ta được $(P) \cap (ABC) = HQ$.
Giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(BCD), (ABD), (ACD), (ABC)$ lần lượt là GH, GP, PQ, QH. Do đó thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (P) là tứ giác $HGPQ$.
Ta có

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (ACD) \\ (P) \cap (ACD) = PQ \end{cases} \Rightarrow PQ \parallel CD$$

và

$$\begin{cases} (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \\ (P) \cap (BCD) = HG \end{cases} \Rightarrow HG \parallel CD.$$

Ta có $\begin{cases} HG \parallel PQ \text{ (cùng song song với } CD) \\ HQ \parallel PG \text{ (cùng song song với } AB) \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác $HGPQ$ là hình bình hành.

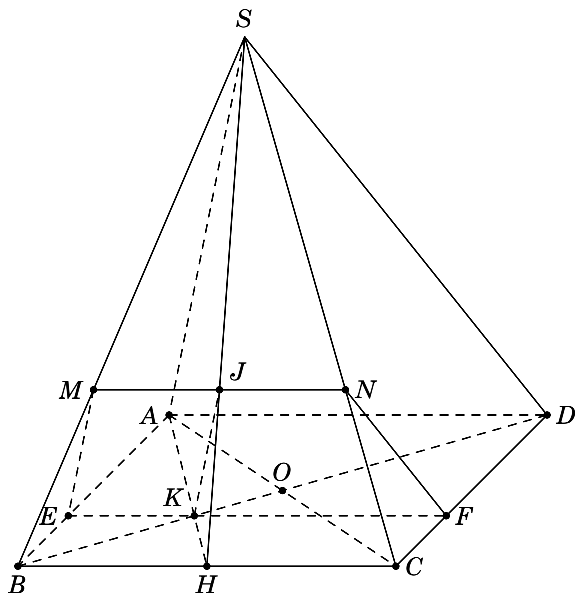
□

BÀI 563. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

① Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.

② Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD. Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

Lời giải.



① Gọi H là trung điểm BC, theo tính chất trọng tâm ta có $\dfrac{HK}{HA} = \dfrac{HJ}{HS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow KJ \parallel SA$ (Định lý Ta-lét đảo). Ta có $\begin{cases} KJ \parallel SA \\ SA \subset (SAB) \\ KJ \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow KJ \parallel (SAB).$

② Gọi $\Delta_1 = (P) \cap (ABCD)$, ta có
$\begin{cases} K \in KJ, KJ \subset (P) \\ K \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow K \in \Delta_1.$
$\begin{cases} (P) \parallel AD \\ AD \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \parallel AD.$
Vậy Δ_1 là đường thẳng qua K và song song với AD.
Gọi $E = \Delta_1 \cap AB, F = \Delta_1 \cap CD$, ta được $(P) \cap (ABCD) = EF$.

Gọi $\Delta_2 = (P) \cap (SBC)$, ta có

$$\begin{cases} J \in KJ, KJ \subset (P) \\ J \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow K \in \Delta_2.$$

Và

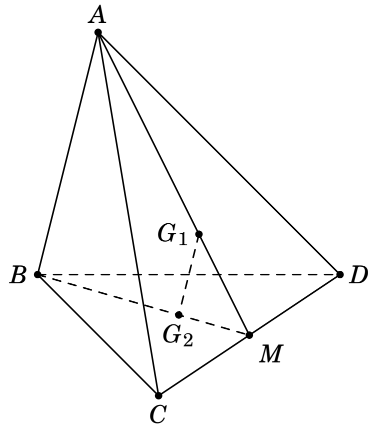
$$\begin{cases} (P) \parallel AD \parallel BC \\ BC \subset (ABCD) \\ (P) \cap (ABCD) = \Delta_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 \parallel BC.$$

Vậy Δ_2 là đường thẳng qua J và song song với BC.
Gọi $M = \Delta_2 \cap SB, N = \Delta_1 \cap SD$, ta được $(P) \cap (SBC) = MN$.
Ta có giao tuyến của (P) với các mặt phẳng $(ABCD), (SCD), (SBC), (SAB)$ lần lượt là EF, FN, NM, NE, do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNFE$.

□

BÀI 564. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng $G_1G_2 \parallel (ABC)$ và $G_1G_2 \parallel (ABD)$.

Lời giải.



Xét tam giác ABM ta có

— $\dfrac{MG_2}{MB} = \dfrac{1}{3}$ (G_2 là trọng tâm $\triangle BCD$).

— $\dfrac{MG_1}{MA} = \dfrac{1}{3}$ (G_1 là trọng tâm $\triangle ACD$).

Suy ra $\dfrac{MG_2}{MB} = \dfrac{MG_1}{MA} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB$ (Định lý Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} G_1G_2 \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ G_1G_2 \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} G_1G_2 \parallel AB \\ AB \subset (ABD) \\ G_1G_2 \not\subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABD)$.

□

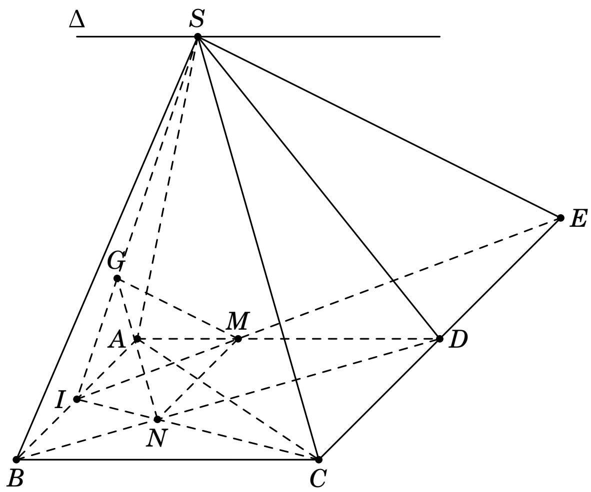
BÀI 565. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của $\triangle SAB, I$ là trung điểm AB, lấy điểm M trong đoạn AD sao cho $AD = 3AM$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

② Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \parallel (SCD)$.

③ Chứng minh $MG \parallel (SCD)$.

Lời giải.



① Gọi $\Delta = (SAD) \cap (SBC)$, ta có $S \in \Delta$.

Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ (SAD) \cap (SBC) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AD$.

Vậy Δ là đường thẳng qua S và song song với AD.

② Hình thang $AICD$ có $MN \parallel AI \parallel CD$ nên $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$ (Định lí Ta-lét).

$\triangle SAB$ có G là trọng tâm nên $\dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3}$.

$\triangle ISC$ có $\dfrac{IN}{IC} = \dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NG \parallel SC$ (Định lý Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} NG \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ NG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NG \parallel (SCD)$.

③ Gọi E là giao điểm của IM và CD. Vì $AI \parallel DE$ nên ta có $\dfrac{IM}{ME} = \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{1}{2}$ (Định lý Ta-lét).

Xét $\triangle ASE$ có $\dfrac{IG}{GS} = \dfrac{IM}{ME} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow GM \parallel SE$.

Ta có $\begin{cases} MG \parallel SE \\ SE \subset (SCD) \\ MG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel (SCD)$.

□

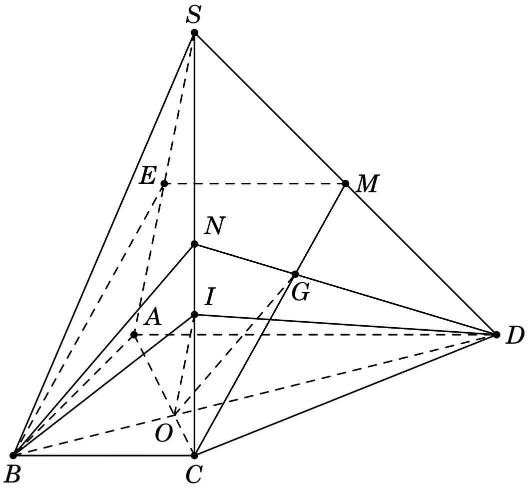
BÀI 566. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

① Chứng minh $OG \parallel (SBC)$.

② Cho M là trung điểm của SD. Chứng minh $CM \parallel (SAB)$.

③ Gọi I là điểm trên cạnh SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh $SA \parallel (BDI)$.

Lời giải.



① Gọi N là trung điểm SC, vì G là trọng tâm $\triangle SCD$ nên $\dfrac{NG}{GD}=\dfrac{1}{2}$.

Ta có $BC \parallel AD \Rightarrow \dfrac{BO}{OD}=\dfrac{CO}{AO}=\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{1}{2}$ (Định lí Ta-lét).

$\triangle BND$ có $\dfrac{NG}{GD}=\dfrac{BO}{OD}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow OG \parallel BN$ (Định lí Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} OG \parallel BN \\ BN \subset (SBC) \\ OG \not\subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OG \parallel (SBC)$.

② Gọi E là trung điểm của SA, theo tính chất đường trung bình ta có $ME \parallel AD$ và $ME=\dfrac{1}{2}AD$.

$\begin{cases} ME=BC=\dfrac{1}{2}AD \\ ME \parallel BC (\parallel AD) \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $MEBC$ là hình bình hành.

Suy ra $CM \parallel BE$.

Ta có $\begin{cases} CM \parallel BE \\ BE \subset (SAB) \\ CM \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CM \parallel (SAB)$.

③ Ta có $2SC=3SI \Leftrightarrow 2SI+2IC=3SI \Leftrightarrow SI=2IC$.

Xét $\triangle SAC$ có $\dfrac{CI}{IS}=\dfrac{CO}{OA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow OI \parallel SA$ (Định lí Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} SA \parallel BI \\ BI \subset (BDI) \\ AB \not\subset (BDI) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (BDI)$.

□

BÀI 567. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,AD,SB.

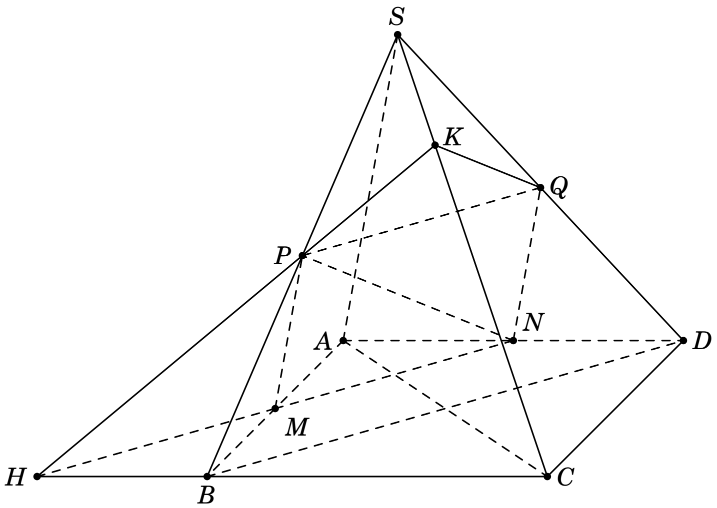
① Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.

② Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

③ Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

④ Tìm thiết diện của hình chóp với (MNP).

Lời giải.



① $\triangle ABD$ có MN là đường trung bình nên $MN \parallel BD$ và $MN=\dfrac{1}{2}BD$.

Ta có $\begin{cases} BD \parallel MN \\ MN \subset (MNP) \\ BD \not\subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow BD \parallel (MNP)$.

② Trong $(ABCD)$, dựng $H = MN \cap BC$, ta có

$$\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = (MNP) \cap BC.$$

③ Gọi $\Delta = (MNP) \cap (SBD)$, ta có $\begin{cases} P \in (SBD) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in \Delta.$

Ta có

$$\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (MNP), (BD) \subset (SBD) \\ (MNP) \cap (SBD) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel MN.$$

Vậy Δ là đường thẳng qua P và song song với MN.
Gọi $Q = \Delta \cap SD$, ta được $(MNP) \cap (SBD) = PQ$.

④ Trong (SBC), dựng $K = HP \cap SC$. Giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(ABCD), (SAB), (SBC), (SCD), (SDA)$ lần lượt là MN, PM, PK, KQ, QN. Vậy thiết diện của hình chóp với (MNP) là ngũ giác $PMNQK$.

□

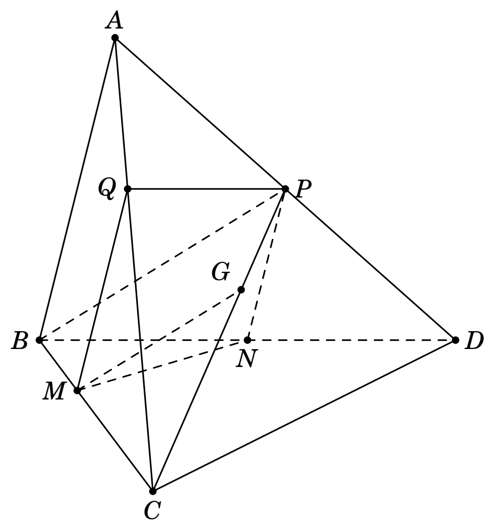
BÀI 568. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm thuộc BC sao cho $MC = 2MB$. Gọi N, P lần lượt trung điểm của BD và AD.

① Chứng minh $NP \parallel (ABC)$.

② Tìm giao điểm Q của AC với (MNP) và tính $\dfrac{QA}{QC}$. Suy ra thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (MNP).

③ Chứng minh $MG \parallel (ABD)$, với G là trọng tâm của tam giác ACD.

Lời giải.



① $\triangle ABD$ có NP là đường trung bình nên $NP \parallel AB$ và $NP = \dfrac{1}{2}AB$.

Ta có $\begin{cases} NP \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \\ NP \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel (ABC).$

② Gọi $\Delta = (MNP) \cap (ABC)$, ta có
$\begin{cases} M \in (SBD) \\ M \in BC, BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow M \in \Delta.$
$\begin{cases} NP \parallel (ABC) \\ NP \subset (MNP) \\ (MNP) \cap (ABC) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AB.$
Vậy Δ là đường thẳng qua M và song song với AB.
Trong (ABC) dựng $Q = \Delta \cap AC$, ta có
$\begin{cases} Q \in AC \\ Q \in \Delta, \Delta \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = AC \cap (MNP).$

Ta có $MC = 2MB \Leftrightarrow MC + MB = 3MB \Leftrightarrow BC = 3MB \Leftrightarrow \dfrac{MB}{BC} = \dfrac{1}{3}$.

Xét $\triangle ABC$ có $QM \parallel AB \Rightarrow \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3}$.

Ta có giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(ABC), (ACD), (ABD), (BCD)$ lần lượt là QM, QP, PN, MN. Vậy thiết diện của hình chóp bị cắt bởi (MNP) là tứ giác $MNPQ$.

③ Vì G là trọng tâm $\triangle ACD$ nên $\dfrac{PG}{PC} = \dfrac{1}{3}$.

Xét $\triangle BCP$ có $\dfrac{PG}{PC} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MG \parallel BP$ (Định lí Ta-lét đảo).

Ta có $\begin{cases} MG \parallel BP \\ BP \subset (ABD) \\ MG \not\subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel (ABD).$

□

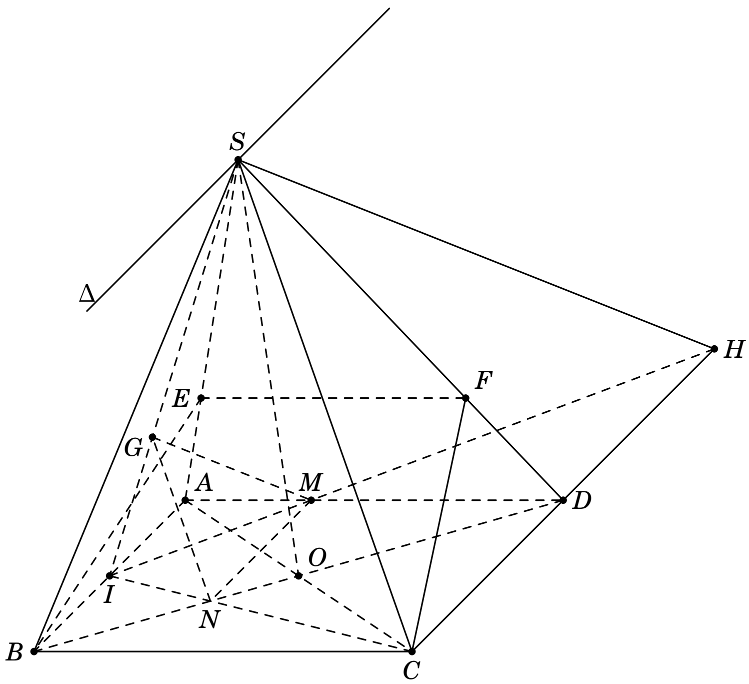
BÀI 569. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành.

① Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD); (SAB) và (SCD).

② Một mặt phẳng qua BC và song song với AD cắt SA tại $E, (E \neq S, E \neq A)$, cắt SD tại $F, (F \neq S, F \neq D)$. Tứ giác $BEFC$ là hình gì?

③ Gọi M thuộc đoạn AD sao cho $AD = 3AM$ và G là trọng tâm tam giác SAB, I là trung điểm AB. Đường thẳng qua M và song song AB cắt CI tại N. Chứng minh $NG \parallel (SCD)$ và $MG \parallel (SCD)$.

Lời giải.



① Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$
Trong $(ABCD)$, dựng $O = AC \cap BD$, ta có

$$\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD).$$

Vậy $(SAC) \cap (SBD) = SO$.
Gọi $\Delta = (SAB) \cap (SCD)$, ta có $S \in \Delta$

Ta có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ (SAB) \cap (SCD) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \parallel AB.$

Vậy Δ là đường thẳng qua S và song song với AB.

② Ta có

$$\begin{cases} BC \parallel AD \\ BC \subset (BCFE) \\ AD \subset (SAD) \\ (BCFE) \cap (SAD) = EF \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AD \parallel BC.$$

Vậy tứ giác $BCFE$ là hình thang.

③ Xét hình thang $AICD$ có $MN \parallel AI \Rightarrow \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3}$ (Định lí Ta-lét).

Vì G là trọng tâm tam giác SAB nên $\dfrac{IG}{IS} = \dfrac{1}{3}$.

Xét $\triangle ISC$ ta có

$$\frac{IG}{IS} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GN \parallel SC \text{ (Định lí Ta-lét đảo).}$$

Ta có

$$\begin{cases} GN \parallel SC \\ SC \subset (SCD) \\ NG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NG \parallel (SCD).$$

Trong $(ABCD)$, dựng $H = IM \cap CD$. Vì $AI \parallel DM$ nên ta có $\dfrac{IM}{IH} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{3}$ (Định lí Ta-lét).
Xét $\triangle ISH$ ta có

$$\frac{IG}{IS} = \frac{IM}{IH} = \frac{1}{3} \Rightarrow GM \parallel SH \text{(Định lí Ta-lét đảo).}$$

Ta có

$$\begin{cases} MG \parallel SH \\ SH \subset (SCD) \\ MG \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MG \parallel (SCD).$$

□

BÀI 570. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, BC, CD.

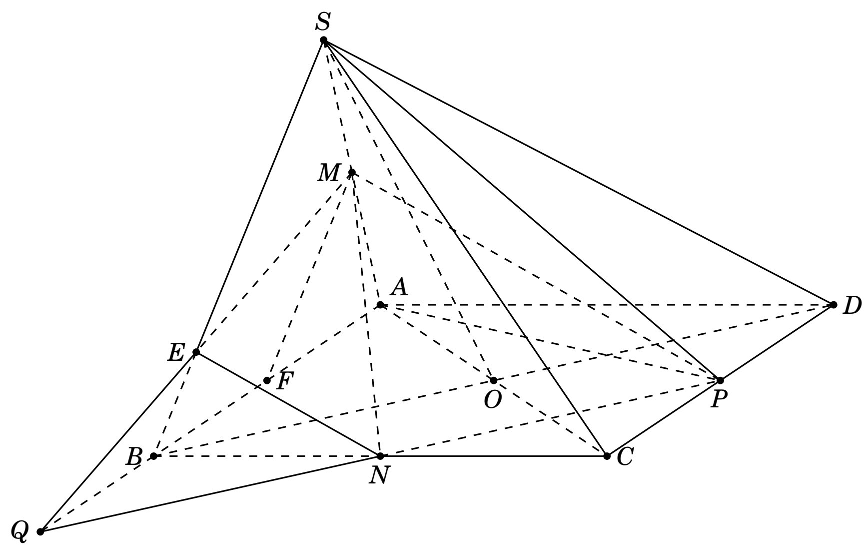
① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

② Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

③ Tìm giao điểm E của SB và (MNP).

④ Chứng minh $NE \parallel (SAP)$.

Lời giải.



① Ta có $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BC \subset (SBD). \end{cases}$
Do đó O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)
mà S là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)
nên $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

② Ta có $\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB$ và $Sx \parallel CD$.

③ Gọi $Q = NP \cap AB \Rightarrow Q$ là điểm chung của (SAB) và (MNP)
mà M là điểm chung thứ hai nên $(SAB) \cap (MNP) = MQ$.
Trong mặt phẳng (SAB) gọi $E = MQ \cap SB$.
Ta có $\begin{cases} E \in SB \\ E \in MQ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E = SB \cap (MNP)$.

④ Ta có N là trung điểm của BC và $BQ \parallel CP$ nên $BQ = CP$ và $NQ = NP$ (1).
Gọi F là trung điểm của AB, ta có $AF = BF = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{CD}{2} = CP = BQ$.
Ta có M, F là trung điểm của SA và AB nên MF là đường trung bình tam giác SAB nên $MF \parallel SB$.
Trong tam giác QMF có B là trung điểm QF và $BE \parallel MF$ nên E là trung điểm MQ (2).
Từ (1) và (2) ta có EN là đường trung bình tam giác $QMP \Rightarrow EN \parallel MP$.
Mặt khác, do $MP \subset (SAP)$ nên $NE \parallel (SAP)$.

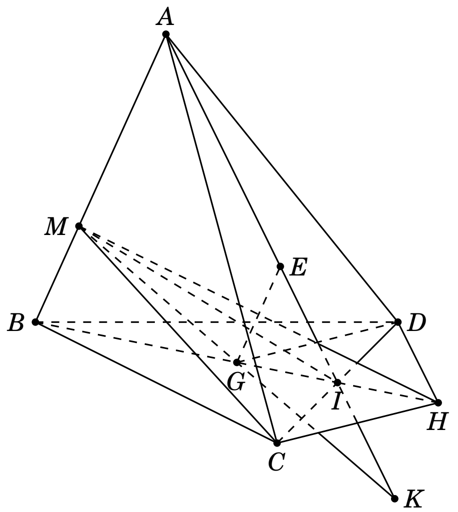
□

BÀI 571. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sau cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD, H là điểm đối xứng của G qua I.

① Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.

② Tìm giao điểm K của MG với (ACD). Tính tỉ số $\dfrac{GK}{GM}$.

Lời giải.



① Ta có $IC = ID$ và $IG = IH$ nên $GDHC$ là hình bình hành.
Do đó $GD \parallel CH$
mà $CH \subset (MCH)$ nên $GD \parallel (MCH)$.

② Trong mp(ABI), gọi $K = AI \cap MG$, ta có $\begin{cases} K \in AI \subset (ACD) \\ K \in MG \end{cases}$
$\Rightarrow K = MG \cap (ACD)$.
Trong mp(ABI), kẻ $GE \parallel AB$, $(E \in AI)$.
Xét tam giác ABI, có $GE \parallel AB$, suy ra $\dfrac{GE}{AB} = \dfrac{IG}{IB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GE}{AM} = \dfrac{1}{2}$.
Xét tam giác AKM, có $GE \parallel AM$, suy ra $\dfrac{KG}{KM} = \dfrac{GE}{AM} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{GK}{GM} = 1$.

□

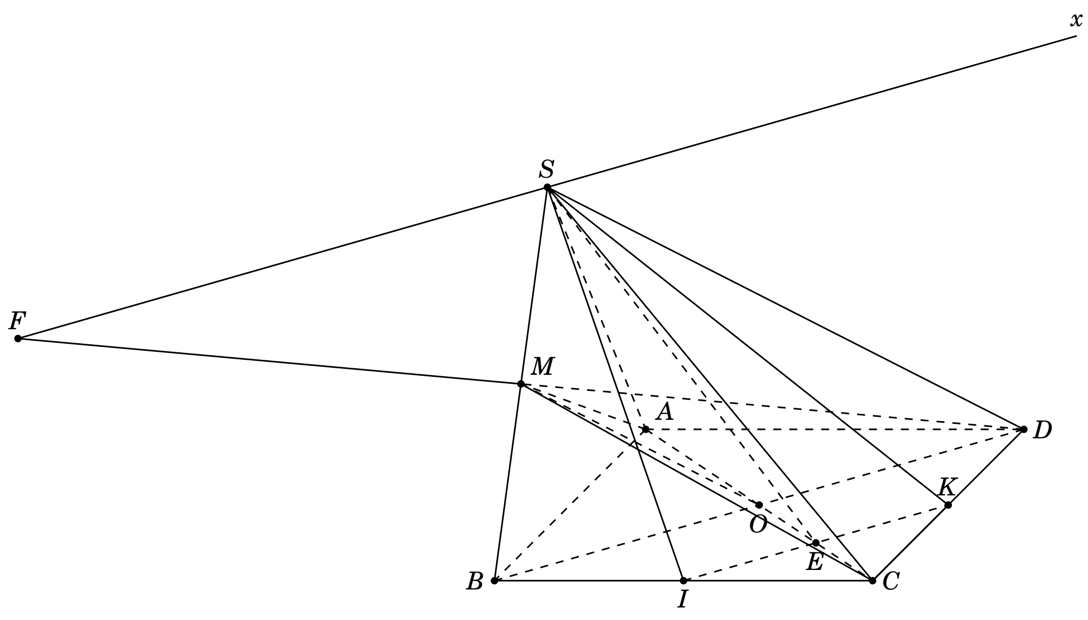
BÀI 572. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD.

① Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC), (SIK) và (SBD).

② Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.

③ Tìm giao điểm F của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{MD}$.

Lời giải.



① — Ta có $S \in (SIK) \cap (SAC)$.

Trong mp$(ABCD)$, gọi $E = IK \cap AC \Rightarrow \begin{cases} E \in IK \subset (SIK) \\ E \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow E \in (SIK) \cap (SAC)$.

Suy ra $SE = (SIK) \cap (SAC)$.

— Ta có $\begin{cases} S \in (SIK) \cap (SBD) \\ BD \in (SBD), IK \in (SIK), BD \parallel IK \end{cases} \Rightarrow (SIK) \cap (SBD) = Sx$, (với $Sx \parallel BD \parallel IK$).

② Trong mp$(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$, ta có $SD \parallel MO$. Mà $MO \subset (ACM)$, suy ra $SD \parallel (ACM)$.

③ — Trong mp(SBD), gọi $F = Sx \cap DM \Rightarrow \begin{cases} S \in DM \\ S \in Sx \subset (SIK) \end{cases} \Rightarrow F = DM \cap (SIK)$.

— Ta có $SF \parallel BD \Rightarrow \dfrac{MF}{MD} = \dfrac{MS}{MB} = 1$.

□

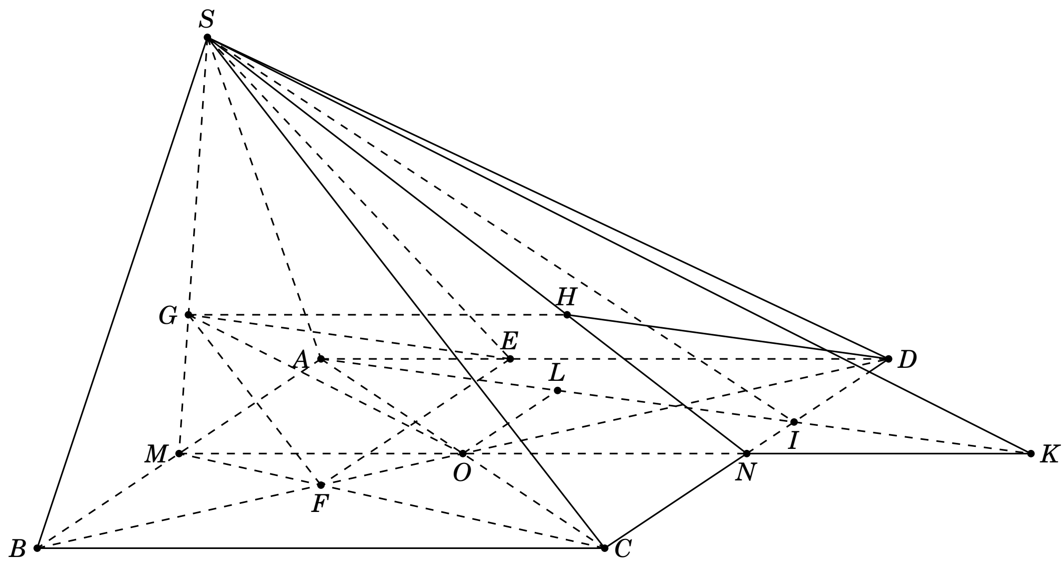
BÀI 573. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$, trên AD lấy điểm E sao cho $AD = 3AE$. Gọi M là trung điểm AB.

① Chứng minh $EG \parallel (SCD)$.

② Đường thẳng qua E song song AB cắt MC tại F. Chứng minh $GF \parallel (SCD)$.

③ Gọi I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CI = 2ID$. Chứng minh $GO \parallel (SAI)$.

Lời giải.



① Gọi H là trọng tâm tam giác SCD, ta có $GH \parallel MN$ và $\dfrac{GH}{MN} = \dfrac{2}{3}$.

Lại có $ED \parallel MN$ và $\dfrac{ED}{MN} = \dfrac{ED}{AD} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $GH \parallel ED$ và $GH = ED$. Suy ra $GHDE$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} EG \parallel DH \\ DH \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow EG \parallel (SCD)$.

② Ta có $MA \parallel EF \parallel CD$, suy ra $\dfrac{MF}{MC} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

Xét tam giác MSC có $\dfrac{MF}{MC} = \dfrac{MG}{MS} = \dfrac{1}{3}$, suy ra $GF \parallel SC$.

Mà $SC \subset (SCD)$. Vậy $GF \parallel (SCD)$.

③ Trong mp$(ABCD)$, gọi $K = AI \cap MN$. Ta có $SK = (SMN) \cap (SAI)$.

Gọi L là trung điểm của AI, ta có OL là đường trung bình của hình thang $AMNI$, suy ra

$$OL = \frac{AM + NI}{2} = \frac{AM + \frac{CD}{6}}{2} = \frac{AM + \frac{AB}{6}}{2} = \frac{AM + \frac{AM}{3}}{2} = \frac{2AM}{3} \Rightarrow \frac{OL}{AM} = \frac{2}{3}.$$

Xét tam giác AKM, có $OL \parallel AM$, suy ra $\dfrac{KO}{KM} = \dfrac{OL}{AM} = \dfrac{2}{3}$.
Xét tam giác SMK, có $\dfrac{SG}{SM} = \dfrac{KO}{KM} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $GO \parallel SK$.
Mà $SK \subset (SAI)$. Vậy $GO \parallel (SAI)$.

□

BÀI 574. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC và N là trọng tâm tam giác ABC.

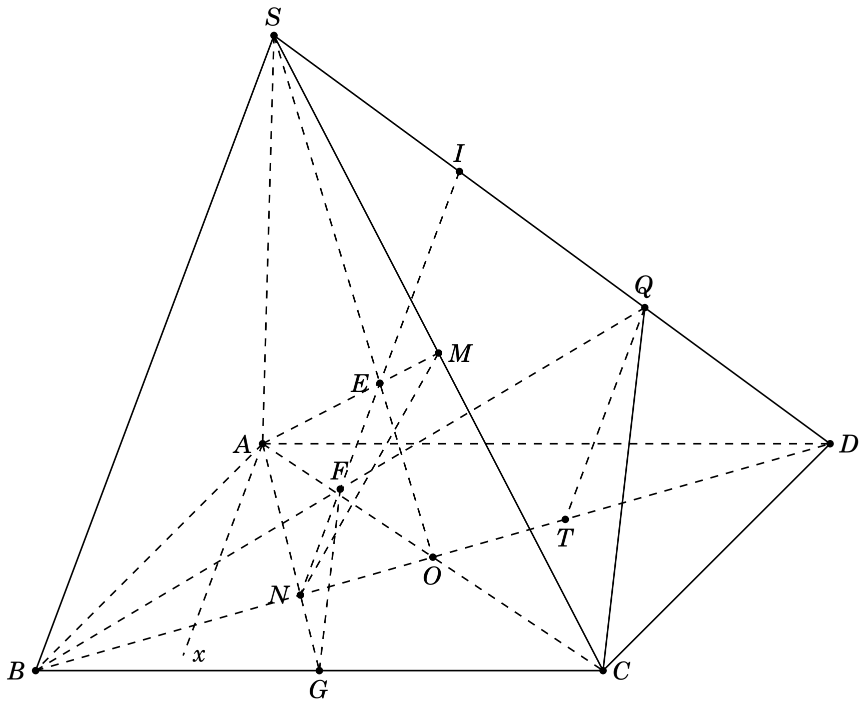
① Chứng minh $SB \parallel (AMN)$.

② Tìm giao tuyến (AMN) và (SAB).

③ Tìm giao điểm I của SD với (AMN). Tính tỉ số $\dfrac{IS}{ID}$.

④ Gọi Q là trung điểm của ID. Chứng minh $QC \parallel (AMN)$.

Lời giải.



① Trong mp$(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.
Trong mp(SAC), gọi $E = AM \cap SO$, ta có E là trọng tâm tam giác SAC. Suy ra $\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{1}{3}$.
Ta có N là trọng tâm tam giác ABC nên $\dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$.
Xét tam giác OSB có $\dfrac{OE}{OS} = \dfrac{ON}{OB} = \dfrac{1}{3}$. Suy ra $NE \parallel SB$.
Mà $NE \subset (AMN)$. Vậy $SB \parallel (AMN)$.

② Ta có $\begin{cases} A \in (SAB) \cap (AMN) \\ SB \subset (SAB), SB \parallel (AMN) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (AMN) = Ax$, (với $Ax \parallel SB$).

③ Trong mp(SBD), gọi $I = NE \cap SD \Rightarrow \begin{cases} I \in NE \subset (AMN) \\ I \in SD \end{cases} \Rightarrow I = SD \cap (AMN)$.

Ta có $NE \parallel SB \Rightarrow NI \parallel SB \Rightarrow \dfrac{IS}{ID} = \dfrac{BN}{ND} = \dfrac{BN}{BD - BN} = \dfrac{\dfrac{2BO}{3}}{2BO - \dfrac{2BO}{3}} = \dfrac{1}{2}$.

④ Trong mp(SBD), gọi $F = NE \cap BQ$.
Trong mp$(ABCD)$, gọi $G = AN \cap BC$, vì N là trọng tâm tam giác ABC nên G là trung điểm của BC.
Ta có $FG = (AMN) \cap (BQC)$.
Kẻ $QT \parallel FN$, $(T \in BD)$. (1)

Xét tam giác DNI có $QT \parallel NI$, suy ra $\dfrac{NT}{DN} = \dfrac{IQ}{DI} = \dfrac{1}{2}$

Mà $\dfrac{BN}{ND} = \dfrac{1}{2}$ nên $BN = NT$, hay N là trung điểm của BT. (2)

Từ (1) và (2), ta có F là trung điểm của BQ.

Do đó GF là đường trung bình của tam giác BQC. Suy ra $QC \parallel GF$.

Mà $GF \subset (AMN)$. Vậy $QC \parallel (AMN)$.

□

BÀI 575. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD.

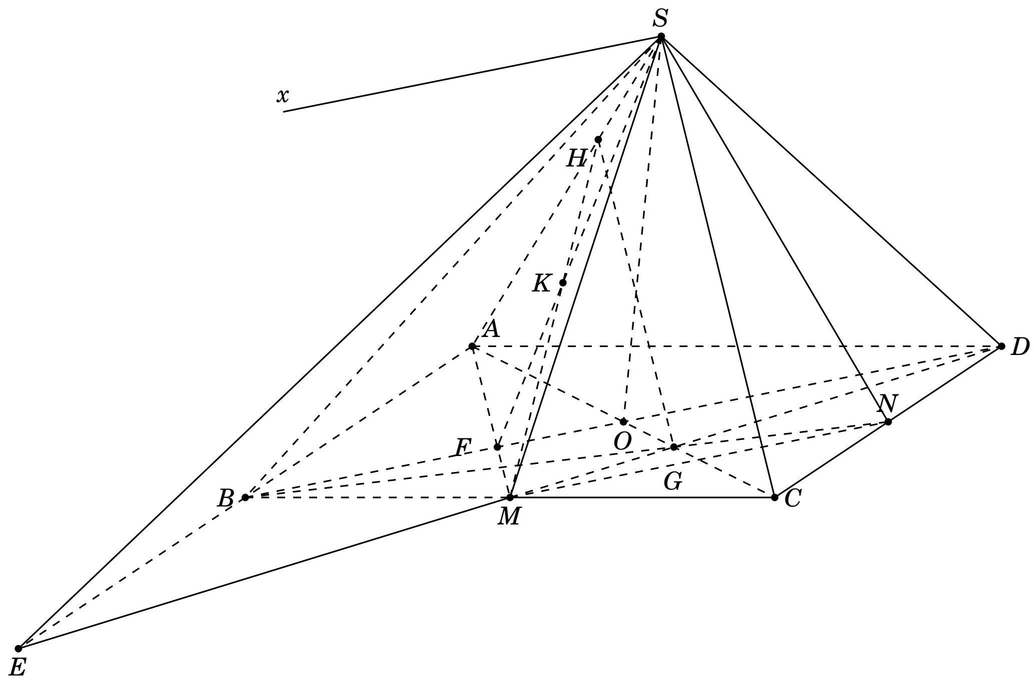
① Tìm giao tuyến của (SMD) và (SAB).

② Tìm giao tuyến của (SMN) và (SBD).

③ Gọi H là điểm trên cạnh SA sao cho $HA = 2HS$. Tìm giao điểm K của MH và (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{KH}{KM}$.

④ Gọi G là giao điểm của BN và DM. Chứng minh $HG \parallel (SBC)$.

Lời giải.



① Trong mp$(ABCD)$, gọi $E = MD \cap AB \Rightarrow \begin{cases} E \in MD \subset (SMD) \\ E \in AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow E \in (SMD) \cap (SAB)$.

mà $S \in (SAB) \cap (SMD) \Rightarrow SE = (SAB) \cap (SMD)$.

② Ta có $\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (SMN), BD \subset (SBD) \\ S \in (SMN) \cap (SBD) \end{cases} \Rightarrow (SMN) \cap (SBD) = Sx \parallel BD \parallel MN$.

③ Trong mp$(ABCD)$, gọi $F = AM \cap BD$.

Trong mp(SAM), gọi $K = MH \cap SF \Rightarrow \begin{cases} K \in SF \subset (SBD) \\ K \in MH \end{cases} \Rightarrow K = MH \cap (SBD)$.

④ Trong tam giác BCD, BN và DM là hai trung tuyến nên G là trọng tâm. Từ đó ta có $\dfrac{GC}{CO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{GC}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác, do $HA = 2HS$ nên $\dfrac{HS}{SA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GC}{AC} = \dfrac{HS}{SA} \Rightarrow HG \parallel SC \Rightarrow HG \parallel (SBC)$.

□

BÀI 576. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là trọng tâm của tam giác SCD.

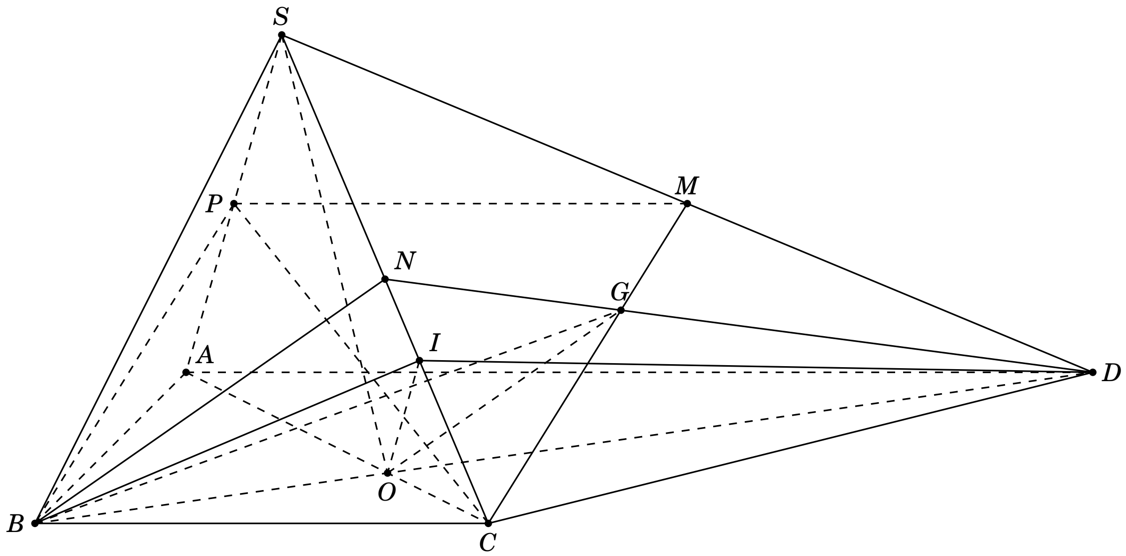
① Chứng minh $OG \parallel (SBC)$.

② Gọi M là trung điểm của cạnh SD. Chứng minh $CM \parallel (SAB)$.

③ Giả sử điểm I trên đoạn SC sao cho $2SC = 3SI$. Chứng minh $SA \parallel (BID)$.

④ Xác định giao điểm K của BG và mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số $\dfrac{KB}{KG}$.

Lời giải.



① Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow \dfrac{OD}{OB} = \dfrac{AD}{BC} = 2$.
Mặt khác, gọi N là trung điểm SC. Vì G là trọng tâm $\triangle SCD$ nên $\dfrac{GD}{GN} = 2$
$\Rightarrow \dfrac{GD}{GN} = \dfrac{OD}{OB} \Rightarrow OG \parallel BN \Rightarrow OG \parallel (SBC)$.

② Gọi P là trung điểm SA, ta có ngay PM là đường trung bình của $\triangle SAD$.
Suy ra $PM = \dfrac{AD}{2} = BC$ và $PM \parallel AD \parallel BC$. Do đó $PMCB$ là hình bình hành.
Vậy $CM \parallel BP \Rightarrow CM \parallel (SAB)$.

③ Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow \dfrac{OA}{OC} = 2$.
Mặt khác, vì $2SC = 3SI$ nên $\dfrac{SI}{IC} = 2 \Rightarrow \dfrac{SI}{IC} = \dfrac{OA}{OC} \Rightarrow OI \parallel SA \Rightarrow SA \parallel (BID)$.

④ Trong mp$(BCMP)$, gọi $K = BG \cap CP$
mà $CP \in (SAC) \Rightarrow K = BG \cap (SAC)$.
Ta lại có $CG \parallel BP \Rightarrow \dfrac{KB}{KG} = \dfrac{BP}{CG} = \dfrac{CM}{CG} = \dfrac{3}{2}$.

□

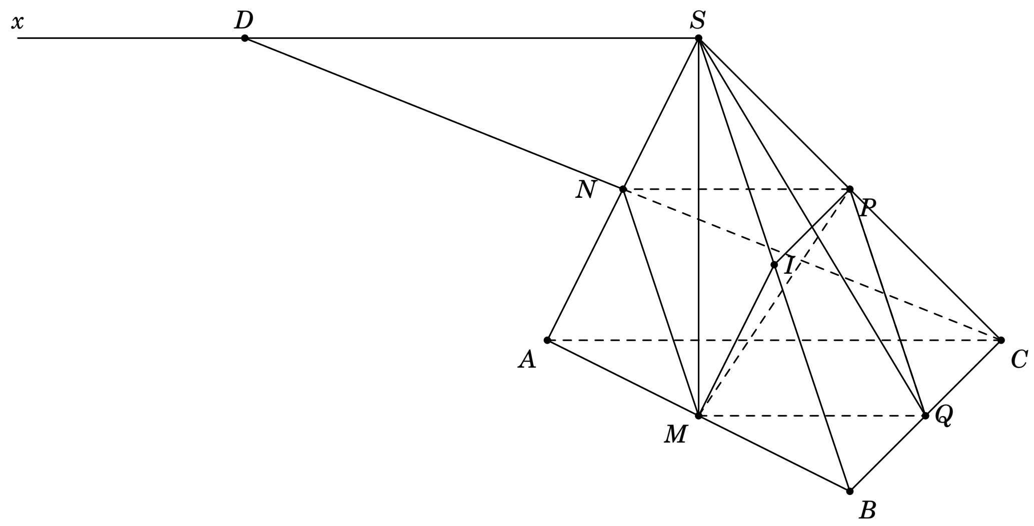
BÀI 577. Cho hình chóp $S.ABC$ Gọi M, P, I lần lượt là trung điểm của AB, SC, SB. Một mặt phẳng (α) qua MP và song song với AC và cắt các cạnh SA, BC tại N, Q.

① Chứng minh $BC \parallel (IMP)$.

② Xác định thiết diện của (α) với hình chóp. Thiết diện này là hình gì?

③ Tìm giao điểm của đường thẳng CN và mặt phẳng (SMQ).

Lời giải.



① Ta có IP là đường trung bình của tam giác SBC nên $IP \parallel BC \Rightarrow BC \parallel (IMP)$.

② Ta có (α) cắt BC tại Q nên $(\alpha)\cap(SBC) = PQ$ và $(\alpha)\cap(ABC) = MQ$.
Ta lại có (α) cắt SA tại N nên $(\alpha)\cap(SAB) = MN$ và $(\alpha)\cap(SAC) = PN$.
Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.
Mặt khác, do $\begin{cases}(\alpha) \parallel AC \\ AC \subset (ABC)\end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(ABC) = MQ \parallel AC \Rightarrow Q$ là trung điểm BC.
Tương tự ta chứng minh được $NP \parallel AC$ và N là trung điểm SA.
Lúc này NP và MQ là đường trung bình tam giác SAC và ABC nên $NP = MQ = \dfrac{AC}{2}$ và $NP \parallel MQ$.
Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.

③ Ta có $\begin{cases} AC \parallel MQ \\ AC \subset (SAC), MQ \subset (SMQ) \\ S \in (SAC)\cap(SMQ)\end{cases} \Rightarrow (SAC)\cap(SMQ) = Sx \parallel AC$.
Trong mp(SAC), gọi $D = CN \cap Sx$. Ta có $D \in Sx \subset (SMQ)$ và $D \in CN$ nên $D = CN \cap (SMQ)$.

□

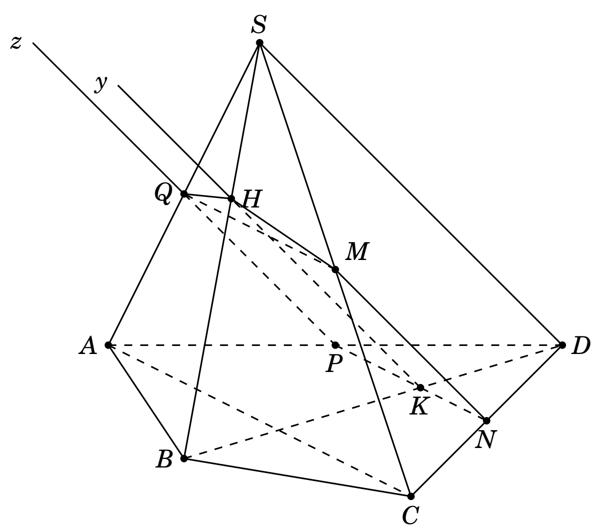
BÀI 578. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình tứ giác lồi. Gọi M, N là trung điểm của SC và CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua M, N và song song với đường thẳng AC.

① Tìm giao tuyến của (α) với $(ABCD)$.

② Tìm giao điểm của SB và (α).

③ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α).

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABCD) \\ N \in (\alpha)\cap(ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(ABCD) = Nx \parallel AC$. Gọi $P = Nx \cap AD$ ta có $(\alpha)\cap(ABCD) = NP$.

② Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $SD \parallel MN \Rightarrow SD \Rightarrow SD \parallel (\alpha)$.

Gọi $K = NP \cap BD$, ta có $\begin{cases} SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SBD) \\ K \in (\alpha)\cap(SBD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SBD) = Ky \parallel SD$. Gọi $H = Ky \cap SB$.

Ta có $H \in Ky \subset (\alpha)$ và $H \in SB \Rightarrow H = SB \cap (\alpha)$.

③ Ta có $\begin{cases} SD \parallel (\alpha) \\ SD \subset (SAD) \\ P \in (\alpha)\cap(SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(SBD) = Pz \parallel SD$. Gọi $Q = Pz \cap SA$.

(α) và (SAB) có H, Q là điểm chung nên giao tuyến là QH.
(α) và (SAD) có P, Q là điểm chung nên giao tuyến là PQ.
(α) và $(ABCD)$ có P, N là điểm chung nên giao tuyến là PN.
(α) và (SCD) có M, N là điểm chung nên giao tuyến là MN.
(α) và (SBC) có H, M là điểm chung nên giao tuyến là HM.
Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác $MNPQH$.

□

BÀI 579. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, I, lần lượt là trung điểm của AD, BC, SA.

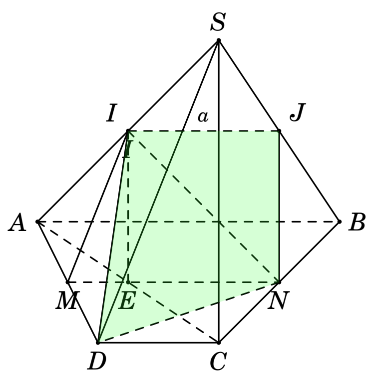
① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).

② Tìm giao điểm của SB và (IMN).

③ Tìm thiết diện của mặt phẳng (IDN) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IMN) và (SAC); (IMN) và (SAB).



(a) Tìm giao tuyến của (IMN) và (SAC).
Ta có $I \in (SAC)\cap(IMN)$.
Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap MN \Rightarrow E \in (SAC)\cap(IMN)$.
Vậy $IE = (IMN)\cap(SAC)$.

(b) Ta có $I \in (IMN)\cap(SAB)$ và MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $MN \parallel AB$. Nên giao tuyến của (IMN) và (SAB) là đường thẳng a đi qua I song song với AB.

② Ta thấy $SB \subset (SAB)$ và $a = (IMN)\cap(SAB)$. Gọi $J = SB \cap a$, vậy $J = SB \cap (IMN)$.

③ Ta thấy

$IJ = (SAB)\cap(IDN)$, $ID = (SAD)\cap(IDN)$, $DN = (ABCD)\cap(IDN)$, $NJ = (SBC)\cap(IDN)$.

Vậy thiết diện của (IDN) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $IJND$.

□

BÀI 580. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$; N là một điểm thuộc đoạn AC sao cho $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3}$; I là trung điểm của AB.

① Chứng minh $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.

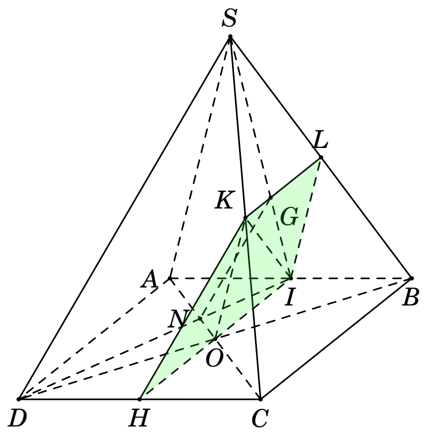
② Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O, song song với SA và BC. Mặt phẳng (α) cắt SB, SC lần lượt tại L và K. Xác định thiết diện cắt bởi mặt phẳng (α) với hình chóp.

Lời giải.

① Chứng minh $OI \parallel (SAD)$ và $GN \parallel SD$.

(a) Chứng minh $OI \parallel (SAD)$.
Ta có $OI \parallel BC$ (OI là đường trung bình trong $\triangle ABC$) nên $OI \parallel AD$ (vì $AD \parallel BC$) mà $AD \subset (SAD)$ suy ra $OI \parallel (SAD)$.

(b) Chứng minh $GN \parallel SD$.
Do $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{AN}{AO} = \dfrac{2}{3}$ suy ra N là trọng tâm $\triangle ABD$. Từ đó ta có $\dfrac{IN}{ID} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{IG}{IS} \Rightarrow GN \parallel SD$.



② Xác định giao điểm $L = SB \cap (\alpha)$.
Ta thấy (α) là (KIH) với H, K lần lượt là trung điểm CD, SC. Ta thấy $SB \subset (SBC)$, $K = (\alpha) \cap (SBC)$ và $IH \parallel BC$ nên giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng d đi qua K song song với BC. Khi đó $L = d \cap SB$ suy ra L là trung điểm SB.
Ta thấy

$$(\alpha) \cap (ABCD) = HI,\ (\alpha) \cap (SBC) = KL,\ (\alpha) \cap (SAB) = LI.$$

Vậy thiết diện của (α) với hình chóp là hình thang $LKHI$.

□

BÀI 581. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và M là điểm thuộc cạnh CD, (M khác C và D).

① Tìm giao tuyến của (KAM) và (SBC), (SBC) và (SAD).

② Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?

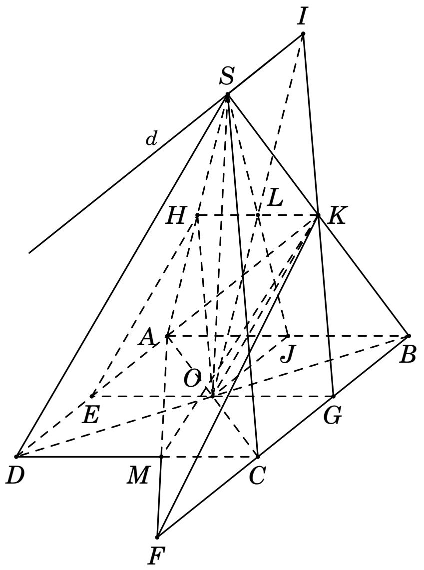
③ Gọi L là trung điểm đoạn HK. Tìm $I = OL \cap (SBC)$. Chứng minh $SI \parallel BC$.

Lời giải.

① Tìm giao tuyến của (KAM) và (SBC), (SBC) và (SAD).

— Tìm giao tuyến của (KAM) và (SBC).
Ta có $K \in (KAM) \cap (SBC)$. Trong $(ABCD)$ gọi $F = AM \cap BC$, nên $F \in (KAM) \cap (SBC)$. Suy ra $KF = (KAM) \cap (SBC)$.

— Tìm giao tuyến của (SBC) và (SAD).
Ta thấy $S \in (SBC) \cap (SAD)$, mà $BC \parallel AD$ nên giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S song song với AD và BC.



② Tìm thiết diện tạo bởi (HKO) với hình chóp $S.ABCD$. Thiết diện là hình gì?
Ta thấy (HKO) và $(ABCD)$ chứa có chung điểm O và lần lượt chứa HK và AB song song với nhau nên giao tuyến là đường thẳng a đi qua O song song với AB cắt AD và BC lần lượt tại E và G. Ta thấy $(HKO) \cap (ABCD) = EG$, $(HKO) \cap (SAD) = HE$, $(HKO) \cap (SAB) = HK, (HKO) \cap (SBC) = KG$. Vậy thiết diện của (HKO) và hình chóp là hình thang $HKGE$ do $HK \parallel AB$ mà $AB \parallel EG$ nên $HK \parallel EG$.

③ Tìm $I = OL \cap (SBC)$. Chứng minh $SI \parallel BC$.
Trong $(HKGE)$ gọi $I = OL \cap GK$
mà $GK \subset (SBC) \Rightarrow I \in OL \cap (SBC)$.
Trong (SAB) gọi $J = SL \cap AB$ khi đó L là trung điểm của AB do $HK \parallel AB$.
Xét (SJO) và (SBC) ta thấy có S là điểm chung và $OJ \parallel BC$ nên giao tuyến là đường thẳng đi d đi qua S và song song với BC. Mặt khác $I \in (SJO) \cap (SBC)$ nên $SI \equiv d$. Vậy $SI \parallel BC$.

□

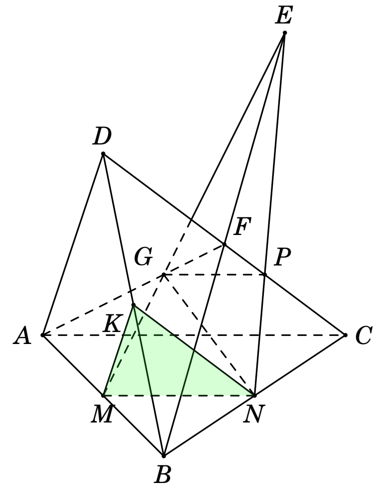
BÀI 582. Cho tứ diện $ABCD$, có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC và G là trọng tâm của tam giác ACD.

① Tìm giao điểm E của MG và (BCD).

② Tìm $d = (MNG) \cap (BCD)$. Giả sử $d \cap CD = P$. Chứng minh $GP \parallel (ABC)$.

③ Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với AD. Tìm thiết diện của (α) với tứ diện.

Lời giải.



① Tìm giao điểm E của MG và (BCD).
Ta thấy (ABF) chứa MG với F là trung điểm của DC và $BF = (ABF) \cap (BCD)$. Gọi $E = MG \cap BF \Rightarrow E = MG \cap (BCD)$.

② Tìm $d = (MNG) \cap (BCD)$. Giả sử $d \cap CD = P$. Chứng minh $GP \parallel (ABC)$.
Ta có $N \in (BCD) \cap (MNG)$ và $E \in MG \subset (MNG)$; $E \in BF \subset (BCD)$. Suy ra $d \equiv NE = (MNG) \cap (BCD)$.
Ta thấy

$$(ABC) \cap (EMN) = MN,\ (DAC) \cap (ABC) = AC,\ (EMN) \cap (DAC) = GP$$

mà $MN \parallel AC$ nên $GP \parallel AC \Rightarrow GP \parallel (ABC)$.

③ Gọi K là trung điểm của BD, do (α) chứa MN và song song với AD nên (α) đi qua K. Ta thấy

$$(\alpha) \cap (ABD) = NK,\ (\alpha) \cap (ABC),\ (\alpha) \cap (BCD) = KN.$$

Vậy thiết diện của (α) và hình chóp là tam giác MNK.

□

BÀI 583. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA thỏa mãn $3MA = 2MS$. Hai điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

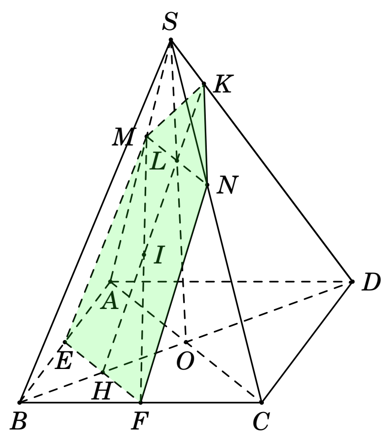
① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).

② Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD. Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.

③ Tìm giao điểm I của MF với (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{IM}{IF}$.

④ Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.



① Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC).
Ta thấy $M \in (MEF) \cap (SAC)$ và $EF \parallel AC$ với $EF \subset (MEF)$, $AC \parallel (SAC)$ nên giao tuyến của (MEF) và (SAC) là đường thẳng d đi qua M song song với AC.

② Xác định giao điểm K của mặt phẳng (MEF) với cạnh SD. Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.
Ta thấy $SD \subset (SBD)$, gọi $H = EF \cap BD$, $O = AC \cap BD$, $L = d \cap SO$. Khi đó $HL = (MEF) \cap (SBD)$, gọi $K = HL \cap SD \Rightarrow K = SD \cap (MEF)$.
Do $ML \parallel AC$ nên $\dfrac{MA}{MS} = \dfrac{LO}{LS} = \dfrac{3}{2}$.
Xét tam giác SOD trong (SBD) vì K, L, H thẳng hàng nên theo định lí Menelaus ta có $\dfrac{SK}{KD} \cdot \dfrac{HD}{HO} \cdot \dfrac{LO}{LS} = 1 \Rightarrow \dfrac{SK}{KD} \cdot 3 \cdot \dfrac{3}{2} = 1 \Rightarrow \dfrac{SK}{KD} = \dfrac{2}{9}$.

③ Tìm giao điểm I của MF với (SBD). Tính tỉ số $\dfrac{IM}{IF}$.
Trong (MEF) gọi $I = HL \cap MF$ mà $HL \subset (SBD) \Rightarrow I = MF \cap (SBD)$.
Do $ML \parallel AC$ và $EF \parallel AC$ nên $ML \parallel EF$. Từ đó ta suy ra $\dfrac{IM}{IF} = \dfrac{ML}{HF} = \dfrac{HL}{AO} : \dfrac{HF}{AO} = \dfrac{2}{5} : \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5}$.

④ Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MEF) với hình chóp $S.ABCD$.
Gọi $N = ML \cap SC$. Ta thấy $(MEF) \cap (SAB) = EM$, $(MEF) \cap (ABCD) = EF$, $(MEF) \cap (SAD) = MK$, $(MEF) \cap (SCD) = KN$, $(MEF) \cap (SBC) = NF$. Vậy thiết diện của (MEF) với hình chóp là ngũ giác $EMKNF$.

□

BÀI 584. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N là trung điểm của SA, SD.

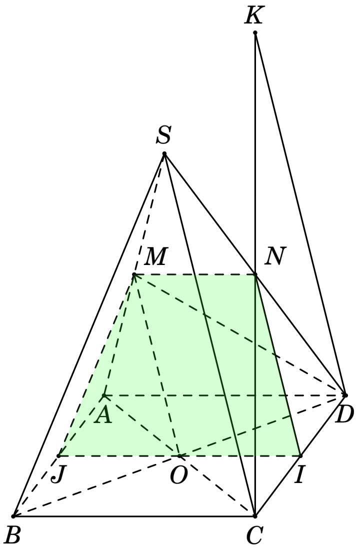
① Xác định giao điểm của NC và (OMD).

② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC.

Lời giải.

① Xác định giao điểm của NC và (OMD).
Ta thấy $CN \subset (SCD)$, $OM \parallel SC$ mà $OM \subset (OMD)$, $SC \subset (SCD)$ và $O \in (OMD) \cap (SCD)$ nên giao tuyến của (OMD) và (SCD) là đường thẳng d đi qua D và song song với OM, SC. Gọi $K = d \cap NC \Rightarrow K = NC \cap (OMD)$.

② Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC.
Ta thấy $(P) \equiv (OMN)$.
Xác định giao tuyến của (OMN) và (SCD).
Ta thấy $N \in (OMN) \cap (SCD)$ và $OM \parallel SC$ nên giao tuyến của (OMN) và (SCD) là đường thẳng đi qua N song song với SC cắt CD tại I là trung điểm CD.
Gọi $J = OI \cap AB$. Ta thấy $(OMN) \cap (SAB) = JM$, $(OMN) \cap (SAD) = MN$, $(OMN) \cap (SCD) = IN$, $(OMN) \cap (ABCD)$. Vậy thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp là hình thang $MNIJ$.



□

BÀI 585. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC, (P) là mặt phẳng qua AM và song song với BD.

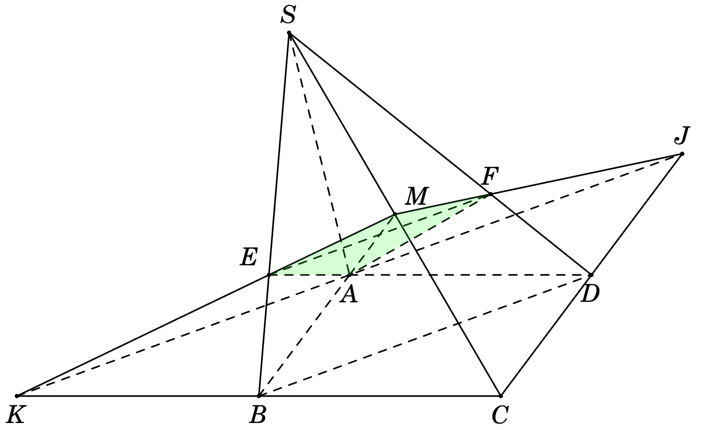
① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).

② Gọi E, F lần lượt là giao điểm của (P) với cạnh SB và SD. Hãy tìm tỉ số diện tích của tam giác SME với diện tích tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và diện tích tam giác SCD.

③ Gọi K là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.

Lời giải.

① Xác định thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (P).
Trong $(ABCD)$ qua A kẻ đường thẳng song song BD cắt BC và CD lần lượt tại K và J. Khi đó $(P) \equiv (MKJ)$. Gọi $E = MK \cap SB$, $F = CD \cap SD$. Khi đó, ta thấy $(P) \cap (SAB) = EA$, $(P) \cap (SBC) = EM$, $(P) \cap (SCD) = MF$, $(P) \cap (SAD) = AF$. Vậy thiết diện của (P) với hình chóp là tứ giác $AEMF$.



② Tính tỉ số diện tích của tam giác SME với diện tích tam giác SBC và tỉ số diện tích của tam giác SMF và diện tích tam giác SCD.
Ta có $\dfrac{S_{\triangle SME}}{S_{\triangle SBC}} = \dfrac{SE}{SB} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$. (Vì E là giao điểm của hai đường trung tuyến KM và SB nên E là trọng tâm của tam giác SCK.)
Tương tự ta có $\dfrac{S_{\triangle SMF}}{S_{\triangle SCD}} = \dfrac{SF}{SD} \cdot \dfrac{SM}{SC} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$. (Vì F là giao điểm của hai đường trung tuyến JM và SD nên F là trọng tâm của tam giác SCJ.)

③ Chứng minh ba điểm K, A, J nằm trên một đường thẳng song song với EF và tìm tỉ số $\dfrac{EF}{KJ}$.
Ta có

$$\frac{SE}{SB} = \frac{2}{3} = \frac{SF}{SD} \Rightarrow EF \parallel KJ \Rightarrow \frac{EF}{KJ} = \frac{ME}{MK} = \frac{1}{3}.$$

□

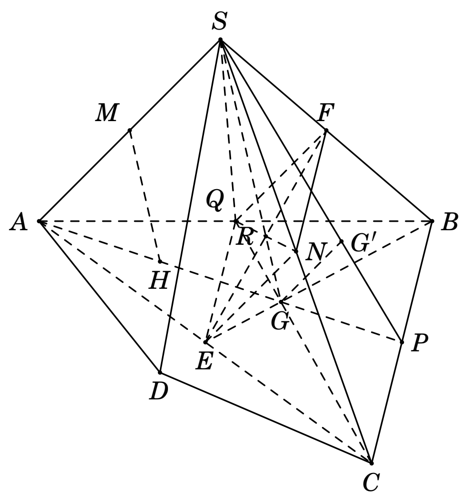
BÀI 586. Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$. Gọi M, N, P, Q, R, H lần lượt là trung điểm của SA, SC, CB, BA, QN, AG.

① Chứng minh rằng S, R, G thẳng hàng và $SG = 2MH = 4RG$.

② Gọi G' là trọng tâm $\triangle SBC$. Chứng minh rằng $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.

Lời giải.

① Chứng minh rằng S, R, G thẳng hàng và $SG = 2MH = 4RG$.
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và SB khi đó ta có $QENF$ là hình bình hành (do $EQ = NF = \dfrac{1}{2}BC$, $EQ \parallel BC \parallel NF$) nên R là trung điểm của EF. Ta thấy $S \in (SQC) \cap (SEB)$, $G \in (SQC) \cap (SEB)$, $R \in (SQC) \cap (SEB)$ suy ra S, R, G thẳng hàng.
Vì M, H lần lượt là trung điểm của SA, AG nên $SG = 2MH$.
Xét $\triangle SGB$ vì E, R, F thẳng hàng nên theo định lí Menelaus ta có $\dfrac{RS}{RG} \cdot \dfrac{EG}{EB} \cdot \dfrac{FB}{FS} = 1 \Rightarrow \dfrac{RS}{RG} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot 1 = 1 \Rightarrow \dfrac{RS}{RG} = 3 \Rightarrow SG = 4RG$.



② Chứng minh rằng $GG' \parallel (SAB)$ và $GG' \parallel (SAC)$.
Xét $\triangle SAP$ có $\dfrac{PG'}{PS} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{PG}{PA} \Rightarrow GG' \parallel SA$ mà $SA \subset (SAB)$ và $SA \subset (SAC)$ nên suy ra $GG' \parallel (SAB)$, $GG' \parallel (SAC)$.

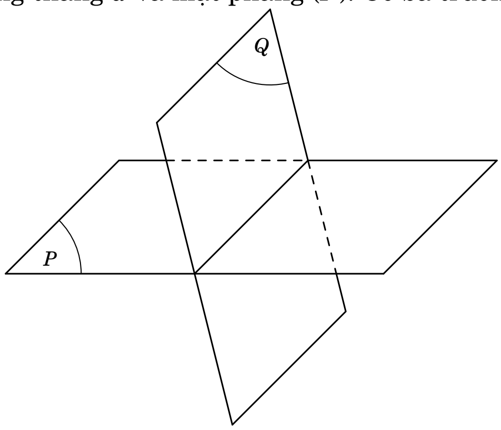
□

BÀI 3. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

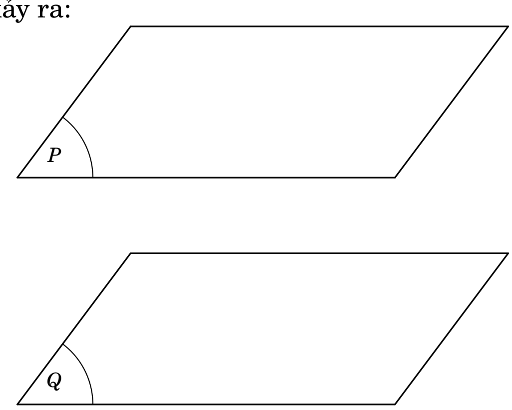
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG PHÂN BIỆT

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P). Có ba trường hợp xảy ra:



(P), (Q) có 1 điểm chung: $(P)\cap(Q)=a$

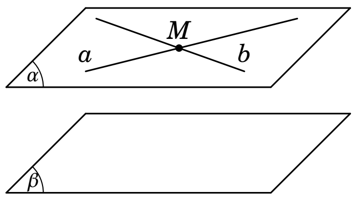


(P), (Q) không có điểm chung: $(P)\parallel(Q)$

Định nghĩa 1. Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

2 CÁC ĐỊNH LÍ

Định lí 1. *Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).*

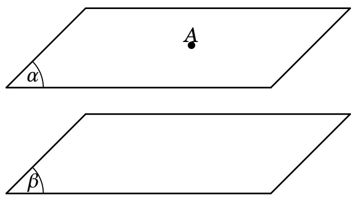


!

— Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.

— Muốn chứng minh đường thẳng $a\parallel(Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P)\parallel(Q)$.

Định lí 2. *Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.*

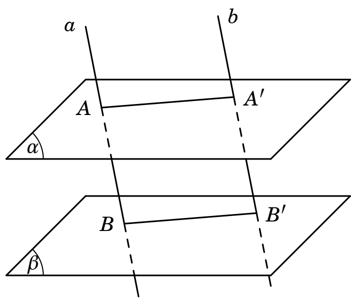


Hệ quả 1. — Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α). Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha)\parallel(\beta)\Rightarrow d\parallel(\alpha)$.

— Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

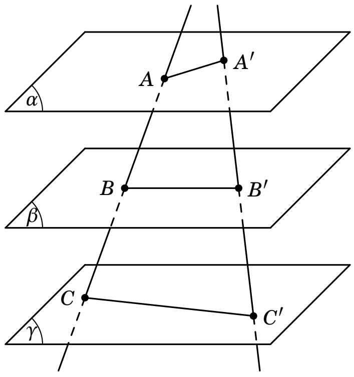
— Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Định lí 3. *Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.*



Hệ quả 2. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

Định lí 4. ***Định lí Thales***: *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*



3 VÍ DỤ

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

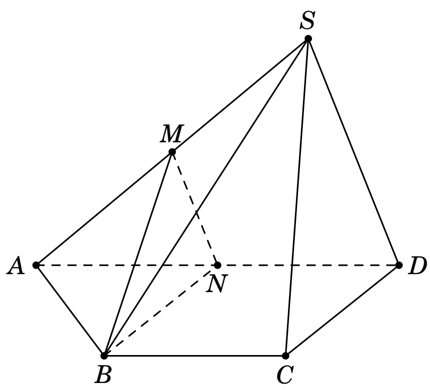
Lời giải.

Vì N là trung điểm của AD nên $NA = ND = \dfrac{AD}{2} = BC$.

Tứ giác $NBCD$ có $ND = BC$ và $ND \parallel BC$ nên $NBCD$ là hình bình hành, suy ra $NB \parallel CD \Rightarrow NB \parallel (SCD)$.

Tam giác SAD có M, N lần lượt là trung điểm của AS và AD nên MN là đường trung bình của $\triangle ADS$, suy ra $MN \parallel SD \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

Từ $\begin{cases} MN \parallel (SCD),\ MN \subset (BMN) \\ BN \parallel (SCD),\ BN \subset (BMN) \end{cases} \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD)$.



□

B BÀI TẬP ÁP DỤNG

BÀI 587. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SD và K, I là trung điểm của BC, OM.

① Chứng minh $(OMN) \parallel (SCD)$.

② Chứng minh $(PMN) \parallel (ABCD)$.

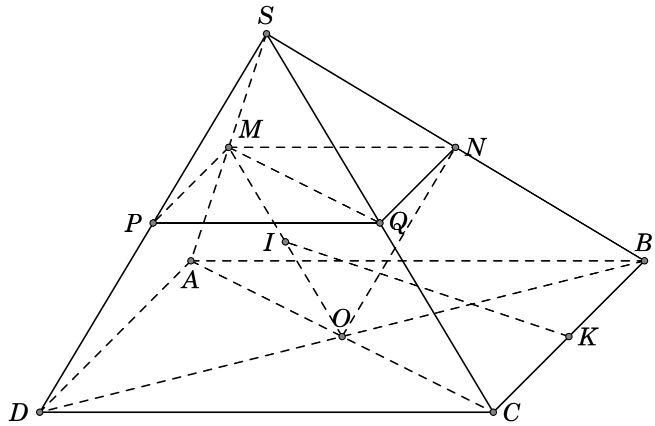
③ Chứng minh $KI \parallel (SCD)$.

Lời giải.

① Ta có O, M lần lượt là trung điểm của AC và SA nên $OM \parallel SC$, suy ra $OM \parallel (SCD)$. Tương tự $ON \parallel (SCD)$.
Khi đó $(OMN) \parallel (SCD)$.

② Ta có N, M lần lượt là trung điểm của SB và SA nên $MN \parallel AB$, suy ra $MN \parallel (ABCD)$. Tương tự $PM \parallel (ABCD)$. Vậy $(PMN) \parallel (ABCD)$.

③ Ta có O, K lần lượt là trung điểm của AC và BC nên $OK \parallel AB$, suy ra $OK \parallel MN$. Khi đó 5 điểm M, N, K, O, I đồng phẳng.
Từ câu trên $(OMN) \parallel (SCD)$, thì $KI \parallel (SCD)$.



□

BÀI 588. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD

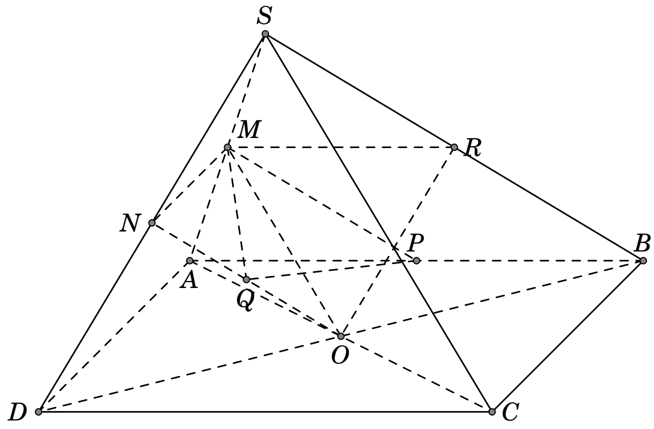
① Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$.

② Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh $PQ \parallel (SBC)$ và $(ROM) \parallel (SCD)$.

Lời giải.

① Ta có O, M lần lượt là trung điểm của AC và SA nên $OM \parallel SC$, suy ra $OM \parallel (SBC)$. Tương tự $ON \parallel (SBC)$.
Khi đó $(OMN) \parallel (SBC)$.

② Ta có O, P lần lượt là trung điểm của AC và BA nên $OP \parallel CB$, suy ra $OP \parallel (SBC)$ hay $P \in (OMN)$.
Mặt khác $Q \in (OMN)$.
Theo trên $(OMN) \parallel (SBC)$ thì $PQ \parallel (SBC)$.
Ta có R, O lần lượt là trung điểm của SB và BD nên $RO \parallel SD$, suy ra $RO \parallel (SCD)$.
Theo trên $OM \parallel SC$ nên $OM \parallel (SCD)$.
Vậy $(ROM) \parallel (SCD)$.



□

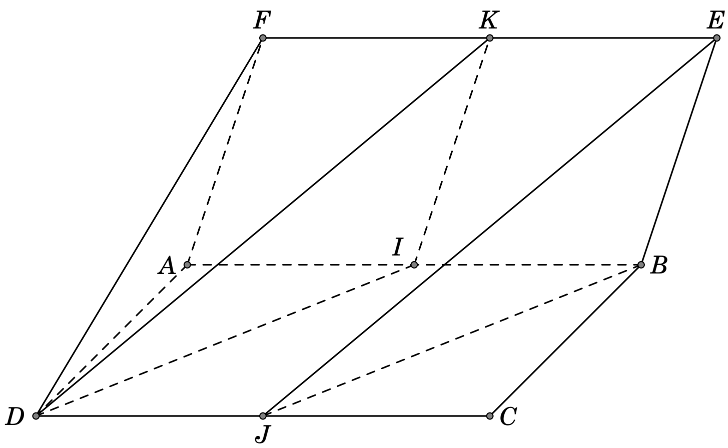
BÀI 589. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF. Chứng minh

① $(ADF) \parallel (BCE)$. ② $(DIK) \parallel (JBE)$.

Lời giải.

① Ta có $AD \parallel BC$, suy ra $AD \parallel (BCE)$. Tương tự $AF \parallel (BCE)$.
Khi đó $(ADF) \parallel (BCE)$.

② Trong hình bình hành $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $BI = DJ$. Do đó $IBJD$ là hình bình hành. Suy ra $DI \parallel BJ$ nên $DI \parallel (JBE)$.
Trong hình bình hành $ABEF$ có I, K lần lượt là trung điểm của AB và EF nên $IK \parallel EF$, suy ra $IK \parallel (JBE)$.
Vậy $(DIK) \parallel (JBE)$.

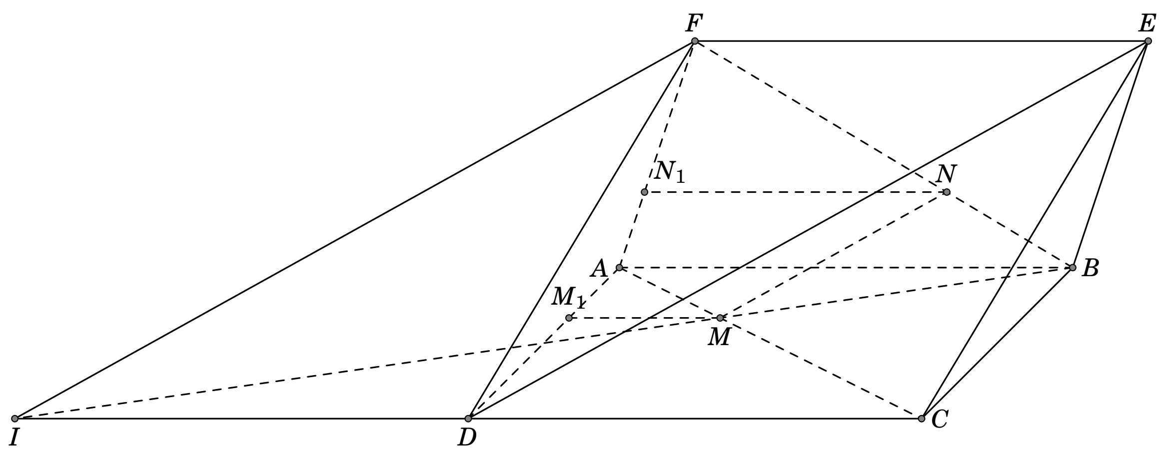


□

BÀI 590. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF lấy các điểm M, N sao cho $MC = 2AM$, $NF = 2BN$. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1. Chứng minh rằng

① $MN \parallel DE$. ② $M_1N_1 \parallel (DEF)$. ③ $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$.

Lời giải.



① Gọi I là giao điểm của BM với CD. Khi đó ta có $\dfrac{BM}{MI} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{2}$. Mặt khác $\dfrac{BN}{NF} = \dfrac{1}{2}$.
Khi đó $MN \parallel IF$.
Theo trên $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{AB}{CI} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $DI = CD = AB$.
Lại có $DI \parallel EF$. Do đó $DEFI$ là hình bình hành, hay $FI \parallel DE$.
Vậy $MN \parallel DE$.

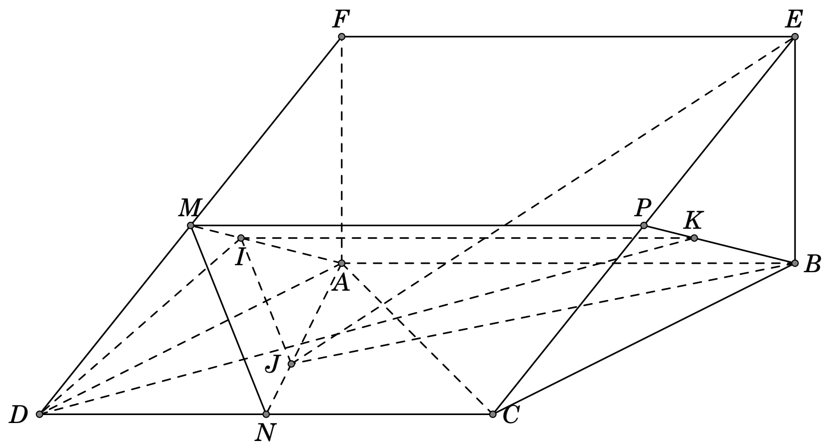
② Theo giả thiết thì $MM_1 \parallel NN_1$ (vì cùng song song với AB) nên M, M_1, N,N_1 đồng phẳng.
Lại có $MM_1 \parallel (DEF)$ (vì $MM_1 \parallel CD \parallel AB$) và theo câu trên thì $MN \parallel DE$ nên $MN \parallel (DEF)$.
Vậy $(MM_1N_1N) \parallel (DEF)$, suy ra $M_1N_1 \parallel (DEF)$.

③ Đã chứng minh ở câu 2.

□

BÀI 591. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trên hai mặt phẳng phân biệt. Gọi I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (CDFE)$.

Lời giải.



Ta có $CD \parallel EF \parallel AB$ nên CD và EF đồng phẳng.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DF, CD. Khi đó, vì I, J lần lượt là trọng tâm tam giác ADF, ADC nên

$$\frac{AI}{AM} = \frac{2}{3} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN \Rightarrow IJ \parallel (CDEF).$$

Mặt khác, gọi P là trung điểm CE. Khi đó $\dfrac{BK}{BP} = \dfrac{2}{3}$.
Ta có $ABCD$, $ABEF$ là hình bình hành nên $CDFE$ cũng là hình bình hành. Khi đó với M, P là trung điểm của hai cạnh đối của hình bình hành $CDFE$ nên $MP \parallel CD \parallel AB$ suy ra $IK \parallel MP \parallel AB$. Do đó $ABPK$ cũng là hình bình hành. Ta có $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{BK}{BP}$. Suy ra $IK \parallel MN$. Khi đó $IK \parallel (CDFE)$.
Vậy $(IJK) \parallel (CDFE)$.

□

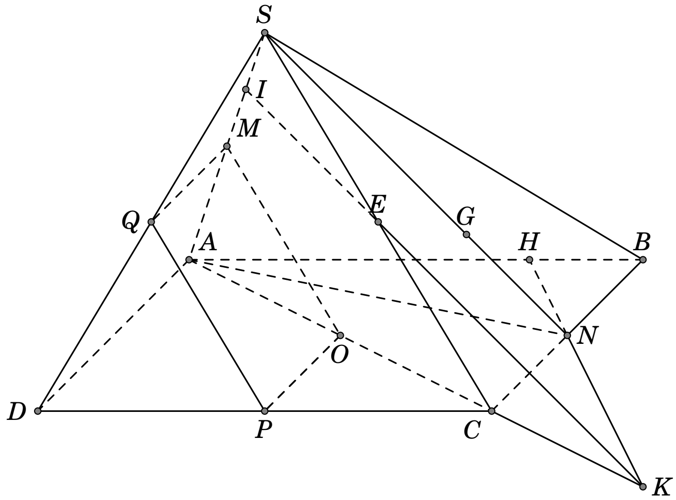
BÀI 592. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, BC, CD.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MOP).

② Gọi E là trung điểm của SC và I là điểm trên cạnh SA thỏa $AI = 3IS$. Tìm $K = IE \cap (ABC)$ và $H = AB \cap (EIN)$.
Tính tỉ số $\dfrac{AH}{AB}$.

③ Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Tìm thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG).

Lời giải.



① Ta có O, P lần lượt là trung điểm của AC và CD nên $OP \parallel AD$, suy ra $OP \parallel (SAD)$.
Khi đó giao tuyến của (SAD) và (OMP) là đường thẳng qua M và song song với AD và cắt SD tại trung điểm Q của SD.

② Xét mặt phẳng (SAC) có $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{2} = \dfrac{SE}{SC}$ suy ra IE cắt AC tại K.
Khi đó $K = IE \cap (ABC)$.
Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SAC với ba điểm K, E, I thẳng hàng có

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{IA}{IS} \cdot \frac{ES}{EC} = 1 \Leftrightarrow \frac{KC}{KA} \cdot \frac{3}{1} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{KC}{KA} = \frac{1}{3}.$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác ABC với ba điểm K, N, H thẳng hàng có

$$\frac{KC}{KA} \cdot \frac{HA}{HB} \cdot \frac{NB}{NC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{HA}{HB} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{HA}{HB} = 3.$$

Khi đó $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{3}{4}$.

③ Ta thấy mặt phẳng (IMG) cũng chính là mặt phẳng (SAG).
Vì G là trọng tâm tam giác SBC và N là trung điểm BC nên $(IMG) \cap (SBC) = SN$.
Vậy thiết diện hình chóp $S.ABC$ bị cắt bởi (IMG) là tam giác SAN.

□

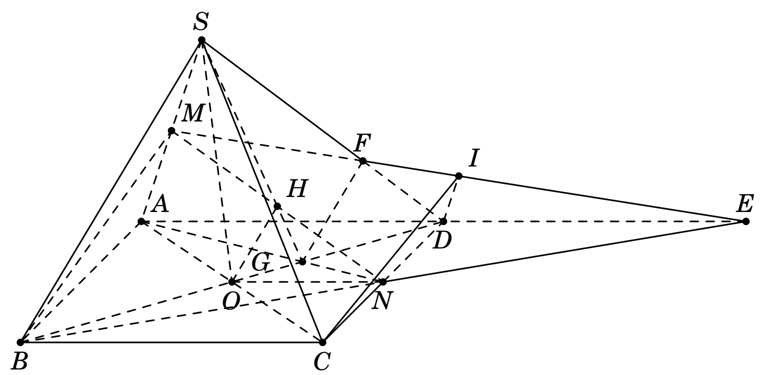
BÀI 593. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Gọi E là giao điểm của AD và (BMN), I là trung điểm của ME và $G = AN \cap BD$.

① Tìm điểm E và giao điểm F của SD với mặt phẳng (BMN). Chứng minh $FS = 2FD$.

② Chứng minh $FG \parallel (SAB)$ và $(CDI) \parallel (SAB)$.

③ Gọi H là giao điểm của MN và SG. Chứng minh $OH \parallel GF$.

Lời giải.



① Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kéo dài BN cắt đường thẳng AD tại E. Khi đó E là giao điểm của (BMN) với AD.
Gọi F là giao điểm của ME với SD. Khi đó F là giao điểm của SD với (BMN).
Vì $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{DN}{AB} = \dfrac{1}{2}$ nên D là trung điểm của đoạn AE. Từ đó suy ra SD và EM là các đường trung tuyến của tam giác SAE. Suy ra F là trọng tâm tam giác SAE. Vậy $FS = 2FD$.

② Tam giác DGN và tam giác BGA đồng dạng nên $\dfrac{GD}{GB} = \dfrac{DN}{BA} = \dfrac{1}{2}$.
Từ đó suy ra $\dfrac{GD}{GB} = \dfrac{FD}{FS}$. Nên $FG \parallel SB \Rightarrow FG \parallel (SAB)$.
Ta có $CD \parallel AB$ và $DI \parallel MA$. Từ đó suy ra $(CDI) \parallel (SAB)$.

③ Ta có G là trọng tâm tam giác ACD. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAG với bộ ba điểm thẳng hàng M,H,N, ta có

$$\frac{NG}{NA} \cdot \frac{MA}{MS} \cdot \frac{HS}{HG} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{HS}{HG} = 1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HG} = 3.$$

Ta cũng có $\dfrac{OG}{OB} = \dfrac{OG}{OD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow OH \parallel SB$.
Theo chứng minh trên ta cũng có $GF \parallel SB$. Vậy $OH \parallel GF$.

□

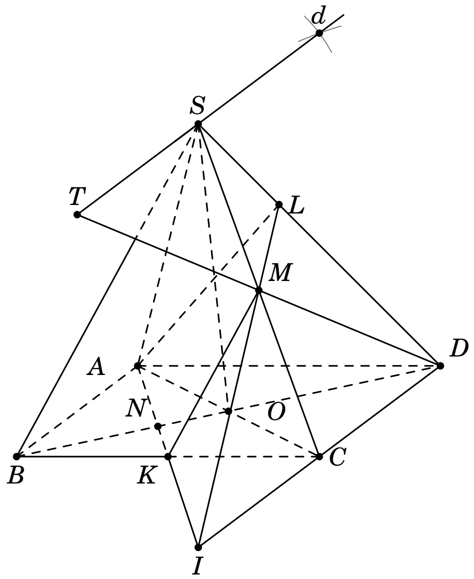
BÀI 594. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC, N là điểm trên đường chéo BD sao cho $BD = 3BN$.

① Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SCD) và (SAB) và tìm $T = DM \cap (SAB)$. Tính $\dfrac{TM}{TD}$. **ĐS:** $\dfrac{TM}{TD} = \dfrac{1}{2}$

② Gọi $K = AN \cap BC$. Chứng minh rằng $MK \parallel (SBD)$.

③ Gọi $I = AN \cap DC$, $L = IM \cap SD$. Tính tỉ số $\dfrac{LS}{LD}$ và $\dfrac{S_{IKM}}{S_{IAL}}$. **ĐS:** $\dfrac{LS}{LD} = \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{S_{IKM}}{S_{IAL}} = \dfrac{3}{8}$

Lời giải.



① — Mặt phẳng (SAB) và (SCD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AB và CD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d qua S và $d \parallel AB \parallel CD$.

— Trong mặt phẳng (SCD) kéo dài DM cắt d tại T. Khi đó $T \in d \Rightarrow T \in (SAB)$. Vậy $T = DM \cap (SAB)$.

— Do $CD \parallel ST$ nên hai tam giác MCD và MST đồng dạng. Do đó $\dfrac{MT}{MD} = \dfrac{MS}{MC} = 1$. Vậy $\dfrac{TM}{TD} = \dfrac{1}{2}$.

② Vì $\dfrac{BN}{BD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{BN}{BO} = \dfrac{2}{3}$. Do đó N là trọng tâm tam giác ABC.
Suy ra K là trung điểm của BC. Dẫn đến MK là đường trung bình của tam giác SBC.
Nên $MK \parallel SB \Rightarrow MK \parallel (SBD)$.

③ — Tam giác IKC và tam giác IAD đồng dạng nên $\dfrac{IC}{ID} = \dfrac{KC}{AD} = \dfrac{1}{2}$.
Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác SCD với bộ điểm thẳng hàng I, M, L ta có

$$\frac{LS}{LD} \cdot \frac{ID}{IC} \cdot \frac{MC}{MS} = 1 \Leftrightarrow \frac{LS}{LD} \cdot 2 \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{LS}{LD} = \frac{1}{2}.$$

— Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IDL với ba điểm thẳng hàng S,M,C ta có

$$\frac{SD}{SL} \cdot \frac{ML}{MI} \cdot \frac{CI}{CD} = 1 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{ML}{MI} \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow \frac{ML}{MI} = \frac{1}{3}.$$

Từ đó suy ra $IM = \dfrac{3}{4} IL$.
Gọi h, k là lượt là độ dài đường cao các tam giác IKM và IAL kẻ từ M và L. Dễ thấy rằng $\dfrac{h}{k} = \dfrac{IM}{IL} = \dfrac{3}{4}$.
Vậy

$$\frac{S_{IKM}}{S_{IAL}} = \frac{\frac{1}{2} h \cdot IK}{\frac{1}{2} k \cdot IA} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

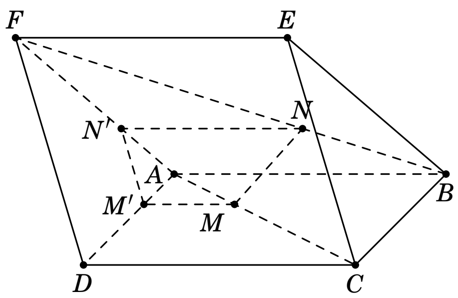
□

BÀI 595. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'.

① Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.

② Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ AF \parallel BE \\ AD \cap AF = A \end{cases} \Rightarrow (ADE) \parallel (BCF)$.

② Ta có

$$MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AM'}{AD} \quad (1)$$

Ta cũng có

$$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{BN}{BF} = \frac{AN'}{AF} \quad (2)$$

Mà từ giả thiết ta có

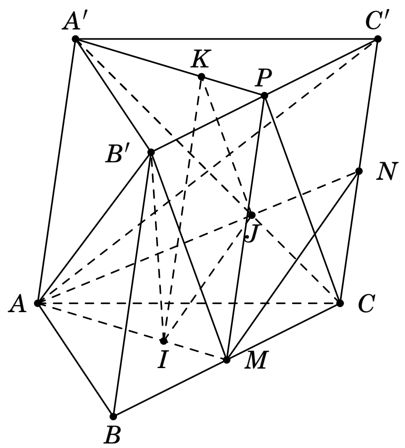
$$\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra $M'N' \parallel DF$. Ta cũng có $MM' \parallel NN' \parallel DC \parallel FE$.
Vậy $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

□

BÀI 596. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

Lời giải.



① Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CC' và $B'C'$. Theo tính chất của trọng tâm tam giác ta có

$$\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} \Rightarrow IJ \parallel MN.$$

Tứ giác $AMPA'$ là hình bình hành và có $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AK}{AP} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IK \parallel MP$.
Vậy $(IJK) \parallel (BCC'B')$.

② Chú ý rằng mặt phẳng (AIB') chính là mặt phẳng (AMB'). Mặt phẳng $(A'JK)$ chính là mặt phẳng $(A'CP)$.
Vì $AM \parallel A'P$, $MB' \parallel CP$ (do tứ giác $B'MCP$ là hình bình hành). Vậy ta có $(A'JK) \parallel (AIB')$.

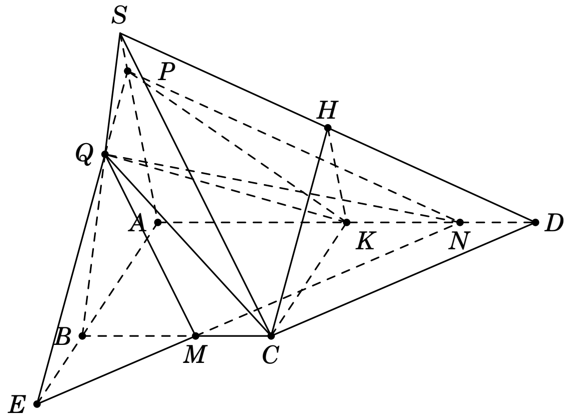
□

BÀI 597. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD và $AD = 2BC$, $M \in BC$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M, $(P) \parallel CD$,$(P) \parallel SC$, (P) cắt AD, SA ,SB lần lượt tại N, P, Q.

① Chứng minh rằng $NQ \parallel (SCD)$ và $NP \parallel SD$.

② Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SD và AD. Chứng minh rằng $(CHK) \parallel (SAB)$.

Lời giải.



① - Từ M ta kẻ đường thẳng song song với CD cắt AD tại N và cắt AB tại E.
Từ M kẻ đường thẳng song song với SC cắt SB tại Q. Kéo dài EQ cắt SA tại P.
Theo cách dựng ta suy ra $(EPN) \parallel (SCD)$ và $NQ \subset (EPN)$. Vậy $NQ \parallel (SCD)$.
- Do $(P) \parallel (SCD)$ và hai mặt phẳng này cùng cắt (SAD) theo các giao tuyến là NP và SD. Do đó ta suy ra $NP \parallel SD$.

② Ta có HK là đường trung bình của tam giác SAD nên $HK \parallel SA$ (1)
Vì K là trung điểm của AD nên $AK = BC$. Do đó tứ giác $ABCK$ là hình bình hành. Suy ra $CK \parallel AB$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(CKH) \parallel (SAB)$.

□

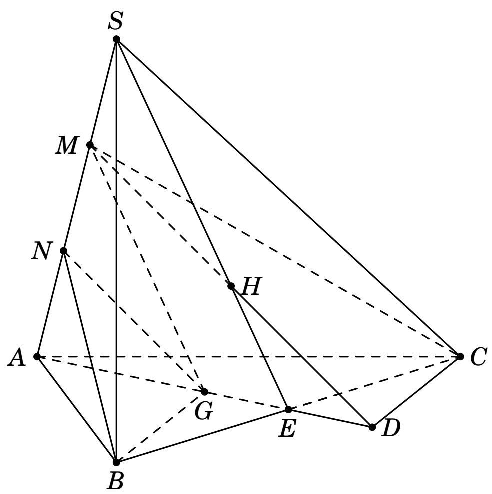
BÀI 598. Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

① Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.

② Gọi D là điểm đối xứng với A qua G. Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.

③ Gọi $H = DM \cap (SBC)$. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác SBC.

Lời giải.



① Gọi E là trung điểm của BC. Khi đó ta có $\dfrac{AG}{AE} = \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GM \parallel SE$. Vậy $GM \parallel (SBC)$.

② Từ giả thiết ta suy ra G,N lần lượt là trung điểm của AD và AM. Do đó $NG \parallel MD$ (1) (1)
Từ giác $BDCG$ có E là trung điểm của hai đường chéo nên đó là hình bình hành. Suy ra $BG \parallel CD$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra $(MCD) \parallel (NBG)$.

③ Ta có AE là đường trung tuyến của tam giác SBC (3)
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SAE với ba điểm thẳng hàng M,H,D ta có

$$\frac{HS}{HE}\cdot\cdot\frac{DE}{DA}\cdot\frac{MA}{MS}=1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HE}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2=1 \Leftrightarrow \frac{HS}{HE}=2 \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra H là trọng tâm tam giác SBC.

□

BÀI 4. BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG 2

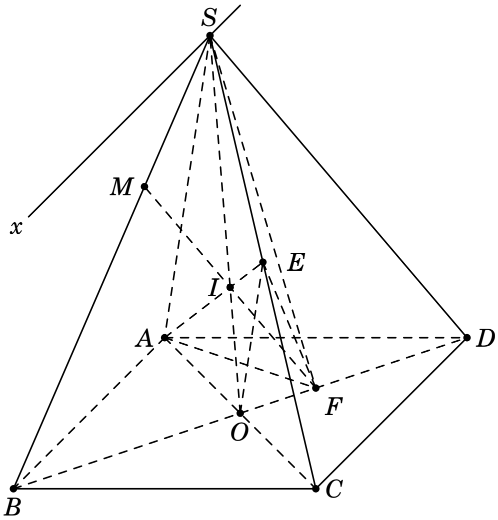
BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O.

① Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

② Gọi E là trung điểm của SC. Chứng minh $OE \parallel (SAB)$.

③ Gọi F là điểm trên đoạn BD sao cho $3BF = 2BD$. Tìm giao điểm M của SB và (AEF). Tính tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$.

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} AB \parallel (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB.$

② Ta có $\begin{cases} OE \parallel SA \quad \text{(đường trung bình)} \\ SA \subset (SAB) \\ OE \not\subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow OE \parallel (SAB).$

③ Trong mặt phẳng (SAC) có $I = SO \cap AE$.

Suy ra $\begin{cases} I \in (SBF) \\ I \in (AEF) \end{cases}$.

$\begin{cases} SB \subset (SBF) \\ FI = (SBF) \cap (AEF) \Rightarrow M \in SB \cap (AEF). \\ M = FI \cap SB \end{cases}$

Ta có

$$\begin{aligned} & 3BF = 2BD \\ \Rightarrow\ & 3(OB + OF) = 4OD \\ \Rightarrow\ & 3OD + 3OF = 4OD \\ \Rightarrow\ & 3OF = OD \\ \Rightarrow\ & \frac{OF}{OD} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Mặt khác $\triangle IOE \backsim \triangle ISM$ (g.g), suy ra $\dfrac{OE}{SM} = \dfrac{OI}{SI} = \dfrac{1}{2}$ suy ra

$$\frac{OI}{OS} = \frac{1}{3} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $FI \parallel SD$, suy ra $MF \parallel AD$.

Mà $FD = \dfrac{2}{3}OD = \dfrac{1}{3}BD$, suy ra $SM = \dfrac{1}{3}SB$.

Vậy $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{3}$.

□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm tam giác SAB và SAD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

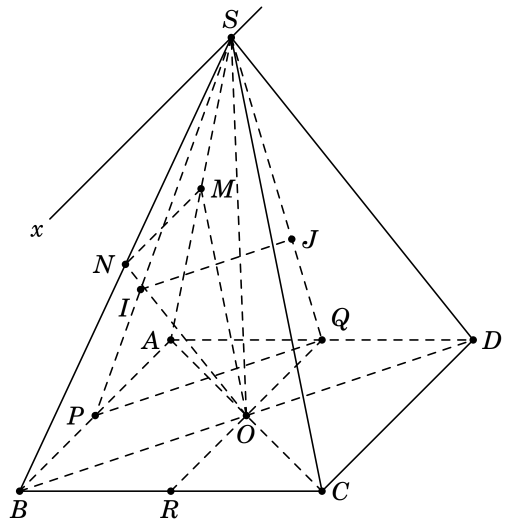
① Chứng minh $IJ \parallel (ABCD)$.

② Chứng minh $(OMN) \parallel (SDC)$.

③ Tìm giao tuyến của (SAB) và (SDC).

④ Tìm giao điểm của BC và (OMN).

Lời giải.



① Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và AD, ta có:

$$\frac{SI}{SP} = \frac{SJ}{SQ} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra $IJ \parallel PQ$.

$$\begin{cases} IJ \parallel PQ \\ PQ \subset (ABCD) \Rightarrow IJ \parallel (ABCD). \\ IJ \not\subset (SBCD) \end{cases}$$

② Xét hai mặt phẳng (OMN) và (SCD) có:

$$\begin{cases} MN \parallel CD \quad \text{(cùng song song AB)} \\ MO \parallel SC \\ M = MN \cap MO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel (SCD) \\ MO \parallel (SCD) \\ M = MN \cap MO \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SCD).$$

③ Ta có $\begin{cases} AB \parallel (SCD) \\ AB \subset (SAB) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB.$

④ Gọi R là trung điểm BC, dễ dàng chứng minh $MN \parallel RQ$.

Ta có $\begin{cases} BC \subset (ABCD) \\ (OMN) \cap (ABCD) = RQ \\ R = BC \cap RQ \end{cases} \Rightarrow R = BC \cap (OMN).$

□

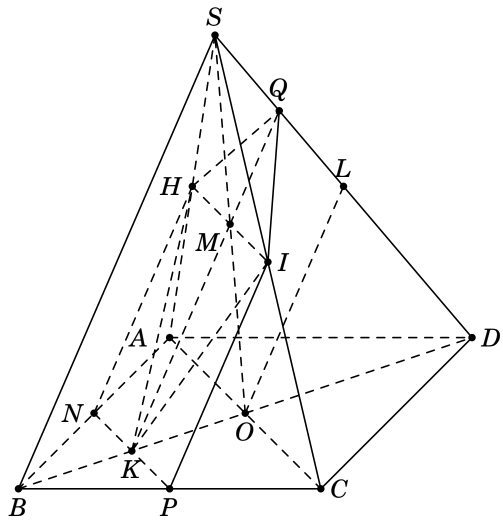
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi H, I, K, L lần lượt là trung điểm của SA, SC, OB, SD.

① Xác định giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD); (HIK) và (SBD).

② Chứng minh OL song song với (HIK).

③ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi mặt phẳng (HIK).

Lời giải.



① Ta có $\begin{cases} SO \subset (SAC) \\ SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Gọi M là giao điểm của SO và HI, ta có:

$\begin{cases} K \in BO \subset (SBD) \\ K \in (HIK) \\ M \in SO \subset (SBD) \\ M \in HI \subset (HIK) \end{cases} \Rightarrow MK = (HIK) \cap (SBD)$.

② Trong tam giác SAC có $HI \parallel AC$ nên theo định lí Talet ta có $\dfrac{SM}{SO} = \dfrac{1}{2}$, suy ra M là trung điểm SO.

Trong tam giác SOB có $MK \parallel SB$ (tính chất trung bình), trong tam giác SBD có $OL \parallel SB$ (tính chất trung bình). Do đó, $OL \parallel MK$.

Ta có $\begin{cases} OL \parallel MK \\ MK \subset (HIK) \\ OL \not\subset (HIK) \end{cases} \Rightarrow OL \parallel (HIK)$.

③ Gọi N, P lần lượt là trung điểm của AB và BC, từ đó dễ dàng chứng minh được N, K, P thẳng hàng. Gọi Q là giao điểm của MK và SD.

Suy ra $NP \parallel AC \Rightarrow NP \parallel HI$ (tính chất trung bình).

Ta có $\begin{cases} HN = (HIK) \cap (SAB) \\ PI = (HIK) \cap (SBC) \\ QI = (HIK) \cap (SCD) \\ HQ = (HIK) \cap (SAD) \\ NP = (HIK) \cap (ABCD). \end{cases}$

Do đó, thiết diện tạo bởi (HIK) và hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $HNPIQ$.

□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cạnh đáy lớn AD. Gọi E, F lần lượt là các điểm trên hai cạnh SA, SD thỏa mãn điều kiện $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{1}{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

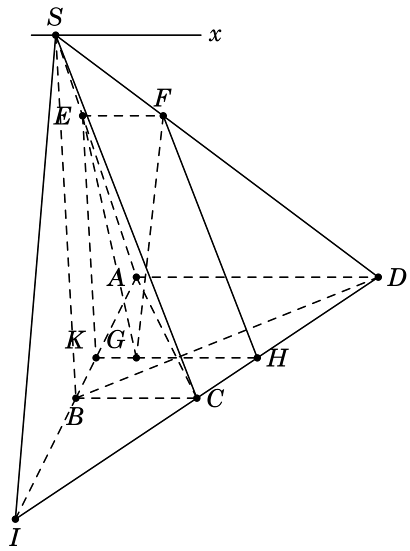
① Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD), của (SAD) và (SBC).

② Tìm giao điểm H của CD và (EFG).

③ Chứng minh $EG \parallel (SBC)$.

④ Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ bị cắt bởi (EFG). Nó là hình gì?

Lời giải.



① Gọi I là giao điểm của AB và CD, ta có:
$$\begin{cases} S \in (SAB) \\ S \in (SCD) \\ I \in AB \subset (SAB) \\ I \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow SI = (SAB) \cap (SCD).$$

Ta có $\begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAB) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx \parallel BC.$

② Theo định lí Talet thì $EF \parallel AD$, lấy điểm K trên AB sao cho $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{2}{3}$, do đó:
Cũng theo định lí Talet thì $KG \parallel BC$ mà $BC \parallel AB$ nên $EF \parallel KG$.
Gọi H là giao điểm của KG và CD, ta có:
$$\begin{cases} H \in CD \\ H \in KH \subset (EFG) \end{cases} \Rightarrow H \in CD \cap (EFG).$$

③ Ta có $\begin{cases} EF \parallel BC \subset (SBC) \\ EK \parallel SB \subset (SBC) \Rightarrow (EFG) \parallel (SBC) \Rightarrow EG \parallel (SBC). \\ E = EF \cap EK \end{cases}$

④ Ta có $\begin{cases} EF = (EFG) \cap (SAD) \\ FH = (EFG) \cap (SBD) \\ KH = (EFG) \cap (ABCD) \\ EK = (EFG) \cap (SAB) \\ \varnothing = (EFG) \cap (SBC) \\ EF. \end{cases}$

Vậy mặt phẳng (EFG) cắt hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $EFHK$.

□

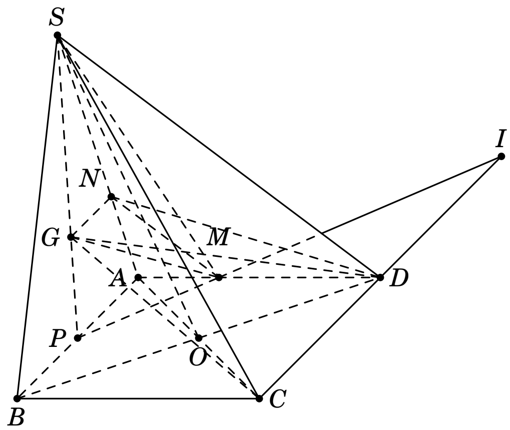
BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm $\triangle SAB$. Lấy điểm M thuộc cạnh AD sao cho $AD = 3AM$.

① Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (GCD).

② Tìm giao điểm I của CD và mặt phẳng (SGM).

③ Chứng minh MG song song (SCD).

Lời giải.



① Lấy điểm N trên SA sao cho $SN = \frac{2}{3}SA$, ta có:

$\begin{cases} GN \parallel AB \\ AB \parallel CD \end{cases} \Rightarrow GN \parallel CD \Rightarrow GN \subset (GCD)$.

Do đó, $\begin{cases} N \in SA \subset (SAD) \\ N \in GD \subset (GCD) \\ D \in (SAD) \\ D \in (GCD) \end{cases} \Rightarrow ND = (GCD) \cap (SAD)$.

② Gọi P là trung điểm AB và I là giao điểm của PM và CD, ta có:

$\begin{cases} I \in CD \\ I \in PM \subset (SGM) \end{cases} \Rightarrow I \in CD \cap (SGM)$.

③ Ta có $\begin{cases} CD \parallel GN \\ GN \subset (GMN) \\ CD \not\subset (GMN) \end{cases} \Rightarrow CD \parallel (GMN)$. (1)

$\frac{AN}{AS} = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$, theo định lí Talet ta được $MN \parallel SD$.

$\begin{cases} SD \parallel MN \\ MN \subset (GMN) \\ SD \not\subset (GMN) \end{cases} \Rightarrow SD \parallel (GMN)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra, $(SCD) \parallel (GMN) \Rightarrow GM \parallel (SCD)$.

□

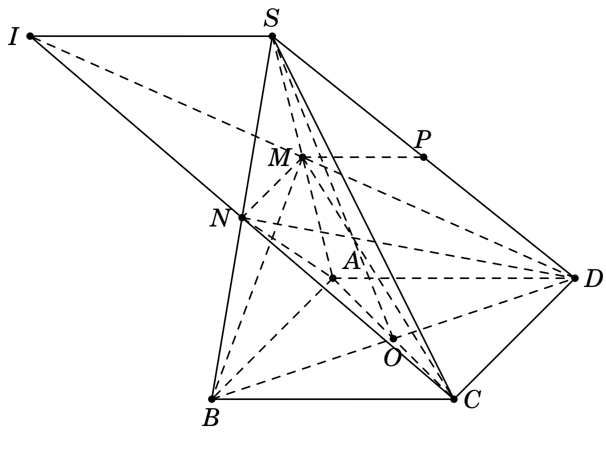
BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SB.

① Tìm giao tuyến của (MBC) và (SAD).

② Chứng minh $(MN \parallel (SCD)$.

③ Gọi $I = DM \cap CN$. Chứng minh $SI \parallel (NAD)$.

Lời giải.



① Gọi P là trung điểm của SD, ta có:

$\begin{cases} MP \parallel AD \\ AD \parallel BC \end{cases} \Rightarrow MP \parallel BC \Rightarrow MP \subset (MBC)$.

$\begin{cases} M \in (MBC) \\ M \in (SAD) \\ P \in SD \subset (SAD) \\ P \in MP \subset (MBC) \end{cases} \Rightarrow MP = (MBC) \cap (SAD)$.

② Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

③ Ta có $MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ suy ra MN là đường trung bình của $\triangle ICD$, do đó M là trung điểm ID.
Dễ dàng chứng minh $\triangle MSI = \triangle MAD$ (c.g.c).
Suy ra $\widehat{SIM} = \widehat{ADM} \Rightarrow SI \parallel AD$ (so le trong).

$\begin{cases} SI \parallel AD \\ AD \subset (NAD) \\ SI \not\subset (NAD) \end{cases} \Rightarrow SI \parallel (NAD)$.

□