CHƯƠNG 4

GIỚI HẠN

BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa 1. Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$.

> **VÍ DỤ 1.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0.$

Định nghĩa 2. Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $|u_n - a|$ có giới hạn bằng 0.
Nghĩa là: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - a) = 0.$

> **VÍ DỤ 2.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+3} = 2.$

2 CÁC ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1.

— $\lim \dfrac{1}{n} = 0; \lim \dfrac{1}{n^k} = 0$ *với k là số nguyên dương.*

— $\lim q^n = 0$ *nếu* $|q| < 1$.

Định lí 2.

— *Nếu* $\lim u_n = a$ *và* $\lim v_n = b$ *thì* $\lim (u_n \pm v_n) = a \pm b$, $\lim (u_n . v_n) = a.b$, $\lim \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ *(nếu* $b \neq 0$*).*

— *Nếu* $u_n \geq 0$ *với mọi* n *và* $\lim u_n = a$ *thì* $a \geq 0$ *và* $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

3 TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Định nghĩa 3. Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là **cấp số nhân lùi vô hạn**.

Định lí 3. *Cho cấp số nhân lùi vô hạn* (u_n)*, ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là*

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

4 GIỚI HẠN VÔ CỰC

Định nghĩa 4.

— Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

— Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.
Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Định lí 4.
a) Nếu $\lim u_n = a$ *và* $\lim v_n = \pm\infty$ *thì* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
b) Nếu $\lim u_n = a > 0, \lim v_n = 0$ *và* $v_n > 0$ *với mọi* n *thì* $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ *và* $\lim v_n = a > 0$ *thì* $\lim u_n v_n = +\infty$.

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1.1. Dùng định nghĩa chứng minh giới hạn

Để chứng minh $\lim u_n = L$ *ta chứng minh* $\lim (u_n - L) = 0$.

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$ b. $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a. Ta có $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1} - (-1)\right) = \lim \left(\dfrac{1}{n^3+1}\right)$. Vì $0 \le \left|\dfrac{1}{n^3+1}\right| < \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Mà $\lim \dfrac{1}{n^3} = 0$ nên suy ra $\lim \left(\dfrac{1}{n^3+1}\right) = 0$. Do đó $\lim \left(\dfrac{-n^3}{n^3+1}\right) = -1$.

b. Ta có $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n} - \dfrac{1}{2}\right) = \lim \dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)}$
Vì $0 < \left|\dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)}\right| < \dfrac{5n+5}{2n(n+1)} = \dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Mà $\lim \left(\dfrac{5}{2}.\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{5}{2}.\lim \dfrac{1}{n} = 0$
Nên suy ra $\lim \dfrac{5n+4}{2(2n^2+n)} = 0$. Do đó $\lim \left(\dfrac{n^2+3n+2}{2n^2+n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\dfrac{3.3^n - \sin 3n}{3^n}\right) = 3$ b. $\lim \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

a. Ta có $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}-3\right)=\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)$.

Vì $0\le\left|\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right|=\dfrac{|-\sin 3n|}{3^n}\le\dfrac{1}{3^n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mà $\lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{-\sin 3n}{3^n}\right)=0$. Do đó $\lim\left(\dfrac{3.3^n-\sin 3n}{3^n}\right)=3$.

b. Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\dfrac{2\sqrt{n^2+n}-(2n+1)}{2}=\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}$

$$\text{Vì } 0\le\left|\frac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\right|\le\frac{1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}\le\frac{1}{2\left(2\sqrt{n^2}+2n\right)}=\frac{1}{8}.\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$$

Mà $\lim\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{8}\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\dfrac{-1}{2\left(2\sqrt{n^2+n}+(2n+1)\right)}=0$.

Do đó $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\dfrac{1}{2}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Chứng minh rằng

a. $\lim\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$

b. $\lim\dfrac{6n+2}{n+5}=6$

c. $\lim\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$

d. $\lim\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

Lời giải.

a. Ta có $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=\lim\dfrac{n-8}{n^2+4}$. Vì $0\le\left|\dfrac{n-8}{n^2+4}\right|\le\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$.

Mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$ nên suy ra $\lim\left(\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}-2\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{2n^2+n}{n^2+4}=2$.

b. Ta có $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=\lim\dfrac{-28}{n+5}$

Vì $\left|\dfrac{-28}{n+5}\right|<\dfrac{28}{n}$. Mà $\lim\dfrac{28}{n}=0$ nên $\lim\left(\dfrac{6n+2}{n+5}-6\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{6n+2}{n+5}=6$.

c. Ta có $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=\lim\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}$

Vì $0<\left|\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}\right|<\dfrac{7^n+2.3^n}{8^n+3^n}<\dfrac{3.7^n}{8^n}=3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n$.

Mà $\lim 3\left(\dfrac{7}{8}\right)^n=0$ nên $\lim\left(\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}+2\right)=0$. Do đó $\lim\dfrac{7^n-2.8^n}{8^n+3^n}=-2$.

d. Ta có $\lim \left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=\lim \dfrac{3^n}{5^n+3^n}$.

vì $0<\left|\dfrac{3^n}{5^n+3^n}\right|<\dfrac{3^n}{5^n+3^n}<\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

Mà $\lim \left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$ nên $\lim \left(\dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}-1\right)=0$. Do đó $\lim \dfrac{2.3^n+5^n}{5^n+3^n}=1$.

□

BÀI 2. Chứng minh rằng

a. $\lim \left(\sqrt{4n^2+4n}-2n\right)=1$

b. $\lim \dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}=1$

c. $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}=0$

d. $\lim \left(\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right)=0$.

Lời giải.

a. Ta có $\lim \left(\sqrt{4n^2+4n}-2n-1\right)=\lim \dfrac{-1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}$

Vì $0\le \left|\dfrac{-1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}\right|\le \dfrac{1}{\sqrt{4n^2+4n}+2n+1}<\dfrac{1}{2n+2n}=\dfrac{1}{4n}$

Mà $\lim \dfrac{1}{4n}=0$ nên $\lim \left(\sqrt{4n^2+4n}-2n-1\right)=0$. Do đó $\lim \left(\sqrt{4n^2+4n}-2n\right)=1$

b. Ta có $\lim \left(\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}-1\right)=\lim \dfrac{\sin^n n-1}{\sqrt{n}+1}$

Vì $0\le \left|\dfrac{\sin^n n-1}{\sqrt{n}+1}\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Mà $\lim \dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$ nên $\lim \left(\dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}-1\right)=0$. Do đó $\lim \dfrac{\sqrt{n}+\sin^n n}{\sqrt{n}+1}=1$.

c. Ta có $\left|\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}\right|=\left|\dfrac{n^2+2n-n^2}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}\right|=\left|\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right|<\dfrac{2}{\sqrt{n^2}+n}=\dfrac{1}{n}$.

Mà $\lim \dfrac{1}{n}=0$ nên $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}=0$.

d. Ta có

$$\begin{aligned}\left|\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right| &= \left|\dfrac{n^3+2n-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+2n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n}+n^2}\right| \\ &= \left|\dfrac{2n}{\sqrt[3]{(n^3+2n)^2}+n\sqrt[3]{n^3+2n}+n^2}\right|<\dfrac{2n}{3n^2}<\dfrac{1}{n}.\end{aligned}$$

Mà $\lim \dfrac{1}{n}=0$. Do đó $\lim \left(\sqrt[3]{n^3+2n}-n\right)=0$

□

BÀI 3. Chứng minh rằng

a. $\lim \dfrac{6^n\cos 3n+5^n}{2^n+2.7^n}=0$

b. $\lim \dfrac{4n\sin^n 2n+\cos^n 2n}{4n^2+8n}=0$

Lời giải.

a. Ta có $\left|\dfrac{6^n\cos 3n+5^n}{2^n+2.7^n}\right| \le \dfrac{6^n+5^n}{2.7^n} \le \dfrac{2.6^n}{2.7^n} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.

Mà $\lim\left(\dfrac{6}{7}\right)^n = 0$ nên $\lim\dfrac{6^n\cos 3n+5^n}{2^n+2.7^n} = 0$.

b. Ta có $\left|\dfrac{4n\sin^n 2n+\cos^n 2n}{4n^2+8n}\right| \le \left|\dfrac{4n+1}{4n(n+2)}\right| \le \dfrac{4(n+2)}{4n(n+2)} = \dfrac{1}{n}$

Mà $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim\dfrac{4n\sin^n 2n+\cos^n 2n}{4n^2+8n} = 0$.

□

DẠNG 1.2. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức

Tính giới hạn $\lim\dfrac{f(n)}{g(n)}$ *trong đó* $f(n)$ *và* $g(n)$ *là các đa thức bậc* n.

— *Bước 1: Đặt* n^k, n^i *với k là số mũ cao nhất của đa thức* $f(n)$ *và i là số mũ cao nhất của đa thức* $g(n)$ *ra làm nhân tử chung.*

— *Đơn giản. Sau đó áp dụng kết quả* $\lim\dfrac{1}{n^k} = 0$.

DẠNG 1.3. Tính giới hạn dãy số dạng phân thức chứa a^n

— *Bước 1: Đưa biểu thức về cùng một số mũ n.*

— *Bước 2: Chia tử và mẫu số cho* a^n *trong đó a là số có trị tuyệt đối lớn nhất.*

— *Bước 3: Áp dụng kết quả "Nếu* $|q| < 1$ *thì* $\lim q^n = 1$*".*

VÍ DỤ 1. Tính $\lim\dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2}$

Lời giải

Ta có $\lim\dfrac{n^2-4n^3}{2n^3+5n-2} = \lim\dfrac{n^3\left(\dfrac{1}{n}-4\right)}{n^3\left(2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}\right)} = \lim\dfrac{\dfrac{1}{n}-4}{2+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{2}{n^3}} = -2$ □

VÍ DỤ 2. Tính $\lim\dfrac{n^3-7n}{1-2n^2}$.

Lời giải

$$\lim\dfrac{n^3-7n}{1-2n^2} = \lim n.\dfrac{1-\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-2} = -\infty.$$

Do $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{1-\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}-2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. □

VÍ DỤ 3. Tính $\lim \dfrac{n+2}{n^2+n+1}$.

Lời giải

$$\lim \frac{n+2}{n^2+n+1} = \lim \frac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 0.$$ □

VÍ DỤ 4. Tính $\lim \dfrac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n}$.

Lời giải

$$\lim \frac{5^{n+1}-4^n+1}{2.5^n-6^n} = \lim \frac{5.5^n-4^n+1}{2.5^n-6^n} = \lim \frac{5.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}{2.\left(\dfrac{5}{6}\right)^n-1} = 0\,.$$ □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tính các giới hạn

① $\lim \dfrac{3n+2}{2n+3}$.

② $\lim \dfrac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

Lời giải.

① Chia cả tử và mẫu cho n có bậc lớn nhất. Ta có : $\lim \dfrac{3n+2}{2n+3} = \lim \dfrac{3+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{3}{2}$.

② Tương tự: $\lim \dfrac{4n^2-1}{2n^2+n} = \lim \dfrac{4-\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}} = 2$.

□

BÀI 2. Tính các giới hạn

① $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

② $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

Lời giải.

① Ta có : $\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{2}{n}}=1.$

② Tương tự: $\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}-1-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=0.$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n}$.

Lời giải.

Ta có :

$$\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n}=\lim \dfrac{\sqrt{n^4\left(4+\dfrac{2}{n^3}\right)}-3n^2}{\sqrt{n^3\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}-n}$$

$$=\lim \dfrac{n^2\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3\right)}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\lim \dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3\right)}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Vì $\lim \sqrt{n}=+\infty$ và $\lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{2}{n^3}}-3}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\dfrac{2-3}{1}=-1.$

Do đó : $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+2n}-3n^2}{\sqrt{n^3+2n}-n}=-\infty.$ □

BÀI 4. Tính các giới hạn

① $\lim \dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}$.

② $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$.

③ $\lim \dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

Lời giải.

① Ta có : $\lim \dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}=\lim \dfrac{7.\dfrac{5^n}{7^n}-2}{\dfrac{5^n}{7^n}-5}=\dfrac{2}{5}.$

② Tương tự: $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim \dfrac{4.\dfrac{3^n}{7^n}+7}{2.\dfrac{5^n}{7^n}+1}=7.$

③ $\lim \dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}=\lim \dfrac{4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+36\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{5}{8}\right)^n+1}=0.$

□

BÀI 5. Tính giới hạn của

a) $\lim \dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2+1}$.

b) $\lim \dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}$.

Lời giải.

a) Vì $\left|\dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2+1}\right| < \dfrac{\sqrt{2}}{n^2}$ mà $\lim \dfrac{\sqrt{2}}{n^2} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{\sin 10n + \cos 10n}{n^2+1} = 0$.

b) Vì $\left|\dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}\right| \leq \dfrac{2}{n}$ mà $\lim \dfrac{2}{n} = 0 \Rightarrow \lim \dfrac{1-\sin n\pi}{n+1} = 0$.

□

BÀI 6. Tính giới hạn của

a) $A = \lim \left[\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

b) $B = \lim \left[\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right]$.

Lời giải.

① $$\begin{aligned} A &= \lim \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right] \\ &= \lim \left[\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] \\ &= \lim \left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] = 1. \end{aligned}$$

② $$\begin{aligned} B &= \lim \left[\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right] \\ &= \lim \left[\left(\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2.1}\right) + \left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3.2}\right) + \dots + \left(\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}\right)\right] \\ &= \lim \left[\left(\sqrt{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right] \\ &= \lim \left[1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right] = 1. \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{2}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2(2n+1)u_n + 1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy. Tính $\lim u_n$.

Lời giải.

$u_n \neq 0, \forall n \geq 1$ nên

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(2n+1)u_n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = 2(2n+1) + \frac{1}{u_n}.$$

Đặt $a_n = \dfrac{1}{u_n}$ ta thu được dãy (a_n): $\begin{cases} a_1 = \dfrac{3}{2} \\ a_{n+1} = 2(2n+1) + a_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$
Từ đó ta có

$$a_{n+1} = 2(2n+1) + a_n = 2(2n+1) + 2[2(n-1)+1] + a_{n-1} = a_1 + 4(1+2+...+n) + 2n$$

Suy ra $a_{n+1} = \dfrac{3}{2} + 4 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} + 2n = \dfrac{4n^2+8n+3}{2} \Rightarrow a_n = \dfrac{4n^2-5}{2} \Rightarrow u_n = \dfrac{2}{4n^2-5}$.
Vậy $\lim u_n = \lim \dfrac{2}{4n^2-5} = 0$. □

BÀI 8. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{(n+2)^2}{a_{n+1}} = \dfrac{n^2}{a_n} - (n+1) \end{cases} ; \forall n \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$$

. Tìm $\lim a_n$.
Lời giải.
Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, đặt $y_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{4}$ ta có $y_1 = 1$ và

$$(n+2)^2\left(y_{n+1} - \frac{1}{4}\right) = n^2\left(y_n - \frac{1}{4}\right) - (n+1) \Rightarrow (n+2)^2 y_{n+1} = n^2 y_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{n^2}{(n+2)^2} y_n$$

Do đó

$$y_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \ldots \left(\frac{1}{3}\right)^2 y_1 = \frac{4}{(n+1)^2 n^2} \Rightarrow a_n = \frac{4n^2(n+1)^2}{16 - n^2(n+1)^2}$$

Vậy $\lim a_n = -4$. □

BÀI 9. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} - 1 \end{cases}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải.
Trước hết ta dễ thấy $-1 < u_n < 0$ với mọi $n \geq 2$. Ta lại có

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - (1-\sqrt{3})| &= \left|\left(\frac{u_n^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2} - 1\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}|u_n - (1-\sqrt{3})| \cdot |u_n - (1-\sqrt{3})| \\ &\leq \frac{\sqrt{3}}{2}|u_n - (1-\sqrt{3})|. \end{aligned}$$

Lập luận tương tự như thế ta được

$$|u_{n+1} - (1-\sqrt{3})| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n, \forall n.$$

Mà $\lim \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$ nên $\lim u_n = 1 - \sqrt{3}$. □

BÀI 10. Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$. Tìm $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 + 0 \\ u_2 &= u_1 + 1 \\ u_3 &= u_2 + 2 \\ &\cdots \\ u_n &= u_{n-1} + n - 1. \end{aligned}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế ta được

$$u_n = u_1 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n^2 - n + 2}{2}.$$

Từ đó $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2}$ nên $\lim \dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \lim \dfrac{n^2 - n + 2}{n^2 + n + 2} = 1.$ □

BÀI 11. Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2017 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 3}{4} \quad \text{với mọi } n \geq 1 \end{cases}$

Với mỗi số nguyên dương n đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{x_i + 1} + \dfrac{2}{x_i^2 + 1} \right)$.

Chứng minh dãy số (y_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải.

Ta có $x_{n+1} - 1 = \dfrac{x_n^4 - 1}{4} = \dfrac{(x_n - 1)(x_n + 1)\left(x_n^2 + 1\right)}{4}, \forall n \geq 1.$

Kết hợp $x_1 = 2017$ ta có $x_n > 2017, \forall n \geq 2.$

Ta có $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^4 - 4x_n + 3}{4} = \dfrac{(x_n - 1)^2\left(x_n^2 + 2x_n + 3\right)}{4} > 0, \forall n \geq 1.$

Suy ra (x_n) là dãy tăng ngặt. Giả sử (x_n) bị chặn trên suy ra (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Đặt $\lim x_n = L$ suy ra $L \geq 2017$. Khi đó ta có:

$$L = \frac{L^4 + 3}{4} \Leftrightarrow L^4 - 4L + 3 = 0 \Leftrightarrow (L-1)^2\left(L^2 + 2L + 3\right) = 0 \Leftrightarrow L = 1, \text{ vô lý.}$$

Vậy $\lim x_n = +\infty$.

Ta có $\dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1} - 1} = \dfrac{(x_n - 1)\left(x_n^2 + 2x_n + 3\right)}{(x_n + 1)\left(x_n^2 + 1\right)}, \forall n \geq 1.$

Do đó:

$$\frac{1}{x_n + 1} + \frac{2}{x_n^2 + 1} = \frac{\left(x_n^2 + 2x_n + 3\right)}{(x_n + 1)\left(x_n^2 + 1\right)} = \frac{x_{n+1} - x_n}{(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)} = \frac{1}{x_n - 1} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1$$

Suy ra

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_i + 1} + \frac{2}{x_i^2 + 1} \right) = \frac{1}{2016} - \frac{1}{x_{n+1} - 1}, \forall n \geq 1.$$

Do $\lim \dfrac{1}{x_{n+1} - 1} = 0$ nên dãy (y_n) có giới hạn hữu hạn và $\lim y_n = \dfrac{1}{2016}$. □

DẠNG 1.4. Dãy số dạng Lũy thừa - Mũ

— $\lim n^k = +\infty$, $k > 0$.

— $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, $k > 0$.

— $\lim a^n = 0, -1 < a < 1$.

— $\lim a^n = +\infty, a > 1$.

— *Nếu* (u_n) *là CSN lùi vô hạn với công bội* q, *ta có* $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \dfrac{u_1}{1-q}$.

— $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty$;

— $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty$;

— $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a > 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = -\infty$;

— $\lim u_n = -\infty, \lim v_n = a < 0 \Rightarrow \lim u_n v_n = +\infty$.

VÍ DỤ 1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim(2^n + 3^n)$;

b) $\lim\left[-4^n + (-2)^n\right]$.

Lời giải

a) $\lim(2^n + 3^n) = \lim 3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1\right] = +\infty$.

b) $\lim\left[-4^n + (-2)^n\right] = \lim 4^n\left[-1 + \left(\dfrac{-2}{4}\right)^n\right] = -\infty$.

□

VÍ DỤ 2. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n + 2^n}\right)$;

b) $\lim\left(\dfrac{4\cdot 3^n - 2^n}{2\cdot 5^n + 4^n}\right)$;

c) $\lim\left(\dfrac{7^n + 1}{-2\cdot 3^n - 3\cdot 6^n}\right)$.

Lời giải

a) $\lim\left(\dfrac{1+3^n}{3\cdot 3^n + 2^n}\right) = \lim\left(\dfrac{\dfrac{1}{3^n} + 1}{3 + \dfrac{2^n}{3^n}}\right) = \dfrac{1}{3}$.

b) $\lim\left(\dfrac{4\cdot 3^n - 2^n}{3\cdot 5^n + 4^n}\right) = \lim\left(\dfrac{4\cdot\dfrac{3^n}{5^n} - \dfrac{2^n}{5^n}}{2 + \dfrac{4^n}{5^n}}\right) = 0$.

c) $\lim\left(\dfrac{7^n + 1}{-2\cdot 3^n - 3\cdot 6^n}\right) = \lim\left(\dfrac{1 + \dfrac{1}{7^n}}{-2\cdot\dfrac{3^n}{7^n} - 3\cdot\dfrac{6^n}{7^n}}\right) = -\infty$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tìm các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{2^{3n}+3^{2n+1}}{2\cdot 9^n+4^n}$;

b) $\lim(2\cdot 3^n-4^{n+1}+7)$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{2^{3n}+3^{2n+1}}{2\cdot 9^n+4^n}=\lim \dfrac{8^n+3\cdot 9^n}{2\cdot 9^n+4^n}=\lim\left(\dfrac{\dfrac{8^n}{9^n}+3}{2+\dfrac{4^n}{9^n}}\right)=\dfrac{3}{2}$.

b)

c) $\lim(2\cdot 3^n-4^{n+1}+7)=\lim 4^n\left(2\cdot\dfrac{3^n}{4^n}-4+\dfrac{7}{4^n}\right)=-\infty$.

□

BÀI 2. Tính giới hạn sau $\lim(2\cdot 3^n-n+1)$.

Lời giải.

Ta có: $3^n-n>0$ với $\forall n\in\mathbb{N}$. Do đó, $\lim(2\cdot 3^n-n+1)\geq\lim(3^n+1)=+\infty$.

Vậy $\lim(2\cdot 3^n-n+1)=+\infty$. □

BÀI 3. Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

Lời giải.

Đặt $u_n=1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$; $v_n=1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.

Ta có: $u_n=1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}=1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$. Tương tự, $v_n=1+\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{2^n}{5^n}\right)$.

Từ đó, $\lim u_n=\dfrac{3}{2}$, $\lim v_n=\dfrac{5}{3}$. Vậy $\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\dfrac{2}{5}+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}=\dfrac{9}{10}$. □

BÀI 4. Tìm giới hạn sau $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}$

Lời giải.

Ta có: $\lim\dfrac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\lim\dfrac{1-\dfrac{3}{2}(1-3^n)}{2\cdot 3^{n+1}+2^n}=\dfrac{1}{4}$ □

BÀI 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n-4}{u_n+6}$, $\forall n\geq 1$. Tính giới hạn $\lim\dfrac{u_n+1}{u_n+4}$.

Lời giải.

Đặt $v_n=\dfrac{u_n+1}{u_n+4}$. Ta có: $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}+4}=\dfrac{2(u_n+1)}{5(u_n+4)}=\dfrac{2}{5}v_n=\cdots=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n+1}$.

Vậy, ta có $v_n=\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$, do đó $\lim\dfrac{u_n+1}{u_n+4}=\lim v_n=0$. □

BÀI 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+1}{2}$, $\forall n\geq 1$. Tính giới hạn $\lim u_n$.

Lời giải.

Ta có: $u_{n+1}-1=\dfrac{u_n-1}{2}=\dfrac{1}{2^2}(u_{n-1}-1)=\cdots=\dfrac{1}{2^n}(u_1-1)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Do đó, $u_n=\dfrac{1}{2^{n-2}}+1$. Vậy, $\lim u_n=\lim\left(\dfrac{1}{2^{n-2}}+1\right)=1$. □

DẠNG 1.5. Giới hạn dãy số chứa căn thức

Ta thường gặp hai dạng sau:

Dạng 1. Sử dụng các tính chất giới hạn để tính.

Dạng 2. Dạng vô định, cần nhân lượng liên hợp hoặc thêm bớt hạng tử.

VÍ DỤ 1. Tìm giới hạn

$$\lim\sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}$$

Lời giải

Ta có

$$\lim\sqrt{\frac{8n+2}{2n-1}}=\lim\sqrt{\frac{8+\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{8+0}{2-0}}=2.$$

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n=\sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}, n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Ta có:$\lim\sqrt{\dfrac{2n+9}{n+2}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2+\frac{9}{n}}{1+\frac{2}{n}}}=\sqrt{\dfrac{2}{1}}=\sqrt{2}$. □

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn:

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)=\lim\frac{4n^2+3n+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n}\quad(*)$$

$$=\lim\frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n+1}+2n}=\lim\frac{n\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}+2n}$$

$$=\lim\frac{n\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+2\right)}=\lim\frac{3+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+2}=\frac{3}{4}.$$

Nhận xét.

— Ở bước $(*)$ ta đã ***nhân biểu thức liên hợp*** của $\left(\sqrt{4n^2+3n+1}-2n\right)$ để ***khử dạng vô định*** $\infty-\infty$.

— Giới hạn $\lim\dfrac{a}{n^k}=0$, với $a=\text{const}$ lại một lần nữa được sử dụng.

□

VÍ DỤ 4. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}$.

b) $\lim\dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$.

Lời giải

a) $$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}+2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}+n}=\lim\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}+2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1}+1}=2.$$

b) $$\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}=\lim\frac{1+\sqrt[3]{\dfrac{1}{n^6}-1}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}+1}=\frac{1+\sqrt[3]{-1}}{\sqrt{1}+1}=0.$$

□

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn:

$$\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{2-n}.$$

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-\sqrt{9n^2+2}}{2-n} = \lim \frac{\sqrt{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\left(9+\frac{2}{n^2}\right)}}{n\left(\frac{2}{n}-1\right)}$$

$$= \lim \frac{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}\right)}{n\left(\frac{2}{n}-1\right)} = \lim \frac{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}-\sqrt{9+\frac{2}{n^2}}}{\frac{2}{n}-1} = 1.$$

Nhận xét.

— Trong ví dụ này, ta đã ***rút*** n^k (ở cả tử và mẫu) làm nhân tử chung với k ***là bậc cao nhất của*** n ***ở tử số và mẫu số***.

— Cần chú ý giới hạn quan trọng $\lim \frac{a}{n^k} = 0$, với $a = \text{const}$.

□

VÍ DỤ 6. Tính giới hạn:

$$\lim \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right) n$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
&\lim \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-5}\right) n \\
&= \lim \frac{(n+3-n+5)n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-5}} \\
&= \lim \frac{8n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}\right)} \\
&= \lim \sqrt{n}\frac{8}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}} \\
&= +\infty. \left(\text{vì } \lim \sqrt{n} = +\infty \text{ và } \lim \frac{8}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{5}{n}}} = \frac{8}{2} = 4 = \text{const}\right).
\end{aligned}$$

Nhận xét. Cần chú ý giới hạn sau:

$$\text{Nếu } \begin{cases} u_n \longrightarrow +\infty \\ v_n \longrightarrow c = \text{const} \neq 0 \end{cases} \text{ thì } \lim u_n.v_n = \begin{cases} +\infty & (\text{nếu } c > 0) \\ -\infty & (\text{nếu } c < 0) \end{cases}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

BÀI 1. Tính giới hạn của các dãy số sau:

a) $u_n = \sqrt{n^2+1}, n \in \mathbb{N}^*$;

b) $v_n = \sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}}, n \geq 2.$

Lời giải.

a) Ta có: $\lim \sqrt{n^2+1} = \lim \sqrt{n^2(1+\dfrac{1}{n^2})}$;
Vì $\begin{cases} \lim \sqrt{n^2} = +\infty \\ \lim \sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = 1; \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt{n^2(1+\dfrac{1}{n^2})} = +\infty.,$
Vậy $\lim u_n = +\infty$.

b) Ta có: $\lim \sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}} = \lim \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}}$
Vì $\begin{cases} \lim \sqrt{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{4}{n^2}} = 1 \\ \lim \sqrt{\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}} = 0; \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt{\dfrac{n^2+2n+4}{2n-3}} = +\infty.$
Vậy $\lim v_n = +\infty$.

□

BÀI 2. Tính giới hạn:

$$\lim \left(\sqrt{3}n - \sqrt{3n^2-2n-1}\right)$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
&\lim \left(\sqrt{3}n - \sqrt{3n^2-2n-1}\right) \\
=&\lim \frac{3n^2-3n^2+2n+1}{\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}} \\
=&\lim \frac{2n+1}{\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}} \\
=&\lim \frac{n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{3}+\sqrt{3-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}\right)} \\
=&\lim \frac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{3}+\sqrt{3-\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}} \\
=&\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 3. Tìm giới hạn

$$\lim \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$$

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right) &= \lim\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)} = \lim\frac{(n^2+2n)-n^2}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}\\ &= \lim\frac{2n}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} = \lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\\ &= \frac{2}{\sqrt{1-0}+1} = 1\end{aligned}$$

□

BÀI 4. Tìm giới hạn

$$\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)$$

Lời giải.
Ta có

$$\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right) = \lim\left[n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right)\right]$$

Mà $\lim n^2 = +\infty$, $\lim\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right) = (\sqrt{0+0}-1) = -1 < 0$ nên

$$\lim\left[n^2\left(\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}}-1\right)\right] = -\infty$$

Vậy $\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right) = -\infty$. □

BÀI 5.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$$

Lời giải.

$\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1)) = \lim\dfrac{(\sqrt{n^2+3n+2}-(n-1))(\sqrt{n^2+3n+2}+n-1)}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$

$= \lim\dfrac{(\sqrt{n^2+3n+2})^2-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1} = \lim\dfrac{5n+1}{\sqrt{n^2+3n+2}+n-1}$

$= \lim\dfrac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}+1-\frac{1}{n}} = \dfrac{5}{2}$. □

BÀI 6.

$$\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-n)$$

Lời giải.

$\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-n) = \lim\dfrac{(\sqrt{n^2+2n+3}-n)(\sqrt{n^2+2n+3}+n)}{\sqrt{n^2+2n+3}+n}$

$= \lim\dfrac{2n+3}{\sqrt{n^2+2n+3}+n} = \lim\dfrac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = 1.$ □

BÀI 7.

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}}$$

Lời giải.

$\lim \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3}} = \lim \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+3})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3})}$

$= \lim \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}{-2} = -\infty.$ □

BÀI 8.

$$\lim(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1})$$

Lời giải.

$\lim(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1}) = \lim \dfrac{(\sqrt{n^2+3n-1}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}}$

$= \lim \dfrac{n^2+2n-2}{\sqrt{n^2+3n-1}+\sqrt{n+1}} = \lim \dfrac{n\left(1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}} = +\infty.$ □

BÀI 9. Tìm giới hạn của dãy (u_n), với

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^3+2} \end{cases}$$

Lời giải.
Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $u_n \geq \sqrt{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*)
Rõ ràng (*) đúng khi $n = 1$.
Giả sử (*) đúng khi $n = k, k \in \mathbb{N}^*$, tức là $u_k \geq \sqrt{k}$
Khi đó ta có

$$u_{k+1} = \sqrt{u_k^3+2} = \sqrt{u_k^2.u_k+2} \geq \sqrt{u_k^2.\sqrt{k}+2} > \sqrt{u_k^2.1+1} = \sqrt{u_k^2+1} \geq \sqrt{(\sqrt{k})^2+1} = \sqrt{k+1}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán. Lấy $M > 0$ tùy ý. Khi đó có số $m \in \mathbb{N}^*$ sao cho $m > M$.
Hơn nữa, từ (*) ta có

$$\forall k \in \mathbb{N}, k > m^2 : u_k \geq \sqrt{k} > \sqrt{m^2} = m > M$$

Như vậy, các số hạng của dãy u_n kể từ số hạng thứ m^2+1 trở đi đều lớn hơn M. Do đó $\lim u_n = +\infty$. □

BÀI 10. Tính $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+5}}{3n+3}$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n+5}}{3n+3} = \lim \dfrac{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)}-\sqrt{n^2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)}}{n\left(3+\dfrac{3}{n}\right)} = \lim \dfrac{n\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-n\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}}{n\left(3+\dfrac{3}{n}\right)} =$

$\lim \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{2}{n^2}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}}{\left(3+\dfrac{3}{n}\right)} = \dfrac{1}{3}.$ □

BÀI 11. Tính giới hạn của dãy số sau $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+4n-4}}{3n+15}, n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có : } \lim u_n &= \lim \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{2n^2+4n-4}}{3n+15}\\
&= \lim \frac{(n^2+1)-(2n^2+4n-4)}{3(n+5)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})}\\
&= \lim \frac{(n+5)(1-n)}{3(n+5)(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})}\\
&= \lim \frac{1-n}{3(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{2n^2+4n-4})}\\
&= \lim \frac{\dfrac{1}{n}-1}{3(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2+\dfrac{4}{n}-\dfrac{4}{n^2}})}\\
&= \frac{-1}{3(\sqrt{1}+\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

Vậy $\lim u_n = \dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$. □

BÀI 12. Tính giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n = (\sqrt{n^2-n+2}-n)$.

Lời giải.

$\lim u_n = \lim(\sqrt{n^2-n+2}-n) = \lim \dfrac{n^2-n+2-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \dfrac{-n+2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim \dfrac{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}+n} =$

$\lim \dfrac{n\left(-1+\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{1-\frac{1}{n}}+n} = \lim \dfrac{-1+\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1} = -\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 13. Tính $\lim \dfrac{\sqrt{n^3+3n^2-2n+1}}{n-1}$.

Lời giải.

$\lim \dfrac{\sqrt{n^3+3n^2-2n+1}}{n-1} = \lim \dfrac{\sqrt{n^2\left(n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}}{n-1} = \lim \dfrac{n\sqrt{n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} =$

$\lim \dfrac{\sqrt{n+3-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = +\infty$. □

BÀI 14. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right)$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n-1\right) &= \lim \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+(n+1)\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n+1}\\ &= \lim \frac{-1}{\sqrt{n^2+2n}+n+1} = 0.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n} &= \lim \frac{\left(\sqrt{4n^2+1}-(2n+1)\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+4n+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)}\\ &= \lim \frac{-4n\left(\sqrt{n^2+4n+1}+n\right)}{(4n+1)\left(\sqrt{4n^2+1}+2n+1\right)}\\ &= \lim \frac{-4\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}\right)}\\ &= -\frac{4\left(\sqrt{1}+1\right)}{4\left(\sqrt{4}+2\right)} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

BÀI 15. Tính giới hạn $\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

Lời giải.

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n\right) = \lim\left[\sqrt{n^2+2n+3}-(1-n)\right] &= \lim \frac{n^2+2n+3-(1-n)^2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}\\ &= \lim \frac{4n+2}{\sqrt{n^2+2n+3}+n-1}\\ &= \lim \frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}}+1-\frac{1}{n}} = 2.\end{aligned}$$

□

BÀI 16. Tính giới hạn $\lim \sqrt[n]{a}$ với $a>0$.

Lời giải.

Giả sử $a>1$. Khi đó $a=\left[1+\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right]^n > n\left(\sqrt[n]{a}\right)$.

Suy ra $0<\sqrt[n]{a}-1<\dfrac{a}{n}\to 0$ nên $\lim \sqrt[n]{a}=1$.

Với $0<a<1$ thì $\dfrac{1}{a}>1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}}=1 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a}=1$

Tóm lại ta luôn có : $\lim \sqrt[n]{a}=1$ với $a>0$.

□

BÀI 17. Tính giới hạn

$$\lim(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt{n^2+n-2})$$

.

Lời giải.

$$\begin{aligned}
\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3}-\sqrt{n^2+n-2}\right) &= \lim\left[\left(\sqrt[3]{n^3-3}-n\right)+\left(n-\sqrt{n^2+n-2}\right)\right]\\
&= \lim\left[\frac{\left(\sqrt[3]{n^3-3}-n\right)\left(\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\left(n-\sqrt{n^2+n-2}\right)\left(n+\sqrt{n^2+n-2}\right)}{n+\sqrt{n^2+n-2}}\right]\\
&= \lim\left[\frac{-3}{\sqrt[3]{(n^3-3)^2}+n\sqrt[3]{n^3-3}+n^2}+\frac{2-n}{n+\sqrt{n^2+n-2}}\right]\\
&= \lim\left[\frac{\frac{-3}{n^2}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{n^3}}+1}+\frac{\frac{2}{n}-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}}\right]\\
&= 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 18. Tìm $\lim u_n$ biết $u_n=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{k}}-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$.

Suy ra $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ từ đó ta có $\lim u_n=1$.

□

BÀI 19. Tính giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)$.

Lời giải.

Sử dụng đánh giá $1<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}<\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}$ và $\lim\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n}}=1$.

Ta được $\lim\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}\right)=1$ □

BÀI 20. Cho dãy số u_n thỏa:

$$\begin{cases}u_1=3, u_2=6\\ 2u_n=u_{n-1}+u_{n+1}-2;\end{cases}\quad \forall n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3.$$

Biết rằng u_n có duy nhất một công thức, tính: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+2-\sqrt{u_n}}{n+1-\sqrt{u_n+3n-2}}$.

Lời giải.

Dựa vào biểu thức u_n ta tính:

$$\begin{aligned}
&u_1=3=1+2=1^2+2;\\
&u_2=6=4+2=2^2+2;\\
&u_3=11=9+2=3^2+2;\\
&\ldots\\
&u_n=n^2+2;\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Ta dự đoán công thức $u_n = n^2+2$, thật vậy:
$\begin{cases}2u_n = 2n^2+4\\ u_{n-1}+u_{n+1}-2 = [(n-1)^2+2]+[(n+1)^2+2]-2 = 2n^2+4;\end{cases}$
Suy ra $u_n = n^2+2, n\in\mathbb{N}^*, n\geq 3$;
Ta có:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2-\sqrt{n^2+2}}{n+1-\sqrt{n^2+3n}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{[(n+2)^2-(n^2+2)](n+1+\sqrt{n^2+3n})}{[(n+1)^2-(n^2+3n)](n+2+\sqrt{n^2+2})}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{(4n+2)(n+1+\sqrt{n^2+3n})}{(-n+1)(n+2+\sqrt{n^2+2})}\\ &= -4.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -4.$ □

BÀI 21. Tính giới hạn $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

Lời giải.

Với a nhỏ tùy ý, ta chọn $n_a > \sqrt{\dfrac{9}{a^2}-1}$, ta có: $\left|\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}+2\right| = \left|\dfrac{1-2n+2\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}}\right|$
$< \left|\dfrac{1-2n+2(n+1)}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}} < \dfrac{3}{\sqrt{n_a{}^2+1}} < a.$
Suy ra $\lim\left|\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}+2\right| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right) = -2.$ □

BÀI 22. Tính giới hạn của $B = \lim\dfrac{\sqrt{1+2+...+n}-n}{\sqrt[3]{1^2+2^2+...+n^2+2n}}$.

Lời giải.

Việc đầu tiên ta phải tính tổng của hai dãy số dưới dấu căn
$1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
$1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Lúc này: $B = \lim\dfrac{\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}-n}{\sqrt[3]{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}+2n} = \lim\dfrac{n\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}}-n}{n\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{6n^2}}+2n} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}+2} = \dfrac{(1-\sqrt{2})\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}(1+2\sqrt[3]{3})}.$

□

BÀI 2. GIỚI HẠN HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho khoảng $\mathscr{K}$ chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathscr{K}$ hoặc trên $\mathscr{K} \setminus \{x_0\}$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.
Kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \to L$ khi $x \to x_0$.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
Giả sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thõa mãn $x_n \neq -2$ và $x_n \to -2$ khi $n \to +\infty$.
Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim \dfrac{(x_n + 2) \cdot (x_n - 2)}{(x_n + 2)} = \lim (x_n - 2) = -4$.
Do đó $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$. □

⚠ $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$; $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, *với c là hằng số.*

1.2 Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1. ***a)*** *Giả sử* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$*. Khi đó*

— $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$.

— $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$.

— $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.

— $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ *(nếu* $M \neq 0$*).*

b) *Nếu* $f(x) \geq 0$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$*, thì*

$$L \geq 0 \text{ và } \lim_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}.$$

(Dấu của $f(x)$ *được xét trên khoảng đang tìm giới hạn, với* $x \neq x_0$*).*

VÍ DỤ 2. Tính $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3.$$

□

1.3 Giới hạn một bên

Định nghĩa 2. — Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$.
Số L được gọi là ***giới hạn bên phải*** của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiêu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

— Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$.
Số L được gọi là ***giới hạn bên trái*** của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiêu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

Định lí 2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}5x+2 \text{ nếu } x\neq 1\\ x^2-3 \text{ nếu } x<1\end{cases}$.
Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, và $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (nếu có).

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2-3\right)=1^2-3=-2$;
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(5x+2)=5\cdot 1+2=7$.
Theo đinh lí 2, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại. □

2 GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3. **a)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty}=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.
b) Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty;a)$.
Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to-\infty}=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to-\infty$.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n < 1$ và $x_n \to -\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{2x_n + 3}{x_n - 1} = \lim \dfrac{2 + \dfrac{3}{x_n}}{1 - \dfrac{1}{x_n}} = 2.$

Vậy $\lim\limits_{x \to -\infty} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2.$
Giả sử (x_n) là một dãy số bất kì, thỏa mãn $x_n > 1$ và $x_n \to +\infty$.

Ta có $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{2x_n + 3}{x_n - 1} = \lim \dfrac{2 + \dfrac{3}{x_n}}{1 - \dfrac{1}{x_n}} = 2.$

Vậy $\lim\limits_{x \to +\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2.$ □

— *Với c, k là các hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:*

$$\lim_{x \to +\infty} c = c; \lim_{x \to -\infty} c = c; \lim_{x \to +\infty} \frac{c}{x^k} = 0; \lim_{x \to -\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

— *Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ còn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.*

VÍ DỤ 5. Tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

Lời giải

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 - \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{3 - 0}{1 + 0} = 3.$$ □

3 GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

3.1 Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.
Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.
Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \to -\infty$ khi $x \to +\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} (-f(x)) = -\infty$.

3.2 Một vài giới hạn đặc biệt

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn.

3.3 Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
Ł > 0	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
Ł < 0	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
α	$\pm\infty$	Tùy ý	0
Ł > 0	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
Ł < 0	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to +\infty$, và $x \to -\infty$.

VÍ DỤ 6. Tìm $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x\right)$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^3 - 2x\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 \left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$, vì
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$. □

VÍ DỤ 7. Tính $\lim\limits_{x \to 1^-1} \dfrac{2x-3}{x-1}$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x-3}{x-1} = +\infty$, vì
$\lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 3) = 2 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$, và $\lim\limits_{x \to 1^-} (x-1) = 0$, $x - 1 < 0\ \forall x < 1$. □

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 2.1. Giới hạn của hàm số dạng vô định $\frac{0}{0}$

** Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x), g(x)$ là các đa thức và $f(x_0)=g(x_0)=0$.*
Khử dạng vô định bằng cách phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử với nhân tử chung là $x-x_0$.
Giả sử $f(x)=(x-x_0)\cdot f_1(x)$ và $g(x)=(x-x_0)\cdot g_1(x)$. Khi đó:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ vẫn ở dạng vô định $\frac{0}{0}$ thì ta lặp lại quá trình khử đến khi không còn dạng vô định.
Việc phân tích thành nhân tử ở trên được thực hiện bằng phương pháp chia Horner.

** Biểu thức có dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ trong đó $f(x)$, $g(x)$ là các biểu thức có chứa căn thức và $f(x_0)=g(x_0)=0$.*
Khử dạng vô định bằng cách nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp tương ứng của biểu thức chứa căn thức để trục các nhân tử $x-x_0$ ra khỏi các căn thức, nhằm khử các thành phần có giới hạn bằng 0. Lưu ý có thể nhân liên hợp một hay nhiều lần để khử dạng vô định.
Chú ý: Các hằng đẳng thức
$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.
$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$.
$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$.

VÍ DỤ 1. Tính các giới hạn sau:

1. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$.
2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{1-2x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}$.
4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x^3}{1-x^2}$.

Lời giải

1. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}=\lim\limits_{x\to -4}\frac{(x+4)(x-2)}{x(x+4)}=\lim\limits_{x\to -4}\frac{x-2}{x}=\frac{-4-2}{-4}=\frac{3}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-5x+2}{1-2x}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(x-2)}{1-2x}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}(2-x)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2+x-6}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-1}{x+3}=\frac{2\cdot 2-1}{2+3}=\frac{3}{5}$.
4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{1+x^3}{1-x^2}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{(1+x)(1-x)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1-x+x^2}{1-x}=\frac{1-(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}=\frac{3}{2}$.

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{2x+\sqrt{3x^2+1}} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(x^2-1\right)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{4x^2-\left(3x^2+1\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{\left(x^2-1\right)\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right)}{x^2-1}$$
$$= \lim_{x\to -1}\left(2x-\sqrt{3x^2+1}\right) = 2\cdot(-1)-\sqrt{3\cdot(-1)^2+1} = -4.$$

□

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 5} \frac{2x-5\sqrt{x-1}}{3-\sqrt{x+4}} = \lim_{x\to 5} \frac{\left[4x^2-25(x-1)\right]\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{\left[9-(x+4)\right]\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 5} \frac{\left(4x^2-25x+25\right)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)}$$
$$= \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(4x-5)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{(5-x)\left(2x+5\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 5} \frac{(5-4x)\left(3+\sqrt{x+4}\right)}{2x+5\sqrt{x-1}}$$
$$= \frac{(5-4\cdot 5)(3+\sqrt{5+4})}{2\cdot 5+5\sqrt{5-1}} = -\frac{9}{2}.$$

□

VÍ DỤ 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{12x+1}}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-(12x+1)}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{-12x}{4x\left[1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}\right]}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3}{1+\sqrt[3]{12x+1}+\sqrt[3]{(12x+1)^2}} = \frac{-3}{1+\sqrt[3]{12\cdot 0+1}+\sqrt[2]{(12\cdot 0+1)^2}} = -1.$$

□

VÍ DỤ 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{2x+9}-x-5}{\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+3}} = \lim_{x\to -4} \frac{\left[2x+9-(x+5)^2\right]\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(x+5+x+3)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$
$$= \lim_{x\to -4} \frac{\left(-x^2-8x-16\right)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{(2x+8)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$
$$= \lim_{x\to -4} \frac{-(x+4)^2\left[\sqrt[3]{(x+5)^2}-\sqrt[3]{(x+5)(x+3)}+\sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2(x+4)\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)}$$

$$= \lim_{x\to -4} \frac{-(x+4)\left[\sqrt[3]{(x+5)^2} - \sqrt[3]{(x+5)(x+3)} + \sqrt[3]{(x+3)^2}\right]}{2\left(\sqrt{2x+9}+x+5\right)} = 0.$$ □

VÍ DỤ 6. Tính giới hạn $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ với n là số nguyên dương.

Lời giải

Đặt $t = 1+x$. Suy ra $x = t-1$. Khi $x \to 0$ thì $t \to 1$.
Do đó:
$$I = \lim_{t\to 1} \frac{t^n - 1}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1\right)}{t-1}$$
$$= \lim_{t\to 1}\left(t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1\right) = n.$$ □

VÍ DỤ 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+ax}-1}{x}$ với $a \neq 0$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x\left(\sqrt{1+ax}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\sqrt{1+ax}+1} = \frac{a}{2}.$$ □

VÍ DỤ 8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+ax}-1}{x}$ với $a \neq 0$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ax}{x\left[\sqrt[3]{(1+ax)^2}+\sqrt[3]{1+ax}+1\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\sqrt[3]{(1+ax)^2}+\sqrt[3]{1+ax}+1} = \frac{a}{3}.$$
□

VÍ DỤ 9. Tính giới hạn $J = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ với $a \neq 0$, n là số nguyên và $n \geq 2$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[n]{1+ax}$. Suy ra $t^n = 1+ax \Leftrightarrow x = \dfrac{t^n-1}{a}$. Khi $x \to 0$ thì $t \to 1$. Do đó:
$$J = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{\frac{t^n-1}{a}} = \lim_{t\to 1} \frac{a(t-1)}{t^n-1} = \lim_{t\to 1} \frac{a(t-1)}{(t-1)\left(t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1\right)}$$
$$= \lim_{t\to 1} \frac{a}{t^{n-1}+t^{n-2}+t^{n-3}+\cdots+t+1} = \frac{a}{n}.$$ □

⚠ ***Chú ý:*** *Các giới hạn* $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x} = n$ *với* $n \in \mathbb{N}$; *và* $J = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x} = \dfrac{a}{n}$ *với* $a \neq 0$, *n là số nguyên và* $n \geq 2$ *được gọi là các "giới hạn cơ bản".*

VÍ DỤ 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2+2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1}+\frac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{1-x^3}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}+\frac{1-x^2}{(x^2-1)\left[\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4\right]}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)}-\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4}\right]$$

$$=\frac{-(1^2+1+1)}{(1+1)\cdot\left(\sqrt{5-1^3}+2\right)}-\frac{1}{\sqrt[3]{(1^2+7)^2}+2\sqrt[3]{1^2+7}+4}=-\frac{11}{24}.$$

□

VÍ DỤ 11. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}$.

② $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^3}$.

④ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{2017}+1}{x^{2018}+1}$.

Lời giải

① $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-4x^2+4x-3}{x^2-3x}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2-x+1)}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x+1}{x}=\dfrac{7}{3}$.

② $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2+4x+2)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)(6x-2)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^2+4x+2}{6x-2}=6$.

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^2+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2}{x^2+x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{x+1}=3$.

④ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{2017}+1}{x^{2018}+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^{2017}}{1-x^{2018}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^{2016}}{1+x+x^2+\cdots+x^{2017}}=\dfrac{2017}{2018}$.

□

VÍ DỤ 12. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{2x-\sqrt{3x+1}}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{4x^2-(3x+1)}{\left(x^2-1\right)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(4x+1)}{(x-1)(x+1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{4x+1}{(x+1)\left(2x+\sqrt{3x+1}\right)}\\
&= \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 13. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-2x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x-2}}{x^2-2x} &= \lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x\right)-(2x-2)}{\left(x^2-2x\right)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{x(x-2)\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x-2}\right)}\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 14. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{[(2x-1)-x]\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right]}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 15. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt{2-x}}{x^2+5x+6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}-\sqrt{2-x}}{x^2+5x+6}\\
=&\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt[3]{x^2-2x}-2)+(2-\sqrt{2-x})}{(x+2)(x+3)}\\
=&\lim_{x\to-2}\left[\frac{\sqrt[3]{x^2-2x}-2}{(x+2)(x+3)}+\frac{2-\sqrt{2-x}}{(x+2)(x+3)}\right]\\
=&\lim_{x\to-2}\left[\frac{x^2-2x-8}{(x+2)(x+3)(\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\sqrt[3]{x^2-2x}+4)}+\frac{2+x}{(x+2)(x+3)(2+\sqrt{2-x})}\right]\\
=&\lim_{x\to-2}\left[\frac{x-4}{(x+3)(\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\sqrt[3]{x^2-2x}+4)}+\frac{1}{(x+3)(2+\sqrt{2-x})}\right]\\
=&-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 16. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{(1-x)^{n-1}}=\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]$.

Với n là số tự nhiên không bé hơn 2, ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1}{n}$. Thật vậy, đặt $t=\sqrt[n]{x}\Rightarrow x=t^n$ và khi $x\to1$ thì $t\to1$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to1}\frac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}&=\lim_{t\to1}\frac{1-t}{1-t^n}\\
&=\lim_{t\to1}\frac{1-t}{(1-t)\left(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}\right)}\\
&=\lim_{t\to1}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}}\\
&=\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}\right]=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$. □

VÍ DỤ 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}$.

Lời giải

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-1998}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-(x^2+1998)+(x^2+1998)-1998}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x}-(x^2+1998)}{x}+\frac{x^2}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\left[(x^2+1998)\cdot\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x}+x\right]$$
$$=(0^2+1998)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)+0=-\frac{3996}{7}.$$

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}$.

② $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$.

③ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$.

④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(4x-5)}{(x+1)(7x-2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x-5}{7x-2}=\dfrac{4\cdot(-1)-5}{7\cdot(-1)-2}=1.$

② $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(2-x)(2+x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(2-x)=4.$

③ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+5)=8.$

④ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{3}{4}.$

□

BÀI 2. Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}$.

② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}$.

③ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$.

④ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-2}=0.$

② $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x^3-2x^2+1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2-x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2-x-1}=-4.$

③ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{5}{3}.$

④ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2-2x-3)}{(x-3)(x^3+3x^2+x+3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^3+3x^2+x+3}=0.$

□

BÀI 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{2x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}+1} = \dfrac{1}{2}$. □

BÀI 4. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{(x^2-4)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{(x+2)\left(x+\sqrt{3x-2}\right)} = \dfrac{1}{16}$. □

BÀI 5. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{(2x^3-3x^2)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{(2x-3)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = -\dfrac{1}{6}$. □

BÀI 6. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x+7-(x+2)^2}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-x^2-2x+3}{(x^3-4x+3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x-1)(x+3)}{(x-1)(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(x+3)}{(x^2+x-3)\left(\sqrt{2x+7}+x+2\right)} = \dfrac{2}{3}$. □

BÀI 7. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{4-3x^2}-2x-3}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-8x-9}{\sqrt{4-3x^2}-2x-3} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^2-8x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{4-3x^2-(2x+3)^2}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x^2-8x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{-7x^2-12x-5} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{(x+1)(-7x-5)}$

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x-9)\left(\sqrt{4-3x^2}+2x+3\right)}{-7x-5} = -10$. □

BÀI 8. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x}$.

Lời giải.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x}{3x\left[1+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1}{3+3\sqrt[3]{x+1}+3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = -\dfrac{1}{9}$.

□

BÀI 9. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{1-x+x^2}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)\left[\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)(1-x+x^2)}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)(1-x+x^2)}+\sqrt[3]{(1-x+x^2)^2}}=\frac{1}{3}.$$ □

BÀI 10. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-\sqrt[3]{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x^2+4x}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x(x-1)}{(x-1)(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-4x}{(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x-2)^2}+\sqrt[3]{(3x-2)(4x^2-x-2)}+\sqrt[3]{(4x^2-x-2)^2}\right]}$$
$$=\frac{4}{3}.$$ □

BÀI 11. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}+x-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x+2+(x-4)^3}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-12x^2+51x-62}{(x^2-3x+2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2-10x+31)}{(x-2)(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+31}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}-(x-4)\sqrt[3]{3x+2}+(x-4)^2\right]}$$
$$=\frac{5}{4}.$$ □

BÀI 12. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{4-3x}}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+21}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{4-3x}}{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+21}}=\lim_{x\to 4}\frac{(8-2x)\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x^2-x-12)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{-2(x-4)\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x-4)(x+3)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{-2\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+21}\right)}{(x+3)\left[\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x+4)(4-3x)}+\sqrt[3]{(4-3x)^2}\right]}$$
$$=-\frac{5}{3}.$$ □

BÀI 13. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$= \dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)+(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$= \dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)}{x^3} + \dfrac{(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$= \dfrac{8x^3}{x^3\left(\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+x+3\right)} + \dfrac{x^3}{x^3\left[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\sqrt[3]{(9x^2+27x+27)^2}\right]}$

$= \dfrac{8}{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+x+3} + \dfrac{1}{(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\sqrt[3]{(9x^2+27x+27)^2}}$

Do đó:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$

$= \dfrac{8}{\sqrt{8\cdot 0^3+0^2+6\cdot 0+9}+0+3} + \dfrac{1}{(0+3)^2+(0+3)\sqrt[3]{9\cdot 0^2+27\cdot 0+27}+\sqrt[3]{(9\cdot 0^2+27\cdot 0+27)^2}}$

$= \dfrac{37}{27}$. □

BÀI 14. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = \dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} + \dfrac{2-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

$= \dfrac{-(x^3-1)}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)} + \dfrac{1-x^2}{(x^2-1)\left[4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}\right]}$

$= \dfrac{-(x^2+x+1)}{(x+1)\left(\sqrt{5-x^3}+2\right)} - \dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{x^2+7}+\sqrt[3]{(x^2+7)^2}}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5-x^3}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1} = -\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{12} = -\dfrac{11}{24}$. □

BÀI 15. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2} = \dfrac{\sqrt[3]{5x+11}-3}{x^2-3x+2} + \dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$

$= \dfrac{8x-16}{(x-2)(x-1)\left[\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right]} - \dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}$

$= \dfrac{8}{(x-1)\left[\sqrt[3]{(8x+11)^2}+3\sqrt[3]{8x+11}+9\right]} - \dfrac{1}{(x-1)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2} = \dfrac{8}{27}-\dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{54}$. □

BÀI 16. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2}=\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-3x+2}+\frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x^2-3x+2}$$
$$=\frac{3x-3}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}+\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}$$
$$=\frac{3}{(x-2)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)}+\frac{x+1}{(x-2)\left(\sqrt{x^2+8}+3\right)}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x^2+8}-5}{x^2-3x+2}=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{13}{12}$. □

BÀI 17. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2}=\frac{x-\sqrt{x+2}}{x-2}+\frac{3x-\sqrt{5x+26}}{x-2}$$
$$=\frac{x^2-x-2}{(x-2)\left(x+\sqrt{x+2}\right)}+\frac{9x^2-5x-26}{(x-2)\left(3x+\sqrt{5x+26}\right)}$$
$$=\frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}}+\frac{9x+13}{3x+\sqrt{5x+26}}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+26}}{x-2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{31}{12}=\dfrac{10}{3}$. □

BÀI 18. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2}$.

Lời giải.

Ta có:
$$\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2}=\frac{\sqrt[3]{x^2-x+2}-2}{2x^2+5x+2}+\frac{\sqrt{x+3}-1}{2x^2+5x+2}$$
$$=\frac{x^2-x-6}{(x+2)(2x+1)\left[\sqrt[3]{(x^2-x+2)^2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right]}+\frac{x+2}{(x+2)(2x+1)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}$$
$$=\frac{x-3}{(2x+1)\left[\sqrt[3]{(x^2-x+2)^2}+2\sqrt[3]{x^2-x+2}+4\right]}+\frac{1}{(2x+1)\left(\sqrt{x+3}+1\right)}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x+2}+\sqrt{x+3}-3}{2x^2+5x+2}=\dfrac{5}{36}-\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{36}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 19. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^{20}\cdot(x-2)^{20}}{(x-2)^{20}\cdot(x+4)^{10}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}}=\frac{3^{20}}{6^{10}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{10}.$$ □

BÀI 20. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{100}-1)-2(x-1)}{(x^{50}-1)-2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1-2)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x+1-2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{99}+x^{98}+\cdots+x-1}{x^{49}+x^{48}+\cdots+x-1}=\frac{98}{48}=\frac{49}{24}.$$ □

BÀI 21. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^5}-1}{1-x^4}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{x^5}-1}{1-x^4}=\dfrac{x^5-1}{-(x^4-1)\left(\sqrt{x^5}+1\right)}=\dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{-(x^3+x^2+x+1)\left(\sqrt{x^5}+1\right)}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^5}-1}{1-x^4}=-\dfrac{5}{8}$. □

BÀI 22. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}-3}{x-1}+\dfrac{2\sqrt{x}-2}{x-1}=\dfrac{3(x^2-1)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1\right)}+\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x}-1\right)}$

$=\dfrac{3(x+1)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}-5}{x-1}=\dfrac{6}{3}+1=3$. □

BÀI 23. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}+\dfrac{x^2+x}{x+1}=\dfrac{x+1}{(x+1)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1\right)}+\dfrac{x(x+1)}{x+1}$

$=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}+x.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{1}{3}-1=-\dfrac{2}{3}$. □

BÀI 24. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}$.

Lời giải.

$\dfrac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x}-2}=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{2x}-2}+\dfrac{x^4-3x^3+x^2+4}{\sqrt{2x}-2}$

$=\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{(2x-4)(\sqrt{x-1}+1)}+\dfrac{(x-2)(x^3-x^2-x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2x-4}$

$=\dfrac{\sqrt{2x}+2}{2(\sqrt{x-1}+1)}+\dfrac{(x^3-x^2-x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+x^2+x+1}{x+1}=1+0=1$. □

BÀI 25. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}=\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-\sqrt{1+4x}}{x}+\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$

$=\sqrt{1+4x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+6x}-1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+4x}-1}{x}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+4x}\cdot\sqrt{1+6x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{6}{2}+\dfrac{4}{2}=5.$ □

BÀI 26. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$.

Lời giải.

Ta có:

$\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt{1+2x}}{x}+\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$

$=\sqrt{1+2x}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}+\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}.$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\cdot\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{2}=\dfrac{7}{3}.$ □

BÀI 27. Cho $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}$ và $J=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$. Tính $I+J$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{2x+1}+1\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}=1\end{aligned}$$

$$J=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+2)=3$$

Vậy $I+J=4$. □

BÀI 28. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+9}-3\right)+\left(\sqrt{x+16}-4\right)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}+\frac{\sqrt{x+16}-4}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)}+\frac{x}{x\left(\sqrt{x+16}+4\right)}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}+\frac{1}{\sqrt{x+16}+4}\right]\\&=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\\&=\frac{7}{24}.\end{aligned}$$

□

BÀI 29. Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}$.

Lời giải.
Đặt $t=\sqrt[4]{x+9} \Rightarrow x=t^4-9$, và khi $x\to 7$ thì $t\to 2$. Khi đó:

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[4]{x+9}-2}{x-7}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^4-16}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{(t-2)(t^3+2t^2+4t+8)}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^3+2t^2+4t+8}=\frac{1}{32}.$$

□

BÀI 30. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sqrt{x+1}-2}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2(1+x-1)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}+\frac{8-(8-x)}{x\left(4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}\right)}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{1+x}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right]\\&=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.\end{aligned}$$

□

BÀI 31. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt[5]{2x-1}-1}{x-1}+\dfrac{1-\sqrt[6]{3x-2}}{x-1}\right]=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{10}$. □

BÀI 32. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{x}$.

Lời giải.
Ta có

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}\sqrt[4]{1+4x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}(\sqrt[4]{1+4x}-1)+\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x}-1)+\sqrt{1+4x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}\sqrt[3]{1+3x}(\sqrt[4]{1+4x}-1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}(\sqrt[3]{1+3x}-1)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\\&=3.\end{aligned}$$

□

BÀI 33. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{2x+1}-(1+x)}{x^2}-\frac{\sqrt[3]{3x+1}-(1+x)}{x^2}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{2x+1-x^2-2x-1}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(1+x)\right)}-\frac{3x+1-x^3-3x^2-3x-1}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt{2x+1}+(1+x)\right)}+\frac{x^3+3x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2\right)}\right]\\
=&\lim_{x\to 0}\left[\frac{-1}{\sqrt{2x+1}+(1+x)}+\frac{x+3}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}+(1+x)\sqrt[3]{3x+1}+(x+1)^2}\right]\\
=&1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

□

BÀI 34. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ với $\alpha\cdot\beta\neq 0$ và m, n là các số nguyên dương.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-\sqrt[m]{1+\alpha x}}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}$$

$$=\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}+\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}=1\cdot\dfrac{\beta}{n}+\dfrac{\alpha}{m}=\dfrac{\alpha}{m}+\dfrac{\beta}{n}$. □

BÀI 35. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ với $a\neq 0$ và α, β là các số nguyên dương.

Lời giải.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\lim_{x\to a}\frac{a^\alpha\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha-1\right]}{a^\beta\left[\left(\frac{x}{a}\right)^\beta-1\right]}=\lim_{x\to a}\left[a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\left(1+\frac{x}{a}-1\right)^\alpha-1}{\frac{x}{a}-1}\cdot\frac{\frac{x}{a}-1}{\left(1+\frac{x}{a}-1\right)^\beta-1}\right]$$

$$=a^{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}.$$

□

BÀI 36. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$ với n là số nguyên dương.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=\frac{x-1}{x-1}+\frac{x^2-1}{x-1}+\cdots+\frac{x^n-1}{x-1}$$

$$=1+(x+1)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right).$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

BÀI 37. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=\frac{x^{n+1}-nx-x+n}{(x-1)^2}=\frac{\left(x^{n+1}-x\right)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x(x^n-n)-n(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{x(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)-n(x-1)}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{x^n-x^{n-1}+\cdots+x-n}{x-1}==1+(x+1)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1\right).$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. □

BÀI 38. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$

$$=\frac{(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}\right)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$$
$$=\frac{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1}-na^{n-1}}{x-a}$$
$$=\frac{x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}x-(n-1)a^{n-1}}{x-a}$$
$$=\frac{x^{n-1}-a^{n-1}+ax^{n-2}-a^{n-1}+a^2x^{n-3}-a^{n-1}+\cdots+a^{n-2}x-a^{n-1}}{x-a}$$
$$=\frac{(x-a)\left(x^{n-2}+ax^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x+a^{n-2}\right)}{x-a}+\frac{a(x-a)\left(x^{n-3}+ax^{n-4}+\cdots+a^{n-4}x+a^{n-3}\right)}{x-a}$$
$$+\frac{a^2(x-a)\left(x^{n-4}+ax^{n-5}+\cdots+a^{n-5}x+a^{n-4}\right)}{x-a}+\cdots+\frac{a^{n-2}(x-a)}{x-a}$$
$$=\left(x^{n-2}+ax^{n-3}+\cdots+a^{n-3}x+a^{n-2}\right)+a\left(x^{n-3}+ax^{n-4}+\cdots+a^{n-4}x+a^{n-3}\right)$$
$$+a^2\left(x^{n-4}+ax^{n-5}+\cdots+a^{n-5}x+a^{n-4}\right)+\cdots+a^{n-2}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}=(n-1)a^{n-2}+(n-2)a^{n-2}+(n-3)a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}=$ $a^{n-2}\left[1+2+\cdots+(n-1)\right]=\dfrac{n(n-1)a^{n-2}}{2}$. □

BÀI 39. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Lời giải.

Ta có:

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x-a)(x+a)}}$$
$$=\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}.$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$. □

BÀI 40. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

Lời giải.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-1}{x}-\frac{\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}\right)=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$ □

BÀI 41. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

Lời giải.

$$\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}=\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-1}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}+\frac{1-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$$

$$=\frac{\frac{x}{3}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\frac{x}{2}\cdot\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1\right]}-\frac{\frac{x}{4}\cdot\left(1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}\right)}{\frac{x}{2}\cdot\left[\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+1\right]}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{x}{3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{1-\frac{x}{2}}}{\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^3}+\sqrt[4]{\left(1+\frac{x}{4}\right)^2}+\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}+1}$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{36}$. □

BÀI 42. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Lời giải.

Nhận xét: $\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}=\dfrac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt[n]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$.

Khi đó: $\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}\cdots\dfrac{1-\sqrt[n]{x}}{1-x}$

$=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}\cdots\dfrac{1}{1+\sqrt[n]{x}+\cdots+\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

Do đó: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\cdots\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n!}$. □

BÀI 43. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$.

Lời giải.

Ta có:
$\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$

$$=\frac{2x\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1}+\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\cdots+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{n-1}\right]}{x}$$

$$=2\left[\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-1}+\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{n-2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\cdots+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^{n-1}\right].$$

Do đó: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}=2n$. □

DẠNG 2.2. Giới hạn dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty$

Dạng 1: $I = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *với* $P(x), Q(x)$ *là đa thức hoặc các hàm đại số .*

Phương pháp: Gọi $p = \deg P(x), q = \deg Q(x)$ *và* $m = \min(p, q)$. *Chia cả tử và mẫu cho* x^m *ta có kết luận. (*$\deg P(x)$ *là bậc cao nhất của đa thức* $P(x)$*).*

+ *Nếu* $p \le q$ *thì tồn tại giới hạn.*

+ *Nếu* $p > q$ *thì không tồn tại giới hạn.*

Dạng 2: Giới hạn $\infty - \infty$.

Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$

Dạng 3: Giới hạn $0.\infty$.

Phương pháp sử dụng các biểu thức liên hợp đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$.

VÍ DỤ 1. Tính $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$

Lời giải

Ta có $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 3}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}}{1 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$ □

VÍ DỤ 2. Tính $D = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}}$

Lời giải

Ta có:

$$D = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3 + x^2 + 1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + |x|\sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1 - \sqrt{1 + \dfrac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}}} = \frac{0}{\sqrt[3]{8}} = 0.$$ □

VÍ DỤ 3. Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$.

Lời giải

Ta có

$$D = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}} + 1} = \frac{1}{2}.$$ □

VÍ DỤ 4. Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Lời giải

Ta có:

$$D = \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

VÍ DỤ 5. Tìm giới hạn $D = \lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{9x^4+7}-\sqrt[3]{27x^6-5}\right)$.

Lời giải

Ta có

$$D = \lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(\sqrt{9x^4+7}-3x^2\right)+x^2\left(3x^2-\sqrt[3]{27x^6-5}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2(9x^4+7-9x^4)}{\sqrt{9x^4+7}+3x^2}+\frac{x^2(27x^6+5-27x^6)}{\sqrt[3]{(27x^6-5)^2}+3x^2\sqrt[3]{27x^6-5}+9x^4}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{7x^2}{\sqrt{9x^4+7}+3x^2}+\frac{5x^2}{\sqrt[3]{(27x^6-5)^2}+3x^2\sqrt[3]{27x^6-5}+9x^4}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{7}{\sqrt{9+\frac{7}{x^4}}+3}+\frac{\frac{5}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(27-\frac{5}{x^6}\right)^2}+3\sqrt[3]{27-\frac{5}{x^6}}+9}\right] = \frac{7}{6}. \quad \square$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính $D = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

Lời giải.

Ta có $D = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4x+1}{x^4-5x^3+2x^2-x+3}$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0 \quad \square$$

BÀI 2. Tính $D = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$

Lời giải.

Ta có:

$$D = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{x\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{\sqrt[3]{8+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{8}} = 1. \quad \square$$

BÀI 3. Tính $D = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-6+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}{8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}=\dfrac{-6}{8}=-\dfrac{3}{4}.$$
□

BÀI 4. Tính $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-6x^5+7x^3-4x+3}{8x^5-5x^4+2x^2-1}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-6+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{4}{x^4}+\dfrac{3}{x^5}}{8-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^5}}=\dfrac{-6}{8}=-\dfrac{3}{4}.$$
□

BÀI 5. Tính $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{x\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\dfrac{3}{2}.$$
Suy ra $D=\dfrac{3}{2}$.
□

BÀI 6. Tính $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt[3]{6x^2+5}}{\sqrt[4]{16x^4+3}-\sqrt[5]{8x^4+7}}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{|x|\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-x\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{-x\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-x\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{9+\dfrac{2}{x^2}}-\sqrt[3]{\dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{x^3}}}{-\sqrt[4]{16+\dfrac{3}{x^4}}-\sqrt[5]{\dfrac{8}{x}+\dfrac{7}{x^5}}}=\dfrac{3}{2}.$$
□

BÀI 7. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

Lời giải.
Ta có
$$D=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^{50}\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\left(2-\dfrac{3}{x}\right)^{20}\left(3+\dfrac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}.$$
□

BÀI 8. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

Lời giải.
Ta có

$$D=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}=4.$$ □

BÀI 9. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x}+3x}{\sqrt{4x^2+1}-x+2}$.

Lời giải.
Ta có

$$D=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3x}{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}+3}{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-1+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}.$$

□

BÀI 10. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)$.

Lời giải.
Ta có

$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)(x+b)-x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+b)x+ab}{x\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a+b+\frac{ab}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{b}{x}\right)}+1}=\frac{a+b}{2}.$$ □

BÀI 11. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-5-\sqrt{4x^2-4x-1}\right)$.

Lời giải.
Ta có

$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-5)^2-(4x^2-4x-1)}{2x-5+\sqrt{4x^2-4x-1}}=\frac{-16x+26}{2x-5+x\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{-16+\frac{26}{x}}{2-\frac{5}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}}=-4.$$ □

BÀI 12. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$.

Lời giải.
Ta có

$$D=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2}-x+x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2}+x^2}+\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{2}{x^2}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^3}}+1}-\frac{\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)=0.$$ □

BÀI 13. Tính giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}\left(x^3+1-(x^3-1)\right)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}=1.$$ □

BÀI 14. Tìm giới hạn $D=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+5}-\sqrt[3]{8x^3-1}\right)$.

Lời giải.

Ta có:

$$D=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+5}-2x+2x-\sqrt[3]{8x^3-1}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{4x^2+5-4x^2}{\sqrt{4x^2+5}+2x}+\frac{8x^3-(8x^3-1)}{\sqrt[3]{(8x^3-1)^2}+2x\sqrt[3]{8x^3-1}+4x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x}{|x|\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}+2x}+\frac{x}{x\sqrt[3]{\left(8-\frac{1}{x^3}\right)^2}+2x^2\sqrt[3]{8-\frac{1}{x^3}}+4x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{\sqrt{4+\frac{5}{x^2}}+2}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\left(8-\frac{1}{x^3}\right)^2}+2\sqrt[3]{8-\frac{1}{x^3}}+4}\right)=\frac{5}{4}+\frac{0}{12}=\frac{5}{4}.$$ □

DẠNG 2.3. Tính giới hạn hàm đa thức, hàm phân thức và giới hạn một bên.

- *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\neq 0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty$ *thì:*

① $$\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}+\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ cùng dấu}\\ -\infty \text{ nếu } L \text{ và } \lim\limits_{x\to x_0}g(x) \text{ trái dấu.}\end{cases}$$

② $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}0 & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\pm\infty\\ +\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)>0\\ -\infty & \text{nếu } \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0 \text{ và } L\cdot g(x)<0.\end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=L.$

VÍ DỤ 1. Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}}(x^3-2x^6+1)$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^5-x^4+4x^3-3)$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^5-x^4+4x^3-3)$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3-x^2+4x+2)$;

⑤ $I_5=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-x^2+4x+2)$;

⑥ $I_6=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^6+2x^3-4x^2+4x)$.

Lời giải

① $I_1 = \lim\limits_{x \to \sqrt[3]{2}} \left(x^3 - 2x^6 + 1\right) = (\sqrt[3]{2})^3 - 2(\sqrt[3]{2})^6 = 2 - 2 \cdot 2^2 + 1 = -5$;

② $I_2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^5 \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^5}\right)$.

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x^5}\right) = 2 > 0$ nên

$$I_2 = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3\right) = +\infty.$$

③ $I_3 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3\right) = -\infty$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3 - x^2 + 4x + 2\right) = -\infty$;

⑤ $I_5 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3 - x^2 + 4x + 2\right) = +\infty$;

⑥ $I_6 = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^6 + 2x^3 - 4x^2 + 4x\right) = +\infty$.

□

VÍ DỤ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2 - 2x + 6}$;

② $I_2 = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{-x^2 + 5}{x - 3}$;

③ $I_3 = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x^2 + \sqrt{3 - x}}{x - 3}$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2}$.

Lời giải

① $I_1 = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x^2 - 2x + 6} = 0$ vì $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 6) = +\infty$;

② Ta có $\lim\limits_{x \to 3^+} (-x^2 + 5) = -4 < 0$, $\lim\limits_{x \to 3^+} (x - 3) = 0$ và $x - 3 > 0, \forall x > 3$.

Do đó $I_2 = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{-x^2 + 5}{x - 3} = -\infty$.

③ $I_3 = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x^2 + \sqrt{3 - x}}{x - 3} = -\infty$.

④ Ta có $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{4 - x^2}{x + 2} = \lim\limits_{x \to -2^+} (2 - x) = 4$.

□

VÍ DỤ 3. Tính giới hạn một bên của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & \text{khi } x<1 \\ x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x=1$;

② $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ \dfrac{x-1}{6} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ tại $x=2$.

Lời giải

① Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}(x-2) = -1$ và $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x = 1$.

② Ta có $\lim\limits_{x\to2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \dfrac{1}{6}$ và $\lim\limits_{x\to2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{1}{6}$.

Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to2} g(x) = \dfrac{1}{6}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Tính các giới hạn sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty}(-6x^4+2x^3-x+5)$;

② $I_2 = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}+2x\right)$;

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-3}-2x\right)$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt[3]{x^3-1}\right)$.

Lời giải.

① $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4\left(-6+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}\right) = -\infty$.

② $I_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}+2\right) = +\infty$.

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{4-\dfrac{3}{x^2}}-2\right) = -\infty$.

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1+\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}\right) = -\infty$.

□

BÀI 2. Tính các giới hạn sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{\sqrt{-4-4x+3x^2}}{x+1}$;

② $I_2 = \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{3x+1}{2-x}$;

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{2x^2-5x+2}{(x-2)^2}$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{\sqrt{x+7}-2}{|x^2-9|}$.

Lời giải.

① Ta có $\lim\limits_{x\to -1^-}\left(\sqrt{-4-4x}+3x^2\right)=3>0$, $\lim\limits_{x\to -1^-}(x+1)=$ và $x+1<0$, $\forall x<-1$.
Do đó $I_1=-\infty$.

② $I_2=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x+1}{2-x}=+\infty$.

③ $I_3=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x-1}{x-2}=+\infty$.

④ $I_4=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x+3}{(9-x^2)(\sqrt{x+7}+2)}=\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{1}{(3-x)(\sqrt{x+7}+2)}=\dfrac{1}{24}$.

□

BÀI 3. Tính giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$.

Lời giải.
Xét các giới hạn một bên:
$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-1}{x-3}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-1}{x-3}=+\infty$.
Từ đó suy ra $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-3)^2}$ không tồn tại. □

BÀI 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ m-2x & \text{khi } x\le 1\end{cases}$. Xác định các giá trị của tham số m để $f(x)$ có giới hạn tại điểm $x=1$.

Lời giải.
Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$. Để tồn tại $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ thì điều kiện cần và đủ là $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m-2=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 5. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to +\infty}(4x^3-\sqrt{x^2+2})$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-\sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{x^2+\sqrt{x}}$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^6+x^4-1}}{1-x^2}$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{16x^8+3}-x^2}{x(x+2)(x+4)(x+6)}$.

Lời giải.

① $I_1=+\infty$. ② $I_2=-\sqrt[3]{2}$. ③ $I_3=\sqrt[3]{2}$. ④ $I_4=4$.

□

BÀI 6. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to -4^+}\dfrac{x^3-16x}{|x+4|}$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{|x+4|}$.

Lời giải.

① $I_1 = \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{x(x^2-16)}{x+4} = \lim\limits_{x\to -4^+} x(x-4) = 32.$

② $I_2 = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{\sqrt{x^2-16}}{-(x+4)} = \lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{-x-4}} = +\infty.$

□

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+3ax-4a}{x-1} & \text{khi } x<1 \\ 2bx+1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Biết rằng a, b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$.

① Tìm mối quan hệ giữa a và b.

② Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2+b^2$.

Lời giải.

① Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} a(x-4) = -3a$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2b+1$.
Hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x=1$ khi và chỉ khi $-3a = 2b+1$.

② Từ câu a) ta có $1 = (3a+2b)^2 \leq (9+4)(a^2+b^2) \Rightarrow P = a^2+b^2 \geq \dfrac{1}{13}$. Đẳng thức có được khi và chỉ khi $a = -\dfrac{3}{13}$ và $b = -\dfrac{2}{13}$. Vậy $\min P = \dfrac{1}{13}$.

□

BÀI 8. Tính các giới hạn sau:

① $I_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^5+x^4-4x^2+1}{x^3-1}$;

② $I_2 = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^4+9x^3+11x^2-4}{(x+2)^2}$;

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{11}+1}{x^7+1}$;

④ $I_4 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\cdots+x^{2018}-2018}{x^2-1}$.

Lời giải.

① Ta có $I_1 = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x^4+3x^3+3x^2-x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^4+3x^3+3x^2-x-1}{x^2+x+1} = 2.$

② Ta có $2x^4+9x^3+11x^2-4 = (x+2)^2(2x^2+x-1)$, suy ra $I_2 = \lim\limits_{x\to -2} (2x^2+x-1) = 5.$

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^{10}-x^9+x^8-\cdots-x+1)}{(x+1)(x^6-x^5+\cdots-x+1)} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{10}-x^9+x^8-\cdots-x+1}{x^6-x^5+\cdots-x+1} = \dfrac{11}{7}.$

④ Ta có

$$\begin{aligned} x+x^2+\cdots+x^{2018}-2018 &= (x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^{2018}-1) \\ &= (x-1)\left[1+(1+x)+\cdots+(1+x+x^2+\cdots+x^{2017})\right]. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} I_4 &= \lim_{x\to 1} \frac{1+(1+x)+\cdots+(1+x+x^2+\cdots+x^{2017})}{x+1} \\ &= \frac{1+2+\cdots+2018}{2} = \frac{2037171}{2}. \end{aligned}$$

□

BÀI 9. Tìm các giá trị của a, b sao cho $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=0$.

Lời giải.

Nếu $a\le 0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=+\infty$. Do đó, ta chỉ xét với $a>0$. Khi đó, ta có

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2+(1-2ab)x+1-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+ax+b}.$$

Suy ra $1-a^2=0\Leftrightarrow a=\pm1$.

- Với $a=1$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2b+\dfrac{1-b^2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{b}{x}}=0$ khi $b=\dfrac{1}{2}$.
- Với $a=-1$ tương tự ta tìm được $b=-\dfrac{1}{2}$. □

BÀI 10. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-1+\sqrt{5-2x}}{x^2+x-2}$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\sqrt{2-x}-\sqrt[3]{9-x}}{1-x}$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt[3]{7+6x}-\sqrt{5+4x}}{(x+1)^2}$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2017x}\cdot\sqrt[3]{1+2018x}-1}{x}$.

Lời giải.

① Ta có $I_1=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x-1)(x-1-\sqrt{5-2x})}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-2}{(x-1)(x-1-\sqrt{5-2x})}=-\dfrac{2}{9}$.

② Ta có

$$\begin{aligned}I_2&=\lim_{x\to1}\frac{2(\sqrt{2-x}-1)+(2-\sqrt[3]{9-x})}{1-x}\\&=\lim_{x\to1}\frac{2}{\sqrt{2-x}+1}+\lim_{x\to1}\frac{-1}{4+2\sqrt[3]{9-x}+\sqrt[3]{(9-x)^2}}=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}.\end{aligned}$$

③ Ta có

$$\begin{aligned}I_3&=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{7+6x}-(2x+3)+[(2x+3)-\sqrt{5+4x}]}{(x+1)^2}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt[3]{7+6x}-(2x+3)}{(x+1)^2}+\lim_{x\to-1}\frac{(2x+3)-\sqrt{5+4x}}{(x+1)^2}=-4+2=-2.\end{aligned}$$

④ Ta có

$$\begin{aligned}I_4&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2017x}(\sqrt[3]{1+2018x}-1)+\sqrt{1+2017x}-1}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2018\sqrt{1+2017x}}{\sqrt[3]{(1+2018x)^2}+\sqrt[3]{1+2018x}+1}+\lim_{x\to0}\frac{2017}{\sqrt{1+2017x}+1}=\frac{10087}{6}.\end{aligned}$$

□

BÀI 11. Tính các giới hạn sau:

① $I_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x-1\right)$;

② $I_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x-1}+x-1\right)$;

③ $I_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-\sqrt[3]{8x^3+3x^2}\right)$;

④ $I_4=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2017}{1-x^{2017}}-\dfrac{2018}{1-x^{2018}}\right)$.

Lời giải.

① Ta có $I_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x+1} = 0.$

② $I_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{\sqrt{x^2-2x-1}-x+1} = 0.$

③ $I_3 = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2-x}-2x) + \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-\sqrt[3]{8x^3+3x^2}) = -\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}.$

④ Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{2017}{1-x^{2017}}-\frac{1}{1-x}\right) &= \lim_{x\to1}\frac{(1-x^{2016})+(1-x^{2015})+\cdots+(1-x)}{1-x^{2017}}\\ &= \frac{2016+2015+\cdots+1}{2017} = 1008\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\left(\frac{2018}{1-x^{2018}}-\frac{1}{1-x}\right) &= \lim_{x\to1}\frac{(1-x^{2017})+(1-x^{2016}+\cdots+(1-x))}{1-x^{2018}}\\ &= \frac{2017+2016+\cdots+1}{2018} = \frac{2017}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $I_4 = 1008 - \dfrac{2017}{2} = -\dfrac{1}{2}.$

□

BÀI 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1 HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

⚠ *Hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là **gián đoạn** tại điểm đó.*

2 HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

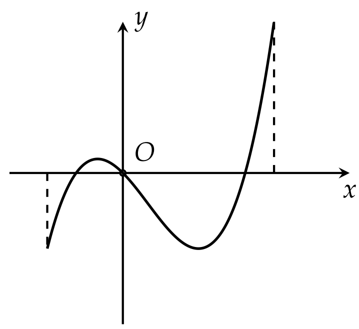
Định nghĩa 2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Định nghĩa 3. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

⚠ *Khái niệm hàm số liên tục trên nửa khoảng, như $(a; b]$, $[a; +\infty)$, ... được định nghĩa một cách tương tự.*

⚠

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó



3 MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1.

1. *Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.*
2. *Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.*

Định lí 2. *Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó*

1. *Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0.*
2. *Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.*

Định lí 3. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

⚠ *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a; b)$.*

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 3.1. Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tính $f(x_0)$.

Bước 2. Tìm $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.

— *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *thì hàm số* $f(x)$ *liên tục tại điểm* x_0.

— *Nếu* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ *thì hàm số* $f(x)$ *không liên tục (gián đoạn) tại điểm* x_0.

VÍ DỤ 1. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu} \quad x \neq 1 \\ a & \text{nếu} \quad x = 1 \end{cases}$ với a là hằng số.

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có:

— $f(1) = a$.

— $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$.

- Nếu $a = 2$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
- Nếu $a \neq 2$ thì hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

□

VÍ DỤ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 0$.

Lời giải

Ta có:

— $f(0) = 0$.

— $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+1) = 1$.

— $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$.

Ta có: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 0$. □

VÍ DỤ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(1) = -2$.

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-5}{x+1} = -2 = f(1)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. □

VÍ DỤ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x-3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có:

— $f(2) = 1$.

— $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{2x-3}}{2 - x} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - (2x-3)}{(2-x)(1 + \sqrt{2x-3})} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2(2-x)}{(2-x)(1 + \sqrt{2x-3})}$
$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{1 + \sqrt{2x-3}} = 1 = f(2)$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$. □

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} & \text{khi } x \neq 4 \\ -\dfrac{3}{2} & \text{khi } x = 4 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại điểm $x_0 = 4$.

Lời giải

Ta có:

— $f(4) = -\dfrac{3}{2}$.

— $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x+5} + 3)(x-4)}{(x+5-9)(\sqrt{x}+2)}$
$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} + 3}{\sqrt{x} + 2} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \neq f(4)$.

Vậy hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x = 4$. □

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} ax+\dfrac{1}{4} & \text{nếu} \quad x\le 2 \\ \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu} \quad x>2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{1}{4}+2a=f(2)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{(x-2)\left(4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}\right)}\\ &= \lim_{x\to 2^+}\frac{3}{4+2\sqrt[3]{3x+2}+\sqrt[3]{(3x+2)^2}}=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Điều kiện cần và đủ để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=2$ là $2a+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=0$. □

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{nếu } x\ne 2 \\ m^2+3m & \text{nếu } x=2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0=2$.

Lời giải

Ta có: $f(2)=m^2+3m$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4$.

Để hàm số liên tục tại điểm $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 4=m^2+3m\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-4 \end{array}\right.$. □

VÍ DỤ 8. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & \text{nếu } x<0 \\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x\ge 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0=0$.

Lời giải

Ta có: $f(0)=m+\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}\\ &= \lim_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-2}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}=-1.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=m+\dfrac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+\dfrac{1}{2}=-1\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$. □

VÍ DỤ 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1} & \text{nếu } x<1\\ 14ax & \text{nếu } x\geq 1\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải

Ta có: $f(1)=14a$.
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 14ax=14a$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^3-\sqrt{8-4x}}{x-1}&=\lim_{x\to 1^-}\frac{4x^6-(8-4x)}{(x-1)(2x^3+\sqrt{8-4x})}\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8)}{(x-1)(2x^3+\sqrt{8-4x})}\\&=\lim_{x\to 1^-}\frac{4x^5+4x^4+4x^3+4x^2+4x+8}{2x^3+\sqrt{8-4x}}=7\end{aligned}$$

$f(x)$ liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 14a=7\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{2}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ 5a^2-3 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=1$.

Lời giải.
Ta có: $f(1)=5a^2-3$.
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=2$
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow 5a^2-3=2\Leftrightarrow a^2=1\Leftrightarrow a=\pm 1$.
□

BÀI 2. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{nếu } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{nếu } x=0\end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0=0$.

Lời giải.
Ta có: $f(0)=2a-\dfrac{5}{4}$.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\dfrac{1}{4}$.
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Leftrightarrow 2a-\dfrac{5}{4}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{4}$. □

BÀI 3. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a} & \text{nếu } x\neq 1\\ 3x+a & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm các giá trị của tham số a để $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Lời giải.
Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{3x+a}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a}$.
Nếu $a=-3$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2}{3}=1>0$ và $f(1)=0$.

Nên hàm số không liên tục tại $x=1$.
Nếu $a \neq -3$ thì $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{3x+a} = 0$, nhưng $f(1) = 3+a \neq 0$.
Nên hàm số không liên tục tại $x=1$.
Vậy không có giá trị nào của a thỏa mãn yêu cầu bài toán. □

BÀI 4. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+3 & \text{nếu } x<1 \\ 5 & \text{nếu } x=1 \\ 2x-3b & \text{nếu } x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải.
Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2+bx+3) = a-b+3$,
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (2x-3b) = 2-3b$.
Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.
Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a-b+3=5 \\ 2-3b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$. □

BÀI 5. Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{nếu } x<0 \\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{nếu } x\geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Lời giải.
Ta có: $f(0) = m + \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} + \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right]} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-(1+x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}\right]} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(m + \dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right) = m + \dfrac{1}{2}$.
Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^+} = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$. □

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-a^2}{x-a}+b & \text{nếu } x>a \\ 1 & \text{nếu } x=a \\ b-2x & \text{nếu } x<a \end{cases}$. Tìm a, b để hàm số liên tục tại $x_0 = a$.

Lời giải.

Ta có: $f(a) = 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+} f(x) &= \lim_{x\to a^+}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}+b\right) = \lim_{x\to a^+}\left[\frac{(x-a)(x-b)}{x-a}+b\right]\\ &= \lim_{x\to a^+}[(x+a)+b] = 2a+b.\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}(b-2x) = b-2a$.
Để hàm số liên tục tại $x_0 = a$ thì $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

$\Leftrightarrow 2a+b = b-2a = 1 \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b &= 1\\ b-2a &= 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=1\\ a=0\end{cases}$. ☐

BÀI 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{2x-3}}{x-2} & \text{nếu } x\neq 2\\ \dfrac{a}{6} & \text{nếu } x=2\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Lời giải.

Ta có: $f(2) = \dfrac{a}{6}$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[4]{2x-3}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2}+\frac{\sqrt[4]{2x-3}-1}{x-2}\right) = L_1+L_2.$$

$$\begin{aligned}L_1 &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-3}+1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x-3+1}{(x-2)[(\sqrt[3]{x-3})^2-\sqrt[3]{x-3}+1]}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt[3]{x-3})^2-\sqrt[3]{x-3}+1} = \frac{1}{3}.\\ L_2 &= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{2x-3}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt[4]{2x-3}+1)(\sqrt{2x-3}+1)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{2}{(\sqrt[4]{2x-3}+1)(\sqrt{2x-3}+1)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = L_1+L_2 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$.

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \dfrac{a}{6} = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow a = 5$. ☐

BÀI 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ 15 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm số tự nhiên n để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

Lời giải.

Ta có: $f(1) = 15$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1+x^2-1+\cdots+x^n-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)\right]}{x-1}\\ &= 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \dfrac{n(n+1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n = 5$. ☐

DẠNG 3.2. Hàm số liên tục trên một tập hợp

① *Hàm đa thức liên tục trên* $\mathbb{R}$.

② *Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*

VÍ DỤ 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ -3 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$.

② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 1}{(x - 1)^2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Lời giải

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

— Tại điểm $x = -1$, ta có $f(-1) = -3$.
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim\limits_{x \to -1} (x - 2) = -3 = f(-1)$.
Do đó hàm số liên tục tại $x = -1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{2x + 1}{(x - 1)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

— Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 1}{(x - 1)^2} = +\infty \neq f(-1)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

□

VÍ DỤ 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{khi } x \geq 2 \\ 6x + 1 & \text{khi } x < 2. \end{cases}$

② $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 5 & \text{khi } x > 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \\ 2x + 1 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

③ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 3 \\ 2x + 4 & \text{khi } 0 \leq x < 3 \\ 3x^2 - 5 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$

Lời giải

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > 2$, $f(x) = x^2 + 3x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(2; +\infty)$.

— Khi $x < 2$, $f(x) = 6x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 2)$.

— Tại điểm $x = 2$, ta có $f(2) = 10$.
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 3x) = 10$ và $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (6x + 1) = 13$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > 1$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1; +\infty)$.

— Khi $x < 1$, $f(x) = 2x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 1)$.

— Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3x + 5) = 3$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 1) = 3$.
Vì $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

③ — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > 3$, $f(x) = x^2 + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3; +\infty)$.

— Khi $0 < x < 3$, $f(x) = 2x + 4$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(0; 3)$.

— Khi $x < 0$, $f(x) = 3x^2 - 5$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 0)$.

— Tại điểm $x = 3$, ta có $f(3) = 10$.
$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 + 1) = 10$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x + 4) = 10$.
Vì $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$ nên hàm số liên tục tại $x = 3$.

— Tại điểm $x = 0$, ta có $f(0) = -5$.
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 4) = 4$ và $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (3x^2 - 5) = -5$.
Vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 0$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x \neq 2 \\ 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

② $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Lời giải.

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

— Tại điểm $x = 2$, ta có $f(2) = 1$.
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4} \neq f(2)$.
Do đó hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

— Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 3$.
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x^2+x+1) = 3 = f(1)$.
Do đó hàm số liên tục tại $x = 1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

□

BÀI 2. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

① $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \geq -2 \\ 2-x & \text{khi } x < -2. \end{cases}$

② $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{khi } x > -1 \\ 1 & \text{khi } x = -1 \\ x^2-6 & \text{khi } x < -1. \end{cases}$

③ $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{khi } x \geq 3 \\ x^2 & \text{khi } 1 \leq x < 3 \\ 4x^2-3 & \text{khi } x < 1. \end{cases}$

Lời giải.

① — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > -2$, $f(x) = x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-2; +\infty)$.

— Khi $x < -2$, $f(x) = 2 - x$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -2)$.

— Tại điểm $x = -2$, ta có $f(-2) = 4$.

$\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^+} x^2 = 4$ và $\lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} (2 - x) = 4$.

Vì $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-2)^-} f(x) = f(-2)$ nên hàm số liên tục tại $x = 2$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

② — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > -1$, $f(x) = 3x - 2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-1; +\infty)$.

— Khi $x < -1$, $f(x) = x^2 - 6$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; -1)$.

— Tại điểm $x = -1$, ta có $f(-1) = 1$.

$\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^+} (3x - 2) = -5$ và $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x \to (-1)^-} (x^2 - 6) = 3$.

Vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = -1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

③ — Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

— Khi $x > 3$, $f(x) = x + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3; +\infty)$.

— Khi $1 < x < 3$, $f(x) = x^2$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(1; 3)$.

— Khi $x < 1$, $f(x) = 4x^2 - 3$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(-\infty; 1)$.

— Tại điểm $x = 3$, ta có $f(3) = 4$.

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x + 1) = 4$ và $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} x^2 = 9$.

Vì không tồn tại $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ nên hàm số gián đoạn tại $x = 3$.

— Tại điểm $x = 1$, ta có $f(1) = 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 = 1$ và $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (4x^2 - 3) = 1$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$ nên hàm số liên tục tại $x = 1$.

— Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

□

DẠNG 3.3. Dạng tìm tham số để hàm số liên tục - gián đoạn

Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm x_0 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

VÍ DỤ 1. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - m & \text{khi } x \neq 2 \\ x + m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 2x - m\right) = 8 - m$

và $f(2) = 2 + m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow 8 - m = 2 + m \Leftrightarrow m = 3$. □

VÍ DỤ 2. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ m^2+5m & \text{khi } x = -1 \end{cases}$, liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1}(x-3) = -4$

và $f(-1) = m^2+5m$.

Để hàm số liên tục tại $x_0 = -1 \Leftrightarrow m^2+5m = -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$. □

VÍ DỤ 3. Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 2m+3 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, gián đoạn tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4x-4}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{(x+1)\left(\sqrt{4x+5}+3\right)} = \dfrac{4}{2\cdot 6} = \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 2m+3$.

Để hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq f(1) \Leftrightarrow 2m+3 \neq \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{4}{3}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+2}{2-x} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2-m-5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số gián đoạn tại $x = 2$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(-2x+1) = -3$

và $f(2) = m^2-m-5$.

Để hàm số gián đoạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi $m^2-m-5 \neq -3 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$.

□

BÀI 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ a-3 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x = 3$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x-2}-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2-1}{(x-3)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{x-2}+1\right)} = \dfrac{1}{3};$

Và $f(3) = a-3$.

Để hàm số liên tục tại $x=3 \Leftrightarrow a-3 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow a = \dfrac{10}{3}$.

□

BÀI 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2-m+3 & \text{khi } x=1 \\ \dfrac{x^2+mx-1-m}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+mx-1-m}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1+m)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x+1+m) = 2+m;$

$f(1) = m^2-m+3.$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow m^2-m+3 = 2+m \Leftrightarrow m^2-2m+1=0 \Leftrightarrow m=1$. □

BÀI 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+m & \text{khi } x=1 \\ \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

— Ta có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x^2+x+1}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x-1) = -2;$

— $f(1) = 1+m$.

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow 1+m = -2 \Leftrightarrow m=-3$. □

BÀI 5. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x^2-1} & \text{khi } x>1 \\ ax^2+bx+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x<1 \\ a-b-\dfrac{7}{4} & \text{khi } x=1 \end{cases}$.

Tìm a, b để hàm số liên tục tại $x=1$.

Lời giải.

— Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2\left(\sqrt{x+3}-2\right)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \dfrac{1}{4};$

— $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(ax^2+bx+\dfrac{1}{4}\right) = a+b+\dfrac{1}{4};$

— $f(1) = a-b-\dfrac{7}{4}$

Để hàm số liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} \\ a-b-\dfrac{7}{4} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

□

BÀI 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+(2m-3)x-m+1}{2x-1} & \text{khi } x \neq \frac{1}{2} \\ 2m & \text{khi } x = \frac{1}{2} \end{cases}.$

Tìm m để hàm số liên tục tại $x = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải.

— Ta có $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2+(2m-3)x-m+1}{2x-1}$
$= \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{(2x-1)(x+m-1)}{2x-1} = m - \dfrac{1}{2}$;

— $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2m$.

Để hàm số liên tục tại $x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2m = m - \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$. □

DẠNG 3.4. Chứng minh phương trình có nghiệm

— *Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a, b \in D$ sao cho $f(a).f(b) < 0$.*

— *Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y = f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i; a_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1}) < 0$.*

CÁC VÍ DỤ MẪU

VÍ DỤ 1. Chứng minh rằng phương trình $2x^4 - 2x^3 - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$.

Lời giải

Đặt $f(x) = 2x^4 - 2x^3 - 3$.
Vì $f(x)$ là hàm đa thức xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-1; 0]$.
Ta có: $f(0) = -3; f(-1) = 1 \Rightarrow f(-1)f(0) < 0$.
$\Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1; 0)$ (đpcm).

□

VÍ DỤ 2. Chứng minh rằng phương trình $6x^3 + 3x^2 - 31x + 10 = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Lời giải

Đặt $f(x) = 6x^3 + 3x^2 - 31x + 10$.
TXĐ: $D = \mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$.
Ta có:
$\begin{cases} f(-3) = -32 \\ f(0) = 10 \end{cases} \Rightarrow f(-3)f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-3;0)$.
$\begin{cases} f(0) = 10 \\ f(1) = -12 \end{cases} \Rightarrow f(0)f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(0;1)$.
$\begin{cases} f(1) = -12 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow f(1)f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(1;2)$.
Mặt khác vì $f(x)$ là một đa thức bậc ba nên phương trình $f(x) = 0$ chỉ có tối đa ba nghiệm.
Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt (đpcm). □

VÍ DỤ 3. Chứng minh rằng phương trình $x - 1 + \sin x = 0$ có nghiệm.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x - 1 + \sin x$ liên tục trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có $\begin{cases} f(0) = -1 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
Vậy phương trình $x - 1 + \sin x = 0$ có nghiệm (đpcm). □

VÍ DỤ 4. Chứng minh rằng phương trình $\left(m^2 + m + 4\right) x^{2017} - 2x + 1 = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \left(m^2 + m + 4\right) x^{2017} - 2x + 1$ liên tục trên $[-1;0]$.
$f(-1) = -m^2 + m - 1 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} < 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$; $f(0) = 1 > 0$; $\Rightarrow f(-1).f(0) < 0, \forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$ với mọi giá trị của tham số m.
Vậy $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m (đpcm). □

VÍ DỤ 5. Chứng minh rằng phương trình $a\cos 2x + b\sin x + \cos x = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b.

Lời giải

Đặt $f(x) = a\cos 2x + b\sin x + \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
$f(0) = a + 1; f(\pi) = a - 1; f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -a + b; f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -a - b$
Vì $f(0) + f(\pi) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ nên trong bốn số $f(0), f(\pi), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ phải có hai số mà tích của chúng bé hơn hoặc bằng không.
Vậy phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm với mọi tham số a, b (đpcm). □

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

BÀI 1. Chứng minh phương trình $x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm dương và 1 nghiệm âm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 15x - 25$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có:

$f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0)$ (1)

$f(0).f(4) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;4)$ (2)

Từ (1), (2) suy ra phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương (đpcm). □

BÀI 2. Chứng minh phương trình $x^4 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow f$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f$ liên tục trên các đoạn $[-2;0], [0;2]$.

Ta có:

$f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-2;0)$.

$f(0).f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;2)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm. □

BÀI 3. Chứng minh rằng phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2 \Rightarrow f$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f$ liên tục trên các đoạn $[0;1], [1;2], [2;4]$.

Ta có:

$f(0)f(1) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(0;1)$.

$f(1)f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(1;2)$.

$f(2)f(4) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(2;4)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm phân biệt. □

BÀI 4. Chứng minh rằng phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x + 1 + \cos x$ liên tục trên $[-\pi;0]$ và có $\begin{cases} f(-\pi) = -\pi \\ f(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow f(-\pi).f(0) < 0$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-\pi;0)$.

Vậy phương trình $x + 1 + \cos x = 0$ có nghiệm. □

BÀI 5. Chứng minh rằng phương trình $\sqrt{x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2} = 3x^2 + x + 1$ có đúng 5 nghiệm phân biệt.

Lời giải.

Phương trình đã cho tương đương với $x^5 + 2x^3 + 25x^2 + 14x + 2 = \left(3x^2 + x + 1\right)^2$

$\Leftrightarrow x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1 = 0$ (1)

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 9x^4 - 4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Ta có: $f(-2) = -95 < 0, f(-1) = 1 > 0, f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{19}{32} < 0, f(0) = 1 > 0$

$f(2) = -47 < 0, f(10) = 7921 > 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng $(-2;-1), \left(-1;-\dfrac{1}{2}\right), \left(-\dfrac{1}{2};0\right), (0;2), (2;10)$.

Mặt khác $f(x)$ là đa thức bậc 5 nên có tối đa 5 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm phân biệt. □

BÀI 6. Chứng minh rằng phương trình $\left(1 - m^2\right)x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Xét hàm số $y = f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $[-1;0]$.

$f(0) = -1; f(-1) = m^2 + 1 \Rightarrow f(0).f(-1) < 0, \forall m \Rightarrow$phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm thuộc $(-1;0), \forall m$. Vậy phương trình $(1-m^2)\, x^5 - 3x - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm với mọi giá trị của m. $\square$

BÀI 7. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{x^4 - x^2 + mx - 3m + 1}{x^2 - x - 2} = m$ có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m > 1$.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq -1; x \neq 2$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^4 - x^2 + mx - 3m + 1 = m\left(x^2 - x - 2\right) \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 - m\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$

Xét hàm số $f(x) = x^4 - x^2 + 1 - m(x-1)^2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-1) = -1 - 4m > 0; f(0) = 1 - m < 0; f(1) = 1 > 0$

Suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm thỏa $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$ với mọi $m > 1$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm với mọi $m > 1$. $\square$

BÀI 8. Chứng minh rằng phương trình $\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{1}{\sin x} = m$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Điều kiện: $x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x) = \sin x - \cos x - m \sin x \cos x$ liên tục trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ và $f(0).f(\dfrac{\pi}{2}) = -1 < 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x_0 \neq k\dfrac{\pi}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm. $\square$

BÀI 9. Cho phương trình $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$, biết $a.f(c) < 0$. Chứng minh rằng phương trình $a\left(ax^2 + bx + c\right)^2 + b\left(ax^2 + bx + c\right) + c = x$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = a\left(ax^2 + bx + c\right)^2 + b\left(ax^2 + bx + c\right) + c - x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $af(c) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 < c < x_2$.

Suy ra $g(x_1) = a(f(x_1))^2 + bf(x_1) + c - x_1 = c - x_1 > 0$ và tương tự $g(x_2) = c - x_2 < 0$

Do đó $g(x_1).g(x_2) < 0 \Rightarrow$ (đpcm). $\square$

BÀI 10. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 3x + 1 = 0$ có đúng một nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^5 + 3x + 1$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác: $f(-1) = -1, f(0) = 1 \Rightarrow f(-1).f(0) = -1 < 0$

Nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.

Giả sử phương trình có hai nghiệm x_1, x_2.

Khi đó: $f(x_1) - f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \left(x_1^5 - x_2^5\right) + 3\left(x_1 - x_2\right) = 0$

$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)\underbrace{\left(x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 + x_2^4 + 3\right)}_{A} = 0 \; (1)$

Do $A = \left(x_1^2 + \dfrac{1}{2}x_1x_2\right)^2 + \left(\dfrac{1}{4}x_1x_2 + x_2^2\right)^2 + \dfrac{1}{2}x_1^2x_2^2 + 3 > 0$

Nên (1)$\Leftrightarrow x_1 = x_2$

Vậy phương trình luôn có đúng một nghiệm (đpcm). $\square$

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 11. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt{4-x}}{x}, & \text{với } x\neq 0\\ \dfrac{1}{3}, & \text{với } x=0\end{cases}$ tại điểm $x_0=0$.

Lời giải.

Xét tại $x_0=0$, ta có $f(0)=\dfrac{1}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x+8}-2\right)-\left(\sqrt{4-x}-2\right)}{x}$.

$$\begin{aligned}L_1&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+8)-8}{x\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}=\frac{1}{12}.\\L_2&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(4-x)-4}{x\left(\sqrt{4-x}+2\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-x}+2}=-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L_1-L_2=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3}=f(0)$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$. □

BÀI 12. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}}{x^2}, & \text{với } x\neq 0\\ 2017\cdot 2018, & \text{với } x=0.\end{cases}$

trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Lời giải.

TXĐ của hàm số $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Với $x\neq 0$ thì $f(x)=\dfrac{(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}}{x^2}$ liên tục tại mọi điểm $x\neq 0$.

Xét tại $x=0$:

$(1+2017x)^{2018}=1+\mathrm{C}_{2018}^1(2017x)+\mathrm{C}_{2018}^2(2017x)^2+\mathrm{C}_{2018}^3(2017x)^3+\cdots+\mathrm{C}_{2018}^{2018}(2017x)^{2018}$.

$(1+2018x)^{2017}=1+\mathrm{C}_{2017}^1(2018x)+\mathrm{C}_{2017}^2(2018x)^2+\mathrm{C}_{2017}^3(2018x)^3+\cdots+\mathrm{C}_{2017}^{2017}(2018x)^{2017}$.

Do $\mathrm{C}_{2018}^1(2017x)=\mathrm{C}_{2017}^1(2018x)=2017\cdot 2018x$ nên ta có:

$(1+2017x)^{2018}-(1+2018x)^{2017}=\left(\mathrm{C}_{2018}^2 2017^2-\mathrm{C}_{2017}^2 2018^2\right)x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{2018}x^{2018}$,

trong đó $a_k=\mathrm{C}_{2018}^k 2017^k-\mathrm{C}_{2017}^k 2018^k, 3\leq k\leq 2017$ và $a_{2018}=2017^{2018}$.

$\mathrm{C}_{2018}^2 2017^2-\mathrm{C}_{2017}^2 2018^2=\dfrac{2018\cdot 2017}{2}2017^2-\dfrac{2017\cdot 2016}{2}2018^2=\dfrac{2017\cdot 2018}{2}$

Suy ra

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2017\cdot 2018}{2}x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_{2018}x^{2018}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2017\cdot 2018}{2}+a_3x+a_4x^2+\cdots+a_{2018}x^{2016}\right)=\frac{2017\cdot 2018}{2}.\end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\dfrac{2017\cdot 2018}{2}\neq f(0)=2017\cdot 2018$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x=0$. □

BÀI 13. Tìm giá trị của m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2+4}-2}, & \text{với } x\neq 0\\ m, & \text{với } x=0\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=0$.

Lời giải.

$f(0) = m$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3-\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2+4}-2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{[9-(9-x^2)](\sqrt{x^2+4}+2)}{[(x^2+4)-4](3+\sqrt{9-x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}+2}{3+\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow m = \dfrac{2}{3}$. □

BÀI 14. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2}, & \text{với } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{4}, & \text{với } x = 0 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải.

TXĐ của hàm số $\mathscr{D} = [-2;2]$.

Với $x_0 \in (-2;2)\backslash\{0\}$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \dfrac{2-\sqrt{4-x_0^2}}{x_0^2} = f(x_0)$.

Mặt khác

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2} = f(-2);\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2} = f(2).$$

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi $x_0 \in [-2;2]\backslash\{0\}$.

Xét tại $x_0 = 0$, ta có $f(0) = \dfrac{1}{4}$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4-(4-x^2)}{x^2(2+\sqrt{4-x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{1}{4} = f(0)$.

Suy ra $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên tập xác định $\mathscr{D} = [-2;2]$ của nó. □

BÀI 15. Chứng minh rằng phương trình $m(x-2)^3(x-3)+2x-5=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = m(x-2)^3(x-3)+2x-5$.

Ta có:

$f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$;

$f(2) = -1, f(3) = 1 \Rightarrow f(2)f(3) = -1 < 0$. Suy ra $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(2;3)$.

Vậy phương trình $m(x-2)^3(x-3)+2x-5=0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

□

BÀI 4. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG IV

A ĐỀ SỐ 1A

BÀI 1. (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{4n^3+3n-1}{2n^4+4}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{27n^3-4n^2+5}}{n-6}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{4n^3+3n-1}{2n^4+4} = \lim \dfrac{\dfrac{4}{n}+\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{1}{n^4}}{2+\dfrac{4}{n^4}}$ .... 0,5 điểm.

$= \dfrac{0}{2} = 0$ .... 0,5 điểm.

b) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{27n^3-4n^2+5}}{n-6} = \lim \dfrac{\sqrt[3]{27-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^3}}}{1-\dfrac{6}{n}}$ .... 0,5 điểm.

$= \dfrac{\sqrt[3]{27}}{1} = 3$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (3 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-2x+3}-2x^3}{3-x^3}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x-3}{x-2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}-6}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$ .... 0,5 điểm.

$= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ .... 0,25 điểm.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-2x+3}-x^3}{3-2x^3}$ .... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3\left(-\sqrt{9-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{3}{x^6}}-1\right)}{x^3\left(\dfrac{3}{x^3}-2\right)}$ .... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-\sqrt{9-\dfrac{2}{x^5}+\dfrac{3}{x^6}}-1}{\dfrac{3}{x^3}-2}$ .... 0,25 điểm.

Kết luận: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-2x+3}-x^3}{3-2x^3} = 2$.

c) Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(5x-3)=7>0$ .... 0,25 điểm.

$\lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)=0$ và $x-2<0\quad\forall x<2$ .... 0,25 điểm.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{5x-3}{x-2}=-\infty$ .... 0,25 điểm.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}-6}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}+\dfrac{\sqrt{5x+6}-4}{\sqrt[3]{3x+2}-2}\right)$.

$+\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+\sqrt[3]{3x+2}.2+2^2}{3\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\right)=1$ .... 0,25 điểm.

$+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x+6}-4}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5\left(\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2.\sqrt[3]{3x+2}+2^2\right)}{3\left(\sqrt{5x+6}+4\right)}=\dfrac{5.12}{3.8}=\dfrac{5}{2}$ .... 0,25 điểm.

Vậy $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{5x+6}-6}{\sqrt[3]{3x+2}-2}=1+\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$ .... 0,25 điểm.

□

BÀI 3. (2 điểm) Xác định a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1} & \text{nếu } x\neq -1\\ ax^2+3x & \text{nếu } x=-1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

Lời giải.

Tính $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}$ .... 0,5 điểm.

$=\lim\limits_{x\to -1}(x+2)=1$ .... 0,5 điểm.

và $f(-1)=a-3$ .... 0,25 điểm.

Hàm số liên tục tại $x=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow a-3=1\Leftrightarrow a=4$ .... 0,5 điểm.

Vậy $a=4$. .... 0,25 điểm.

□

BÀI 4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^5-3x-1=0$ có ít nhất ba nghiệm.

Lời giải.

$f(x)=x^5-3x-1$ liên tục trên $[-2;2]$ .... 0,25 điểm.

Thì phương trình $x^5-3x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0$

Vì $f(-2).f(-1)=-27<0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(-2;-1)$. 0,5 điểm.

Vì $f(0).f(-1)=-1<0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ ...... 0,5 điểm.

Vì $f(0).f(2)=-25<0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ .... 0,5 điểm.

Vậy phương trình $x^5-3x-1=0$ có ít nhất 3 nghiệm .... 0,25 điểm.

□

BÀI 5. (1 điểm) Chứng minh rằng phương trình $x^3-3x^2-2010\cos^2x+\sin^{2017}x+1=0$ có nghiệm.

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2-2010\cos^2x+\sin^{2017}x+1$.

Khi đó phương trình đã cho chính là phương trình $f(x)=0$ .... 0,25 điểm.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ .... 0,25 điểm.

Và $f(0)=-2009<0$, $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{27\pi^3}{8}-\dfrac{27\pi^2}{4}=\dfrac{27\pi^2}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)>0$ .... 0,25 điểm.

Do đó tồn tại $x_0\in\left(0;\dfrac{3\pi}{2}\right)$ để $f(x_0)=0$, tức là phương trình đã cho có nghiệm. ..... 0,25 điểm.

□

B ĐỀ SỐ 1B

BÀI 1. (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{n^4-2n+1}{3n^4+n+2}$.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+n+1}-2n}{3n+4}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{n^4-2n+1}{3n^4+n+2} = \lim \dfrac{1-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}{3+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^4}}$ .... 0,5 điểm.

$= \dfrac{1}{3}$ .... 0,5 điểm.

b) $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2+n+1}-2n}{3n+4} = \lim \dfrac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-2}{3+\dfrac{4}{n}}$ .... 0,5 điểm.

$= \dfrac{\sqrt{3}-2}{3}$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (2 điểm) Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}$.

Lời giải.

a)) Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+2x+1\right) = 4 > 0$ .... 0,25 điểm.

$\lim\limits_{x\to 1^-} (x-1) = 0$ và $x-1<0 \quad \forall x<1$ .... 0,25 điểm.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+2x+1}{x-1} = -\infty$ .... 0,5 điểm.

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x(x^3+1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}$ .... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)^2}{x\,(x+1)\,(x^2-x+1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}$ .... 0,25 điểm.

$= \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)}{x\,(x^2-x+1)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)} = 0$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 3. (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} & \text{nếu } x>2 \\ mx+3 & \text{nếu } x\le 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=2$.

Lời giải.

- $f(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2m+3$ .... 0,5 điểm.
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{7(x-2)}{(x-2)(\sqrt{7x-10}+2)} = \dfrac{7}{4}$ .... 0,5 điểm.

• Do đó: 2m +3 = $\frac{7}{4} \Rightarrow m = -\frac{5}{8}$ .... 0,5 điểm.

• Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Rightarrow m = -\frac{5}{8}$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm.

Lời giải.

$f(x) = 4x^3 - 8x^2 + 1$ liên tục trên $[-1;2]$ .... 0,25 điểm.
Thì phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
Vì $f(-1).f(0) = -11 < 0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$ ..... 0,5 điểm.
Vì $f(0).f(1) = -3 < 0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ .... 0,5 điểm.
Vì $f(1).f(2) = -3 < 0$ nên phương trình có một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$ .... 0,5 điểm.
Vậy phương trình $4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$ có ít nhất 3 nghiệm .... 0,25 điểm.

□

BÀI 5. (2 điểm) Cho phương trình: $\left(m^4 + m + 1\right)x^{2010} + x^5 - 32 = 0$, m là tham số. Chứng minh rằng, phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m.

Lời giải.

Hàm số $f(x) = (m^4 + m + 1)x^{2010} + x^5 - 32$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ do đó nó liên tục trên đoạn $[0;2]$ .... 0,25 điểm.

• $f(0) = -32$ .... 0,25 điểm.

• $f(2) = \left(m^4 + m + 1\right)2^{2010} = 2^{2010}\left[\left(m^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right] > 0\ \forall m \in \mathbb{R}$ ...... 0,5 điểm.

Suy ra $f(0).f(2) < 0\ \forall m \in \mathbb{R}$ .... 0,5 điểm.
Vậy phương trình trên luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ hay phương trình luôn có ít nhất một nghiệm dương với mọi giá trị của tham số m. .... 0,5 điểm.

□

C ĐỀ SỐ 2A

BÀI 1. (3 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim \frac{3^n + 5^{n+1}}{4 + 5^{n+2}}$.

b) $\lim \frac{1 + n\sin n}{n^2 + 2}$.

Lời giải.

a) $\lim \frac{3^n + 5^{n+1}}{4 + 5^{n+2}} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5}{4\left(\frac{1}{5}\right)^n + 25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ .... 1,5 điểm.

b) Ta có $\left|\frac{1 + n\sin n}{n^2 + 2}\right| \leq \frac{1 + n}{n^2 + 2}$ .... 0,5 điểm.

và $\lim \frac{1 + n}{n^2 + 2} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} = 0$ .... 0,5 điểm.

suy ra $\lim \frac{1 + n\sin n}{n^2 + 2} = 0$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (4,5 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+x\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{2-\sqrt{x+2}}$.

c) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right)$ .... 0,5 điểm.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+1\right)=1-\sqrt{2}$ .... 0,5 điểm.

suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-x+3}+x\right)=+\infty$ .... 0,5 điểm.

b) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{2-\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+2)(2+\sqrt{x+2})}{2-x}$ .... 1 điểm.

$=\lim\limits_{x\to2}(-x-2)(2+\sqrt{x+2})=-16$ .... 0,5 điểm.

c) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}$ .... 1 điểm.

$=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x-1}(x^2+x+1)}{\sqrt{x+1}}=0$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 3. (1,5 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2 & \text{nếu } x>1\\ x+m & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$$

Lời giải.

+ Với $x_0>1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x^3-3x+2)=x_0^3-3x_0+2=f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ .... 0,5 điểm.

+ Với $x_0<1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(x+m)=x_0+m=f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ .... 0,5 điểm.

+ Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^3-3x+2)=0$, $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x+m)=1+m$ và $f(1)=1+m$.

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=-1$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 4. (1 điểm) Chứng minh phương trình sau có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

$$1-m^2)(x+2)^3+x^2+x-3=0.$$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x)=(1-m^2)(x+2)^3+x^2+x-3$.

Ta có $f(-2)=-1$, $f(-4)=-8(1-m^2)+16-4-3=8m^2+1$, suy ra $f(-2).f(-4)<0$ ... 0,5

điểm.
Mặt khác hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ cho nên tồn tại $x_0 \in (-4;-2)$ sao cho $f(x_0) = 0$. Vậy phương trình $(1-m^2)(x+2)^3 + x^2 + x - 3 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-4;-2)$ với mọi m. 0,5 điểm.
□

D ĐỀ SỐ 2B

BÀI 1. (3 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim \dfrac{2^n - 3^{n+3}}{1+3^{n+1}}$.

b) $\lim \dfrac{2n + \cos 2n}{n^2+1}$.

Lời giải.

a) $\lim \dfrac{2^n - 3^{n+3}}{1+3^{n+1}} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 27}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 3} = -\dfrac{27}{3} = -9$ .... 1,5 điểm

b) Ta có $\left|\dfrac{2n+\cos 2n}{n^2+1}\right| \le \dfrac{2n+1}{n^2+1}$ .... 0,5 điểm

và $\lim \dfrac{2n+1}{n^2+1} = \lim \dfrac{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 0$ .... 0,5 điểm

suy ra $\lim \dfrac{2n+\cos 2n}{n^2+1} = 0$ .... 0,5 điểm

□

BÀI 2. (4,5 điểm) Tính các giới hạn.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+2} + x\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x(x+3)} - 2}{x^2-3x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$

Lời giải.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-x+2} + x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2-x+2} - x}$ .... 0,5 điểm

$= \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-1+\dfrac{2}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}} - 1} = \dfrac{1}{2}$ .... 1 điểm

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x(x+3)} - 2}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+3x}+2)}$ .... 1 điểm

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+4}{(x-2)(\sqrt{x^2+3x}+2)} = -\dfrac{5}{4}$ .... 0,5 điểm

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x-1|}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$. .... 0,5 điểm

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} -\dfrac{1}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$. .... 0,5 điểm

Vậy $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x^2-1}$ không tồn tại. .... 0,5 điểm

□

BÀI 3. (1,5 điểm) Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho hàm số sau đây liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{nếu } x > 1 \\ mx-1 & \text{nếu } x \le 1 \end{cases}$$

Lời giải.

+ Với $x_0 > 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (x^2+x-2) = x_0^2 + x_0 - 2 = f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$. .... 0,5 điểm

+ Với $x_0 < 1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} (mx-1) = mx_0 - 1 = f(x_0)$ suy ra hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$. .... 0,5 điểm

+ Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+x-2) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (mx-1) = m-1$ và $f(1) = m-1$.

Hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m = 1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m = 1$. .... 0,5 điểm

□

BÀI 4. (1 điểm) Chứng minh phương trình sau đây có ít nhất 4 nghiệm phân biệt.

$$x^6 - 2x^4 + 4x^3 - 9x - 3 = 0.$$

Lời giải.

Xét hàm số $f(x) = x^6 - 2x^4 + 4x^3 - 9x - 3$, $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	2
$f(x)$	15	$-\frac{111}{64}$	1	-3	43

Ta có $f(-2)\cdot f(-\frac{3}{2}) < 0$; $f(-\frac{3}{2})\cdot f(-1) < 0$; $f(-1)\cdot f(0) < 0$; $f(0)\cdot f(2) < 0$ .... 0,5 điểm

suy ra tồn tại $x_1 \in (-2;-\frac{3}{2})$, $x_2 \in (-\frac{3}{2};-1)$, $x_3 \in (-1;0)$, $x_4 \in (0;2)$ sao cho $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$. Vậy phương trình có ít nhất 4 nghiệm phân biệt. .... 0,5 điểm

□

E ĐỀ SỐ 3A

BÀI 1 **(2,0 điểm).** Tìm các giới hạn sau

1. $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2}$.
2. $\lim \dfrac{n^3+3n+1}{n^4+2n^2+2}$.

Lời giải.

1.

Đáp án	Điểm

Ta có $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}$.	0,5
Do $\lim\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1$ và $\lim\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right) = 1$ nên ta suy ra $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^2+3n+2} = 1$.	0,5

②

Đáp án	**Điểm**
Ta có $\lim \dfrac{n^3+3n+1}{n^4+2n^2+2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{n+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^3}}$.	0,5
Do $\lim\left(1+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = 1$ và $\lim\left(n+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2}{n^3}\right) = +\infty$ nên $\lim \dfrac{n^3+3n+1}{n^4+2n^2+2} = 0$.	0,5

□

BÀI 2 (**2,0 điểm**). Tìm các giới hạn sau

① $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)} - x\right]$.

② $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, với m, n là các số nguyên dương.

Lời giải.

①

Đáp án	**Điểm**
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)} - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a_1)(x+a_2)-x^2}{\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)}+x}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(a_1+a_2)x+a_1a_2}{\sqrt{(x+a_1)(x+a_2)}+x}$	0,5
$= \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_1+a_2+\dfrac{a_1a_2}{x}}{\sqrt{\left(1+\dfrac{a_1}{x}\right)\left(1+\dfrac{a_2}{x}\right)}+1} = \dfrac{a_1+a_2}{2}$.	0,5

②

Đáp án	**Điểm**
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1\right)}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)}$	0,5
$= \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1} = \dfrac{m}{n}$.	0,5

□

BÀI 3 (2,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị của m để các hàm số sau liên tục trên $\mathbb{R}$.

① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{nếu } x>2\\ mx+\dfrac{1}{4} & \text{nếu } x\le 2\end{cases}$.

② $g(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{2}{3x} & \text{nếu } x\ne 0\\ m & \text{nếu } x=0\end{cases}$.

Lời giải.

①

Đáp án	Điểm
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-6}{(x-2)\left[\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}$	0,5
$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2}+2\sqrt[3]{3x+2}+4}=\dfrac{1}{4}$.	0,5
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(mx+\dfrac{1}{4}\right)=2m+\dfrac{1}{4}$.	0,5
Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$ hay $2m+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$, tức $m=0$.	0,5

②

Đáp án	Điểm
Ta có $0\le\left\lvert x^2\cos\dfrac{2}{3x}\right\rvert\le x^2$ và $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos\dfrac{2}{3x}=0$.	0,5
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $m=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.	0,5

□

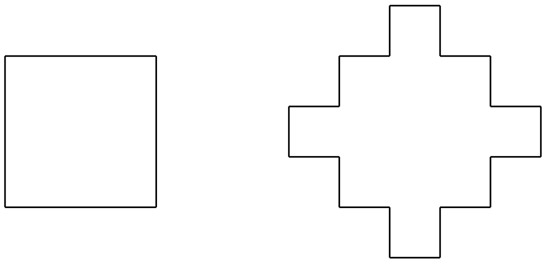
BÀI 4 (2,0 điểm). Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\ne 0)$ với $a+5b+28c=0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{5}\right]$.

Lời giải.

Đáp án	Điểm
Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$. Dễ thấy $f(x)$ là hàm liên tục trên $\left[0;\dfrac{1}{5}\right]$.	0,5
Ta có $f(0)=c$ và $f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{a}{25}+\dfrac{b}{5}+c$.	0,5
Suy ra $3f(0)+25f\left(\dfrac{1}{5}\right)=0$, do đó $f(0)\cdot f\left(\dfrac{1}{5}\right)\le 0$.	0,5
Theo định lí giá trị trung gian thì tồn tại $c\in\left[0;\dfrac{1}{5}\right]$ sao cho $f(c)=0$. Ta có điều phải chứng minh.	0,5

□

BÀI 5 (1,0 điểm). Cho một hình vuông H_0 cạnh 1. Ta chia mỗi cạnh của hình vuông làm ba đoạn thẳng bằng nhau, rồi dựng trên đoạn thẳng ở giữa, ra phía ngoài hình vuông ban đầu một hình vuông có độ dài bằng đoạn thẳng đó, sau đó xoá đoạn thẳng đó đi, ta thu được một hình gọi là H_1. Ta lại chia mỗi cạnh của hình H_1 thành ba đoạn bằng nhau, rồi dựng trên đoạn thẳng ở giữa, ra phía ngoài H_1 một hình vuông có độ dài bằng độ dài đoạn thẳng đó, sau đó xoá đoạn thẳng đó đi, ta được hình H_2. Cứ lặp lại quá trình trên ta được một dãy các hình $(H_n)_{n\geq 0}$. Gọi S_n là diện tích của hình H_n. Tính $\lim S_n$.



H_0 H_1

Lời giải.

Đáp án	**Điểm**
Gọi a_n, b_n lần lượt là số cạnh và độ dài mỗi cạnh của hình H_n. Ta thấy $a_0 = 4$ và $b_0 = 1$. Mỗi cạnh của hình H_n sau khi chuyển thành hình H_{n+1} sẽ sinh ra một đường gấp khúc gồm 5 đoạn thẳng, suy ra $a_{n+1} = 5a_n = 4\cdot 5^n$. Dễ thấy sau mỗi lần chuyển hình thì độ dài cạnh giảm đi chỉ còn $\dfrac{1}{3}$ ban đầu nên $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3} = \dfrac{1}{3^n}$.	0,5
Để ý rằng, do cách dựng hình nên S_{n+1} là tổng của S_n với tất cả các hình vuông dựng thêm trong quá trình chuyển H_n thành H_{n+1}. Do đó $$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_n\cdot b_{n+1}^2 = S_{n-1} + a_{n-1}\cdot b_n^2 + a_n\cdot b_{n+1}^2 = \cdots \\ &= S_0 + a_0\cdot b_1^2 + a_1 b_2^2 + \cdots + a_n\cdot b_{n+1}^2 \\ &= 1 + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\cdot 5\cdot\left(\frac{1}{3^2}\right)^2 + \cdots + 4\cdot 5^n\cdot\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^2 \\ &= 1 + 4\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot 5\cdot\frac{1}{9^2} + \cdots + 4\cdot 5^n\cdot\frac{1}{9^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{4}{9}\left[1 + \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{9}\right)^n\right] \\ &= 1 + \frac{4}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{9}} \\ &= 2 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$ Vậy $\lim S_n = \lim\left[2 - \left(\frac{5}{9}\right)^n\right] = 2$.	0,5

Nhận xét. Gọi H là hình vuông nhận các đỉnh của hình H_0 làm trung điểm các cạnh. Khi đó ta thấy miền H_n dần dần "phủ" đầy miền H khi $n \longrightarrow +\infty$. Do đó diện tích S_n tiến dần đến diện tích hình H là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$. Vậy $\lim S_n = 2$. □

F ĐỀ SỐ 3B

BÀI 1 (**2,0 điểm**). Tìm các giới hạn sau

① $\lim \dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+3n^2}$.

② $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+n^2+n+2}$.

Lời giải.

①

Đáp án	**Điểm**
Ta có $\lim \dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+3n^2} = \lim \dfrac{1+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{3}{n}}$.	0,5
Do $\lim\left(1+\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = 1$ và $\lim\left(2+\dfrac{3}{n}\right) = 2$ nên ta suy ra $\lim \dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+3n^2} = \dfrac{1}{2}$.	0,5

②

Đáp án	**Điểm**
Ta có $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+n^2+n+2} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{2}{n^3}}$.	0,5
Do $\lim\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right) = 0$ và $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\dfrac{2}{n^3}\right) = 1$ nên $\lim \dfrac{n^2+2n+1}{n^3+n^2+n+2} = 0$	0,5

□

BÀI 2 (**2,0 điểm**). Tìm các giới hạn sau

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2}$, với n nguyên dương.

② $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$.

Lời giải.

①

Đáp án	**Điểm**

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-nx+n-1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1-n}{x-1}\right)$	0,5
$=\lim\limits_{x\to 1}\left(x^{n-2}+2x^{n-3}+3x^{n-3}+\cdots+(n-1)x\right)=1+2+3+\cdots(n-1)$ $=\dfrac{n(n-1)}{2}.$	0,5

②

Đáp án	Điểm
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\lim\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}.$	0,5
Do $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)=+\infty$. Suy ra $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=0.$	0,5

□

BÀI 3 (**3,0 điểm**). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để các hàm số sau liên tục trên tập xác định

① $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} & \text{nếu } x>2\\ mx-\dfrac{1}{4} & \text{nếu } x\le 2\end{cases}.$

② $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{2}{x} & \text{nếu } x\ne 0\\ m & \text{nếu } x=0\end{cases}.$

Lời giải.

①

Đáp án	Điểm
$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{7x-14}{(x-2)\left(\sqrt{7x-10}+2\right)}$	0,5
$=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{7}{\sqrt{7x-10}+2}=\dfrac{7}{4}.$	0,5
$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(mx-\dfrac{1}{4}\right)=2m-\dfrac{1}{4}.$	0,5
Hàm số đã cho liên tục trên tập xác định khi $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=f(2)$ hay $2m-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{4}$, tức $m=1$.	0,5

②

Đáp án	Điểm
Ta có $\left\lvert x^3\sin\dfrac{2}{x}\right\rvert\le\left\lvert x^3\right\rvert$ mà $\lim\limits_{x\to 0}\left\lvert x^3\right\rvert=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$	0,5
Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định khi $m=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$	0,5

□

BÀI 4 (**2,0 điểm**). Cho phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ với $7a+5b+4c=0$. Chứng minh rằng, phương trình đã cho luôn có nghiệm trên đoạn $[1;2]$.

Lời giải.

Đáp án	**Điểm**
Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$. Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$.	0,5
Ta có $f(1)=a+b+c$ và $f(2)=4a+2b+c$.	0,5
Suy ra $3f(1)+f(2)=0$, do đó $f(1)\cdot f(2)\leq 0$.	0,5
Theo định lí giá trị trung gian thì tồn tại $c\in[1;2]$ sao cho $f(c)=0$. Ta có điều phải chứng minh.	0,5.

□

BÀI 5 (**1 điểm**). Cho hai số dương a, b và dãy (u_n) cho bởi

$$\begin{cases} u_1=a,\ u_2=b \\ u_{n+2}=\dfrac{u_n+u_{n+1}}{2}, n=1,2\ldots \end{cases}.$$

Tìm giới hạn $\lim u_n$.

Lời giải.

Đáp án	**Điểm**
Trừ hai vế của $u_{n+2}=\dfrac{u_n+u_{n+1}}{2}$ cho u_{n+1} ta được $$u_{n+2}-u_{n+1}=-\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-u_n\right).$$ Đặt $v_{n+1}=u_{n+2}-u_{n+1}$, ta có $\begin{cases} v_1=b-a \\ v_{n+1}=-\dfrac{1}{2}v_n,\ n=1,2,\ldots \end{cases}$ Suy ra $v_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$.	0,5
Ta có $$\begin{aligned} u_{n+2}&=u_{n+2}-u_{n+1}+u_{n+1}-u_n+\cdots+u_2-u_1+u_1\\ &=v_{n+1}+v_n+\cdots+v_1+u_1\\ &=(b-a)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+u_1\\ &=\frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+a. \end{aligned}$$ Do đó $\lim u_n=\lim u_{n+2}=\lim\left[\dfrac{2}{3}(b-a)\left(1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)+a\right]=\dfrac{a+2b}{3}$.	0,5

□

G ĐỀ SỐ 4A

BÀI 1. (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+1}$.

② $\lim \dfrac{3^{n+2}-2^n+4}{2.3^n+2^n+1}$.

Lời giải.

① $A = \lim \dfrac{2n^2+n-1}{n^2+1} = \lim \dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$ .... 0,5 điểm.

$A = \dfrac{2+0-0}{1+0} = 2$ .... 0,5 điểm.

② $B = \lim \dfrac{3^{n+2}-2^n+4}{2.3^n+2^n+1} = \lim \dfrac{9.3^n-2^n+4}{2.3^n+2^n+1} = \lim \dfrac{9-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+4.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ .... 0,5 điểm.

$B = \dfrac{9-0+4.0}{2+0+0} = \dfrac{9}{2}$ .... 0,5 điểm.

□

BÀI 2. (3,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9x+8}{1-x}$.

② $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$.

③ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{16x^2+1}+3}{x+1}$.

④ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)$.

Lời giải.

① $A = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-9x+8}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-8)}{1-x}$ .... 0,25 điểm.

$A = \lim\limits_{x\to 1}(8-x) = 7$ .... 0,5 điểm.

② $B = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-6}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}$ .... 0,25 điểm.

$B = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3}{(x+2)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}$ .... 0,25 điểm.

$B = \dfrac{3}{(2+2)\cdot(2+2)} = \dfrac{3}{16}$ .... 0,25 điểm.

③ $C = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{16x^2+1}+3}{x+1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x\sqrt{16+\dfrac{1}{x^2}}+3}{x+1}$ .... 0,25 điểm.

$C = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-\sqrt{16+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$ .... 0,25 điểm.

$C = \dfrac{-4+0}{1+0} = -4$ .... 0,25 điểm.

④ $D=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x-1}{2x+\sqrt{4x^2+x+1}}$ .... 0,25 điểm.

$D=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-\dfrac{1}{x}}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}$ .... 0,25 điểm.

$D=\dfrac{-1}{2+2}=-\dfrac{1}{4}$ .... 0,25 điểm.

□

BÀI 3. (2,0 điểm) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ m+1 & \text{nếu } x=1\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x=1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$ ....0,5 điểm.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(2x+1)=3$....................0,5 điểm.

Theo giả thiết $f(1)=m+1$....................0,25 điểm.

Hàm số liên tục tại $x=1\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow m+1=3\Leftrightarrow m=2$ ....0,5 điểm.

Vậy $m=2$....................0,25 điểm.

□

BÀI 4. (1,5 điểm) Chứng minh rằng phương trình $2x^5-7x-1=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=2x^5-7x-1$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;2]$ .... 0,5 điểm.

Ta có: $f(0)=-1, f(2)=49\Rightarrow f(0).f(2)<0$ .... 0,5 điểm.

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$....................0,5 điểm.

□

BÀI 5. (1,5 điểm) Cho phương trình $m(x+1)(x-2)^{11}+3x-4=0$. Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

Lời giải.

Đặt $f(x)=m(x+1)(x-2)^{11}+3x-4=0$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;2]$....................0,5 điểm.

Ta có: $f(-1)=-7, f(2)=2\Rightarrow f(-1).f(2)<0$....................0,5 điểm.

$\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;2),\forall m$ .... 0,5 điểm.

□

H ĐỀ SỐ 4B

BÀI 6. (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim(n^3+3n^2+n-10)$.

② $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+6n+1}-n}{3n+1}$.

Lời giải.

① $A=\lim(n^3+3n^2+n-10)=\lim\left[n^3\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{10}{n^3}\right)\right]$ .... 0,5 điểm.

$A=+\infty$ vì $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{10}{n^3}\right)=1>0$ .... 0,5 điểm.

② $B = \lim \dfrac{\sqrt{4n^2+6n+1}-n}{3n+1} = \lim \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-1}{3+\dfrac{1}{n}}$ ....0,5 điểm.

$B = \dfrac{2-1}{3+0} = \dfrac{1}{3}$ ....0,5 điểm.

□

BÀI 7. (2,0 điểm) Tìm các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2}$.

② $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{7-2x}-2}{x-3}$.

Lời giải.

① $A = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1}$ ....0,25 điểm.

$A = +\infty$ vì $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1) = 2 > 0$; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1) = 0$ và $x-1>0, \forall x > 1$ ....0,25 điểm.

② $B = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{7-2x}-3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2+\sqrt{7-2x}-1}{x-3} = I + J$.......0,25 điểm.

$I = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$ ....0,25 điểm.

$I = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \dfrac{1}{4}$ ....0,25 điểm.

$J = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{7-2x}-1}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{6-2x}{(x-3)\left(\sqrt{7-2x}+1\right)}$ ....0,25 điểm.

$J = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{-2}{\sqrt{7-2x}+1} = \dfrac{-2}{2} = -1$ ....0,25 điểm.

Suy ra $B = I + J = -\dfrac{3}{4}$ ....0,25 điểm.

□

BÀI 8. (2,5 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+mx-m-1}{x-1} & \text{nếu } x > 1 \\ 2x+m^2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2m^2+3m-2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = 1$.

Lời giải.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+mx-m-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+m+1)}{x-1}$ ....0,25 điểm.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+m+1) = m+2$ ....0,5 điểm.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+m^2) = m^2+2$ ....0,5 điểm.

Theo giả thiết $f(1) = 2m^2+3m-2$ ....0,25 điểm.

Hàm số liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$ ....0,25 điểm.

$\Leftrightarrow m+2 = m^2+2 = 2m^2+3m-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m=0 \\ m^2+3m-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$ ....0,5 điểm.

Vậy $m = 1$ ....0,25 điểm.

□

BÀI 9. (2,0 điểm) Chứng minh rằng phương trình $5x^4 + x^2 - 10 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x) = 5x^4 + x^2 - 10$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ .... 0,5 điểm.

Ta có: $f(-2) = 74, f(0) = -10, f(2) = 74$ .... 0,25 điểm.

Vì $f(-2).f(0) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (-2;0) : f(x_1) = 0$ .... 0,5 điểm.

Vì $f(0).f(2) < 0 \Rightarrow \exists x_2 \in (0;2) : f(x_2) = 0$ .... 0,5 điểm.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm .... 0,25 điểm.

□

BÀI 10. (1,5 điểm) Cho các số thực a, b, c với $a \neq 0$ thỏa mãn $5a + 3b + 2c = 0$. Chứng minh phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải.

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ .... 0,25 điểm.

Ta có: $f(1) = a + b + c, f(2) = 4a + 2b + c \Rightarrow f(1) + f(2) = 5a + 3b + 2c = 0$ .... 0,5 điểm.

$\Rightarrow f(1) = -f(2) \Rightarrow f(1).f(2) = -[f(2)]^2$ .... 0,25 điểm.

Nếu $f(2) = 0$ thì $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Nếu $f(2) \neq 0$ thì $f(1).f(2) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2)$.

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$ .... 0,5 điểm.

□

I ĐỀ SỐ 5A

BÀI 1 **(2 điểm).** Tìm giới hạn của các dãy số sau:

① (u_n) có $u_n = \dfrac{3^n - 4^{n+1} - 3}{2^n - 4^n + 2}$.

② (v_n) có $v_n = \sqrt{3n^2 + n + 5}$.

Lời giải.

① $L = \lim u_n = \lim \dfrac{3^n - 4^{n+1} - 3}{2^n - 4^n + 2} = \lim \dfrac{3^n - 4 \cdot 4^n - 3}{2^n - 4^n + 2} = \lim \dfrac{4^n \cdot \left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 4 - \dfrac{3}{4^n}\right)}{4^n \cdot \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1 + \dfrac{2}{4^n}\right)} =$

$\lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - 4 - \dfrac{3}{4^n}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1 + \dfrac{2}{4^n}} = 4$ .... 1.0điểm.

② $L = \lim v_n = \lim \sqrt{3n^2 + n + 5} = \lim \sqrt{n^2 \left(3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2}\right)} = \lim \left(n \cdot \sqrt{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2}}\right) =$
$+\infty$ .... 0.5điểm.

Vì: $\lim n = +\infty; \lim \sqrt{3 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{5}{n^2}} = \sqrt{3} > 0$ .... 0.5điểm.

□

BÀI 2 **(3 điểm).** Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $M = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \dfrac{2x - 1}{x - 2}$.

② $N = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$.

③ $P = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$.

Lời giải.

① $M = \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2-x}{2x} \cdot \dfrac{2x-1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-2x}{2x} = -\dfrac{3}{4}$ .... 1.0điểm.

② $N = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} =$ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+2} = -\dfrac{1}{2}$ .... 1.0điểm.

③ $P = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+3}-x)(\sqrt{x^2+3}+x)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x}$ $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$. (Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 = 3$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+3}+x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \left(\sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}}+1\right) =$ $+\infty$ hoặc $0 < \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} < \dfrac{1}{x}$ .... 1.0điểm).

□

BÀI 3 (2 điểm). Tính các giới hạn một bên sau:

① $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+2}{x-4}$.

② $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x^2+2}{x+1}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+2}{x-4} = +\infty$. Vì: .... 0.5 điểm
$\lim\limits_{x \to 4^+} (x+2) = 6 > 0$ .... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x \to 4^+} (x-4) = 0$ và $x-4 > 0$ .... 0.25điểm.

② $\lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{x^2+2}{x+1} = -\infty$. .... 0.5 điểm
Vì $\lim\limits_{x \to (-1)^-} (x^2+2) = 3 > 0$ .... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x \to (-1)^-} (x+1) = 0$ và $x+1 < 0$ .... 0.25điểm.

□

BÀI 4 (2 điểm). Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x-a, & \text{Nếu } x \le 2 \\ \dfrac{-x^3+x+6}{x-2}, & \text{Nếu } x > 2 \end{cases}$.

Tìm a để hàm số liên tục trên tập xác định của nó.

Lời giải.

— $\forall x > 2 : f(x) = \dfrac{-x^3+x+6}{x-2}$ là hàm phân thức hữu tỷ nên liên tục trên tập xác định của nó. 0.5 điểm

— $\forall x < 2 : f(x) = 3x - a$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$ .... 0.5điểm.

— Xét hàm số tại $x = 2$:
$f(2) = 6 - a$. 0.5điểm
$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - a) = 6 - a$. 0.5điểm
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{-x^3 + x + 6}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{(x-2)(-x^2 - 2x - 3)}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} (-x^2 - 2x - 3) = -11$. 0.5điểm

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \Leftrightarrow 6 - a = -11 \Leftrightarrow a = 17$ .... 0.5điểm.
Vậy với $a = 17$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 5 (1 điểm). Chứng minh rằng phương trình: $3x^5 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

Lời giải.

Đặt hàm số $f(x) = 3x^5 + 2x - 1$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số liên tục trên $[0; 1]$, và:0.5 điểm
$f(0) = -1, f(1) = 4 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$. .... 0.25 điểm
Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0; 1)$ .... 0.25 điểm. □

J ĐỀ SỐ 5B

BÀI 1 (2 điểm). Tìm giới hạn của các dãy số sau:

① (u_n) có $u_n = \dfrac{3^n + 3 \cdot 4^n - 3}{2^n - 4^n}$.

② (v_n) có $v_n = \sqrt{n^2 + n + 2}$.

Lời giải.

(a) $L = \lim u_n = \lim \dfrac{3^n + 3 \cdot 4^n - 3}{2^n - 4^n} = \lim \dfrac{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 3 - \dfrac{3}{4^n}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 1} = -3$. .... 1.0điểm.

(b) $L = \lim v_n = \lim \sqrt{n^2 + n + 2} = \lim \sqrt{n^2 \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right)} = \lim n \cdot \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}} = +\infty$. (Vì: $\lim n = +\infty, \lim \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}} = 1$) .... 1.0 điểm.

□

BÀI 2 (3 điểm). Tính giới hạn của các hàm số sau:

① $M = \lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3}\right) \cdot \dfrac{2x - 1}{x + 3}$.

② $N = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$.

③ $P = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

Lời giải.

① $M = \lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{x+3}{3x} \cdot \dfrac{2x-1}{x+3}\right) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x-1}{3x} = \dfrac{7}{9}$ .... 1.0điểm.

② $N = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$
$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \dfrac{2}{3}$ .... 1.0điểm.

③ $P = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$. (Vì $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) =$
$+\infty, 0 < \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} < \dfrac{1}{x}$) .... 1.0 điểm.

□

BÀI 3 (**2 điểm**). Tính các giới hạn một bên sau:

① $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1}$.

② $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2+1}{x+2}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+2}{x-1} = +\infty$. Vì: .... 0.5 điểm
$\lim\limits_{x \to 1^+} (x+2) = 3 > 0$ .... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x \to 1^+} (x-1) = 0$ và $x-1 > 0$ .... 0.25điểm.

② $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2+1}{x+2} = -\infty$. Vì .... 0.5 điểm:
$\lim\limits_{x \to -2^-} (x^2+1) = 5 > 0$ .... 0.25điểm.
$\lim\limits_{x \to -2^-} (x+2) = 0$ và $x+2 < 0$ .... 0.25điểm.

□

BÀI 4 (**2 điểm**). Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x-a & \text{nếu } x = 2 \\ \dfrac{-x^3+x+6}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \end{cases}$.
Tìm a để hàm số liên tục trên tập xác định của nó.
Lời giải.

— $\forall x \neq 2$ hàm số luôn liên tục .... 0.5 điểm.

— Xét hàm số tại $x = 2$:

$f(2) = 2 - a$0.5điểm

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x^3+x+6}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(-x^2-2x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2}(-x^2-2x-3) = -11$1.0điểm.

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow 2 - a = -11 \Leftrightarrow a = 13$ .... 0.5điểm.
Vậy với $a = 13$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

BÀI 5 (1 điểm). Chứng minh rằng phương trình: $x^3 + 2x - 1 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Đặt hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số liên tục trên $[0;1]$. Và: 0.5 điểm

$f(0) = -1, f(1) = 2 \Rightarrow f(0)\cdot f(1) < 0$.

Vậy phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất 1 nghiệm trên khoảng $(0;1)$ .... 0.5điểm. □

K ĐỀ SỐ 6A

BÀI 1. (4 điểm) Tính các giới hạn sau

① $\lim\left(-n^2 + n\sqrt{n} + 1\right)$.

② $\lim\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2}\right)$.

③ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1} - 1\right)$.

④ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}$.

Lời giải.

① $\lim\left(-n^2 + n\sqrt{n} + 1\right) = \lim(-n^2)\left(1 - \sqrt{\dfrac{1}{n}} - \dfrac{1}{n^2}\right)$ 0.5điểm

$= -\infty$ 0.5điểm

② $\lim\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-2}\right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}\right)}$ .... 0.25 điểm

$= \lim \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-1}}$ .... 0.25 điểm

$= \lim \dfrac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}\right)}$ .... 0.25 điểm

$= \lim \dfrac{1 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{1}{2}$ .... 0.25 điểm

③ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x+1} - 1\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-(x+1)}{x(x+1)}$ .... 0,5 điểm

$= \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-1}{x+1} = -1$ .... 0,5 điểm

④ $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+5-9}{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}$ .... 0.5 điểm

$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \dfrac{-2}{3}$ .... 0.5 điểm

$\square$

BÀI 2. (2 điểm) Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & \text{nếu } x \neq 3 \\ 5 & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$ trên tập xác định của nó.

Lời giải.

+ Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ .... 0.5 điểm

+ Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$. .... 0.5 điểm

+ Tại $x = 3$ ta có $f(3) = 5$. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x+1) = 4 \neq f(3)$.

Do đó hàm số không liên tục tại $x = 3$. .... 0.5 điểm

+ Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$, nhưng gián đoạn $x = 3$. 0.5 điểm

$\square$

BÀI 3. (2 điểm) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2}, & \text{nếu } x > 2 \\ mx+3, & \text{nếu } x \leq 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x = 2$.

Lời giải.

+ Ta có $f(2) = 2m + 3$ .... 0.5 điểm

+ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2m + 3$ .... 0.5 điểm

+ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\sqrt{7x-10}-2}{x-2} = \dfrac{7}{4}$ .... 0.5 điểm

+ Hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $2m + 3 = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow m = \dfrac{-5}{8}$ ..... 0.5 điểm $\square$

BÀI 4. (2 điểm) Chứng minh rằng phương trình:

1. $x^5 + x^3 - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.
2. $\cos x + m \cos 2x = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

Lời giải.

1. Đặt $f(x) = x^5 + x^3 - 1$, ta có $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0; 1]$ .... 0.5 điểm

$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1) = -1 < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (0; 1) : f(x_0) = 0$ ta có điều phải chứng minh. .... 0.5 điểm

2. Đặt $f(x) = \cos x + m \cos 2x$, ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right]$ ... 0.5 điểm

Ta có:

$\begin{cases} f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow f\left(\dfrac{\pi}{4}\right).f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0, \forall m \Rightarrow \exists x_0 \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right) : f(x_0) = 0$ (đpcm). 0.5 điểm

$\square$

L ĐỀ SỐ 6B

BÀI 1. (1.5 điểm) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$

Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$, hãy tính giới hạn đó.

Lời giải.

Đặt $\lim u_n = a$. Ta có $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2+u_n}$ .... 0.25 điểm

$\Rightarrow a = \sqrt{a+2} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ hoặc $a = 2$. .... 0.5 điểm

Vì $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{R}$ nên $\lim u_n = a > 0$. Vậy $\lim u_n = 2$. .... 0.25 điểm □

BÀI 2. (1.5 điểm) Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} - \ldots$

Lời giải.

Dãy số vô hạn $2, -\sqrt{2}, 1, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}, \ldots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ 0.25 điểm

Vì $|q| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên dãy số này là cấp số nhân lùi vô hạn. .... 0.25 điểm

Do đó $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2} - \cdots = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$. .... 0.5 điểm

□

BÀI 3. (4 điểm) Tính các giới hạn sau:

① $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+1}{x-2}$.

② $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$.

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3}$.

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$.

Lời giải.

① $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{3+1}{3-2} = 4$ .... 1.0 điểm

② $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+3)}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})}$ .... 0.5 điểm

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+3}{2x+1} = \dfrac{4}{3}$. .... 0.5 điểm

③ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{\sqrt{9+x}-3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x(\sqrt{9+x}+3)}{9+x-9} = 24$. .... 1.0 điểm

④ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(2\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} + \dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$ .... 0.25 điểm

mà $\lim\limits_{x\to 0} 2\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+1)} = 1$ .... 0.25 điểm

và $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \dfrac{1}{12}$ .... 0.25 điểm

Do đó $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1-x}-\sqrt[3]{8-x}}{x} = \dfrac{13}{12}$ .... 0.25 điểm

□

BÀI 4. (1.5 điểm) Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & \text{khi } x < 3 \\ 2mx+m+1 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Lời giải.

- Nếu $x < 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-3}$ là hàm phân thức hữu tỉ xác định nên liên tục trên $(-\infty; 3)$. .... 0.25 điểm
- Nếu $x > 3$ thì $f(x) = 2mx + m + 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $(3; +\infty)$. .... 0.25 điểm
- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 3$.

  + Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^3-4x+3}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-}(x-1) = 2$. .... 0.25 điểm

  + $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}(2mx+m+1) = 7m+1$ .... 0.25 điểm

  + $f(3) = 7m+1$ .... 0.25 điểm
- Hàm số liên tục tại $x = 3$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{7}$..0.25 điểm

□

BÀI 5. (1.5 điểm) Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$, chứng minh phương trình

$$a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b) = 0$$

có nghiệm.

Lời giải.

- Đặt $f(x) = a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a) + c(x-a)(x-b)$, ta có $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. .... 0.25 điểm

  Ta có $f(a) = a(a-b)(a-c); f(b) = b(b-c)(b-a); f(c) = c(c-a)(c-b)$, không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$ .... 0.25 điểm
- Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ hoặc $c = 0$ ta có $f(0) = 0$ do đó $x = 0$ là một nghiệm của phương trình. .... 0.5 điểm
- Giả sử $b \neq 0$ ta xét hai trường hợp

  + Nếu $a \leq b < 0 \Rightarrow f(a)f(b) = -ab(a-b)^2(a-c)(b-c) \leq 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[a; b]$. .... 0.25 điểm

  + Nếu $0 < b \leq c \Rightarrow f(b).f(c) = -bc(b-c)^2(b-a)(c-a) \leq 0$. Do đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $[b; c]$. .... 0.25 điểm

□