MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TIỄN

Việc vận dụng kiến thức toán học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn là một vấn đề quan trọng trong dạy và học toán ở trường phổ thông. Điều này đó được thể hiện từ trong đề thi THPT quốc gia năm học 2014-2015, 2015 – 2016 và gần đây là đề thi minh họa của Bộ Giáo dục.

Trong chương trình sách giáo khoa Toán hiện hành, nhất là trong chương trình Đại số và Giải tích , có nhiều chủ đề kiến thức có nhiều lợi thế trong việc lồng ghép những bài toán mang tính thực tế cao, chẳng hạn: Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn, Phương trình bậc hai, Bất phương trình bậc hai (Lớp 10), Giải tích tổ hợp, Xác suất, Cấp số cộng, Cấp số nhân (lớp 11) , Đạo hàm (Lớp 12), ... Những chủ đề có vai trò rất quan trọng trong việc rèn luyện cho học sinh kỹ năng vận dụng kiến thức Toán học vào thực tiễn . Tuy nhiên, vì nhiều lý do ít được sự quan tâm, chú ý khai thác của người dạy và người học toán.

Trong chuyên đề này, tôi cố gắng làm những công việc sau đây:

- Phân loại các bài tập theo từng chủ đề kiến thức;

- Cố gắng sưu tầm càng nhiều càng tốt các ťnh huống thực tiễn từ đó nêu lên bài toán cần phải giải quyết, vận dụng kiến thức toán đã học để giải quyết vấn đề;

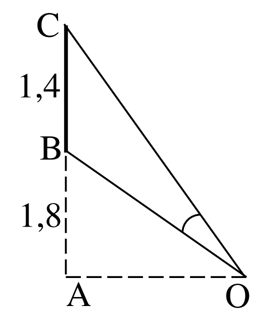
- Xây dựng hệ thống các bài tập theo từng chủ đề kiến thức.

Mặc dù đã rất cố gắng nhưng do khả năng hạn chế nên chuyên đề này chắc chắn sẽ còn nhiều hạn chế, kính mong quí thầy, cô đóng góp ý kiến để tài liệu này tốt hơn ở tương lai.

1. Chủ đề đạo hàm

Đây là công cụ hữu hiệu trong việc tìm cực trị; tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số. Thông qua việc dạy học kiến thức này, ta có thể cho học sinh giải những bài toán thực tiễn khá hấp dẫn và mang nhiều ý nghĩa.

Ví dụ 1: **Một màn ảnh chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đầu mép dưới của màn ảnh). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó?**



Lời giải :

Với bài toán này ta cần xác định OA để góc $\widehat{BOC}$ lớn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi $\mathrm{tg}\widehat{BOC}$ lớn nhất.

Đặt OA = x (m) với x > 0, ta có $\mathrm{tg}\widehat{BOC} = \mathrm{tg}(\widehat{AOC} - \widehat{AOB})$

$$= \frac{\mathrm{tg}\widehat{AOC} - \mathrm{tg}\widehat{AOB}}{1 + \mathrm{tg}\widehat{AOC}.\mathrm{tg}\widehat{AOB}} = \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC.AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{1 + \frac{3,2.1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}.$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1,4x}{x^2 + 5,76}$

Bài toán trở thành tìm x > 0 để f(x) đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-1,4x^2 + 1,4.5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2,4$

Ta có bảng biến thiên

x	0		2,4		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\frac{84}{193}$	↘	0

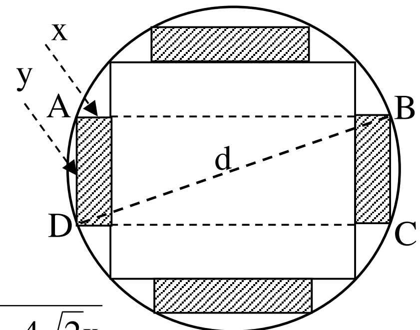
Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4m.

Ví dụ 2: **Từ một khúc gỗ tròn hình trụ, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất?**

Ta có lời giải bài toán như sau:

Gọi x, y là chiều rộng, chiều dài của miếng phụ như Hình vẽ. Gọi d là đường kính của khúc gỗ, khi đó ta có tiết diện ngang của thanh xà có cạnh là $\frac{d}{\sqrt{2}}$

và $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}$, $0 < y < \frac{d}{\sqrt{2}}$.



Theo bài ra ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo Định lý Pitago ta có

$$\left(2x+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}x}$$

Suy ra $S = S(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x\sqrt{d^2-4\sqrt{2}dx-8x^2}$ với $0 < x < \frac{d(2-\sqrt{2})}{4}$, S là diện tích một miếng phụ. Ứng dụng Đạo hàm ta có S lớn nhất khi và chỉ khi $x = \frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}$.

Ví dụ 3. **Chi phí về nhiên liệu của một tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 ngàn đồng/giờ. Phần thứ hai tỷ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi v = 10km/h thì phần thứ hai bằng 30 ngàn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nguyên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất?**

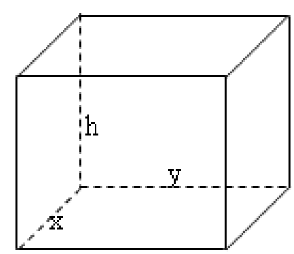
Lời giải: Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu. Thời gian tàu chạy quảng đường 1km là $\frac{1}{x}$(giờ). Chi phí tiền nhiên liệu cho phần thứ nhất là $\frac{1}{x}.480 = \frac{480}{x}$ (ngàn Đồng). Tại v = 10 km/h chi phí cho quảng đường 1km ở phần thứ hai là $\frac{1}{10}.30 = 3$ (ngàn đồng). Xét tại vận tốc x(km/h): gọi y (ngàn Đồng) là chi phí cho quảng đường 1km tại vận tốc x, ta có $y = kx^3$, $3 = k10^3$ (k là hệ số tỉ lệ giữa chi phí 1km đường của phần thứ hai và lập phương của vận tốc), suy ra $\frac{y}{3} = \left(\frac{x}{10}\right)^3 \Leftrightarrow y = 0{,}003x^3$. Vậy tổng chi phí tiền nhiên liệu cho 1km đường là $p = p(x) = \frac{480}{x} + 0{,}003x^3$. Áp dụng Đạo hàm ta có chi phí p nhỏ nhất khi tàu chạy với vận tốc x = 20 (km/h).

***Ví dụ 4*: Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích V(m^3), hệ số k cho trước (k- tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy). Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?**

Lời giải : Gọi x, y, h (x, y, h > 0) lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của hố ga.

Ta có: $k = \frac{h}{x} \Leftrightarrow h = kx$

và $V = xyh \Leftrightarrow y = \frac{V}{xh} = \frac{V}{kx^2}$



Hình 2.18

Nên diện tích toàn phần của hố ga là:

$$S = xy + 2yh + 2xh = \frac{(2k+1)V}{kx} + 2kx^2.$$

Áp dụng Đạo hàm ta có S nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\frac{(2k+1)V}{4k^2}}$. Khi đó

$y = 2\sqrt[3]{\frac{2kV}{(2k+1)^2}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{k(2k+1)V}{4}}$.

***Ví dụ 5*: Từ cảng A dọc theo đường sắt AB cần phải xác định một trạm trung chuyển hàng hóa C và xây dựng một con đường từ C đến D. Biết rằng vận tốc trên đường sắt là v_1 và trên đường bộ là v_2 ($v_1 < v_2$). Hãy xác định**

phương án chọn địa điểm C để thời gian vận chuyển hàng từ cảng A đến cảng D là ngắn nhất?

Lời giải **:** Gọi t là thời gian vận chuyển hàng hóa từ cảng A đến cảng D.

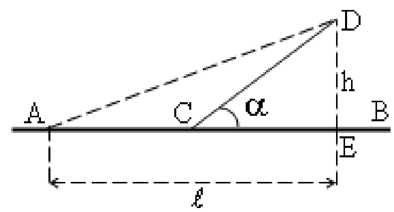
Ta có:

$$t=\frac{AC}{v_1}+\frac{CD}{v_2}=\frac{AE-CE}{v_1}+\frac{CD}{v_2}=$$

$$=\frac{\ell-\dfrac{h}{\tan\alpha}}{v_1}+\frac{\dfrac{h}{\sin\alpha}}{v_2}=\frac{\ell-h.\cot\alpha}{v_1}-\frac{h}{v_2\sin\alpha}$$

Xét hàm số:

$$t(\alpha)=\frac{\ell-h.\cot\alpha}{v_1}-\frac{h}{v_2\sin\alpha}.$$

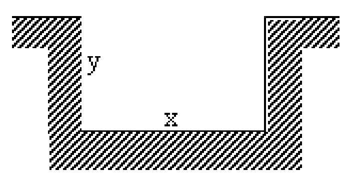


Hình 2.20

Ứng dụng Đạo hàm ta được $t(\alpha)$ nhỏ nhất khi $\cos\alpha=\frac{v_2}{v_1}$. Vậy để t nhỏ nhất ta chọn C sao cho $\cos\alpha=\frac{v_2}{v_1}$.

Ví dụ 6**: Trong lĩnh vực thuỷ lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thuỷ động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S, ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thuỷ động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thuỷ động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)**

Lời giải **:** Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương. Theo bài ra ta có:



$$S=xy;\ \ell=2y+x=\frac{2S}{x}+x.$$

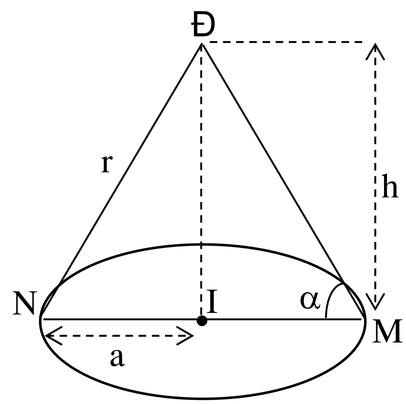
Xét hàm số $\ell(x)=\frac{2S}{x}+x$.

Ta có $\ell'(x)=\frac{-2S}{x^2}+1=\frac{x^2-2S}{x^2}$.

$$\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2S = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2S}\text{, khi đó } y = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{S}{2}}.$$

Dễ thấy với x, y như trên thì mương có dạng thuỷ động học, vậy các kích thước của mương là $x = \sqrt{2S}$, $y = \sqrt{\frac{S}{2}}$ thì mương có dạng thuỷ động học.

***Ví dụ 7*: Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a. Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k\frac{\sin\alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng).**



Hõnh 2.22

***Lời giải*:** Gọi h là độ cao của đèn so với mặt bàn (h > 0). Các ký hiệu r, M, N, Đ, I như *Hình 2.22*.

Ta có $\sin\alpha = \frac{h}{r}$ và $h^2 = r^2 - a^2$, suy ra cường độ sáng là:

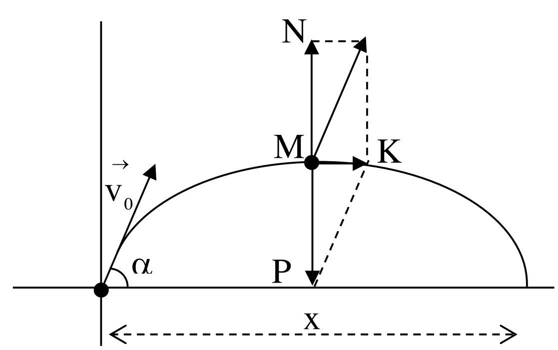
$$C = C(r) = k\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3} \quad (r > a).$$

Ứng dụng Đạo hàm ta có C lớn nhất khi và chỉ khi $r = a.\sqrt{\frac{3}{2}}$, khi đó $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

***Ví dụ 8*: Một vật được ném lên trời xuyên góc α so với phương nằm ngang, vận tốc ban đầu $v_0 = 9$ m/s.**

a) Tính độ cao nhất của vật trên quỹ đạo và xác định thời điểm mà nó đạt được độ cao đó ($g = 10m/s^2$)

b) Xác định góc α để tầm ném cực đại.



Hõnh 2.23

***Lời giải*:**

a) Véc tơ $\vec{v}_0$ được phân tích thành tổng của hai véc tơ theo hai phương vuông góc với nhau (phương ngang và phương thẳng đứng) (*Hình 2.23*). Vật cao nhất khi $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MP}$, trong đó $\left|\overrightarrow{MP}\right| = gt$ (1), $MN^2 = v_0^2 - MK^2$.

Suy ra $MN^2 = v_0^2 - v_0^2\cos^2\alpha$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow g^2t^2 = v_0^2(1-\cos^2\alpha) \Leftrightarrow t = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$.

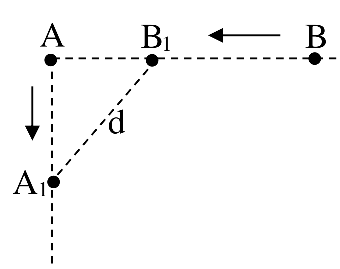
Vậy h lớn nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$ và khi đó:

$$\max h = v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2.\sin^2\alpha}{g}.$$

b) Vì quỹ đạo của vật ném xiên là Parabol nên tầm ném của vật được tính x $= MK.2t = v_0\cos\alpha\,2\dfrac{v_0\sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Ứng dụng Đạo hàm đối với hàm $f(\alpha) = \dfrac{v_0^2.\sin 2\alpha}{g}$, cho ta tầm ném cực đại khi $\alpha = 45^0$.

***Ví dụ 9*: Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/ giờ. Hãy xác định mà thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là lớn nhất?**

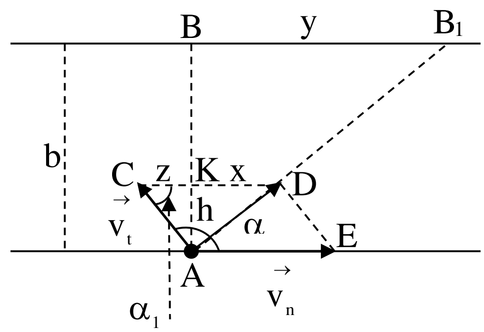


***Lời giải* :** Tại thời điểm t sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d.

Ta có $d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 = (5 - 7.t)^2 + (6t)^2$

Suy ra $d = d(t) = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$. Áp dụng Đạo hàm ta được d nhỏ nhất khi $t = \frac{7}{17}$ (giờ), khi đó ta có $d \approx 3,25$ (hải lý).

***Ví dụ 10*: Cần phải dùng thuyền để vượt sang bờ đối diện của một dòng sông chảy xiết mà vận tốc của dòng chảy là v_c lớn hơn vận tốc v_t của thuyền. Hướng đi của thuyền phải như thế nào để độ dời theo dòng chảy gây nên là nhỏ nhất?**



Lời giải bài toán như sau: Giả sử hướng của thuyền, hướng của dòng nước chảy theo véctơ vận tốc là $\overrightarrow{v_t}$, $\overrightarrow{v_n}$ (*Hình 2.25*). Gọi góc giữa véctơ vận tốc của thuyền và của dòng nước là α, y là độ dời của thuyền do dòng nước chảy, b là khoảng cách giữa hai bờ sông, các ký hiệu x, h, z, α_1, A, B, C, D, E, B_1, K (*Hình 2.25*).

Ta có $h.v_n = v_t.v_n.\sin\alpha$ (vì cùng bằng diện tích của hình bình hành ACDE)

Nên $h = v_t.\sin\alpha$. Do $\alpha_1 + \alpha = 180^0$ (tổng của hai góc trong cùng phía),

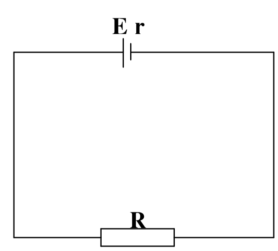
Suy ra $z = -v_t\cos\alpha \Rightarrow x = v_n - (-v_t\cos\alpha) \Rightarrow x = v_n + v_t\cos\alpha$ (x = CD - z).

Mặt khác ta có $\frac{x}{y} = \frac{h}{b}$ (Do KD // BB_1) $\Leftrightarrow y = \frac{bx}{h} = \frac{b(v_n + v_t\cos\alpha)}{v_t\sin\alpha}$

Xét hàm số $y(\alpha) = b(\cot g\alpha + \frac{v_n}{v_t\sin\alpha})$

Ứng dụng Đạo hàm ta có y nhỏ nhất khi $\cos\alpha = -\frac{v_t}{v_n}$.

***Ví dụ 11*: Một nguồn điện với suất điện động E và điện trở r được nối với một biến trở R. Với giá trị nào của biến trở thì công suất tỏa nhiệt ở mạch ngoài sẽ đạt cực đại?**



Lời giải **:**

Theo công thức: $P = RI^2$ với $I = \dfrac{E}{R + r}$

Suy ra $P = \dfrac{E^2R}{(R + r)^2}$, ($R > 0$)

Áp dụng Đạo hàm ta thu được P lớn nhất khi R = r.

Ví dụ 12**:** Viết phương trình phản ứng tạo thành nitơ (IV) ôxít từ nitơ (II) ôxít và ôxy. Hãy xác định nồng độ khí ôxy tham gia phản ứng để phản ứng xảy ra nhanh nhất?

Lời giải :

Phương trình phản ứng: $2NO + O_2 = 2NO_2$

Vận tốc của phản ứng: $v = kx^2y = kx^2(100 - x) = -kx^3 + 100kx^2$ $(0 < x < 100)$

Trong đó x là nồng độ % của khí NO, y là nồng độ % của khí O_2, k là hằng số chỉ phụ thuộc vào nhiệt độ mà không phụ thuộc vào các chất tham gia phản ứng.

Áp dụng Đạo hàm ta thu được v lớn nhất khi x = 66,67%. Lúc này, nồng độ % khí ôxy là y = 33,33%.

Ví dụ 13**: Trong một môi trường dinh dưỡng có 1000 vi khuẩn được cấy vào. Bằng thực nghiệm xác định được số lượng vi khuẩn tăng theo thời gian bởi qui luật:** $p(t) = 1000 + \dfrac{100t}{100 + t^2}$ **(t là thời gian (đơn vị giờ)).**

Hãy xác định thời điểm sau khi thực hiện cấy vi khuẩn vào, số lượng vi khuẩn tăng lên là lớn nhất?

Áp dụng Đạo hàm ta thu được P lớn nhất khi t = 10 (giờ).

2. Chủ đề hàm số

Từ tình huống thực tế cần giải quyết, tiến hành thực nghiệm, thu thập các số liệu từ đó lập ra hàm số sau đó khảo sát hàm số ťm ra phương án tối ưu cho vấn đề cần giải quyết.

Ví dụ 1: **(đo chiều cao của cổng parabol) (SGK BAN KHTN)**

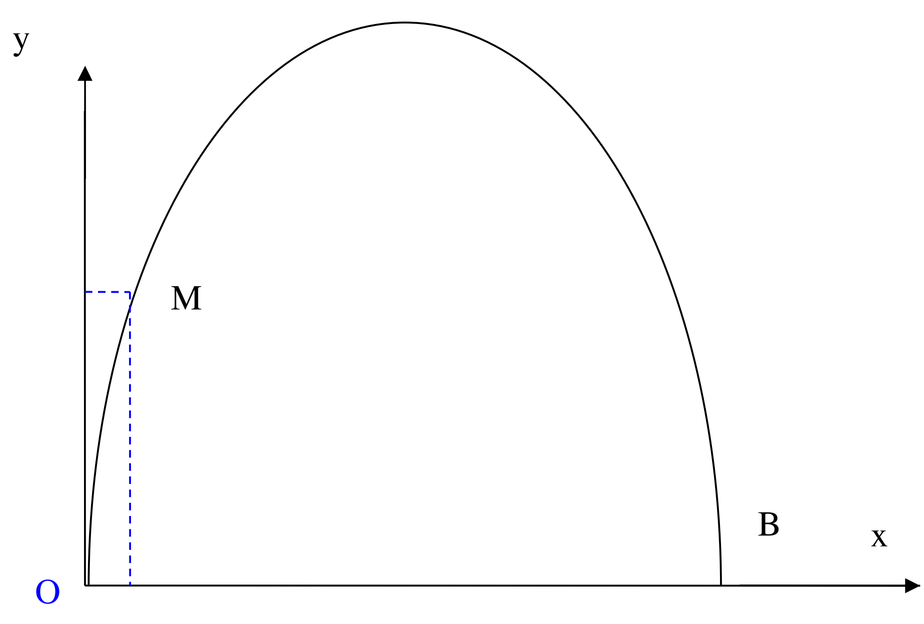
Khi du lịch đến thành phố Lui (Mĩ) ta sẽ thấy một cái cổng lớn dạng Parabol bề lừm quay xuống dưới. Đó là cổng Acxơ (hình vẽ) .

Làm thế nào để tính chiều cao của cổng? (khoảng cách từ điểm cao nhất của cổng đến mặt đất)

Vấn đề đặt ra:

Tính chiều cao của cổng khi ta không thể dùng dụng cụ đo đạc để đo trực tiếp. Cổng dạng Parabol có thể xem là đồ thị của hàm số bậc hai, chiều cao của cổng tương ứng với đỉnh của Parabol. Do đó vấn đề được giải quyết nếu ta biết hàm số bậc hai nhận cổng làm đồ thị

Đơn giản vấn đề : chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ O trùng một chân của cổng (như hỗnh vẽ)



Như vậy vấn đề được giải quyết nếu ta biết hàm số bậc hai nhận cổng Acxơ làm đồ thị .

Phương án giải quyết :

Ta biết hàm số bậc hai có dạng: $y = ax^2 + bx + c$. Do vậy muốn biết được đồ thị hàm số nhận cổng làm đồ thị thì ta cần biết ít nhất tọa độ của 3 điểm nằm trên đồ thị chẳng hạn O,B ,M

Rỏ ràng O(0,0); M(x,y); B(b,0). Ta phải tiến hành đo đạc để nắm số liệu cấn thiết.

Đối với trường hợp này ta cần đo: khoảng cách giữa hai chân cổng, và một điểm M bất kỳ chẳng hạn b = 162, x = 10, y = 43

Ta viết được hàm số bậc hai lúc này là : $\mathbf{y = \frac{-43}{1320}x^2 + \frac{3483}{700}x}$

Đỉnh S(81m;185,6m)

Vậy trong trường hợp này cổng cao 185,6m. Trên thực tế cổng Acxơ cao 18

***Ví dụ 2*: (Xây dựng cây cầu)**

Một con sông rộng 500m, để tạo điều kiện cho người dân hai bờ sông đi lại giao lưu buôn bán, người ta cho cây cầu bắt qua sông: bề dày của cầu là 10cm, chiều rộng của cầu là 4m, chiều cao tối đa của cầu là 7m so với mặt sông. Hãy ước lượng thể tích bờ sông để xây dựng thân cầu.

Vấn đề đặt ra:

Ước lượng thể tích bê tông để xây dựng thân cầu. Để ước lượng được thế nào thì ta phải xác định hình dạng, đặc điểm của cây cầu.

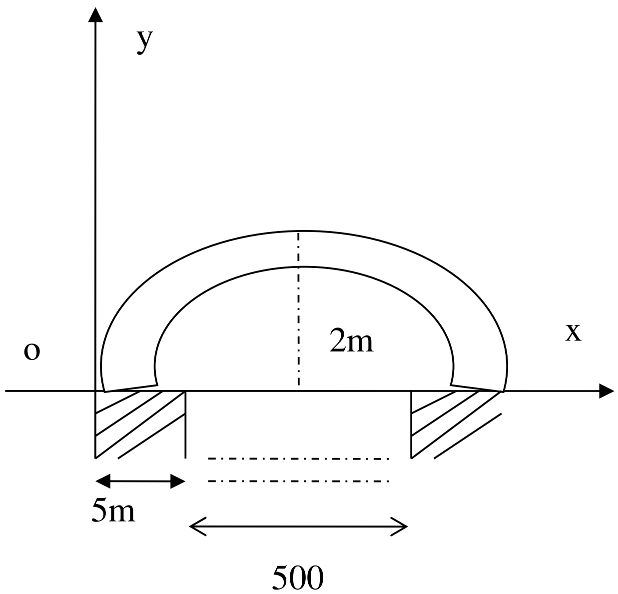
Thông thường người ta làm theo hai phương án.

Phương án 1: xây dựng cầu theo hình dạng parabol

Phương án 2: xây dựng cầu theo dạng đổ bê tông bằng phẳng hay có dạng hình chữ nhật.

Trong hai phương án đó ta chọn ra một phương án hợp lý nhất.

a.Phương án 1: **xây dựng cây cầu theo dạng hình parabol, điểm xuất phát cách bờ 5m, điểm cao nhất của cầu cách chân cầu 2m như bản vẽ sau.**



Đơn giản bài toán ta chọn hệ trục toạ độ sao cho gốc toạ độ trùng với chân cầu như hình vẽ O(0,0), A(255,2), B(510,0)

Khi đó hàm số

$$y_1 = ax^2 + bx + c$$
$$\Rightarrow y_1 = ax^2 + bx$$
$$\Rightarrow y_2 = ax^2 + bx - \frac{1}{10}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 255^2 a + 255b = 2 \\ 510^2 a + 510b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{2}{255^2} \\ b=\frac{4}{255} \end{cases}$$
$$\Rightarrow y_1 = -\frac{2}{255^2}x^2 + \frac{4}{255}x$$
$$\Rightarrow y_2 = -\frac{2}{255^2}x^2 + \frac{4}{255}x - \frac{1}{10}$$

Diện tích chiều dày S của thân cầu là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số y_1, y_2 và trục Ox.

Vỡ lý do đối xứng nên ta chỉ tính diện tích S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số y_1, y_2 và trục Ox trong khoảng (0;255).

$$S = 2S_1 = 2\left(\int_0^{0,1}\left(\frac{-2}{255^2}x^2 + \frac{4}{255}x\right)dx + \int_{0,1}^{255}\frac{1}{10}dx\right)$$

$$= 2\left(\left(\frac{-2}{3.255^2}x^3 + \frac{4}{2.255}x^2\right)\Bigg|_0^{0,1} + \frac{1}{10}x\Bigg|_{0,1}^{255}\right)$$

$$= 50,89 \approx 51m^2$$

Với cây cầu có bề dày không đổi nên ta có thể xem thể tích của cây cầu là tích của diện tích chiều dày thân cầu và độ rộng của cầu

Suy ra $V = 4S = 204m^3$ $V = 4S = 204m^3$

Vậy thể tích vữa cần dùng là 204 mét khối

b.Phương án 2: xây dựng cầu theo dạng đổ bê tông bằng phẳng hay có dạng hình chữ nhật.

Thể tích khối cầu lúc này là :

V = 4.0,1.510 = 204 m^3

Vậy thể tích bê tông cần dùng theo phương án này vẫn là 204 mét khối.

Do vậy trong thực tế tùy theo yêu cầu mà người ta chọn một trong hai phương án trên. Nếu ta quan tâm đến tính thẩm mĩ nên chọn làm cầu dạng Parabol .

***Ví dụ 3*: (bài toán máy bơm)**

Một hộ gia đình có ý định mua một cái máy bơm để phục vụ cho việc tưới tiêu vào mùa hạ. Khi đến cửa hàng thỡ được ông chủ giới thiệu về hai loại máy bơm có lưu lượng nước trong một giờ và chất lượng máy là như nhau.

Máy thứ nhất giá 1.500.000đ và trong một giờ tiêu thụ hết 1,2kW.

Máy thứ hai giá 2.000.000đ và trong một giờ tiêu thụ hết 1kW

Theo bạn người nông dân nên chọn mua loại máy nào để đạt hiệu quả kinh tế cao.

Vấn đề đặt ra: Chọn máy bơm trong hai loại để mua sao cho hiệu quả kinh tế là cao nhất. Như vậy ngoài giá cả ta phải quan tâm đến hao phí khi sử dụng máy nghĩa là chi phí cần chi trả khi sử dụng máy trong một khoảng thời gian nào đó.

Phương án giải quyết:

Giã sử giá tiền điện hiện nay là: 1000đ/1KW.

Vậy trong x giờ số tiền phải trả khi sử dụng máy thứ nhất là:

$$f(x)=1500 + 1,2x \text{ (ngàn đồng)}$$

Số tiền phải chi trả cho máy thứ 2 trong x giờ là:

$$g(x) = 2000 + x \text{ (ngàn đồng)}$$

Ta thấy rằng chi phí trả cho hai máy sử dụng là như nhau sau khoảng thời gian x_0 là nghiệm phương trình

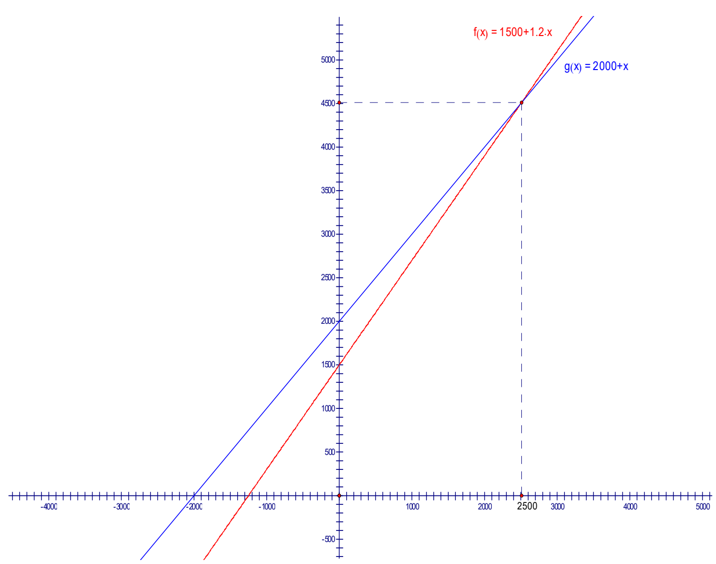
$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow 1500+1,2x = 2000+x$$

$$\Leftrightarrow 0,2x = 500$$

$$\Leftrightarrow x = 2500 \text{(giờ)}$$

Ta có đồ thị của hai hàm f(x) và g(x) như sau:



Quan sát đồ thị ta thấy rằng: ngay sau khi sử dụng 2500 giờ tức là nếu mỗi ngày dùng 4 tiếng tức là không quá 2 năm thì máy thứ 2 chi phí sẽ thấp hơn rấtnhiều nên chọn mua máy thứ hai thì hiệu quả kinh tế sẽ cao hơn.

Trường hợp 1: nếu thời gian sử dụng máy ít hơn 2 năm thì mua máy thứ nhất sẽ tiết kiệm hơn.

Trường hợp 2: nếu thời gian sử dụng nhiều hơn hoặc bằng hai năm thì mua máy thứ 2.

Nhưng trong thực tế một máy bơm có thể sử dụng được thời gian khá dài. Do vậy trong trường hợp này người nông dân nên mua máy thứ hai

***Ví dụ 3*: (thiết kế hộp đựng bột trẻ em)**

Một nhà sản xuất bột trẻ em cần thiết kế bao bì mới cho một loại sản phẩm mới của nhà máy thể tích 1dm^3. Nếu bạn là nhân viên thiết kế bạn sẽ làm như thế nào để nhà máy chọn bản thiết kế của bạn.

Vấn đề đặt ra: Người thiết kế muốn nhà máy chọn bản thiết kế của mình thì ngoài tính thẩm mỹ của bao bì thì cần tính đến chi phí về kinh tế sao cho nguyên vật liệu làm bao bì là ít tốn nhất

Theo cách thông thường ta làm bao bì dạng hình hộp chữ nhật hoặc hình trụ. Như vậy cần xác định xem hai dạng trên thì dạng nào sẽ ót tốn vật liệu hơn.

Các phương án giải quyết :

Phương án 1: **Làm bao bì theo hình hộp đáy hình vuông cạnh x**

Thể tích: $V = S_d \times h = x^2 h$; V = hx^2 = 1 $\Rightarrow h = \dfrac{1}{x^2}$

Để ít tốn vật liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất.

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2day} = 4xh + 2x^2 = 4x\frac{1}{x^2} + 2x^2 = \frac{2}{x} + \frac{2}{x} + 2x^2 \geq 3.\sqrt[3]{\frac{2}{x}.\frac{2}{x}.2x^2} = 6$$

Vậy Min $S_{tp} = 6$ xảy ra khi: $\dfrac{2}{x} = 2x^2 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow h = 1$

Nếu ta làm theo dạng hình hộp thỡ nhà thiết kế cần làm hình lập phương có cạnh 1dm

$$V = \pi x^2 h = 1$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{\pi x^2}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{2day} = 2\pi x h + 2\pi x^2$$

$$= 2\pi x \frac{1}{\pi x^2} + 2\pi x^2$$

$$= \frac{2}{x} + 2\pi x^2$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + 2\pi x^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.2\pi x^2} = 3\sqrt[3]{2\pi} = 5,54$$

Min $S_{tp} = 5,54$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\frac{1}{x} = 2\Pi x^2 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2\Pi} \Rightarrow x = 0,54dm$$
$$\Rightarrow h = 1,084$$

Nhận thấy h = 2x

Nếu làm bao bì dạng hình trụ thì người thiết kế phải làm hộp sao cho đường cao bằng đường kính đáy.

Theo tính toán ở trên cả hai hộp đều có thể tích là 1dm^3 nhưng diện tích toàn phần của hộp lập phương lớn hơn hộp hình trụ do vậy chi phí vật liệu để làm hộp dạng lập hình lập phương là tốn kém hơn. Vì thế để nhà máy chọn bản thiết kế của mình thì người thiết kế nên chọn dạng hình trụ để làm hộp. Tuy nhiên trên thị trường hiện nay vẫn có dạng hộp sửa hình hộp chữ nhật, hình lập phương… là do những tính năng ưu việt khác của các dạng hộp đó.

3. Chủ đề Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Trong chủ đề này có thể khai thác được nhiều dạng toán gần gũi với đời sống thực tiễn như: Bài toán vận tải, Bài toán sản xuất đồng bộ, Bài toán thực đơn, Bài toán lập kế hoạch sản xuất trong điều kiện tài nguyên hạn chế, Bài toán vốn đầu tư nhỏ nhất, Bài toán pha trộn, ...

Chẳng hạn, ta có thể lấy thêm một số ví dụ sau:

Ví dụ 1:

Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán khuyến mói hàng hoá (1 sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10chiếc , xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu , loại B giá 3triệu. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí vận chuyển là thấp nhất. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng.

Vấn đề đặt ra:

Cần phải tớnh số xe loại A, loại B cần dựng sao cho chi phớ là thấp nhất.

Nếu chỉ sử dụng 1 loại xe thì không đáp ứng yêu cầu . Thật vậy

Nếu dùng cả 9 xe B thì chở được 90 người và vận chuyển được 13,5 tấn hàng như vậy sẽ thừa 50 người và thiếu 4,5 tấn.

Nếu dùng cả 10 xe A chở được 200 người và 6 tấn hàng như vậy sẽ hiếu 60 người và thừa 3 tấn hàng.

Do vậy ta phải thuê hai loại xe .

Phương án giải quyết :

Gọi x, y lần lược là số xe loại A, B cần dùng .

Theo đề bài thì cần tìm x, y sao cho A(x,y) = 4x+3y đạt giá trị nhỏ nhất.

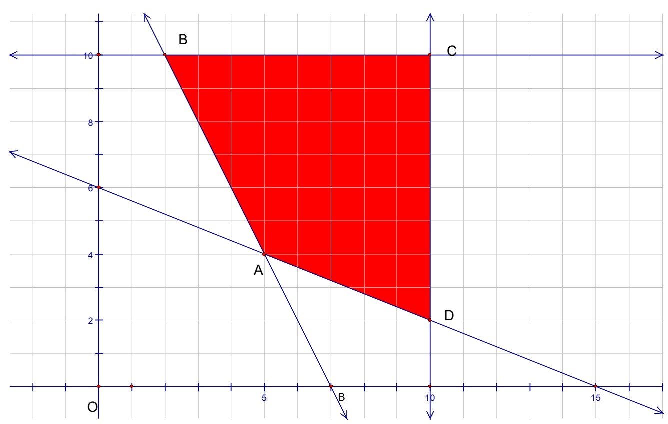
Ta có: $\begin{cases} 20x+10y \geq 140 \\ 0,6x+1,5y \geq 9 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1y \geq 14 \\ 2x+15y \geq 30 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (II)$

Để giải bài toán này ta lần lượt giải quyết các vấn đề sau đây:

+ xác định tập (S) các điểm có có toạ độ (x,y) thoả mãn hệ bất pt (II) (1)

+ khi (x,y) lấy giá trị trên (S) tìm giá trị nhỏ nhất của T(x,y) = 4x + 3y (2)

Miền nghiệm (S) của hệ (II) được biểu diễn bằng tứ giác ABCD kể cả biên như hình vẽ :



(2) Có nghĩa là tìm tất cả các điểm M(x,y) thuộc tứ giác ABCD sao cho A(x,y) nhỏ nhất

Ta biết rằng A nhỏ nhất đạt tại các giá trị biên của tứ giác ABCD, nên ta cần tìm các toạ độ các đỉnh S

A(x,y) là nghiệm hệ: $\begin{cases} 2x+y=14 \\ 2x+5y=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow A(5,4)$

B(x,y) là nghiệm hệ $\begin{cases} x=10 \\ 2x+5y=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B(10,2)$

C(x,y) là nghiệm hệ $\begin{cases} x=10 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow C(10,9)$

D(x,y) là nghiệm hệ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow D(\dfrac{5}{2},9)$

Tính giá tri T(x, y) tại các điểm biên:

$$T(A) = 4.5+3.4 = 32(\text{triệu})$$

$$T(B) = 4.10+3.2 = 46(\text{triệu})$$

$$T(\ C\ ) = 4.10+3.9 = 67(\text{triệu})$$

$$T(D) = 4.\frac{5}{2}+3.9 = 37(\text{triệu})$$

Vậy T(A) = 32 triệu là nhỏ nhất vậy ít tốn tiền vận chuyển nhất nên chọn 5 xe A và 4 xe B.

Ví dụ 2:

Trong một cuộc thi về " bữa ăn dinh dưỡng", ban tổ chức yêu cầu để đảm bảo lượng dinh dưỡng hằng ngày thì mỗi gia đình có 4 thành viên cần ít nhất 900 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị Lipít trong thức ăn hằng ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800đơn vị prôtêin và 200đơn vị Lipit, 1kg thịt heo chứa 600đơn vị prôtêin và 400đơn vị Lipit. Biết rằng người nội trợ chỉ được mua tối đa 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt heo. Biết rằng 1 kg thịt bò giá 100.000đ, 1kg thịt heo giá 70.000đ

Phần thắng sẽ thuộc về gia đình nào trong khẩu phần thức ăn đảm bảo chất dinh dưỡng và chi phí bỏ ra là ít nhất.

Vấn đề đặt ra:

Xác định lượng thịt heo và thịt bò cần mua để vừa đảm bảo dinh dưỡng vừa ít tốn nhất.

Rỏ ràng đối với trường hợp này nếu ta chỉ mua một loại thịt thì không đáp ứng yêu cầu. Thật vậy:

+ Nếu chỉ mua thịt heo thì ta mua được tối đa 1,1 kg. Khi đó chi phí bỏ ra là: 1,1x70.000 = 77000đ

Với lượng thịt trên thì cung cấp 1,1 x 600 = 660 đơn vị Prôtêin và 1,1 x 400 = 440 đơn vị Lipit. Như vậy lượng Lipit thừa mà lượng Prôtêin thiếu.

+ Nếu chỉ mua thịt bò thì rỏ ràng chi phí sẽ rất cao.

Do vậy ta phải mua hai loại thịt

Phương án giải quyết :

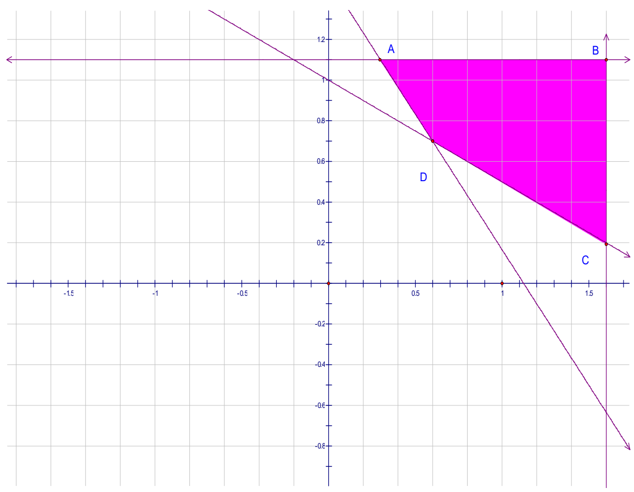
Gọi x,y lần lược là khối lượng thịt bò và thịt heo mà người nội trợ mua

Bài toán đặt ra **T=100.000x+70.000y** đạt giá trị nhỏ nhất.

Điều kiện

$$\begin{cases} 800x+600y \geq 900 \\ 200x+400y \geq 400 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+6y \geq 9 \quad (1) \\ x+2y \geq 2 \quad (2) \\ 0 \leq x \leq 1,6 \quad (3) \\ 0 \leq y \leq 1,1 \quad (4) \end{cases}$$

Miền giới hạn chính là tứ giác ABCD



A(0,3;1,1), B(1,6;1,1), C(1,6;0,2), D(0,6; 0,7)

T(A)=107.000đ.

T(B)=237.000đ

T(C)=174000đ

T(D)=109.000đ

Vậy Tmin = 107.000đ khi mua 0.3kg thịt bò và 1,1 kg thịt heo.

Ví dụ 3

Một cửa hàng bán áo sơ mi, quần âu nam. Vì khi bán chị bán hàng quên ghi chép vào sổ để chủ cửa hàng kiểm tra. Chiều ngày thứ 3 người chủ buộc chị phải nộp sổ để theo dõi nhưng chị không biết rỏ ba ngày qua

đã bán được những gì ? Chỉ nhớ rằng ngày thứ nhất bán được 5160.000đ, ngày thứ 2 bán được 6.080.000đ, ngày thứ 3 bán được 4.920.000 đ. Vậy bạn có cách nào giúp chị ấy không?

Vấn đề đặt ra: Phải tính được số hàng bán từng ngày. Do vậy phải tính được ngày thứ nhất bán được bao nhiêu áo sơ mi , quần âu nam, tương tự các ngày sau.

Phương án giải quyết:

a.Phương án 1 : chị ấy đếm số quần áo còn lại rồi so sánh với số quần áo khi nhập vào sau đó chia đều cho ba ngày. Cách tính này rất nhanh, chính xác nhưng khó có thể thuyết phục .

b. Phương án 2: Tính số hàng bán từng ngày

Khi hỏi chị bán hàng cho biết thêm thông tin : ngày thứ ba bán được 15 quần âu nam, tổng số áo và quần bán được trong ba ngày lần lượt là 52 và 60.

Từ giả thuyết ta gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số áo sơ mi bán ở ngày thứ nhất, thứ hai, thứ ba. y_1, y_2, y_3 lần lược là số quần âu nam bán ở ngày thứ nhất, thứ hai, thứ ba.

Theo đề ta có:

$$\begin{cases} 80.000x_1 + 200.000y_1 = 5160.00 \\ 80.000x_2 + 200.000y_2 = 6.080.000 \\ 80.000x_3 + 200.000y_3 = 4.920.000 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 52 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 60 \\ y_3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_1 + 20y_1 = 516 \\ 8x_2 + 20y_2 = 608 \\ 8x_3 + 20y_3 = 492 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 52 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 60 \\ y_3 = 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 12, x_2 = 16, x_3 = 24 \\ y_1 = 21, y_2 = 24, y_3 = 15 \end{cases}$$

Vậy: Ngày thứ nhất chị ấy bán được 12 áo sơ mi, 21 quần âu nam

Ngày thứ hai bán được 16 áo sơ mi và 24 quần âu nam

Ngày thứ ba bán được 24 áo sơ mi và 15 quần âu nam.

Ví dụ 4

Trong một xưởng cơ khí có những thanh sắt dài 7,4m. Người chủ muốn các thợ của mình cắt mỗi thanh sắt thành các đoạn dài 0,7m và 0,5m để tiện sử dụng. Bây giờ người chủ muốn có 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m. Bạn hãy ước lượng xem cần dùng ít nhất bao nhiêu thanh sắt 7,4m để làm.

Vấn đề đặt ra:

Cắt đủ số đoạn theo yêu cầu và phải dùng thanh sắt 7,4m ít nhất . Do vậy ta cần tìm cách cắt theo yêu cầu và chọn cách cắt tiết kiệm nhất.

Phương án giải quyết (đề nghị): Ta thấy rằng muốn tiết kiệm vật liệu thì cần phải cắt mỗi thanh 7,4 m thành a đoạn 0,7m, b đoạn 0,5m không dư. Tức là cần giải phương trình:

$$\begin{aligned}&74 = 7a + 5b \geq 7a\\&\Rightarrow 0 < a \leq 10\\&b = \frac{74-7a}{5} = 15 - a - \frac{1+2a}{5}\end{aligned}$$

Và $b \in Z$ thì (1+2a) $\vdots$5

Ta có: $74 \geq 5b \Rightarrow 0 < b \leq 14$, $0 < 1+2a \leq 21$ và 1+2a là số lẻ nên ta suy ra:

$$\begin{aligned}&0,7a + 0,5b = 7,4 \ \ khi \ \ a,b \in Z\\&\Leftrightarrow 7a + 5b = 74\\&\left[\begin{array}{l}1+2a=5\\1+2a=15\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2 \Rightarrow b=12\\a=7 \Rightarrow b=5\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy ta có hai cách cắt một thanh 7,4 m tiết kiệm

Cắt thành 2 đoạn 0,7m và 12 đoạn 0,5m

Cắt thành 7 đoạn 0,7 và 5 đoạn 0,5 m.

Bây giờ ta chọn các tiết kiệm nhất trong hai cách trên

Gọi x thanh cắt theo kiểu thứ nhất , y thanh cắt theo kiểu thứ hai.

Như vậy số đoạn 0,7m là: $2x + 7y$

Số đoạn 0,5m là: $12x + 5y$

Để có 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m nên x, y là nghiệm hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x+7y=1000 \\ 12x+5y=2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=121 \\ y=108 \end{cases}$$

Vậy đã cắt được $2x+7y=998$ đoạn 0,7m

Và $12x+5y=1992$ đoạn 0,5 m

Ta chỉ cần cắt thêm một thanh theo kiểu thứ nhất

Vậy đó dựng tất cả $121+108+1=230$ thanh 7,4m

Điều quan trọng lúc này chúng ta cần chỉ ra rằng cách cắt này là tiết kiệm nhất.

Thật vậy, ta thấy tổng số độ dài của 1000 đoạn 0,7m và 2000 đoạn 0,5m là:

$$0,7.1000+0,5.2000=1700m \; 0,7.1000+0,5.2000=1700m$$

Vậy phải dựng ítt nhất $1700:7,4\approx 230$ thanh

Tóm lại chỉ cần cắt 122 thanh theo kiểu thứ nhất, 108 thanh theo kiểu thứ hai.

Vớ dụ 5

Hai công nhân được giao nhiệm vụ sơn một bức tường. Sau khi người thứ nhất làm được 7h và người thứ hai làm được 4h thì họ sơn được $\frac{5}{9}$ bức tường. Sau đó họ bắt tay làm chung trong 4h thì chỉ còn $\frac{1}{18}$ bức tường chưa sơn. Vì cả hai người này đều bận nên nhờ người công nhân thứ ba sơn tiếp bức tường còn lại. Bây giờ phải chia tiền công như thế nào cho công bằng. Biết rằng người chủ khoán tiền công sơn bức tường này là 360.000đ.

Vấn đề đặt ra:

Tính số tiền mà mỗi người nhận được khi sơn xong bức tường. Để giải quyết vấn đề này ta quan tâm đến thời gian và số phần việc đó làm.

Các phương án giải quyết (đề nghị):

a. Phương án 1: **tính theo số giờ làm việc**

Công việc còn lại người công nhân thứ ba làm nên nhận được số tiền làm trong giai đoạn này là 360.000: 18=20.000đ

Số tiền tổng cộng của hai nguời công nhân đầu tiên là:

360.000-20.000=340.000đ

Số giờ tổng cộng mà hai người làm là: $t = 7 + 4 + 2.4 = 19$

Thời gian người thứ nhất làm là: $t_1 = 7 + 4 = 11$

Số tiền người thứ nhất có thể nhận được là $\frac{340000}{19}.11 = 197000$ đ

Số tiền người thứ hai nhận được $T = 340000 - 197000 = 143000$ đ

Ta thấy rằng điều này vẫn chưa thoả mãn vì tiền công phụ thuộc vào kết quả công việc. Mâu thuẫn này đó dẫn đến việc đề xuất phương án giải quyết tiếp theo.

b. Phương án 2: **tính theo phần công việc đó làm**.

Tiền công của người thứ ba là 20.000đ

Ta chỉ quan tâm đến tiền công mà người công nhân thứ nhất và thứ hai có thể nhận được.

Giả sử công suất của mỗi người không đổi khi làm việc

Gọi: x là phần bức tường người thứ nhất làm trong 1h

y là phần công việc người thứ hai làm trong 1 giờ

Theo đề ta có

$$\begin{cases} 7x+4y=\frac{5}{9} \\ 4x++4y=\frac{7}{18} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{18} \\ y=\frac{1}{24} \end{cases}$$

Như vậy trong quá trình làm việc của mình người thứ nhất làm được $\frac{11}{18}$ công việc

Số tiền mà người thứ nhất nhận được là $\frac{11}{18}.360000 = 220.000$đ

Trong quá trình làm việc người thứ hai làm được $8.\frac{1}{24} = \frac{1}{3}$ công việc

Số tiền mà người thứ hai nhận được là $\frac{1}{3}.360000 = 120.000$đ.

Vậy trong công việc này thì số tiền mà người công nhân thứ nhất , thứ hai và thứ ba nhận được lần lượt là: 220.000đ, 120.000đ, 20.000đ

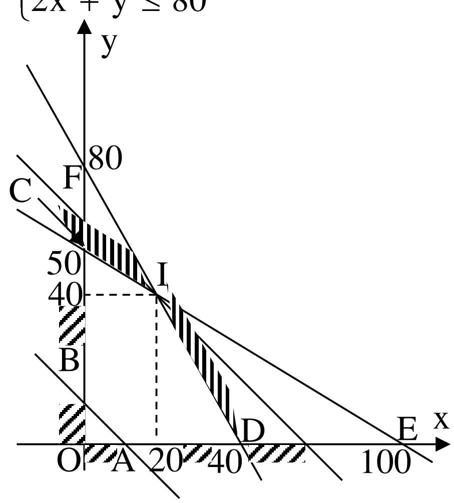
Ví dụ 6: **Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15giờ, đem lại mức lời 30000 đồng.**

Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x \geq 0$, $y \geq 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 13y \leq 1200 \end{cases}$ sao cho $L = 40000x + 30000y$ đạt giá trị lớn nhất.

Một cách tương đương là, tìm x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \leq 80 \end{cases}$

sao cho $4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.



Trên Hình vẽ ta ký hiệu C(0; 50), D(40; 0), E(100; 0), F(0; 80), I là giao điểm của CE và DF. Dễ thấy toạ độ của I là (20; 40), miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác OCID (kể cả biên).

Với mỗi L xác định, ta nhận thấy có vô số điểm M(x; y) sao cho 4x + 3y = L, những điểm M như thế nằm trên đường thẳng AB với A(L/4; 0), B(0; L/3). Hệ số góc của đường thẳng AB là - 4/3. Cho L lớn dần lớn lên thì đường thẳng AB sẽ "tĩnh tiến dần lên" phía trên. Nhìn vào Hình vẽ ta nhận thấy rằng: Trong những đường thẳng có hệ số góc - 4/3, thì đường thẳng đi qua I là đường thẳng ở vị trí "cao nhất" đang còn có điểm chung với tứ giác OCID. Chưa đạt tới vị trí này thì L chưa phải là lớn nhất. Vượt quá "ngưỡng" này thì toạ độ của mọi điểm trên đường thẳng sẽ không còn thoả mãn hệ điều kiện ràng buộc nữa.

Từ đó dễ dàng đi đến kết luận là khi x = 20, y = 40 thì L đạt giá trị lớn nhất.

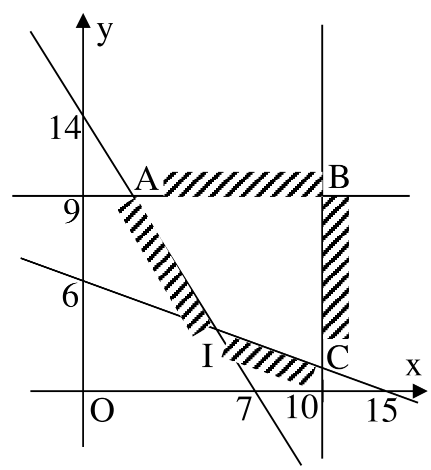
Ví dụ 7: **Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?**

Trước hết ta hãy đặt Bài toán thành hệ bất phương trình

Gọi x, y $(x, y \in N)$ lần lượt là số xe loại MITSUBISHI, loại FORD cần thuê

Từ bài toán ta được hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0{,}6x + 1{,}5y \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases} \quad (*)$$



Tổng chi phí $T(x, y) = 4x + 3y$ (triệu đồng)

Thực chất của Bài toán này là tìm x, y nguyên không âm thoả mãn hệ (*) sao cho T(x, y) nhỏ nhất.

Bước tiếp theo là ta tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình

Miền nghiệm là miền tứ giác lồi IABC.

Ta cần xác định toạ độ (x, y) của một điểm thuộc miền tứ giác IABC (kể cả biên) sao cho T(x, y) = 4x + 3y đạt cực tiểu. Xét họ đường thẳng cho bởi phương trình: 4x + 3y = T ($T \in R$) hay $y = -\frac{4}{3}x + \frac{T}{3}$, ta thấy đường thẳng này song song với đường thẳng $y = -\frac{4}{3}x$ ($T \neq 0$). Khi T tăng, đường thẳng này tịnh tiến song song lên phía trên. Khi T giảm, đường thẳng này tịnh tiến song song xuống phía dưới. Giá trị nhỏ nhất của T đạt được tại đỉnh I của tứ giác IABC là giao điểm của hai đường thẳng 2x + 5y = 30 và 2x + y = 14. Toạ độ của I là ($x_I = 5$; $y_I = 4$).

Như vậy: thuê 5 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD thì chi phí vận tải là thấp nhất.

4. Chủ đề dãy số, cấp số cộng, cấp số nhân

***Ví dụ 1*: Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất, nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số xoài còn lại và nửa quả v.v... Đến lượt người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa.**

Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu quả xoài đầu mùa?

Gọi x là số quả Xoài thu hoạch được đầu mùa của người nông dân.

Người khách hàng thứ nhất đã mua: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$ quả; người thứ 2 mua: $\frac{1}{2}(x - \frac{x+1}{2}) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2}$ quả; người khách hàng thứ 3 mua: $\frac{1}{2}(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{2^2}) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3}$ quả; ... và người khách hàng thứ 7 mua: $\frac{x+1}{2^7}$ quả. Ta có phương trình:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \dots + \frac{x+1}{2^7} = x$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^7}) = x \quad (*)$$

Tính tổng các số hạng của cấp số nhân trong ngoặc ta được:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^7} = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^7}}{\frac{1}{2}} = \frac{127}{128}$$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow (x+1)\frac{127}{128} = x \Leftrightarrow x = 127$

Vậy bác nông dân đã thu hoạch được 127 quả Xoài đầu mùa.

***Ví dụ 2:* Qua điều tra chăn nuôi bò ở huyện X cho thấy ở đây trong nhiều năm qua, tỉ lệ tăng đàn hàng năm là 2%.**

Tính xem, sau một kế hoạch 3 năm, với số lượng đàn bò thống kê được ở huyện này vào ngày 1/1/2006 là 18.000 con, thì với tỉ lệ tăng đàn trên đây, đàn bò sẽ đạt tới bao nhiêu con?

Thông thường bài toán trên được giải như sau:

Sau một năm đàn bò ở huyên này tăng được: $18.000 \times 2\% = 360$ (con).

Nên tổng số đàn bò sau năm thứ nhất (cuối năm 2006) là:

$$18.000 + 360 = 18.360 \text{ (con)}.$$

Sau 2 năm đàn bò lại tăng thêm: $18.360 \times 2\% = 367$ (con).

Nên tổng số bò sau năm thứ 2(cuối năm 2007) là:

$$18.360 + 367 = 18.727 \text{ (con)}.$$

Sau 3 năm đàn bò lại tăng thêm: $18.727 \times 2\% = 375$ (con).

Như vậy tổng đàn bò cuối năm thứ 3 (cuối 2008) là:

$$18.727 + 375 = 19.102 \text{ (con)}.$$

Bài toán đã được giải quyết xong. ***Tuy nhiên ta nhận thấy nếu yêu cầu tính số đàn bò sau nhiều năm hơn thì cách tính đi từng bước như trên sẽ rất vất vả, chậm và có thể nhầm lẫn. Bằng kiến thức về cấp số nhân ta sẽ tìm ra cách tính tổng quát hơn.***

Gọi S_0 là tổng số đàn gia súc theo thống kê ban đầu; q là tỉ lệ tăng hàng năm; n là số năm phát triển $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ và S_i ($i = 1 \ldots n$) là tổng số đàn gia súc sau i năm.

Số gia súc sau 1 năm phát triển là: $S_1 = S_0 + S_0q = S_0(1 + q)$

Số gia súc sau 2 năm phát triển là: $S_2 = S_1 + S_1q = S_0(1 + q) + S_0(1 + q)q$

$$= S_0(1 + q)^2$$

Số gia súc sau 3 năm phát triển là: $S_3 = S_2 + S_2q = S_0(1 + q)^2 + S_0(1 + q)^2q$

$$= S_0(1 + q)^3$$

Như vậy, tổng số bò của đàn sau mỗi năm phát triển lập thành 1 cấp số nhân với công bội $(1 + q)$ và $S_1 = S_0(1 + q)$. Vậy sau n năm tổng số đàn gia súc là:

$$S_n = S_1(1 + q)^{n-1} = S_0(1 + q).(1 + q)^{n-1} = S_0(1 + q)^n$$

Áp dụng công thức này cho bài toán trên ta có:

$$S_3 = 18.000(1 + 0{,}02)^3 = 19.102 \text{ (con)}.$$

Ví dụ 3**: Kết quả kiểm kê vào cuối năm 2006, cho biết tổng đàn bò ở vùng Y là 580 con và trong mấy năm qua tỉ lệ tăng đàn đạt 12% mỗi năm. Hãy tính xem vào đầu năm 2004 (cách đó 3 năm về trước) đàn bò ở đây có bao nhiêu con?**

Thông thường bài toán trên được giải như sau:

Coi số bò mẹ đầu năm 2006 là 100%, với tỉ lệ tăng đàn 12%, số 580 bò mẹ cuối năm 2006 so với đầu năm là: 100% + 12% = 112%.

Nghĩa là 112% số bò ứng với 580 con. Vậy số bò đầu năm 2006 là:

$$\frac{580\times 100}{112}=\frac{580\times 100}{(1+0,12)\times 100}=\frac{580}{1+0,12}\text{ (con).}$$

Tương tự như trên, số bò đầu năm 2005(trước đó 2 năm) là:

$$\frac{580\times 100}{(1+0,12)\times 112}=\frac{580\times 100}{(1+0,12)(1+0,12)\times 100}=\frac{580}{(1+0,12)^2}\text{(con).}$$

Tiếp tục lập luận như trên ta có số bò mẹ đầu năm 2004 (trước đó 3 năm) là:

$$\frac{580\times 100}{(1+0,12)^2\times 112}=\frac{580\times 100}{(1+0,12)\times(1+0,12)\times 100}=\frac{580}{(1+0,12)^3}=413\text{ (con).}$$

Nếu gặp phải yêu cầu tính số bò của đàn vào đầu năm nào đó cách xa thời điểm hiện tại thì rõ ràng cách tính "lùi" này sẽ gặp khó khăn.

Ta nhận thấy, số bò của mỗi năm trước thời điểm thống kê lập thành một cấp số nhân với $S_1=\frac{580}{1+0,12}$ và công bội $\frac{1}{1+0,12}$ nên trước đó n năm, số bò sẽ là:

$$S_n=\frac{580}{1+0,12}.\left(\frac{1}{1+0,12}\right)^{n-1}=\frac{580}{(1+0,12)^n}$$

Nếu gọi S là tổng số bò của đàn tại thời điểm thống kê; n là số năm trước thời điểm thống kê; q là tỉ lệ tăng đàn hàng năm. Thì tổng số bò cách thời điểm thống kê n năm trước đó là:

$$S_n=\frac{S}{(1+q)^n}$$

***Ví dụ 4*: Một dự án đầu tư đòi hỏi chi phí hiện tại là 100 triệu đồng và sau 3 năm sẽ đem lại 150 triệu đồng. Với lãi suất 8% một năm, hãy đánh giá xem có nên thực hiện dự án hay không?**

Từ công thức (*) ta có: $A=\dfrac{B_n}{(1+r)^n}$ (**)

Nếu gửi ngân hàng, để sau 3 năm bạn có 150 triệu đồng thì hiện tại phải có số tiền là: $A=\dfrac{150}{(1+0,08)^3}\approx 119,075$ (triệu đồng).

Như vậy, việc thực hiện dự án sẽ đem lại một khoản lợi 19,075 triệu đồng. Đó là việc nên làm.

***Ví dụ 5*: Bạn định mua một chiếc xe máy theo phương thức trả góp. Theo phương thức này sau một tháng kể từ khi nhận xe bạn phải trả đều đặn mỗi tháng một lượng tiền nhất định nào đó, liên tiếp trong 24 tháng. Giả sử giá xe máy thời điểm bạn mua là 16 triệu đồng và giả sử lãi suất ngân hàng là 1% một tháng. Với mức phải trả hàng tháng là bao nhiêu thì việc mua trả góp là chấp nhận được?**

Gọi khoản tiền phải trả hàng tháng là a đồng. Nếu gửi vào ngân hàng thì giá trị hiện tại của toàn bộ khoản tiền trả góp tại thời điểm nhận hàng là:

$$\frac{a}{1+0,01}+\frac{a}{(1+0,01)^2}+\frac{a}{(1+0,01)^3}+\ldots+\frac{a}{(1+0,01)^{24}}$$

$$=a\frac{\dfrac{100}{101}\left[1-\left(\dfrac{100}{101}\right)^{24}\right]}{1-\dfrac{100}{101}}\approx 21,24a\ \text{đồng}$$

Như vậy, việc mua trả góp sẽ tương đương với mua trả ngay (bằng cách vay ngân hàng) nếu:

$$24,21a=16.000.000\ (\text{đồng})\Leftrightarrow a=660.883,9\ (\text{đồng})$$

Chắc hẳn, bạn sẽ bằng lòng mua trả góp nếu số tiền phải trả hàng tháng ít hơn 660.883,9 (đồng), nếu không thì thà vay ngân hàng để trả ngay 16.000.000 (đồng).

***Ví dụ 6*: Việt muốn mua vài món quà tặng mẹ và chị nhân ngày 8/3. Bạn ấy quyết định bỏ ống heo 500 đồng, bắt đầu từ ngày 1 tháng 1 của năm đó. Tiếp theo cứ ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đến đúng ngày lễ 8/3 Việt có đủ tiền mua quà cho mẹ và chị không? Biết rằng món quà Việt dự định mua giá khoảng 800.000 đồng.**

Từ ngày 1 tháng 1 đến ngày 8 tháng 3 số ngày có ít nhất là: 31 + 28 + 8 = 67 (ngày). Số tiền bỏ ống của Việt mỗi ngày tăng theo *cấp số cộng* với công sai bằng 500 đồng. Do đó tổng số tiền có được của Việt đến ngày 8 tháng là:

$$\frac{67}{2}\left(2.500+\left(67-1\right).500\right)=\frac{67.34000}{2}=1.139.000 \text{ đồng.}$$

Vậy Việt có đủ tiền mua quà sinh nhật cho mẹ và chị mình.

Ví dụ 7: Khi ký hợp đồng dài hạn (10 năm) với các kỹ sư được tuyển dụng. Công ty liên doanh A đề xuất hai phương án trả lương để người lao động chọn, cụ thể là:

Phương án 1: người lao động sẽ nhận 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên và kể từ năm thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 3 triệu đồng mỗi năm

Phương án 2: người lao động sẽ nhận được nhận 7 triệu đồng cho quí đầu tiên và kể từ quí làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500.000 đồng mỗi quí .

Nếu bạn là người lao động bạn sẽ chọn phương án nào?

Vấn đề đặt ra:

Chon 1 trong hai phương án để nhận lương. Ta thấy việc người lao động chọn một trong hai phương án nhận lương phải căn cứ vào số tiền mà họ được nhận trong 10 năm.

Phương án giải quyết : Ta nhận thấy cả hai phương án số tiền nhận được sau 1năm (1 quí) đều tuân theo một quy luật nhất định :

Phương án 1: đó là cấp số cộng với số hạng đầu u_1=36 triệu và công sai

d = 3 triệu

Phương án 2: đó là cấp số cộng với số hạng đầu u_1=7 triệu và công sai d = 0,5triệu

Vậy theo phương án 1: tổng số tiền người lao động nhận được là:

$$S_{10}=(72+9.3).5=195 \text{ triệu.}$$

Theo phương án 2: tổng số tiền mà người lao động nhận được là

$$S_{40}=(14+39.0,5)20=670 \text{ triệu}$$

Vậy nếu người lao động chọn phương án 2 để nhận lương thì số tiền lương sẽ cao hơn.

Ví dụ 8:

Người ta dự định xây dựng 1 tòa tháp 11 tầng tại một ngôi chùa nọ, theo cấu trúc diện tích của mặt sàn tầng trên bằng nửa diện tích mặt sàn tầng dưới, biết diện tích mặt đáy tháp là 12,28m^2. Hãy giúp nhà chùa ước lượng số gạch hoa cần dùng để lát nền nhà. Để cho đồng bộ các nhà chùa yêu cầu nền nhà phải lót gạch hoa cỡ 30x30cm.

Vấn đề đặt ra:

Tính số lượng gạch hoa cần dùng để lát nền nhà. Mà số lượng gạch ấy lại phụ thuộc vào tổng diện tích mặt sàn của 11 tầng tháp. Do vậy vấn đề ở đây là phải tính được tổng diện tích sàn nhà của 11 tầng tháp.

Phương án giải quyết :

Nếu gọi S_1 là diện tích của mặt đáy tháp thì S_1=12,28 m^2

S_i là diện tích mặt tròn của tầng thứ i .i=$\overline{1,11}$

Ta nhận thấy {S_i, .i=$\overline{1,11}$} lập thành một cấp số nhân với công bội q= $\frac{1}{2}$

Tổng diện tích mặt trên của 11 tầng tháp là tổng của 11 số hạng đầu tiên của cấp số nhân trên.

Ta nhận thấy {S_i, .i=$\overline{1,11}$} lập thành một cấp số nhân với công bội q= $\frac{1}{2}$

Tổng diện tích mặt trên của 11 tầng tháp là tổng của 11 số hạng đầu tiên của cấp số nhân trên

$$T_{11} = \frac{S_1(1-q^{11})}{1-q} = 12,28.\frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 24564(m^2)$$

Diện tích của mỗi viên gạch là 30 x 30 = 900cm^2 = 0,09m^2

Vậy số lượng gạch cần dùng là:

N = 24564 : 0,09 = 272.934 (viòn).

Trong quá trình xây dựng có thể viên gạch hoa được cắt ra nên ta nên mua số lượng nhiều hơn số liệu tính toán ra, chẳng hạn mua 273000 viên.

$$T_{11} = \frac{S_1(1-q^{11})}{1-q} = 12,28.\frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 24564(m^2)$$

Diện tích của mỗi viên gạch là 30 x 30 = 900cm^2 = 0,09m^2

Vậy số lượng gạch cần dùng là:

N = 24564 : 0,09 = 272.934 (viên).

Trong quá trình xây dựng có thể viên gạch hoa được cắt ra nên ta nên mua số lượng nhiều hơn số liệu tính toán ra, chẳng hạn mua 273000 viên.

Ví dụ 9: Nước ta hiện nay có 84 triệu người đứng thứ 13 trên thế giới, bình quân dân số tăng 1 triệu người (bằng dân số 1 tỉnh) với tốc độ tăng dân như thế. Liệu đến năm 2020 dân số nước ta là bao nhiêu?

Vấn đề đặt ra:

Dự đoán số dân của nước ta trong năm 2020. Do vậy điều chúng ta quan tâm là dân số hiện tại và tốc độ tăng dân.(tỉ lệ tăng dân số)

Phương án giải quyết (đề nghị):

Theo giả thuyết bài toán cho thì tốc độ tăng dân luôn ổn định đều qua các năm. Tuy nhiên trên thực tế không như vậy.

Trong trường hợp này nếu thực hiện tốt chương trình kế hoạch hóa gia đình thì tốc độ này vẫn có thể được duy trì và ổn định và xem như là hằng số không đổi d = 1triệu

Do vậy số dân hằng năm lập thành cấp số cộng với công sai d =1 triệu, u_1 =84.

Nên dân số năm 2020 tức là $u_{13} = 84 + (13 - 1) = 96$ triệu

5. Chủ đề giải tích tổ hợp, xác suất

Ví dụ 1: (tổ chức bóng đá)

Kỷ niệm ngày thành lập Đoàn TNCS Hồ Chí Minh 26/3, Sở giáo dục đào tạo tổ chức giải bóng đá học sinh PTTH . Có 16 trường đăng ký tham gia, thể thức như sau: 16 đội chia làm 4 bảng A, B, C, D, mỗi bảng cú 4 đội.

Vòng 1(Vòng bảng): Các đội trong cùng một bảng thi đấu vòng tròn với nhau, sau đó chọn 2 đội đứng đầu mỗi bảng vào vòng 2.

Vòng 2 (vòng tứ kết): Bắt thăm sao cho đội đứng nhất bảng sẽ gặp đội đứng nhì của bảng khác.

Vòng 3 (Vòng bán kết): Bốn đội thắng ở tứ kết sẽ bốc thăm đấu loại trực tiếp, hai đội thắng sẽ tranh chức vô địch, hai đội thua sẽ tranh hạng 3.

Vòng 4 (Vòng chung kết): Tranh giải 3 :hai đội thua trong bán kết; Tranh giải nhất : hai đội thắng trong bán kết.

Giải bóng được tổ chức liên tiếp mỗi ngày cho đến khi kết thúc giải, mỗi ngày thi đấu 4 trận. Hỏi ban tổ chức cần thuê sân vân động trong bao nhiêu ngày?

Vấn đề đặt ra: Số ngày mượn sân vận động phụ thuộc vào số trận đấu được tổ chức. Do đó cần tính số trận đấu có thể diễn ra:

Phương án giải quyết :

Số các trận đấu vòng bảng là: $4.C_4^2=24$ trận;

Số trận đấu trong vòng 2 là: 4 trận;

Số trận đấu vòng 3 là : 2 trận ;

Số trận đấu vòng 4 là : 2 trận.

Vậy số trận đấu có khả năng xảy ra là 24 +4+ 2 + 2 = 32(trận)

Do vậy BTC cần thuê sân vận động trong thời gian 32 : 4 = 8 ngày.

Ví dụ 2 (giao thông) Hiện nay vấn đề an toàn giao thông là một trong những vấn đề quan tâm hàng đầu của người đi đường. Một nhân viên công ty X khi đến công ty làm việc có hai con đường A, B với khoảng cách tương đương nhau. Vỡ vậy anh ta muốn chọn một con đường an toàn để đi. Cảnh sát giao thông ở hai con đường đó cho anh ta số liệu về tốc độ (km/h) của một mẫu gồm 30 chiếc xe máy thường xuyên lưu thông trên hai con đường trên là như sau:

Con đường A:

40	45	50	48	42	55	60	63	62	49
53	55	65	52	47	68	65	52	43	55
56	65	64	50	41	40	45	53	56	70

Con đường B:

56	44	38	62	52	50	48	55	43	47
54	50	59	60	53	55	51	48	52	53
59	60	43	42	51	50	49	40	43	54

Dựa vào bảng số liệu trờn hãy giúp người đó chọn một con đường an toàn nhất có thể.

Phương án giải quyết (đề nghị):

Cần phải căn cứ vào các thông số tốc độ trung bình, số trung vị độ lệch chuẩn của tốc độ xe máy trên mỗi con đường A, B.

Con đường A

Ta có tốc độ trung bình là : $\overline{x_A} = \frac{1589}{30} = 53km/h$

Số trung vị 53 km/h.

Độ lệch chuẩn S=8,67km/h.

Con đường B

Tốc độ trung bõnh: : $\overline{x_B} = \dfrac{1589}{30} = 53km/h$

Số trung vị : 51km/h.

Độ lệch chuẩn: S= 6,2km/h

Như vậy theo thông số ở trên thì con đường B sẽ an toàn hơn. Ông ta nên chọn đường B để đi làm việc

Vớ dụ 3: (chọn bóng)

Trong trò chơi chọn bóng người chủ trò tay cầm túi vải trong túi cú 6 quả cầu màu đen và 6 quả cầu màu trắng. Điều kiện chơi như sau:

Bạn bỏ ra 2000đ thì được chọn 6 quả cầu.

Nếu 6 quả bạn chọn được hoặc toàn màu trắng hoặc toàn màu đen bạn sẽ được thưởng 50.000đ.

Nếu bạn chọn được 5 quả màu trắng 1quả màu đen hoặc 5 quả màu đen 1 quả màu trắng bạn được thưởng 2000đ.

Nếu bạn chọn được 4 quả màu trắng và 2 quả màu đen hoặc 4 quả màu đen và 2 qủa màu trắng bạn được thưởng 200đ.

Nếu bạn chọn 3 quả màu trắng và 3 quả màu đen bạn không được thưởng mà bị mất luôn 20000đ.

Vậy nên chơi hay không?

Vấn đề đặt ra:

Từ qui luật chơi trên cần phải biết sau quá trình chơi người chơi có khả năng thu được bao nhiêu tiền.

Phương án giải quyết :

Ta thấy rằng khả năng lấy được 6 quả màu đen hoặc 6 quả màu trắng là chỉ có 1 khả năng

Nếu lấy 5 màu đen và 1 màu trắng hoặc lấy 5 trắng 1 đen thì có $C_6^5.C_6^1 = 36$ khả năng

Nếu lấy 4 trắng 2 đen hoặc 4 đen 2 trắng thì có $C_6^4.C_6^2 = 225$ khả năng.

Nếu lấy 3 trắng 3 đen thì có $C_6^3.C_6^{31} = 400$ khả năng.

Vậy các khả năng có thể xẩy ra là n = (1+ 36 + 225).2 + 400 = 924 khả năng.

Xác suất chọn 6 quả cùng màu là : $\frac{2}{924} = 0.002$

Xác suất chọn 5 đen 1 trắng hoặc 5 trắng 1 đen là : $\frac{72}{924} = 0.0078$

Xác suất chon 4 trắng 1 đen hoặc 4 đen 1 trắng là: : $\frac{450}{924} = 0.487$

Xác suất chọn 3 trắng, 3 đen là: $\frac{400}{924} = 0.433$

Do đó nếu bỏ ra 20.000đ thỡ khả năng người chơi thu được là

(50,000.0,002 + 2000.0,0078 + 200.0,487).10 = 4534 đồng;

Người chủ trò thu được 16560đ

Vậy rỏ ràng người chơi luôn thua.

Ví dụ 4 (chạy tiếp sức)

Để chuẩn bị cho cuộc thi chạy tiếp sức được tổ chức vào Hội Khoẻ Phù Đổng

GVCN lớp 11 đó chọn được 15 học sinh chạy giỏi của lớp. Nhưng cuộc thi chạy tiếp sức chỉ cần 4 học sinh thay nhau chạy trên các chặng đường 800m+400m+200m+100m. GVCN muốn đội hình tham gia là tốt nhất nên muốn tổ chức cuộc thi chạy thử để chọ ra một đội gồm 4 bạn chạy xuất sắc nhất. Theo bạn GVCN phải tổ chức cuộc thi thử như thế nào?

Vấn đề đặt ra:

Chọn cách tổ chức cuộc thi thử để chọn 4 học sinh xuất sắc nhất. Do đó ta cần phải tìm các cách có thể được và chọn cách đơn giản nhất.

Phương án giải quyết :

Phương án 1:

Lập 1 nhóm 4 học sinh từ 15 học sinh cho chạy thử trong 4 chặng sau đó chọn nhóm có kết quả xuất sắc nhất.

Việc chọn 4 học sinh lập thành một nhúm từ 15 học sinh để chạy tiếp sức trong 4 chặng là một chỉnh hợp chập 4 của 15

Nên số nhóm là: $A_{15}^{4}=32760$

Như vậy số nhóm quá nhiều nên giáo viên không thể tổ chức theo kiểu này.

Phương án 2:

GVCN tiến hành cuộc thi thử như sau:

Cho 15 học sinh chạy chặng 800m lấy học sinh xuất sắc nhất.

Cho 14 học sinh còn lại chạy chặng 400m chọn học sinh xuất sắc nhất.

Cho 13 học sinh còn lại chạy chặng 200m chọn học sinh xuất sắc nhất.

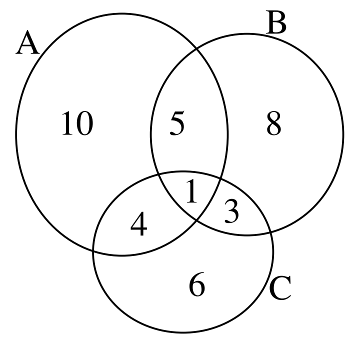
Cho 12 học sinh chạy chặng 100m chọn học sinh xuất sắc nhất.

Khi đó 4 học sinh được chọn sẽ tham gia các chặng tương ứng trong cuộc thi thật. Tuy phương pháp này có thể không lấy được nhóm học sinh chạy tốt nhất như phương án 1 vì các thành viên trong nhóm có thể phối hợp không ăn ý nhau nhưng phương pháp này dễ thực hiện vì chỉ cần tổ chức 4 cuộc thi thử.

HỆ THỐNG BÀI TẬP CÓ NỘI DUNG THỰC TIỄN

I - Các bài toán về Tập hợp - Mệnh đề:

1. Trong một khoảng thời gian nhất định, tại một địa phương, Đài khí tượng thủy văn đã thống kê được:



+) Số ngày mưa: 10 ngày;

+) Số ngày có gió: 8 ngày;

+) Số ngày lạnh: 6 ngày;

+) Số ngày mưa và gió: 5 ngày;

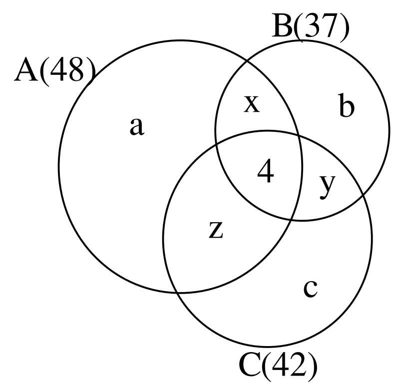
+) Số ngày mưa và lạnh : 4 ngày;

+) Số ngày lạnh và có gió: 3 ngày;

+) Số ngày mưa, lạnh và có gió: 1 ngày.

Vậy có bao nhiêu ngày thời tiết xấu (Có gió, mưa hay lạnh)?

2. Trong Kỳ thi tốt nghiệp phổ thông, ở một trường kết quả số thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc như sau:



+) Về môn Toán: 48 thí sinh;

+) Về môn Vật lý: 37 thí sinh;

+) Về môn Văn: 42 thí sinh;

+) Về môn Toán hoặc môn Vật lý: 75 thí sinh;

+) Về môn Toán hoặc môn Văn: 76 thí sinh;

+) Về môn Vật lý hoặc môn Văn: 66 thí sinh;

+) Về cả 3 môn: 4 thí sinh.

Vậy có bao nhiêu học sinh nhận được danh hiệu xuất sắc về:

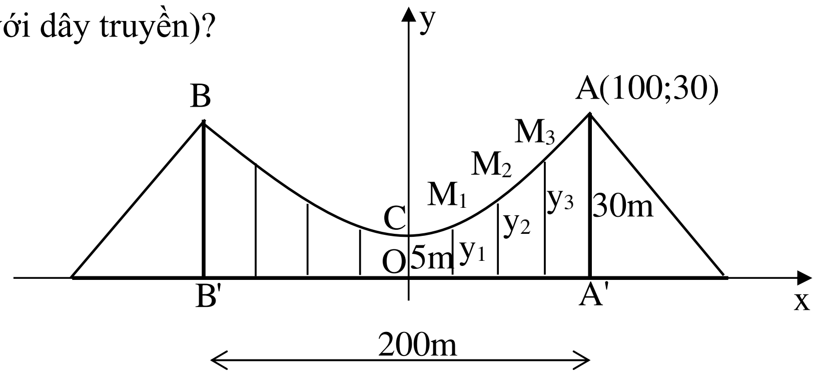
- Một môn?

- Hai môn?

- Ít nhất một môn?

II - Bài toán về ứng dụng Hàm số bậc hai:

3. Dây truyền đỡ nền Cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu cuối của dây được gắn chặt vào điểm A và B trên trục AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài nhịp A'B' = 200m. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên nền cầu là OC = 5m. Xác định chiều dài các dây cáp treo (thanh thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền)?

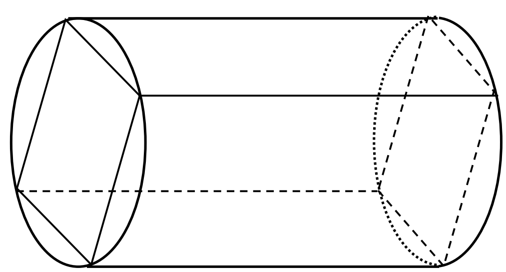


III - Bài toán về Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:

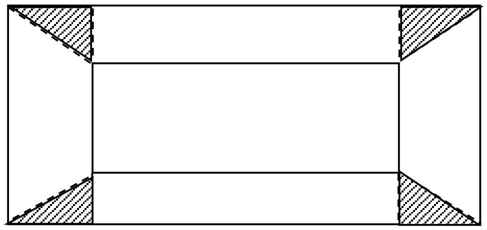
4. Để sản xuất một thiết bị điện loại A cần 3kg đồng và 2kg chì, để sản xuất một thiết bị điện loại B cần 2kg đồng và 1kg chì. Sau khi sản xuất đã sử dụng hết 130kg đồng và 80kg chì. Hỏi đã sản xuất bao nhiêu thiết bị điện loại A, bao nhiêu thiết bị điện loại B?

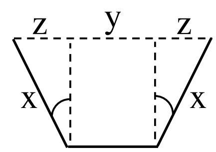
IV - Các bài toán dùng Bất đẳng thức Côsi:

5. Người ta phải cưa một thân cây hình trụ để được một cây xà hình khối chữ nhật có thể tích cực đại. Hỏi cây xà phải có tiết diện như thế nào?

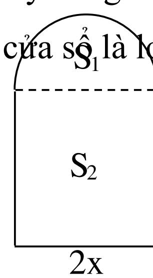


6. Với một tấm kim loại hình chữ nhật, phải làm một cái máng mà tiết diện là một hình thang cân. Bề rộng của mặt bên và góc giữa nó với một đáy phải bằng bao nhiêu để tiết diện của máng có diện tích cực đại?





7. Cần phải làm cái cửa sổ mà, phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là a mét (a chính là chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi độ dài cạnh hình chữ nhật là dây cung của hình bán nguyệt). Hãy xác định các kích thước của nó để diện tích cửa sổ là lớn nhất?

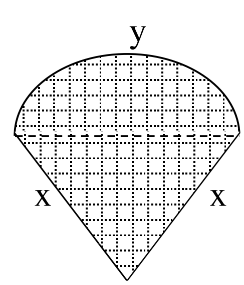


8. Ta có một miếng tôn phẳng hình vuông với kích thước a cm, ta muốn cắt đi ở 4 góc 4 hình vuông để uốn thành một hình hộp chữ nhật không có nắp. Phải cắt như thế nào để hình hộp có thể tích lớn nhất?

9. Cần phải thiết kế các thùng dạng hình trụ có nắp đậy để đựng các sản phẩm đã được chế biến, có dung tích $V(cm^3)$. Hãy xác định các kích thước của nó để tiết kiệm vật liệu nhất?

10. Người ta muốn rào quanh một khu đất với một số vật liệu cho trước là a mét thẳng hàng rào. Ở đó người ta tận dụng một bờ giậu có sẵn để làm một cạnh của hàng rào. Vậy làm thế nào để rào khu đất ấy theo hình chữ nhật sao cho có diện tích lớn nhất?

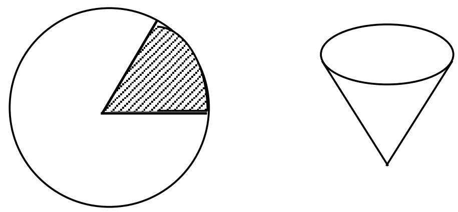
11. Người ta muốn làm một cánh diều hình quạt sao cho với chu vi cho trước thì diện tích của hình quạt là cực đại. Dạng của quạt này phải như thế nào?



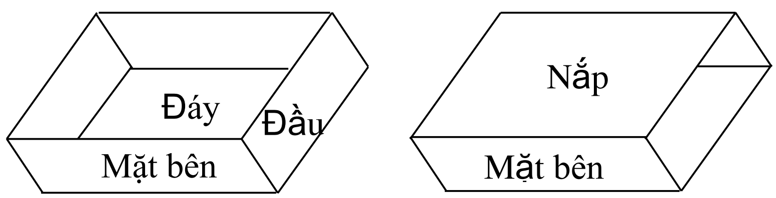
12. a) Một cánh đồng hình chữ nhật với diện tích cho trước phải có dạng nào để chiều dài hàng rào của nó là cực tiểu?

b) Một cánh đồng hình chữ nhật có chiều dài cho trước phải có dạng nào để diện tích là cực đại?

13. Với một đĩa tròn bằng thép trắng phải làm một cái phễu bằng cách cắt đi một hình quạt của đĩa này và gấp phần còn lại thành hình nón. Cung tròn của hình quạt bị cắt đi phải bằng bao nhiêu độ để hình nón có thể tích cực đại?



14. Chúng ta đều biết cấu tạo của một hộp diêm bình thường. Nó bao gồm: 1 nắp, 2 đáy, 4 mặt bên và 2 đầu. Hộp diêm phải có dạng thế nào để với thể tích cố định, khi chế tạo sẽ đỡ tốn vật liệu nhất?



15. Sự chi phí khi tàu chạy một ngày đêm gồm có hai phần. Phần cố định bằng a đồng, và phần biến đổi tăng tỷ lệ với lập phương của vận tốc. Tàu sẽ chạy với tốc độ v nào thì kinh tế nhất?

V - Các bài toán về Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

16. Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

17. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm. Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

18. Nhân dịp tết Trung Thu, Xí nghiệp sản xuất bánh Trăng muốn sản xuất hai loại bánh: Đậu xanh, Bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất hai loại bánh này, Xí nghiệp cần: Đường, Đậu, Bột, Trứng, Mứt, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 300kg, đậu là 200kg, các nguyên liệu khác bao nhiêu cũng có. Sản xuất một cái bánh đậu xanh cần 0,06kg đường, 0,08kg đậu và cho lãi 2 ngàn đồng. Sản xuất một cái bánh dẻo cần 0,07kg đường, 0,04kg đậu và cho lãi 1,8 ngàn đồng.

Cần lập kế hoạch để sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường, đậu và tổng số lãi thu được là lớn nhất (nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết)?

19. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.

Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao Sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

VI - Các bài toán về Phương trình, Bất phương trình, Hệ phương trình, Hệ bất phương trình bậc hai:

20. Một đoàn tàu đánh cá dự định đánh bắt 1800 tấn cá trong một số ngày nhất định. Do bị bão nên trong 3 ngày đầu tiên đoàn đánh bắt được ít hơn kế hoạch mỗi ngày 20 tấn. Trong các ngày còn lại, đoàn đánh bắt vượt hơn kế hoạch 20 tấn mỗi ngày. Vì vậy đoàn đã hoàn thành kế hoạch đánh bắt trước thời hạn 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày đoàn tàu đánh bắt bao nhiêu tấn cá và thời gian đánh bắt theo kế hoạch là bao nhiêu ngày?

21. Một nhóm sinh viên chèo một du thuyền xuôi dòng từ A đến B cách A 20km rồi chèo ngược trở về A mất tổng cộng 7giờ. Khi bắt đầu chuyến đi họ thấy một bè gỗ trôi ngang qua A về hướng B. Trên đường trở về họ gặp lại bè gỗ ở vị trí cách A 12km. Tính vận tốc của du thuyền khi đi xuôi dòng và vận tốc của dòng nước.

22. Một nhóm bạn hùn nhau tổ chức một chuyến du lịch sinh thái (chi phí chia đều cho mỗi người). Sau khi đã hợp đồng xong, vào giờ chót có hai người bận việc đột xuất không đi được. Vì vậy mỗi người còn lại phải trả thêm 30000 đồng so với dự kiến ban đầu. Hỏi số người lúc đầu dự định đi du lịch, mỗi người theo dự kiến ban đầu phải trả bao nhiêu tiền và giá của chuyến đi du lịch sinh thái đó, biết rằng Bản hợp đồng giá này trong khoảng từ 700000 đồng đến 750000 đồng.

23. Hai công nhân cùng làm chung một công việc trong 3 giờ 36 phút thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong $\frac{1}{3}$ thời gian mà riêng người thứ hai làm xong công việc và người thứ hai làm trong $\frac{1}{3}$ thời gian mà riêng người thứ nhất làm xong công việc thì cả hai người làm được $\frac{13}{18}$ công việc. Tính thời gian mỗi người làm riêng xong công việc.

24. Một xe ôtô đi từ A đến B, cùng lúc có người đi xe đạp từ B đến A. Ba phút sau khi hai xe gặp nhau ôtô quay ngay lại đuổi xe đạp, khi đuổi kịp lại quay ngay để chạy về B. Nếu lúc đầu sau khi gặp một phút ôtô quay lại còn xe đạp sau khi gặp tăng vận tốc $\frac{15}{7}$ lần thì ôtô cũng chỉ mất từng ấy thời gian. Tìm tỷ số vận tốc của xe đạp và ôtô?

VII - Các bài toán về cấp số:

25. Sinh nhật của An vào ngày 1 tháng 5. Bạn ấy muốn mua một chiếc máy ảnh giá 712000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình. Bạn ấy quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 1 tháng 1 của năm đó, sau đó cứ liên tục ngày sau cao hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến sinh nhật của mình An có đủ tiền mua quà không?

26. Đầu mùa thu hoạch xoài, một bác nông dân đã bán cho người thứ nhất, nửa số xoài thu hoạch được và nửa quả, bán cho người thứ hai nửa số còn lại và nửa quả, bán cho người thứ ba nửa số xoài còn lại và nửa quả v.v... Đến lượt người thứ bảy bác cũng bán nửa số xoài còn lại và nửa quả thì không còn quả nào nữa.

Hỏi bác nông dân đã thu hoạch được bao nhiêu quả xoài đầu mùa?

VIII - Bài toán về Lôgarit:

27. Với cùng một dây tóc các bóng đèn điện có hơi bên trong cho một độ sáng lớn hơn là các bóng chân không, bởi vì nhiệt độ của dây tóc trong hai trường hợp là khác nhau. Theo một Định luật Vật lý, độ sáng toàn phần phát từ một vật thể bị nung đến trắng tăng tỉ lệ với luỹ thừa bậc 12 của nhiệt độ tuyệt đối của nó (độ K).

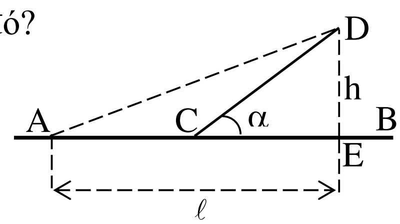
a) Hãy tính xem một bóng đèn có hơi với nhiệt độ dây tóc là 2500^oK sáng hơn một bóng chân không có nhiệt độ dây tóc là 2200^oK bao nhiêu lần?

b) Phải tăng nhiệt độ tuyệt đối lên chừng nào (tính theo phần trăm) để gấp đôi độ sáng của một bóng đèn?

c) Độ sáng của một bóng đèn tăng lên bao nhiêu (tính theo phần trăm) nếu ta tăng 1% nhiệt độ tuyệt đối dây tóc của nó?

IX - Các bài toán Cực trị có dùng đến đạo hàm:

28. Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4m được đặt ở độ cao 1,8m so với tầm mắt (tính đến mép dưới của màn ảnh). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đứng sao cho góc nhìn lớn nhất. Hãy xác định vị trí đó?



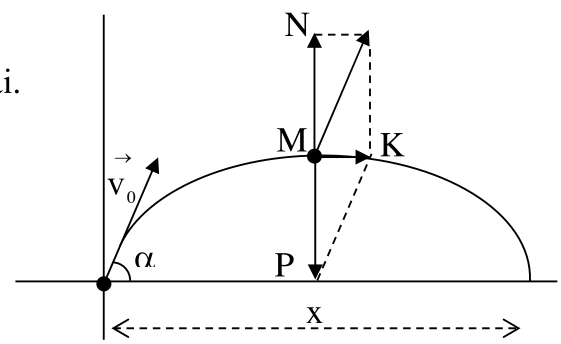
29. Từ cảng A dọc theo đường sắt AB cần phải xác định một trạm trung chuyển hàng hóa C và xây dựng một con đường từ C đến D. Biết rằng vận tốc trên đường sắt là v_1 và trên đường bộ là v_2 ($v_1 < v_2$). Hãy xác định phương án chọn địa điểm C để thời gian vận chuyển hàng từ cảng A đến cảng D là ngắn nhất?

30. Từ một khúc gỗ tròn hình trụ, cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của miếng phụ để sử dụng khối gỗ một cách tốt nhất (tức là diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất).

31. Một vật được ném lên trời xuyên góc α so với phương nằm ngang, vận tốc ban đầu $v_0 = 9$ m/s.

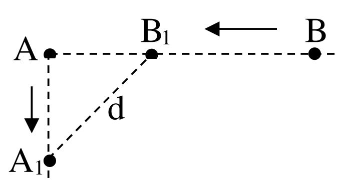
a) Tính độ cao nhất của vật trên quỹ đạo và xác định thời điểm mà nó đạt được độ cao đó ($g = 10m/s^2$)

b) Xác định góc α để tầm ném cực đại.

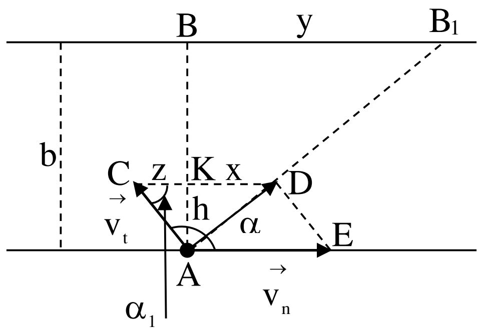


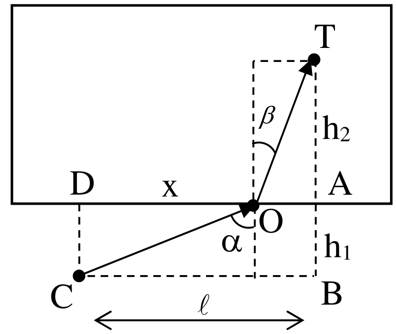
32. Cần phải xây dựng một hố ga, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích V(m^3), hệ số k cho trước (k- tỉ số giữa chiều cao của hố và chiều rộng của đáy. Hãy xác định các kích thước của đáy để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

33. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai tàu cùng khởi hành, một chạy về hướng Nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/ giờ. Hãy xác định mà thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là lớn nhất?



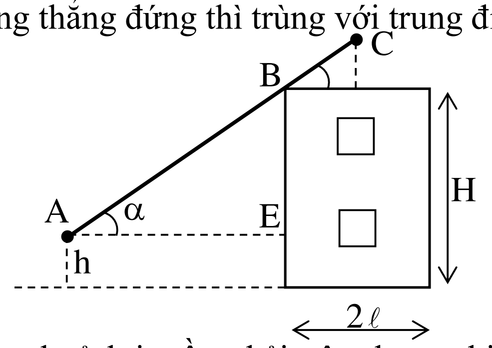
34. Cần phải dùng thuyền để vượt sang bờ đối diện của một dòng sông chảy xiết mà vận tốc của dòng chảy là v_c lớn hơn vận tốc v_t của thuyền. Hướng đi của thuyền phải như thế nào để độ dời theo dòng chảy gây nên là nhỏ nhất? (Hình vẽ ở trang sau)



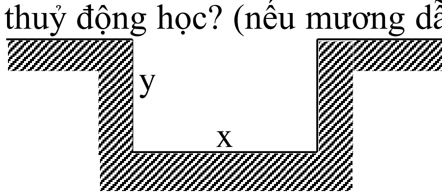


35. Một người làm nhiệm vụ cứu hộ gần bờ hồ, cần phải cứu một người có thể bị chết đuối ở dưới hồ. Nếu biết vận tốc của mình ở trên bờ là v_1 và ở dưới nước là v_2, người cứu hộ phải chọn đường để trong thời gian ngắn nhất tới được vị trí. Quỹ đạo của anh ta phải thoả mãn điều kiện gì?

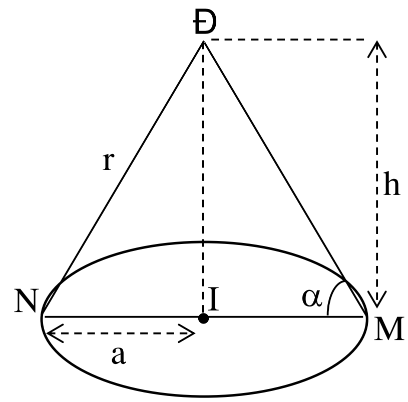
36. Hãy xác định độ dài cánh tay nâng của cần cẩu bánh hơi có thể dùng được để xây dựng tòa nhà cao tầng mái bằng có chiều cao H và chiều rộng 2ℓ? (Biết rằng cần cẩu thỏa mãn yêu cầu sau đây: Có thể xê xích chiếc cẩu cũng như góc nghiêng của cánh tay nâng để sao cho điểm cuối của cánh tay nâng chiếu xuống theo phương thẳng đứng thì trùng với trung điểm của bề rộng.



37. Trong lĩnh vực thuỷ lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thuỷ động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S, ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thuỷ động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất). Cần xác định các kích thước của mương dẫn nước như thế nào để có dạng thuỷ động học? (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật)

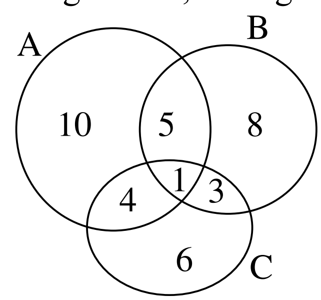


38. Cần phải đặt một ngọn điện ở phía trên và chính giữa một cái bàn hình tròn có bán kính a. Hỏi phải treo ở độ cao bao nhiêu để mép bàn được nhiều ánh sáng nhất. Biết rằng cường độ sáng C được biểu thị bởi công thức $C = k\frac{\sin\alpha}{r^2}$ (α là góc nghiêng giữa tia sáng và mép bàn, k - hằng số tỷ lệ chỉ phụ thuộc vào nguồn sáng.



LỜI GIẢI HỆ THỐNG BÀI TẬP

1. Ký hiệu những ngày mưa là A, những ngày có gió là B, những ngày lạnh là C. Theo giả thiết ta có: n(A) = 10, n(B) = 8, n(C) = 6, $n(A\cap B) = 5$, $n(A\cap C) = 4$, $n(B\cap C) = 3$, $n(A\cap B\cap C) = 1$. Để tìm số ngày thời tiết xấu ta sử dụng biểu đồ Venn. Ta cần tính $n(A\cup B\cup C)$



Xét tổng n(A) + n(B) + n(C):

Trong tổng này, mỗi phần tử của A giao B, B giao C, C giao A được tính làm hai lần nên trong tổng n(A) + n(B) + n(C) ta phải trừ đi tổng $(n(A\cap B) + (B\cap C) + (C\cap A))$. Xét $n(A\cap B\cap C)$: trong tổng n(A) + n(B) + n(C) được tính 3 lần, trong $n(A\cap B) + (B\cap C) + (C\cap A)$ cũng được tính 3 lần. Vì vậy $n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A\cap B) + (B\cap C) + (C\cap A)) + n(A\cap B\cap C) =$ $10 + 8 + 6 - (5 + 4 + 3) + 1 = 13$.

Vậy số ngày thời tiết xấu là 13 ngày.

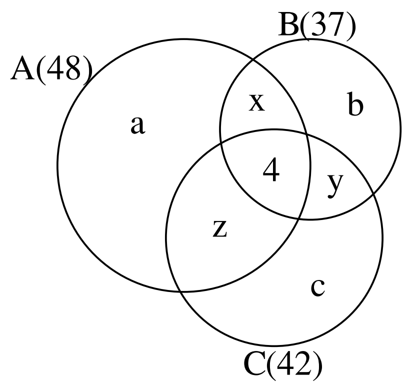
2. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp những học sinh xuất sắc về môn Toán, môn Vật Lý, môn Văn.

Gọi a, b, c lần lượt là số học sinh chỉ đạt danh hiệu xuất sắc một môn về môn Toán, môn Vật Lý, môn Văn.

Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh đạt danh hiệu xuất sắc hai môn về môn Toán và môn Vật Lý, môn Vật Lý và môn Văn, môn Văn và môn Toán.

Dùng biểu đồ Venn đưa về hệ 6 phương trình 6 ẩn sau:

$$\begin{cases} a + x + z + 4 = 48 \\ b + x + y + 4 = 37 \\ c + y + z + 4 = 42 \\ a + b + x + y + z = 71 \\ a + c + x + y + z = 72 \\ b + c + x + y + z = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 28 \\ b = 18 \\ c = 19 \\ x = 6 \\ y = 9 \\ z = 10 \end{cases}$$



ĐS: 65 thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc 1 môn

25 thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc 2 môn

94 thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc ít nhất 1 môn.

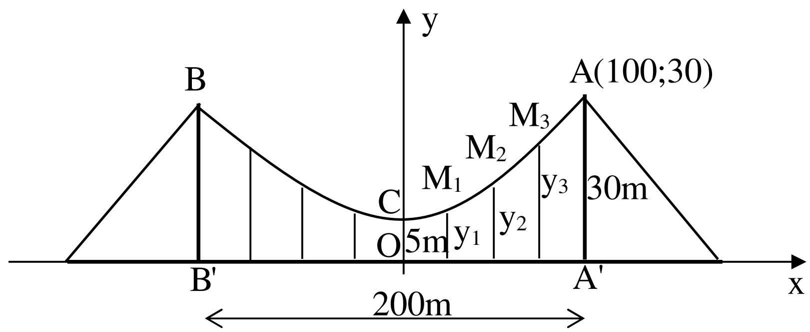
** Để giải quyết hai bài toán này cần hiểu và nắm vững các kiến thức về tập hợp, đặc biệt là các phép toán về tập hợp và suy luận toán học, mang tính chất tổng hợp của Chương **Tập hợp. Mệnh đề** Đại số 10 THPT. Vì vậy hai bài toán này có thể dùng khi ôn tập chương này.*

3. Chọn trục Oy trùng với trục đối xứng của Parabol, trục Ox nằm trên nền cầu như Hình vẽ. Khi đó ta có A(100; 30), C(0; 5), ta tìm phương trình của Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Parabol có đỉnh là C và đi qua A nên ta

có hệ phương trình: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ a.0 + b.0 + c = 5 \\ a.100^2 + b.100 + c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$

Suy ra Parabol có phương trình $y = \dfrac{1}{400}x^2 + 5$. Bài toán đưa việc xác định chiều dài các dây cáp cheo sẽ là tính tung độ những điểm M_1, M_2, M_3 của Parabol. Ta dễ dàng tính được tung độ các điểm có các hoành độ $x_1 = 25$, $x_2 =$

50, $x_3 = 75$ lần lượt là $y_1 = 6{,}56$ (m), $y_2 = 11{,}25$ (m), $y_3 = 19{,}06$ (m). Đó chính là độ dài các dây cáp cheo cần tính.



** Đây là một ví dụ minh họa cho việc ứng dụng Hàm số trong thực tiễn khá cụ thể. Chỉ cần khảo sát Hàm số bậc hai ta có thể tính được độ dài các dây cáp treo và từ đó dự đoán được nguyên liệu cần dùng đến, tiết kiệm được nguyên vật liệu cũng như kế hoạch thi công. Bài này có thể dùng khi dạy bài* ***Hàm số bậc hai*** *trong Chương trình* ***Đại số 10*** *THPT.*

4. Gọi x, y lần lượt là số thiết bị điện loại A, loại B đã sản xuất. Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 2y = 130 \\ 2x + y = 80 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được nghiệm ($x = 30$, $y = 20$)

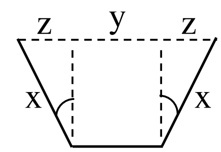
Vậy đã sản xuất được 30 máy điện loại A và 20 máy điện loại B.

** Bài toán về* ***Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn*** *học sinh đã được làm quen ở lớp 9, vì vậy việc đưa vào các bài toán có nội dung thực tiễn, cho dạng toán này là hoàn toàn phù hợp cho học sinh lớp 10. Bài toán trên là một ví dụ có thể dùng khi dạy bài* ***Phương trình và hệ phương trình bậc nhất*** *trong* ***Đại số 10*** *THPT.*

5. Gọi x, y là các cạnh của tiết diện. Theo Định lí Pitago ta có:

$x^2 + y^2 = d^2$ (d là đường kính của thân cây). Thể tích của cây xà sẽ cực đại khi diện tích của tiết diện là cực đại, nghĩa là khi x.y cực đại. Do xy lớn nhất khi và chỉ khi x^2y^2 lớn nhất và tổng $x^2 + y^2 = d^2$ không đổi, nên x^2y^2 cực đại khi $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$. Vậy cây xà phải có tiết diện là hình vuông.

6. Gọi ℓ là chiều rộng của tấm kim loại, x là chiều rộng của mặt bên và y là chiều rộng của đáy, ta thêm vào ẩn z như hình vẽ sau: Diện tích của tiết diện là: $S = \frac{(z+y+z)+y}{2}.\sqrt{x^2 - z^2} = \sqrt{(y+z)^2(x^2-z^2)}$ (1)



Ta cần tìm x, y, z để S cực đại với $2x + y = \ell$ không đổi.

Từ (1) ta có $3S^2 = (y+z)(y+z)(x+z)(3x-3z)$. Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $3S^2 \le \left(\frac{y+z+y+z+x+z+3x-3z}{4}\right)^4 = \frac{\ell^4}{16}$

Do đó S cực đại khi $y + z = x + z = 3x - 3z \Leftrightarrow x = y = \frac{\ell}{3}, z = \frac{\ell}{6}$.

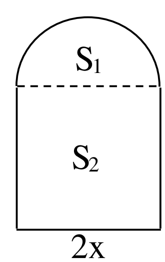
Vì cạnh z bằng nửa cạnh huyền nên góc đối diện cạnh z bằng 30^o, do đó góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy của máng là $90^o + 30^o = 120^o$.

Như vậy, máng sẽ có tiết diện cực đại nếu các cạnh của tiết diện là 3 cạnh liên tiếp của một lục giác đều.

7. Gọi x là bán kính của hình bán nguyệt. Ta có chu vi của hình bán nguyệt là πx, tổng ba cạnh của hình chữ nhật là a - πx. Diện tích cửa sổ là: $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi x^2}{2} + 2x\frac{a-\pi x-2x}{2} = ax - (\frac{\pi}{2}+2)x^2 = (\frac{\pi}{2}+2)x(\frac{a}{\frac{\pi}{2}+2} - x)$.

S lớn nhất khi $x(\frac{a}{\frac{\pi}{2}+2} - x)$ lớn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi

$x = \frac{a}{\frac{\pi}{2}+2} - x \Leftrightarrow x = \frac{a}{4+\pi}$.



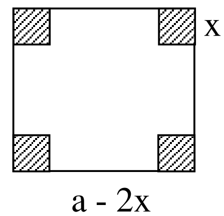
Vậy để diện tích cửa sổ lớn nhất thì

các kích thước của nó là: chiều cao bằng $\frac{a}{4+\pi}$; chiều rộng bằng $\frac{2a}{4+\pi}$.

8. Gọi cạnh của hình vuông bị cắt là x (0 < x < a/2).

Ta có thể tích hình hộp là: $V = x(a - 2x)^2 = \frac{1}{4}.4x.(a - 2x)^2$. Áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho 3 số: $4x$, $a - 2x$, $a - 2x > 0$,

ta có $V \le \frac{1}{4}\left(\frac{4x+a-2x+a-2x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}.\frac{8a^3}{27} = \frac{2a^3}{27}$



V lớn nhất khi và chỉ khi $4x = a - 2x \Leftrightarrow x = \frac{a}{6}$

Vậy để thể tích hộp lớn nhất, cần cắt bốn góc bốn hình vuông có cạnh $\frac{a}{6}$.

9. Gọi bán kính hình trụ là x (cm) (x > 0), khi đó ta có diện tích của hai đáy thùng là $S_1 = 2\pi x^2$.

Diện tích xung quanh của thùng là: $S_2 = 2\pi x h = 2\pi x\frac{V}{\pi x^2} = \frac{2V}{x}$

(trong đó h là chiều cao của thùng và từ $V = \pi x^2.h$ ta có $h = \frac{V}{\pi x^2}$).

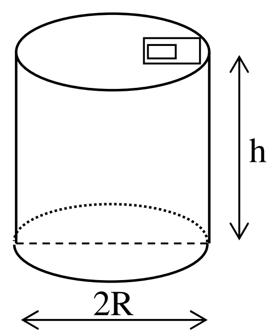
Vậy diện tích toàn phần của thùng là: $S = S_1 + S_2 = 2\pi x^2 + \frac{2V}{x}$

Để tiết kiệm vật liệu nhất thì S phải bé nhất.

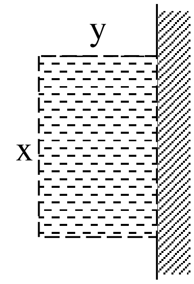
Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có

$S = 2(\pi x^2 + \frac{V}{2x} + \frac{V}{2x}) \ge 2.3\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$.

Do đó S bé nhất khi $\pi x^2 = \frac{V}{2x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.



10. Gọi x là chiều dài cạnh song song với bờ giậu và y là chiều dài cạnh vuông góc với bờ giậu, theo bài ra ta có $x + 2y = a$. Diện tích của miếng đất là $S = y(a - 2y)$. S cực đại khi và chỉ khi $2y(a - 2y)$ cực đại. Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $2S = 2y(a - 2y) \le \left(\dfrac{2y + a - 2y}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2}{4}$.

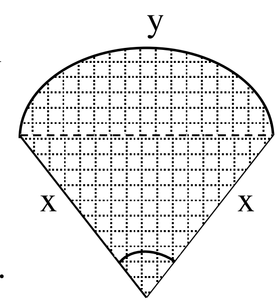


Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $2y = a - 2y \Leftrightarrow y = \dfrac{a}{4} \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$.

Vậy rào khu đất có diện tích cực đại khi $x = \dfrac{a}{2}$, $y = \dfrac{a}{4}$.

11. Gọi x là bán kính hình quạt, y là độ dài cung tròn. Ta có chu vi cánh diều là a = 2x + y. Ta cần tìm mối liên hệ giữa độ dài cung tròn y và bán kính x sao cho diện tích quạt lớn nhất. Dựa vào công thức tính diện tích hình quạt là

$S = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360}$ và độ dài cung tròn $\ell = \dfrac{2\pi R\alpha}{360}$, ta có diện tích hình quạt là: $S = \dfrac{\ell R}{2}$. Vận dụng trong bài toán này diện tích cánh diều là: $S = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x(a-2x)}{2} = \dfrac{1}{4}2x(a-2x)$.



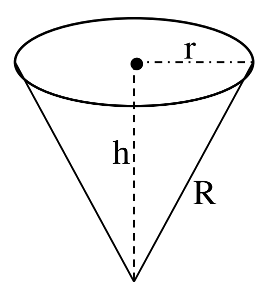
Do đó S cực đại khi 2x(a - 2x) cực đại, điều này xảy ra khi và chỉ khi $2x = a - 2x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow y = \dfrac{a}{2}$.

Như vậy với chu vi cho trước, diện tích của hình quạt cực đại khi bán kính của nó bằng nửa độ dài cung tròn.

12. Sử dụng tổng không đổi thì tích lớn nhất và tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số bằng nhau. Ta có cánh đồng phải có dạng hình vuông thì thoã mãn yêu cầu bài toán.

13. Gọi x là chiều dài cung tròn của phần đĩa được xếp làm hình nón. Như vậy, bán kính R của đĩa sẽ là đường sinh của hình nón và vòng tròn đáy của hình nón sẽ có độ dài là x. Bán kính r của đáy được xác định bởi đẳng thức

$2\pi r = x \Rightarrow r = \dfrac{x}{2\pi}$.



Chiều cao của hình nón tính theo Định lý Pitago là: $h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$. Thể tích của khối nón sẽ là: $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2.H = \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi^2}}$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có:

$$V^2 = \frac{4\pi^2}{9}.\frac{x^2}{8\pi^2}.\frac{x^2}{8\pi^2}(R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}) \le \frac{4\pi^2}{9}\left(\frac{\frac{x^2}{8\pi^2} + \frac{x^2}{8\pi^2} + R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi^2}{9}.\frac{R^6}{27}$$

Do đó V cực đại khi và chỉ khi $\dfrac{x^2}{8\pi^2} = R^2 - \dfrac{x^2}{4\pi} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}R\sqrt{6} \approx 5{,}15R$

Số đo của cung x tính bằng độ xấp xỉ bằng 295^o và do đó cung của hình quạt đã cắt đi là 65^o.

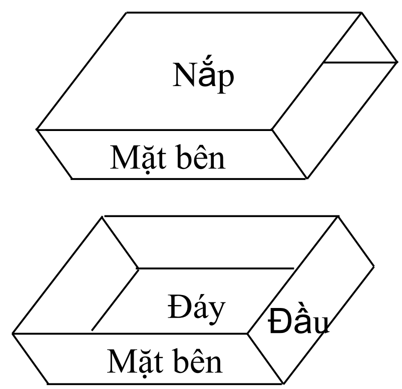
14. Nếu ta đặt x, y, z lần lượt là chiều cao, chiều rộng và chiều dài của hộp diêm. Với thể tích cố định là V, thì tổng diện tích tất cả các mặt hộp diêm là: S = 2xy + 3yz + 4xz. Để tốn ít vật liệu nhất thì S bé nhất.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có

$S \ge 3\sqrt[3]{2xy.3yz.4xz} = 6\sqrt[3]{3x^2y^2z^2} = 6\sqrt[3]{3V^2}$

Do đó ít tốn vật liệu nhất khi và chỉ khi

$2xy = 3yz = 4xz \Leftrightarrow x : y : z = 3 : 4 : 2$.



15. Giả sử Tàu chạy S km mất T ngày đêm. Khi đó chi phí R sẽ bằng

$R = Ta + kTv^3$ ở đây k là hệ số tỉ lệ và vì $T = \dfrac{S}{v}$, nên $R = \dfrac{Sa}{v} + kS\,v^2$.

Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $R = S\left(\dfrac{a}{2v} + \dfrac{a}{2v} + kv^2\right) \ge 3S\sqrt[3]{\dfrac{a^2k}{4}}$

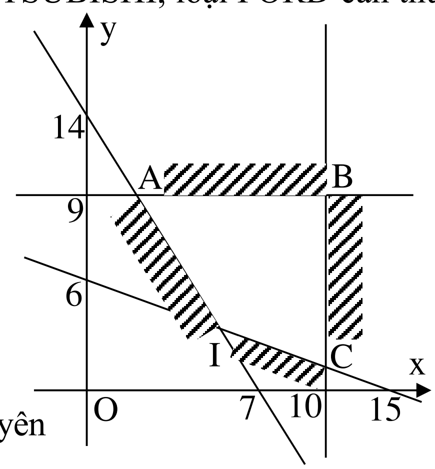
Suy ra tốc độ để tàu chạy với các chi phí ít nhất khi $\dfrac{a}{2v} = kv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt[3]{\dfrac{a}{2k}}$.

** Qua lời giải những bài toán thực tiễn ứng dụng Bất đẳng thức Côsi (từ bài 5 đến bài 15) có một số bài vận dụng Bất đẳng thức Côsi trực tiếp hoặc* *không khó khăn lắm ta có thể đưa vào giảng dạy thay thế hoặc lồng ghép trong bài dạy (như các Bài 5, 7, 8, 9, 10, 12). Một số bài còn lại việc vận dụng Bất đẳng thức Côsi cần phải biến đổi, dùng đến kỹ thuật có thể dùng làm bài tập hoặc dành cho học sinh khá giỏi (như các Bài 6, 11, 13, 14, 15). Các bài toán này có thể dùng khi dạy bài **Bất đẳng thức** trong Mục **Bất đẳng thức Côsi** Chương trình **Đại số 10** THPT.*

16. Trước hết ta hãy đặt Bài toán thành hệ bất phương trình.

Gọi x, y (x, y $\in$ N) lần lượt là số xe loại MITSUBISHI, loại FORD cần thuê. Từ bài toán ta được hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0,6x + 1,5y \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases} \quad (*)$$



Tổng chi phí T(x,y) = 4x + 3y (triệu đồng).

Thực chất của Bài toán này là tìm x, y nguyên không âm thoả mãn hệ (*) sao cho T(x, y) nhỏ nhất.

Bước tiếp theo ta tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình

Miền nghiệm là miền tứ giác lồi IABC. Ta cần xác định toạ độ (x, y) của một điểm thuộc miền tứ giác IABC (kể cả biên) sao cho T(x, y) = 4x + 3y đạt cực tiểu. Xét họ đường thẳng cho bởi phương trình: 4x + 3y = T ($T \in R$) hay $y = -\frac{4}{3}x + \frac{T}{3}$, ta thấy đường thẳng này song song với đường thẳng $y = -\frac{4}{3}x$ ($T \ne 0$). Khi T tăng, đường thẳng này tịnh tiến song song lên phía trên. Khi T giảm, đường thẳng này tịnh tiến song song xuống phía dưới. Giá trị nhỏ nhất của T đạt được tại đỉnh I của tứ giác IABC là giao điểm của hai đường thẳng 2x + 5y = 30 và 2x + y = 14. Toạ độ của I là ($x_I = 5$; $y_I = 4$). Như vậy thuê 5 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD thì chi phí vận tải là thấp nhất.

17. Gọi x, y lần lượt là số kg sản phẩm loại I, loại II với x, y $\ge$ 0. Bài toán đưa đến tìm x, y thoả mãn hệ bất phương trình:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \leq 80 \end{cases}$ sao cho $4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất

Giải tương tự như Bài 16, ta có x = 20, y = 40 thì có mức lời cao nhất.

18. Gọi x, y lần lượt là số cái bánh Đậu xanh, bánh Dẻo $(x, y \in N)$.

Bài toán trở thành tìm x, y $\geq$ 0 thoả mãn hệ $\begin{cases} 6x + 7y \leq 30000 \\ 2x + y \leq 5000 \end{cases}$

sao cho L = 2x + 1,8y lớn nhất.

Giải tương tự Bài 16, ta có $\begin{cases} x = 625 \\ y = 3750 \end{cases}$

19. Gọi x, y lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm x, y $\geq$ 0 thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$

sao cho L = x + y nhỏ nhất

Đáp số: x = 100, y = 300

** Các bài toán thực tiễn ứng dụng kiến thức về* ***Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*** *(như các Bài 16, 17, 18, 19), việc giải chúng không thực sự khó khăn lắm, vì vậy, trong các bài trên ta có thể chọn hai bài đưa vào giảng dạy (chẳng hạn, Bài 16 và Bài 17) còn các bài khác (như Bài 18, 19) có thể làm các bài tập cho học sinh khi dạy bài* ***Hệ bất phương trình bậc nhất*** *trong Chương trình* ***Đại số 10*** *THPT.*

20. Gọi x (tấn) là số cá dự định đánh bắt mỗi ngày theo kế hoạch. Thời gian đánh bắt theo kế hoạch là $\frac{1800}{x}$ ngày. Số cá đánh bắt được trong 3 ngày bị bão là 3(x - 20) tấn. Số cá còn phải đánh bắt trong $\left(\frac{1800}{x} - 3\right)$ ngày còn lại là: 1800 - 3(x - 20) = 1860 - 3x tấn. Số cá đánh bắt được mỗi ngày sau khi bão là: x + 20 tấn. Số ngày đánh bắt cá sau khi bão là $\frac{1860-3x}{x+20}$ ngày.

Theo bài ra ta có phương trình: $\left(\frac{1800}{x} - 3\right) - \frac{1860-3x}{x+20} = 2 \Leftrightarrow$ $\frac{1800}{x} - \frac{1860-3x}{x+20} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 160x - 36000 = 0$. Giải phương trình ta được x = 100 thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy kế hoạch đánh bắt là 18 ngày, mỗi ngày đoàn tàu phải đánh bắt 100 tấn cá.

21. Gọi v, v_0 (km/h) là vận tốc du thuyền khi nước đứng yên, vận tốc dòng nước (cũng là vận tốc trôi của bè gỗ). Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{20}{v+v_0} + \frac{20}{v-v_0} = 7 & (1) \\ \frac{20}{v+v_0} + \frac{8}{v-v_0} = \frac{12}{v_0} & (2) \end{cases}$$

Đặt $k = \frac{v}{v_0}$ $(k \neq 0)$ suy ra $v = kv_0$ thay vào (2) ta được phương trình: $3k^2 - 7k = 0$ suy ra k = 7/3, thay $v = \frac{7}{3}v_0$ vào phương trình (2) ta được kết quả là $v = 7$km/h, $v_0 = 3$km/h.

Đáp số: Vận tốc thuyền khi đi xuôi dòng là 10km/h; vận tốc dòng nước là 3km/h.

22. Gọi x (Đồng) là số tiền mà mỗi người dự định đóng góp cho chuyến Du lịch Sinh thái. Suy ra x + 30000 (Đồng) là số tiền mà mỗi người đi đóng góp. Gọi y (người) là số người dự định đi lúc đầu, suy ra y - 2 (người) là số người tham gia chuyến du lịch đó. Điều kiện $y \in N$, $y > 2$. Chi phí dự kiến của chuyến du lịch cũng chính là chi phí ghi trong bản hợp đồng là xy (Đồng) chi phí thực tế do các người tham gia đóng góp là: (x + 30000)(y - 2). Ta có phương trình xy = (x + 30000)(y - 2) (1), với điều kiện $700 \leq xy \leq 750000$ (2).

Từ (1) suy ra $xy = xy - 2x + 30000y - 60000 \Leftrightarrow x = 15000y - 30000$ (3)

Thay (3) vào (2) suy ra $700 \le y(15000y - 30000) \le 750000$

Ta được hệ $\begin{cases} 15000y^2 - 30000y - 700000 \ge 0 \\ 15000y^2 - 30000y - 750000 \le 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y^2 - 6y - 140 \ge 0 \\ 3y^2 - 6y - 150 \le 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3+\sqrt{429}}{3} \le y \le \dfrac{3+\sqrt{459}}{3}$. Do $y \in N$ suy ra $y = 8$ từ đó ta suy ra $x = 15000.8 - 30000 = 90000$.

Đáp số: Số người lúc đầu dự định đi Du lịch là 8 người

Mỗi người dự kiến đóng góp 90000 đồng

Chi phí chuyến đi Du lịch Sinh thái là 720000 đồng

23. Gọi x (giờ), y (giờ) lần lượt là thời gian người thứ nhất, người thứ hai làm một mình xong công việc. Đổi 3 giờ 36 phút ra $\frac{18}{5}$ giờ. Số công việc người thứ nhất làm trong 1 giờ là $\frac{1}{x}$. Số công việc người thứ hai làm trong 1 giờ là $\frac{1}{y}$. Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} \dfrac{y}{3x} + \dfrac{x}{3y} = \dfrac{13}{18} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{18} \end{cases}$

Giải hệ đối xứng loại I này ta được hai nghiệm $\begin{cases} x = 6 \\ y = 9 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 9 \\ y = 6 \end{cases}$

Do đó thời gian mỗi người làm riêng xong công việc là

Người thứ nhất 9 giờ, người thứ hai 6 giờ; hoặc:

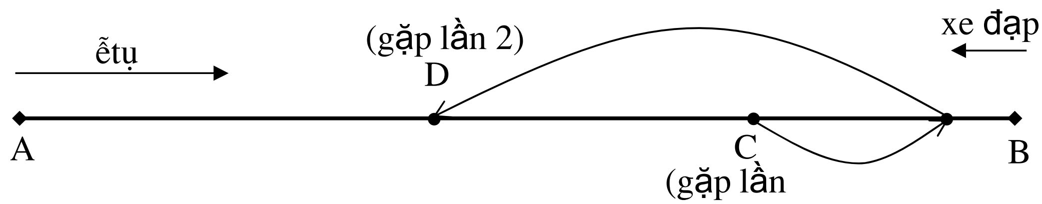
Người thứ nhất 6 giờ, người thứ hai 9 giờ

24. Gọi x (km/phút) là vận tốc của ôtô, y (km/phút) là vận tốc của xe đạp. Theo bài ra ta nhận thấy rằng chuyển động của ôtô từ A đến chỗ gặp lần thứ nhất trong cả hai trường hợp đều mất một số thời gian như nhau và chuyển động của ôtô từ chỗ gặp lần thứ nhất đến B trong cả hai trường hợp cũng đều mất một thời gian như nhau. Ta hãy tính thời gian trong mỗi trường hợp.

Sau khi gặp xe đạp lần thứ nhất, ôtô chạy thêm 3 phút theo chiều đến B. Trên đường ngược lại tới chỗ gặp lần thứ nhất cần 3 phút. Trong thời gian này xe đạp đã đi được 6y km tính từ chỗ gặp nhau lần thứ nhất. Ôtô để gặp xe đạp lần thứ hai với vận tốc chênh lệch (x - y) km/phút và cần thời gian $\frac{6y}{x-y}$ phút. Trên đường ngược lại từ chỗ gặp lần thứ hai tới chỗ gặp nhau lần thứ nhất cũng bị mất $\frac{6y}{x-y}$ phút, nghĩa là mất $3+3+2\frac{6y}{x-y}=6+\frac{12y}{x-y}$ phút. Lý luận tương tự ta được: $1+1+\frac{2.\frac{15}{7}y}{x-\frac{15}{7}y}+\frac{2.\frac{15}{7}y}{x-\frac{15}{7}y}=2+\frac{60y}{7x-15y}$ phút. Hai thời gian này bằng nhau vì vậy ta được phương trình: $6+\frac{12y}{x-y}=2+\frac{60y}{7x-15y}$.

Bái toán dẫn đến phương trình thuần nhất bậc hai: $7x^2 - 16xy - 15y^2 = 0$

Đặt $t=\frac{x}{y}$(tỉ số vận tốc ôtô và xe đạp). Giải phương trình trên ta được t = 3 thoả mãn.



** Các Bài 20, 21, 22, 23, 24 đây là các bài tập điển hình vận dụng kiến thức về Phương trình, Bất phương trình, Hệ phương trình, Hệ bất phương trình bậc hai và đặc biệt vận dụng phương pháp giải toán Hệ đối xứng loại I, Phương trình thuần nhất bậc hai. Vì vậy Bài 22 có thể dùng khi dạy bài **Sơ lược về hệ bất phương trình bậc hai**, các Bài 21, 23 có thể dùng khi dạy bài **Hệ phương trình bậc hai**, các Bài 20, 24 có thể dùng khi dạy bài **Phương trình bậc hai** trong Chương trình **Đại số 10** THPT.*

25. Từ ngày 1 tháng 1 đến ngày 1 tháng 5 số ngày có ít nhất là: 31 + 28 + 31 + 30 = 120 (ngày). Số tiền bỏ ống của An mỗi ngày tăng theo *cấp số cộng* với công sai bằng 100 đồng. Do đó tổng số tiền có được của An đến

ngày 1 tháng 5 là: $\frac{120}{2}(2.100+(120-1)100)=\frac{120.121.100}{2}=726000$ đồng.

Vậy An có đủ tiền mua quà sinh nhật cho mình.

26. Nếu người làm vườn có x quả Xoài thì người khách hàng thứ nhất đã mua: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2}$ quả; người thứ 2 mua: $\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^2}$ quả; người khách hàng thứ 3 mua: $\frac{1}{2}(x-\frac{x+1}{2}-\frac{x+1}{2^2})+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{2^3}$ quả; ... và người khách hàng thứ 7 mua: $\frac{x+1}{2^7}$ quả. Ta có phương trình:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+1}{2^2}+...+\frac{x+1}{2^7}=x \Leftrightarrow (x+1)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^7})=x \quad (1)$$

Tính tổng các số hạng của cấp số nhân trong ngoặc ta được:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^7}=\frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^7}}{\frac{1}{2}}=\frac{127}{128}$$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (x+1)\frac{127}{128}=x \Leftrightarrow x=127$

Vậy bác nông dân đã thu hoạch được 127 quả Xoài đầu mùa.

** Hai bài toán điển hình trong việc vận dụng cấp số để giải các bài toán trong thực tiễn phù hợp trong dạy học các bài* ***Cấp số cộng, Cấp số nhân*** *trong Chương trình* ***Đại số và Giải tích 11*** *THPT.*

27. a) Gọi x là tỷ lệ phải tìm, ta có phương trình: $x=\left(\frac{2500}{2200}\right)^{12}=\left(\frac{25}{22}\right)^{12}$, suy ra $\lg x=12(\lg 25-\lg 12)$. Áp dụng Bảng số hoặc tính các lôgarit bằng máy tính ta có $x\approx 4,6$. Một bóng đèn có hơi sáng gấp 4 lần một bóng đèn chân không.

Suy ra rằng, một bóng đèn chân không có độ sáng là 50 nến thì cũng bóng ấy chứa đầy hơi có độ sáng là 50x4,6 = 230 nến.

b) Gọi y là phần trăm phải tăng nhiệt độ tuyệt đối. Ta có phương trình $\left(1+\frac{y}{100}\right)^{12} = 2 \Leftrightarrow \lg(1+\frac{y}{100}) = \frac{\lg 2}{12}$, dùng Bảng số hoặc máy tính ta tính được $y \approx 6\%$

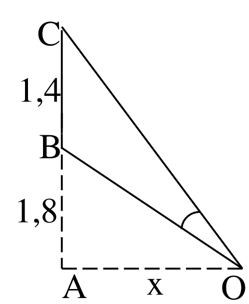
c) Dùng lôgarit cơ số 10 thì từ $x = (1{,}01)^{12}$, suy ra lgx = 12lg(1,01), ta tính được $x \approx 1{,}13$ nghĩa là độ sáng sẽ tăng là 13%.

Tương tự với sự tăng nhiệt dây tóc là 2%, ta tính được mức tăng độ chiếu sáng là 27%, và tăng nhiệt độ lên 3% thì mức tăng độ chiếu sáng là 43%.

Chính vì vậy mà trong kỷ nghệ làm bóng đèn điện người ta nghiên cứu làm tăng nhiệt độ dây tóc.

** Bài toán này thể hiện một vai trò quan trọng của việc ứng dụng Lôgarit để tính toán trong thực tế, nhất là khi tính toán với số mũ lớn, có căn thức bậc lớn. Bài này có thể dùng khi dạy học bài **Hàm số lôgarit** trong Chương trình **Đại số và Giải tích 11** THPT.*

28. Với bài toán này ta cần xác định OA để góc $\widehat{BOC}$ lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $tg\widehat{BOC}$ lớn nhất. Đặt OA = x (m) với x > 0, ta có $tg\widehat{BOC} = tg(\widehat{AOC} - \widehat{AOB}) = \frac{tg\widehat{AOC} - tg\widehat{AOB}}{1 + tg\widehat{AOC}.tg\widehat{AOB}} =$



$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC.AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1{,}4}{x}}{1 + \frac{3{,}2.1{,}8}{x^2}} = \frac{1{,}4x}{x^2 + 5{,}76}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1{,}4x}{x^2 + 5{,}76}$

Bài toán trở thành tìm x > 0 để f(x) đạt giá trị lớn nhất. Ta có $f'(x) = \dfrac{-1{,}4x^2 + 1{,}4.5{,}76}{(x^2 + 5{,}76)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2{,}4$

Ta có bảng biến thiên

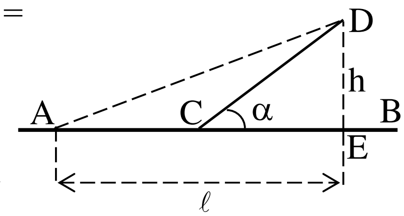
x	0		2,4		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$\dfrac{84}{193}$	↘	0

Vậy vị trí đứng cho góc nhìn lớn nhất là cách màn ảnh 2,4m.

29. Gọi t là thời gian vận chuyển hàng hóa từ cảng A đến cảng D.

Thời gian t là: $t = \dfrac{AC}{v_1} + \dfrac{CD}{v_2} = \dfrac{AE - CE}{v_1} + \dfrac{CD}{v_2} =$

$$= \dfrac{\ell - \dfrac{h}{tg\alpha}}{v_1} + \dfrac{\dfrac{h}{\sin\alpha}}{v_2} = \dfrac{\ell - h.\cot g\alpha}{v_1} - \dfrac{h}{v_2 \sin\alpha}$$

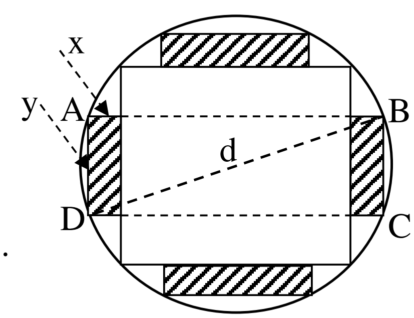


Xét hàm số $t(\alpha) = \dfrac{\ell - h.\cot g\alpha}{v_1} - \dfrac{h}{v_2 \sin\alpha}$. Ứng dụng Đạo hàm ta được $t(\alpha)$ nhỏ nhất khi $\cos\alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$. Vậy để t nhỏ nhất ta chọn C sao cho $\cos\alpha = \dfrac{v_2}{v_1}$.

30. Gọi x, y là chiều rộng, chiều dài miếng phụ như Hình vẽ. Gọi d là đường kính của khúc gỗ, khi đó ta có tiết diện ngang của thanh xà có cạnh là $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ và $0 < x < \dfrac{d(2 - \sqrt{2})}{4}$, $0 < y < \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

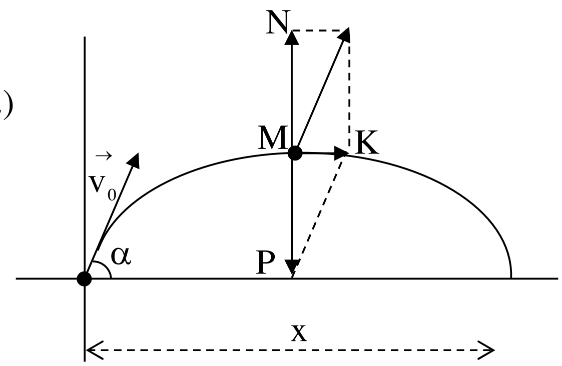
Theo bài ra ta được hình chữ nhật ABCD như Hình vẽ bên. Áp dụng Định lý Pitago ta có

$$\left(2x + \dfrac{d}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = d^2 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2 - 8x^2 - 4\sqrt{2}\,x}.$$



Suy ra $S=S(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x\sqrt{d^2-4\sqrt{2}dx-8x^2}$ với $0<x<\dfrac{d(2-\sqrt{2})}{4}$. S là diện tích một miếng phụ. Ứng dụng Đạo hàm ta có S lớn nhất khi và chỉ khi $x=\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}$.

31. a) Véc tơ $\vec{v_0}$ được phân tích thành tổng của hai véc tơ theo hai phương vuông góc với nhau (phương ngang và phương thẳng đứng) như Hình vẽ. Vật cao nhất khi $\vec{MN}=-\vec{MP}$, trong đó $\left|\vec{MP}\right|=gt$ (1), $MN^2=v_0^2-MK^2$ suy ra $MN^2=v_0^2-v_0^2\cos^2\alpha$ (2).



Từ (1) và (2) $\Rightarrow g^2t^2=v_0^2(1-\cos^2\alpha)$

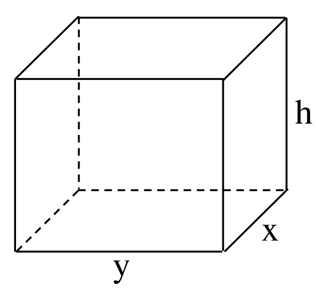
$\Leftrightarrow t=\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$. Vậy h lớn nhất khi và chỉ khi $t=\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}$ và khi đó

$$\max h=v_0\sin\alpha\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}=\dfrac{v_0^2.\sin^2\alpha}{g}.$$

b) Vì quỹ đạo của vật ném xiên là Parabol nên tầm ném của vật được tính $x=MK.2t=v_0\cos\alpha 2\dfrac{v_0\sin\alpha}{g}=\dfrac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$. Ứng dụng Đạo hàm đối với hàm $f(\alpha)=\dfrac{v_0^2.\sin2\alpha}{g}$, cho ta tầm ném cực đại khi $\alpha=45^0$.

32. Gọi x, y (x, y > 0) lần lượt là chiều rộng, chiều dài của đáy hố ga.

Gọi h là chiều cao của hố ga (h > 0). Ta có $k=\dfrac{h}{x}$ suy ra $h=kx$ (1), $V=hxy\Rightarrow y=\dfrac{V}{hx}=\dfrac{V}{kx^2}$ (2).



Diện tích toàn phần của hố ga là:

$S = 2xh + 2yh + xy \; = 2xh + 2h\dfrac{V}{kx^2} + 2x\dfrac{V}{kx^2}$ kết hợp (1) và (2) ta suy ra

$S = 2kx^2 + 2\dfrac{(k+1)V}{kx}$. Áp dụng Đạo hàm ta có S nhỏ nhất khi $x = \sqrt[3]{\dfrac{k+1}{2k^2}V}$,

khi đó $y = \sqrt[3]{\dfrac{4kV}{(k+1)^2}}$, $h = \sqrt[3]{\dfrac{k(k+1)V}{2}}$.

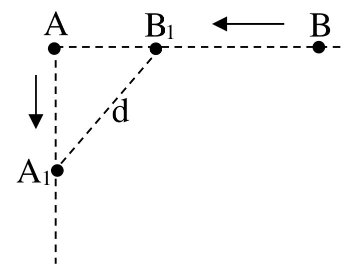
33. Tại thời điểm t sau khi xuất phát, khoảng cách giữa hai tàu là d.

Ta có $d^2 = AB_1^2 + AA_1^2 \; = (5 - BB_1)^2 + AA_1^2 \; = (5 - 7.t)^2 + (6t)^2$

Suy ra $d = d(t) \; = \sqrt{85t^2 - 70t + 25}$.

Áp dụng Đạo hàm ta được d nhỏ nhất

khi $t = \dfrac{7}{17}$ (giờ), khi đó ta có $d \approx 3{,}25$ Hải lý.



34. Giả sử hướng của thuyền, hướng của dòng nước chảy theo véctơ vận tốc là $\vec{v_t}$, $\vec{v_n}$ như Hình vẽ. Gọi góc giữa hai véctơ vận tốc của thuyền và của dòng nước là α, y là độ dời của thuyền do dòng nước chảy, b là khoảng cách giữa hai bờ sông, các ký hiệu x, h, z, α_1, A, B, C, D, E, B_1, K như Hình vẽ.

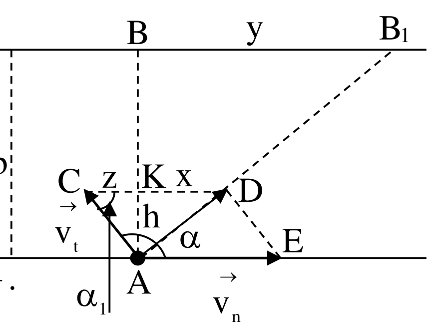
Ta có $h.v_n = v_t.v_n.\sin\alpha$ (vì cùng bằng diện tích của hình bình hành ACDE) Suy ra $h = v_t.\sin\alpha$. Do $\alpha_1 + \alpha = 180^0$ (tổng của hai góc trong cùng phía), suy ra $z = -v_t\cos\alpha \Rightarrow x = v_n - (-v_t\cos\alpha) \Rightarrow x = v_n + v_t\cos\alpha$ (x = CD - z).

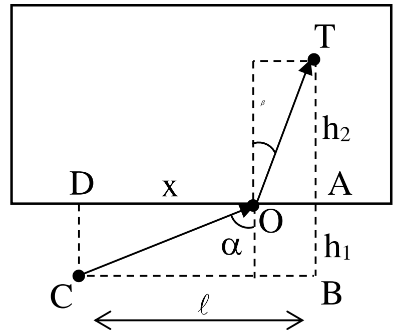
Mặt khác ta có $\dfrac{x}{y} = \dfrac{h}{b}$ (Do KD // BB_1)

suy ra $y = \dfrac{bx}{h} = \dfrac{b(v_n + v_t\cos\alpha)}{v_t\sin\alpha}$

Xét hàm số $y(\alpha) = b(\cot g\alpha + \dfrac{v_n}{v_t\sin\alpha})$

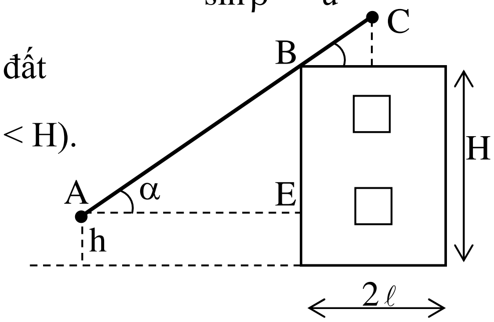
Ứng dụng Đạo hàm ta có y nhỏ nhất khi $\cos\alpha = -\dfrac{v_t}{v_n}$.





35. Giả sử người cứu hộ ở vị trí C, cần cứu một người ở vị trí T. Anh ta chọn điểm O là điểm anh ta xuống hồ. Với các ký hiệu như Hình vẽ bên ta có thời gian t người cứu hộ đi là: $t = \dfrac{CO}{v} + \dfrac{OT}{u} = \dfrac{\sqrt{x^2 + h_1^2}}{v} + \dfrac{\sqrt{(\ell - x)^2 + h_2^2}}{u}$

với $0 \le x \le \ell$. Ứng dụng Đạo hàm ta có t nhỏ nhất khi $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{v}{u}$.



36. Gọi h là khoảng cách tính từ mặt đất đến đầu dưới của cánh tay Cần cẩu (0 < h < H). Các ký hiệu α, A, B, C, E như Hình vẽ.

Khi đó cánh tay cần cẩu AC là: $AC = L(\alpha) = \dfrac{H-h}{\sin\alpha} + \dfrac{\ell}{\cos\alpha}$ với $0 < \alpha < 90^o$.

Ta có $L'(\alpha) = (H\text{-}h)\dfrac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \ell\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$.

$L'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (H - h)\cos^3\alpha = \ell\sin^3\alpha \Leftrightarrow tg^3\alpha = \dfrac{H-h}{\ell} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow tg\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{H-h}{\ell}}$, khi đó $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{H-h}{\ell}\right)^2} + 1}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(\dfrac{\ell}{H-h}\right)^2} + 1}}$,

Dễ thấy với α này thì AC_{min} và $AC_{min} = (H - h)\sqrt{\sqrt[3]{\left(\dfrac{\ell}{H-h}\right)^2} + 1}$ +

$+ \ell.\sqrt{\sqrt[3]{\left(\dfrac{H-h}{\ell}\right)^2} + 1}$, vậy độ dài cánh tay nâng ít nhất phải là

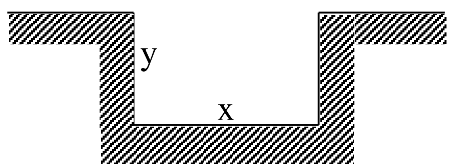
$$AC_{min} = (H - h)\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{\ell}{H-h}\right)^2}+1} + \ell.\sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{H-h}{\ell}\right)^2}+1}$$

37. Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương. Theo bài ra ta có: $S = xy$; $\ell = 2y + x = \frac{2S}{x} + x$. Xét hàm số $\ell(x) = \frac{2S}{x} + x$.

Ta có $\ell'(x) = \frac{-2S}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 2S}{x^2}$.

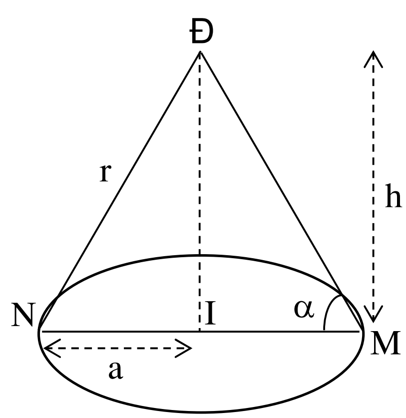
$\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2S = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2S}$, khi đó $y = \frac{S}{x} = \sqrt{\frac{S}{2}}$.

Dễ thấy với x, y như trên thì mương có dạng thuỷ động học, vậy các kích thước của mương là $x = \sqrt{2S}$, $y = \sqrt{\frac{S}{2}}$ thì mương có dạng thuỷ động học.



38. Gọi h là độ cao của đèn so với mặt bàn (h > 0). Các ký hiệu r, M, N, Đ, I như Hình vẽ. Ta có $\sin\alpha = \frac{h}{r}$ và $h^2 = r^2 - a^2$, suy ra cường độ sáng là:

$C = C(r) = k\frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r^3}$ $(r > a)$. Ứng dụng Đạo hàm ta có C lớn nhất khi và chỉ khi $r = a.\sqrt{\frac{3}{2}}$, khi đó $h = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



** Công cụ Đạo hàm dùng khá hiệu quả trong việc giải các bài toán cực trị. Các bài toán cực trị còn có thể giải được bằng phương pháp dùng Bất đẳng thức Côsi, tuy nhiên trong các bài toán trên (các Bài từ bài 28 đến bài 38) việc* *sử dụng Bất đẳng thức Côsi là gặp nhiều khó khăn, điều này thể hiện rằng, chủ đề Đạo hàm có rất nhiều tiềm năng trong việc khai thác những bài toán có nội dung thực tiễn. Các bài ở mức độ vừa phải (như các Bài 30, 32, 33, 37, 38) có thể đưa vào dạy học trên lớp, các bài có cùng mức độ hoặc nâng cao hơn (như các Bài 28, 29, 35, 36) có thể dùng làm bài tập cho học sinh, các bài khó (như các Bài 31, 34) có thể dùng cho học sinh giỏi khi dạy học các bài **Cực đại và cực tiểu, Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số** trong Chương trình **Giải tích 12** THPT.*

2.4. Một số gợi ý về phương pháp dạy học sử dụng Hệ thống bài tập đã được xây dựng

Hệ thống bài tập được xem là cơ sở quan trọng trong việc lồng ghép những bài toán thực tiễn vào dạy học. Tuỳ vào từng chương, từng bài hay từng mục, từng chi tiết cụ thể mà ta có kế hoạch dạy học, rèn luyện cho học sinh năng lực vận dụng kiến thức Toán học vào thực tiễn một cách phù hợp nhất. Những bài toán trong Hệ thống bài tập có thể chỉ vận dụng vào bài dạy mang tính chất điểm tựa, để bài dạy thêm sinh động, tận dụng được nhiều cơ hội liên hệ thực tế hơn. Trong nhiều trường hợp ta cần sáng tạo thêm một số bài toán khác đơn giản hơn, cụ thể hơn, sát thực đời sống thực tế hơn nhưng không phức tạp trong việc giải chúng. Cụ thể khi sử dụng và giảng dạy Hệ thống bài tập cần chú ý những điểm sau đây:

Thứ nhất: Về việc khai thác Hệ thống bài tập trong giảng dạy

Mặc dù Hệ thống bài tập có nội dung thực tiễn được lựa chọn, cân nhắc một cách thận trọng về nội dung cũng như hình thức và số lượng theo từng chủ đề kiến thức Toán trong Chương trình THPT; nhưng trong quá trình giảng dạy cần chú ý vận dụng linh hoạt vào từng trường hợp cụ thể, chẳng hạn:

+) Đối với những chủ đề chưa có bài tập trong Hệ thống, ta có thể sáng tạo các bài toán có lời văn mang nội dung thực tiễn hoặc các bài toán khác làm ví dụ minh họa cho học sinh:

Ví dụ 1: Ở bài *Các phép toán về tập hợp* trong *Đại số 10* THPT, ta có thể đưa vào ví dụ: Nhà bạn An có hai con mèo và ba con chó. Nhà bạn Bình có một con mèo, hai con chó và một con gà. Gọi A là tập các con vật nhà bạn An, B là tập hợp các con vật nhà bạn Bình. Hãy tìm:

a) $A \cap B = ?$ b) $A \cup B = ?$ c) $B \setminus A = ?$

Trong Ví dụ trên, học sinh thường hay mắc sai lầm rằng, con vật nhà bạn An giống con vật nhà bạn Bình (chẳng hạn, học sinh nghĩ sai rằng: các con mèo nhà bạn An giống các con mèo nhà bạn Bình).

Ví dụ 2: Ở bài *Phương trình bậc hai* trong SGK *Đại số 10* THPT hiện hành, ta có thể đưa vào Ví dụ sau:

Một người đi xe đạp dự định trong buổi sáng đi hết quãng đường 60km. Khi đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường, anh ta thấy vận tốc của mình chỉ bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc dự định, anh ta bèn đạp nhanh hơn vận tốc dự định 3km/h, đến nơi anh ta vẫn chậm mất 45 phút. Hỏi vận tốc dự định của người đi xe đạp là bao nhiêu?

Lời giải:

Gọi v (km/h) là vận tốc dự định của người đi xe đạp (v > 0). Theo bài ra ta có phương trình $\dfrac{30}{\frac{2}{3}v} + \dfrac{30}{v+3} = \dfrac{60}{v} + \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow 3v^2 - 51v + 180 = 0$ (1).

Giải phương trình (1) ta được hai nghiệm v = 12 (thoả mãn) và v = 5 (loại)

Trong Bài toán trên, mặc dù nghiệm v = 5 thoả mãn điều kiện bài toán (v > 0), nhưng nghiệm này vẫn bị loại vì hai lý do thực tế sau: thứ nhất, vận tốc 5km/h là quá chậm không phù hợp với vận tốc bình thường của xe đạp; thứ hai là, với vận tốc 5km/h, trong buổi sáng không thể đi hết quãng đường 60km như đã dự định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Văn Hạo, Cam Duy Lễ (2000), *Đại số 10* (Sách chỉnh lí hợp nhất năm2000), Nxb Gd, Hà Nội.

2. Trần Văn Hạo, Cam Duy Lễ, Ngô Thúc Lanh, Ngô Xuân Sơn, Vũ Tuấn 2003), *Đại số và Giải tích 11* (Sách chỉnh lí hợp nhất năm 2000, tái bản lần thứ ba), Nxb Giáo dục, Hà Nội.

3. Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình (1981), *Giáo dục học môn Toán*, Nxb Giáo dục, Hà Nội.

4. Luận Văn Nguyễn Văn Tân

5. Hồ Thị Bích Hiệp

6. SGK Toán các lớp 10, 11, 12 ban khoa học tự nhiên hiện hành.