

**Bài 1 (3,0 điểm).**

1. Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{3}{2abc}.$$

2. Tìm tất cả đa thức  $P(x)$  có hệ số thực sao cho  $P^2(x+1) - P^2(x-1) = 4x$  với mọi số thực  $x$ .

**Bài 2 (2,0 điểm).**

1. Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp là một số chia hết cho 9.
2. Tìm tất cả cặp số tự nhiên  $(m; n)$  sao cho  $2^m + 3^n$  là số chính phương.

**Bài 3 (3,0 điểm).** Cho tam giác  $ABC$  nhọn không cân, nội tiếp đường tròn  $(O)$  có các đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Gọi  $A_1$  là giao điểm của  $EF, BC$ ;  $B_1$  là giao điểm của  $FD, CA$  và  $C_1$  là giao điểm của  $DE, AB$ .

1. Xét  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh hai đường thẳng  $HM, AA_1$  vuông góc và ba điểm  $A_1, B_1, C_1$  thẳng hàng.
2. Qua  $E, F$  ta dựng được hai đường tròn lần lượt tiếp xúc với  $(O)$  tại  $A_2, A_3$ . Tương tự qua  $F, D$  dựng được hai đường tròn lần lượt tiếp xúc  $(O)$  tại  $B_2, B_3$  và qua  $D, E$  dựng được hai đường tròn lần lượt tiếp xúc  $(O)$  tại  $C_2, C_3$ . Chứng minh các đường thẳng  $A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3, OH$  đồng quy.

**Bài 4 (2,0 điểm).**

1. Với mỗi cách viết số 2023 thành tổng của một hoặc nhiều số nguyên dương, ta đặt  $T$  là tích các số nguyên dương đó. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $T$ .
2. Lớp 10 chuyên toán 1 của trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn có 30 học sinh. Vào ngày đầu sinh hoạt lớp, các bạn nhận ra rằng cứ ba học sinh tùy ý trong lớp thì luôn có hai bạn nào đó quen biết nhau (Sự quen biết là mối quan hệ hai chiều). Chứng minh rằng luôn có thể tìm ra trong lớp ít nhất 210 cặp, mỗi cặp gồm hai học sinh quen biết nhau.

-----HẾT-----

- Học sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.