MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1. Một khối gỗ hình hộp chữ nhật có kích thước thoả mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng $12\,\text{cm}$; tổng của chiều rộng và chiều cao là $24\,\text{cm}$. Hỏi thể tích lớn nhất mà khối hộp có thể đạt được là bao nhiêu?

A. $288\,\text{cm}^3$. **B.** $384\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. **C.** $1782\,\text{cm}^3$. **D.** $864\,\text{cm}^3$.

Câu 2. Trong không gian cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2;3;3;2$ đôi một tiếp xúc nhau. Mặt cầu nhỏ tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SB=a\sqrt{2}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau. Góc giữa SC và (SAB) bằng 45^0, góc giữa SB và mặt đáy bằng α $\left(0<\alpha<90^0\right)$. Xác định α để thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha=60^0$. **B.** $\alpha=30^0$. **C.** $\alpha=45^0$. **D.** $\alpha=70^0$.

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC), SB=a\sqrt{2}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau. Góc giữa SC và (SAB) bằng 45^o, góc giữa SB và mặt đáy bằng $\alpha,\left(0^o<\alpha<90^o\right)$. Xác định α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

A. $\alpha=60^o$. **B.** $\alpha=30^o$. **C.** $\alpha=45^o$. **D.** $\alpha=70^o$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân đáy AB, nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Biết rằng $AC\perp BD$ tại I, đồng thời I là hình chiếu của S lên $(ABCD)$ và ΔSAC vuông tại S. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ theo R là

A. R^3. **B.** $\frac{2}{3}R^3$. **C.** $\frac{1}{2}R^3$. **D.** $\frac{3}{4}R^3$

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha):x-y-4=0$, mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+y^2+z^2=1$ và mặt cầu $(S_2):(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=4$. Điểm A thuộc mặt phẳng (α), điểm M thuộc mặt cầu (S_1), điểm N thuộc mặt cầu (S_2). Khi đó $AM+AN$ nhỏ nhất bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 11. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB=6; BC=12; \widehat{ABC}=60^0$. Thể tích khối chóp $C'.ABB'A'$ bằng 216. Gọi M là điểm nằm trong tam giác $A'B'C'$ sao cho tổng diện tích các mặt bên của hình chóp $M.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng $B'M$, AC'?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1):(x+4)^2+y^2+z^2=16$, $(S_2):(x+4)^2+y^2+z^2=36$ và điểm $A(4;0;0)$. Đường thẳng Δ di động và luôn tiếp xúc với (S_1) đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm B,C. Tam giác ABC có thể có diện tích lớn nhất là

A. $28\sqrt{5}$. **B.** 72. **C.** 48. **D.** $24\sqrt{5}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P) chứa AM lần lượt cắt các cạnh SB,SD tại B',D'. Giá trị lớn nhất của $u=\frac{SB'}{SB}+\frac{SD'}{SD}$ là $\frac{a}{b}$, $(a,b\in N^*)$ tối giản. Tích $a.b$ bằng:

A. 3. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 6.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI=\frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_{S.MBNP}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị của $m+n$ là

A. $\frac{4}{15}$. **B.** $\frac{6}{75}$. **C.** $\frac{14}{75}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 11. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{6}$ biết các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $SABC$.

A. 3. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 4.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;0;0),B(0;4;0),S(0;0;c)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$. Gọi A',B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên SA,SB. Khi góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(OA'B')$ lớn nhất,mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $c\in(-8;-6)$. **B.** $c\in(-9;-8)$. **C.** $c\in(0;3)$. **D.** $c\in\left(-\frac{17}{2};-\frac{15}{2}\right)$.

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M nằm trên cạnh AA' sao cho góc $\widehat{BMD'}$ lớn nhất, đặt góc lớn nhất đó là α. Biết $\cos\alpha=\frac{a}{b};a,b\in\mathbb{Z};(a,b)=1;b>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=3$. **D.** $a+b=4$.

Câu 14. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B. Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5}+q$ trong đó $p,q\in\mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức: $p^2+q^2=?$

A. $p^2+q^2=\frac{37}{36}$. **B.** $p^2+q^2=\frac{37}{9}$. **C.** $p^2+q^2=\frac{25}{4}$. **D.** $p^2+q^2=16$.

Câu 15. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI=\frac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA, SC,SD lần lượt tại M,N,P. Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $\frac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\frac{m}{n}$?

A. 2. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{14}{75}$. **D.** $\frac{8}{5}$.

Câu 16. Trong không gian cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2;3;3;2 đôi một tiếp xúc nhau. Mặt cầu nhỏ tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Câu 17. Cho tứ diện $SABC$ và G là trọng tâm của tứ diện. Một mặt phẳng (α) quay quanh AG cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại M và N (M,N không trùng S). Gọi V là thể tích tứ diện $SABC$, V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$ và gọi m,n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\frac{V_1}{V}$. Hãy tính $m+n$.

A. $m+n=1$. **B.** $m+n=\frac{17}{18}$. **C.** $m+n=\frac{18}{19}$. **D.** $m+n=\frac{19}{20}$.

Câu 18. Cho hình nón (H) có đỉnh S, chiều cao là h và mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy của khối nón. Một khối nón (T) có đỉnh là tâm của đường tròn đáy của (H) và đáy của (T) là thiết diện của (P) với hình nón. Thể tích lớn nhất của (T) là bao nhiêu?

A. $\frac{4\pi R^2h}{81}$. **B.** $\frac{4\pi R^2h}{27}$. **C.** $\frac{\pi R^2h}{24}$. **D.** $\frac{\pi R^2h^2}{3}$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB=1$, $\widehat{ASB}=30^0$. Lấy các điểm B', C' lần lượt thuộc các cạnh SB, SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tính chu vi đó.

A. $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}-1$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Câu 20. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC đều cạnh bằng $8cm$ và một điểm S di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3}cm^2$, với M là trung điểm của SC. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn đỉnh M, A, B, C. Khi thể tích hình chóp $S.ABC$ lớn nhất, tính bán kính nhỏ nhất của (S):

A. $\frac{16\sqrt{6}}{9}cm$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$. **C.** $\frac{4\sqrt{15}}{3}cm$. **D.** $\frac{4\sqrt{39}}{3}cm$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, $SA=a\sqrt{3}$. Và SA vuông góc với đáy. M và N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc hai cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN}=45^0$. Tính tỉ số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$

A. $-2+2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{6}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $16\sqrt{2}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao $SA=2a$. $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy, $M\in SA$ và $AM=x$. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và đường sinh MA. Giá trị của x để thể tích khối trụ lớn nhất là

A. $x=\frac{a}{3}$. **B.** $x=\frac{2a}{3}$. **C.** $x=\frac{a}{2}$. **D.** $x=\frac{3a}{4}$.

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh $2a$ và tam giác ABD vuông tại D, $AD=\frac{a}{2}$. Khoảng cách lớn nhất từ B đến mặt phẳng (ACD) là?

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 25. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt bên của hình chóp với đáy của hình chóp đó. Với giá trị nào của α thì thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. **B.** $\alpha=45^0$. **C.** $\alpha=\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\alpha=60^0$.

Câu 26. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA=SB=SC=a$.Đặt $x=SD\left(0<x<a\sqrt{3}\right)$ Tìm x theo a để tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** Đáp án khác.

Câu 27. Cho tứ diện $S.ABCD$ và M là một điểm di động, nằm bên trong tam giác ΔABC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với SA,SB,SC cắt các mặt phẳng tương ứng (SBC), (SAC), (SAB) lần lượt tại A',B',C'. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}+\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ là

A. $\frac{9}{8}$. **B.** $\frac{28}{27}$. **C.** $\frac{62}{27}$. **D.** $\frac{13}{8}$

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $O.xyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn $5\left(a^2+b^2+c^2\right)=9\left(ab+2bc+ca\right)$ và $Q=\frac{a}{b^2+c^2}-\frac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M,N,P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia $Ox;Oy;Oz$. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+4y+4z-12=0$. **B.** $3x+12y+12z-1=0$.

C. $x+4y+4z=0$. **D.** $3x+12y+12z+1=0$.

Câu 29. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính $AB=2R$. Gọi C là một điểm di động trên (T). Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) lấy điểm S sao cho $SA=R$. Hạ $AH\perp SB$ tại H, $AK\perp SC$ tại K. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích tứ diện $SAHK$.

A. $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{5}}{75}$. **B.** $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{5}}{25}$. **C.** $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{3}}{27}$. **D.** $V_{\max}=\frac{R^3\sqrt{3}}{9}$.

.**Câu 30.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N di động trên các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác AMN. Tính $T=\frac{S_1}{S_2}$.

A. $T=\frac{8}{9}$. **B.** $T=\frac{9}{8}$. **C.** $T=\frac{8}{7}$. **D.** $T=\frac{9}{7}$.

Câu 31. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$với độ dài tất cả các cạnh đều bằng a. Xét tất cả các đoạn thẳng song song với mặt phẳng $(ABB'A')$ và có một đầu E nằm trên đường chéo $A'C$ của mặt bên $AA'C'C$, còn đầu kia F nằm trên đường chéo BC' của mặt bên $BB'C'C$. Hãy tìm độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng này.

A. $\frac{2a}{5}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a}{5}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Câu 32. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng b. Góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp bằng α. Tìm α để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất.

A. $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **B.** $\alpha = \arccos\left(\sqrt{3}\right)$. **C.** $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Điểm M và N lần lượt thay đổi trên các cạnh BB' và DD' sao cho $(MAC)\perp(NAC)$ và $BM = x,\ DN = y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ACMN$.

A. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = b$ và vuông góc với $(ABCD)$. Điểm M thay đổi trên cạnh CD với $CM = x(0 \le x \le a)$. H là hình chiếu vuông góc của S trên BM. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABH$ theo a,b.

A. $\frac{a^2b}{12}$. **B.** $\frac{a^2b}{24}$. **C.** $\frac{a^2b}{8}$. **D.** $\frac{a^2b}{18}$.

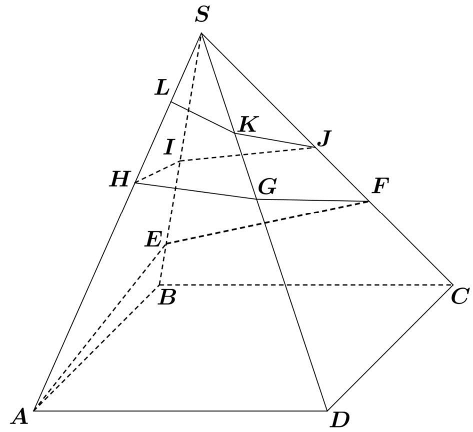
Câu 35. Cho tứ diện đều $SABC$ có D là điểm thuộc cạnh AB sao cho $BD = 2AD$, I là trung điểm của SD. Một đường thẳng d thay đổi qua I cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Biết $AB = 2a$. Khi d thay đổi, thể tích khối chóp $S.MNC$ nhỏ nhất bằng $\left(\frac{m}{n}\right)^3 . \frac{a^3}{\sqrt{m}}$, với $m,n \in \mathbb{N},\ (m,n) = 1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=4$. **B.** $m+n=6$. **C.** $m+n=7$. **D.** $m+n=5$.

Câu 36. Cắt một khối trụ tròn có chiều cao h bởi một mặt phẳng song song với hai mặt đáy ta thu được hai khối tròn nhỏ. Một trong hai khối đó ngoại tiếp một lăng trụ đứng thể tích V có đáy là tam giác có chu vi là p. Khối còn lại ngoại tiếp một khối nón có bán kính là R . Tìm giá trị của R sao cho thể tích của khối nón là lớn nhất?

A. $R = \frac{\pi p^3}{162V}$. **B.** $R = \frac{hp^3}{162V}$. **C.** $R = \frac{\pi p^3}{162}$. **D.** $R = \frac{p^3}{162V}$.

Câu 37. Người ta cần trang trí một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $200\,\text{m}$, $\widehat{ASB} = 15^0$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$ trong đó điểm L cố định và $LS = 40\text{m}$.



Khi đó cần dùng ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí?

A. $40\sqrt{67}+40$ mét. **B.** $20\sqrt{111}+40$ mét. **C.** $40\sqrt{31}+40$ mét. **D.** $40\sqrt{111}+40$ mét.

Câu 38. Chohình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng 1. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của hình chóp, cắt ba cạnh bên SA,SB,SC lần lượt tại D,E,F. Tìm giá trị lớn nhất P_{max} của $P=\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}$.

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. G là trung điểm của BD', mặt phẳng (P) thay đổi qua G cắt $AD',CD',B'D'$ tương ứng tại H,I,K. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{1}{D'H.D'I}+\frac{1}{D'I.D'K}+\frac{1}{D'K.D'H}$.

A. $\frac{8}{3a^2}$. **B.** $\frac{16a^2}{3}$. **C.** $\frac{8a^2}{3}$. **D.** $\frac{16}{3a^2}$.

Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC=a, AD'=b, CD'=c$. Tìm thể tích lớn nhất của hình chữ nhật đã cho khi a,b,c thay đổi, còn chu vi tam giác ACD' không đổi.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$, $AB=x, CD=y,$ các cạnh còn lại của tứ diện bằng $a\sqrt{2},$ x,y thay đổi sao cho $x+y=2a.$ Khi V_{ABCD} đạt giá trị nhỏ nhất, tính cosin của góc giữa (ABC) và (ABD).

Câu 42. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA=a$ và vuông góc với mp$(ABCD)$. M là điểm di động trên đoạn BC và $BM=x\left(0\le x\le a\right)$, K là hình chiếu của S trên DM.

a) Tính độ dài đoạn SK theo a và x.

b) Tìm min của đoạn SK.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tứ giác $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Điểm C' di động trên cạnh SC (C' khác điểm S và C). Mặt phẳng (R) chứa đường thẳng AC' và song song với BD. Mặt phẳng (R) cắt đường thẳng SB, SD lần lượt tại B', D'.

1/ Gọi F là giao điểm của AD' với $B'C'$. Chứng minh rằng F luôn di động trên một đường thẳng cố định khi C' di động trên SC.

2/ Xác định vị trí của điểm C' sao cho tổng $\frac{SC'}{CC'}+3\frac{BB'}{SB'}+\frac{5}{2}.\frac{SD'}{DD'}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 44. Trong mặt phẳng α cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a; BC = 2a$. Các điểm M, N lần lượt di chuyển trên các đường thẳng m, n vuông góc với mặt phẳng (α) tại A, B sao cho $DM \perp CN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khối tứ diện $CDMN$.

Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, AB song song với CD, $AB = 2CD$, các cạnh bên có độ dài bằng 1. Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua I và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{SN^2} + \frac{1}{SP^2} + \frac{1}{SQ^2}$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) thay đổi nhưng luôn chứa AE cắt SB, SD lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của M, N trên các cạnh SB, SD sao cho $\frac{SM}{SB} + \frac{SN}{SD}$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 47. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2}$

BẢNG ĐÁP ÁN

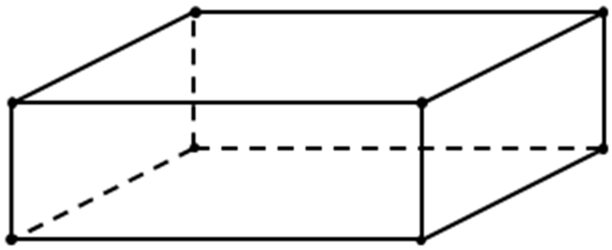
1.B	2.C	3.C	4.C	5.B	6.A	7.C	8.D	9.B	10.C
11.A	12.D	13.D	14.D	15.C	16.C	17.B	18.A	19.D	20.C
21.D	22.A	23.B	24.B	25.A	26.C	27.B	28.B	29.A	30.B
31.B	32.A	33.A	34.A	35.D	36.B	37.C	38.B	39.A	

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. Một khối gỗ hình hộp chữ nhật có kích thước thoả mãn: Tổng của chiều dài và chiều rộng bằng $12\,\text{cm}$; tổng của chiều rộng và chiều cao là $24\,\text{cm}$. Hỏi thể tích lớn nhất mà khối hộp có thể đạt được là bao nhiêu?

A. $288\,\text{cm}^3$. **B.** $384\sqrt{3}\,\text{cm}^3$. **C.** $1782\,\text{cm}^3$. **D.** $864\,\text{cm}^3$.

Lời giải



Gọi chiều dài, chiều rộng và chiều cao của khối hộp chữ nhật lần lượt là x, y, z $(x,y,z>0)$.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} x+y=12 \\ y+z=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12-y \\ z=24-y \end{cases}$. Vì $x,z>0$ nên $\begin{cases} y<12 \\ y<24 \end{cases} \Leftrightarrow y<12$.

Thể tích của khối hộp là $V=xyz=(12-y)y(24-y)=y^3-36y^2+288y$.

Xét hàm số $f(y)=y^3-36y^2+288y$ trên khoảng $(0;12)$.

$f'(y)=3y^2-72y+288$;

$f'(y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=12+4\sqrt{3} \\ y=12-4\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

y	$-\infty$	0		$12-4\sqrt{3}$		12	$+\infty$
$f'(y)$			$+$	0	$-$		
$f(y)$		0		$384\sqrt{3}$		0	

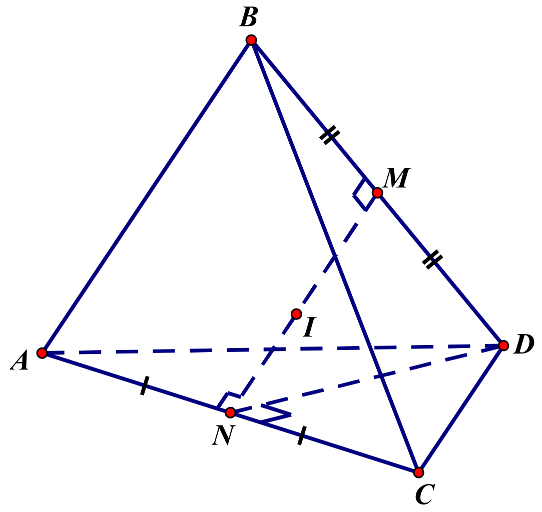
Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{(0;12)} f(y)=384\sqrt{3}$.

Vậy thể tích lớn nhất mà khối hộp có thể đạt được là $384\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

Câu 2. Trong không gian cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là $2;3;3;2$ đôi một tiếp xúc nhau. Mặt cầu nhỏ tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\dfrac{7}{15}$. **B.** $\dfrac{3}{7}$. **C.** $\dfrac{6}{11}$. **D.** $\dfrac{5}{9}$.

Lời giải



Gọi A,B,C,D lần lượt là tâm của bốn mặt cầu nói trên và $I, x(>0)$ lần lượt là tâm, bán kính mặt cầu cần tìm.

Mặt cầu I tiếp xúc ngoài với bốn mặt cầu nêu trên nên $\begin{cases} IA = IC = x+2 \\ IB = ID = x+3 \end{cases}$. Do đó, I nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng trung trực của AC, BD.

Vì bốn mặt cầu đôi một tiếp xúc nên $DA = DC = BA = BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC. Khi đó, MN là đoạn vuông góc chung của AC và BD nên I thuộc đường thẳng MN.

Ta có, $DN = \sqrt{DC^2 - CN^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}, MN = \sqrt{DN^2 - DM^2} = \sqrt{21-9} = 2\sqrt{3}$.

Xét ΔAIN vuông tại N và $IN = \sqrt{(x+2)^2 - 2^2}$.

Xét ΔBIM vuông tại M có $IM = \sqrt{(x+3)^2 - 3^2}$.

Vì $IM + IN \geq MN$ nên dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $I \in MN$.

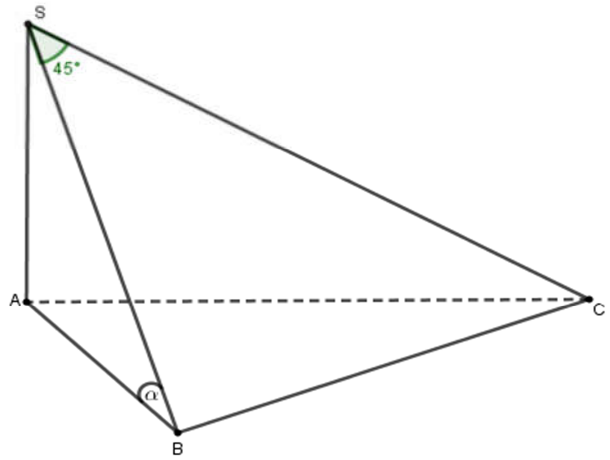
Khi đó, $IM + IN = MN \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2 - 2^2} + \sqrt{(x+3)^2 - 3^2} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow 11x^2 + 60x - 36 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6}{11}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SB = a\sqrt{2}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau. Góc giữa SC và (SAB) bằng 45^0, góc giữa SB và mặt đáy bằng α $(0 < \alpha < 90^0)$. Xác định α để thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $\alpha = 60^0$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\alpha = 45^0$. **D.** $\alpha = 70^0$.

Lời giải



Ta thấy $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC) (1)$

Theo giả thiết thì $(SAB) \perp (SBC) (2)$

Từ và ta có $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB$ và $BC \perp SB$

Góc giữa SC và (SAB) là góc $\widehat{BSC} = 45^0$. Trong tam giác vuông cân SBC có $SB = BC = a\sqrt{2}$.

Tam giác vuông SAB cạnh $AB = SB.\cos\alpha = a\sqrt{2}\cos\alpha$; $SA = SB.\sin\alpha = a\sqrt{2}.\sin\alpha$

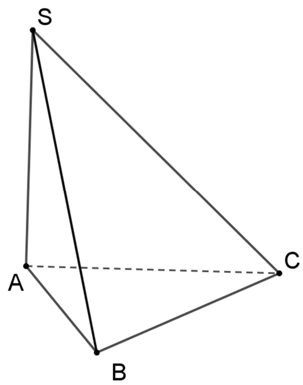
$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{6}.\sqrt{2}.a^3.\sin 2\alpha \le \frac{\sqrt{2}}{6}.a^3$

$V_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{6}.a^3 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1\left(0 < \alpha < 90^0\right) \Rightarrow \alpha = 45^0$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SB = a\sqrt{2}$, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau. Góc giữa SC và (SAB) bằng 45^o, góc giữa SB và mặt đáy bằng $\alpha, \left(0^o < \alpha < 90^o\right)$. Xác định α để thể tích khối chóp $S.ABC$ lớn nhất.

A. $\alpha = 60^o$. **B.** $\alpha = 30^o$. **C.** $\alpha = 45^o$. **D.** $\alpha = 70^o$.

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

Mà $(SAB) \perp (SBC)$, $(ABC) \perp (SBC) = BC$

Nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

$\Rightarrow$ Góc giữa SC và (SAB) là $\widehat{CSB} = 45^o$.

$\Rightarrow BC = SB = a\sqrt{2}$.

Góc giữa SB và mặt đáy là $\widehat{SBA} = \alpha \Rightarrow AB = SB.\cos\alpha$; $SA = SB.\sin\alpha$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là:

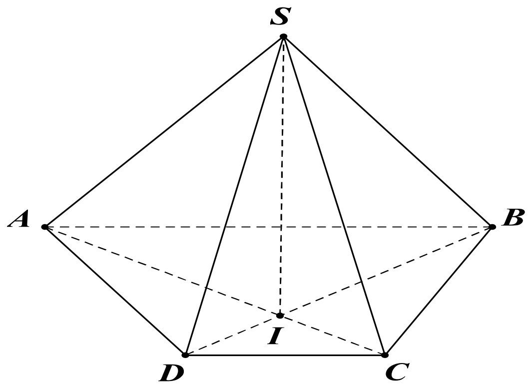
$V=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}SA.AB.\text{BC}=\frac{1}{6}SB^3.\sin\alpha.\cos\alpha=\frac{1}{6}a^3\sqrt{2}\sin 2\alpha\le\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2\alpha=1\Leftrightarrow 2\alpha=90^o\Leftrightarrow\alpha=45^o$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân đáy AB, nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Biết rằng $AC\perp BD$ tại I, đồng thời I là hình chiếu của S lên $(ABCD)$ và ΔSAC vuông tại S. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ theo R là

A. R^3. **B.** $\frac{2}{3}R^3$. **C.** $\frac{1}{2}R^3$. **D.** $\frac{3}{4}R^3$

Lời giải



Ta có thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.SI.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.SI.\frac{1}{2}AC.BD=\frac{1}{6}SI.AC^2$

Tam giác SAC vuông tại S, đường cao SI nên $SI^2=IA.IC$, do đó

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{6}\sqrt{IA.IC}.AC^2\le\frac{1}{6}.\frac{IA+IC}{2}.AC^2=\frac{1}{12}.AC^3\le\frac{1}{12}.(2R)^3=\frac{2}{3}R^3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases}IA=IC\\AC=2R\end{cases}\Rightarrow ABCD$ là hình vuông.

Vậy thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{2}{3}R^3$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha):x-y-4=0$, mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+y^2+z^2=1$ và mặt cầu $(S_2):(x-4)^2+(y-5)^2+z^2=4$. Điểm A thuộc mặt phẳng (α), điểm M thuộc mặt cầu (S_1), điểm N thuộc mặt cầu (S_2). Khi đó $AM+AN$ nhỏ nhất bằng

A. 5. **B.** 8. **C.** 11. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

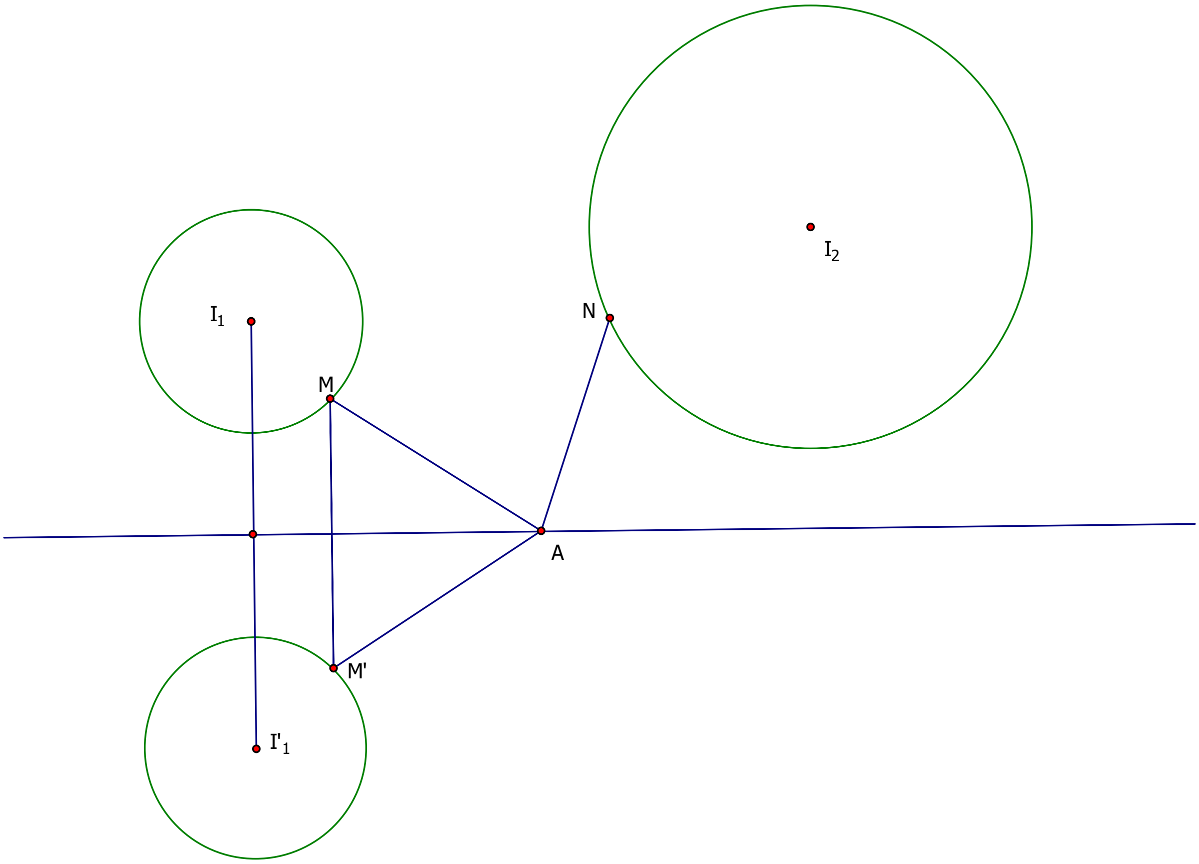
Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(1;0;0)$, bán kính $R_1=1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(4;5;0)$, bán kính $R_2=2$.

$d(I_1,(\alpha))=\frac{3\sqrt{2}}{2}>R_1$

$d(I_2,(\alpha))=\frac{5\sqrt{2}}{2}>R_2$

Ta thấy (S_1) và (α) không có điểm chung, (S_2) và (α) không có điểm chung, I_1 và I_2 nằm cùng phía so với (α)



Phép đối xứng qua mặt phẳng (α) biến mặt cầu (S_1) thành mặt cầu (S_1'), biến điểm M thành điểm M', biến điểm I_1 thành điểm I_1'.

Ta có $AM + AN = AM' + AN \geq M'N$

Dấu bằng xảy ra khi A, M', N thẳng hàng.

Đoạn thẳng $M'N$ ngắn nhất khi M', N thuộc đoạn thẳng $I_1'I_2$

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $AM + AN$ là $P = I_1'I_2 - (R_1 + R_2)$

Đường thẳng d đi qua I_1 và vuông góc với (α) là $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Giao điểm của đường thẳng d và (α) là $B\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right)$

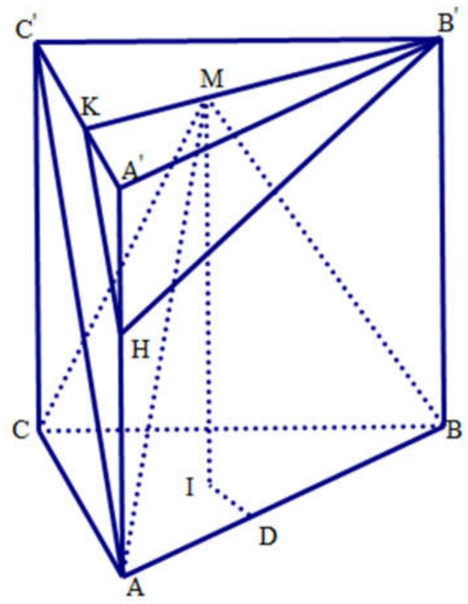
B là trung điểm của $I_1I_1' \Rightarrow I_1'(4; -3; 0)$

Vậy $P = 8 - (1 + 2) = 5$.

Câu 7. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 6; BC = 12; \widehat{ABC} = 60^0$. Thể tích khối chóp $C'.ABB'A'$ bằng 216. Gọi M là điểm nằm trong tam giác $A'B'C'$ sao cho tổng diện tích các mặt bên của hình chóp $M.ABC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính cosin góc giữa 2 đường thẳng $B'M$, AC'?

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu của M trên (ABC); D,E,F lần lượt là hình chiếu của I trên AB,BC,CA. Đặt $x=ID,\ y=IE,\ 2a=AB,\ 2b=BC,\ 2c=CA,\ h=AA'=MI$.

Khi đó $S_{ABC}=S_{IAB}+S_{IAC}+S_{IBC}=ax+by+cz$

Diện tích toàn phần của hình chóp $M.ABC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $S=S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCA}$ nhỏ nhất.

Có $MD=\sqrt{MI^2+ID^2}=\sqrt{h^2+x^2}\Rightarrow S_{MAB}=\dfrac{1}{2}AB.MD=a\sqrt{h^2+x^2}=\sqrt{(ah)^2+(ax)^2}$.

Tương tự ta chứng minh được $S=\sqrt{(ah)^2+(ax)^2}+\sqrt{(bh)^2+(by)^2}+\sqrt{(ch)^2+(cz)^2}$

Sử dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$ với $\vec{u}=(ah;ax),\ \vec{v}=(bh;by),\vec{w}=(ch;cz)$ ta được: $S\ge\sqrt{(ah+bh+ch)^2+(ax+by+cz)^2}=\sqrt{(a+b+c)^2h^2+S_{ABC}^2}=const$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{ax}{ah}=\dfrac{by}{bh}=\dfrac{cz}{ch}\Leftrightarrow x=y=z$.

Suy ra I là tâm đương tròn nội tiếp tam giác ABC, nên M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

Tính cosin góc giữa hai đường thẳng $B'M$ và AC'.

$S_{A'B'C'}=S_{ABC}=\dfrac{1}{2}BA.BC.\sin\widehat{ABC}=18\sqrt{3}$

$A'C'^2=AC^2=AB^2+BC^2-2AB.BC\cos 60^0=108\Rightarrow A'C'=6\sqrt{3}$

Do $V_{ABC.A'B'C'}=\dfrac{3}{2}V_{C.ABB'A'}=\dfrac{3}{2}.216=324\Rightarrow AA'.S_{ABC}=324\Rightarrow AA'=6\sqrt{3}$

Gọi K là chân đường phân giác trong của tam giác $A'B'C'$ kẻ từ B', từ K kẻ đường thẳng song song với AC' cắt AA' tại H, khi đó:

$\varphi=(\widehat{B'M,AC'})=(\widehat{B'K,KH})\Rightarrow\cos\varphi=\left|\cos\widehat{B'KH}\right|$

$S_{A'B'C'}=S_{B'KC'}+S_{A'KB'}=\dfrac{1}{2}B'K\left(B'A'+B'C'\right)\sin 30^0\Rightarrow 18\sqrt{3}=\dfrac{18}{4}B'K\Rightarrow B'K=4\sqrt{3}$

Ta có $\dfrac{A'K}{B'K}=\dfrac{A'B'}{C'B'}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow A'K=\dfrac{1}{3}A'C'=2\sqrt{3}$

Do $KH//AC'$ nên $\dfrac{A'H}{A'A}=\dfrac{A'K}{C'A'}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow A'H=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow KH=\sqrt{A'H^2+A'K^2}=2\sqrt{6}, B'H=\sqrt{A'B'^2+A'H^2}=4\sqrt{3}$

Vậy $\cos\varphi = \cos\widehat{B'KH}=\dfrac{B'K^2+KH^2-B'H^2}{2B'K.KH}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

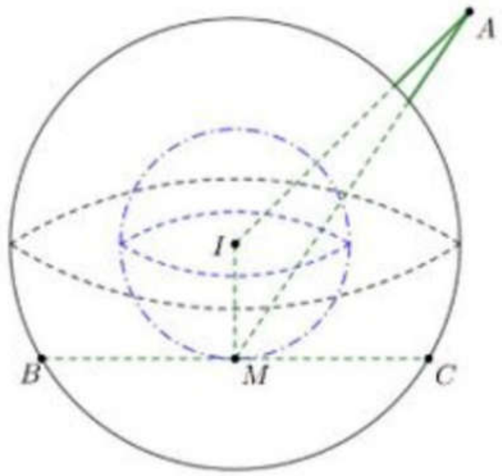
Câu 8. Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1):(x+4)^2+y^2+z^2=16$, $(S_2):(x+4)^2+y^2+z^2=36$ và điểm $A(4;0;0)$.Đường thẳng Δ di động và luôn tiếp xúc với (S_1)đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm B,C. Tam giác ABC có thể có diện tích lớn nhất là

A. $28\sqrt{5}$. **B.** 72. **C.** 48. **D.** $24\sqrt{5}$.

Lời giải

Gọi M là tiếp điểm của Δ và (S_1)

$I(-4;0;0)$ là tâm của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) có bán kính lần lượt $R_1=4$ và $R_2=6$



Ta có $IC=R_2=6, IM=R_1=4\Rightarrow BM=2\sqrt{5}\Rightarrow BC=4\sqrt{5}$

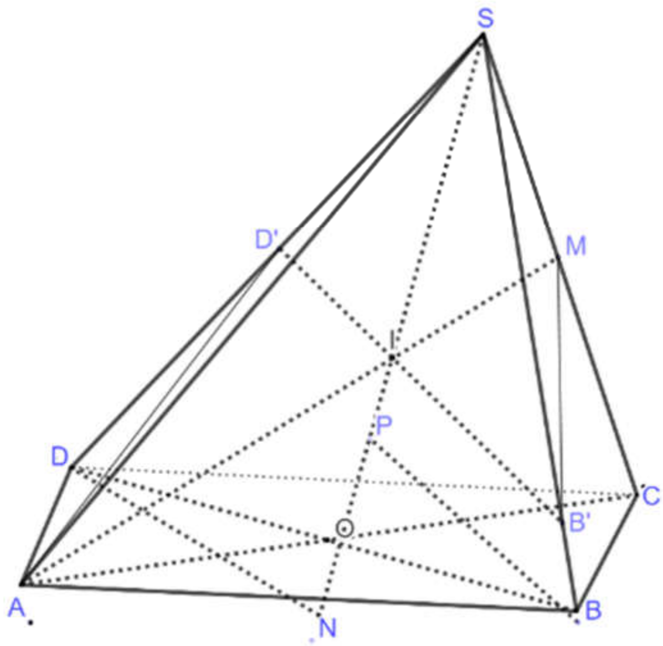
$I(-4;0;0), A(4;0;0)\Rightarrow IA=8$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}CB.d(A,BC)\le\dfrac{1}{2}BC.AM\le\dfrac{1}{2}BC(IA+IM)\le\dfrac{1}{2}.4\sqrt{5}.(4+8)=24\sqrt{5}$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình bình hành, M là trung điểm của cạnh SC. Mặt phẳng (P)chứa AM lần lượt cắt các cạnh SB,SDtại B',D'. Giá trị lớn nhất của $u=\dfrac{SB'}{SB}+\dfrac{SD'}{SD}$ là $\dfrac{a}{b}$, $(a,b\in N^*)$ tối giản. Tích $a.b$ bằng:

A. 3. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 6.

Lời giải



Lấy $I = AM \cap B'D'; O = AC \cap BD$

Ta có S,O,I là các điểm chung của hai mặt phẳng $(SAC);(SBD)$

Suy ra S,O,I thẳng hàng

Và I là trọng tâm các mặt chéo $SAC \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$

Vẽ $BP // B'I; DN // D'I \Rightarrow OP = ON$. Đặt $x = \dfrac{SD}{SD'}; y = \dfrac{SB}{SB'}$

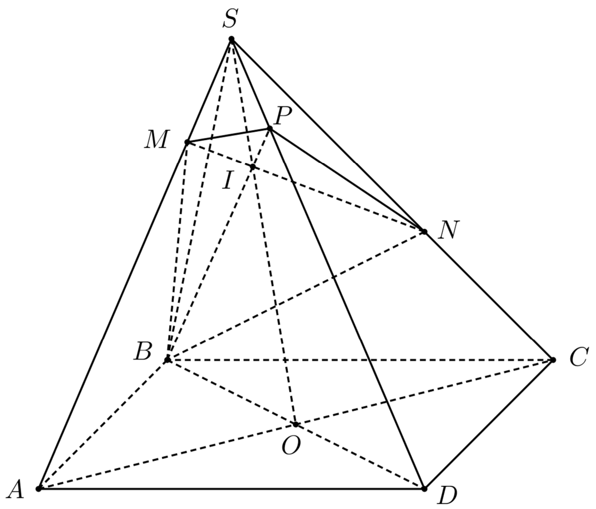
$$\Rightarrow x + y = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{SP}{SI} + \frac{SN}{SI} = \frac{2SO}{SI} = 2.\frac{3}{2} = 3$$

$$\Rightarrow x, y \in [1;2] \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} \geq 3(\frac{2}{x+y})^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 3; b = 4 \Rightarrow a.b = 12$$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI = \dfrac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_{S.MBNP}}{V_{S.ABCD}}$. Giá trị của $m + n$ là

A. $\dfrac{4}{15}$. **B.** $\dfrac{6}{75}$. **C.** $\dfrac{14}{75}$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải



Đặt $\begin{cases} \dfrac{SA}{SM} = x \\ \dfrac{SC}{SN} = y \end{cases}$ với $x,\ y \ge 1$.

Có $\dfrac{SB}{SB} + \dfrac{SD}{SP} = 2\dfrac{SO}{SI} = 2.3 = 6 \Rightarrow \dfrac{SD}{SP} = 5$.

Mà $x + y = 2\dfrac{SO}{SI} = 6 \Rightarrow y = 6 - x$, với $1 \le x \le 5$.

Khi đó $\dfrac{V_{S.BMNP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{x+1+y+5}{x.1.y.5} = \dfrac{12}{20xy} = \dfrac{3}{5xy} = \dfrac{3}{5x(6-x)} = \dfrac{3}{5(6x-x^2)}$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3}{5(6x-x^2)}$, với $1 \le x \le 5$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{3}{5}.\dfrac{2x-6}{(6x-x^2)^2}$. Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [1;5]$.

Khi đó $f(1) = \dfrac{3}{25}$, $f(3) = \dfrac{1}{15}$ và $f(5) = \dfrac{3}{25}$.

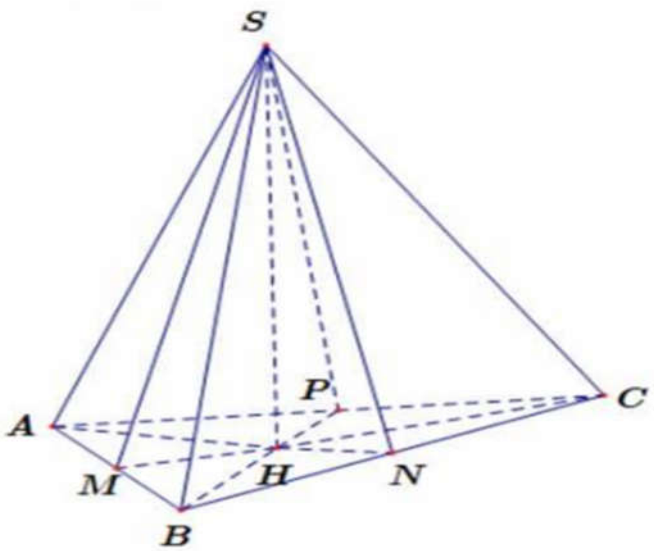
Suy ra $m = \dfrac{3}{25}$ và $n = \dfrac{1}{15}$.

Vậy $m + n = \dfrac{14}{75}$.

Câu 11. Cho hình chóp $SABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{6}$ biết các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau và một trong các cạnh bên bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối chóp $SABC$.

A. 3. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 4.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC), Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên AB, BC, CA thì SM, SN, SP lần lượt là chiều cao của các mặt bên SAB, SBC, SAC.

Vì các mặt bên của hình chóp có diện tích bằng nhau nên $SM = SN = SP$ nên suy ra $HM = HN = HP \Rightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC.

Trường hợp 1: H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Khi đó $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\right)^2} = 4$.

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.4.\left(\sqrt{6}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}$

Trường hợp 2: H là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC.

Do tam giác ABC đều nên giả sử H là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. Khi đó $AH = 3\sqrt{2}, BH = CH = \sqrt{6}$

Nếu $SA = 3\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 0$.

Do đó $SB = SC = 3\sqrt{2} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = 2\sqrt{3}$

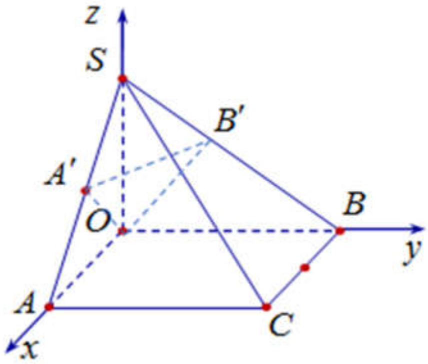
Suy ra $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.2\sqrt{3}.\left(\sqrt{6}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = 3$.

Ta có $3 < 2\sqrt{3}$ Vậy $V_{\min} = 3$

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(4;0;0), B(0;4;0), S(0;0;c)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của O lên SA, SB. Khi góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(OA'B')$ lớn nhất,mệnh đề nào sau đây **đúng?**

A. $c \in (-8;-6)$. **B.** $c \in (-9;-8)$. **C.** $c \in (0;3)$. **D.** $c \in \left(-\frac{17}{2}; -\frac{15}{2}\right)$.

Lời giải



Gọi C là đỉnh thứ tư của hình vuông $AOBC \Rightarrow C(4;4;0)$.

Ta có $\begin{cases} OA' \perp SA \\ OA' \perp AC \end{cases} \Rightarrow OA' \perp (SAC)$ mà $SC \subset (SAC)$ nên $SC \perp OA'$.

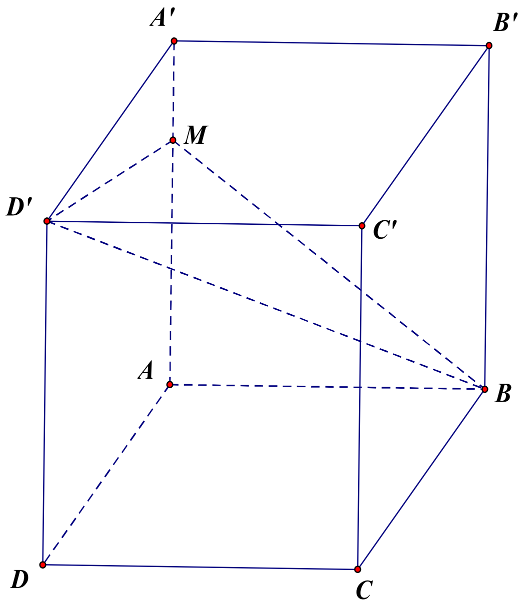
Tương tự $SC \perp OB'$, từ đó suy ra $SC \perp (OA'B')$. Vậy $\overrightarrow{SC} = (4;4;-c)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OA'B')$.

Để góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng $(OA'B')$ lớn nhất thì $d \perp (OA'B')$ hay $\overrightarrow{SC}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_d} = (1;1;2)$. Suy ra $c = -8$.

Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Điểm M nằm trên cạnh AA' sao cho góc $\widehat{BMD'}$ lớn nhất, đặt góc lớn nhất đó là α. Biết $\cos\alpha = \frac{a}{b}; a,b \in \mathbb{Z}; (a,b) = 1; b > 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=1$. **B.** $a+b=2$. **C.** $a+b=3$. **D.** $a+b=4$.

Lời giải



Không mất tính tổng quát, giả sử cạnh hình lập phương có độ dài là 1 và $AM = x, 0 \le x \le 1$. Khi đó, ta có $BM^2 = 1 + x^2; D'M^2 = 1 + (1-x)^2; BD'^2 = 3$.

Vậy $\cos\widehat{BMD'} = \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{1+(x-1)^2}\sqrt{1+x^2}}$

$$\Rightarrow \left(\cos \widehat{BMD'}\right)^2 = \frac{x^2(1-x)^2}{(1+x^2)\left[1+(1-x)^2\right]} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{(1-x)^2}\right)}$$

Ta có $\left[1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\right] \ge \left(1.1+\frac{1}{x}.\frac{1}{1-x}\right)^2 \ge \left[1+\frac{1}{\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2}\right]^2 = 25$.

Vậy $\left(\cos \widehat{BMD'}\right)^2 \le \frac{1}{25}$, suy ra $\cos \widehat{BMD'} \ge \frac{-1}{5}$.

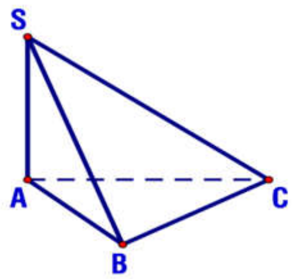
Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{2}$, hay M là trung điểm của AA', khi đó $\cos \widehat{BMD'}$ nhỏ nhất nên góc $\widehat{BMD'}$ lớn nhất.

Vậy $a = -1; b = 5$.

Câu 14. Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông tại B. Biết rằng thể tích của khối chóp là $\frac{5}{24}$ và giá trị nhỏ nhất diện tích toàn phần chóp $S.ABC$ là $p\sqrt{5}+q$ trong đó $p, q \in \mathbb{Q}$. Tính giá trị biểu thức: $p^2+q^2 = ?$

A. $p^2+q^2 = \frac{37}{36}$. **B.** $p^2+q^2 = \frac{37}{9}$. **C.** $p^2+q^2 = \frac{25}{4}$. **D.** $p^2+q^2 = 16$.

Lời giải



Đặt $AB = a$, $BC = b$, $SA = c$, $(a,b,c>0)$, khi đó ta có

$V_{S.ABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{5}{24} \Rightarrow abc = \frac{5}{4}$.

Diện tích toàn phần chóp

$S_{tp} = S_{ABC} + S_{SAB} + S_{SAC} + S_{SBC}$

$= \frac{1}{2}\left(ab + ac + c\sqrt{a^2+b^2} + b\sqrt{a^2+c^2}\right) = \frac{P}{2}$.

Có $\sqrt{a^2+b^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9}{4}(a^2+b^2)} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{5}{4}\right)(a^2+b^2)} \ge \frac{2}{3}\left(a + b\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

Tương tự $\sqrt{a^2+c^2} \ge \frac{2}{3}\left(a + c\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$. Do đó

$P \ge ab + ac + \frac{2}{3}c\left(a + b\frac{\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{2}{3}b\left(a + c\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$= \frac{5}{3}\left(ab + ac + \frac{2bc}{\sqrt{5}}\right) \ge \frac{5}{3}.3.\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{5}}(abc)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{5}$.

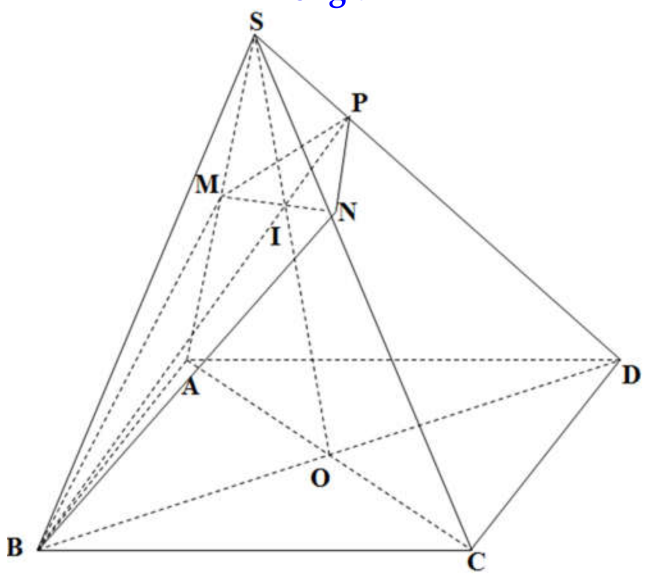
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=1 \\ b=c=\dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Khi đó $S_{tp_{Min}}=\dfrac{5}{4}\sqrt{5}\Rightarrow \begin{cases} p=\dfrac{5}{4} \\ q=0 \end{cases}\Rightarrow p^2+q^2=\dfrac{25}{16}$

Câu 15. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm thuộc đoạn SO sao cho $SI=\dfrac{1}{3}SO$. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua B và I. (α) cắt các cạnh SA, SC, SD lần lượt tại M, N, P. Gọi m, n lần lượt là GTLN, GTNN của $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}$. Tính $\dfrac{m}{n}$?

A. 2. **B.** $\dfrac{7}{5}$. **C.** $\dfrac{14}{75}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải



+) Đặt $a=\dfrac{SA}{SM}$, $b=\dfrac{SB}{SB}=1$, $c=\dfrac{SC}{SN}$, $d=\dfrac{SD}{SP}$.

+) Có $a+c=b+d=2.\dfrac{SO}{SI}=6 \Rightarrow \begin{cases} a+c=6 \\ d=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=6-a \\ d=5 \end{cases}$. Do $\begin{cases} a\ge 1 \\ c\ge 1 \end{cases}\Rightarrow 1\le a\le 5$.

+) Có $\dfrac{V_{S.BMPN}}{V_{S.ABCD}}=\dfrac{a+b+c+d}{4abcd}=\dfrac{12}{4.a.1.c.5}=\dfrac{3}{5a(6-a)}=\dfrac{3}{5(-a^2+6a)}=f(a)$

+) $f'(a)=\dfrac{3(2a-6)}{5(-a^2+6a)^2}$

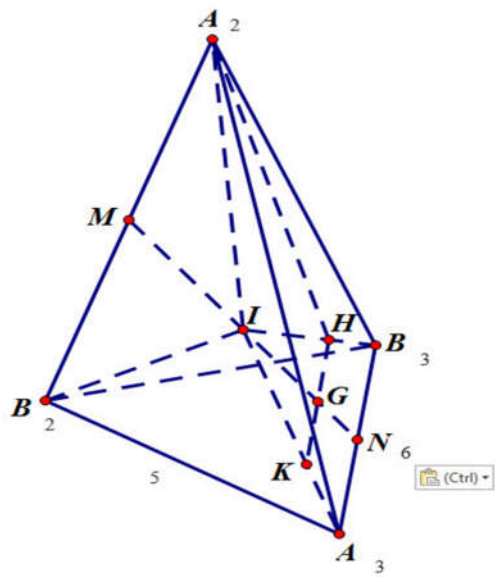
a	1		3		5
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{3}{25}$	$\searrow$	$\frac{1}{15}$	$\nearrow$	$\frac{3}{25}$

$\Rightarrow m+n=\frac{3}{25}+\frac{1}{15}=\frac{14}{75}$.

Câu 16. Trong không gian cho bốn mặt cầu có bán kính lần lượt là 2;3;3;2 đôi một tiếp xúc nhau. Mặt cầu nhỏ tiếp xúc ngoài với cả bốn mặt cầu nói trên có bán kính bằng

A. $\frac{7}{15}$. **B.** $\frac{3}{7}$. **C.** $\frac{6}{11}$. **D.** $\frac{5}{9}$.

Lời giải



Gọi tâm của mặt cầu bán kính bằng 2 lần lượt là A_2,B_2.

Gọi tâm của mặt cầu bán kính bằng 3 lần lượt là A_3,B_3.

Vì bốn mặt cầu đôi một tiếp xúc nhau nên ta có $A_2B_2=4, A_2A_3=A_2B_3=B_2A_3=B_2B_3=5, A_3B_3=6$.

Mặt cầu tiếp xúc ngoài với bốn mặt cầu đã cho có tâm I bán kính R. Khi đó ta có

$$\begin{cases} IA_2=IB_2=R+2 \\ IA_3=IB_3=R+3 \end{cases}$$

Suy ra điểm I nằm trên hai mặt phẳng trung trực của đoạn A_2B_2 và A_3B_3. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của A_2B_2 và A_3B_3. Dễ dàng chứng minh được $(MA_3B_3),(NA_2B_2)$ lần lượt là mặt phẳng trung trực của A_2B_2 và A_3B_3. Từ đó ta suy ra $I\in MN$.

Ta có $MN=2\sqrt{3}$, đặt $IM=x, IN=y$ với $x>0, y>0$.

Suy ra $\begin{cases} x+y=2\sqrt{3} \\ (R+2)^2=x^2+4 \\ (R+3)^2=y^2+9 \end{cases}$

Từ đó rút ra được $y=\dfrac{R\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{6}$.

Trên IA_3, IB_3 lần lượt lấy K, H sao cho $IH = IK = R+2$.

Giải tam giác A_2IB_3 ta có $A_2H=\sqrt{24.\dfrac{R+2}{R+3}}$.

Gọi G là giao điểm của KH và IN.

Ta có $\dfrac{GH}{NB_3}=\dfrac{IG}{IN}=\dfrac{IH}{IB_3}=\dfrac{R+2}{R+3}\Rightarrow GH=3.\dfrac{R+2}{R+3}$ và $GN=\dfrac{R\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{6(R+3)}$.

Xét tam giác MA_2H vuông tại M, ta có $MH^2=A_2H^2-A_2M^2$.

Xét tam giác MGH vuông tại G, ta có $MG=\sqrt{MH^2-GH^2}=\sqrt{A_2H^2-A_2M^2-GH^2}=\sqrt{24.\dfrac{R+2}{R+3}-4-9.\left(\dfrac{R+2}{R+3}\right)^2}$.

Khi đó ta có

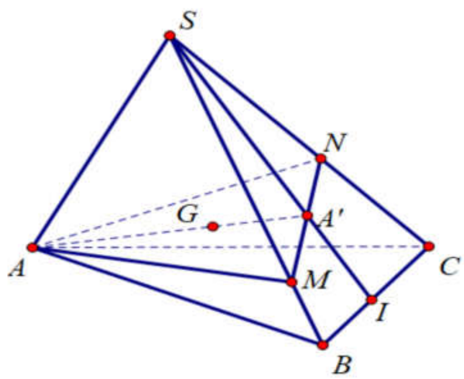
$$\sqrt{24.\dfrac{R+2}{R+3}-4-9.\left(\dfrac{R+2}{R+3}\right)^2}+\dfrac{R\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{6(R+3)}=2\sqrt{3}.$$

Kiểm tra đáp án ta được $R=\dfrac{6}{11}$ thỏa mãn.

Câu 17. Cho tứ diện $SABC$ và G là trọng tâm của tứ diện. Một mặt phẳng (α) quay quanh AG cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại M và N (M, N không trùng S). Gọi V là thể tích tứ diện $SABC$, V_1 là thể tích tứ diện $SAMN$ và gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{V_1}{V}$. Hãy tính $m+n$.

A. $m+n=1$. **B.** $m+n=\dfrac{17}{18}$. **C.** $m+n=\dfrac{18}{19}$. **D.** $m+n=\dfrac{19}{20}$.

Lời giải



Gọi A' là trọng tâm của tam giác SBC, khi đó $A'\in AG$ nên M, N, A' thẳng hàng.

Đặt $\dfrac{SM}{SB}=x, \dfrac{SN}{SC}=y$ với $0<x, y\le 1$.

Ta có $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC}=xy$.

Vì $\begin{cases}\dfrac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBI}}=\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SA'}{SI}=\dfrac{2}{3}x\\ \dfrac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SCI}}=\dfrac{SN}{SC}\cdot\dfrac{SA'}{SI}=\dfrac{2}{3}y\end{cases}$ nên $\dfrac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBC}}+\dfrac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBI}}+\dfrac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SCI}}\right)=\dfrac{1}{3}(x+y)$.

Mặt khác $\dfrac{S_{\Delta SMA'}}{S_{\Delta SBC}}+\dfrac{S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{S_{\Delta SMA'}+S_{\Delta SNA'}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{SM}{SB}\cdot\dfrac{SN}{SC}=xy$ nên $\dfrac{1}{3}(x+y)=xy$.

Do đó $y=\dfrac{x}{3x-1}$, suy ra $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{x^2}{3x-1}$.

Do $0<x,y\le 1$ nên từ $y=\dfrac{x}{3x-1}$ ta suy ra $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{3x-1}$ với $\dfrac{1}{2}\le x\le 1$.

$f'(x)=\dfrac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$

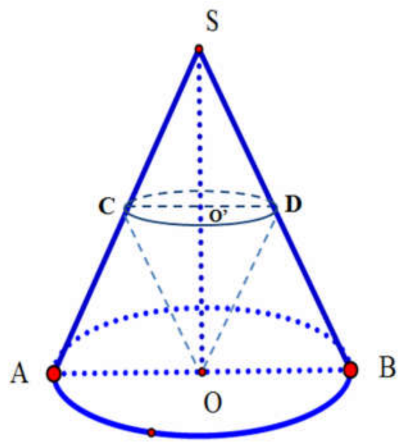
$f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=\dfrac{2}{3}$.

Vì $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2},f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{9},f(1)=\dfrac{1}{2}$ nên ta được $m=\dfrac{1}{2},n=\dfrac{4}{9}$ hay $m+n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{9}=\dfrac{17}{18}$.

Câu 18. Cho hình nón (H) có đỉnh S, chiều cao là h và mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy của khối nón. Một khối nón (T) có đỉnh là tâm của đường tròn đáy của (H) và đáy của (T) là thiết diện của (P) với hình nón. Thể tích lớn nhất của (T) là bao nhiêu?

A. $\dfrac{4\pi R^2h}{81}$. **B.** $\dfrac{4\pi R^2h}{27}$. **C.** $\dfrac{\pi R^2h}{24}$. **D.** $\dfrac{\pi R^2h^2}{3}$.

Lời giải



Gọi O và O' lần lượt là tâm của đường tròn đáy của hình nón (H) và (T).

h, R là chiều cao và bán kính của hình nón (H).

h', R' là chiều cao và bán kính của hình nón (T) $(0<h'<h)$.

Vì mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng đáy của khối nón nên từ hình vẽ ta có:

+ $\dfrac{SO'}{SO}=\dfrac{CO'}{AO}=\dfrac{R'}{R}\Leftrightarrow\dfrac{R'}{R}=\dfrac{h-h'}{h}\Rightarrow R'=R.\left(1-\dfrac{h'}{h}\right)$.

+ $V_{(T)}=\dfrac{1}{3}\pi R'^2h'=\dfrac{1}{3}\pi R^2\left(1-\dfrac{h'}{h}\right)^2h'$.

Xét hàm số $f(h')=\left(1-\dfrac{h'}{h}\right)^2h'\Rightarrow f'(h')=1-\dfrac{4h'}{h}+\dfrac{3h'^2}{h^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h'=h\ \ (ktm)\\ h'=\dfrac{h}{3}\ (tm)\end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

h'	0	$\frac{h}{3}$	h
$f'(h')$	$+$	0	$-$
$f(h')$	↗	$f\left(\frac{h}{3}\right)$	↘

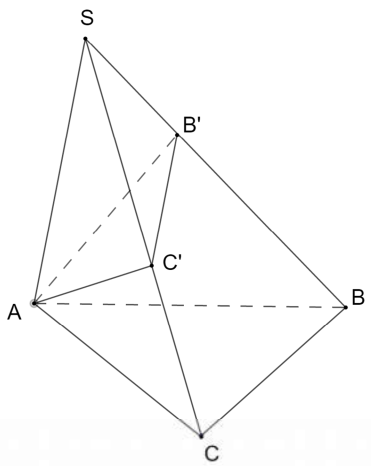
Từ bảng biến thiên ta có hàm số $f(h')$ đạt giá trị lớn nhất là $f\left(\frac{h}{3}\right)=\frac{4h}{27}$.

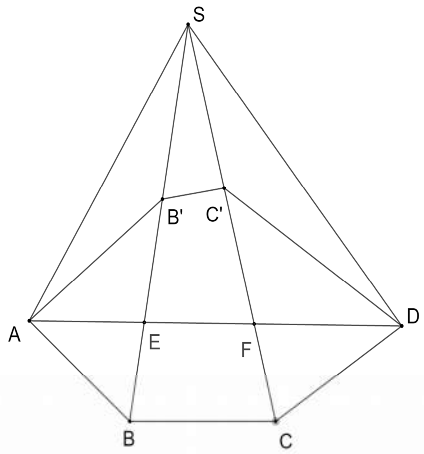
Vậy thể tích của khối nón (T) đạt giá trị lớn nhất $V_{(T)}=\frac{4\pi R^2h}{81}$.

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB=1,\ \widehat{ASB}=30^0$. Lấy các điểm B', C' lần lượt thuộc các cạnh SB, SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tính chu vi đó.

A. $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$. **B.** $\sqrt{3}-1$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $1+\sqrt{3}$.

Lời giải





Trải các mặt của hình chóp $S.ABC$ ra mặt phẳng (SBC) thì chu vi tam giác $AB'C'$ bằng $AB'+B'C'+C'A=AB'+B'C'+C'D\geq AD$.
Dấu "=" xảy ra khi $B'\equiv E, C'\equiv F$.

Ta có $AB=1,\ \widehat{ASB}=30^0\Rightarrow SA=SB=\frac{1}{2\sin 15^0}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

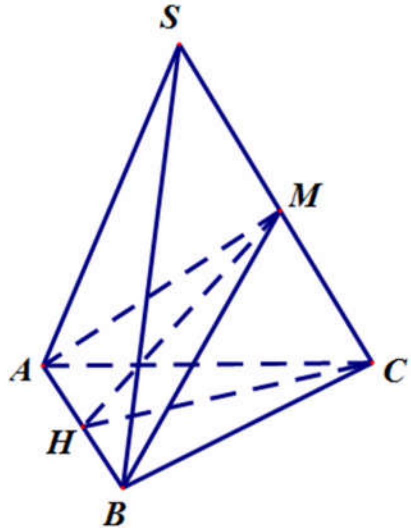
Lại có chóp $S.ABC$ đều, $\widehat{ASB}=30^0\Rightarrow\widehat{ASD}=90^0\Rightarrow AD=SA\sqrt{2}=1+\sqrt{3}$.

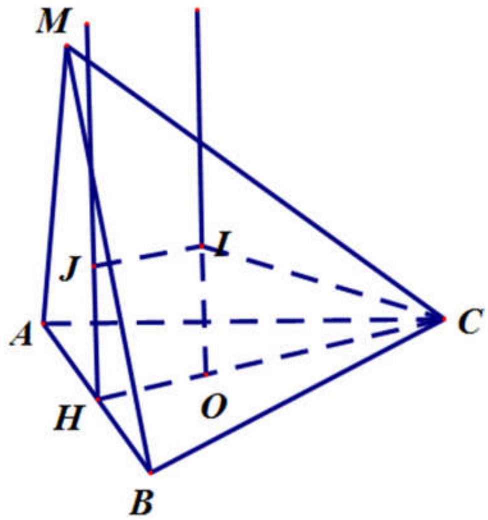
Vậy chu vi tam giác $AB'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $1+\sqrt{3}$.

Câu 20. Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC đều cạnh bằng $8cm$ và một điểm S di động ngoài mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB luôn có diện tích bằng $16\sqrt{3}cm^2$, với M là trung điểm của SC. Gọi (S) là mặt cầu đi qua bốn đỉnh M, A, B, C. Khi thể tích hình chóp $S.ABC$ lớn nhất, tính bán kính nhỏ nhất của (S):

A. $\frac{16\sqrt{6}}{9}cm$. **B.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}cm$. **C.** $\frac{4\sqrt{15}}{3}cm$. **D.** $\frac{4\sqrt{39}}{3}cm$.

Lời giải





Gọi H là trung điểm cạnh AB, ta có: $CH \perp AB$.

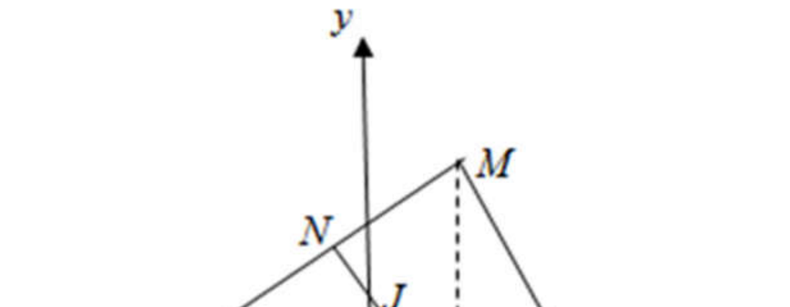
Ta có: $d\left(S,(ABC)\right) = 2d\left(M,(ABC)\right) \Rightarrow V_{SABC} = 2V_{MABC}$

Mà $V_{MABC} = V_{CMAB} = \frac{1}{3}S_{\triangle MAB}.d\left(C,(MAB)\right) = \frac{1}{3}.16\sqrt{3}.d\left(C,(MAB)\right) \le \frac{1}{3}.16\sqrt{3}.CH$

Do đó V_{SABC} lớn nhất khi và chỉ khi $d\left(C,(MAB)\right) = CH$ hay $CH \perp (MAB)$.

Gọi J, O lần lượt là tâm hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC. Dựng hai trục của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác MAB và tam giác ABC cắt nhau tại I. Khi đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp đi qua 4 điểm A, B, C, M và bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, M là $R = \sqrt{OC^2 + OI^2} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + JH^2}$

Do $S_{\triangle MAB} = 16\sqrt{3}$, $AB = 8 \Rightarrow d\left(M, AB\right) = 4\sqrt{3}$



Chọn hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có $H(0;0)$, $A(-4;0)$, $B(4;0)$, $M\left(a;4\sqrt{3}\right)$.

Đường trung trục của đoạn thẳng AM đi qua điểm $N\left(\frac{a-4}{2};2\sqrt{3}\right)$ và có một vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AM} = \left(a+4;4\sqrt{3}\right)$ nên có phương trình là $(a+4)\left(x - \frac{a-4}{2}\right) + 4\sqrt{3}\left(y - 2\sqrt{3}\right) = 0$

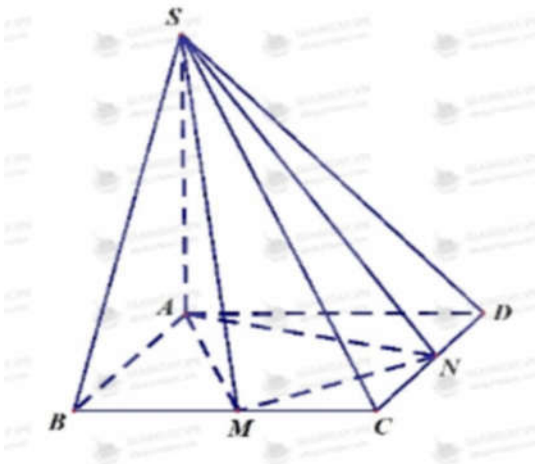
Suy ra $J\left(0;\frac{a^2+32}{8\sqrt{3}}\right) \Rightarrow JH = \frac{a^2+32}{8\sqrt{3}} \ge \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $R_{\min} = \sqrt{\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, $SA = a\sqrt{3}$. Và SA vuông góc với đáy. M và N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc hai cạnh BC và CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^0$. Tính tỉ số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$

A. $-2+2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{2}}{6}$. **C.** $2\sqrt{2}-1$. **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Ta có $V_{S.AMN} = \frac{1}{3} SA.S_{AMN} = \frac{a\sqrt{3}}{3} S_{AMN}$.

Do đó thể tích của khối chóp $S.AMN$ phụ thuộc vào diện tích tam giác AMN

Đặt $BM = x, DN = y; x, y \in [0;a]$. ΔCMN vuông tại C nên $MN^2 = CM^2 + CN^2$ hay $MN^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2$

Áp dụng định lý hàm số cosin cho ΔAMN ta có: $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM.AM\cos\widehat{MAN}$ $= 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2+x^2)(a^2+y^2)}$

Suy ra $(a-x)^2 + (a-y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2 - \sqrt{2(a^2+x^2)(a^2+y^2)}$

$\Leftrightarrow (ax+ay)^2 = (a^2-xy)^2 \Leftrightarrow ax+ay = a^2 - xy \Leftrightarrow y = \frac{a^2-ax}{a+x}$

$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{CMN} = \frac{1}{2}(a^2 - xy) = \frac{a}{2}.\frac{a^2+x^2}{x+a}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2+a^2}{x+a}$ trên đoạn $[0;a]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2+2ax-a^2}{(x+a)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = (\sqrt{2}-1)a$.

Ta lại có $f(0) = f(a) = a; f((\sqrt{2}-1)a) = 2(\sqrt{2}-1)a$

Suy ra $\max\limits_{[0;a]} f(x) = a; \min\limits_{[0;a]} f(x) = 2(\sqrt{2}-1)a \Rightarrow a^2(\sqrt{2}-1) \le S_{AMN} \le \frac{a^2}{2}$.

Vậy tỉ số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $S.AMN$ là $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Câu 22. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có tổng diện tích tất cả các mặt là 36, độ dài đường chéo AC' bằng 6. Hỏi thể tích của khối hộp chữ nhật lớn nhất là bao nhiêu?

A. $8\sqrt{2}$. **B.** $6\sqrt{6}$. **C.** $24\sqrt{3}$. **D.** $16\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi độ dài các cạnh của khối hộp chữ nhật là $AB = a, AD = b, AA' = c$.

Vì tổng diện tích tất cả các mặt là 36 nên $2ab + 2bc + 2ca = 36$ hay $ab + bc + ca = 18(1)$.

Lại có: độ dài đường chéo AC' bằng 6 nên $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = 6 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 = 36(2)$.

Từ và suy ra:

$$\begin{cases} ab+bc+ca=18 \\ a^2+b^2+c^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca=18 \\ (a+b+c)^2=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab+bc+ca=18 \\ a+b+c=6\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc=18-ab-ca \\ b+c=6\sqrt{2}-a \end{cases}$$

Vì: $(b+c)^2 \ge 4bc$ nên $\left(6\sqrt{2}-a\right)^2 \ge 4\left(18-a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right) \Leftrightarrow a^2 - 4\sqrt{2}a \le 0 \Leftrightarrow 0 < a \le 4\sqrt{2}$

Thể tích khối hộp chữ nhật là:

$V = abc = a\left(18 - a(b+c)\right) = a\left(18 - a\left(6\sqrt{2}-a\right)\right) = 18a - 6\sqrt{2}a^2 + a^3$ với $0 < a \le 4\sqrt{2}$

Xét hàm số: $f(t) = t^3 - 6\sqrt{2}t^2 + 18t$, với $0 < a \le 4\sqrt{2}$.

$f'(t) = 3t^2 - 12\sqrt{2}t + 18$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3\sqrt{2} \\ t = \sqrt{2} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

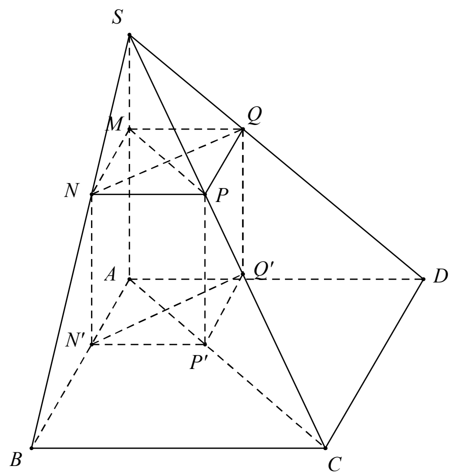
t	0		$\sqrt{2}$		$3\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$		↗	$8\sqrt{2}$	↘	0	↗	$8\sqrt{2}$

Vậy $MaxV = f\left(\sqrt{2}\right) = 8\sqrt{2}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường cao $SA = 2a$. $MNPQ$ là thiết diện song song với đáy, $M \in SA$ và $AM = x$. Xét hình trụ có đáy là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNPQ$ và đường sinh MA. Giá trị của x để thể tích khối trụ lớn nhất là

A. $x = \frac{a}{3}$. **B.** $x = \frac{2a}{3}$. **C.** $x = \frac{a}{2}$. **D.** $x = \frac{3a}{4}$.

Lời giải



Ta có:

$MNPQ$ là thiết diện song song với đáy $\Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Vì $MN//AB \Rightarrow \frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA} \Rightarrow MN=\frac{AB.SM}{SA}=\frac{a\left(2a-x\right)}{2a}=a-\frac{x}{2}$.

Gọi R là bán kính hình trụ, ta có: $R=\left(a-\frac{x}{2}\right).\frac{\sqrt{2}}{2}$

Thể tích hình trụ $V=\pi.R^2.x=\pi.\left[\left(a-\frac{x}{2}\right).\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2.x=\pi\left(\frac{x^3}{8}-\frac{ax^2}{2}+\frac{a^2x}{2}\right)$

Xét $f\left(x\right)=\frac{x^3}{8}-\frac{ax^2}{2}+\frac{a^2x}{2} \Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{3x^2}{8}-ax+\frac{a^2}{2}$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2a \\ x=\frac{2}{3}a \end{array}\right.\ x\in\left(0;2a\right]$

Bảng xét dấu

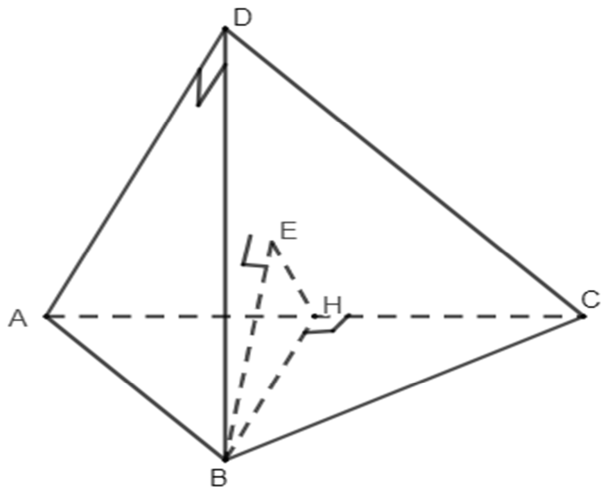
x	0		$\frac{2a}{3}$		2a
f'(x)		+	0	-	0
f(x)	↗			↘	

Vậy để thể tích khối trụ lớn nhất thì $x=\frac{2a}{3}$

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác ABC đều cạnh $2a$ và tam giác ABD vuông tại D, $AD=\frac{a}{2}$. Khoảng cách lớn nhất từ B đến mặt phẳng $\left(ACD\right)$ là?

A. $\frac{2a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Lời giải



Giả sử E là hình chiếu của B lên mặt phẳng (ACD). Khi đó $d(B,(ACD)) = BE$.

Gọi H là trung điểm của AC. Suy ra $BH \perp AC$

Vì $BE \perp (ACD) \Rightarrow BE \perp EH$. Do đó $BE \le BH$ mà $BH = a\sqrt{3}$. Suy ra BE lớn nhất bằng $a\sqrt{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $E \equiv H$.

Khi đó: $BD^2 = AB^2 - AD^2 = (2a)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{15a^2}{4} \Rightarrow DH^2 = BD^2 - BH^2 = \dfrac{15a^2}{4} - 3a^2 = \dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow DH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Khi đó điểm D hoàn toàn được xác định như sau:

+) Dựng ΔABC đều cạnh $2a$. Lấy H là trung điểm của AC.

+) Dựng mặt phẳng (Q) đi qua H và $(Q) \perp BH$, do $AC \perp BH$ tại H nên $AC \subset (Q)$.

+) Trong mặt phẳng (Q): D là giao của đường tròn đường kính AH và đường tròn tâm A bán kính $\dfrac{a}{2}$.

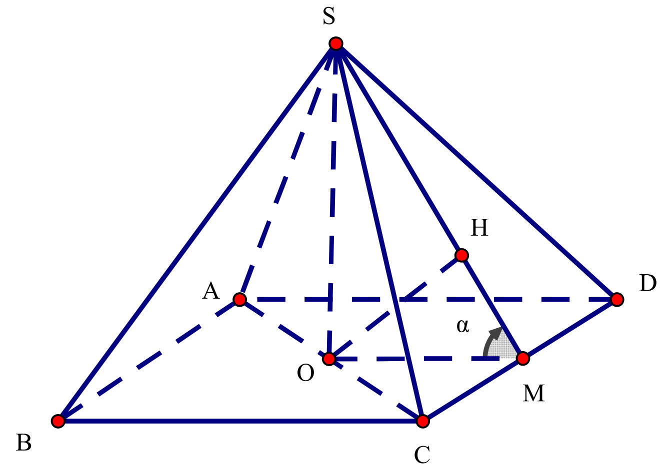
+) Khi đó $\begin{cases} AD \perp DH \\ AD \perp BH \end{cases} \Rightarrow AD \perp BD$ và $AD = \dfrac{a}{2}$.

Do đó, tồn tại điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán để $BE = a\sqrt{3}$. Vậy $d(B,(ACD))$ lớn nhất là $a\sqrt{3}$.

Câu 25. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $2a$. Gọi α là góc giữa mặt bên của hình chóp với đáy của hình chóp đó. Với giá trị nào của α thì thể tích của khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $\alpha = \arcsin\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B.** $\alpha = 45^0$. **C.** $\alpha = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Lời giải



Gọi O là chân đường cao của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Khi đó ta có: $SO \perp (ABCD)$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là: $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD}$.

Gọi M là trung điểm của CD, ta có: $\begin{cases} OM \perp CD \\ SM \perp CD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SCD),(ABCD))} = \widehat{(OM,SM)} = \widehat{SMO} = \alpha$

Từ đó suy ra: $CD \perp (SOM)$.

Từ O kẻ $OH \perp SM$ tại H.

Mà $OH \perp CD$.

Do vậy: $OH \perp (SCD)$ nên $d(O,(SCD)) = OH = \frac{1}{2}d(A,(SCD)) = a$.

Gọi $AD = x \Rightarrow OM = \frac{x}{2}, SO = OM.\tan\alpha = \frac{x}{2}.\tan\alpha$.

Xét tam giác OSM vuông tại O có OH là đường cao. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^2.\tan^2\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{4.\tan^2\alpha + 4}{x^2.\tan^2\alpha} \Leftrightarrow x^2.\tan^2\alpha = a^2.4(1+\tan^2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow x^2.\tan^2\alpha = a^2.4.\frac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow x^2.\sin^2\alpha = a^2.4 \Rightarrow x = \frac{2a}{\sin\alpha}$$

Như vậy: $SO = \frac{x}{2}.\tan\alpha = \frac{a}{\sin\alpha}.\tan\alpha = \frac{a}{\cos\alpha}$; $S_{ABCD} = x^2 = \frac{4a^2}{\sin^2\alpha}$.

Vậy $V = \frac{1}{3}.SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a}{\cos\alpha}.\frac{4a^2}{\sin^2\alpha} = \frac{4a^3}{3}.\frac{1}{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}$.

Thể tích đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)}$ đạt giá trị nhỏ nhất hay $y = \cos\alpha(1-\cos^2\alpha)$ đạt giá trị lớn nhất.

Xét hàm số $y = \cos\alpha(1-\cos^2\alpha), \alpha \in [0^0;90^0]$.

Đặt $t = \cos\alpha, t \in [0;1]$. Khi đó: $y = t - t^3, t \in [0;1]$.

Ta có: $y'=1-3t^2$; $y'=0 \Leftrightarrow 1-3t^2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{\sqrt{3}}(do\ t\in[0;1])$.

Bảng biến thiên:

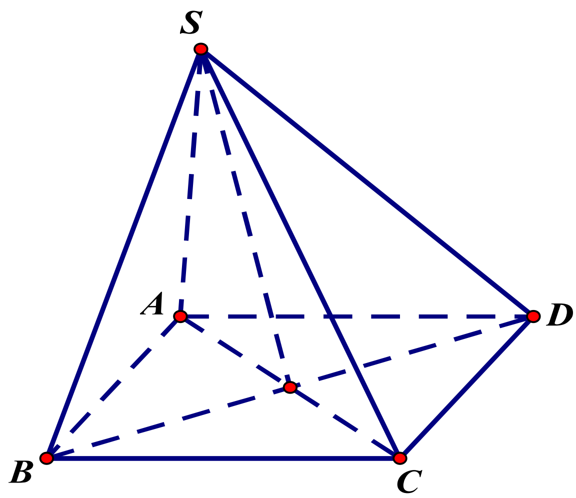
t	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y_{\max}$ khi $t=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha=\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Câu 26. Cho hình chóp $SABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $SA=SB=SC=a$. Đặt $x=SD\left(0<x<a\sqrt{3}\right)$ Tìm x theo a để tích $AC.SD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.   **B.** $x=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.   **C.** $x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.   **D.** Đáp án khác.

Lời giải



Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$ ta có $OB\perp OC$

Theo đề bài $SA=SC$ nên ΔSAC cân tại S do đó $SO\perp OC$

Ta có $\Delta SOC=\Delta BOC$ do OC chung, $SC=BC=a$, $SOC=BOC=90^o$ nên $SO=OB$

Mà $OB=OC$ nên $OB=OC=SO$ do đó ΔSBD vuông tại S

Ta có $OB=\frac{BD}{2}=\frac{\sqrt{SB^2+SD^2}}{2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{2}$;

$AC=2OC=2\sqrt{BC^2-OB^2}=2\sqrt{a^2-\frac{a^2+x^2}{4}}=\sqrt{3a^2-x^2}$

Suy ra $AC.SD=\sqrt{3a^2-x^2}\cdot x$

Áp dụng bất đẳng thức Cô- si ta có $\sqrt{3a^2-x^2}\cdot x\le\frac{3a^2-x^2+x^2}{2}=\frac{3a^2}{2}$

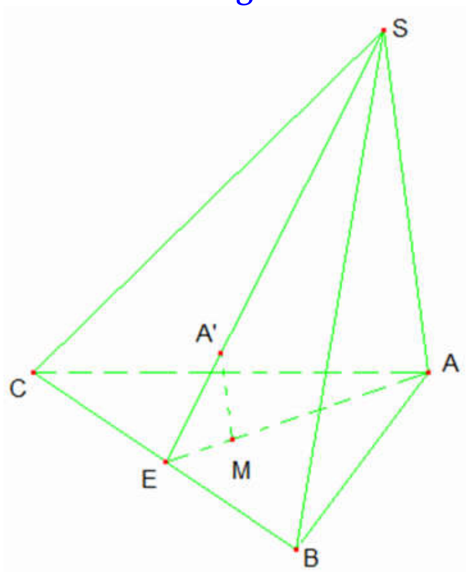
Dấu "=" xãy ra khi $\sqrt{3a^2-x^2}=x \Leftrightarrow 3a^2-x^2=x^2 \Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $x=\frac{a\sqrt{6}}{2}$ thì tích $AC.\mathrm{SD}$ đạt giá trị lớn nhất suy ra chọn C

Câu 27. Cho tứ diện $S.ABC$D và M là một điểm di động, nằm bên trong tam giác ΔABC. Qua M kẻ các đường thẳng song song với SA,SB,SC cắt các mặt phẳng tương ứng (SBC), (SAC), (SAB) lần lượt tại A',B',C'. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}+\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}$ là

A. $\frac{9}{8}$. B. $\frac{28}{27}$. C. $\frac{62}{27}$. D. $\frac{13}{8}$

Lời giải



Do $MA'//SA$ nên bốn điểm này cùng nằm trong một mặt phẳng. Giả sử $E=BC\cap(MA',SA)$. Khi đó A,E,M thẳng hàng và ta có $\frac{MA'}{SA}=\frac{EM}{EA}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$.

Tương tự ta có: $\frac{MB'}{SB}=\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}},\frac{MC'}{SC}=\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$.

Khi đó $P=\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1$.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các số $\frac{MA'}{SA},\frac{MB'}{SB},\frac{MC'}{SC}$ ta được:

$$\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}}$$

$$\Leftrightarrow P\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\le\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$$

Suy ra $T=\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}+\frac{MA'}{SA}.\frac{MB'}{SB}.\frac{MC'}{SC}\le 1+\frac{1}{27}\Leftrightarrow T\le\frac{28}{27}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T=\frac{28}{27}$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{MA'}{SA}=\frac{MB'}{SB}=\frac{MC'}{SC}$.

Câu 28. Trong không gian với hệ trục tọa độ $O.xyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với $a;b;c$ là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2+b^2+c^2)=9(ab+2bc+ca)$ và $Q=\frac{a}{b^2+c^2}-\frac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia $Ox; Oy; Oz$. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+4y+4z-12=0$.
B. $3x+12y+12z-1=0$.
C. $x+4y+4z=0$.
D. $3x+12y+12z+1=0$.

Lời giải

Đặt $t=b+c\ (t>0) \Rightarrow b^2+c^2 \geq \dfrac{t^2}{2};\ bc \leq \dfrac{t^2}{4}$.

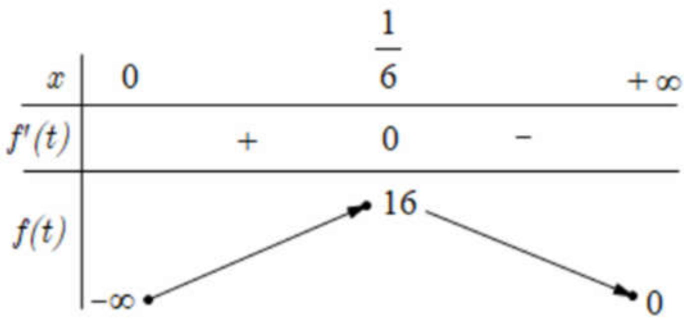
$5\left(a^2+b^2+c^2\right)=9(ab+2bc+ca) \Leftrightarrow 5a^2+5(b+c)^2-9a(b+c)=28bc \Rightarrow 5a^2+5t^2-9at \leq 7t^2$

$\Leftrightarrow (5a+t)(a-2t) \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2t$.

Vậy $Q \leq \dfrac{4}{t}-\dfrac{1}{27t^3}=f(t)$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{4}{t^2}+\dfrac{1}{9t^4}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{6}$.

Ta có bảng biến thiên



Vậy $Q_{\max}=16 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3};\ b=c=\dfrac{1}{12}$.

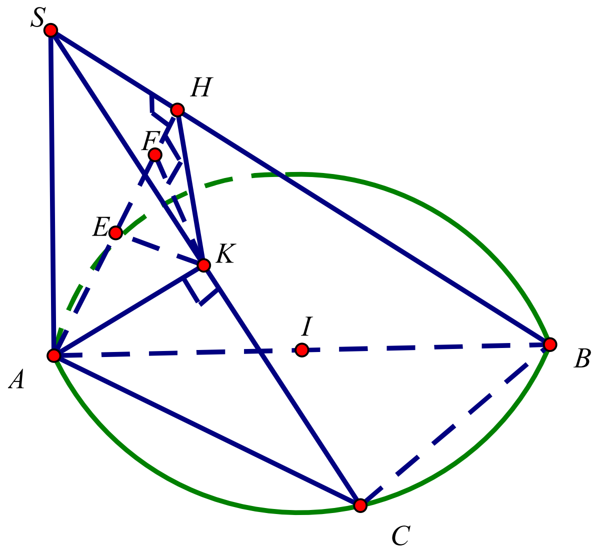
Suy ra tọa độ điểm $A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{12}\right)$; tọa độ các điểm $M\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$; $N\left(0;\dfrac{1}{12};0\right)$; $P\left(0;0;\dfrac{1}{12}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) $\dfrac{x}{\frac{1}{3}}+\dfrac{y}{\frac{1}{12}}+\dfrac{z}{\frac{1}{12}}=1 \Leftrightarrow 3x+12y+12z-1=0$.

Câu 29. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn (T) đường kính $AB=2R$. Gọi C là một điểm di động trên (T). Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (α) lấy điểm S sao cho $SA=R$. Hạ $AH \perp SB$ tại H, $AK \perp SC$ tại K. Tìm giá trị lớn nhất $V_{\max}$ của thể tích tứ diện $SAHK$.

A. $V_{\max}=\dfrac{R^3\sqrt{5}}{75}$.
B. $V_{\max}=\dfrac{R^3\sqrt{5}}{25}$.
C. $V_{\max}=\dfrac{R^3\sqrt{3}}{27}$.
D. $V_{\max}=\dfrac{R^3\sqrt{3}}{9}$.

.Lời giải



Ta có $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \\ AC, SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$.

Lại có $\begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp BC \\ SB, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB \ (1)$.

Ta có $SB \perp AH \ (2)$.

Từ $(1),(2)$ suy ra $SB \perp (AHK)$ tại H nên suy ra SH đường cao của khối chóp $S.AHK$.

Ta có: $V_{SAHK} = V_{S.AHK} = \frac{1}{3} SH.S_{AHK}$.

Do S, A, B cố định nên SH không đổi. Do đó thể tích của khối chóp $S.AHK$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S_{AHK} đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK$ mà $AK \perp SC \Rightarrow AK \perp (SBC)$, $KH \subset (SBC) \Rightarrow AK \perp HK$
.

Gọi E là trung điểm của AH, F là hình chiếu vuông góc của K xuống AH.

Ta có: $S_{AHK} = \frac{1}{2}.AH.KF$.

Mặt khác do độ dài đoạn AH không đổi nên S_{AHK} đạt gái trị lớn nhất khi và chỉ khi KF là lớn nhất.

Ta có độ dài đoạn KF có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi F trùng với trung điểm E của AH.

Hay $KF_{\max} = KE = \frac{AH}{2}$.

Xét ΔSAB vuông tại A có: $SA^2 = SH.SB \Rightarrow SH = \frac{SA^2}{SB} = \frac{R^2}{R\sqrt{5}} = \frac{R\sqrt{5}}{5}$

và $AH.SB = SA.AB \Rightarrow AH = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{R.2R}{R\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}R}{5}$.

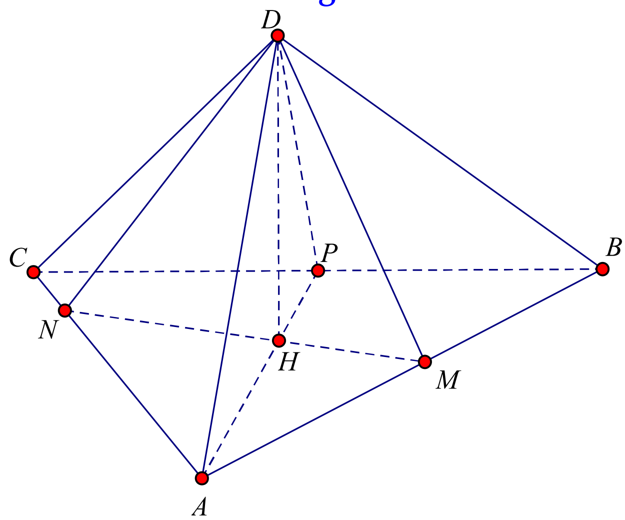
Diện tích lớn nhất của ΔAHK là $S_{\max} = \frac{1}{2}\frac{AH}{2}.AH = \frac{AH^2}{4} = \frac{R^2}{5}$.

Vậy $V_{\max} = \frac{1}{3}.SH.S_{\max} = \frac{1}{3}.\frac{R\sqrt{5}}{5}.\frac{R^2}{5} = \frac{R^3\sqrt{5}}{75}$.

Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Hai điểm M, N di động trên các cạnh AB, AC sao cho mặt phẳng (DMN) vuông góc mặt phẳng (ABC). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích lớn nhất và nhỏ nhất của tam giác AMN. Tính $T = \frac{S_1}{S_2}$.

A. $T = \frac{8}{9}$.   **B.** $T = \frac{9}{8}$.   **C.** $T = \frac{8}{7}$.   **D.** $T = \frac{9}{7}$.

Lời giải



◆ Gọi H là hình chiếu của D trên $MN \Rightarrow DH \perp MN$.

$(DMN) \cap (ABC) = MN$ và $(DMN) \perp (ABC)$. Do đó $DH \perp (ABC)$.

Mà $ABCD$ là tứ diện đều nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác đều ABC hay H là trọng tâm tam giác đều ABC.

◆ Đặt $AM = x$, $AN = y$ $(0 < x, y \le 1)$.

Diện tích tam giác AMN là $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}AM.AN.\sin 60^0 = \frac{1}{2}.x.y.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{xy\sqrt{3}}{4}$.

◆ Gọi P là trung điểm của $BC \Rightarrow AP = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mà $S_{\Delta AMN} = S_{\Delta AMH} + S_{\Delta ANH} = \frac{1}{2}AM.AH.\sin 30^0 + \frac{1}{2}AN.AH.\sin 30^0 = \frac{1}{2}.x.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.y.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2}$.

Suy ra $\frac{xy\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}.x.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.y.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2} \Leftrightarrow xy = \frac{x}{3} + \frac{y}{3} \Leftrightarrow x + y = 3xy$.

◆ Đặt $xy = t \Rightarrow x + y = 3t \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình $a^2 - 3ta + t = 0$. $\Leftrightarrow a^2 = (3a-1)t$ $(*)$, với $t \in (0;1]$.

◆ Nếu $a = \frac{1}{3}$, $(*)$ trở thành $\frac{1}{9} = 0$.

◆ Nếu $a \ne \frac{1}{3}$, thì $(*)$ trở thành $t = \frac{a^2}{3a-1}$ $(**) \Rightarrow t' = \frac{3a^2 - 2a}{(3a-1)^2} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \frac{2}{3} \end{array}\right.$.

BBT:

a	0		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1
t'	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
t	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{9}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$

◆ Để tồn tại hai điểm M, N thỏa mãn bài toán thì $(**)$ có hai nghiệm thuộc tập $(0;1]$.

$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \le t \le \frac{1}{2}$.

Vậy $\max\limits_{D} t = \frac{1}{2}$ khi $a = 1$ hay $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

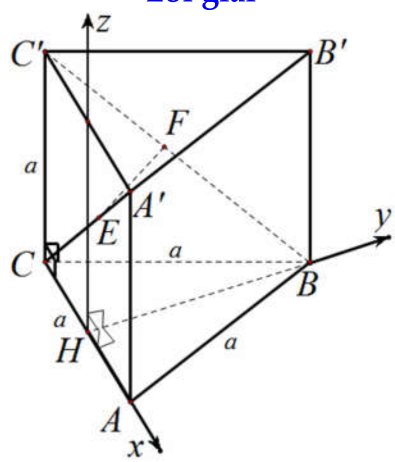
$\min\limits_{D} t = \frac{4}{9}$ khi $a = \frac{2}{3}$ hay $S_2 = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2} = \frac{9}{8}$.

Câu 31. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ với độ dài tất cả các cạnh đều bằng a. Xét tất cả các đoạn thẳng song song với mặt phẳng $(ABB'A')$ và có một đầu E nằm trên đường chéo $A'C$ của mặt bên $AA'C'C$, còn đầu kia F nằm trên đường chéo BC' của mặt bên $BB'C'C$. Hãy tìm độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng này.

A. $\frac{2a}{5}$. **B.** $\frac{a}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{a}{5}$. **D.** $\frac{2a}{\sqrt{5}}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AC. Chọn hệ trục tọa độ $Hxyz$ như hình vẽ.

Ta có $H(0;0;0)$, $A\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $C\left(\frac{-a}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};0\right)$, $A'\left(\frac{a}{2};0;a\right)$, $B'\left(0;\frac{\sqrt{3}a}{2};a\right)$

$C'\left(\frac{-a}{2};0;a\right)$.

◎ $\overrightarrow{BC'} = \left(-\frac{a}{2};-\frac{\sqrt{3}a}{2};a\right) = -\frac{a}{2}\vec{u}$, với $\vec{u}\left(1;\sqrt{3};-2\right)$. Phương trình tham số của đường thẳng BC' đi qua điểm C' có vec tơ chỉ phương $\vec{u}\left(1;\sqrt{3};-2\right)$

$\begin{cases} x = \dfrac{-a}{2} + t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = a - 2t \end{cases}$. Do $F \in BC'$ nên $F\left(\dfrac{-a}{2} + t; \sqrt{3}t; a - 2t\right)$

◎ $\overrightarrow{A'C} = (-a;0;-a) = -a\overrightarrow{u'}$, với $\overrightarrow{u'}(1;0;1)$. Phương trình tham số của đường thẳng $A'C$ đi qua điểm C có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (1;0;1)$

$\begin{cases} x = \dfrac{-a}{2} + t' \\ y = 0 \\ z = t' \end{cases}$. Do $E \in A'C$ nên $E\left(\dfrac{-a}{2} + t'; 0; t'\right)$.

$\overrightarrow{EF} = \left(t - t'; \sqrt{3}t; a - 2t - t'\right)$.

◎ $\overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{-a}{2}; \dfrac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right), \overrightarrow{AA'} = (0;0;a)$, $\left[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AA'}\right] = \left(\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2}; \dfrac{a^2}{2}; 0\right) = \dfrac{a^2}{2}\vec{n}$, với $\vec{n}\left(\sqrt{3};1;0\right)$.

suy ra vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABB'A')$: $\vec{n} = \left(\sqrt{3};1;0\right)$

◎ Do $EF \parallel (ABB'A')$ nên $\overrightarrow{EF}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow t' = 2t$ suy ra $\overrightarrow{EF} = \left(-t; \sqrt{3}t; a - 4t\right)$

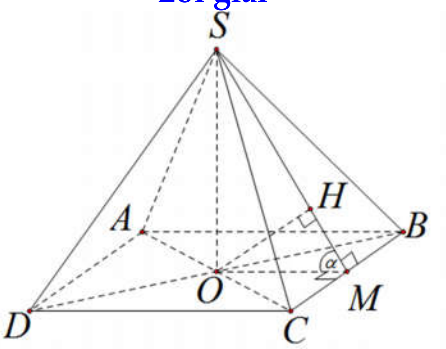
◎ Có $EF^2 = 20t^2 - 8at + a^2 = f(t)$. Dễ thấy $f(t)$ là một hàm số bậc hai nên $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \dfrac{a}{5}$, $\min f(t) = \dfrac{a^2}{5}$.

◎ Vậy $EF_{\min} = \dfrac{a}{\sqrt{5}}$.

Câu 32. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ mà khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng b. Góc giữa mặt bên và mặt đáy của hình chóp bằng α. Tìm α để thể tích của khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất.

A. $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. **B.** $\alpha = \arccos\left(\sqrt{3}\right)$. **C.** $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\alpha = \arccos\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Lời giải



+ Gọi $O = AC \cap BD$ và M là trung điểm của BC.

+ Có: $\begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow$ Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $\widehat{SMO} = \alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

+Trong mặt phẳng (SOM) vẽ $OH \perp SM$ (1).

+ Ta có: $\begin{cases} SM \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM)$ mà $OH \subset (SOM) \Rightarrow BC \perp OH$ (2)

+ Từ và suy ra $OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$.

+ Ta có: $d(A,(SBC)) = 2d(O,(SBC)) = 2OH = b \Rightarrow OH = \dfrac{b}{2}$.

$$\sin\alpha = \frac{OH}{OM} \Rightarrow OM = \frac{OH}{\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\alpha} \Rightarrow AB = \frac{b}{\sin\alpha} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{b^2}{\sin^2\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{SO}{OM} \Rightarrow SO = OM\tan\alpha = \frac{b}{2\sin\alpha}\tan\alpha = \frac{b}{2\cos\alpha}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{b}{2\cos\alpha}\frac{b^2}{\sin^2\alpha} = \frac{b^3}{6\left(\cos\alpha - \cos^3\alpha\right)}$$

$\Rightarrow$ Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha - \cos^3\alpha$ lớn nhất.

Đặt $\cos\alpha = t$. Vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < t < 1$.

+ Xét: $f(t) = t - t^3\,(0 < t < 1) \Rightarrow f'(t) = 1 - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,(L) \\ t = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

+ Bảng biến thiên

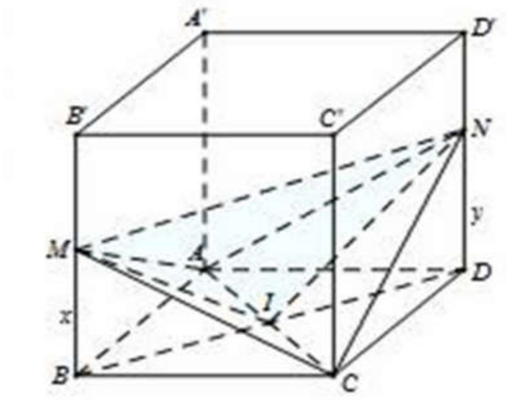
t	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	0

Vậy thể tích của khối chóp $S.ABCD$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{b^3\sqrt{3}}{4}$ đạt được khi $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a. Điểm M và N lần lượt thay đổi trên các cạnh BB' và DD' sao cho $(MAC) \perp (NAC)$ và $BM = x,\ DN = y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $ACMN$.

A. $\dfrac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **B.** $\dfrac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\dfrac{a^3}{2\sqrt{2}}$. **D.** $\dfrac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

Lời giải



Cách 1: Gọi I là trung điểm AC, đặt $BB' = b$, ta có:

$$V_{ACMN} = V_{AMNI} + V_{CMNI} = \frac{1}{3}IC.S_{IMN} + \frac{1}{3}IA.S_{IMN} = \frac{1}{3}AC.S_{IMN}$$

$$= \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\left(S_{BDD'B'} - S_{MND'B'} - S_{BIM} - S_{IDN}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\left(ab\sqrt{2} - \frac{(2b-x-y)a\sqrt{2}}{2} - \frac{x.a\sqrt{2}}{4} - \frac{y.a\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a\sqrt{2}.\left(\frac{x.a\sqrt{2}}{4} + \frac{y.a\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{6}a^2(x+y).$$

Vì $(MAC) \perp (NAC)$ nên

$$MI \perp IN \Leftrightarrow IM^2 + IN^2 = MN^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{2} + y^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + (x-y)^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}.$$

Do đó

$$V_{ACMN} = \frac{1}{6}a^2(x+y) \ge \frac{1}{3}a^2\sqrt{xy} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ACMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$ khi $x = y$.

Cách 2: Gọi I là trung điểm A**C.**

Dễ thấy $\Delta MAC, \Delta NAC$ lần lượt cân tại M, N nên $MI \perp AC, NI \perp AC \Rightarrow AC \perp (MIN)$.

Lại có $AC = (MAC) \cap (NAC); (MAC) \perp (NAC) \Rightarrow MI \perp (NAC) \Rightarrow MI \perp NI$

Khi đó $MI^2 + IN^2 = MN^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{2} + y^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2 + (x-y)^2 \Leftrightarrow xy = \frac{a^2}{2}$.

$$V_{ACMN} = V_{AMNI} + V_{CMIN} = \frac{1}{3}.AI.S_{IMN} + \frac{1}{3}CI.S_{IMN} = \frac{1}{3}.AC.S_{IMN} = \frac{1}{6}.IM.IN.AC$$

$$\Rightarrow V_{ACMN} = \frac{1}{6}.a\sqrt{2}.\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{2}}.\sqrt{y^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.\sqrt{(xy)^2 + \frac{a^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{a^4}{4}}$$

Mà $xy = \frac{a^2}{2}$ nên $V_{ACMN} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.\sqrt{\frac{a^2}{2}\left[(x+y)^2 - 2xy\right] + \frac{a^4}{2}} = \frac{a^2}{6}.(x+y)$

Do đó

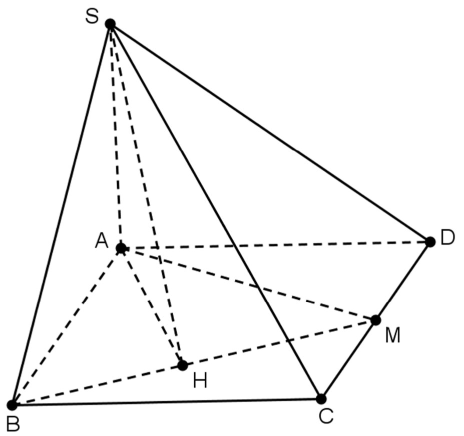
$$V_{ACMN} = \frac{1}{6}a^2(x+y) \ge \frac{1}{3}a^2\sqrt{xy} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}.$$

Vậy thể tích khối tứ diện $ACMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$ khi $x = y$.

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=b$ và vuông góc với $(ABCD)$. Điểm M thay đổi trên cạnh CD với $CM=x(0\le x\le a)$. H là hình chiếu vuông góc của S trên BM. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABH$ theo a,b.

A. $\dfrac{a^2b}{12}$. **B.** $\dfrac{a^2b}{24}$. **C.** $\dfrac{a^2b}{8}$. **D.** $\dfrac{a^2b}{18}$.

Lời giải



Ta có $V_{SABH}=\dfrac{1}{3}.SA.S_{ABH}=\dfrac{1}{3}.b.\dfrac{1}{2}AH.BH=\dfrac{b}{6}.AH.BH\le\dfrac{b}{6}.\dfrac{AH^2+BH^2}{2}$

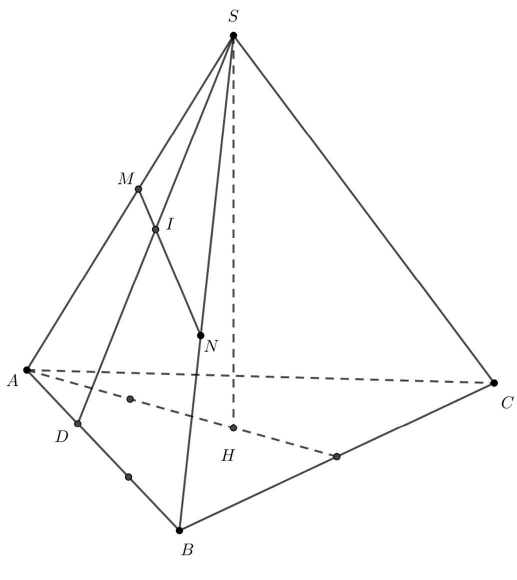
$\Rightarrow V_{SABH}\le\dfrac{b}{12}.AB^2\Leftrightarrow V_{SABH}\le\dfrac{b.a^2}{12}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AH=BH\Leftrightarrow\angle ABH=45^o\Leftrightarrow\angle ABM=45^o\Leftrightarrow M\equiv D$.

Câu 35. Cho tứ diện đều $SABC$ có D là điểm thuộc cạnh AB sao cho $BD=2AD$, I là trung điểm của SD. Một đường thẳng d thay đổi qua I cắt các cạnh SA, SB lần lượt tại M, N. Biết $AB=2a$. Khi d thay đổi, thể tích khối chóp $S.MNC$ nhỏ nhất bằng $\left(\dfrac{m}{n}\right)^3.\dfrac{a^3}{\sqrt{m}}$, với $m,n\in\mathbb{N}$, $(m,n)=1$. Tính $m+n$.

A. $m+n=4$. **B.** $m+n=6$. **C.** $m+n=7$. **D.** $m+n=5$.

Lời giải



Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vì $SABC$ là tứ diện đều và $AB=2a$ nên suy ra $SH\perp(ABC)$, H là trọng tâm tam giác đều ABC và $AH=\frac{2}{3}.\frac{2a\sqrt{3}}{2}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Từ đó suy ra $SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\sqrt{(2a)^2-\left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{2a\sqrt{6}}{3}.\frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$ (1).

Đặt $\frac{SM}{SA}=k,\frac{SN}{SB}=l$, $0\le k,l\le 1$.

Ta có: $\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}$.

Mặt khác $\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SAB}}=\frac{S_{\Delta SMI}}{3S_{\Delta SAD}}+\frac{2S_{\Delta SNI}}{3S_{\Delta SBD}}=\frac{1}{3}.\frac{SM}{SA}.\frac{SI}{SD}+\frac{2}{3}.\frac{SN}{SB}.\frac{SI}{SD}$

Nên ta có $k.l=\frac{1}{3}.k.\frac{1}{2}+\frac{2}{3}.l.\frac{1}{2}\Leftrightarrow 6kl=k+2l\Leftrightarrow l=\frac{k}{2(3k-1)}$ (2).

Vì $\begin{cases}0\le k\le 1\\ 0\le l\le 1\end{cases}$ nên $\begin{cases}0\le k\le 1\\ 0\le \frac{k}{2(3k-1)}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow \frac{2}{5}\le k\le 1\Rightarrow 3k-1>0$.

Ta có: $\frac{V_{SMNC}}{V_{SABC}}=\frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB}.\frac{SC}{SC}=k.l\Rightarrow V_{SMNC}=k.l.V_{SABC}$ (3).

Từ (1), (2), (3) ta có $V_{S.MNC}=k.\frac{k}{2(3k-1)}.\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}.\frac{9k^2}{3k-1}$

$\Leftrightarrow V_{S.MNC}=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}.\left(3k+1+\frac{1}{3k-1}\right)=\frac{a^3\sqrt{2}}{27}.\left(3k-1+\frac{1}{3k-1}+2\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si với hai số dương, ta có:

$V_{S.MNC}\ge\frac{a^3\sqrt{2}}{27}.\left(2.\sqrt{(3k-1).\frac{1}{3k-1}}+2\right)=\frac{4a^3\sqrt{2}}{27}=\left(\frac{2}{3}\right)^3.\frac{a^3}{\sqrt{2}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 3k-1=\frac{1}{3k-1}\Leftrightarrow (3k-1)^2=1\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$.

Vậy $V_{S.MNC}\min=\left(\frac{2}{3}\right)^3.\frac{a^3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow k=\frac{2}{3}$.

Theo đề bài, thể tích khối chóp $S.MNC$ nhỏ nhất bằng $\left(\frac{m}{n}\right)^3.\frac{a^3}{\sqrt{m}}$, với $m,n\in\mathbb{N}$, $(m,n)=1$ nên ta có $m=2,n=3$, suy ra $m+n=5$.

Câu 36. Cắt một khối trụ tròn có chiều cao h bởi một mặt phẳng song song với hai mặt đáy ta thu được hai khối tròn nhỏ. Một trong hai khối đó ngoại tiếp một lăng trụ đứng thể tích V có đáy là tam giác có chu vi là p. Khối còn lại ngoại tiếp một khối nón có bán kính là R . Tìm giá trị của R sao cho thể tích của khối nón là lớn nhất?

A. $R=\frac{\pi p^3}{162V}$. **B.** $R=\frac{hp^3}{162V}$. **C.** $R=\frac{\pi p^3}{162}$. **D.** $R=\frac{p^3}{162V}$.

Lời giải

Hình lăng trụ có đáy là tam giác có độ dài 3 cạnh là a,b,c có chiều cao là x

Khi đó $S_{\Delta}=\dfrac{abc}{4R}$ và thể tích của hình lăng trụ là $V=x.\dfrac{abc}{4R}$.Suy ra $R=x.\dfrac{abc}{4V}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương a,b,c ta có

$R\le x.\dfrac{(a+b+c)^3}{27.4V}=x.\dfrac{p^3}{108.V}$

Mặt khác $V_{(H)}=\dfrac{1}{3}.(h-x).\pi.R^2\le\dfrac{1}{3}.(h-x).\pi.\dfrac{x^2p^6}{(108V)^2}$

Xét hàm số $f(x)=(h-x).x^2$ với $0<x<h$

$f'(x)=-3x^2+2hx$ Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow -3x^2+2hx=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2h}{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$\dfrac{2h}{3}$		h
y'		+	0	-	
y		↗	$f\left(\dfrac{2h}{3}\right)$	↘	

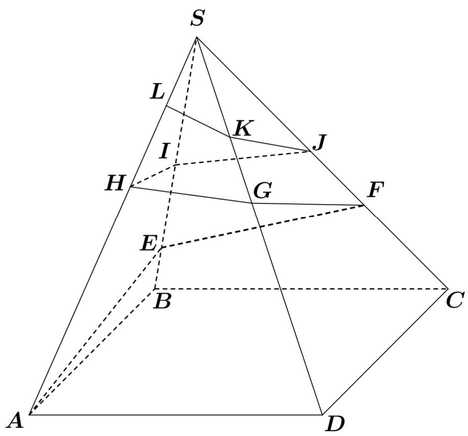
Từ đó $f(x)\le f\left(\dfrac{2h}{3}\right)=\dfrac{4}{27}.h^3$

Do đó $V_{(H)}\le\dfrac{1}{3}.\pi.\dfrac{4}{27}.h^3.\dfrac{p^6}{(108V)^2}$

$V_{(H)}(\max)=\dfrac{1}{3}.\pi.\dfrac{4}{27}.h^3.\dfrac{p^6}{(108V)^2}$ khi $x=\dfrac{2h}{3}$ và $a=b=c$

Khi đó $R=\dfrac{2h}{3}.\dfrac{p^3}{108.V}=\dfrac{hp^3}{162.V}$

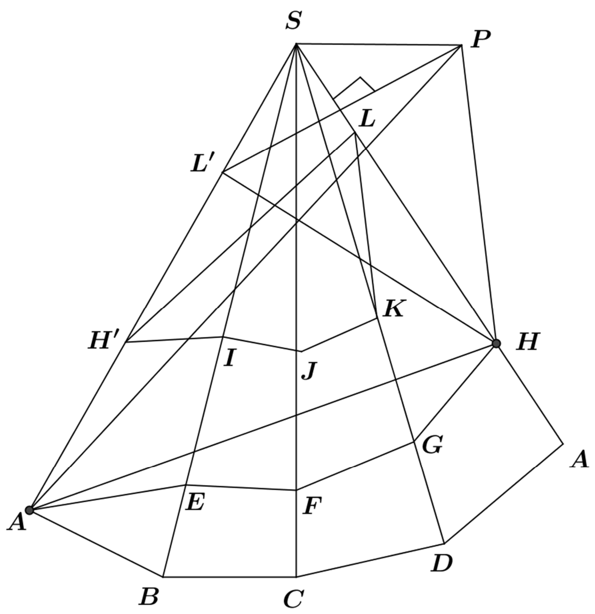
Câu 37. Người ta cần trang trí một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên bằng $200\,\text{m}$, $\widehat{ASB}=15^0$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$ trong đó điểm L cố định và $LS=40\text{m}$.



Khi đó cần dùng ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí?

A. $40\sqrt{67}+40$ mét. **B.** $20\sqrt{111}+40$ mét. **C.** $40\sqrt{31}+40$ mét. **D.** $40\sqrt{111}+40$ mét.

Lời giải



Cắt hình chóp theo SA rồi trải phẳng (H trùng với H'). Lấy điểm $L'A$ sao cho $SL' = SL$, P đối xứng với L' qua SA.

Ta có:

$AE + EF + FG + GH + H'I + IJ + JK + KL \geq AH + H'L = AH + HL' = AH + HP \geq AP$.

Áp dụng định lí Cô-sin trong ΔASP ta được:

$AP^2 = AS^2 + SP^2 - 2.AS.SP.\cos\widehat{ASP} = 200^2 + 40^2 - 2.200.40.\cos 120^0 = 49.600$

$\Rightarrow AP = 40\sqrt{31}$.

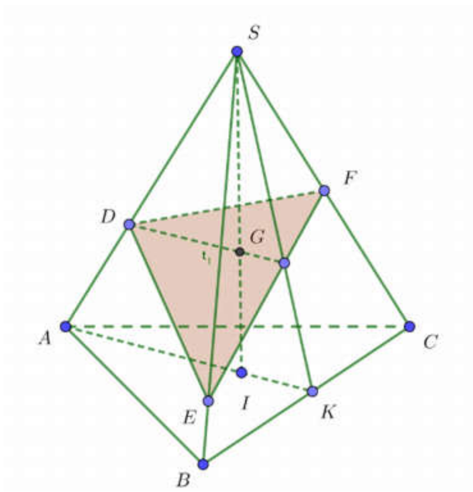
Vậy độ dài đèn led ngắn nhất là $40\sqrt{31} + 40$

Câu 38. Chohình chóp $S.ABC$ có các cạnh bên bằng 1. Mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua trọng tâm của hình chóp, cắt ba cạnh bên SA, SB, SC lần lượt tại D, E, F. Tìm giá trị lớn nhất P_{max} của $P = \frac{1}{SD.SE} + \frac{1}{SE.SF} + \frac{1}{SF.SD}$.

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Gọi I là trọng tâm ΔABC. Ta có:



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SI} \\ \overrightarrow{SA} = \frac{SA}{SD}\overrightarrow{SD}; \overrightarrow{SB} = \frac{SB}{SE}.\overrightarrow{SE}; \overrightarrow{SC} = \frac{SC}{SF}.\overrightarrow{SF} \end{cases}$.

Mà ta có $\overrightarrow{SG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SI}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$

$\Rightarrow 4\overrightarrow{SG}=\frac{SA}{SD}\overrightarrow{SD}+\frac{SB}{SE}.\overrightarrow{SE}+\frac{SC}{SF}.\overrightarrow{SF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{SA}{4SD}\overrightarrow{SD}+\frac{SB}{4SE}.\overrightarrow{SE}+\frac{SC}{4SF}.\overrightarrow{SF}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{1}{4SD}\overrightarrow{SD}+\frac{1}{4SE}.\overrightarrow{SE}+\frac{1}{4SF}.\overrightarrow{SF}$

Do D,E,F,G đồng phẳng nên $\frac{1}{4SD}+\frac{1}{4SE}+\frac{1}{4SF}=1$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}\right)=1\Rightarrow \frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}=4$

Ta lại có $P=\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}\right)^2$.

Dấu "=" xảy ra khi $SD=SE=SF$.

Vậy $P=\frac{1}{SD.SE}+\frac{1}{SE.SF}+\frac{1}{SF.SD}\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{SD}+\frac{1}{SE}+\frac{1}{SF}\right)^2=\frac{16}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $SD=SE=SF=\frac{3}{4}SA$.

Vậy $P_{Max}=\frac{16}{3}$

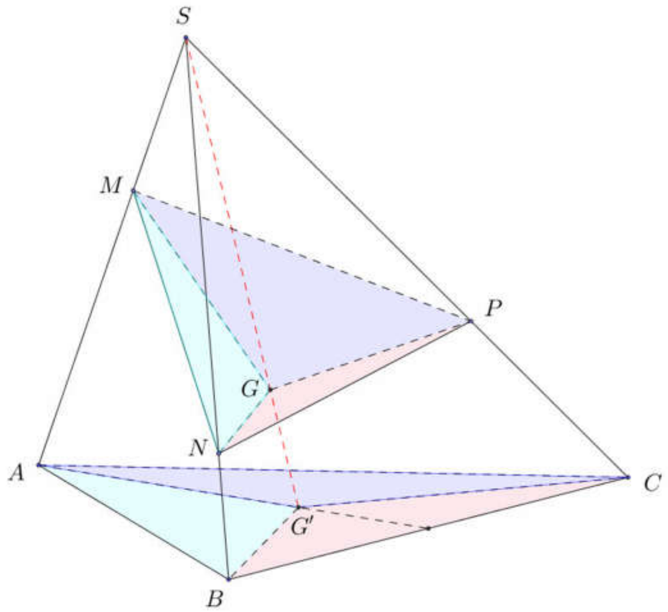
Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. G là trung điểm của BD', mặt phẳng (P) thay đổi qua G cắt $AD',CD',B'D'$ tương ứng tại H,I,K. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{1}{D'H.D'I}+\frac{1}{D'I.D'K}+\frac{1}{D'K.D'H}$.

A. $\frac{8}{3a^2}$. **B.** $\frac{16a^2}{3}$. **C.** $\frac{8a^2}{3}$. **D.** $\frac{16}{3a^2}$.

Lời giải

Bổ đề: Cho tứ diện $SABC$ có $SA=SB=SC=a$. Một mặt phẳng (P) thay đổi qua trọng tâm G của tứ diện lần lượt cắt SA,SB,SC tại M,N,P. $CMR:\frac{1}{SM}+\frac{1}{SN}+\frac{1}{SP}=\frac{4}{a}$.

Chứng minh:



Gọi G' là trọng tâm ΔABC. Theo tính chất trọng tâm của tứ diện ta có S, G, G' thẳng hàng và $\dfrac{SG}{SG'} = \dfrac{3}{4}$.

Thêm nữa $V_{SABG'} = V_{SBCG'} = V_{SG'CA} = \dfrac{1}{3}V_{SABC}$.

Ta có:

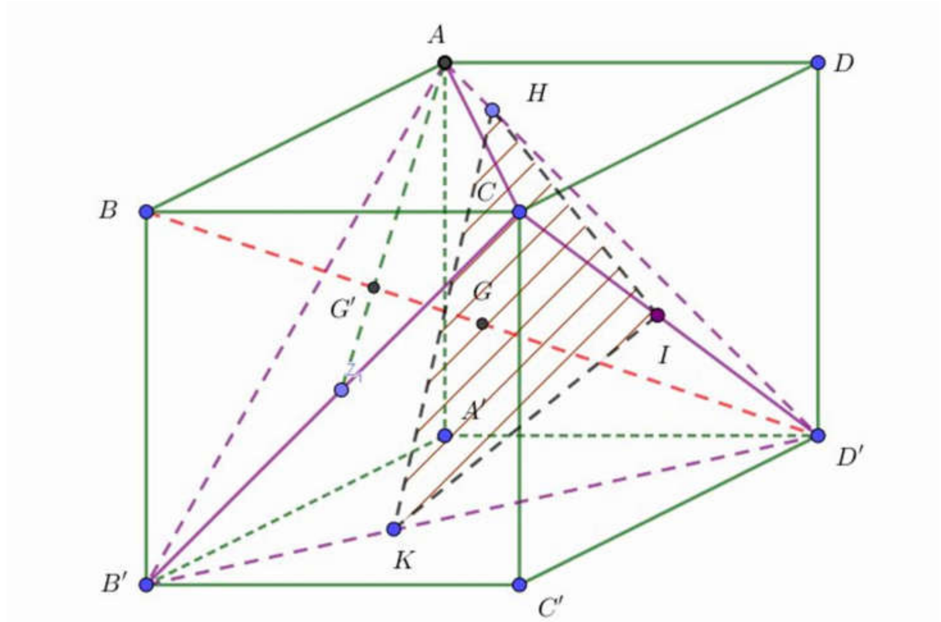
$\dfrac{V_{SMNG}}{V_{SABG'}} = \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SG}{SG'} \Leftrightarrow \dfrac{3V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \dfrac{3SM.SN}{4a^2} \Leftrightarrow \dfrac{V_{SMNG}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM.SN}{4a^2}\,(1)$.

Lập luận tương tự thu được $\dfrac{V_{SNPG}}{V_{SABC}} = \dfrac{SN.SP}{4a^2}\,(2)$ và $\dfrac{V_{SGPM}}{V_{SG'CA}} = \dfrac{SP.SM}{4a^2}(3)$.

Cộng theo vế các đẳng thức (1), (2), (3) ta được

$\dfrac{V_{SMNP}}{V_{SABC}} = \dfrac{SM.SN + SN.SP + SP.SM}{4a^2} \Leftrightarrow \dfrac{SM}{SA}.\dfrac{SN}{SB}.\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SM.SN + SN.SP + SP.SM}{4a^2}$

$\Leftrightarrow 4a^2.SM.SN.SP = (SM.SN + SN.SP + SP.SM).a^3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{SM} + \dfrac{1}{SN} + \dfrac{1}{SP} = \dfrac{4}{a}$. .



Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Ta có hình chiếu của $D'B$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ là DB, trên $(ABCD)$ ta có $DB \perp AC$ nên $D'B \perp AC$.

Tương tự, ta có $D'B \perp B'C$. Từ đó suy ra $D'B \perp (B'AC)$.

Xét tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$. Vì $D'B \perp (B'AC)$ nên $D'B$ là đường cao của tứ diện.

Gọi G' là giao điểm của $D'B$ với $(B'AC)$, ta chứng minh được $D'G = \frac{3}{4}D'G'$

Vì tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều nên G' là trọng tâm của tam giác $B'AC$, suy ra G là trọng tâm của tứ diện $D'AB'C$.

Ta có: $T = \frac{1}{D'H.D'I} + \frac{1}{D'I.D'K} + \frac{1}{D'K.D'H} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'K}\right)^2$ (1)

ÁP DỤNG Bổ đề trên: Xét tứ diện $D'AB'C$ là tứ diện đều cạnh bằng $a\sqrt{2}$, ta có

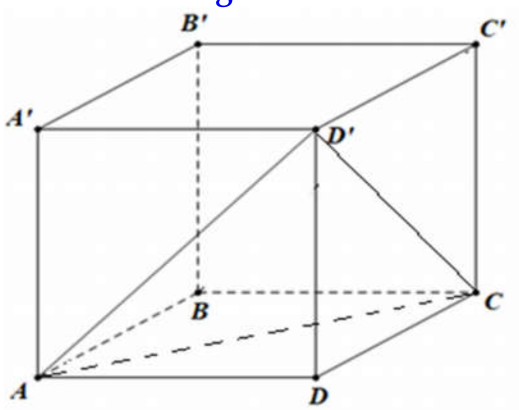
$\frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'K} = \frac{4}{a\sqrt{2}}$ (2)

Từ $(1),(2)$ ta được

$$T = \frac{1}{D'H.D'I} + \frac{1}{D'I.D'K} + \frac{1}{D'K.D'H} \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{D'H} + \frac{1}{D'I} + \frac{1}{D'K}\right)^2 = \frac{1}{3}.\left(\frac{4}{a\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{8}{3a^2}.$$

Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC = a, AD' = b, CD' = c$. Tìm thể tích lớn nhất của hình chữ nhật đã cho khi a,b,c thay đổi, còn chu vi tam giác ACD' không đổi.

Lời giải



Đặt $AD = d, CD = r, DD' = h$

Ta có:

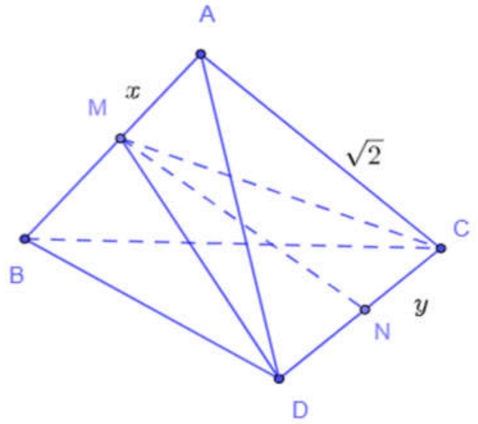
$$\begin{cases} a^2 = d^2 + r^2 \ge 2dr > 0 \\ b^2 = d^2 + h^2 \ge 2dh > 0 \Rightarrow a^2b^2c^2 \ge 8d^2h^2r^2 \Leftrightarrow abc \ge 2\sqrt{2}dhr \Leftrightarrow V \le \frac{abc}{2\sqrt{2}}. \\ c^2 = h^2 + r^2 \ge 2hr > 0 \end{cases}$$

Mà $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{k^3}{27}$ nên $V_{\max} = \frac{k^3\sqrt{2}}{108}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} d = r = h \\ a = b = c = \frac{k}{3} \end{cases} \Rightarrow d = r = h = \frac{k}{3\sqrt{2}}$.

Câu 41. Cho tứ diện $ABCD$, $AB = x, CD = y$, các cạnh còn lại của tứ diện bằng $a\sqrt{2}$, x, y thay đổi sao cho $x + y = 2a$. Khi V_{ABCD} đạt giá trị nhỏ nhất, tính cosin của góc giữa (ABC) và (ABD).

Lời giải



-Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD.

$\Rightarrow MN \perp AB, CD$

$\Rightarrow (MCD) \perp AB$

-Gọi $\alpha = \widehat{((ABC),(ABD))}$

$\Rightarrow \alpha = \widehat{(MD, MC)}$

-Coi $a = 1 \Rightarrow x + y = 2$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}AB.S_{MCD} = \frac{1}{6}xy\sqrt{\frac{8-(x^2+y^2)}{4}} = \frac{1}{12}xy\sqrt{4+2xy}.$$

-Đặt $t = xy \Rightarrow 0 < t \leqslant \frac{(x+y)^2}{4} = 1$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{12}t\sqrt{4+2t}$, với $0 < t \le 1$.

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{12}\left(\sqrt{4+2t} + \frac{t}{\sqrt{4+2t}}\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{4+3t}{\sqrt{4+2t}}\right) > 0,\ \forall t \in (0; 1]$.

$\Rightarrow Maxf(t) = f(1) = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

$\Rightarrow MaxV_{ABCD} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

$" = " \Leftrightarrow x = y = 1 \Rightarrow MC = MD = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

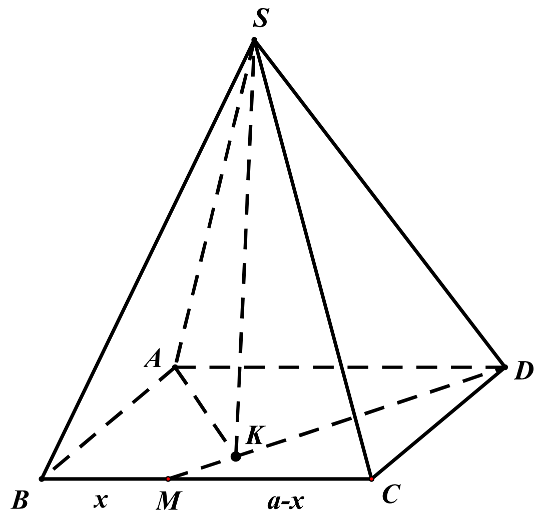
$\cos\widehat{DMC} = \frac{2MC^2 - CD^2}{2MC^2} = \frac{5}{7} \to \cos\varphi = \frac{5}{7}$.

Câu 42. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh $SA = a$ và vuông góc với mp$(ABCD)$. M là điểm di động trên đoạn BC và $BM = x(0 \le x \le a)$, K là hình chiếu của S trên DM.

a) Tính độ dài đoạn SK theo a và x.

b) Tìm min của đoạn SK.

Lời giải



a) Do $DM \perp SA$ và $DM \perp SK$ nên $DM \perp AK$.

Ta có:

$$\sin\widehat{ADK} = \cos\widehat{MDC} \Leftrightarrow \frac{AK}{AD} = \frac{DC}{DM} \Leftrightarrow \frac{AK}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2+(a-x)^2}} \Leftrightarrow AK = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+(a-x)^2}}$$

Suy ra $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^4}{a^2+(a-x)^2}} = a\sqrt{1+\dfrac{a^2}{a^2+(a-x)^2}}$

b) Do $SK = a\sqrt{1+\dfrac{a^2}{a^2+(a-x)^2}}$ nên SK nhỏ nhất khi $(a-x)^2$ lớn nhất hay $x=0$.

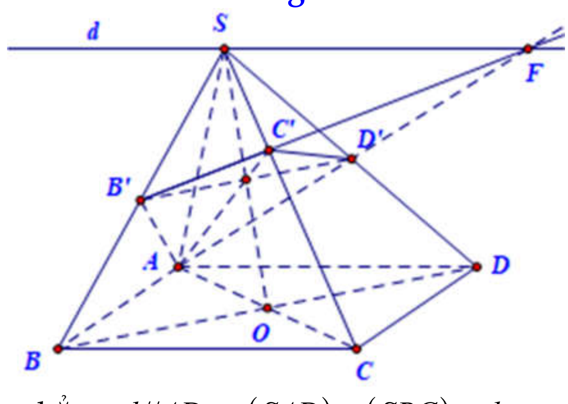
Vậy $minSK = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ khi $x=0$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tứ giác $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Điểm C' di động trên cạnh SC (C' khác điểm S và C). Mặt phẳng (R) chứa đường thẳng AC' và song song với BD. Mặt phẳng (R) cắt đường thẳng SB, SD lần lượt tại B', D'.

1/ Gọi F là giao điểm của AD' với $B'C'$. Chứng minh rằng F luôn di động trên một đường thẳng cố định khi C' di động trên SC.

2/ Xác định vị trí của điểm C' sao cho tổng $\dfrac{SC'}{CC'} + 3\dfrac{BB'}{SB'} + \dfrac{5}{2}.\dfrac{SD'}{DD'}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



1/ Qua S kẻ đường thẳng $d // AD \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = d$.

Xét các mặt phẳng (SAD), (SBC), $(AB'C'D')$ có:

$\begin{cases}(SAD)\cap(SBC)=d\\(SAD)\cap(AB'C'D')=AD'\\(SBC)\cap(AB'C'D')=B'C'\\AD'\cap B'C'=F\end{cases}$ nên d, AD', $B'C'$ đồng quy tại F.

Khi đó $J\in d$ cố định.

2/ Ta có: $\dfrac{SA}{SA}+\dfrac{SC}{SC'}=\dfrac{SB}{SB'}+\dfrac{SD}{SD'}\Leftrightarrow 1+\dfrac{SC}{SC'}=2\dfrac{SB}{SB'}$.

Lại có:

i) $\dfrac{SC'}{CC'}=\dfrac{1}{\dfrac{CC'}{SC'}}=\dfrac{1}{\dfrac{SC-SC'}{SC'}}=\dfrac{1}{\dfrac{SC}{SC'}-1}=\dfrac{1}{\dfrac{SC}{SC'}+1-2}=\dfrac{1}{2\dfrac{SB}{SB'}-2}=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)}$ (1)

ii) $3\dfrac{BB'}{SB'}=3\dfrac{SB-SB'}{SB'}=3\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)$ (2)

iii) $\dfrac{5}{2}\dfrac{SD'}{DD'}=\dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\dfrac{DD'}{SD'}}=\dfrac{5}{\dfrac{2(SD-SD')}{SD'}}=\dfrac{5}{2\left(\dfrac{SD}{SD'}-1\right)}=\dfrac{5}{2\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)}$ (3)

Từ , , ta có: $\dfrac{SC'}{CC'}+3\dfrac{BB'}{SB'}+\dfrac{5}{2}.\dfrac{SD'}{DD'}=\dfrac{1}{2\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)}+3\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)+\dfrac{5}{2\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)}$

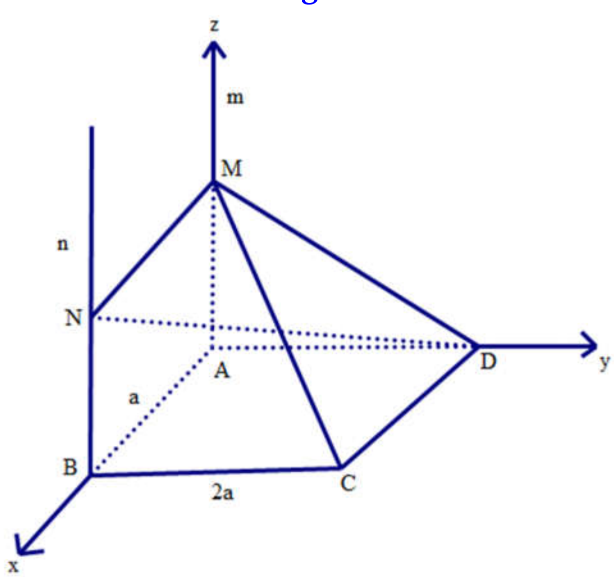
$=\dfrac{3}{\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)}+3\left(\dfrac{SB}{SB'}-1\right)\geq 6$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\dfrac{SB}{SB'}-1=1\Leftrightarrow\dfrac{SB}{SB'}=2\Rightarrow\dfrac{SC}{SC'}=3$.

Vậy tổng nhỏ nhất khi C' thuộc đoạn SC thỏa $\dfrac{SC}{SC'}=3$.

Câu 44. Trong mặt phẳng α cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a;BC=2a$. Các điểm M,N lần lượt di chuyển trên các đường thẳng m,n vuông góc với mặt phẳng (α) tại A,B sao cho $DM\perp CN$. Tìm giá trị nhỏ nhất của khối tứ diện $CDMN$.

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ, coi $a=1$.

Do đó $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;2;0), D(0;2;0)$.

Đặt $AM = x, BN = y \Rightarrow M(0;0;x), N(1;0;y)$ suy ra $\overrightarrow{DM}(0;-2;x), \overrightarrow{CN}(0;-2;y)$.

Mà $DM \perp CN$ nên $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = 0$.

$\Rightarrow 0.0 + (-2).(-2) + xy = 0 \Rightarrow xy = -4 \Leftrightarrow y = \dfrac{-4}{x}$.

$\overrightarrow{CD}(-1;0;0); \overrightarrow{CM}(-1;-2;x); \overrightarrow{CN}(0;-2;y)$.

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}\right] = (0;x;2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{CN} = -2x + 2y$.

$\Rightarrow V_{CDMN} = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{CN}\right| = \dfrac{1}{6}|-2x + 2y|$.

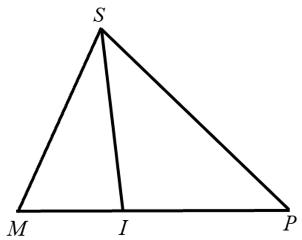
$\Rightarrow V_{CDMN} = \dfrac{1}{3}\left|-x - \dfrac{4}{x}\right| \geq \dfrac{1}{3}.2\sqrt{x.\dfrac{4}{x}} = \dfrac{4}{3}$.

Vậy $V_{CDMN} \min = \dfrac{4a^3}{3}$.

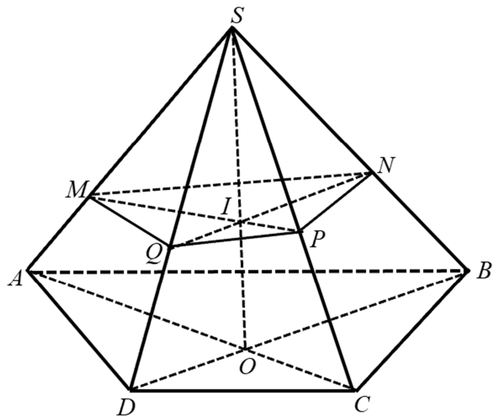
Câu 45. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, AB song song với CD, $AB = 2CD$, các cạnh bên có độ dài bằng 1. Gọi $O = AC \cap BD$, I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (α) thay đổi đi qua I và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{SN^2} + \dfrac{1}{SP^2} + \dfrac{1}{SQ^2}$.

Lời giải

Nhận xét:



I thuộc đoạn MP thì với điểm S bất kỳ, ta có $m\overrightarrow{SI} = n\overrightarrow{SM} + p\overrightarrow{SP} \Leftrightarrow m = n + p$.



Đặt $x = \dfrac{SA}{SM}; y = \dfrac{SC}{SP}$.

$\overrightarrow{SI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AO}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SC} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{SA}\right) = \dfrac{1}{6}\overrightarrow{SA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC}$

$= \dfrac{x}{6}\overrightarrow{SM} + \dfrac{y}{3}\overrightarrow{SP}$.

Vì I thuộc đoạn MP nên $1=\frac{x}{6}+\frac{y}{3}\Leftrightarrow x+2y=6\Leftrightarrow\frac{SA}{SM}+2\frac{SC}{SP}=6\Leftrightarrow\frac{1}{SM}+\frac{2}{SP}=6$.

Chứng minh tương tự $\frac{1}{SN}+\frac{2}{SQ}=6$.

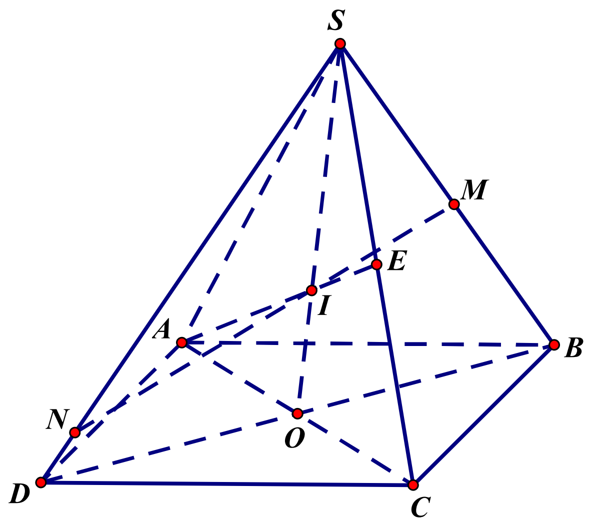
Ta có $\frac{1}{SM}+\frac{1}{SN}+\frac{2}{SP}+\frac{2}{SQ}=12\Rightarrow 12^2=\left(\frac{1}{SM}+\frac{1}{SN}+\frac{2}{SP}+\frac{2}{SQ}\right)^2$

$\le\left(1^2+1^2+2^2+2^2\right)\left(\frac{1}{SM^2}+\frac{1}{SN^2}+\frac{1}{SP^2}+\frac{1}{SQ^2}\right)=10T\Rightarrow T\ge\frac{144}{10}=\frac{72}{5}$.

Vậy $T_{\min}=\frac{72}{5}$, đạt được khi $\frac{1}{SM}=\frac{1}{SN}=\frac{1}{2SP}=\frac{1}{2SQ}=3\Leftrightarrow SM=SN=\frac{1}{3};SP=SQ=\frac{1}{6}$.

Câu 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E là trung điểm của SC. Mặt phẳng (α) thay đổi nhưng luôn chứa AE cắt SB, SD lần lượt tại M, N. Xác định vị trí của M, N trên các cạnh SB, SD sao cho $\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Trong $(ABCD)$ gọi $O=AC\cap BD$, trong $mp(\alpha)$ gọi $I=AE\cap MN$. Khi đó ta có

+ $\begin{cases}I\in AE\subset(SAC)\\ I\in MN\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow I\in SO=(SAC)\cap(SBD)$ suy ra I là trọng tâm tam giác SAC.

+ $\frac{V_{S.AME}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.AME}}{2V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}\frac{SM}{SB}\frac{SE}{SC}=\frac{1}{4}\frac{SM}{SB}$

+ $\frac{V_{S.ANE}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.ANE}}{2V_{S.ACD}}=\frac{1}{2}\frac{SN}{SD}\frac{SE}{SC}=\frac{1}{4}\frac{SN}{SD}$

Suy ra $\frac{V_{S.AMEN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.ANE}+V_{S.AME}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{4}\left(\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}\right)(1)$

+ $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.AMN}}{2V_{S.ABD}}=\frac{1}{2}\frac{SM}{SB}\frac{SN}{SD}$

+ $\frac{V_{S.MEN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.MEN}}{2V_{S.BCD}}=\frac{1}{2}\frac{SM}{SB}\frac{SN}{SD}\frac{SE}{SC}=\frac{1}{4}\frac{SM}{SB}\frac{SN}{SD}$

Suy ra $\frac{V_{S.AMEN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.AMN}+V_{S.MEN}}{V_{S.ABCD}}=\frac{3}{4}\frac{SN}{SD}\frac{SM}{SB}(2)$

Từ (1) và (2) ta có $\frac{1}{4}\left(\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}\right)=\frac{3}{4}\frac{SN}{SD}\frac{SM}{SB}\Leftrightarrow\frac{SN}{SD}+\frac{SM}{SB}=3\frac{SN}{SD}\frac{SM}{SB}$

Đặt $\begin{cases}\frac{SN}{SD}=x\\ \frac{SM}{SB}=y\end{cases}$ $(0\le x,y\le 1)$ vậy ta có $x+y=3xy$ suy ra $y=\frac{x}{3x-1}\xrightarrow{1\ge x,y\ge 0}\frac{1}{2}\le x\le 1$

Ta có $\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}=x+y=x+\frac{x}{(3x-1)}=x+\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3x-1)}=f(x)$

Xét $f(x)=x+\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3x-1)},x\in\left[\frac{1}{3};1\right]$

$f'(x)=1-\frac{1}{(3x-1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-1=1\\3x-1=-1\end{array}\right.\xrightarrow{x\in\left[\frac{1}{3};1\right]}x=\frac{2}{3}$

Bảng biến thiên

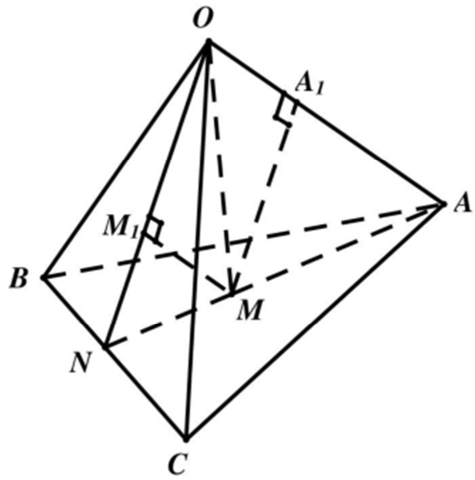
x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Vậy ta có $Max\left(\frac{SM}{SB}+\frac{SN}{SD}\right)=\max\limits_{\left[\frac{1}{2};1\right]}f(x)=\frac{3}{2}$ đạt được khi $\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=\frac{1}{2}\\x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=1\end{array}\right.$

Khi đó $N\equiv D$, M là trung điểm SB hoặc $M\equiv B$, N là trung điểm SD

Câu 47. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc. Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{MA^2}{OA^2}+\frac{MB^2}{OB^2}+\frac{MC^2}{OC^2}$

Lời giải



Gọi $N=AM\cap BC$, kẻ MM_1 // OA thì ta có

$\begin{cases} OA \perp (OBC) \\ MM_1 //OA \end{cases} \Rightarrow MM_1 \perp (OBC)$

kẻ $MA_1 \perp OA, A_1 \in OA$. Khi đó

$AM^2 = AA_1^2 + MA_1^2 = AA_1^2 + MO^2 - OA_1^2$

$= OM^2 + \left(AA_1 - OA_1\right)\left(AA_1 + OA_1\right)$

$= OM^2 + OA\left(OA - 2OA_1\right)$

$= OM^2 + OA^2 - 2OA \cdot OA_1$

Suy ra $\dfrac{AM^2}{OA^2} = \dfrac{OM^2}{OA^2} + 1 - \dfrac{2OA_1}{OA}(1)$.

Tương tự gọi B_1, C_1 là các điểm tương tự như A_1 thì ta có

$\dfrac{MB^2}{OB^2} = \dfrac{OM^2}{OB^2} + 1 - \dfrac{2OB_1}{OB}$

$\dfrac{MC^2}{OC^2} = \dfrac{OM^2}{OC^2} + 1 - \dfrac{2OC_1}{OC}(3)$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có $T = OM^2\left(\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}\right) - 2\left(\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC}\right) + 3$

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC thì ta dã biết kết quả quen thuộc

$\dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{OH^2}$ nên $T = \dfrac{OM^2}{OH^2} - 2\left(\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC}\right) + 3$

Mặt khác $\dfrac{OA_1}{OA} = \dfrac{NM}{NA} = \dfrac{S_{MhC}}{S_{ABC}}$

Tương tự $\dfrac{OB_1}{OB} = \dfrac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \dfrac{OC_1}{OC} = \dfrac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$ nên $\dfrac{OA_1}{OA} + \dfrac{OB_1}{OB} + \dfrac{OC_1}{OC} = 1$

Do đó $T = \dfrac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 2$ do $OM \geq OH$.

Vậy $\min T = 2$ khi $M \equiv H$.

----------HẾT----------