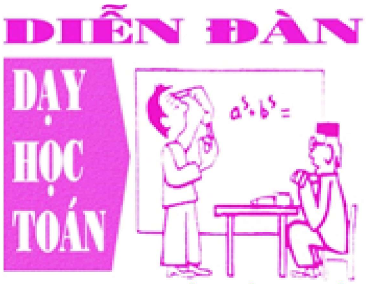

THEO CHƯƠNG TRÌNH VÀ SGK MỚI

MỘT SỐ KỸ THUẬT GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

HUỲNH NGUYỄN LUÂN LƯU - NGUYỄN THỊ DUY AN
(Trung tâm Thăng Long, TP. Hồ Chí Minh)

Ở học kì II năm lớp 10 các em học sinh có học về bất phương trình (BPT). Đây là dạng toán đòi hỏi kỹ năng tính toán phải tốt. Hơn nữa, nếu chúng ta không nắm vững một số kỹ thuật thì khi giải ta sẽ làm cho bài toán phức tạp thêm. Trong bài viết này chúng tôi xin giới thiệu đến các em một chuyên đề nhỏ này về cách giải một số bất phương trình.

1. Kỹ thuật đặt ẩn phụ

Bài 1. *Giải bất phương trình:*

$$(x+4)\sqrt{x-2}+\frac{8}{x\sqrt{x}}\ge\sqrt{2}(3x-4)\quad(1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$.

$$(1)\Leftrightarrow(x^2+4x)\sqrt{x^2-2x}+8\ge(3x^2-4x)\sqrt{2x}.$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-2x};b=\sqrt{2x}$. Suy ra:

$$x^2+4x=a^2+3b^2;\ 3x^2-4x=3a^2+b^2.$$

BPT trên trở thành:

$$(a^2+3b^2)a+8\ge(3a^2+b^2)b$$

$$\Leftrightarrow 8\ge(b-a)^3\Leftrightarrow 2\ge b-a\Leftrightarrow\sqrt{2x}\le\sqrt{x^2-2x}+2$$

$$\Leftrightarrow 2x\le x^2-2x+4+4\sqrt{x^2-2x}$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+4\sqrt{x^2-2x}\ge 0\ \text{(luôn đúng)}.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là:

$$S=[2;+\infty).$$

Bài 2. *Giải bất phương trình:*

$$x^3-3x^2+5x-2\ge\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{1-2x}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\le\frac{1}{2}$.

$$(1)\Leftrightarrow(x-1)^3-(1-2x)\ge\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{1-2x}$$

Đặt $a=x-1;b=\sqrt{1-2x}$. Suy ra:

$$a\le 0;b\ge 0\ \text{ và }\ x^2-3x+2=a^2-a.$$

BPT trên trở thành:

$$a^3-b^2\ge\left(a^2-a\right)b\Leftrightarrow\left(a^3-a^2b\right)+\left(ab-b^2\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b)+b(a-b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(a-b)\left(a^2+b\right)\ge 0\ \text{(luôn đúng)}.$$

Vậy BPT (1) có tập nghiệm là: $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

Bài 3. *Giải bất phương trình:*

$$1+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3\ge 0\quad(1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $a=\sqrt{x-1};b=\sqrt{2x}$. Suy ra:

$$a\ge 0;b\ge\sqrt{2}\ \text{ và }\ \frac{b^2-2a^2}{2}=1.$$

BPT trên trở thành:

$$1+a(b-3a)^3\ge 0\Leftrightarrow\left(\frac{b^2-2a^2}{2}\right)^2+a(b-3a)^3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left[1-2\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2+4\frac{a}{b}\left(1-3\frac{a}{b}\right)^3\ge 0\ (2).$$

Đặt $t=\frac{a}{b}$. Điều kiện: $t\ge 0$. BPT(2) trở thành:

$$\left(1-2t^2\right)^2+4t(1-3t)^3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow(2t-1)\left[t\left(52t^2-28t+6\right)+1\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t-1\ge 0\Leftrightarrow t\ge\frac{1}{2}.$$

Với $t\ge\frac{1}{2}\Rightarrow 2\sqrt{x-1}\ge\sqrt{2x}\Leftrightarrow 4x-4\ge 2x\Leftrightarrow x\ge 2$.

Vậy BPT(1) có tập nghiệm là: $S=[2;+\infty)$.

Bài 4. *Giải bất phương trình:*

$$(2x-1)\sqrt{x+4}-(2x+1)\sqrt{x-4}\le 16.$$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge 4$. BPT tương đương với:

$$2x\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)-\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)\le 16.$$

Đặt $t=\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}>0 \Rightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=\dfrac{8}{t}$

$$\Rightarrow 4x=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)^2+\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}\right)^2$$

$$=\frac{64}{t^2}+t^2.$$

Do đó BPT trên trở thành:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{64}{t^2}+t^2\right)t-\frac{8}{t}\le 16 \Leftrightarrow t^4-32t+48\le 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2\left[(t+2)^2+8\right]\le 0 \Leftrightarrow t=2.$$

Với $t=2$, ta có:

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-16}=x-2 \Leftrightarrow x=5.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=\{5\}$.

Bài 5. *Giải bất phương trình:*

$$4x\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}\right)\le\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}\right)^3.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\dfrac{3}{2}$.

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}>0 \Rightarrow \sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}=\dfrac{6}{t}$

$$\Rightarrow 8x=\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}\right)^2+\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x-3}\right)^2$$

$$=t^2+\frac{36}{t^2}.$$

Do đó BPT trên trở thành:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{36}{t^2}+t^2\right)\frac{6}{t}\le t^3 \Leftrightarrow t^6-3t^4-108\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(t^2-6\right)\left(t^4+3t^2+18\right)\ge 0 \Leftrightarrow t\ge\sqrt{6}.$$

Với $t\ge\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-3}\ge\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-9}+2x-3\ge 0 \ (*).$$

Do đó BPT(*) luôn đúng $\forall x\ge\dfrac{3}{2}$.

Vậy BPT có tập nghiệm $S=\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

2. Kỹ thuật ẩn phụ không hoàn toàn

Bài 6. *Giải bất phương trình:*

$$(x+6)\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)-2\sqrt{x^2+x-2}\ge 2x^2+x-6 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$. Điều kiện: $t>0$. Suy ra:

$$t^2=2x+1-2\sqrt{x^2+x-2}$$

$$\Rightarrow -2\sqrt{x^2+x-2}=t^2-2x-1.$$

BPT(1) trở thành: $t^2+(x+6)t-\left(2x^2+3x-5\right)\ge 0$

$$\Leftrightarrow (t-x+1)(t+2x+5)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow t-x+1\ge 0 \ (\text{vì } t+2x+5>0\ \forall x\ge 1).$$

Với $t-x+1\ge 0 \Rightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\ge x-1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}\ge (x-1)+\sqrt{x-1}$$

$$\Leftrightarrow x+2\ge (x-1)^2+2(x-1)\sqrt{x-1}+x-1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+2\left(\sqrt{x-1}\right)^3-3\le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\le 1 \Leftrightarrow x\le 2.$$

Đối chiếu với điều kiện, ta được tập nghiệm của BPT là: $S=[1;2]$.

Bài 7. *Giải bất phương trình:*

$$2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)+\sqrt{1-x^2}\ge 2x^2+4x-1 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $-1\le x\le 1$.

Đặt $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$. Điều kiện: $t\ge 0$

$$\Rightarrow t^2=2+2\sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}=\frac{t^2-2}{2}.$$

BPT(1) trở thành:

$$2t+\frac{t^2-2}{2}\ge 2x^2+4x-1 \Leftrightarrow t^2+4t\ge 4x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow t^2+4t\ge 4x^2+8x \Leftrightarrow (t-2x)(t+2x)+4(t-2x)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2x)(t+2x+4)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow t-2x\ge 0 \ (\text{vì } t+2x+4>0, \forall x\ge -1).$$

Với $t\ge 2x \Rightarrow \sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\ge 2x$ (2).

TH1: $-1\le x\le 0$ (thỏa bất phương trình (2)).

TH2: $0<x\le 1$.

$$(2)\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}\ge 2x^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-1<0 \\ \begin{cases} 2x^2-1\ge 0 \\ 4x^4-3x^2\le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \le x^2 \le \frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} < x \le \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

So với điều kiện, ta được: $0 < x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$

Kết hợp cả hai trường hợp, ta được tập nghiệm của BPT đã cho là $S = \left[-1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Bài 8. *Giải bất phương trình:*

$$x\sqrt{x^2+1} + (x-1)\sqrt{x^2-2x+2} \ge 1-2x.$$

Lời giải. Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x^2+1} \\ b = \sqrt{x^2-2x+2} \end{cases}$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 2x-1 \Rightarrow x = \frac{a^2-b^2+1}{2}.$$

BPT trên trở thành:

$$\left[\frac{a^2-b^2+1}{2}a + \frac{a^2-b^2-1}{2}b\right] \ge b^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2-b^2)(a+b) + (a-b) \ge 2(b^2-a^2)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b)^2 + 2(a^2-b^2) + (a-b) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+1)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a-b \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \ge \sqrt{x^2-2x+2} \Leftrightarrow x^2+1 \ge x^2-2x+2$$

$$\Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3. Kỹ thuật nhân lượng liên hợp có đánh giá

Bài 9 (Đề thi ĐH KD năm 2014). *Giải bất phương trình:*

$$(x+1)\sqrt{x+2} + (x+6)\sqrt{x+7} \ge x^2 + 7x + 12 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x+2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right) + (x+6)\left(\sqrt{x+7}-3\right) \ge x^2+2x-8$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} + (x+6)\frac{x-2}{\sqrt{x+7}+3} \ge (x-2)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} - (x+4)\right] \ge 0 \ (2).$$

Ta có:

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3} < \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} + \frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}$$

$$< \frac{x+2}{2} + \frac{x+6}{3} = \frac{5x+18}{6} < x+4 \ \forall x \ge -2.$$

Suy ra: $(2) \Leftrightarrow x-2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$. So với điều kiện, ta nhận $-2 \le x \le 2$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S = [-2; 2]$.

Bình luận. Đây là một bài BPT đẹp, hầu như các em khá giỏi đều biến đổi được về BPT(2), đến đây thì đa số các em vướng vì không biết cách đánh giá. Một sai lầm phổ biến khi ta đánh giá $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} \le \frac{x+1}{2}, \forall x \ge -2$ vì điều này không đúng khi $x+1<0$. Ở đây ta chỉ cần để ý tính chất đơn giản sau:

Cho $a \in \mathbb{R}; a < b; c > 0$ *thì* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$,

tính chất này dùng để đánh giá cùng mẫu dương các phân thức khi tử vừa âm vừa dương. Vận dụng để đánh giá $\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2} < \frac{x+2}{\sqrt{x+2}+2} \le \frac{x+2}{2}$, đây là đánh giá mấu chốt để giải hoàn chỉnh bài toán.

Bài 10. *Giải bất phương trình:*

$$(x+1)\sqrt[3]{3x-1} + (3x-1)\sqrt{x+1} \ge 3x^2+2x-9 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -1$.

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt[3]{3x-1}-2\right) + (3x-1)\left(\sqrt{x+1}-2\right) \ge (x-3)(3x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\frac{3(x-3)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3} + (3x-1)\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} \ge (x-3)(3x+3)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[\frac{3(x+1)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3}+\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}+2}-3(x+1)\right]\geq 0 \ (2).$$

Ta có: $\dfrac{3(x+1)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3}\leq\dfrac{3(x+1)}{3};$

$$\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{3(x+1)}{\sqrt{x+1}+2}\leq\frac{3(x+1)}{2}.$$

Suy ra:

$$\frac{3(x+1)}{\left(\sqrt[3]{3x-1}+1\right)^2+3}+\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}+2}<\frac{5(x+1)}{2}<3(x+1).$$

Do đó: $(2)\Leftrightarrow x-3\leq 0\Leftrightarrow x\leq 3$. So với điều kiện, ta được: $-1\leq x\leq 3$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=[-1;3]$.

Bài 11. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x+7}+x^2-2x-3\leq\sqrt{4x-2}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq\dfrac{1}{2}$. BPT đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3+\sqrt{x+7}-\sqrt{4x-2}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-3+\frac{x+7-4x+2}{\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3)+\frac{3(3-x)}{\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x+1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)-3\right]\leq 0 \ (*).$$

Với $x\geq\dfrac{1}{2}$, ta có: $x+1\geq\dfrac{3}{2}$ và

$$\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)^2=5(x+1)+2\sqrt{(x+1)(4x-2)}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)^2\geq 5(x+1)\geq\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\geq\sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Suy ra: $(x+1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)\geq\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{15}{2}}>3.$

Do đó: $(*)\Leftrightarrow x-3\leq 0\Leftrightarrow x\leq 3$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=\left[\dfrac{1}{2};3\right]$.

Bình luận. Khi xét hàm số

$$f(x)=(x+1)\left(\sqrt{x+7}+\sqrt{4x-2}\right)-3$$

ta thấy $f(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ nên suy ra

$$f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{15}{2}}-3>0,\ \forall x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right),$$

từ đó ta có: $(*)\Leftrightarrow x-3\leq 0\Leftrightarrow x\leq 3.$

Bài 12. *Giải bất phương trình:*

$$\sqrt{x-x^2}\left(\sqrt{1-2x^2}-\sqrt{2x-1}\right)\leq 1-x-x^2 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x-x^2}\left(-2x^2-2x+2\right)\leq\left(1-x-x^2\right)\left(\sqrt{1-2x^2}+\sqrt{2x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(1-x-x^2\right)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}-2\sqrt{x-x^2}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-x-x^2\right)\frac{2x^2-2x+2\sqrt{(2x-1)\left(1-2x^2\right)}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}+2\sqrt{x-x^2}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-x-x^2\right)\frac{\left(\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x^2}\right)^2}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{1-2x^2}+2\sqrt{x-x^2}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x^2}=0\\ \begin{cases}\sqrt{2x-1}-\sqrt{1-2x^2}\neq 0\\ 1-x-x^2\leq 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\\ x<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\vee x>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x\leq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \text{hoặc}\ x\geq\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

So với điều kiện, ta đượctập nghiệm của BPT đã cho là $S=\left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

4. Kỹ thuật dùng hàm số để giải

Bài 13. *Giải bất phương trình:*

$$\frac{3-x}{\sqrt{6-x}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}}-1\geq 0 \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $-2<x<6$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{3-x}{\sqrt{6-x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}-1$ liên tục trên $(-2;6)$ có:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{x-9}{\left(\sqrt{6-x}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{x+2}\right)^3}\right]<0,\ \forall x\in(-2;6).$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-2;6)$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge 0\Leftrightarrow f\left(x\right)\ge f\left(2\right)\Leftrightarrow x\le 2.$$

So với điều kiện, ta được: $-2<x\le 2$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=\left(-2;2\right]$.

Bài 14. *Giải bất phương trình:*

$$\left(2x+2\right)\sqrt{2x+3}+\left(x+12\right)\sqrt{x-1}\ge 6x+2\ \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$. Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\left(2x+2\right)\sqrt{2x+3}+\left(x+12\right)\sqrt{x-1}-6x-2\ge 0.$$

Xét hàm số

$$f\left(x\right)=\left(2x+2\right)\sqrt{2x+3}+\left(x+12\right)\sqrt{x-1}-6x-2$$

liên tục trên $\left[1;+\infty\right)$. Ta có:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{6x+8}{\sqrt{2x+3}}+\frac{3x+10}{2\sqrt{x-1}}-6\\&>\frac{1}{2}\left(3\sqrt{x-1}+\frac{13}{\sqrt{x-1}}\right)-6\\&>\sqrt{39}-6>0,\ \forall x\in\left[1;+\infty\right).\end{aligned}$$

Suy ra $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[1;+\infty\right)$.

Do đó: $f\left(x\right)\ge f(1)=4\sqrt{5}-8>0\ \forall x\in\left[1;+\infty\right)$

$\Rightarrow$ BPT(1) đúng $\forall x\in\left[1;+\infty\right)$. Vậy BPT có tập nghiệm là $S=\left[1;+\infty\right)$.

Bài 15. *Giải bất phương trình:*

$$\left(2x+2\right)\sqrt{2x+1}+\left(x+12\right)\sqrt{x-1}\le 6x+4\ \ (1).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 1$.

Đặt $t=\sqrt{x-1}$, suy ra: $x=t^2+1$. BPT(1) trở thành: $\left(2t^2+4\right)\sqrt{2t^2+3}\le 10-13t+6t^2-t^3$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2t^2+3}\right)^3+\sqrt{2t^2+3}\le(2-t)^3+(2-t)\ \ (2).$$

Đặt $u=\sqrt{2t^2+3};v=2-t$, BPT(2) trở thành:

$$u^3+u\le v^3+v\ \ (3).$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(3)\Leftrightarrow f\left(u\right)\le f\left(v\right)\Leftrightarrow u\le v\Leftrightarrow\sqrt{2t^2+3}\le 2-t$$

$$\Leftrightarrow t\le\sqrt{5}-2\Leftrightarrow x\le 10-4\sqrt{5}.$$

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của BPT là $S=\left[1;10-4\sqrt{5}\right]$.

Bình luận. Thoạt nhìn ta cứ nghĩ bài này có thể giải giống như bài 11 nhưng thực tế lại không như vậy. Do có nghiệm xấu nên việc giải bằng kỹ thuật nhân lượng liên hợp gặp nhiều khó khăn, đặt $a=\sqrt{2x+1};b=\sqrt{x-1}$ rồi biểu diễn các biểu thức còn lại theo a,b bằng kỹ thuật hệ số bất định rất phức tạp, ta nhận thấy cách giải trên là tối ưu hơn cả.

Bài 16. *Giải bất phương trình:*

$$1+x\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2-x+1}\left(1+\sqrt{x^2-x+2}\right).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $a=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow 1=a^2-x^2+x$. BPT trên trở thành: $1+x\sqrt{x^2+1}\ge a\left(1+\sqrt{a^2+1}\right)$

$$\Leftrightarrow a^2-x^2+x+x\sqrt{x^2+1}>a+a\sqrt{a^2+1}\ \ (1)$$

$$\Leftrightarrow -x^2+x+x\sqrt{x^2+1}>-a^2+a+a\sqrt{a^2+1}.$$

Xét hàm số $f(t)=-t^2+t+t\sqrt{t^2+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có: $f'(t)=\sqrt{t^2+1}-2t+1+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$

$$=\frac{\left(\sqrt{t^2+1}-t\right)^2}{\sqrt{t^2+1}}+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$$

nên hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó:

$$(1)\Leftrightarrow f\left(x\right)>f\left(a\right)\Leftrightarrow x>a$$

$$\Leftrightarrow x>\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x>1.$$

Vậy BPT có tập nghiệm $S=\left(1;+\infty\right)$.

Bài 17. *Giải bất phương trình:*

$$\left(\frac{x-1}{\sqrt{x}}\right)^3\sqrt{2x-1}\ge\left(x^2-2x-1\right)\sqrt{x-2}\ \ (1)$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge 2$.

Cách 1. Viết lại BPT(1) về dạng:

$$\frac{(2x-2)\sqrt{2x-1}}{2x} \ge \frac{\left(x^2-2x-1\right)\sqrt{x^2-2x}}{x^2-2x+1} \quad (2).$$

Đặt $\begin{cases} a = 2x-2 \\ b = x^2-2x-1 \end{cases}$. Điều kiện: $a, b > 0$. BPT (2) thành: $\frac{a\sqrt{a+1}}{a+2} \ge \frac{b\sqrt{b+1}}{b+2}$ (3).

Xét hàm số $f(t) = \frac{t\sqrt{t+1}}{t+2}$ liên tục trên $(0;+\infty)$ có: $f'(t) = \frac{t^2+6t+4}{2(t+2)^2\sqrt{t+1}} > 0\ \forall t \in (0;+\infty)$

nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó:

$$(3) \Leftrightarrow f(a) \ge f(b) \Leftrightarrow a \ge b \Leftrightarrow x^2-4x+1 \le 0$$
$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3} \le x \le 2+\sqrt{3}.$$

So với điều kiện ta được tập nghiệm của BPT là $S = \left[2; 2+\sqrt{3}\right]$

Cách 2.

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^3\sqrt{2x-1} \ge \left(x^3-2x^2+x\right)\sqrt{x^2-2x}$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^3\sqrt{2x-1} \ge (x-1)^3\sqrt{x^2-2x} + \left(x^2-4x+1\right)\sqrt{x^2-2x}$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+1\right)\left(\sqrt{x^2-2x} + \frac{(x-1)^3}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x^2-2x}}\right) \le 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+1 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 2+\sqrt{3}.$$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Giải các phương trình sau:

1. $(x-3)\left(\sqrt{2x-1}+\sqrt{x}\right)^2 \ge (x-1)^2$

2. $\sqrt{x+\frac{3}{x}} + \sqrt{2-x+\frac{3}{2-x}} \le 4$

3. $\frac{x^2+x-2\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}-3} = \sqrt{x+2}$

4. $3\sqrt{2x+5} + 2\sqrt{x+2} \ge x^3-8x^2+25x-13$

5. $(2x+4)\sqrt{5-x^2} + (x-1)\sqrt{5+x^2} \le 7x+5$

6. $(x^2-x-6)\sqrt{x-1} + (x-2)\sqrt{x+1} \ge 3x^2-9x+2.$