MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa 1

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số tăng** nếu với mọi n ta có $u_n < u_{n+1}$

Dãy số (u_n) được gọi là **dãy số giảm** nếu với mọi n ta có $u_n > u_{n+1}$

2. Định nghĩa 2

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn trên** nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \le M, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn dưới** nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \ge m, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

Dãy số (u_n) được gọi là dãy số **bị chặn** nếu tồn tại một số M và một số m sao cho $m \le u_n \le M, \forall n \in \mathbb{N}^*$

3. Định lý 1

a. Mọi dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

b. Mọi dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

4. Định lí 2

a. Mọi dãy tăng và không bị chặn trên thì tiến tới $+\infty$.

b. Mọi dãy giảm và không bị chặn dưới thì tiến tới $-\infty$.

5. Định lý 3

a. Nếu một dãy (u_n) hội tụ đến a thì mọi dãy con trích từ (u_n) cũng hội tụ đến a.

b. (u_n) hội tụ đến $a \Leftrightarrow (u_{2n})$ và (u_{2n+1}) hội tụ đến a.

6. Định lý 4

a. Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ và $u_n \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \infty$

b. Nếu $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \infty$ và $u_n \ne 0, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$

7. Định lý 5.(Định lý kẹp giữa về giới hạn). Nếu với mọi $n \ge n_0$ ta luôn có $u_n \le x_n \le v_n$ và $\lim u_n = \lim v_n = a$ thì $\lim x_n = a$

8. Sử dụng tiêu chuẩn Weierstrass để chứng minh dãy số có giới hạn

Bài toán. Chứng minh dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f(u_{n-1}); n \ge 2 \end{cases}$ có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó ($f(x)$ là hàm số liên tục).

Phương pháp giải

a) Dãy (x_n) bị chặn. Nếu $f(x)$ là hàm số tăng trên $[a;b]$ thì dãy (x_n) đơn điệu và hội tụ đến L là nghiệm của phương trình $f(x) = x$.

b) Nếu $f(x)$ là hàm số nghịch biến thì các dãy con $(x_{2n});(x_{2n+1})$ của dãy (x_n) ngược chiều biến thiên.

Nhận xét: Nếu dãy (x_{2n}) hội tụ đến L, dãy (x_{2n+1}) hội tụ đến K:

Với $L \neq K$ thì dãy (x_n) không có giới hạn;

Với $L = K$ thì dãy (x_n) có giới hạn là L.

II. BÀI TẬP

1. CHỨNG MINH DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN

Bài 1. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{3}{u_n^2}\right); (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Chứng minh dãy số có giới hạn. Tính $\lim u_n$?

Lời giải

Theo công thức xác định dãy (u_n), ta có $u_n > 0;\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{3}{u_n^2}\right) = \frac{1}{3}\left(u_n + u_n + \frac{3}{u_n^2}\right) \geq \sqrt[3]{u_n^2.\frac{3}{u_n^2}} = \sqrt[3]{3}\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó: $u_n \geq \sqrt[3]{3}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{u_n^2} - u_n = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{u_n^2} - u_n\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3 - u_n^3}{u_n^2}\right) \leq 0$.

Vậy (u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn.

Giả sử, $\lim u_n = a$ .Ta có: $a = \frac{2}{3}a + \frac{1}{a^2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{3}$.

Kết luận. $\lim u_n = \sqrt[3]{3}$.

Bài 2. Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn đó

Bài 3. Chứng minh dãy số $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \frac{-1}{3 + u_{n-1}}; n = 1,2,3... \end{cases}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

a) $x_n : x_1 = \frac{1}{6}, x_{n+1} = \frac{3x_n}{2x_n + 1}$

b) $x_n : x_1 = \sqrt{2}; x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$

c) $x_n : x_n = \frac{n!}{2n+1\ !!}; n \in N$

d) $x_n : x_1 = 13; x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}$

e) $x_n : x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - x_n^2$

f) $\quad (u_n) \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{2u_n + 1}\ ,\ n \geq 1 \end{cases}$

g) $\quad (x_n) \begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{3x_{n-1} + 2}{10x_n + 2x_{n-1} + 2}, n \geq 2 \end{cases}$

h) $\quad (x_n) : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 20 + \dfrac{13}{x_n}, n = 1, 2... \end{cases}$

i) $\quad (x_n) : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2014}{x_n}\right), n \geq 1 \end{cases}$

j) $\quad (x_n) : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_n = \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-1}^2 + 1}, n \geq 2 \end{cases}$

k) $\quad (x_n) : x_1 = \dfrac{3}{2}; x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}; n \geq 1$

l) $\quad (x_n) : x_1 = 0; x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}; n \geq 1$

m) $\quad (x_n) : x_1 = 1; x_{n+1} = \dfrac{2(2x_n + 1)}{x_n + 3}; n \geq 1$

n) $\quad (x_n) : x_1 = 1; x_2 = 2; x_{n+1} = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_{n-1}}; n \geq 2$

o) $\quad (x_n) : x_1 = \dfrac{4}{9}; x_{n+1} = -\dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{9}\sqrt{3x_n}; n \geq 1$

p) $\quad (x_n) : x_1 = \dfrac{1}{2}; x_{n+1} = \dfrac{3}{2}x_n^2 - \dfrac{1}{2}x_n^3; n \geq 1$. Hướng dẫn: Xét hàm số.

$f(x) = \dfrac{3}{2}x^3 - \dfrac{1}{2}x^3, x \in [0;1]$, $f'(x) \geq 0; \forall x \in [0;1]$ từ đó suy ra $f(x)$ tăng trên $[0;1]$. Chứng minh $u_n \in [0;1]$ bằng quy nạp. Do $f(x)$ tăng nên $f(u_n) - f(u_{n-1})$ & $u_n - u_{n-1}$ cùng dấu, và do đó cùng dấu với $u_2 - u_1 = -\dfrac{3}{16} < 0$. Từ đó suy ra (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới.

q) $\quad (x_n) : x_1 = \sqrt{2}; x_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{x_n}}; n \geq 1$ HD: Xét hàm số $f(x) = \sqrt{2 + \sqrt{x}}; x \in [0;2]$

r) $\quad (x_n) : x_1 = \sqrt{2}; x_{n+1} = 2^{\frac{u_n}{2}}; n \geq 1$ HD: Xét hàm số $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}; x \in [1;2]$

s) $\quad (x_n) : x_1 = 1982; x_{n+1} = \dfrac{1}{4 - 3x_n}; n \geq 1$ HD: Xét hàm số $f(x) = \dfrac{1}{4 - 3x}; x \in [0;1]$.

t) $x_n: x_1 = 1; x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}; n \geq 1$

MỘT SỐ BÀI TOÁN TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Bài 1. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ (1). Tìm giới hạn sau:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1+1} + \dfrac{1}{u_2+1} + \ldots + \dfrac{1}{u_{n+1}+1}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 1, \ \forall n \geq 3$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

Tính tổng:

$$u_{n+1} = u_n^2 + u_n \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n(u_n+1)} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (*)$$

Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{u_2+1} + \ldots + \frac{1}{u_{n+1}+1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1}}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a > 0$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \to +\infty$ ta có:

$$a = a^2 + a \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}} = 0$$

Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1+1} + \dfrac{1}{u_2+1} + \ldots + \dfrac{1}{u_{n+1}+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2 - \dfrac{1}{u_{n+1}}\right) = 2$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1+1} + \dfrac{1}{u_2+1} + \ldots + \dfrac{1}{u_{n+1}+1}\right) = 2$ $\otimes$.

Bài 2. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$ (1)

Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_n}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta chứng minh được rằng: $u_n \ge 2,\ \forall n\ge 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n) Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n=(u_n-1)^2>0,\text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}-1=u_n(u_n-1)\Rightarrow\frac{1}{u_{n+1}-1}=\frac{1}{u_n(u_n-1)}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_n}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{u_n}=\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\qquad(n=1,2,\ldots)\qquad(*)$$

Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_n}=1-\frac{1}{u_{n+1}-1}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a\ge 2$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có:

$$a=a^2-a+1\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-1)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1}=0$$

Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)=1$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_1}+\ldots+\frac{1}{u_n}\right)=1$ $\otimes$.

Bài 3. Cho dãy số u_n xác định bởi $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\frac{1}{5}(u_n^2+u_n+4), n=1;2;3....\end{cases}$

a) Chứng minh dãy số u_n tăng nhưng không bị chặn trên ;

b) Đặt $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k+3}, n=1,2,3...$ Tính $\lim S_n$.

Bài 4. (Đề kiểm tra đội dự tuyển Nam Định) Cho dãy số (x_n)xác định bởi

$x_1=2012; x_{n+1}=x_n^2-5x_n+9$ với mọi n nguyên dương.

a) Chứng minh (x_n)là dãy số tăng;

b) Chứng minh (x_n)không có giới hạn hữu hạn;

c) Xét dãy (y_n)xác định bởi $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k-2}$. Tìm $\lim y_n$.

Lời giải

a) Xét hiệu: $x_{n+1}-x_n=x_n^2-5x_n+9-x_n=(x_n-3)^2\geq 0$

- Do $x_1=2012>3$ nên $x_{n+1}-x_n>0$ suy ra dãy đã cho là dãy tăng.

b) Giả sử dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn, đặt $lim x_n=a(a>2012)$.

Từ công thức truy hồi $x_{n+1}=x_n^2-5x_n+9$.

Lấy giới hạn 2 vế, ta được: $a=a^2-5a+9\Leftrightarrow a=3$ (không thỏa mãn).

Do đó dãy đã cho không có giới hạn hữu hạn.

c) Ta có: $\dfrac{1}{x_n-2}=\dfrac{1}{x_n-3}-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}$

Do đó, ta có: $y_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_n-2}=\dfrac{1}{x_1-3}-...-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}=\dfrac{1}{2009}-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}$

Mà $lim x_n=+\infty$ nên $lim y_n=\dfrac{1}{2009}$.

Bài 5. Cho dãy số u_n $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=1+u_1u_2u_3...u_n\end{cases}$ $;n=1,2,...$ Đặt $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Lời giải

Ta có $u_{n+1}=1+u_1u_2...u_n\ (n\geq 1); u_n=1+u_1u_2...u_{n-1};\ n\geq 2$, suy ra

$\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}=u_n,\forall n\geq 2\Rightarrow u_{n+1}-1=\ u_n-1\ u_n$

$\Rightarrow\dfrac{1}{u_{n+1}-1}=\dfrac{1}{u_n-1\ u_n}=\dfrac{1}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_n}\Rightarrow\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{u_n-1}-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$

$\Rightarrow S_n=\dfrac{1}{u_1}+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{u_k}=\dfrac{1}{u_1}+\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\dfrac{1}{u_k-1}-\dfrac{1}{u_{k+1}-1}\right)=\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2-1}-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$

Kết hợp với giả thiết suy ra $S_n=2-\dfrac{1}{u_{n+1}-1}$

Ta có

$u_2=1+u_1;u_3=1+u_1u_2=1+u_1\left(1+u_1\right)>1+u_1$

$\Rightarrow u_n>1+u_1\Rightarrow u_1u_2....u_n>\left(1+u_1\right)^{n-1}$

Mặt khác $u_{n+1}-u_n=1+u_n\ \ u_1u_2...u_{n-1}-1\ >0$ hay u_n tăng nên

$u_{n+1}-1=u_1u_2...u_n>u_1\ \ 1+u_1\ ^{n-1}=2^{n-1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\ u_{n+1}-1\ =+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=2$

Bài 6. Cho dãy số $x_n\ :x_1=1,x_{n+1}=\sqrt{x_n\ \ x_n+1\ \ x_n+2\ \ x_n+3\ +1}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i+2}\right)$.

Lời giải

Ta có $x_2 = 5$ và $x_n > 0$ với mọi $n = 1, 2, \ldots$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n(x_n+1)(x_n+2)(x_n+3)+1} = \sqrt{(x_n^2+3x_n)(x_n^2+3x_n+2)+1} = x_n^2+3x_n+1 \quad (1)$$

Từ đó suy ra

$$x_{n+1}+1 = x_n^2+3x_n+2 = (x_n+1)(x_n+2)$$

$$\frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{(x_n+1)(x_n+2)} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_n+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_n+2} = \frac{1}{x_n+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1}$$

Do đó $y_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i+2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_{i+1}+1}\right) = \frac{1}{x_1+1} - \frac{1}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x_{n+1}+1}$

Từ (1) $x_{k+1} = x_k^2 + 3x_k + 1 > 3x_k \geq 3.3^{k-1} = 3^k$

Ta dễ dàng chứng minh bằng quy nạp $x_n > 3^{n-1}$ (2)

Nên $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{2}$ (vì do (2) $x_{n+1} > 3^n$)

Ta có thể chứng minh $\lim x_n = +\infty$ với cách khác:

Dễ thấy (x_n) là dãy tăng, giả sử $\lim x_n = a\,(a \geq 1)$

Nên ta có $a = \sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}$

Suy ra $a^2 = a(a+1)(a+2)(a+3)+1 \ hay\ a^4 + 6a^3 + 10a^2 + 6a + 1 = 0$

Rõ ràng phương trình này không có nghiệm thỏa mãn $a \geq 1$. Vậy $\lim x_n = +\infty$

Bài 7. Xét dãy số (x_n); $n = 1, 2, 3, \ldots$ xác định bởi $x_1 = 2$ và $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n^2+1)$ với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$. Đặt $S_n = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Lời giải

Ta có thể tổng quát hóa bài toán như sau:

Cho dãy (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c} \end{cases}$

Ta chứng minh $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i+b} = \frac{1}{u_1+c} - \frac{1}{u_{n+1}+c}$

Thật vậy.

Ta có $u_{n+1} = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + c^2}{b-c}$ suy ra $u_{n+1} + c = \frac{u_n^2 - (b+c)u_n + bc}{b-c} = \frac{(u_n+b)(u_n+c)}{b-c}$

Từ đó $\frac{1}{u_{n+1}+c} = \frac{1}{u_n+c} - \frac{1}{u_n+b} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_n+b} = \frac{1}{u_n+c} - \frac{1}{u_{n+1}+c}$

Khai triển và ước lượng được

$$\frac{1}{u_1+b}=\frac{1}{u_1+c}-\frac{1}{u_2+c}$$

$$\frac{1}{u_2+b}=\frac{1}{u_2+c}-\frac{1}{u_3+c}$$

……………………

$$\frac{1}{u_n+b}=\frac{1}{u_n+c}-\frac{1}{u_{n+1}+c}$$

Do đó $S_n=\dfrac{1}{u_1+c}-\dfrac{1}{u_{n+1}+c}$

Từ đó vận dụng vào bài toán trên với b =1, c = - 1 ta có

$$S_n=\frac{1}{x_1-1}-\frac{1}{x_{n+1}-1}=1-\frac{1}{x_{n+1}-1}$$

Mà $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_n-1\right)^2>0\ \forall n\in N^*$ nên dãy x_n là dãy tăng. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$ (a > 2). Thì $2a=a^2+1$ suy ra a = 1. Vô lý.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$

<u>Nhận xét.</u> Trong các bài toán tổng quát ta có thể thay các giá trị của a, b, c khác nhau để được các bài toán mới. Chẳng hạn:

Bài 8. Cho dãy số x_n được xác định bởi: $x_1 = 1$; $x_{n+1}=\dfrac{(2x_n+1)^{2012}}{2012}+x_n$. Với n là số nguyên dương. Đặt $u_n=\dfrac{(2x_1+1)^{2011}}{2x_2+1}+\dfrac{(2x_2+1)^{2011}}{2x_3+1}+\dfrac{(2x_3+1)^{2011}}{2x_3+1}+\ldots+\dfrac{(2x_n+1)^{2011}}{2x_{n+1}+1}$. Tìm $\lim u_n$.

Lời giải

Ta có $x_{n+1}-x_n=\dfrac{(2x_n+1)^{2012}}{2012},\ \forall n\ge 1$

Suy ra $\dfrac{1}{2x_n+1}-\dfrac{1}{2x_{n+1}+1}=\dfrac{2(x_{n+1}-x_n)}{(2x_n+1)(2x_{n+1}+1)}=\dfrac{(2x_n+1)^{2011}}{1006(2x_{n+1}+1)}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{(2x_i+1)^{2011}}{2x_{i+1}+1}=1006\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2x_i+1}-\frac{1}{2x_{i+1}+1}\right)=1006\left(\frac{1}{2x_1+1}-\frac{1}{2x_{n+1}+1}\right)$$

Mặt khác: $x_{n+1}-x_n\ge 0$ nên dãy (x_n) là dãy số tăng $\forall n\ge 1$. Nếu (x_n) bị chặn thì $\lim x_n$ tồn tại.

Đặt $\lim x_n = a \Rightarrow a \geq 1$ và $a = \frac{(a+1)^{2012}}{2012} + a$ (vô lý). Suy ra x_n không bị chặn trên hay $\lim x_n = +\infty$ suy ra $\lim \frac{1}{2x_{n+1}+1}$=0. Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1006}{3}$

Bài 9. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2012} + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$ Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \geq 1,\ \forall n \geq 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2012} > 0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2012} + u_n \Rightarrow u_n^2 = 2012(u_{n+1} - u_n)$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2012\frac{(u_{n+1} - u_n)}{u_n.u_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2012\left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) \qquad (n = 1, 2, ...) \qquad (*)$$

Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2012\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = 2012\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right) \qquad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \geq 1$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \to +\infty$ ta có:

$$a = \frac{a^2}{2012} + a \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2012\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}}\right) = 2012$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=2012$ ⊗ .

Bài 10. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2011u_n}{2012}, \forall n\ge 1 \end{cases}$ (1) Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2-1}+\frac{u_2}{u_3-1}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)$

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n\ge 2,\ \forall n\ge 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(u_n-1)}{2012}>0, \text{ vậy } (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}=\frac{u_n^2+2011u_n}{2012}\Rightarrow u_n^2+2012u_n=2012u_{n+1}\Rightarrow u_n(u_n-1)=2012(u_{n+1}-u_n)$$

$$\Rightarrow\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=2012\frac{(u_{n+1}-1)-(u_n-1)}{(u_{n+1}-1)(u_n-1)}\Rightarrow\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=2012\left(\frac{1}{u_n-1}-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)\quad (n=1,2,...)(*)$$

Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2-1}+\frac{u_2}{u_3-1}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}-1}=2012\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)\quad (2)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a\ge 2$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có:

$$a=\frac{a(a-1)}{2012}+a\Leftrightarrow a(a-1)=0\Leftrightarrow a=0\vee a=1 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}-1)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}-1}=0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2-1}+\frac{u_2}{u_3-1}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}2012\left(1-\frac{1}{u_{n+1}-1}\right)=2012$.

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2-1}+\frac{u_2}{u_3-1}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)=2012$. ⊗

Bài 11. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_n = \dfrac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4u_{n-1}} + u_{n-1}}{2}, \forall n \ge 2 \end{cases}$ (1) Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1^2} + \dfrac{1}{u_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n^2}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0,\ \forall n \ge 1$
- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_n - u_{n-1} = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + u_{n-1}}{2} - u_{n-1} = \frac{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} - u_{n-1}}{2} = \frac{2u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + u_{n-1}} > 0$$

Suy ra: (u_n) tăng.

- Tính tổng:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{2u_{n-1}}{\sqrt{u_{n-1}^2 + 4x_{n-1}} + u_{n-1}} \Rightarrow u_n^2 = (u_n + 1)u_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_{n-1}} - \frac{1}{u_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \ldots + \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_n} = 6 - \frac{1}{u_n} \quad (2)$$

Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a > 0$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \to +\infty$ ta có:

$$a = \frac{\sqrt{a^2 + 4a} + a}{2} \Leftrightarrow a = 0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1^2} + \dfrac{1}{u_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(6 - \dfrac{1}{u_n}\right) = 6$
- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1^2} + \dfrac{1}{u_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n^2}\right) = 6$ ⊗ .

Bài 12. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 2012 \\ u_n^2 + 2011u_n - 2013u_{n+1} + 1 = 0, \forall n \ge 1 \end{cases}$ (1) Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1 + 2012} + \dfrac{1}{u_2 + 2012} + \ldots + \dfrac{1}{u_n + 2012}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n \ge 2012,\ \forall n \ge 1$

- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2010} > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$u_n^2 + 2011u_n - 2013u_{n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2011u_n + 1}{2013}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 + 2011u_n + 1}{2013} - 1$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)(u_n + 2012)}{2013}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{u_n + 2012} = \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} \quad (n=1,2,...) \qquad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{1}{u_1 + 2012} + \frac{1}{u_2 + 2012} + ... + \frac{1}{u_n + 2012} = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{2011} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

  1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

  Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ thì $a \ge 2012$. Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n \to +\infty$ ta có:

$$a^2 + 2011a - 2012a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ (vô lý)}$$

  2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1} - 1} = 0$$

  Vì thế từ (2) ta suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1 + 2012} + \frac{1}{u_2 + 2012} + ... + \frac{1}{u_n + 2012}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2011} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}\right) = \frac{1}{2011}$$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1 + 2012} + \frac{1}{u_2 + 2012} + ... + \frac{1}{u_n + 2012}\right) = \frac{1}{2011}$ ⊗.

Bài 13. Cho dãy số thực (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2012} \\ u_{n+1} = 2012u_n^2 + u_n, \forall n \ge 1 \quad (1) \end{cases}$. Tìm giới hạn sau: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

Lời giải

- Bằng phép quy nạp đơn giản ta thấy rằng: $u_n > 0,\ \forall n \ge 1$

- Xét tính đơn điệu của (u_n): Từ hệ thức (1) ta suy ra được

$$u_{n+1}-u_n=2012u_n^2>0\Rightarrow (u_n) \text{ tăng.}$$

- Tính tổng: Xuất phát từ hệ thức truy hồi (1) ta suy ra được

$$2012u_n^2=u_{n+1}-u_n\Rightarrow \frac{2012u_n^2}{u_nu_{n+1}}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_nu_{n+1}}\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{2012}\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right) \quad (n=1,2,...) \quad (*)$$

- Thay n bởi 1,2,3,...,n vào (*) và cộng vế với vế các đẳng thức ta suy ra được:

$$\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{2012}\left[\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)+\left(\frac{1}{u_2}-\frac{1}{u_3}\right)+...+\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2012}\left(2012-\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

- Do (u_n) là dãy tăng nên có hai khả năng sau xảy ra:

1) Dãy (u_n) bị chặn trên. Theo tiêu chuẩn Weierstrass, do (u_n) tăng và bị chặn trên nên nó có giới hạn.

Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ thì $a>0$.Chuyển qua giới hạn hệ thức (1) khi $n\to+\infty$ ta có:

$$a=2012a^2+a\Leftrightarrow a=0 \text{ (vô lý)}$$

2) Dãy (u_n) không bị chặn trên, do (u_n) tăng và không bị chặn trên nên:

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=+\infty\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_{n+1}}=0$$

- Vì thế từ (2) ta suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{2012}\left(2012-\frac{1}{u_{n+1}}\right)\right]=1$

- Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_3}+...+\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)=1$ ⊗ .

Bài 14. Cho dãy số thực (u_n)xác định bởi: $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2009u_n+2}{2012}, \forall n\ge 1\end{cases}$. Tìm giới hạn sau:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{u_1-1}{u_2-2}+\frac{u_2-1}{u_3-2}+...+\frac{u_n-1}{u_{n+1}-2}\right)$$

Lời giải

- Biến đổi $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+2009u_n+2}{2012}\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=\dfrac{(u_n-1)(u_n-2)}{2012}$ (1)

Vì $u_1=3$ nên $3=u_1<u_2<u_3<...<u_n$, suy ra dãy $\{u_n\}$ tăng.

- Giả sử dãy $\{u_n\}$bị chặn trên $\Leftrightarrow \exists L\in\mathbb{R}: \lim u_n=L$ ($L>3$)

Suy ra $\lim u_{n+1}=\lim\dfrac{u_n^2+2009u_n+2}{2012}$ hay $L=\dfrac{L^2+2009L+2}{2012}$

$\Leftrightarrow L^2-3L+2=0\Leftrightarrow L=1$ hoặc $L=2$ (vô lý vì $L>3$)

Do đó $\{u_n\}$ không bị chặn trên hay $\lim u_n=+\infty$ hay $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}=0$

- Biến đổi (1) $\Leftrightarrow (u_n-1)(u_n-2) = 2012(u_{n+1}-u_n)$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n-1}{u_{n+1}-2} = 2012\left(\frac{1}{u_n-2} - \frac{1}{u_{n+1}-2}\right) \ (*)$$

- Cho n lần lượt nhận các giá trị 1, 2, 3, ….n, sau đó cộng vế theo vế ta được:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{u_i-1}{u_{i+1}-2} = 2012\left(1 - \frac{1}{u_{n+1}-2}\right)$$

- Vậy $\lim S_n = 2012$ ⊗.

Bài 15. Cho dãy số (x_n) xác định như sau $x_1 = 3$ và $x_{n+1} = \dfrac{x_n^3+2x_n+4}{x_n^2-x_n+6}$ với $n = 1,2,\ldots$ Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i^2+4}$. Tìm $\lim y_n$.

Lời giải. $x_{n+1}-2 = \dfrac{(x_n^2+4)(x_n-2)}{x_n^2-x_n+6}$ (1)

Do $x_1 = 3$ nên bằng qui nạp chứng minh được $x_n > 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

$x_{n+1}-x_n = \dfrac{(x_n-2)^2}{x_n^2-x_n+6} > 0 \Rightarrow (x_n)$ là dãy tăng (2).

Giả sử dãy (x_n) bị chặn trên $\Rightarrow \exists a > 3$ để $\lim x_n = a$. Khi đó

$a = \dfrac{a^3+2a+4}{a^2-a+6} \Leftrightarrow a^2-4a+4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (loại)

Do đó: $\lim x_n = +\infty$ (3)

Từ (1) suy ra : $\dfrac{1}{x_{n+1}-2} = \dfrac{1}{x_n-2} - \dfrac{1}{x_n^2+4} \Rightarrow \dfrac{1}{x_n^2+4} = \dfrac{1}{x_n-2} - \dfrac{1}{x_{n+1}-2}$

$$\Rightarrow y_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2+4} = 1 - \frac{1}{x_{n+1}-2} \ (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : $\lim y_n = 1$

Bài 16. Cho dãy số (x_n) xác định như sau $\begin{cases} x_1 = \dfrac{2017}{2} \\ x_{n+1} = 2x_n^2 - 5x_n + \dfrac{9}{2}; \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Với mỗi số nguyên dương n, đặt $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k-1}$. Tính $\lim u_n$.

Lời giải

- Xét hàm số $f(x) = 2x^2-5x+\dfrac{9}{2}$. Khi đó $f(x) = x \Leftrightarrow 2x^2-5x+\dfrac{9}{2} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

Vậy hàm số có một điểm bất động là $x = \dfrac{3}{2}$.

Ta có $x_{n+1} = 2x_n^2-5x_n+\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow x_{n+1}-\dfrac{3}{2} = 2\left(x_n-\dfrac{3}{2}\right)(x_n-1)$

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{x_{n+1}-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\left(x_n-\frac{3}{2}\right)(x_n-1)} = \dfrac{1}{x_n-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{x_n-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_n-1} = \dfrac{1}{x_n-\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{x_{n+1}-\frac{3}{2}}$

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k-1}=\frac{1}{x_1-\frac{3}{2}}-\frac{1}{x_{n+1}-\frac{3}{2}}=\frac{1}{1007}-\frac{1}{x_{n+1}-\frac{3}{2}}.$$

Chứng minh dãy tăng. Do $x_1=\frac{2017}{2}$ nên bằng qui nạp chứng minh được $x_n>\frac{3}{2}$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$

Xét hiệu $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(2x_n-3)^2>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\ (x_n)$ là dãy tăng.

- Chứng minh dãy (x_n) không bị chặn trên.

Giả sử dãy số (x_n) bị chặn trên. Vì dãy tăng và bị chặn nên $\exists a>\frac{3}{2}$ để $\lim x_n=a$. Khi đó

$2a^2-5a+\frac{9}{2}=a\Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$ (không thỏa mãn). Do đó : $\lim x_n=+\infty$

Vậy $\lim u_n=\frac{1}{1007}$.

Bài 17. (Olympic 30-4-2012) Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases}x_1=4\\ x_{n+1}=\dfrac{x_n^4+9}{x_n^3-x_n+6};\quad \forall n\geq 1\end{cases}.$$

Với mỗi số nguyên dương n, đặt $y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^3+3}$. Tính $\lim y_n$.

Lời giải.

+ Xét hàm số $f(x)=\frac{x^4+9}{x^3-x+6}$. Khi đó $f(x)=x\Leftrightarrow\frac{x^4+9}{x^3-x+6}=x\Leftrightarrow x=3$.

Vậy hàm số có một điểm bất động là $x=3$.

+ Ta có $x_{n+1}=\frac{x_n^4+9}{x_n^3-x_n+6}\Leftrightarrow x_{n+1}-3=\frac{(x_n^3+3)(x_n-3)}{x_n^3-x_n+6}$.

$$\Rightarrow\frac{1}{x_{n+1}-3}=\frac{(x_n^3+3)-(x_n-3)}{(x_n^3+3)(x_n-3)}=\frac{1}{(x_n-3)}-\frac{1}{(x_n^3+3)}.$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x_n^3+3}=\frac{1}{x_n-3}-\frac{1}{x_{n+1}-3}.$$

$$\Rightarrow y_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^3+3}=\frac{1}{x_1-3}-\frac{1}{x_{n+1}-3}=1-\frac{1}{x_{n+1}-3}.$$

+ Chứng minh dãy tăng. Do $x_1=4$ nên bằng qui nạp chứng minh được $x_n>3$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$

Xét hiệu $x_{n+1}-x_n=\frac{(x_n-3)^2}{(x_n+2)(x_n^2-2x_n+3)}>0\ \Rightarrow\ (x_n)$ là dãy tăng.

+ Chứng minh dãy (x_n) không bị chặn trên.

Giả sử dãy số (x_n) bị chặn trên. Vì dãy tăng và bị chặn nên $\exists a>3$ để $\lim x_n=a$. Khi đó

$\dfrac{a^4+9}{a^3-a+6}=a \Leftrightarrow a=3$ (không thỏa mãn).

Do đó : $\lim x_n=+\infty$

Vậy $\lim y_n=1$.

Bài 18. (HSG BP 12-13). Cho dãy số (u_n) được xác định:

$\begin{cases} u_1=\dfrac{2}{2013} \\ u_n^2(2-9u_{n+1})=2u_{n+1}(2-5u_n), \forall n\geq 1 \end{cases}$. Xét dãy số $v_n=\dfrac{u_1}{1-u_1}+\dfrac{u_2}{1-u_2}+\cdots+\dfrac{u_n}{1-u_n}$. Tìm $\lim v_n$.

Lời giải

Ta có $u_n\neq 0;\ \forall n\geq 1$.

Khi đó $u_n^2\ 2-9u_{n+1}\ =2u_{n+1}\ 2-5u_n \Leftrightarrow \dfrac{2-9u_{n+1}}{u_{n+1}}=\dfrac{2}{u_n^2}\ 2-5u_n \Leftrightarrow \dfrac{2}{u_{n+1}}-9=\dfrac{4}{u_n^2}-\dfrac{10}{u_n}$

Đặt $x_n=\dfrac{2}{u_n}\ \forall n\geq 1$. Khi đó ta có dãy mới x_n được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1=2013 \\ x_{n+1}=x_n^2-5x_n+9\ \forall n\geq 1 \end{cases}$$

Chứng minh x_n ***là dãy tăng:***

Xét hiệu: $x_{n+1}-x_n=x_n^2-5x_n+9-x_n=\ x_n-3\ ^2\geq 0$

Do $x_1=2013>3$ nên $x_{n+1}-x_n>0$ suy ra dãy x_n là dãy tăng

Chứng minh x_n ***không bị chặn hay*** $\lim x_n=+\infty$:

Giả sử x_n bị chặn, do dãy tăng và bị chặn nên tồn tại giới hạn hữu hạn.

Giả sử dãy x_n có giới hạn hữu hạn, đặt $\lim x_n=a,\quad a>2013$.

Từ công thức truy hồi $x_{n+1}=x_n^2-5x_n+9$

Lấy giới hạn hai vế, ta được: $a=a^2-5a+9\Leftrightarrow a=3$ (không thỏa mãn)

Do đó dãy đã cho không có giới hạn hữu hạn.

Ta có:

$$v_n=\frac{u_1}{1-u_1}+\ldots+\frac{u_n}{1-u_n}=2\left(\frac{1}{\frac{2}{u_1}-2}+\ldots+\frac{1}{\frac{2}{u_n}-2}\right)=2\left(\frac{1}{x_1-2}+\ldots+\frac{1}{x_n-2}\right)\forall n\geq 1$$

Mà $\dfrac{1}{x_n-2}=\dfrac{1}{x_n-3}-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}$

Do đó, ta có: $v_n=2\left(\dfrac{1}{x_1-3}-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}\right)=2\left(\dfrac{1}{2013-3}-\dfrac{1}{x_{n+1}-3}\right)$

Mà $\lim x_n=+\infty$ nên $\lim v_n=\dfrac{1}{1005}$.

Bài 19. (Quảng Ngãi) Cho dãy số (a_n) thỏa mãn điều kiện: $a_1=2,(4-a_n)(6+a_{n-1})=24$

Tính $S_{2012}=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+...+\dfrac{1}{a_{2012}}$.

HD giải: Từ công thức truy hồi ta suy ra $a_n=\dfrac{4a_{n-1}}{6+a_{n-1}}=\dfrac{1}{\dfrac{2}{3a_{n-1}}+\dfrac{1}{4}}\Rightarrow\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{3a_{n-1}}+\dfrac{1}{4}$.

Đặt $t_n=\dfrac{1}{a_n}(t_1=\dfrac{1}{2})\Rightarrow t_n=\dfrac{3}{2}t_{n-1}+\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow t_n+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}(t_{n-1}+\dfrac{1}{2})$

Đặt $u_n=t_n+\dfrac{1}{2}(u_1=1)\Rightarrow u_n=\dfrac{3}{2}u_{n-1}\Rightarrow S_n=2[(\dfrac{3}{2})^n-1]$

Cho $n=2012$, ta có $S_{2012}=2[(\dfrac{3}{2})^{2012}-1]-1006.$

Bài 20. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases}u_1=\dfrac{5}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n^2-u_n+2\end{cases}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Tìm $\lim\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k}\right)$.

Bài 21. Cho dãy số: $\begin{cases}u_1=2\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n^{2015}+u_n+1}{u_n^{2014}-u_n+3}\end{cases}$ $(n\in N^*)$

a) Chứng minh $u_n>1,\ \forall n\in N^*$ và (u_n) là dãy số tăng.

b) Tìm $\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{u_i^{2014}+2}$.

Bài 22. Cho dãy số u_n thỏa mãn $u_1=2017;u_{n+1}=u_n\left(\sqrt{u_n}+1\right)^2;n=1,2,3...$ Tính $\lim\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{u_i}+1}$

Bài 23. Cho dãy số x_n : $x_1=1,\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1+x_n^{2014}$ $n\geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_1^{2014}}{x_2}+\dfrac{x_2^{2014}}{x_3}+...+\dfrac{x_n^{2014}}{x_{n+1}}\right)$.

Bài 24. Cho dãy số x_n : $x_1=3,x_{n+1}=\dfrac{1}{5}$ $x_n^2+x_n+4$ $n\geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k}\right)$.

Bài 25. Cho dãy số x_n $_{n\geq 1}$ được xác định bởi $x_1=12,x_{n+1}=x_n\left(1+\dfrac{3}{n+1}\right)$. Chứng minh rằng

x_n là dãy số tăng nhưng không bị chặn trên. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k+3}\right)$.

Bài 26. Cho dãy số x_n được xác định bởi $x_1=\dfrac{1}{24},x_{n+1}=\dfrac{x_n}{1+3\ \ n+2\ \ n+3\ \ x_n}$. Đặt

$S_n=x_1+x_2+...+x_n$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$.

Bài 27. Cho dãy số x_n được xác định bởi x_n : $x_1=\dfrac{1}{2};x_{n+1}=2x_n^2-1,n\geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}$.

Bài 28. Cho dãy số x_n : $x_1=1;x_{n+1}=\dfrac{\sqrt{x_n^2+1}-1}{x_n},n\geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

Bài 29. Cho dãy số x_n : x_n : $x_1 = \frac{1}{2}; x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{4^n}}\right), n \geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Bài 30. (HSG QG 2012). Cho dãy số x_n : $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \dfrac{n+2}{3n} x_{n-1} + 2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Bài 31. Cho dãy số x_n : $\begin{cases} x_1 = 2012 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^3 + 3x_n}{3x_n^2 + 1} \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Bài 32. Cho dãy số x_n : $\begin{cases} x_1 = 2012 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2012}{x_n}\right) \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Bài 33. Cho dãy số u_n xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2014 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 6}{2u_n + 1} \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

HD: Chứng minh dãy u_n giảm và bị chặn dưới bởi 2.

Bài 34. Cho u_n : $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - u_n + 9}{5} \end{cases}$. *Đặt* $S_n = \dfrac{1}{2+u_1} + \dfrac{1}{2+u_2} + ... + \dfrac{1}{2+u_n}$. Tìm $\lim S_n$.

Bài 35. Cho dãy số u_n thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} + u_n}{2} \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$

Bài 36. Cho dãy số u_n thỏa mãn $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n^2 - u_n + 2 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k}$

Bài 37. Cho dãy số x_n được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2014} + \dfrac{2013}{2014}; n = 1, 2... \end{cases}$

a) Chứng minh u_n là dãy số tăng.

b) Với mỗi $n \geq 1, n \in N$, đặt $v_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1} - 1}$. Chứng minh rằng

$v_1 + v_2 + ... + v_n < 2014$, $n = 1, 2...$

Bài 38. Cho dãy số u_n được xác định $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n^2}{2013}; n = 1, 2... \end{cases}$

a) Chứng minh rằng dãy số u_n tăng nhưng không bị chặn trên.

b) Đặt $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i + 2013}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Bài 39. Cho dãy số u_n : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 2u_n + 16}{6}; n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i + 2}$

Bài 40. Cho dãy số u_n : $\begin{cases} u_1 = 20 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 7u_n + 9}{13}; n = 1, 2... \end{cases}$. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i + 10}$.

Bài 41. Cho dãy số u_n $\begin{cases} u_1 = \dfrac{2014}{2013} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2u_n}{2}; n = 1, 2... \end{cases}$. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i + 2}$.

Bài 42. Cho dãy số x_n : $x_1 = 1; x_n = \dfrac{2n}{n-1\;^{2}} \; x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}$, $n \geq 2$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right)$.

Bài 43. Cho dãy số u_n được xác định bởi $u_1 = 2, u_{n+1} = -u_n + 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i}$

HD

Bước 1. Chứng minh $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Bước 2. Tính $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i}$, tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{u_i}$.

Lời giải chi tiết trang 64- Tài liệu 0

Bài 44. Cho dãy số x_n : $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2014x_n^2 + x_n \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + ... + \dfrac{x_n}{x_{n+1}} \right)$.

Bài 45. Cho dãy số x_n : $x_1 = 3, x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 4$. Tìm

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1 - 1} + \dfrac{1}{x_2 - 1} + ... + \dfrac{1}{x_{n-1} - 1} \right)$.

Bài 46. Cho dãy số x_n : $x_1 = a > 1, x_{n+1} = x_n^2$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_1}{x_2 - 1} + \dfrac{x_2}{x_3 - 1} + ... + \dfrac{x_n}{x_{n+1} - 1} \right)$.

Bài 47. Cho dãy số x_n được xác định bởi $-1 < x_0 < 1; x_n = \sqrt{\dfrac{1 + x_{n-1}}{2}}$. Đặt

$v_n = 4^n \; 1 - u_n \; ; w_n = u_1 u_2 ... u_n$. Hãy tính $\lim v_n ; \lim \mathrm{w}_n$.

Bài 48. Cho dãy số x_n : $x_1 = 8, x_{n+1} = \dfrac{1}{3} \; x_n^2 - 7x_n + 25$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i - 2} \right)$.

Bài 49. Cho dãy số x_n : $x_1 = 2009, x_{n+1} = \dfrac{2009x_n \; 1 + x_n^2}{2009x_n^2 - x_n + 2009}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{1 + x_i^2} \right) \right)$.

Bài 50. Cho dãy số thực a_n : $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}; n \geq 1$. Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$.

Bài 51. Cho dãy số x_n : $x_1 = 2, x_{n+1} = \dfrac{1}{2} \; x_n^2 + 1$. Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k + 1}$. Tính $\left[S_n \right]; \lim\limits_{n\to+\infty} \left[S_n \right]$.

Bài 52. Cho dãy số $x_n \; : x_1 = \dfrac{2}{3}, x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2 \;\; 2n+1 \;\; x_n + 1}$. Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[S_n\right]$.

Bài 53. Cho dãy số $x_n \; : x_1 = a > 1, x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1 \;\; n \geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}\right)$.

Bài 54. Cho dãy số $x_n \; : x_1 = a > 0, x_{n+1} = x_n^2 + x_n \;\; n \geq 1$. Tìm

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+x_1} + \dfrac{1}{1+x_2} + ... + \dfrac{1}{1+x_n}\right)$.

Bài 55. Cho dãy số $x_n \; : x_1 = 1, x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n^2}{2014} \;\; n \geq 1$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_3} + ... + \dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$.

Bài 56. Cho dãy số (u_n) $u_1 = \dfrac{21}{10}, u_{n+1} = \dfrac{u_n - 2 + \sqrt{u_n^2 + 8u_n - 4}}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ · $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{u_{i+1}^2 - 4}$.

Bài 57. Cho dãy số u_n được xác định bởi $u_1 = 2008, u_{n+1} = u_n^2 - 4013u_n + 2007^2; \; n \geq 1$

a) Chứng minh $u_n \geq n + 2007$.

b) Đặt $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{u_k - 2006}$; tính $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Bài 58. (HSG BP 11-12). Cho dãy số u_n được xác định bởi

$\begin{cases} u_1 = 2013 \\ u_n^2 + 2011u_n - 2013u_{n+1} = 0 \;\; n \geq 1 \end{cases}$. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u_1 + 2012} + \dfrac{1}{u_2 + 2012} + ... + \dfrac{1}{u_n + 2012}\right)$.

Bài 59.

. . . to be continued . . .