ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VIÈTE

ĐẠI SỐ SƠ CẤP

A. LỊCH SỬ.

François Viète, Seigneur de la Bigotière (tiếng Latinh : *Franciscus Vieta* ; 1940 - 23 tháng 2 năm 1603) là một nhà toán học người Pháp có công trình về đại số mới là một bước tiến quan trọng đối với đại số hiện đại, do việc sử dụng sáng tạo các chữ cái làm tham số trong phương trình và đồng thời ứng dụng chúng trong việc biến đổi và giải phương trình. Ông là một luật sư về thương mại, và từng là ủy viên hội đồng bí mật cho cả Henry III và Henry IV của Pháp.

Ông đã phát hiện ra mối liên hệ giữa các nghiệm và các hệ số của phương trình. Ông còn là một chuyên gia về giải các mật mã trong thế chiến giữa Pháp và Tây Ban Nha.

Ông mất năm 1603.

→ Thành tựu nổi bật: Đại số mới.

Nền

Vào cuối thế kỷ 16, toán học được đặt dưới sự bảo trợ kép của người Hy Lạp, họ đã mượn các công cụ của hình học và người Ả Rập, những người cung cấp các thủ tục cho phép giải. Vào thời của Viète, đại số do đó dao động giữa số học, điều này làm xuất hiện một danh sách các quy tắc và hình học có vẻ chặt chẽ hơn.

Đại số biểu tượng của Viète

Viète đã tạo ra nhiều đổi mới: công thức nhị thức , sẽ được Pascal và Newton lấy, và các hệ số của đa thức thành tổng và tích các gốc của nó , được gọi là công thức Viète .

Đại số hình học

Viète rất thành thạo trong hầu hết các công cụ hiện đại, nhằm mục đích đơn giản hóa các phương trình bằng cách thay thế các đại lượng mới có mối liên hệ nhất định với các đại lượng chưa biết ban đầu. Một tác phẩm khác của ông, *Recensio canonica effectionum learningarum* , mang dấu ấn hiện đại, sau này được gọi là hình học đại số — một bộ sưu tập các giới thiệu cách xây dựng các biểu thức đại số chỉ với việc sử dụng thước và compass.

B. ĐỊNH LÝ VIÈTE.

Trong toán học, định lý Viète hay công thức Viète (có khi viết theo phiên âm tiếng Việt là Vi-ét), do nhà toán học Pháp François Viète tìm ra, nêu lên mối quan hệ giữa các nghiệm của một phương trình đa thức (trong trường số phức) và các hệ số của nó.

I. Định lý Viète cho phương trình bậc hai.

1. Bài toán mở đầu.

Xét phương trình bậc hai: $y = ax^2 + bx + c\ \left(a \neq 0\right)\ \left(1\right)$.

Giả sử: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

Ta có: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$ là hai nghiệm tổng quát của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Khi đó: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b}{a} \\ P = x_1x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{b^2-\Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

2. Định lý Viète.

Extra Techniques
Định lý Viète
Nếu x_1, x_2 là hai nghiệm (trên trường số phức $\mathbb{C}$, có thể nghiệm đơn hoặc nghiệm kép) của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$, thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = S = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 = P = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

<u>Chứng minh</u>:

Giả sử: x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$.

Khi đó, phương trình bậc hai (1) tương đương với phương trình $y=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

Như vậy, ta có đẳng thức: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$.

Hay: $ax^2+bx+c=ax^2-a\left(x_1+x_2\right)x+ax_1x_2$.

Đồng nhất hệ số hai vế, ta thu được: $\begin{cases} b=-a\left(x_1+x_2\right) \\ c=ax_1x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$ **(đpcm)**.

Như vậy, một câu hỏi được đặt ra: Liệu rằng có hay không một **Định lý Viète tổng quát** trên trường số thực cho một đa thức có bậc n?

Câu trả lời là có và xin được trình bày tiếp ở phần dưới đây.

II. Định lý Viète cho phương trình đa thức bất kỳ.

1. Bài toán mở đầu.

Xét phương trình bậc n theo ẩn x tổng quát như sau:

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, \left(a_n\neq 0\right) \ (2)$$

Giả sử: $x_i, i=\overline{1,n}$ là n nghiệm của phương trình $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$.

Khi đó, phương trình bậc n tương đương với phương trình:

$$y=a_n\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_n\right)$$

Như vậy, ta có: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\ldots\left(x-x_n\right)$

$$\Leftrightarrow a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_nx^n$$
$$-a_n\left(\underbrace{x_1+x_2+\ldots x_n}_{n\ elements}\right)$$

$$+a_n\left(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_kx_{k+1}+\ldots+x_{n-1}x_n}_{\frac{n(n-1)}{2}\ elements}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}a_n\left(\underbrace{x_1x_2\ldots x_{n-1}+x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n+\ldots+x_2x_3\ldots x_n}_{n\ elements}\right)$$

$$+(-1)^n a_nx_1x_2\ldots x_n$$

Đồng nhất hệ số ở hai vế, ta thu được **Định lý Viète mở rộng** như sau:

Extra Techniques

Định lý Viète mở rộng

Nếu $x_i,\ i=\overline{1,n},\ \left(n\in\mathbb{Z}^+\right)$ là hai nghiệm (trên trường số phức $\mathbb{C}$, có thể nghiệm đơn hoặc nghiệm kép) của phương trình: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$, thì:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1+x_2+\ldots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\\ \sum\limits_{1\le i<j\le n}^{n}x_ix_j=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots.+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum\limits_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n-1}\le n}^{n}x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}}=x_1x_2\ldots x_{n-1}+x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n+\ldots+x_2x_3\ldots x_n=(-1)^{n-1}.\dfrac{a_1}{a_n}\\ \prod\limits_{i=1}^{n}x_i=x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n.\dfrac{a_0}{a_n}\end{cases}.$$

Lưu ý: Trong mỗi hàng k bất kỳ, vế trái của đẳng thức là tổng của các tích từng cụm k các nghiệm của phương trình trên. Và vế phải của đẳng thức được tính một cách tổng quát theo công thức: $(-1)^k\dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.

Một số tổng quát thường gặp:

→ Phương trình bậc ba:

Nếu x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ thì công thức Viète cho ta: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}.$

→ Hệ quả 1 của định lý Viète:

Giả sử phương trình: $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$ (3) có các hệ số $a_i, i=\overline{0,n}$ thỏa mãn:

(i) $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{2k-1}=0$ khi và chỉ khi: $x=1$ là một nghiệm của phương trình (3).

(ii) $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2k}-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{2k-1}=0$ khi và chỉ khi: $x=-1$ là một nghiệm của phương trình (3).

Chứng minh

$(i)\Rightarrow$:

Giả sử: $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{2k-1}=0\Rightarrow a_0=-a_n-a_{n-1}-\ldots-a_1$.

Khi đó: $(3)\Leftrightarrow\left(a_nx^n-a_n\right)+\left(a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-1}\right)+\ldots+\left(a_1x-a_1\right)=0$;

$$\Leftrightarrow a_n\left(x^n-1\right)+a_{n-1}\left(x^{n-1}-1\right)+\ldots+a_1\left(x-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[a_n\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1\right)+a_{n-1}\left(x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+1\right)+\ldots+a_2(x+1)+a_1\right]=0$$

$\Rightarrow x=1$ là một nghiệm.

$(i)\Leftarrow$:

Giả sử: $x=1$ là một nghiệm của phương trình (3), khi đó, ta có:

$$a_n(1)^n+a_{n-1}(1)^{n-1}+\ldots+a_1(1)+a_0=0\Rightarrow a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0\Rightarrow\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_{2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}a_{2k-1}=0.$$

Vậy: (i) hoàn toàn được chứng minh.

$(ii)\Rightarrow$:

Bài toán phụ:

Ta có: $\begin{cases}x^{2t+1}+1=(x+1)\left(x^{2t}-x^{2t-1}+\ldots+(-1)^k x^k+\ldots+1\right)=(x+1).\sigma_{2t+1}\,(4)\\ x^{2k}-1=\left(x^k\right)^2-1=\left(x^k-1\right)\left(x^k+1\right)=\ldots=(x+1).\sigma_{2t}\,(5)\end{cases}(*)$

Một điều đáng nói, ở đây k hoặc chẵn hoặc lẻ, nhưng điều đó không quan trọng vì nếu $k=2\alpha$ thì ta xét $\left(x^k-1\right)$ như ở đẳng thức (5), nếu $k=2\alpha+1$ thì hoàn toàn rút được lượng nhân tử $(x+1)$ theo đẳng thức (4). Như vậy dù k là bội π nào đó của 2, thì đến một số đủ lớn các bước (sau π bước), ta sẽ thu được nhân tử $(x+1)$.

Giả sử: $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_{2k}-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}a_{2k-1}=0\Rightarrow a_0=-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}a_{2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}a_{2k-1}$.

Khi đó: $(3)\Leftrightarrow\left[a_n x^n+(-1)^{n+1}a_n\right]+\left[a_{n-1}x^{n-1}+(-1)^n a_{n-1}\right]+\ldots+\left(a_2x^2-a_2\right)+\left(a_1x+a_1\right)=0$.

$\Leftrightarrow(x+1)\left[a_n\sigma_n+a_{n-1}\sigma_{n-1}+\ldots+a_2(x-1)+a_1\right]=0\Rightarrow x=-1$ là một nghiệm của (3).

$(ii)\Leftarrow$: Giả sử: $x=-1$ là một nghiệm của phương trình (3), khi đó, ta có:

$$a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \ldots + a_1(-1) + a_0 = 0 \Rightarrow (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \ldots + (-1)^k a_k \ldots - a_1 + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} a_{2k} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} a_{2k-1} = 0$$

Vậy: (ii) hoàn toàn được chứng minh.

Extra Techniques

Study tips

Xét phương trình: $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \ (6)$.

Nếu phương trình (6) có tổng $a + b + c = 0$ thì: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$ là hai nghiệm của (6).

Nếu phương trình (6) có tổng $a - b + c = 0$ thì: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\dfrac{c}{a} \end{cases}$ là hai nghiệm của (6).

→ Hệ quả 2 của định lý Viète:

Giả sử phương trình: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \ (3)$ có n nghiệm, kí hiệu $x_i, i = \overline{1,n}$.

Nếu ta đặt: $\begin{cases} S_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ S_2 = \sum\limits_{1 \le i < j \le n}^{n} x_i x_j \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n-1} = \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \le n}^{n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{n-1}} \\ S_n = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i \end{cases}$

Khi đó: $x_i, i=\overline{1,n}$ là nghiệm của phương trình:

$$x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^k S_k.x^{n-k} + \ldots + (-1)^{n-1} S_{n-1}x + (-1)^n S_n = 0 \ (7).$$

Chứng minh:

Theo định lý Viète mở rộng, ta suy ra:

Nếu $x_i,\ i=\overline{1,n}$ là nghiệm của (3), thì:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \sum\limits_{1\le i<j\le n}^{n} x_ix_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots. + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{n-1}\le n}^{n} x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-1}} = x_1x_2\ldots x_{n-1} + x_1x_2\ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3\ldots x_n = (-1)^{n-1}.\dfrac{a_1}{a_n} \\ \prod\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n.\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Như vậy, dễ dàng ta có: $\begin{cases} S_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_{n-1} = (-1)^{n-1}.\dfrac{a_1}{a_n} \\ S_n = (-1)^n.\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}.$

Vậy phương trình (7) tương đương với: $x^n + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + \dfrac{a_{n-2}}{a_n}x^{n-2} + \ldots + \dfrac{a_1}{a_n}x + \dfrac{a_0}{a_n} = 0$.

Vì: $\deg\left(f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\right)=n\Rightarrow a_n\neq 0$.

Nhân cả hai vế cho a_n, ta thu được phương trình $\left(3\right)$ **(đpcm)**.

Extra Techniques
Study tips
Xét phương trình: $ax^2+bx+c=0\ \left(a\neq 0\right)\ \left(6\right)$ với $\Delta>0$, nếu ta đặt: $\begin{cases}S=x_1+x_2\\P=x_1x_2\end{cases}$.
Thì: x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-Sx+P=0,\left(S^2>4P\right)$.

C. MỘT SỐ TIPS GIẢI NHANH CÁC BÀI TOÁN ỨNG DỤNG ĐỊNH LÝ VIÈTE.

I. Dấu nghiệm của phương trình bậc hai.

Dấu nghiệm	x_1	x_2	$S=x_1+x_2$	$P=x_1x_2$	**Điều kiện cần**	**Điều kiện đủ**
Trái dấu	$\pm$	$\mp$	?	$-$	$\Delta>0$	$P<0$
Cùng dấu	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$+$		$P>0$
Cùng dương	$+$	$+$	$+$	$+$		$P>0,\ S>0$
Cùng âm	$-$	$-$	$-$	$+$		$P>0,\ S<0$

II. Một số đẳng thức cần lưu ý.

$\left(i\right)$ $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

$\left(ii\right)$ $x_1^3+x_2^3=\left(x_1+x_2\right)\left[\left(x_1+x_2\right)^2-3x_1x_2\right]=S.\left(S^2-3P\right)$

$\left(iii\right)$ $x_1^4+x_2^4=\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]^2-2\left(x_1x_2\right)^2=\left(S^2-2P\right)^2-2P^2$

$\left(iv\right)$ $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{P}{S}$

$\left(v\right)$ $x_2-x_1=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{S^2-4P}\ \left(x_2>x_1\right)$

III. Ứng dụng đa thức đối xứng để giải quyết các bài tập áp dụng định lý Viète.

1. Định nghĩa. Giả sử A là một vành giao hoán có đơn vị, $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ là một đa thức của vành $A\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$. Đa thức $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ được gọi là một *đa thức đối xứng của* n *ẩn* nếu $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right)$ với mọi phép thế

$$\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & .... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & .... & \varphi(n) \end{pmatrix}$$

$f\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right)$ suy ra từ $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ bằng cách thay trong $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, x_1 bởi $x_{\varphi(1)},....,x_n$ bởi $x_{\varphi(n)}$.

2. Định lý 1. Bộ phận gồm các đa thức đối xứng của vành $A\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$ là một vành con của vành $A\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$.

<u>**Chứng minh:**</u>

Giả sử $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ và $g\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ là những đa thức đối xứng của vành $A\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$, theo định nghĩa ta có:

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right)$$

Và

$$g\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=g\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right)$$

với mọi phép thế $\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 & .... & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & .... & \varphi(n) \end{pmatrix}$. Thế thì:

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)-g\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right)-g\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right),$$

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right).g\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right).g\left(x_{\varphi(1)},x_{\varphi(2)},...,x_{\varphi(n)}\right)$$

với mọi phép thế φ. Từ đó, suy ra bộ phận gồm các đa thức đối xứng của vành $A\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$ là một vành con của vành $A\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$.

Chú ý: Có thể coi mỗi phần tử của vành A là một đa thức đối xứng đặc biệt. Thật vậy, $a\in A$ thì ta có thể viết: $a=x_1^{\ 0}x_2^{\ 0}...x_n^{\ 0}$.

Các đa thức đối xứng cơ bản:

$$\begin{cases}\sigma_1=x_1+x_2+...+x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ \sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+....+x_{n-1}x_n=\sum\limits_{1\le i<j\le n}^{n}x_ix_j\\ ....\\ \sigma_{n-1}=x_1x_2...x_{n-1}+x_1x_2...x_{n-2}x_n+...+x_2x_3...x_n=\sum\limits_{1\le i_1<i_2<...<i_{n-1}\le n}^{n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{n-1}}\\ \sigma_n=x_1x_2...x_n=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i\end{cases}$$

Theo **Định lý 1** thì mọi đa thức của các đa thức đối xứng cơ bản $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ cũng là một đa thức đối xứng của n ẩn $x_1,x_2,...,x_n$. Chiều ngược lại cũng đúng, đó chính là nội dung của định lý cơ bản về đa thức đối xứng dựa trên các **Bổ đề** sau.

3. Bổ đề 1. Giả sử $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ là một đa thức đối xứng khác 0 và $\alpha x_1^{\ a_1}x_2^{\ a_2}x_3^{\ a_3}...x_n^{\ a_n}$ là hạng tử cao nhất của nó, thế thì: $a_1\ge a_2\ge...\ge a_n$.

<u>**Chứng minh:**</u>

Ta phải chứng minh: $a_{i-1}\ge a_i,\forall i=\overline{2,n}$. Vì $f\left(x_1,...,x_n\right)$ là một đa thức đối xứng nên nếu thay x_{i-1} bởi x_i và hoán vị ngược lại thay x_i bởi x_{i-1}, ta được:

$$\alpha x_1^{\ a_1}...x_i^{\ a_{i-1}}x_{i-1}^{\ a_i}...x_n^{\ a_n}$$

cũng là một hạng tử của $f\left(x_1,...,x_n\right)$.

Giả sử: $a_i>a_{i-1}$, khi đó:

$$(a_1,...,a_{i-2},a_i,a_{i-1},...,a_n) > (a_1,...,a_{i-2},a_{i-1},a_i,...,a_n).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thuyết $\alpha x_1^{a_1}...x_{i-1}^{a_{i-1}}x_i^{a_i}...x_n^{a_n}$ là hạng tử cao nhất.

4. Bổ đề 2. Giả sử $a_1,...,a_n$ là những số tự nhiên sao cho:

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$$

thế thì đa thức $f(x_1,x_2,...,x_n) = \sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3}...\sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_{n-2}}\sigma_n^{a_n}$

trong đó $\sigma_1,...,\sigma_n$ là các đa thức đối xứng cơ bản, có hạng tử cao nhất là

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}.$$

<u>Chứng minh:</u>

Các hạng tử cao nhất của $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_{n-1},\sigma_n$ theo thứ tự là:

$$x_1, x_1x_2, ..., x_1x_2...x_{n-1}, x_1x_2...x_n$$

Ta có hạng tử cao nhất của $f(x_1,...,x_n)$ là:

$$x_1^{a_1-a_2}(x_1x_2)^{a_2-a_3}...(x_1x_2...x_{n-1})^{a_{n-1}-a_n}(x_1x_2...x_n)^{a_n} = x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n} \textbf{ (đpcm).}$$

Sở dĩ ta kết luận được hạng tử như thế là do ta chứng minh được một **Định lý** sau:

Định lý $*$**.** Giả sử $f(x_1,x_2,...,x_n)$ và $g(x_1,x_2,...,x_n)$ là hai đa thức khác không của vành $A[x_1,x_2,...,x_n]$ có hạng tử cao nhất theo thứ tự là $c_1x_1^{a_{11}}...x_n^{a_{1n}}$ và $d_1x_1^{b_{11}}...x_n^{b_{1n}}$. Nếu $c_1d_1 \neq 0$ thì hạng tử cao nhất của đa thức tích $f(x_1,x_2,...,x_n).g(x_1,x_2,...,x_n)$ là $c_1d_1x_1^{a_{11}+b_{11}}...x_n^{a_{1n}+b_{1n}}$.

<u>Chứng minh:</u>

Giả sử: $\begin{cases} f(x_1,x_2,...,x_n) = c_1x_1^{a_{11}}...x_n^{a_{1n}} + ... + c_lx_1^{a_{l1}}...x_n^{a_{ln}} \\ g(x_1,x_2,...,x_n) = d_1x_1^{b_{11}}...x_n^{b_{1n}} + ... + d_mx_1^{b_{m1}}...x_n^{b_{mn}} \end{cases}$ đã được sắp xếp theo lối từ điển.

Điều đó có nghĩa là:

$$(a_{11},...,a_{1n}) > (a_{i1},...,a_{in}),\ \forall i = \overline{2,l}$$

Và

$$(b_{11},...,b_{1n}) > (b_{i1},...,b_{in}),\ \forall i = \overline{2,m}.$$

Ta sẽ chứng minh:

$$c_1 d_1 x_1^{a_{11}+b_{11}} ... x_n^{a_{1n}+b_{1n}}$$

là hạng tử cao nhất của đa thức tích $f(x_1,...,x_n).g(x_1,...,x_n)$.

Nhân $f(x_1,...,x_n)$ với $g(x_1,...,x_n)$, ta được:

$$f(x_1,...,x_n).g(x_1,...,x_n) = \sum_{i,j} c_i d_j x_1^{a_{i1}+b_{j1}} ... x_n^{a_{in}+b_{jn}},\ \left(i = \overline{1,l};\ j = \overline{1,m}\right).$$

Mỗi hạng tử $c_i d_j x_1^{a_{i1}+b_{j1}} ... x_n^{a_{in}+b_{jn}}$ cho ta phần tử $(a_{i1}+b_{j1},...,a_{in}+b_{jn}) \in \mathbb{N}^n$.

Nhưng vì, ta lại có:

+) Nếu $(a_1,...,a_n) > (b_1,...,b_n)$ thì $(a_1+c_1,...,a_n+c_n) > (b_1+c_1,...,b_n+c_n),\ \forall (c_1,...,c_n) \in \mathbb{N}^n$.

Thật vậy! Vì: $(a_1,...,a_n) > (b_1,...,b_n)$ nên có một chỉ số $i = \overline{1,n}$ sao cho:

$$a_1 = b_1,...,a_{i-1} = b_{i-1}, a_i > b_i.$$

Do đó: $a_1 + c_1 = b_1 + c_1,...,a_{i-1} + c_{i-1} = b_{i-1} + c_{i-1}, a_i + c_i > b_i + c_i$ **(đpcm)**.

+) Nếu $(a_1,...,a_n) > (b_1,...,b_n)$ và $(c_1,...,c_n) > (d_1,...,d_n)$, thì:

$$(a_1+c_1,...,a_n+c_n) > (b_1+d_1,...,b_n+d_n).$$

Thật vậy!

Ta có: $(a_1+c_1,...,a_n+c_n) > (b_1+c_1,...,b_n+c_n) > (b_1+d_1,...,b_n+d_n)$ **(đpcm)**.

Do vậy, ta có các bất đẳng thức sau:

$$\left(a_{11}+b_{11},...,a_{1n}+b_{1n}\right)>\left(a_{11}+b_{j1},...,a_{1n}+b_{jn}\right),\ j=\overline{2,m}$$
$$\left(a_{11}+b_{11},...,a_{1n}+b_{1n}\right)>\left(a_{i1}+b_{11},...,a_{in}+b_{1n}\right),\ i=\overline{2,l}$$
$$\Rightarrow\left(a_{11}+b_{11},...,a_{1n}+b_{1n}\right)>\left(a_{i1}+b_{j1},...,a_{in}+b_{jn}\right),\ i=\overline{2,l},\ j=\overline{2,m}$$

Vậy hạng tử $c_1d_1x_1^{a_{11}+b_{11}}...x_n^{a_{1n}+b_{1n}}$ chính là hạng tử cao nhất của đa thức tích.

5. Bổ đề 3.

Giả sử $g\left(\sigma_1,...,\sigma_n\right)$ là một đa thức của các đa thức đối xứng cơ bản

$$g\left(\sigma_1,...,\sigma_n\right)=c_1\sigma_1^{a_{11}}...\sigma_n^{a_{1n}}+...+c_m\sigma_1^{a_{m1}}...\sigma_n^{a_{mn}}$$

trong đó $c_i\neq 0,\ i=\overline{1,m}$, và $\left(a_{i1},...,a_{in}\right)\neq\left(a_{j1},...,a_{jn}\right),\ i\neq j$.

Thế thì: $g\left(\sigma_1,...,\sigma_n\right)\neq 0$.

Chứng minh:

Trong $g\left(\sigma_1,...,\sigma_n\right)$, thay σ_1 bằng $x_1+x_2+...+x_n,...,\sigma_n$ bằng $x_1+x_2+...+x_n$ ta được một đa thức của các ẩn $x_1,x_2,...,x_n$.

$$g\left(x_1+x_2+...+x_n,...,x_1x_2...x_n\right)=f\left(x_1,...,x_n\right)=\sum_{i=1}^{m}f_i\left(x_1,...,x_n\right)$$

với

$$f_1\left(x_1,...,x_n\right)=c_1\left(x_1+x_2+...+x_n\right)^{a_{i1}}...\left(x_1x_2...x_3\right)^{a_{in}},\ i=\overline{1,m}.$$

Hạng tử cao nhất của đa thức $f_1\left(x_1,...,x_n\right)$ theo **Định lý** $(*)$ là:

$$c_1x_1^{a_{11}}\left(x_1x_2\right)^{a_{12}}...\left(x_1x_2...x_n\right)^{a_{1n}}=c_ix_1^{k_{i1}}x_2^{k_{i2}}...x_k^{k_m}$$

với: $\begin{cases} a_{i1} + a_{i2} + ... a_{in} = k_{i1} \\ \quad a_{i2} + ... a_{in} = k_{i2} \\ .... \\ a_{in} = k_{in} \end{cases}$.

Hạng tử cao nhất của mỗi đa thức $f_i\left(x_1,...,x_n\right)$, cho ta phần tử $\left(k_{i1},k_{i2},...,k_{in}\right) \in \mathbb{N}^n$.

Ta có: $\left(k_{i1},k_{i2}...,k_{in}\right) \neq \left(k_{j1},k_{j2},...,k_{jn}\right),\ i \neq j$.

Vì nếu: $\left(k_{i1},k_{i2}...,k_{in}\right) = \left(k_{j1},k_{j2},...,k_{jn}\right),\ i \neq j$, thì:

$$\begin{aligned} &a_{i1} = k_{i1} - k_{i2} = k_{j1} - k_{j2} = a_{j1} \\ &a_{i2} = k_{i2} - k_{i3} = k_{j2} - k_{j3} = a_{j2} \\ &.. \\ &a_{in} = k_{in} = k_{jn} = a_{jn} \end{aligned}$$

với $i \neq j$, mâu thuẫn với giả thuyết.

Vì $\mathbb{N}^n$ sắp thứ tự toàn phần nên bộ phận hữu hạn gồm các phần tử $\left(k_{i1},k_{i2}...,k_{in}\right)$ với $i = \overline{1,m}$ có phần tử lớn nhất, chẳng hạn $\left(k_{11},k_{12},...,k_{1n}\right)$ là phần tử lớn nhất. Do đó $c_1 x_1^{k_{11}} ... x_n^{k_{1n}}$ là hạng tử cao nhất của $f\left(x_1,...,x_n\right)$.

Vậy: $g\left(\sigma_1,...,\sigma_n\right) = f\left(x_1,...,x_n\right) \neq 0$ **(đpcm)**.

Hệ quả. Giả sử:

$$h\left(x_1,x_2,...,x_n\right) = c_1 x_1^{a_{11}} ... x_n^{a_{1n}} + ... + c_m x_1^{a_{m1}} ... x_n^{a_{mn}}$$

và

$$h'\left(x_1,x_2,...,x_n\right) = c_1^{'} x_1^{a_{11}} ... x_n^{a_{1n}} + ... + c_{1m}^{'} x_1^{a_{m1}} ... x_n^{a_{mn}}$$

là hai đa thức trong đó $\left(a_{i1},...,a_{in}\right) \neq \left(a_{j1},...,a_{jn}\right)$ khi $i \neq j$, sao cho:

$$h(\sigma_1,...,\sigma_n) = h'(\sigma_1,...,\sigma_n)$$

Thế thì $c_i = c_i', i = \overline{1,m}$.

Chứng minh:

Giả sử có $c_i \neq c_i'$.

Đặt: $g(\sigma_1,...,\sigma_n) = h(\sigma_1,...,\sigma_n) - h'(\sigma_1,...,\sigma_n)$.

$$= (c_1 - c_1')\sigma_1^{a_{11}}...\sigma_n^{a_{1n}} + ... + (c_m - c_m')\sigma_1^{a_{m1}}...\sigma_n^{a_{mn}}$$

Vì: $c_1 \neq c_1'$, nên $c_1 - c_1' \neq 0$.

Theo **Bổ đề 3**, ta có: $g(\sigma_1,...,\sigma_n) \neq 0$.

Nhưng theo giả thuyết thì: $g(\sigma_1,...,\sigma_n) = 0$, mâu thuẫn.

6. Định lý 2. (Định lý cơ bản về đa thức đối xứng).

Giả sử $f(x_1,x_2,...,x_n) \in A[x_1,x_2,...,x_n]$ là một đa thức đối xứng khác không, khi đó có một và chỉ một đa thức $h(x_1,x_2,...,x_n) \in A[x_1,x_2,...,x_n]$ sao cho $f(x_1,x_2,...,x_n) = h(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$.

Trong đó $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$ là các đa thức đối xứng cơ bản.

Chứng minh:

Sự tồn tại.

Ta hãy sắp xếp $f(x_1,x_2,...,x_n)$ theo lối từ điển, giả sử $\alpha x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}$ là hạng tử cao nhất của $f(x_1,x_2,...,x_n)$. Theo **Bổ đề 1**, ta có:

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$$

Mặt khác, theo **Bổ đề 2**, thì đa thức:

$$\alpha\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3}...\sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n}$$

cũng có hạng tử cao nhất là: $\alpha x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n}$.

Xét hiệu:

$$f_1\left(x_1,...,x_n\right)=f\left(x_1,...,x_n\right)-\alpha\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3}...\sigma_{n-1}^{a_{n-1}-a_n}\sigma_n^{a_n}.$$

Nếu $f_1\left(x_1,...,x_n\right)\neq 0$, thì ta sắp xếp nó theo lối từ điển và giả sử

$$\beta x_1^{b_1}x_2^{b_2}...x_n^{b_n}$$

là hạng tử cao nhất của nó.

Theo **Định lý 1** thì $f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ cũng là một đa thức đối xứng, và do đó ta có:

$$b_1\geq b_2\geq ...\geq b_n.$$

Mặt khác, từ biểu thức của hiệu hai đa thức, ta có:

$$\left(a_1,...,a_n\right)>\left(b_1,...,b_n\right)$$

Do đó:

$$a_1\geq b_1.$$

Xét hiệu: $f_2\left(x_1,...,x_n\right)=f_1\left(x_1,...,x_2\right)-\beta\sigma_1^{b_1-b_2}\sigma_2^{b_2-b_3}...\sigma_{n-1}^{b_{n-1}-b_n}\sigma_n^{b_n}$.

Nếu $f_2\left(x_1,...,x_n\right)\neq 0$, ta hãy sắp xếp nó theo lối từ điển và giả sử

$$\gamma x_1^{c_1}...x_n^{c_n}$$

là hạng tử cao nhất của nó. Cũng lý luận tương tự đối với $f_1\left(x_1,...,x_n\right)$, ta được:

$$c_1\geq c_2\geq ...\geq c_n$$

Với

$$(b_1,b_2,...,b_n)>(c_1,c_2,...,c_n).$$

Ta nhận thấy rằng dãy $(a_1,...,a_n)>(b_1,...,b_n)>(c_1,...,c_n)>...$ không thể giảm vô hạn, tức là quá trình lập luận trên diễn ra không thể vô tận. Sau một số hữu hạn bước, ta sẽ có:

$$0=f_k(x_1,x_2,...,x_n)-\lambda\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}...\sigma_{n-1}^{l_{n-1}-l_n}\sigma_n^{l_n}$$

Vậy, từ các kết quả trên, ta có:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\alpha\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3}...\sigma_n^{a_n}+\beta\sigma_1^{b_1-b_2}\sigma_2^{b_2-b_3}...\sigma_n^{b_n}+...+\lambda\sigma_1^{l_1-l_2}\sigma_2^{l_2-l_3}...\sigma_n^{l_n}.$$

Vậy đa thức $h(x_1,x_2,...,x_n)$ cần tìm là đa thức:

$$h(x_1,x_2,...,x_n)=\alpha x_1^{a_1-a_2}x_2^{a_2-a_3}...x_n^{a_n}+\beta x_1^{b_1-b_2}x_2^{b_2-b_3}...x_n^{b_n}+...+\lambda x_1^{l_1-l_2}x_2^{l_2-l_3}...x_n^{l_n}$$

Tính duy nhất.

Giả sử có một đa thức $h'(x_1,...,x_n)$ sao cho $h'(\sigma_1,...,\sigma_n)=f(x_1,...,x_n)$.

Thế thì: $h'(\sigma_1,...,\sigma_n)=h(\sigma_1,...,\sigma_n)$.

Áp dụng hệ quả của **Bổ đề 3** ta có:

$$h(x_1,...,x_n)=h'(x_1,...,x_n).$$

Hệ quả. Giả sử $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$ là một đa thức bậc n trên trường K, có n nghiệm $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ trong trường E nào đó chứa K như một trường con và giả sử $g(x_1,x_2,...,x_n)$ $\in K[x_1,x_2,...,x_n]$ là đa thức đối xứng. Khi đó: $g(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in K$.

<u>Chứng minh:</u>

Thật vậy! Theo định lý cơ bản về đa thức đối xứng, tồn tại $\varphi\in K[x_1,x_2,...,x_n]$ sao cho

$$g(x_1,x_2,...,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n).$$

Mặt khác, theo công thức Viète, ta có:

$$\sigma_k\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)=\left(-1\right)^k a_k \in K .$$

Bởi vậy

$$g\left(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\right)=\varphi\left(\sigma_1\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right),...,\sigma_n\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)\right)=\varphi\left(-a_1,a_2,...,\left(-1\right)^n a_n\right)\in K .$$

Phép chứng minh **Định lý 2** cho phép chúng ta biết cách biểu diễn một đa thức đối xứng qua các đa thức đối xứng cơ bản. Trong thực tế để việc biểu diễn nhanh chóng hơn, chúng ta có nhận xét rằng đa thức đối xứng $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ có thể không phải là đẳng cấp, nhưng các hạng tử có cùng một cấp của nó lập thành một đa thức đối xứng đẳng cấp, do đó $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ là tổng của những đa thức đối xứng đẳng cấp.

Bây giờ giả sử $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in A\left[x_1,x_2,...,x_n\right]$ là đa thức đối xứng đẳng cấp bậc k và hạng tử cao nhất là

$$\alpha x_1^{a_1}x_2^{a_2}...x_n^{a_n} .$$

Bậc của $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ là

$$a_1+a_2+...+a_n=k .$$

Các đa thức đối xứng cơ bản $\sigma_1,...,\sigma_n$ có bậc theo thứ tự là $1,2,...,n$, nên đa thức tích

$$a\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3}...\sigma_n^{a_n}$$

cũng là đẳng cấp và có bậc là:

$$a_1-a_2+2\left(a_2-a_3\right)+...+na_n=a_1+a_2+...+a_n=k .$$

Do đó theo **Định lý 2**, ta có:

$$f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)-\alpha\sigma_1^{a_1-a_2}\sigma_2^{a_2-a_3}...\sigma_n^{a_n}$$

cũng là đẳng cấp bậc k nếu khác 0.

Sắp xếp $f_1\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ theo lối từ điển và giả sử hạng tử cao nhất là

$$\beta x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}$$

Thế thì $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = k$ và $(a_1, a_2, \ldots, a_n) > (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Theo **Định lý 2**, ta có dãy hữu hạn

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) > (b_1, b_2, \ldots, b_n) > (c_1, c_2, \ldots, c_n) > \ldots \quad (8)$$

trong đó

$$\begin{gathered} a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \\ b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \\ c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

và $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = \ldots = k$.

Tập hợp các phần tử của dãy $(*)$ là một bộ phận của tập hợp hữu hạn

$$M = \{(t_{11}, \ldots, t_{1n}), \ldots, (t_{m1}, \ldots, t_{mn})\}$$

Trong đó $t_{i1} \geq t_{i2} \geq \ldots \geq t_{in}$ và $t_{i1} + t_{i2} + \ldots + t_{in} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$.

Vậy, theo **Định lý 2** thì

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} \tau_i \sigma_1^{t_{i1} - t_{i2}} \sigma_2^{t_{i2} - t_{i3}} \ldots \sigma_n^{t_{in}}.$$

các hệ số $\tau_i \in A$ tìm được nhờ phương pháp hệ số bất định.

Chú ý: Nếu phần tử $(t_{i1}, \ldots, t_{in})$ không có mặt trong dãy (8) thì $\tau_i = 0$.

Tập hợp $M = \{(t_{11}, \ldots, t_{1n}), \ldots, (t_{m1}, \ldots, tn)\}$ gọi là *hệ thống số mũ* của đa thức $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

D. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VIÈTE.

I. Một số ứng dụng.

Dạng 1. Tìm hai số khi biết tổng và tích.

Dạng 2. Tính giá trị biểu thức đối xứng.

Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số để hai nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức cho trước.

Dạng 4. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số.

Dạng 5. Thiết lập phương trình bậc hai.

Dạng 6. Xét dấu các nghiệm.

Dạng 7. Giải hệ phương trình đối xứng loại 1.

Dạng 8. Chứng minh bất đẳng thức.

Dạng 9. Ứng dụng trong bài toán cực trị.

Dạng 10. Ứng dụng trong bài toán tiếp tuyến.

Dạng 11. Ứng dụng hệ thức truy hồi.

Dạng 12. Ứng dụng tính các biểu thức lượng giác.

Dạng 13. So sánh nghiệm.

Dạng 14. Ứng dụng khác.

II. Bài tập áp dụng.

Dạng 1. Tìm hai số khi biết tổng và tích.

Câu 1. Tìm hai số a và b khi biết tổng S và tích P: $\begin{cases} S = 2x \\ P = x^2 - y^2 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Ta có: $X = a, X = b$ là nghiệm của phương trình: $X^2 - 2xX + x^2 - y^2 = 0$.

Ta có: $\Delta' = x^2 - x^2 + y^2 = y^2 \geq 0$.

Khi đó: $X = x \pm \sqrt{y^2} = x \pm y$.

Vậy: $(a;b) = \{(x-y;x+y),(x+y;x-y)\}$.

Câu 2. Tìm hai số a và b biết:

a) $\begin{cases} a+b=9 \\ a^2+b^2=41 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Ta có: $a+b=9 \Rightarrow (a+b)^2 = 81 \Rightarrow (a^2+b^2)+2ab=81 \Rightarrow ab = \dfrac{81-(a^2+b^2)}{2} = \dfrac{81-41}{2} = 20$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} a+b=9 \\ ab=20 \end{cases}$.

Như vậy, $x=a, x=b$ là hai nghiệm thực của phương trình: $x^2-9x+20=0$.

Ta có: $x^2-9x+20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Suy ra: $(a,b) = \{(4;5),(5;4)\}$.

b) $\begin{cases} a-b=5 \\ ab=36 \end{cases}$.

Ta có: $(a-b)^2 = 25 \Leftrightarrow (a+b)^2 - 4ab = 25 \Rightarrow (a+b)^2 = 25+4ab = 25+4.36 = 169$.

Như vậy: $\begin{cases} a+b=\pm 13 \\ ab=36 \end{cases}$.

Suy ra: $x=a,\ x=b$ là hai nghiệm mỗi phương trình $x^2-13x+36=0$ hoặc $x^2+13x+36=0$.

+) Phương trình $x^2-13x+36=0$ có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}x=4\\x=9\end{array}\right.$.

Do vậy: $(a,b)=\{(4;9),(9;4)\}$.

+) Phương trình $x^2+13x+36=0$ có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-9\end{array}\right.$.

Do vậy: $(a,b)=\{(-9;-4),(-4;-9)\}$.

Dạng 2. Tính giá trị biểu thức đối xứng.

Câu 1. Giả sử x_1,x_2,x_3 lần lượt là ba nghiệm của phương trình $x^3+px+q=0$.

Tính giá trị của biểu thức: $S=(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_1-x_3)^2$.

<u>Giải</u>

Đặt: $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

Dễ thấy: $g(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ là đa thức đối xứng.

Hệ thống số mũ: $M=\{(4;2;0);(4;1;1);(3;3;0);(3;2;1);(2;2;2)\}$.

Khi đó: $g(x_1,x_2,x_3)=\sigma_1{}^2\sigma_2{}^2+a\sigma_1{}^3\sigma_3+b\sigma_2{}^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3{}^2$.

Chọn:

+) $\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\\x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1=0\\\sigma_2=-1\\\sigma_3=0\end{cases}\Rightarrow b=-4$.

+) $\begin{cases}x_1=2\\x_2=x_3=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1=0\\\sigma_2=-3\\\sigma_3=2\end{cases}\Rightarrow d=-27$.

+) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -3 \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -4$.

+) $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = -1 \\ \sigma_2 = -1 \\ \sigma_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow c = 18$.

Khi đó: $g(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1{}^2\sigma_2{}^2 - 4\sigma_1{}^3\sigma_3 - 4\sigma_2{}^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3{}^2$.

Vì: x_1, x_2, x_3 lần lượt là ba nghiệm của phương trình $x^3 + px + q = 0$ nên $\begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = p \\ \sigma_3 = -q \end{cases}$.

Do đó, $S = -4p^3 - 27q^2$.

Câu 2. Giả sử x, y, z là ba nghiệm của phương trình $\alpha^3 - 2021\alpha + 2022 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $S = x^4 + y^4 + z^4$?

<u>Giải</u>

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + yz + xz = -2021 \\ xyz = -2022 \end{cases}$.

Mặt khác, ta có:

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + xz)$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 = [-2(xy + yz + xz)]^2$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 = 4(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz)$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 2(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz) + 4(x^2yz + xy^2z + xyz^2)$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + xz)^2 + 4xyz(x + y + z) = 2(xy + yz + xz)^2 = 2.2021^2$$

Dạng 3. Tìm điều kiện của tham số để hai nghiệm liên hệ với nhau bởi một hệ thức cho trước.

Câu 1. Cho phương trình $y^2+my+p=0$ có hai nghiệm là y_1 và y_2. Định m và p để $\frac{1}{1+y_1}$ và $\frac{1}{1+y_2}$ cũng là nghiệm của phương trình này.

<u>Giải</u>

Xét phương trình $y^2+my+p=0\ (*)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta=m^2-4p\ge 0$ hay $m^2\ge 4p$.

Áp dụng hệ thức Viète, ta có: $\begin{cases} y_1+y_2=-m \\ y_1y_2=p \end{cases}$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{1+y_1}+\dfrac{1}{1+y_2}=\dfrac{2+(y_1+y_2)}{1+(y_1+y_2)+y_1y_2}=\dfrac{2-m}{p-m+1} \\ \dfrac{1}{1+y_1}.\dfrac{1}{1+y_2}=\dfrac{1}{p-m+1} \end{cases}$.

Do $\frac{1}{1+y_1};\frac{1}{1+y_2}$ cũng là nghiệm của phương trình $(*)$ nên: $\begin{cases} \dfrac{2-m}{p-m+1}=-m\ (1) \\ \dfrac{1}{p-m+1}=p\ (2) \end{cases}$.

Từ $(1),(2)$, suy ra: $p(2-m)=-m\ (3)$.

+) Nếu $m=2\Rightarrow p.0=-2$ (vô lý).

+) Nếu $m\ne 2\Rightarrow p=\frac{m}{m-2}$, thay vào (2), ta được:

$\left(\frac{m}{m-2}-m+1\right).\frac{m}{m-2}=1\Leftrightarrow -m\left(m^2-4m+2\right)=(m-2)^2$.

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2-2m-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\pm 1+\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Thử lại:

+) Với $m=1$, thì $p=-1$ thỏa điều kiện $m^2 \geq 4p$.

+) Với $m=1+\sqrt{5}$ thì $p=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ thỏa điều kiện $m^2 \geq 4p$.

+) Với $m=1-\sqrt{5}$ thì $p=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ thỏa điều kiện $m^2 \geq 4p$.

Vậy các cặp (m,p) cần tìm là $(1;-1),\left(1+\sqrt{5};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right),\left(1-\sqrt{5},\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 2. Cho phương trình $x^2-2mx+m^2-m-6=0$ (m là tham số).

1. Với giá trị nào của m thì phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}=\dfrac{18}{7}$.

2. Với giá trị nào của m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1 và x_2 sao cho $|x_1|+|x_2|=8$.

<u>Giải</u>

1. Để phương trình $x^2-2mx+m^2-m-6=0$ có hai nghiệm thì:

$$\Delta' = m^2-(m^2-m-6)=m+6 \geq 0 \Rightarrow m \geq -6 \ (1).$$

Với điều kiện (1), ta có:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{x_1^2+x_2^2}{x_1x_2}=\frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{18}{7},\ x_1x_2 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{4m^2-2\left(m^2-m-6\right)}{m^2-m-6}=\frac{18}{7} \Leftrightarrow \frac{m^2+m+6}{m^2-m-6}=\frac{9}{7},\left(m \neq -2, m \neq 3\right).$$

$\Leftrightarrow m^2-8m-48=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1=-4 \\ m_2=12 \end{array}\right.$ (thỏa điều kiện (1) và đều khác -2 và 3).

2. Với điều kiện (1),

$$|x_1|+|x_2|=8 \Leftrightarrow x_1{}^2+x_2{}^2+2|x_1x_2|=64 \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+2|x_1x_2|=64\ (2).$$

Nếu x_1 và x_2 cùng dấu thì: $x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -6 \\ m^2-m-6=\left(m+2\right)\left(m-3\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \leq m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{array}\right. (3).$

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2=64 \Rightarrow 4m^2=64 \Leftrightarrow m=\pm 4$ (thỏa điều kiện (3)).

Nếu x_1 và x_2 trái dấu thì: $x_1x_2<0 \Leftrightarrow m^2-m-6=\left(m+2\right)\left(m-3\right)<0 \Leftrightarrow -2<m<3\ (4)$.

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow \left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=64 \Rightarrow 4m^2-4\left(m^2-m-6\right)=64 \Leftrightarrow m=10$

(không thỏa điều kiện (4)).

Vậy để $|x_1|+|x_2|=8$ thì: $m=\pm 4$.

Dạng 4. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm độc lập với tham số.

Câu 1. Giả sử phương trình $mx^2-\left(2m+3\right)x+m-4=0$ (m là tham số) có hai nghiệm thực phân biệt là x_1, x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

Giải

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m+3}{m}=2+\dfrac{3}{m} \\ x_1x_2=\dfrac{m-4}{m}=1-\dfrac{4}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(x_1+x_2\right)=8+\dfrac{12}{m} \\ 3x_1x_2=3-\dfrac{12}{m} \end{cases}.$

Suy ra: $4\left(x_1+x_2\right)+3x_1x_2=11 \Rightarrow 4x_1+4x_2+3x_1x_2=11$ là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2, độc lập với tham số m.

Câu 2. Cho phương trình $\left(m-1\right)x^2-2\left(m+1\right)x+m=0$.

a) Giải và biện luận phương trình.

b) Khi phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Tìm một hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 độc lập với m.

Giải

a) Xét $m=1$, phương trình đã cho trở thành: $-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ là nghiệm duy nhất.

Với $m \neq 1$, ta có: $\Delta'=\left(m+1\right)^2-m\left(m-1\right)=3m+1$.

+) Với: $m>-\dfrac{1}{3}$, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

+) Với $m=-\dfrac{1}{3}$, phương trình đã cho có một nghiệm kép.

+) Với $m<-\dfrac{1}{3}$, phương trình vô nghiệm.

b) Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2\left(m+1\right)}{m-1}=2+\dfrac{4}{m-1} \\ x_1x_2=\dfrac{m}{m-1}=1+\dfrac{1}{m-1} \end{cases}$ lấy phương trình trên trừ đi 4 lần phương trình dưới, ta có: $x_1+x_2-4x_1x_2=-2$.

Vậy hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2, độc lập với tham số m là: $x_1+x_2-4x_1x_2=-2$.

Dạng 5. Thiết lập phương trình bậc hai.

Câu 1. Tìm phương trình bậc hai có hai nghiệm $x=2021$ và $x=2022$.

Giải

Ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 4043 \\ P = x_1 x_2 = 4086462 \end{cases}$.

Như vậy, dễ dàng suy ra được, phương trình bậc hai có hai nghiệm $x = 2021$ và $x = 2022$ là:

$$x^2 - 4043x + 4086462 = 0.$$

Câu 2. Giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$. Hãy lập một phương trình bậc hai có hai nghiệm là $x_1 + x_2$ và $x_1 x_2$.

Giải

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$.

Bài toán đã cho được quy về việc tìm phương trình bậc hai nhận $\begin{cases} X_1 = x_1 + x_2 \\ X_2 = x_1 x_2 \end{cases}$ làm nghiệm.

Đặt: $\begin{cases} S = X_1 + X_2 = -p + q \\ P = X_1 X_2 = -pq \end{cases}$.

Như vậy! Phương trình bậc hai cần tìm là: $x^2 + (p - q)x - pq = 0$.

Dạng 6. Xét dấu các nghiệm.

Câu 1. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

Tìm các giá trị của m để đường thẳng $d: y = mx - m$ cắt đồ thị tại hai điểm thuộc về hai nhánh của đồ thị (C).

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị d và (C): $mx - m = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ $(*)$.

$(*) \Leftrightarrow (m-1)x^2 + (m-3)x - 2m - 3 = 0$ (1).

Để d cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm thuộc hai nhánh khi và chỉ khi $\left(1\right)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2$ hay $x_1 + 2 < 0 < x_2 + 2$.

Đặt: $t = x + 2$, ta đưa $\left(1\right)$ về phương trình ẩn t:

$$\left(m-1\right)t^2 - \left(3m-1\right)t - 1 = 0 \ \left(2\right).$$

Phương trình $\left(2\right)$ phải có hai nghiệm trái dấu.

Khi đó: $\left(m-1\right).\left(-1\right) < 0 \Rightarrow m > 1$.

Câu 2. Cho phương trình

$$\left(m+1\right)x^3 + \left(3m-1\right)x^2 - x - 4m + 1 = 0 \ \left(1\right) \ (m \text{ là tham số}).$$

Với giá trị nào của m, thì phương trình $\left(1\right)$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm âm.

<u>Giải</u>

Ta có: $\left(m+1\right)x^3 + \left(3m-1\right)x^2 - x - 4m + 1 = 0 \ \left(1\right)$.

$$\Leftrightarrow \left(m+1\right)x^3 - \left(m+1\right)x^2 + 4mx^2 - 4m - x + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(m+1\right)x^2\left(x-1\right) + 4m\left(x^2-1\right) - \left(x-1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(m+1\right)x^2\left(x-1\right) + 4m\left(x+1\right)\left(x-1\right) - \left(x-1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[\left(m+1\right)x^2 + 4mx + 4m - 1\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \left(a\right) \\ g\left(x\right) = \left(m+1\right)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0 \ \left(b\right) \end{array}\right.$$

Để phương trình $\left(1\right)$ có ba nghiệm thực phân biệt thì phương trình $\left(b\right)$ phải có hai nghiệm thực phân biệt khác 1, tương đương với: $\begin{cases} m \neq -1 \\ \Delta'_{\left(b\right)} = 1 - 3m > 0 \\ g\left(1\right) \neq 0 \end{cases}$.

Hay: $\begin{cases} m \neq -1 \\ m < \dfrac{1}{3} \\ 9m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -1, m \neq 0, m < \dfrac{1}{3}\ (*)$.

Với điều kiện $(*)$, phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm $x = 1 > 0$ và hai nghiệm còn lại $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ là nghiệm của (b). Do đó để (1) có ba nghiệm phân biệt trong đó có hai nghiệm âm thì: $x_1 < x_2 < 0$, tương đương với:

$$\begin{cases} P = x_1x_2 = \dfrac{4m-1}{m+1} > 0 \\ S = x_1 + x_2 = -\dfrac{4m}{m+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > \dfrac{1}{4} \end{array}\right. (**).$$

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm âm thì điều kiện cần và đủ là: $m < -1$ hoặc $\dfrac{1}{4} < m < \dfrac{1}{3}$.

Dạng 7. Giải hệ phương trình đối xứng.

Câu 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Đặt: $\begin{cases} u = \sqrt{x} \geq 0 \\ v = \sqrt{y} \geq 0 \end{cases}$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 35 \end{cases}.$$

Tiếp theo ta đặt: $\begin{cases} S = u + v \\ P = uv \end{cases}, \left(S^2 \geq 4P\right)$.

Ta thu được một hệ mới: $\begin{cases} SP = 30 \\ S^3 - 3SP = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 30 \\ S^3 = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Theo định lý Viète, ta có: u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Khi đó: $\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \end{array}\right.$.

Dẫn đến nghiệm của hệ là $\left(x; y\right) = \left\{\left(4; 9\right); \left(9; 4\right)\right\}$

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 - \sqrt{2} \\ x^4 + y^4 = 5 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Ta có: $x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2$.

Đặt: $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = xy \end{cases}$, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} u + v = 3 - \sqrt{2} \\ u^2 - 2v^2 = 5 \end{cases}$.

Giải hệ đã cho, ta được: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 3 \\ v = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u = 9 - 4\sqrt{2} \\ v = -6 + 3\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left(II\right)$.

Với hệ $\left(I\right)$, thì: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ xy = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ x^2y^2 = 2 \end{cases}$.

Theo định lý Viète, thì: x^2, y^2 là nghiệm của phương trình: $t^2-3t+2=0$, ta được: $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$.

Thế vào hệ, ta được: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=2 \\ xy<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2=2 \\ y^2=1 \\ xy<0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Suy ra nghiệm $(x;y)=\left\{\left(1;-\sqrt{2}\right);\left(-1;\sqrt{2}\right);\left(\sqrt{2};-1\right);\left(-\sqrt{2};1\right)\right\}$.

Trường hợp còn lại vô nghiệm.

Dạng 8. Chứng minh bất đẳng thức.

Câu 1. Cho x,y,z khác 0, thỏa mãn: $x+y+z=xyz$ và $x^2=yz$.

Chứng minh rằng: $x^2 \geq 3$.

<u>Giải</u>

Từ giả thuyết, ta có: $\begin{cases} y+z=x^3-x \\ yz=x^2 \end{cases}$.

Theo định lý Viète, thì y,z là nghiệm của phương trình: $t^2-\left(x^3-x\right)t+x^2=0$.

Do tồn tại các số y,z, nên phương trình trên phải có nghiệm:

Tức là: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^3-x\right)^2-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2\left[\left(x^2-1\right)^2-4\right] \geq 0$.

Vì: $x \neq 0$, nên: $\left[\left(x^2-1\right)^2-4\right] \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-1 \geq 2 \\ x^2-1 \leq -2 \end{array}\right. \Rightarrow x^2 \geq 3$.

Câu 2. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $\begin{cases} x+y+z=5 \\ xy+yz+xz=8 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $1\le x,y,z\le \frac{7}{3}$.

Giải

Từ giả thuyết, ta xem z là tham số, ta có hệ phương trình ẩn x,y:

$\begin{cases} x+y=5-z \\ xy+z\left(x+y\right)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5-z \\ xy=8-z\left(5-z\right) \end{cases}$.

Theo định lý Viète thì x,y là nghiệm của phương trình: $t^2-\left(5-z\right)t+8-z\left(5-z\right)=0$.

Do phương trình có nghiệm đối với x,y nên:

$$\Delta=\left(5-z\right)^2-4\left[8-z\left(5-z\right)\right]\ge 0 \Leftrightarrow 1\le z\le \frac{7}{3}.$$

Do vai trò bình đẳng của x,y,z nên ta có kết luận tương tự đối với x và y.

Dạng 9. Ứng dụng trong bài toán cực trị.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=mx^3+\left(m+2\right)x^2-\left(1-m\right)x+3$ có hai điểm cực trị có hoành độ dương là?

Giải

Ta có: $f'\left(x\right)=3mx^2+2\left(m+2\right)x-\left(1-m\right)$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương thì:

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m+2\right)^2+3m\left(1-m\right)>0 \\ -\dfrac{2\left(m+2\right)}{3m}>0 \\ -\dfrac{1-m}{m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}<m<4 \\ -2<m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<m<0.$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số:

$$y=\frac{3}{2}x^3-4mx^2+(m-1)^2x+1$$

có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2>x_1+x_2$ là?

<u>Giải</u>

Ta có: $y'=\frac{9}{2}x^2-8mx+(m-1)^2$.

Hàm số y có hai điểm cực trị khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m(23m+18)>9$.

Theo định lý Viéte ta có: $x_1+x_2=\frac{16m}{9}$; $x_1x_2=\frac{2(m-1)^2}{9}$.

$x_1x_2>x_1+x_2 \Leftrightarrow \frac{2}{9}(m-1)^2>\frac{16}{9}m \Leftrightarrow m^2-10m+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>5+2\sqrt{6} \\ m<5-2\sqrt{6} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow m\in[-10;0]\cup\{10\}$.

Dạng 10. Ứng dụng trong bài toán tiếp tuyến.

Câu 1. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và điểm $A(0;a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

<u>Giải</u>

Ta có: $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}$.

Gọi tiếp điểm là $M\left(x_0;\frac{x_0+2}{x_0-1}\right)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$d: y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}$.

Vì đường thẳng $d: y = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-1}$ đi qua điểm $A(0;a)$. Khi đó:

$$\Rightarrow \frac{3x_0}{(x_0-1)^2}+\frac{x_0+2}{x_0-1}=a \Leftrightarrow 3x_0+x_0{}^2+x_0-2=ax_0{}^2-2ax_0+a$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x_0^2-2(a+2)x_0+a+2=0,\ \ (x_0\neq 1)\ \ (1)$$

Từ A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm x_0 phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' = (a+2)^2-(a-1)(a+2)>0\\ (a-1).1-2(a+2).1+a+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta' = 3a+6>0\\ -3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow a>-2.$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm $x_1, x_2 \neq 1$.

Hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành

$$\Leftrightarrow y_1.y_2<0 \Leftrightarrow \frac{(x_1+2)(x_2+2)}{(x_1-1)(x_2-1)}<0 \Leftrightarrow \frac{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}<0 \Leftrightarrow \frac{\frac{a+2}{a-1}+2\frac{2(a+2)}{a-1}+4}{\frac{a+2}{a-1}-\frac{2(a+2)}{a-1}+1}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+2+4a+8+4a-4}{a-1}}{\frac{a+2-2a-4+a-1}{a-1}}<0 \Leftrightarrow \frac{9a+6}{-3}<0 \Leftrightarrow 3a+2>0 \Leftrightarrow a>-\frac{2}{3}.$$

Câu 2. Cho hàm số: $(C): y = \frac{-x+1}{2x-1}$. Đường thẳng $d: y = x+m$. Với mọi m ta luôn có d cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại A, B. Tìm m để tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất.

<u>Giải</u>

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là:

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \frac{1}{2}\\ g(x)=2x^2+2mx-m-1=0(*)\end{cases}.$$

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-m\\ x_1x_2=-\frac{m+1}{2}\end{cases}$.

Giả sử: $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$.

Ta có: $y'=\dfrac{-1}{\left(2x-1\right)^2}$.

Nên tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại A và B có hệ số góc lần lượt là: $\begin{cases} k_1=-\dfrac{1}{\left(2x_1-1\right)^2} \\ k_2=-\dfrac{1}{\left(2x_2-1\right)^2} \end{cases}$.

Vậy: $k_1+k_2=-\dfrac{1}{\left(2x_1-1\right)^2}-\dfrac{1}{\left(2x_2-1\right)^2}=-\dfrac{4\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right)-4\left(x_1+x_2\right)+2}{\left[4x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+1\right]^2}$.

$$\Rightarrow k_1+k_2=-\frac{4\left[\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right]-4\left(x_1+x_2\right)+2}{\left[4x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)+1\right]^2}=-\frac{4\left(m^2+m+1\right)+4m+2}{\left(-2m-2+2m+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow k_1+k_2=-4m^2-8m-6=-4\left(m^2+2m+1\right)-2=-4\left(m+1\right)^2-2\le -2$$

Vậy tổng k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Dạng 11. Ứng dụng hệ thức truy hồi.

Phương pháp truy hồi:

Xét phương trình bậc hai:

$$ax^2+bx^2+c=0,\left(a\ne 0\right).$$

Giả sử x_1,x_2 là các nghiệm của nó.

Đặt: $S_n=x_1{}^n+x_2{}^n,n\in\mathbb{N}$.

Lúc đó ta có hệ thức truy hồi tuyến tính sau:

$$aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0\ \left(1\right).$$

Chứng minh:

Ta có: $S_{n+2}=x_1^{n+2}+x_2^{n+2}=\left(x_1^{n+1}+x_2^{n+1}\right)\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2\left(x_1^n+x_2^n\right)$.

$\Rightarrow S_{n+2}=S_{n+1}.\left(-\dfrac{b}{a}\right)-\dfrac{c}{a}.S_n \Leftrightarrow aS_{n+2}+bS_{n+1}+cS_n=0$ **(đpcm)**.

Câu 1. Tìm số nguyên lớn nhất không vượt quá $\left(4+\sqrt{15}\right)^7$

Giải

Ta đặt: $\begin{cases} x_1=4+\sqrt{15} \\ x_2=4-\sqrt{15} \end{cases}$.

Khi đó: x_1,x_2 là nghiệm của phương trình: $x^2-8x+1=0$.

Đặt: $S_n=x_1^n+x_2^n, n\in\mathbb{N}$. Ta có hệ thức: $S_{n+2}-8S_{n+1}+S_n=0$.

Ta tính được: $\begin{cases} S_1=8 \\ S_2=62 \\ S_3=488 \\ S_4=3842 \\ S_5=30248 \\ S_6=238142 \\ S_7=1874888 \end{cases}$.

Như vậy: $x_1^7=1874888-x_2^7$. Mà $0<x_2^7<1$.

Suy ra: $1874887<x_1^7<18748888$.

Vậy số nguyên lớn nhất không vượt quá $\left(4+\sqrt{15}\right)^7$ là 1874887.

Câu 2. Tìm chữ số tận cùng của phần nguyên của số $\left(5+3\sqrt{3}\right)^{2021}$.

Giải

Ta đặt: $\begin{cases} x_1 = 5+3\sqrt{3} \\ x_2 = 5-3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình: $x^2 - 10x - 2 = 0$.

Đặt: $S_n = x_1{}^n + x_2{}^n, n \in \mathbb{N}$. Theo hệ thức truy hồi, ta có:

$$S_{n+2} = 10S_{n+1} + 2S_n.$$

Ta có: $S_1 = 10 \Rightarrow 10 \mid S_{2k+1}$.

Để ý rằng: $-1 < x_2 < 0$, nên suy ra: $S_n < x_1{}^n = S_n - x_2{}^n < S_n + 1$.

Vậy nên $\left[x_1{}^n\right] = S_n$. Vì 2021 là số lẻ nên $10 \mid S_{2021}$.

Vậy chữ số tận cùng của phần nguyên của số $\left(5+3\sqrt{3}\right)^{2021}$ là số 0.

Dạng 12. Ứng dụng tính các biểu thức lượng giác.

Câu 1. Chứng minh rằng: $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{9\pi}{12} + \cos\frac{9\pi}{12}\cos\frac{17\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{17\pi}{12} = -\frac{3}{4}$.

Giải

Áp dụng công thức nhân ba, ta có: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

+) Với $x = \frac{\pi}{12}$, ta có: $4\cos^3\left(\frac{\pi}{12}\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \ (1)$.

Nên: $\cos\frac{\pi}{12}$ là nghiệm của phương trình: $4t^3 - 3t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

Lập luận tương tự, ta có: $\cos\frac{9\pi}{12}$ và $\cos\frac{17\pi}{12}$ cũng là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Viète, ta có: $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{9\pi}{12} + \cos\frac{9\pi}{12}\cos\frac{17\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{17\pi}{12} = -\frac{3}{4}$.

Câu 2. Cho $b \neq 0$, giả sử phương trình:

$$x^3 + ax^2 + x + b = 0$$

có ba nghiệm là x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng:

$$\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 4.$$

<u>Giải</u>

Theo định lý Viète, ta có:

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1$.

Đặt: $x_1 = \tan\alpha;\ x_2 = \tan\beta;\ x_3 = \tan\chi$, thế thì ta có:

$$\tan\alpha\tan\beta + \tan\beta\tan\chi + \tan\alpha\tan\chi = 1.$$

Suy ra: $\alpha + \beta + \chi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$, suy ra: $2\alpha + 2\beta + 2\chi = \pi + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$(\tan\alpha - \cot\alpha)(\tan\beta - \cot\beta) + (\tan\beta - \cot\beta)(\tan\chi - \cot\varphi) + (\tan\alpha - \cot\alpha)(\tan\chi - \cot\chi) = 4$$

Để ý rằng: $\tan x - \cot x = -2\cot 2x$.

Vì thế, đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\cot 2\alpha\cot 2\beta + \cot 2\beta\cot 2\chi + \cot 2\alpha\cot 2\chi = 1.$$

Đẳng thức hiển nhiên đúng, vì: $2\alpha + 2\beta + 2\chi = \pi + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ **(đpcm)**.

Vậy: $\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right) + \left(x_3 - \frac{1}{x_3}\right)\left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) = 4$.

Dạng 13. So sánh nghiệm.

Định lý về dấu kết hợp định lý Viéte cho tam thức bậc hai:

Đặt: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1.x_2 \end{cases}$.

$a.$ **So sánh nghiệm với hằng số** 0.

(i) Điều kiện để: $x_1 < x_2 < 0$ là: $\begin{cases} \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$ (1).

(ii) Điều kiện để: $0 < x_1 < x_2$ là: $\begin{cases} \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$ (2).

(iii) Điều kiện để: $x_1 < 0 < x_2$ là: $P < 0$ (3).

$b.$ **So sánh nghiệm với hằng số** α, β (Với α, β là các tham số thực cho trước).

(i) Điều kiện để: $x_1 < \alpha < x_2$ là: $a.f(\alpha) < 0$ (4).

(ii) Điều kiện để: $\alpha < x_1 < x_2$ là: $\begin{cases} \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases}$ (5).

(iii) Điều kiện để: $x_1 < x_2 < \alpha$ là: $\begin{cases} \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ a.f(\alpha) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases}$ (6).

(iv) Điều kiện để: $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ là: $\begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) < 0 \end{cases}$ (7).

(v) Điều kiện để: $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ là: $\begin{cases} a.f(\alpha) < 0 \\ a.f(\beta) > 0 \end{cases}$ (8).

(vi) Điều kiện để: $\left[\begin{array}{l} x_1 < \alpha < x_2 < \beta \\ \alpha < x_1 < \beta < x_2 \end{array}\right.$ là: $f(\alpha).f(\beta) < 0$ (9).

(vii) Điều kiện để: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ là: $\begin{cases} \Delta > 0 \ (\Delta' > 0) \\ a.f(\alpha) > 0 \\ a.f(\beta) > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$ (10).

Để tiết kiệm thời gian cho một số bài toán ta có thể tính trực tiếp dựa trên hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$.

Khi đó:

- Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chi khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta'_{f'} = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

- Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chi khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta'_{f'} = b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$.

Extra Techniques

Study tips

Cơ sở hình thành các điều kiện:

(1):Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta > 0$ hoặc $\Delta' > 0$. Do tổng của hai số âm là một số âm và tích của hai số âm là một số dương.

(2):Phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta > 0$ hoặc $\Delta' > 0$. Do tổng của hai số dương là một số dương và tích của hai số dương là một số dương.

(3):Sỡ dĩ chỉ cần một điều kiện $P < 0$ là vì khi $P < 0 \Rightarrow P = \frac{c}{a} < 0$ hay $ac < 0 \Rightarrow -ac > 0$. Khi đó: $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac > 0$. Đã thỏa mãn điều kiện cần và đủ để phương trình có hai nghiệm thực phân biệt.

$(4),(7),(8),(9)$: $g(x)$ trong khoảng hai nghiệm thì trái dấu với hệ số a và ở ngoài hai khoảng nghiệm thì cùng dấu với hệ số a. Và tích của một số dương với một số âm là một số âm.

(5): Vì $x_2 > x_1 > \alpha$ nên $x_1 + x_2 > 2x_1 > 2\alpha \Rightarrow \frac{S}{2} > \alpha$ (6): Vì $x_1 < x_2 < \alpha$ nên $x_1 + x_2 < 2x_2 < 2\alpha \Rightarrow \frac{S}{2} < \alpha$ (6): Vì $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ nên $2x_1 < x_1 + x_2 < 2x_2$. Khi đó: $2\alpha < S < 2\beta \Rightarrow \alpha < \frac{S}{2} < \beta$.

Lưu ý: Ở các điều kiện $(5),(6),\ (10)$ thì dấu của các tích $a.f(\alpha),\ a.f(\beta)$ đều được xét dấu tương tự với $(4),\ (7),(8),(9)$. Và vì phương trình có hai nghiệm phân biệt nên $\Delta > 0$ hoặc $\Delta' > 0$.

Câu 1. Tìm m để hàm số $y = -\frac{2}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 2mx + 5$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

<u>Giải</u>

Ta có: $y'=-2x^2+2(m+1)x+2m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$ thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn: $x_1\le 0<2\le x_2$. Điều đó tương đương với hệ:

$$\begin{cases} a.f(0)\le 0 \\ a.f(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2.2m\le 0 \\ -2m-12\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\ge -6 \end{array}\right. \Rightarrow m\ge 0.$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số:

$y=-\frac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10$ đồng biến trong khoảng $(0;3)$?

<u>Giải</u>

Ta có: $y'=-x^2+2(m-1)x+m+3$.

Để hàm số đồng biến trên $(0;3)$ thì phương trình: $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1\le 0<3\le x_2$. Khi đó:

$$\begin{cases} \Delta'=(m-1)^2+m+3>0 \\ (-1).f(0)\le 0 \\ (-1).f(3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-m+4>0 \\ f(0)\ge 0 \\ f(3)\ge 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall m\in\mathbb{R} \\ m+3\ge 0 \\ 7m-12\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m\in\mathbb{R} \\ m\ge -3 \\ m\ge \frac{12}{7} \end{cases} \Leftrightarrow m\ge \frac{12}{7}$$

Dạng 14. Ứng dụng khác.

Câu 1. Cho parabol (P): $y=-x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0;-1)$ và có hệ số góc là k. Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d). Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $\left|x_1^3-x_2^3\right|$ là?

<u>Giải</u>

Cho parabol $y=-x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0;-1)$ và có hệ số góc là k. Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d). Giả sử A và B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2.

+ Đường thẳng (d) có phương trình: $y=kx-1$.

+ Phương trình tương giao (d) và (P): $-x^2=kx-1 \Leftrightarrow x^2+kx-1=0\ (*)$.

+ $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt: $x_1;x_2$, vì: $\Delta=k^2+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Theo định lý Viéte, ta có: $x_1+x_2=-k,\quad x_1x_2=-1$.

Ta có: $\left|x_1^3-x_2^3\right|=\left|(x_1-x_2)\left[(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right]\right|=\left|x_1-x_2\right|.\left|(x_1+x_2)^2-x_1x_2\right|$.

Ta có: $\left|x_1-x_2\right|^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=k^2+4$.

$\Rightarrow\left|x_1^3-x_2^3\right|=\sqrt{k^2+4}.\left(k^2+1\right)\ge\sqrt{4}.1=2,\ \forall k\in\mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi $k=0$.

Câu 2. Tìm tất các các giá trị thực m để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(2-m)x^2+3(2m-3)x+m$ tại ba điểm phân biệt $A(0;m),\ B,\ C$ sao cho đường thẳng OA là phân giác của góc BOC.

Giải

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{3}x^3+(2-m)x^2+3(2m-3)x+m=-x+m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \frac{1}{3}x^2+(2-m)x+6m-8=0\ (*) \end{array}\right.$$

Để đường thẳng cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt thì $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác $x=0$

Hay:

$$\begin{cases}(2-m)^2-\frac{4}{3}(6m-8)>0\\ 6m-8\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-12m+\frac{44}{3}>0\\ m\neq\frac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>\frac{18+8\sqrt{3}}{3}\\ m<\frac{18-8\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.\\ m\neq\frac{4}{3}\end{cases}(1).$$

Suy ra: Tọa độ các điểm B, C lần lượt là: $B(x_1,-x_1+m),C(x_2,-x_2+m)$.

Theo định lý Viéte, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=3(m-2)\\ x_1x_2=3(6m-8)\end{cases}$.

Để ý: $OA\equiv Oy$ (Do $\begin{cases}O(0;0)\in Oy\\ A(0;m)\in Oy\end{cases}$) có véctơ chỉ phương $\vec{j}(0;1)$.

Vậy để đường thẳng OA là phân giác của góc BOC.

$$\left|\cos\left(\vec{j},\overrightarrow{OB}\right)\right|=\left|\cos\left(\vec{j},\overrightarrow{OC}\right)\right|\Leftrightarrow\frac{|m-x_1|}{\sqrt{x_1^2+(m-x_1)^2}}=\frac{|m-x_2|}{\sqrt{x_2^2+(m-x_2)^2}}\ (2).$$

$$(2)\Leftrightarrow|m-x_1|\sqrt{x_2^2+(m-x_2)^2}=|m-x_2|\sqrt{x_1^2+(m-x_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow(m-x_1)^2\left[x_2^2+(m-x_2)^2\right]=(m-x_2)^2\left[x_1^2+(m-x_1)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow(m-x_1)^2x_2^2+(m-x_1)^2.(m-x_2)^2=(m-x_2)^2x_1^2+(m-x_2)^2(m-x_1)^2$$

$$\Leftrightarrow x_2^2(m-x_1)^2=x_1^2(m-x_2)^2\Leftrightarrow x_2^2m^2-2mx_1x_2^2+x_1^2.x_2^2=x_1^2m^2-2mx_1^2x_2+x_1^2x_2^2$$

$$\Leftrightarrow m^2\left(x_1^2-x_2^2\right)-2mx_1x_2(x_1-x_2)=0\Leftrightarrow m^2(x_1-x_2)(x_1+x_2)-2mx_1x_2(x_1-x_2)=0$$

$$\Leftrightarrow m(x_1-x_2)\left[m(x_1+x_2)-2x_1x_2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx_1=mx_2\\ m(x_1+x_2)=2x_1x_2\end{array}\right..$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ 3m(m-2)=6(6m-8)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ 3m^2-42m+48\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=7+\sqrt{33}\\ m=7-\sqrt{33}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện (1) và $A\not\equiv O(0;0)$ nên ta nhận $m=7\pm\sqrt{33}$.

Câu 3. Biết đồ thị hàm số $y=(x-1)(x+1)\left(x^2-7\right)-m$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2, x_3, x_4. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1-x_2}+\dfrac{1}{1-x_3}+\dfrac{1}{1-x_4}>1$?

<u>Giải</u>

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$(x-1)(x+1)\left(x^2-7\right)-m=0 \Leftrightarrow x^4-8x^2+7-m=0 \ (1)$$

Đặt: $t=x^2,(t\geq 0)$. Khi đó phương trình đã cho có dạng: $t^2-8t+7-m=0\ (2)$

Vì đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên phương trình (1) có 4 nghiệm thực phân biệt hay phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương. Điều đó tương đương

với: $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}16-7+m>0\\ 8>0\\ 7-m>0\end{cases} \Leftrightarrow -9<m<7$.

Khi đó phương trình (2) có hai nghiệm dương: $0<t_1<t_2$ thoả mãn: $\begin{cases}t_1+t_2+8\\ t_1t_2=7-m\end{cases}$.

Suy ra phương trình (1) có bốn nghiệm lần lượt là:

$x_1=-\sqrt{t_2},\ x_2=-\sqrt{t_1},\ x_3=\sqrt{t_1},\ x_4=\sqrt{t_2}$.

Như vậy: $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1-x_2}+\dfrac{1}{1-x_3}+\dfrac{1}{1-x_4}>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1+\sqrt{t_2}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{t_1}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{t_1}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{t_2}}>1$.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+\sqrt{t_2}}+\frac{1}{1-\sqrt{t_2}}+\frac{1}{1+\sqrt{t_1}}+\frac{1}{1-\sqrt{t_1}}>1 \Leftrightarrow \frac{2}{1-t_2}+\frac{2}{1-t_1}>1 \Leftrightarrow \frac{4-2(t_1+t_2)}{1-(t_1+t_2)+t_1t_2}>1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-2.8}{1-8+7-m}>1 \Rightarrow \frac{12}{m}>1 \Leftrightarrow \frac{12-m}{m}>0 \Leftrightarrow 0<m<12$$

Kết hợp điều kiện ta được: $0<m<7 \Rightarrow m=\{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 4. Cho hàm số $y=x^3+(3-2m)x^2+(9m-31)x+27-7m$ có đồ thị là (C). Biết rằng ứng với giá trị nguyên $m=m_1$ thì hàm số (C) cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số cộng có các phần tử đều nguyên dương và ứng với giá trị nguyên $m=m_2$ thì hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm lập thành một cấp số nhân có các phần tử đều nguyên dương. Tìm giá trị m_1, m_2?

<u>Giải</u>

Từ hàm số: $y=x^3+(3-2m)x^2+(9m-31)x+27-7m$.

Ta nhận thấy $x=1$ luôn luôn là một nghiệm của phương trình $y=0$.

Bằng phép chia Hoocner ta có: $y=(x-1)\left(x^2+(4-2m)x+7m-27\right)$.

Giao điểm của hàm số với trục hoành là nghiệm của: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2+(4-2m)x+7m-27=0 \end{array}\right.$.

Để hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt thì:

$$\begin{cases} \Delta'=(2-m)^2-7m+27>0 \\ (1)^2+(4-2m).1+7m-27\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq \frac{22}{5}.$$

Giả sử 3 giao điểm của $y=f(x)$ với trục hoành lần lượt là: $1, x_1, x_2$.

Khi đó:

- 3 điểm trên lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_1=1+d \\ x_2=1+2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=2m-4 \\ x_1.x_2=7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3d=2m-4 \\ 2d^2+3d+1=7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+3d=2m-4 \\ 2d^2+3d+1=7\left(\frac{3m}{2}+3\right)-27 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+3d=2m-4 \\ 2d^2+3d+1=\frac{21}{2}d-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{3d}{2}+3 \\ \left[\begin{array}{l} d=2 \\ d=\frac{7}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (d;m)=(2;6)\ (TM) \\ (d;m)=\left(\frac{7}{4};\frac{45}{8}\right)\ (L) \end{array}\right.$$

Hay: $m_1=6$.

- 3 điểm trên lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_1 = d \\ x_2 = d^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m-4 \\ x_1.x_2 = 7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d + d^2 = 2m-4 \\ d^3 = 7m-27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d + d^2 = 2m-4 \\ d^3 = 7\left(\dfrac{d+d^2+4}{2}\right) - 27 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d + d^2 = 2m-4 \\ d^3 - \dfrac{7}{2}d^2 - \dfrac{7}{2}d + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{d+d^2+4}{2} \\ \left[\begin{array}{l} d = 2 \\ d = \dfrac{3 \pm \sqrt{113}}{4} (L) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow (d;m) = (2;5)\ (TM)$$

Nên: $m_2 = 5$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2021$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của m thuộc để đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị.

<u>Giải</u>

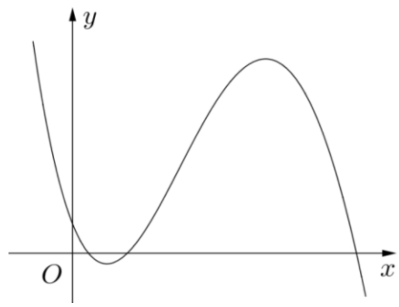
Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}|x|^3 - mx^2 + (m+6)|x| + 2021$ có 5 **điểm cực trị** khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2021$ có hai điểm cực trị nằm bên phải trục Oy hay hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + 2021$ có hai điểm cực trị dương.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 6$.

Bài toán đã cho trở thành việc tìm m để phương trình $x^2 - 2mx + (m+6) = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó:

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 6 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m > 0 \\ m > -6 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3.$$

Câu 6. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\ \ (a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong như



hình vẽ. Định dấu của các hệ số a,b,c,d.

Giải

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow a < 0$.

Gọi x_1, x_2 là hoành độ hai điểm cực trị của hàm số suy ra x_1, x_2 nghiệm phương trình $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ nên theo định lí Viéte, ta có:

+) Tổng hai nghiệm: $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

+) Tích hai nghiệm: $x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$.

Lại có đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d > 0$.

Câu 7. Cho hàm số $y = \dfrac{\sqrt{4x - x^2} + 12}{\sqrt{x^2 - 6x + 2k}}$ có đồ thị (C). Tìm tập hợp S chứa tất cả các giá trị thực của thám số k để đồ thị (C) có đúng hai tiệm cận đứng?

Giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ x^2 - 6x + 2k > 0 \end{cases}$.

Ta có: $12 + \sqrt{4x - x^2} \ne 0, \forall x \in D$.

Nên để (C) có hai tiệm cận đứng thì phương trình:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 2k} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 2k = 0\ \ (*)$$

có hai nghiệm phân biệt thuộc $[0;4]$.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thì: $\Delta' = 9 - 2k > 0 \Leftrightarrow k < \dfrac{9}{2}$.

Gọi hai nghiệm phân biệt của $(*)$ là $x_1 < x_2$, ta có: $0 \le x_1 < x_2 \le 4$.

Theo định lý Viéte ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1x_2 = 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \ge 0 \\ (x_1 - 4)(x_2 - 4) \ge 0 \\ (x_1 - 4) + (x_2 - 4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k \ge 0 \\ 6 \ge 0 \\ 2k - 24 + 16 \ge 0 \\ 6 - 8 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \ge 0 \\ 2k - 8 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \ge 4$$

Kết hợp nghiệm ta có: $S = \left[4; \dfrac{9}{2}\right)$.

Câu 8. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

<u>Giải</u>

Ta có: $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2m.2^x + 2m = 0\ (*)$.

Xem phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai theo ẩn $t = 2^x > 0$.

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2mt + 2m = 0\ (**)$.

Điều kiện để phương trình $(**)$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ S = 2m > 0 \\ P = 2m > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 2.$$

Theo định lý Viéte, ta có: $t_1.t_2 = 8 \Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$.

Note:
Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn yêu cầu đề bài thì $(**)$ phải có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1.t_2 = 8$ do $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow 2^{x_1+x_2} = 2^3 = 8 \Rightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 8$.

Câu 8. Xác định m để bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2 - 1 \le 0 \\ x^2 - 2(m+1)x + 4m + 1 \ge 0 \end{cases}$.

<u>Giải</u>

Đặt: $\begin{cases} x^2 - 1 \le 0 \, (1) \\ x^2 - 2(m+1)x + 4m + 1 \ge 0 \, (2) \end{cases}$.

Từ $(1) \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ \Delta_{(2)} = m^2 - 2m \end{cases}$.

+) Trường hợp 1: $\Delta_{(2)} < 0 \Rightarrow$ hệ phương trình đã cho có nghiệm đúng với mọi $x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow m^2 - 2m < 0 \Leftrightarrow m \in (0;2)$ $(*)$.

+) Trường hợp 2: $\Delta_{(2)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x_2 \ge x_1 \ge -1 \\ x_1 \le x_2 \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta_{(2)} \ge 0 \\ a.f(-1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} \ge -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_{(2)} \ge 0 \\ a.f(1) \ge 0 \\ \dfrac{S}{2} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \\ f(-1) = 6m + 4 \ge 0 \\ \dfrac{2(m+1)}{2} \ge -1 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \\ f(1) = 2m \ge 0 \\ \dfrac{2(m+1)}{2} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \\ m \ge -\dfrac{2}{3} \\ m \ge -2 \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ m \ge 2 \end{array}\right. \\ m \ge 0 \\ m \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{2}{3} \le m \le 0 \\ m \ge 2 \\ m = 0 \end{array}\right. \quad (*).$$

Từ $(*)(**)$ $\Rightarrow m \ge -\dfrac{2}{3}$.

Câu 9. Cho các số thực $a,\ b,\ c$ (với $a \ne 0$) sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc đoạn $[0;1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \dfrac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$.

<u>Giải</u>

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Theo định lý Viéte, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Do $a \neq 0$, nên:

$$P = \frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(2-\frac{b}{a}\right)}{\left(1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = \frac{2(1+x_1+x_2)+(1+x_1+x_2)(x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{2(1+x_1+x_2)+(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = \frac{2(1+x_1+x_2+x_1x_2)+\left(x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_1+x_2\right)}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 2+\frac{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

Giả sử $x_1 \le x_2$ do 2 nghiệm thuộc $[0;1]$ nên $x_1^2 \le x_1x_2 \le x_2^2 \le 1$.

Và $1+x_1+x_2+x_1x_2>0$ nên ta có: $\frac{x_1^2+x_2^2+x_1+x_2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \le \frac{x_1x_2+1+x_1+x_2}{1+x_1x_2+x_1+x_2} = 1 \Rightarrow P \le 3$.

Vậy $max\,P = 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x_1^2 = x_1x_2 \\ x_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c = 0 \\ b = -a \neq 0 \end{cases} \\ a = c = -\frac{b}{2} \neq 0 \end{array}\right.$$

Câu 10. Cho hàm số $y = x^3 - \left(\frac{2m+1}{2}\right)x^2 + 2x - 2022$. Biết rằng tồn tại hai giá trị tham số $m_1 > m_2$; thỏa mãn hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 sao cho $2x_1 - 3x_2 - 3 = m$. Tìm m_1, m_2.

<u>Giải</u>

$$y = x^3 - \left(\frac{2m+1}{2}\right)x^2 + 2x - 2022; \qquad y' = 3x^2 - (2m+1)x + 2$$

Hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = \frac{1}{4}(2m+1)^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 > 24, (*)$$

Theo định lý Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+1}{3} \\ x_1x_2 = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

Vì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2m+1}{3} \\ 2x_1 - 3x_2 - 3 = m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{5}(3m-2) \\ x_2 = \dfrac{1}{15}(m+11) \end{cases}$.

Thế vào $x_1.x_2 = \dfrac{2}{3}$, ta được:

$x_1x_2 = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\dfrac{1}{5}(3m-2)\right].\left[\dfrac{1}{15}(m+11)\right] = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{75}(3m^2+31m-22) = \dfrac{2}{3}$.

$3m^2 + 31m - 22 = 50 \Leftrightarrow 3m^2 + 31m - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \dfrac{1}{6}(5\sqrt{73} - 31) \\ m_2 = -\dfrac{1}{6}(5\sqrt{73} + 31) \end{cases}$.

Câu 11. Xác định giá trị của tham số m để hàm số
$y = f(x) = (m+1)x^3 - 3(m+1)x^2 + 2mx + 4$ đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 1.

Giải

Ta xét các khả năng:

- **Trường hợp 1:** $m = -1$, khi đó: $y = f(x) = -2x + 4$ là một đường thẳng có hệ số góc $k = -2 < 0$. Nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- **Trường hợp 2:** $m > -1$, khi đó:

Nếu $f'(x) = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. (Loại)

Nếu $f'(x) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thì hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$. (Loại)

Như vậy ở **Trường hợp 2** không tồn tại giá trị thực m nào để cho hàm số đồng biến trên khoảng có độ dài bằng 1.

- **Trường hợp 3:** $m < -1$, khi đó:

Nếu $f'(x)=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép thì hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. (Loại)

Nếu $f'(x)=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thì hàm số đồng biến trên khoảng $(x_1;x_2)$.

Như vậy để hàm số đồng biến trên khoảng có độ lớn bằng 1 thì: $\begin{cases} m<-1 \\ \Delta'_{f'(x)}>0 \\ |x_1-x_2|=1 \end{cases} \quad (*)$.

Ta có: $f'(x)=3(m+1)x^2-6(m+1)x+2m$.

Suy ra: $\Delta'_{f'(x)}=9(m+1)^2-6m(m+1)=(m+1)(3m+9)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\dfrac{2m}{3(m+1)} \end{cases}$.

Mà $|x_1-x_2|=1 \Leftrightarrow (x_1-x_2)^2=1 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \\ \left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-3 \end{array}\right. \\ 2^2-4.\dfrac{2m}{3(m+1)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-3 \\ 2^2-4.\dfrac{2m}{3(m+1)}=1 \end{cases} \Leftrightarrow m=-9.$$

----The End----