CHƯƠNG 4. BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

BÀI 1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ÔN TẬP BẤT ĐẲNG THỨC

1. Khái niệm bất đẳng thức

Các mệnh đề dạng "$a < b$" hoặc $a < b$ được gọi là bất đẳng thức.

2. Bất đẳng thức hệ quả và bất đẳng thức tương đương

Nếu mệnh đề "$a < b \Rightarrow c < d$" đúng thì ta nói bất đẳng thức $c < d$ là bất đẳng thức hệ quả của bất đẳng thức $a < b$ và cũng viết là "$a < b \Rightarrow c < d$"

Nếu bất đẳng thức $a < b$ là hệ quả của bất đẳng thức $c < d$ và ngược lại thì ta nói hai bất đẳng thức tương đương với nhau và viết là $a < b \Leftrightarrow c < d$.

3. Tính chất của bất đẳng thức

Như vậy để chứng minh bất đẳng thức $a < b$ ta chỉ cần chứng minh $a - b < 0$ Tổng quát hơn, khi so sánh hai số, hai biểu thức hoặc chứng minh một bất đẳng thức, ta có thể sử dụng các tính chất của bất đẳng thức được tóm tắt trong bảng sau

Tính chất		Tên gọi
Điều kiện	Nội dung	
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế của bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế của bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < c$ và $c < d$ $\Rightarrow a + b < c + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0; c > 0$	$a < b$ và $c < d$ $\Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n \in \mathbb{N}^*$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
$n \in \mathbb{N}^*$ và $a > 0$	$a < b \Leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

Chú ý

Ta còn gặp các mệnh đề dạng $a \le b$ hoặc $a \ge b$ Các mệnh đề dạng này cũng được gọi là bất đẳng thức. Để phân biệt, ta gọi chúng là các **bất đẳng thức không ngặt** và gọi các bất đẳng thức dạng $a < b$ hoặc $a > b$ là các **bất đẳng thức ngặt**. Các tính chất nêu trong bảng trên cũng đúng cho bất đẳng thức không ngặt. **II– BẤT ĐẲNG THỨC GIỮA TRUNG BÌNH CỘNG VÀ TRUNG BÌNH NHÂN**

1. Bất đẳng thức Cô-si

Định lí

Trung bình nhân của hai số không âm nhỏ hơn hoặc bằng trung bình cộng của chúng

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \qquad \forall a,b \ge 0. \qquad (1)$$

Đẳng thức $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

2. Các hệ quả

Hệ quả 1

Tổng của một số dương với nghịch đảo của nó lớn hơn hoặc bằng 2

$$a + \frac{1}{a} \ge 2, \qquad \forall a > 0.$$

Hệ quả 2

Nếu x, y không âm và có tổng không đổi thì tích xy lớn nhất khi và chỉ khi $x = y$.

Hệ quả 3

Nếu x, y không âm và có tích không đổi thì tổng $x + y$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $x = y$.

III – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Điều kiện	**Nội dung**
	$\lvert x\rvert \ge 0, \lvert x\rvert \ge x, \lvert x\rvert \ge -x$
$a > 0$	$\lvert x\rvert \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$
	$\lvert x\rvert \ge a \Leftrightarrow x \le -a$ hoặc $x \ge a$
	$\lvert a\rvert - \lvert b\rvert \le \lvert a+b\rvert \le \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1: Chứng minh bất đẳng thức dựa vào định nghĩa và tính chất

1. Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức(BĐT) $A \geq B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- Ta đi chứng minh $A - B \geq 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Loại 1: Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng.

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a, b, c. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

a) $ab \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$

b) $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

c) $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq \left(a+b+c\right)^2$

d) $\left(a+b+c\right)^2 \geq 3\left(ab+bc+ca\right)$

Lời giải

a) Ta có $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$. Đẳng thức $\Leftrightarrow a = b$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - ab \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

c) BĐT tương đương $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

d) BĐT tương đương $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \geq 3\left(ab+bc+ca\right)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) - 2\left(ab+bc+ca\right) \geq 0 \Leftrightarrow \left(a-b\right)^2 + \left(b-c\right)^2 + \left(c-a\right)^2 \geq 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Nhận xét: Các BĐT trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 2 : Cho năm số thực a, b, c, d, e. Chứng minh rằng

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

Lời giải

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) =$

$$= (\frac{a^2}{4} - ab + b^2) + (\frac{a^2}{4} - ac + c^2) + (\frac{a^2}{4} - ad + d^2) + (\frac{a^2}{4} - ae + e^2)$$

$$= (\frac{a}{2} - b)^2 + (\frac{a}{2} - c)^2 + (\frac{a}{2} - d)^2 + (\frac{a}{2} - e)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c = d = e = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 3 : Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \geq \frac{2}{1+ab}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} - \frac{2}{1+ab} = (\frac{1}{a^2+1} - \frac{1}{1+ab}) + (\frac{1}{b^2+1} - \frac{2}{1+ab})$

$$= \frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)} = \frac{a-b}{1+ab}(\frac{b}{1+b^2} - \frac{a}{1+a^2}) = \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)}$$

$$= \frac{a-b}{1+ab}.\frac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)} = \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)} \geq 0 \text{ (Do } ab \geq 1\text{)}.$$

Nhận xét : Nếu $-1 < b \leq 1$ thì BĐT có chiều ngược lại : $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} \leq \frac{2}{1+ab}$.

Ví dụ 4: Cho số thực x. Chứng minh rằng

a) $x^4 + 3 \geq 4x$ b) $x^4 + 5 > x^2 + 4x$ c) $x^{12} + x^4 + 1 > x^9 + x$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với $x^4 - 4x + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^3 + x^2 + x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x^2 + 2x + 3) \geq 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[(x+1)^2 + 1\right] \geq 0$ (đúng với mọi số thực x)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $x^4 - x^2 - 4x + 5 > 0$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 + 1 + x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)^2 + (x-2)^2 > 0$$

Ta có $(x^2-1)^2 \geq 0, (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2-1)^2 + (x-2)^2 \geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ (không xảy ra)

Suy ra $(x^2-1)^2 + (x-2)^2 > 0$ ĐPCM.

c) Bất đẳng thức tương đương với $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$

+ Với $x<1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+x^4\left(1-x^5\right)+\left(1-x\right)$

Vì $x<1$ nên $1-x>0, 1-x^5>0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

+ Với $x\geq 1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^9\left(x^3-1\right)+x\left(x^3-1\right)+1$

Vì $x\geq 1$ nên $x^3-1\geq 0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

Vậy ta có $x^{12}+x^4+1>x^9+x$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

a) $a^4+b^4-4ab+2\geq 0$

b) $2\left(a^4+1\right)+\left(b^2+1\right)^2\geq 2\left(ab+1\right)^2$

c) $3\left(a^2+b^2\right)-ab+4\geq 2\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)$

Lời giải

a) BĐT tương đương với $\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)+\left(2a^2b^2-4ab+2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(a^2-b^2\right)^2+2\left(ab-1\right)^2\geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

b) BĐT tương đương với $2\left(a^4+1\right)+\left(b^4+2b^2+1\right)-2\left(a^2b^2+2ab+1\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(a^4+b^4-2a^2b^2\right)+\left(2a^2-4ab+2b^2\right)+\left(a^4-4a^2+1\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+2(a-b)^2+(a^2-1)^2\geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

c) BĐT tương đương với $6\left(a^2+b^2\right)-2ab+8-4\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\left[a^2-4a\sqrt{b^2+1}+4\left(b^2+1\right)\right]+\left[b^2-4b\sqrt{a^2+1}+4\left(a^2+1\right)\right]+\left(a^2-2ab+b^2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow\left(a-2\sqrt{b^2+1}\right)^2+\left(b-2\sqrt{a^2+1}\right)^2+\left(a-b\right)^2\geq 0$ (đúng)

Đẳng thức không xảy ra.

Ví dụ 6: Cho hai số thực $x,\ y$ thỏa mãn $x\geq y$. Chứng minh rằng;

a) $4\left(x^3-y^3\right)\geq\left(x-y\right)^3$

b) $x^3-3x+4\geq y^3-3y$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương $4\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x-y\right)^3\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[4\left(x^2+xy+y^2\right)-\left(x-y\right)^2\right]\geq 0 \Leftrightarrow \left(x-y\right)\left[3x^2+3xy+y^2\right]\geq 0$

$\Leftrightarrow 3\left(x-y\right)\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]\geq 0$ (đúng với $x\geq y$) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

b) Bất đẳng thức tương đương $x^3-y^3\geq 3x-3y-4$

Theo câu a) ta có $x^3-y^3\geq \frac{1}{4}\left(x-y\right)^3$, do đó ta chỉ cần chứng minh

$\frac{1}{4}\left(x-y\right)^3\geq 3x-3y-4$ (*), Thật vậy,

BĐT (*) $\Leftrightarrow \left(x-y\right)^3-12\left(x-y\right)+16\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x-y-2\right)\left[\left(x-y\right)^2+2\left(x-y\right)-8\right]\geq 0$

$\Leftrightarrow \left(x-y-2\right)^2\left(x-y+4\right)\geq 0$ (đúng với $x\geq y$)

Đẳng thức xảy không xảy ra.

Loại 2: Xuất phát từ một BĐT đúng ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh

Đối với loại này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt

* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng

$a\in\left[\alpha;\beta\right]\Rightarrow\left(a-\alpha\right)\left(a-\beta\right)\leq 0 \quad (*)$

$a,b,c\in\left[\alpha;\beta\right]\Rightarrow\left(a-\alpha\right)\left(b-\alpha\right)\left(c-\alpha\right)+\left(\beta-a\right)\left(\beta-b\right)\left(\beta-c\right)\geq 0(**)$

Ví dụ 1 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có :

$a+b>c\Rightarrow ac+bc>c^2$. Tương tự

$bc+ba>b^2;\quad ca+cb>c^2$ cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm

Nhận xét : * Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c.

Ngoài ra nếu xuất phát từ BĐT $|a-b|<c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

Ví dụ 2 : Cho $a,b,c \in [0;1]$. Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

Lời giải

Cách 1: Vì $a,b,c \in [0;1] \Rightarrow (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2c^2 \ge a^2 + b^2 + c^2$ (*)

Ta có : $a^2b^2c^2 \ge 0; \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le a^2b + b^2c + c^2a$ nên từ (*) ta suy ra

$a^2 + b^2 + c^2 \le 1 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \le 1 + a^2b + b^2c + c^2a$ đpcm.

Cách 2: BĐT cần chứng minh tương đương với $a^2\left(1-b\right) + b^2\left(1-c\right) + c^2\left(1-a\right) \le 1$

Mà $a,b,c \in \left[0;1\right] \Rightarrow a^2 \le a, b^2 \le b, c^2 \le c$ do đó

$a^2\left(1-b\right) + b^2\left(1-c\right) + c^2\left(1-a\right) \le a\left(1-b\right) + b\left(1-c\right) + c\left(1-a\right)$

Ta chỉ cần chứng minh $a\left(1-b\right) + b\left(1-c\right) + c\left(1-a\right) \le 1$

Thật vậy: vì $a,b,c \in \left[0;1\right]$ nên theo nhận xét $\left(**\right)$ ta có

$$abc + \left(1-a\right)\left(1-b\right)\left(1-c\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c - \left(ab + bc + ca\right) \le 1$$

$$\Leftrightarrow a\left(1-b\right) + b\left(1-c\right) + c\left(1-a\right) \le 1$$

vậy BĐT ban đầu được chứng minh

Ví dụ 3 : Cho các số thực a,b,c thỏa mãn : $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh :

$$2(1 + a + b + c + ab + bc + ca) + abc \ge 0.$$

Lời giải

Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow a,b,c \in [-1;1]$ nên ta có :

$(1+a)(1+b)(1+c) \ge 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \ge 0$ (*)

Mặt khác : $\dfrac{(1+a+b+c)^2}{2} \ge 0 \Leftrightarrow 1 + a + b + c + ab + bc + ca \ge 0$ (**)

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng nếu $a \ge 4, b \ge 5, c \ge 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì $a + b + c \ge 16$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a < 9, b < 8, c \le 7$ do đó áp dụng $\left(*\right)$ ta có

$\left(a-4\right)\left(a-9\right) \le 0, \left(b-5\right)\left(b-8\right) \le 0, \left(c-6\right)\left(c-7\right) \le 0$ nhân ra và cộng các BĐT cùng chiều lại ta được:

$a^2 + b^2 + c^2 - 13(a+b+c) + 118 \le 0$ suy ra

$a + b + c \ge \frac{1}{13}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 118\right) = 16$ vì $a^2 + b^2 + c^2 = 90$

vậy $a + b + c \ge 16$ dấu "=" xảy ra khi $a = 4, b = 5, c = 7$

Ví dụ 5: Cho ba số a, b, c thuộc $\left[-1;1\right]$ và không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \ge 2$$

Lời giải

Vì ba số a, b, c thuộc $\left[-1;1\right]$ nên $0 \le a^2, b^2, c^2 \le 1$

Suy ra $(1 - b^2)(1 + b^2 - a^4) \ge 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - a^4b^2 \le 1$ (*)

Mặt khác $a^4 \ge a^{2012}, b^4 \ge b^{2012}$ đúng với mọi a, b thuộc $\left[-1;1\right]$

Suy ra $a^4 + b^4 - a^4b^2 \ge a^{2012} + b^{2012} - a^4b^2$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $a^{2012} + b^{2012} \le a^4b^2 + 1$ hay $\frac{a^4b^2 + c^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \ge 1$

Tương tự ta có $\frac{b^4c^2 + a^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \ge 1$ và $\frac{c^4a^2 + b^{2012} + 1}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \ge 1$

Cộng vế với ta được $\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \ge 3$

Hay $\frac{a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2 + 3}{a^{2012} + b^{2012} + c^{2012}} \ge 2$ ĐPCM.

Dạng toán 2: sử dụng bất đẳng thức cauchy(côsi) để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá tri lớn nhất, nhỏ nhất.

1. Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

* Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm

* BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích

* Điều kiện xảy ra dấu '=' là các số bằng nhau

* Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

Đối với hai số: $x^2 + y^2 \ge 2xy$; $\quad x^2 + y^2 \ge \frac{(x+y)^2}{2}$; $\quad xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Đối với ba số: $abc \le \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}$, $abc \le \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$

2. Các ví dụ minh họa.

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức côsi

Ví dụ 1: Cho a,b là số dương thỏa mãn $a^2+b^2=2$. Chứng minh rằng

a) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge 4$

b) $(a+b)^5 \ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2,\ \frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{b}{a^2}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge \dfrac{4}{\sqrt{ab}}$ (1)

Mặt khác ta có $2=a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab \Rightarrow ab\le 1$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}\right)\ge 4$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

b) Ta có $(a+b)^5=(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a^2+2ab+b^2\ge 2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}=4\sqrt{ab}\ \text{và}$$

$$(a^3+3ab^2)+(3a^2b+b^3)\ge 2\sqrt{(a^3+3ab^2)(3a^2b+b^3)}=4\sqrt{ab(1+b^2)(a^2+1)}$$

Suy ra $(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)\ge 16ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$

Do đó $(a+b)^5\ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\ge 8$

b) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$

c) $(1+a)(1+b)(1+c)\ge \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$

d) $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \le a^3 + b^3 + c^3$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$a + \frac{1}{b} \ge 2\sqrt{\frac{a}{b}},\ b + \frac{1}{c} \ge 2\sqrt{\frac{b}{c}},\ c + \frac{1}{a} \ge 2\sqrt{\frac{c}{a}}$$

Suy ra $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \ge 8\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{\frac{c}{a}} = 8$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

b) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$1 + a^2 \ge 2\sqrt{a^2} = 2a$, tương tự ta có $1 + b^2 \ge 2b,\ 1 + c^2 \ge 2c$

Suy ra $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 2\left(a^2b + b^2c + c^2a\right)$

Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$$a^2b + b^2c + c^2a \ge 3\sqrt{a^2b.b^2c.c^2a} = 3abc$$

Suy ra $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

c) Ta có $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 1 + \left(ab + bc + ca\right) + \left(a + b + c\right) + abc$

Áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$ab + bc + ca \ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca} = 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$ và $a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

Suy ra $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \ge 1 + 3\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2 + 3\sqrt[3]{abc} + abc = \left(1 + \sqrt[3]{abc}\right)^3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

d) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$a^2\sqrt{bc} \le a^2\left(\frac{b + c}{2}\right),\ b^2\sqrt{ac} \le b^2\left(\frac{a + c}{2}\right),\ c^2\sqrt{ab} \le c^2\left(\frac{a + b}{2}\right)$$

Suy ra $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \le \dfrac{a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b}{2}$ (1)

Mặt khác theo BĐT côsi cho ba số dương ta có

$$a^2b \le \frac{a^3 + a^3 + b^3}{3},\ b^2a \le \frac{b^3 + b^3 + a^3}{3},\ a^2c \le \frac{a^3 + a^3 + c^3}{3},$$

$$c^2a \le \frac{c^3 + c^3 + a^3}{3},\ b^2c \le \frac{b^3 + b^3 + c^3}{3},\ c^2b \le \frac{c^3 + c^3 + b^3}{3}$$

Suy ra $a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b \le 2\left(a^3 + b^3 + c^3\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab} \le a^3 + b^3 + c^3$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Ví dụ 3: Cho a, b, c, d là số dương. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a + b + c + d}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$

b) $\left(\dfrac{a}{b^3} + \dfrac{b}{c^3} + \dfrac{c}{d^3} + \dfrac{d}{a^3}\right)\left(a + b\right)\left(b + c\right) \ge 16$

c) $\dfrac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}} + \dfrac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} \ge 4.$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a + b \ge 2\sqrt{ab}, c + d \ge 2\sqrt{cd}$ và $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \ge 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}} = 2\sqrt[4]{abcd}$

Suy ra $\dfrac{a + b + c + d}{4} \ge \dfrac{2\sqrt{ab} + 2\sqrt{cd}}{4} \ge \sqrt[4]{abcd}$ ĐPCM.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

b) Áp dụng câu a) ta có

$$\frac{a}{b^3} + \frac{b}{c^3} + \frac{c}{d^3} + \frac{d}{a^3} \ge 4\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}.\frac{b}{c^3}.\frac{c}{d^3}.\frac{d}{a^3}} = \frac{4}{\sqrt{abcd}}$$

Suy ra $\left(\dfrac{a}{b^3} + \dfrac{b}{c^3} + \dfrac{c}{d^3} + \dfrac{d}{a^3}\right)\left(a + b\right)\left(c + d\right) \ge \dfrac{4}{\sqrt{abcd}}.2\sqrt{ab}.2\sqrt{cd} = 16$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$.

c) Áp dụng câu a) ta có

$$VT = 3.\frac{a + b + c}{3\sqrt[3]{abc}} + \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

$$\ge 4\sqrt[4]{\left(\frac{a + b + c}{3\sqrt[3]{abc}}\right)^3 \frac{8abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}} = 4\sqrt[4]{\frac{8\left(a + b + c\right)^3}{27(a + b)(b + c)(c + a)}}$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh $4\sqrt[4]{\dfrac{8\left(a + b + c\right)^3}{27(a + b)(b + c)(c + a)}} \ge 4$

$\Leftrightarrow 8\left(a + b + c\right)^3 \ge 27\left(a + b\right)\left(b + c\right)\left(c + a\right)$ (*)

Áp dụng BĐT côsi cho ba số ta có

$$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\le\left(\frac{\left(a+b\right)+\left(b+c\right)+\left(c+a\right)}{3}\right)^3=\frac{8\left(a+b+c\right)^3}{27}$$

Suy ra BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Nhận xét: BĐT câu a) là bất đẳng côsi cho bốn số không âm. Ta có BĐT côsi cho n số không âm như sau: Cho n số không âm $a_i,\ i=1,2,...,n$.

Khi đó ta có $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Ví dụ 4: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $a^2b+b^2c+c^2a\le 3$

b) $\dfrac{ab}{3+c^2}+\dfrac{bc}{3+a^2}+\dfrac{ca}{3+b^2}\le\dfrac{3}{4}$

Lời giải

a) Ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=9\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2b^2=9$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^4+b^4\ge 2a^2b^2,\ b^4+c^4\ge 2b^2c^2,\ c^4+a^4\ge 2c^2a^2$

Cộng vế với vế lại ta được $a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 3$ (3)

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2+a^2b^2\ge 2\sqrt{a^2.a^2b^2}=2a^2b$, tương tự ta có $b^2+b^2c^2\ge 2b^2c,\ c^2+c^2a^2\ge 2c^2a$

Cộng vế với vế ta được $a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ (4)

Từ giả thiết và (3), (4) suy ra $a^2b+b^2c+c^2a\le 3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$3+a^2=3+\left(3-b^2-c^2\right)=\left(3-b^2\right)+\left(3-c^2\right)\ge 2\sqrt{\left(3-b^2\right)\left(3-c^2\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{bc}{3+a^2}\le\frac{bc}{2\sqrt{\left(3-b^2\right)\left(3-c^2\right)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{3-c^2}.\frac{c^2}{3-b^2}}\le\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{3-c^2}+\frac{c^2}{3-b^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$$

Tương tự ta có $\dfrac{ab}{3+c^2}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a^2}{a^2+c^2}+\dfrac{b^2}{b^2+c^2}\right),\ \dfrac{ca}{3+b^2}\le\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{c^2}{c^2+b^2}+\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\right)$

Cộng vế với vế ta được $\frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2}+\frac{ca}{3+b^2}\le\frac{3}{4}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Loại 2: Kĩ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp.

- Để chứng minh BĐT ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng BĐT côsi.
- Khi gặp BĐT có dạng $x+y+z\ge a+b+c$ (hoặc $xyz\ge abc$), ta thường đi chứng minh $x+y\ge 2a$ (hoặc $ab\le x^2$), xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng(hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.
- Khi tách và áp dụng BĐT côsi ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra(thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại biên).

Ví dụ 1: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$

b) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b$

Tương tự ta có $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge 2c,\ \frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\ge 2a$.

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)\ge 2\left(a+b+c\right)\Leftrightarrow\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c \text{ ĐPCM}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{1}{a}}=\frac{2}{b}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{c},\ \frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\Leftrightarrow\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \text{ ĐPCM.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c dương sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$

b) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{c}.\frac{b^3c^3}{a}}=2b^3ac$

Tương tự ta có $\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 2abc^3,\ \frac{c^3a^3}{b}+\frac{a^3b^3}{c}\ge 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\right)\ge 2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow \frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$. ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) BĐT tương đương với $\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge 9$

$\Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9 \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 3$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2\ge 2\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)^2.\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=2b^2$

Tương tự ta có $\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 2c^2,\ \left(\frac{ca}{b}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\ge 2\text{a}^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $8\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\le\left(3+a\right)\left(3+b\right)\left(3+c\right)$

b) $\left(3-2a\right)\left(3-2b\right)\left(3-2c\right)\le abc$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$\left(a+b\right)\left(b+c\right)\le\left(\frac{\left(a+b\right)+\left(b+c\right)}{2}\right)^2=\frac{\left(3+a\right)^2}{4}$

Tương tự ta có $\left(b+c\right)\left(c+a\right)\le\frac{\left(3+c\right)^2}{4},\ \left(c+a\right)\left(a+b\right)\le\frac{\left(3+a\right)^2}{4}$

Nhân vế với vế lại ta được $\left[\left(a+b\right)\left(b+c\right)\left(c+a\right)\right]^2\le 64\left[\left(3+a\right)\left(3+b\right)\left(3+c\right)\right]^2$

Suy ra $8(a+b)(b+c)(c+a) \le (3+a)(3+b)(3+c)$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) * TH1: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \le 0$: BĐT hiển nhiên đúng.

* TH2: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c) > 0$:

+ Nếu cả ba số $(3-2a), (3-2b), (3-2c)$ đều dương. Áp dụng BĐT côsi ta có

$(3-2a)(3-2b) \le \left(\dfrac{(3-2a)+(3-2b)}{2}\right)^2 = c^2$, tương tự ta có

$(3-2b)(3-2c) \le a^2, (3-2c)(3-2a) \le b^2$

Nhân vế với vế ta được $\left[(3-2a)(3-2b)(3-2c)\right]^2 \le a^2b^2c^2$

Hay $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \le abc$.

+ Nếu hai trong ba số $(3-2a), (3-2b), (3-2c)$ âm và một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $3-2a<0, 3-2b<0$ suy racó $6-2a-2b<0 \Leftrightarrow c<0$ (không xảy ra)

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 4: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :

$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{a^2}{b+c}.\dfrac{b+c}{4}} = a$.

Tương tự ta có $\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c+a}{4} \ge b$; $\dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b}{4} \ge c$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được :

$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}+\dfrac{a+b+c}{2} \ge a+b+c$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b} \ge \dfrac{a+b+c}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Lưu ý :Việc ta ghép $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b+c}{4}$ và đánh giá như trên là vì những lí do sau:

Thứ nhất là ta cần làm mất mẫu số ở các đại lượng vế trái (vì vế phải không có phân số), chẳng hạn đại lượng $\frac{a^2}{b+c}$ khi đó ta sẽ áp dụng BĐT côsi cho đại lượng đó với một đại lượng chứa $b+c$.

Thứ hai là ta cần lưu ý tới điều kiện xảy ra đẳng thức ở BĐT côsi là khi hai số đó bằng nhau. Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ khi đó $\frac{a^2}{b+c}=\frac{a}{2}$ và $b+c=2a$ do đó ta ghép như trên.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a+3}}\ge\frac{3}{2}$

Lời giải

a) Đặt $P=\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{a}{\sqrt{b+1}}+\frac{\sqrt{2}a\left(b+1\right)}{4}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{a}{\sqrt{b+1}}.\frac{\sqrt{2}a\left(b+1\right)}{4}}=\frac{3\sqrt{2}a}{2}$$

Tương tự ta có

$$\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{b}{\sqrt{c+1}}+\frac{\sqrt{2}b\left(c+1\right)}{4}\ge\frac{3\sqrt{2}b}{2},\ \frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{c}{\sqrt{a+1}}+\frac{\sqrt{2}c\left(a+1\right)}{4}\ge\frac{3\sqrt{2}c}{2}$$

Cộng vế với vế ba BĐT trên ta được

$$2P+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(ab+bc+ca+a+b+c\right)\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(a+b+c\right)$$

$$\Leftrightarrow P\ge\frac{15\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}\left(ab+bc+ca\right)\ (\text{vì } a+b+c=3)$$

Mặt khác ta có $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$ (theo ví dụ 1)

Do đó $ab+bc+ca\le 3$

Suy ra $\Leftrightarrow P\ge\frac{15\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}.3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Đặt $Q=\sqrt{\frac{a^3}{b+3}}+\sqrt{\frac{b^3}{c+3}}+\sqrt{\frac{c^3}{a+3}}$

Ta có $Q = \frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $4\sqrt{a(b+3)} = 2\sqrt{4a(b+3)} \le 4a + b + 3$

Suy ra $\frac{a^2}{\sqrt{a(b+3)}} \ge \frac{4a^2}{4a+b+3}$, tương tự ta có

$\frac{b^2}{\sqrt{b(c+3)}} \ge \frac{4b^2}{4b+c+3}, \frac{c^2}{\sqrt{c(a+3)}} \ge \frac{4c^2}{4c+a+3}$

Cộng vế với vế lại ta được $Q \ge \frac{4a^2}{4a+b+3} + \frac{4b^2}{4b+c+3} + \frac{4c^2}{4c+a+3} = L$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{4a^2}{4a+b+3} + \frac{1}{16}(4a+b+3) \ge 2\sqrt{\frac{4a^2}{4a+b+3}.\frac{1}{16}(4a+b+3)} = a$$

Tương tự ta có

$$\frac{4b^2}{4b+c+3} + \frac{1}{16}(4b+c+3) \ge b, \frac{4c^2}{4c+a+3} + \frac{1}{16}(4c+a+3) \ge c$$

Cộng vế với vế lại ta được $L + \frac{1}{16}\left[5(a+b+c)+9\right] \ge a+b+c$

Vì $a+b+c=3$ nên $L \ge \frac{3}{2}$ suy ra $Q \ge \frac{3}{2}$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \ge 2(a+b+c)$.

Lời giải

Ta có $\left[(a-1)(b-1)\right]\left[(b-1)(c-1)\right]\left[(c-1)(a-1)\right] = (a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2 \ge 0$

Do đó không mất tính tổng quát giả sử

$(a-1)(b-1) \ge 0 \Leftrightarrow ab + 1 \ge a + b \Leftrightarrow 2(ab+c+1) \ge 2(a+b+c)$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \ge 2(ab+c+1)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 1 \ge 2(ab+c)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \ge \frac{2}{ab} = 2c, \frac{1}{c^2} + 1 \ge \frac{2}{c} = 2ab$ (do $abc = 1$)

Cộng vế với vế ta được $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+1\ge 2\left(ab+c\right)$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 7: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $f(x)=\frac{\left(x-1\right)^2}{x-2}$ với $x>2$

b) $g(x)=2x+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}$ với $x>-1$

c) $h\left(x\right)=x+\frac{3}{x}$ với $x\ge 2$

d) $k\left(x\right)=2x+\frac{1}{x^2}$ với $0<x\le\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2$

Do $x>2$ nên $x-2>0,\ \frac{1}{x-2}>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$x-2+\frac{1}{x-2}\ge 2\sqrt{\left(x-2\right).\frac{1}{x-2}}=2$$

Suy ra $f\left(x\right)\ge 4$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{x-2}\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2=1\Leftrightarrow x=1$ (loại) hoặc $x=3$ (thỏa mãn)

Vậy $\min f\left(x\right)=4$ khi và chỉ khi $x=3$.

b) Do $x>-1$ nên $x+1>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$g(x)=\left(x+1\right)+\left(x+1\right)+\frac{1}{\left(x+1\right)^2}-2\ge 3\sqrt[3]{\left(x+1\right).\left(x+1\right).\frac{1}{\left(x+1\right)^2}}-2=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x+1=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}\Leftrightarrow\left(x+1\right)^3=1\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy $\min g\left(x\right)=1$ khi và chỉ khi $x=0$.

c) Ta có $h\left(x\right)=\left(\frac{3}{x}+\frac{3x}{4}\right)+\frac{x}{4}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{3}{x}+\frac{3x}{4}\ge 2\sqrt{\frac{3}{x}.\frac{3x}{4}}=3$

Mặt khác $x\ge 2$ suy ra $h\left(x\right)=\left(\frac{3}{x}+\frac{3x}{4}\right)+\frac{x}{4}\ge 3+\frac{2}{4}=\frac{7}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x}{4} \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $\min h(x) = \dfrac{7}{2}$ khi và chỉ khi $x = 2$.

d) Ta có $k(x) = x + x + \dfrac{1}{8x^2} + \dfrac{7}{8x^2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $x + x + \dfrac{1}{8x^2} \geq 3\sqrt[3]{x.x.\dfrac{1}{8x^2}} = \dfrac{3}{2}$

Mặt khác $0 < x \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{7}{8x^2} \geq \dfrac{7}{2}$ suy ra $k(x) \geq \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2} = 5$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{8x^2} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

Vậy $\min k(x) = 5$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{1}{2}$.

Loại 3: Kĩ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra(để tách ghép cho hợp lí) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sau sao cho dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = (1 + 2a)(1 + 2bc)$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2 + m^2 \geq 2ma \Rightarrow 2a \leq \dfrac{a^2}{m} + m$ (với $m > 0$)

Do b, c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b = c$ nên ta đánh giá $2bc \leq b^2 + c^2$.

Suy ra $A \leq \left(\dfrac{a^2}{m} + m + 1\right)(1 + b^2 + c^2) = B$. Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng $xy \leq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ để là xuất hiện $a^2 + b^2 + c^2$ nên ta sẽ tách như sau

$$B = \frac{1}{m}(a^2 + m^2 + m)(1 + b^2 + c^2) \leq \frac{1}{m}\left(\frac{(a^2 + m^2 + m) + (1 + b^2 + c^2)}{2}\right)^2$$

Suy ra A $\leq \dfrac{1}{4m}(m^2 + m + 2)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $a=m,\, b=c, a^2+m^2+m=1+b^2+c^2$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Từ đây ta có $m=\dfrac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2+\dfrac{4}{9}\ge\dfrac{4}{3}a\Rightarrow 2a\le\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{2}{3}$ và $2bc\le b^2+c^2$

Suy ra $A\le\left(\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\dfrac{3a^2}{2}+\dfrac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)=\dfrac{3}{2}\left(a^2+\dfrac{10}{9}\right)\left(b^2+c^2+1\right)\le\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a^2+\dfrac{10}{9}+b^2+c^2+1}{2}\right)^2=\dfrac{98}{27}$$

Suy ra $\mathrm{A}\le\dfrac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=c\\ a^2+\dfrac{10}{9}=b^2+c^2+1\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{2}{3}\\ b=c=\sqrt{\dfrac{5}{18}}\end{cases}$

Vậy $\max A=\dfrac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a=\dfrac{2}{3}$ và $b=c=\sqrt{\dfrac{5}{18}}$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $2a+4b+3c^2=68$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a^2+b^2+c^3$.

Phân tích

Ta cần đánh giá biểu thức A qua biểu thức $2a+4b+3c^2$. Do đó ta sẽ cho thêm vào các tham số vào và đánh giá như sau (m,n,p dương)

$a^2+m^2\ge 2am,\, b^2+n^2\ge 2bn$ và $\dfrac{c^3}{2}+\dfrac{c^3}{2}+4p^3\ge 3pc^2$

Suy ra $a^2+b^2+c^3+m^2+n^2+4p^3\ge 2am+2bn+3pc$ (*)

Để $2am+2bn+3pc^2$ có thể bội số của $2a+4b+3c^2$ thì

$\dfrac{2m}{2}=\dfrac{2n}{4}=\dfrac{3p}{3}\Leftrightarrow m=\dfrac{n}{2}=p$

Mặt khác dấu bằng ở BĐT (*) xảy ra khi $a=m,b=n,c=2p$

Hay $a=m,b=2m,c=2m\Rightarrow 2m+4.(2m)+3(2m)^2=68$

$\Leftrightarrow 12m^2+10m-68=0 \Leftrightarrow m=2$ (nhận) hoặc $m=-\dfrac{17}{6}$ (loại)

Suy ra $p=2, n=4$ do đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bĐT côsi ta có

$a^2+4\ge 4a,\ b^2+16\ge 8b$ và $\dfrac{c^3}{2}+\dfrac{c^3}{2}+32\ge 6c^2$

Cộng vế với vế ta được

$a^2+b^2+c^3+52\ge 4a+8b+6c^2$, kết hợp với $2a+4b+3c^2=68$

Suy ra $a^2+b^2+c^3\ge 84$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=4, c=4$

Vậy $\min \mathrm{A}=84 \Leftrightarrow a=2, b=4, c=4$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) $A=\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{1-x^3}}$ với $x<1$

b) $B=\sqrt{-x^2+4x+21}-\sqrt{-x^2+3x+10}$ với $-2\le x\le 5$.

Lời giải

a) Ta có $A=\dfrac{x^2-x+3}{\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)}}$

Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$$\sqrt{(1-x)(x^2+x+1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2(1-x)}.\sqrt{x^2+x+1}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2(1-x)+x^2+x+1}{2}=\frac{x^2-x+3}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra $A\ge\dfrac{x^2-x+3}{\dfrac{x^2-x+3}{2\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $2(1-x)=x^2+x+1 \Leftrightarrow x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

Vậy $\min\limits_{x<1}\mathrm{A}=2\sqrt{2}$ khi $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

b) Ta có $B=\dfrac{x+11}{\sqrt{-x^2+4x+21}+\sqrt{-x^2+3x+10}}=\dfrac{x+11}{\sqrt{(x+3)(7-x)}+\sqrt{(x+2)(5-x)}}$

Với $-2 \le x \le 5$ thì $x+11$; $x+3$; $7-x$; $x+2$; $5-x$ là các số không âm nên theo BĐT côsi ta có :

$$\sqrt{(x+3)(7-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+6)(7-x)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x+6)+(7-x)}{2}\right) = \frac{x+13}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+2)(5-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2x+4)(5-x)} \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(2x+4)+(5-x)}{2}\right) = \frac{x+9}{2\sqrt{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{(x+3)(7-x)} + \sqrt{(x+2)(5-x)} \le \dfrac{x+11}{\sqrt{2}}$, từ đó ta có $B \ge \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ (1) và (2) đồng thời xảy ra dấu bằng $\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\min\limits_{-2\le x\le 5} B = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Loại 4: Kĩ thuật côsi ngược dấu.

Ví dụ 1: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P = \frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} + \frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} + \frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} .$$

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{a+2\sqrt{bc}}\right) \le \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{a}{a+b+c}\right)$

Tương tự ta có $\dfrac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}} \le \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{b}{a+b+c}\right)$, $\dfrac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}} \le \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{c}{a+b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$P \le \frac{1}{2}\left(3 - \frac{a}{a+b+c} - \frac{b}{a+b+c} - \frac{c}{a+b+c}\right) = 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow a = b = c$

Ví dụ 2: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a}{1+b^2} + \dfrac{b}{1+c^2} + \dfrac{c}{1+a^2} \ge \dfrac{3}{2}$.

b) $\dfrac{a^2}{a+2b^3} + \dfrac{b^2}{b+2c^3} + \dfrac{c^2}{c+2a^3} \ge 1$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2-b^2\right)}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$ và $\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác ta có $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Do đó $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{a^2}{a+2b^3}=\frac{a\left(a+2b^3\right)-2ab^3}{a+2b^3}\ge a-\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{b+2c^3}\ge b-\frac{2c\sqrt[3]{b}}{3}$, $\frac{c^2}{c+2a^3}\ge c-\frac{2a\sqrt[3]{c}}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge a+b+c-\frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{c^2}+c\sqrt[3]{b^2}\right)$$

Mặt khác $a+b+c=3$ do đó ta chỉ cần chứng minh: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$b\sqrt[3]{a^2}\le\frac{1}{3}b.\left(a+a+1\right)=\frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2}\le\frac{2bc+c}{3}$, $a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ca+a}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ab+b}{3}+\frac{2bc+c}{3}+\frac{2ca+a}{3}=\frac{2}{3}\left(ab+bc+ca\right)+\frac{1}{3}\left(a+b+c\right)$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2}{3}.3+\frac{1}{3}.3=3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{c}{1+ab}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{a}{1+bc}\geq 1$

Lời giải

Đặt $P=\dfrac{c}{1+ab}+\dfrac{b}{1+ac}+\dfrac{a}{1+bc}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{c}{1+ab}=c-\frac{abc}{1+ab}\geq c-\frac{abc}{2\sqrt{ab}}=c-\frac{\sqrt{(ca)(cb)}}{2}\geq c-\frac{ca+cb}{4}$$

Tương tự ta ta có $\dfrac{b}{1+ac}\geq b-\dfrac{ba+bc}{4}$, $\dfrac{a}{1+bc}\leq a-\dfrac{ab+ac}{4}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$P\geq a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow (a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ca)$ (*)

Hay $ab+bc+ca=\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}$

Suy ra $P\geq a+b+c-\dfrac{(a+b+c)^2-1}{4}=\dfrac{(a+b+c-1)(3-a-b-c)}{4}+1$ (1)

Từ giả thiết ta có $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow 3-a-b-c\geq 0$ (2)

Và từ (*) suy ra $a+b+c\geq 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $P\geq 1$. ĐPCM

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi trong ba số a, b, c có một số bằng 1 và hai số còn lại bằng 0.

Dạng 3: đặt ẩn phụ trong bất đẳng thức.

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x=f(a,b,c)$, $y=g(a,b,c)$, $z=h(a,b,c)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t=f(a;b;c)$). Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho các số dương a,b,c.

a) Chứng minh rằng $\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{6b+8c}{2a+b}+\dfrac{3a+2b+c}{b+c}\geq 7$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{a+b}{a+b+c} + \dfrac{b+c}{b+c+4\text{a}} + \dfrac{c+a}{c+a+16b}$.

Lời giải

a) Đặt $x = a+b+c,\ y = 2a+b,\ z = b+c$

Suy ra $a = x - z,\ b = -2x + y + 2z,\ c = 2x - y - z$

Bất đẳng thức trở thành $\dfrac{-x+y+z}{x} + \dfrac{4x-2y+4z}{y} + \dfrac{x+y}{z} \geq 7$

$\Leftrightarrow -1 + \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{x} + \dfrac{4x}{y} - 2 + \dfrac{4z}{y} + \dfrac{x}{z} + \dfrac{y}{z} \geq 7$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{y}{x} + \dfrac{4x}{y}\right) + \left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right) + \left(\dfrac{4\text{z}}{y} + \dfrac{y}{z}\right) \geq 10$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{x} + \dfrac{4x}{y} \geq 4,\ \dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z} \geq 2,\ \dfrac{4\text{z}}{y} + \dfrac{y}{z} \geq 4$

Suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = z \\ 2z = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x = y = 2z$ suy ra không tồn tại a, b, c.

Dấu đẳng thức không xảy ra.

b) Đặt $x = a+b+c,\ y = b+c+4a,\ z = c+a+16b$

Suy ra $a = \dfrac{y-x}{3},\ b = \dfrac{z-x}{15},\ c = \dfrac{21x-5y-z}{15}$

Khi đó ta có $P = \dfrac{-6x+5y+z}{15x} + \dfrac{4x-y}{3y} + \dfrac{16x-z}{15z}$

$\Rightarrow P = \dfrac{y}{3x} + \dfrac{4x}{3y} + \dfrac{z}{15y} + \dfrac{16x}{15z} - \dfrac{4}{5}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\dfrac{y}{3x} + \dfrac{4x}{3y} \geq \dfrac{4}{3},\ \dfrac{\text{z}}{15y} + \dfrac{16y}{15z} \geq \dfrac{8}{15}$

Suy ra $P \geq \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{15} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x = 2y = z \Leftrightarrow a = \dfrac{5b}{3} = \dfrac{5c}{7}$

Vậy $\min P = \dfrac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a = \dfrac{5b}{3} = \dfrac{5c}{7}$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\ge\sqrt{\frac{b+c}{p-a}}+\sqrt{\frac{c+a}{p-b}}+\sqrt{\frac{a+b}{p-c}}$$

Lời giải

Đặt $x=p-a;\ y=p-b;\ z=p-c$ suy ra $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$.

Do a,b,c là ba cạnh của tam giác nên x,y,z dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $4\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}\le\left(2+\frac{y+z}{x}\right)+4=\frac{y+z}{x}+6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}\le\frac{z+x}{y}+6,\ 4\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\le\frac{x+y}{z}+6$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$4\left(\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\right)\le\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge\frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18\right)$

$\Leftrightarrow\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6$.

Ta có $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=2,\ \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2,\ \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đều.

Nhận xét : Đối với BĐT có giả thiết a,b,c là ba cạnh của tam giác thì ta thực hiện phép đặt ẩn phụ $x=\frac{a+b-c}{2},\ y=\frac{a-b+c}{2},\ z=\frac{-a+b+c}{2}$ thì khi đó $a=y+z;\ b=z+x;\ c=x+y$ và

x, y, z dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết x, y, z dương không còn ràng buộc là ba cạnh của tam giác.

Ví dụ 3: Cho x, y, z là số dương. Chứng minh rằng $x^3 + 2y^3 + 3z^3 \geq \frac{1590}{1331}(x + y + z)^3$

Lời giải

Ta có BĐT $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3 + 2\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3 \geq$

Đặt $a = \frac{x}{x+y+z}, b = \frac{y}{x+y+z}, c = \frac{z}{x+y+z} \Rightarrow a, b, c$ dương và $a + b + c = 1$

BĐT trở thành $a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{1590}{1331}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 + \left(\frac{6}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}a$, $2b^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 + 2\left(\frac{3}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}b$, $3c^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{11}\right)^3 \geq \frac{18}{11}c$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$a^3 + 2b^3 + 3c^3 + \frac{588}{1331} \geq \frac{18}{11}(a + b + c) = \frac{18}{11}$$

Suy ra $a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{1590}{1331}$.

Nhận xét: Phương pháp đặt ẩn phụ trên được áp dụng khi BĐT là đồng bậc(Người ta gọi là phương pháp chuẩn hóa)

Ví dụ 4: Cho x, y, z là số dương thỏa mãn $x + y + z \leq \frac{3}{2}$

Chứng minh rằng $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{15}{2}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ và $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ nên $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$

Suy ra $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z + \frac{9}{x+y+z}$

Đặt $t = x + y + z \Rightarrow 0 < t \leq \frac{3}{2}$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh $x+y+z+\dfrac{9}{x+y+z}=t+\dfrac{9}{t}\geq\dfrac{15}{2}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$t+\dfrac{9}{t}=t+\dfrac{9}{4t}+\dfrac{27}{4t}\geq 2\sqrt{t.\dfrac{9}{4t}}+\dfrac{27}{4.\dfrac{3}{2}}=\dfrac{15}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 5: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+\dfrac{4}{\sqrt[3]{abc}}$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}=1\Leftrightarrow 4=abc+ab+bc+ca$

Áp dụng BĐT côsi ta có $ab+bc+ca\geq 3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}$

Suy ra $4=abc+ab+bc+ca\geq abc+3\sqrt[3]{\left(abc\right)^2}=t^3+3t^2$, với $t=\sqrt[3]{abc}$.

$\Rightarrow t^3+3t^2-4\leq 0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t+2\right)^2\leq 0\Leftrightarrow t\leq 1$

Cũng theo BĐT côsi ta có

$P=a+b+c+\dfrac{4}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3\sqrt[3]{abc}+\dfrac{4}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $P\geq 3t+\dfrac{4}{t}=\left(3t+\dfrac{3}{t}\right)+\dfrac{1}{t}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $3t+\dfrac{3}{t}\geq 2\sqrt{3t.\dfrac{3}{t}}=6$, mặt khác $t\leq 1\Rightarrow\dfrac{1}{t}\geq 1$

Do đó $P\geq 3t+\dfrac{4}{t}\geq 7$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hay $a=b=c=1$

Vậy $\min P=7\Leftrightarrow a=b=c=1$

Ví dụ 6: Cho $x,\ y,\ z$ dương thỏa mãn $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=8$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{x^2+y^2+z^2+14xyz}{4\left(x+y+z\right)^2+15xyz}$

Lời giải

Ta có $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=8 \Leftrightarrow 8xyz=1+x+y+z+xy+yz+zx+xyz$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+14xyz=\left(x+y+z\right)^2+2\left(x+y+z\right)+2\ \ (1)$

Áp dụng BĐT côsi ta có: $8=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)\geq \dfrac{8}{\sqrt{xyz}} \Rightarrow xyz\geq 1\ \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có $P\leq \dfrac{\left(x+y+z\right)^2+2\left(x+y+z\right)+2}{4\left(x+y+z\right)^2+15}=\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}$ với $x+y+z=t>0$.

Xét $\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-t^2+6t-9}{12t^2+45}=-\dfrac{\left(t-3\right)^2}{12t^2+45}\leq 0$

Suy ra $\dfrac{t^2+2t+2}{4t^2+15}\leq \dfrac{1}{3}$ do đó $P\leq \dfrac{1}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=3$ hay $x=y=z=1$

Vậy $\max P=\dfrac{1}{3}$ khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Dạng 4: sử dụng bất đẳng thức phụ.

1. Phương pháp giải.

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a}{b^3}+\dfrac{b}{c^3}+\dfrac{c}{a^3}\geq \dfrac{a+b+c}{abc}$

b) $\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc}\leq \dfrac{1}{abc}$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3+b^3\geq a^2b+b^2a$.

BĐT tương đương với $a^3+b^3-a^2b-b^2a\geq 0 \Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\geq 0$ (đúng với mọi $a>0,b>0$)

$\Rightarrow a^3+b^3\geq a^2b+b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

a) Ta có $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a\Leftrightarrow \frac{a}{b^3}+\frac{1}{a^2}\ge \frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{c^3}+\frac{1}{b^2}\ge \frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc},\ \frac{c}{a^3}+\frac{1}{c^2}\ge \frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}$

Cộng vế với vế rút gọn ta được $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Hay $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge \frac{a+b+c}{abc}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Theo bài toán trên ta có : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$

$$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow \frac{1}{a^3+b^3+abc}\le \frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$$

Tương tự : $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le \frac{a}{abc(a+b+c)};\ \frac{1}{c^3+a^3+abc}\le \frac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho a,b là các số thực. Chứng minh rằng:

a) $3(a+b+1)^2+1\ge 3ab$.

b) $64a^3b^3(a^2+b^2)^2\le \left(a+b\right)^6$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $ab\le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ nên ta chứng minh $3(a+b+1)^2+1\ge \frac{3}{4}(a+b)^2$ (*)

Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 12(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 3(a+b)^2$

$\Leftrightarrow 9(a+b)^2+24(a+b)+16\ge 0\Leftrightarrow (3a+3b+4)^2\ge 0$ (đúng) ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=-\frac{2}{3}$.

b) Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi $ab\le 0$.

Xét $ab>0$. Áp dụng BĐT $ab\le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ta có

$$64a^3b^3(a^2+b^2)^2=16ab\left[2ab(a^2+b^2)\right]^2\le 16\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left[\frac{2ab+(a^2+b^2)}{2}\right]^2=\left(a+b\right)^6$$

Suy ra $64a^3b^3(a^2+b^2)^2\le \left(a+b\right)^6$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Ví dụ 3: Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \dfrac{2a^3 + a + 1}{a^2} - 2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) \ge \left(ac + bd\right)^2$ (*), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad = bc$.

Ta có $\left(a^2 + b^2\right)\left(1 + 4\right) = 25 \ge \left(a + 2b\right)^2 \Leftrightarrow a + 2b \le 5$

Suy ra $-2b \ge a - 5$

Do đó $P = \dfrac{2a^3 + a + 1}{a^2} - 2b \ge \dfrac{2a^3 + a + 1}{a^2} + a - 5 = 3a + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} - 5$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a + \dfrac{1}{a} \ge 2,\ a + a + \dfrac{1}{a^2} \ge 3$

Do đó $3a + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} \ge 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy sa $P \ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a = 1,\ b = 2$.

Vậy $\min P = 0 \Leftrightarrow a = 1,\ b = 2$.

Nhận xét: Bất đẳng thức (*) là bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số. Ta có thể tổng quát bất đẳng thức Cho $2n$ số $a_1, a_2, .., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

Ví dụ 4: Cho a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab} \ge 3$

b) $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} \ge a^2 + b^2 + c^2$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$ này hai lần ta có :

$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \ge a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \ge$

$\ge ab.bc + bc.ca + ca.ab = abc(a + b + c) = 3abc$ (vì $a + b + c = 3$)

Suy ra $\dfrac{a^4 + b^4 + c^4}{abc} \ge 3$ hay $\dfrac{a^3}{bc} + \dfrac{b^3}{ca} + \dfrac{c^3}{ab} \ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

b) Áp dụng $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ ta có $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{abc}$

Do đó ta cần chứng minh $\frac{3}{abc}\ge a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le 3$ (*)

Lại áp dụng $\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(ab+bc+ca\right)$ (ví dụ 1) ta có

$\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3abc\left(a+b+c\right)\Rightarrow abc\le\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2}{9}$ (**)

Áp dụng bất đẳng thức $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ và (**) ta có

$$abc\left(a^2+b^2+c^2\right)\le\frac{\left(ab+bc+ca\right)^2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{9}\le\frac{1}{9}\left(\frac{\left(a+b+c\right)^2}{3}\right)^3=3$$

Vậy BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM..

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{2a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$

b) $\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\ge\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}$

lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực không âm ta có:

$$\left.\begin{array}{l} a+b\ge 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\end{array}\right\}\Rightarrow (a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{\frac{1}{ab}}=4$$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (*). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

a) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{(a+b)+(a+c)}\le\frac{1}{4}(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c})\le\frac{1}{16}(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Tương tự ta có $\frac{1}{a+2b+c}\le\frac{1}{16}(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c})$; $\frac{1}{a+b+2c}\le\frac{1}{16}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c})$

Cộng ba BĐT trên ta có được đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có:

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{a+b+2c}\geq\frac{4}{2a+4b+2c}=\frac{2}{a+2b+c}.$$

Tương tự

$$\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{2a+b+c}\geq\frac{2}{a+b+2c};\ \frac{1}{c+3a}+\frac{1}{a+2b+c}\geq\frac{2}{2a+b+c}$$

Cộng ba BĐT trên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c dương thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}\leq\frac{3}{4}$.

b) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq 30$

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có :

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc} \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \end{array}\right\}\Rightarrow (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq 3\sqrt[3]{abc}.3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}=9$$

Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ (*) . Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

a) Ta có BĐT $\Leftrightarrow\frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}+\frac{c+1-1}{c+1}\leq\frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow 3-(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1})\leq\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{9}{4}.$$

Áp dụng BĐT (*) ta có $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\geq\frac{9}{a+b+c+3}=\frac{9}{4}$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

b) Áp dụng BĐT (*) ta có : $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{9}{ab+bc+ca}$

$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geq\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}$$

Mặt khác : $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{7}{ab+bc+ca} \ge 21$

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca} \ge \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 9$$

Suy ra : $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \ge 9+21 = 30$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là các số thuộc $\left[0;1\right]$ thỏa mãn $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{2}{4b^4+5}+\frac{3}{4c^4+5}=\frac{6}{7}$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = ab^2c^3$

Lời giải

Ta chứng minh bất đẳng thức sau

Với x,y thuộc $[0,1]$, ta luôn có $\frac{1}{4x^4+5}+\frac{1}{4y^4+5} \le \frac{2}{4x^2y^2+5}$ (*)

Thật vậy, BĐT (*)

$\Leftrightarrow \left(2x^4+2y^4+5\right)\left(4x^2y^2+5\right) \le \left(4x^4+5\right)\left(4y^4+5\right)$

$\Leftrightarrow 8x^4y^4-10x^2y^2+\left(x^4+y^4\right)\left(5-4x^2y^2\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow (5-4x^2y^2)(x^2-y^2)^2 \ge 0$ (đúng với $x,y \in [0,1]$)

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Áp dụng BĐT (*) ta có: $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{1}{4c^4+5} \le \frac{2}{4a^2c^2+5}$, $\frac{1}{4b^4+5}+\frac{1}{4c^4+5} \le \frac{2}{4b^2c^2+5}$

Suy ra $\frac{1}{4a^4+5}+\frac{1}{4b^4+5}+\frac{2}{4c^4+5} \le \frac{2}{4a^2c^2+5}+\frac{2}{4b^2c^2+5} \le \frac{4}{4abc^2+5}$ (1)

Và $\frac{1}{4b^4+5}+\frac{1}{7} \le \frac{2}{4.\frac{b^2}{\sqrt{2}}+5}$, $\frac{1}{c^4+5}+\frac{1}{7} \le \frac{2}{4.\frac{c^2}{\sqrt{2}}+5}$

Suy ra $\frac{1}{4b^4+5}+\frac{1}{4c^4+5}+\frac{2}{7} \le \frac{2}{4.\frac{b^2}{\sqrt{2}}+5}+\frac{2}{4.\frac{c^2}{\sqrt{2}}+5} \le \frac{4}{4.\frac{bc}{\sqrt{2}}+5}$(2)

Ta lại có $\frac{4}{4abc^2+5}+\frac{4}{4.\frac{bc}{\sqrt{2}}+5} \le \frac{8}{4.\sqrt{\frac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\dfrac{1}{4a^4+5}+\dfrac{2}{4b^4+5}+\dfrac{3}{4c^4+5}+\dfrac{2}{7}\le\dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}$

Kết hợp giả thiết suy ra $\dfrac{8}{4.\sqrt{\dfrac{ab^2c^3}{\sqrt{2}}}+5}\ge\dfrac{8}{7}\Rightarrow ab^2c^3\le\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$

Vậy $\max P=\dfrac{1}{16}$ khi và chỉ khi $a=b=c=\sqrt[4]{\dfrac{1}{2}}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow a-c<b-d.$

B. $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a-c>b-d.$

C. $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a-d>b-c.$

D. $\begin{cases}a>b>0\\c>d>0\end{cases}\Rightarrow a-c>b-d.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases}a>b\\c>d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>b\\-c<-d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>b\\-d>-c\end{cases}\Rightarrow a-d>b-c.$

Câu 2: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}\Rightarrow a>\dfrac{b+c}{2}.$

B. $\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}\Rightarrow a-c>b-a.$

C. $a>b\Rightarrow a-c>b-c.$

D. $a>b\Rightarrow c-a>c-b.$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}\Rightarrow a+a>b+c\Rightarrow 2a>b+c\Rightarrow a>\dfrac{b+c}{2}\longrightarrow$ **A đúng.**
- $\begin{cases}a>b\\a>c\end{cases}\Rightarrow a+a>b+c\Rightarrow a-c>b-a\longrightarrow$ **B đúng.**
- $a>b\Rightarrow a+(-c)>b+(-c)\Rightarrow a-c>b-c\longrightarrow$ **C đúng.**

- $a > b \Rightarrow -a < -b \Leftrightarrow c-a < c-b \longrightarrow$ **D sai.**

Câu 3: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow ac < cd.$

B. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow ac > cd.$

C. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

D. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow -ac < -bd.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd.$

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < b \Rightarrow ac < bc.$

B. $a < b \Rightarrow ac > bc.$

C. $c < a < b \Rightarrow ac < bc.$

D. $\begin{cases} a < b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow ac < bc.$

Lời giải

Chọn D

Xét bất phương trình $a < b \qquad (*)$.

Khi nhân cả hai vế của $(*)$ với $c,$ ta được $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} c > 0 \\ a < b \Leftrightarrow ac < bc \end{cases} \\ \begin{cases} c < 0 \\ a < b \Leftrightarrow ac > bc \end{cases} \end{array} \right.$.

Câu 5: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

B. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}.$

C. $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$

D. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{d}{c}.$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < \frac{1}{d} < \frac{1}{c} \end{cases} \Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\frac{a}{c}, \frac{b}{d} \longrightarrow$ **A sai.**

- $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b > 0 \\ \dfrac{1}{d} > \dfrac{1}{c} > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Chưa đủ dữ kiện để so sánh $\dfrac{a}{c}, \dfrac{b}{d} \longrightarrow$ **B sai.**

- $\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{d} \longrightarrow$ **C sai** vì chưa thiếu điều kiện a, b, c, d.

- $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{b} > 1 \\ 1 > \dfrac{d}{c} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b} > 1 > \dfrac{d}{c} \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} > \dfrac{d}{c} \longrightarrow$ **D đúng.**

Câu 6: Nếu $a + 2c > b + 2c$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $-3a > -3b.$ **B.** $a^2 > b^2.$ **C.** $2a > 2b.$ **D.** $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}.$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $a + 2c > b + 2c \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow 2a > 2b.$

Câu 7: Nếu $a + b < a$ và $b - a > b$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $ab > 0.$ **B.** $b < a.$ **C.** $a < b < 0.$ **D.** $a > 0$ và $b > 0.$

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} a + b < a \\ b - a > b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 0 \\ -a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow ab > 0.$

Câu 8: Nếu $0 < a < 1$ thì bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{1}{a} > \sqrt{a}.$ **B.** $a > \dfrac{1}{a}.$ **C.** $a > \sqrt{a}.$ **D.** $a^3 > a^2.$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\dfrac{1}{a} - \sqrt{a} = \dfrac{1 - a\sqrt{a}}{a} = \dfrac{\left(1 - \sqrt{a}\right)\left(1 + \sqrt{a} + a\right)}{a} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \sqrt{a}, \forall a \in (0;1) \longrightarrow$ **A đúng.**

- $a - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a^2 - 1}{a} = \dfrac{(a-1)(a+1)}{a} < 0 \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{a}, \forall a \in (0;1) \longrightarrow$ **B sai.**

- $a - \sqrt{a} = \sqrt{a}\left(\sqrt{a} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow a < \sqrt{a}, \forall a \in (0;1) \longrightarrow$ **C sai.**

- $a^3 - a^2 = a^2(a-1) < 0 \Leftrightarrow a^3 < a^2,\ \forall a \in (0;1) \longrightarrow$ **D sai.**

Câu 9: Cho hai số thực dương a,b. Bất đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\dfrac{a^2}{a^4+1} \ge \dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{ab}}{ab+1} \ge \dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2} \le \dfrac{1}{2}$. **D.** Tất cả đều đúng.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

- $\dfrac{a^2}{a^4+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2a^2 - a^4 - 1}{2(a^4+1)} = -\dfrac{(a^2-1)^2}{2(a^4+1)} \le 0,\ \forall a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{a^4+1} \le \dfrac{1}{2} \longrightarrow$ **A sai.**

- $\dfrac{\sqrt{ab}}{ab+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{ab} - ab - 1}{2(ab+1)} = -\dfrac{(\sqrt{ab}-1)^2}{2(ab+1)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{ab}}{ab+1} \le \dfrac{1}{2},\ \forall a,\ b > 0 \longrightarrow$ **B sai.**

- $\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2\sqrt{a^2+1} - a^2 - 2}{2(a^2+2)} = -\dfrac{(\sqrt{a^2+1}-1)^2}{2(a^2+2)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a^2+2} \le \dfrac{1}{2},\ \forall a \longrightarrow$ **C đúng.**

Câu 10: Cho $a,b > 0$ và $x = \dfrac{1+a}{1+a+a^2}, y = \dfrac{1+b}{1+b+b^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $x > y$. **B.** $x < y$.

C. $x = y$. **D.** Không so sánh được.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $x < y \Leftrightarrow \dfrac{1+a}{1+a+a^2} < \dfrac{1+b}{1+b+b^2} \Leftrightarrow (1+a)(1+b+b^2) < (1+b)(1+a+a^2)$

$\Leftrightarrow 1 + b + b^2 + a + ab + ab^2 < 1 + a + a^2 + b + ab + a^2b$

$\Leftrightarrow b^2 + ab^2 < a^2 + a^2b \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + ab(a-b) > 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a+b+ab) > 0$ luôn đúng với mọi $a > b > 0$. Vậy $x < y$.

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x - 1 = \dfrac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$. Vậy $m = 2\sqrt{2} + 1$.

Câu 11: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$.

A. $m=2.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=\frac{5}{2}.$ **D.** Không tồn tại $m.$

Lời giải

Chọn C

Sai lầm thường gặp

Ta có $f\left(x\right)=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x^2+4}.\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}}=2.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x^2+4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\Leftrightarrow x^2=-3$.

Vậy hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải đúng

Đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t\ge 2$.

Lúc đó : $f\left(x\right)=g\left(t\right)=\frac{t^2+1}{t}=t+\frac{1}{t}=\underbrace{\frac{t}{4}+\frac{1}{t}}_{\ge 2}+\underbrace{\frac{3t}{4}}_{\ge\frac{3}{2}}\ge\frac{5}{2}$ $\left(do\ t\ge 2\right)$

Vậy $g\left(t\right)\ge\frac{5}{2}\Rightarrow Min\,g\left(t\right)=\frac{5}{2}\ khi\begin{cases}\frac{t}{4}=\frac{1}{t}\\ t\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=0$

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ với $x>-1.$

A. $m=0.$ **B.** $m=1.$ **C.** $m=2.$ **D.** $m=\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f\left(x\right)=\frac{x^2+2x+1+1}{x+1}=\frac{\left(x+1\right)^2+1}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x+1+\frac{1}{x+1}\ge 2\sqrt{\left(x+1\right).\frac{1}{x+1}}=2.$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x+1=\frac{1}{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$ Vậy $m=2.$

Câu 13: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\left(x+2\right)\left(x+8\right)}{x}$ với $x>0.$

A. $m=4.$ **B.** $m=18.$ **C.** $m=16.$ **D.** $m=6.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+2\right)\left(x+8\right)}{x}=\dfrac{x^2+10x+16}{x}=x+\dfrac{16}{x}+10.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x+\dfrac{16}{x}\geq 2\sqrt{x.\dfrac{16}{x}}=8\Rightarrow f\left(x\right)\geq 18.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x=\dfrac{16}{x} \end{cases}\Leftrightarrow x=4.$ Vậy $m=18.$

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{1-x}$ với $1>x>0.$

A. $m=2.$ **B.** $m=4.$ **C.** $m=6.$ **D.** $m=8.$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f\left(x\right)-4=\dfrac{4}{x}+\dfrac{x}{1-x}-4=\dfrac{4}{x}-\dfrac{4x}{x}+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{4\left(1-x\right)}{x}+\dfrac{x}{1-x}.$

Vì $x\in\left(0;1\right)\Rightarrow\dfrac{x}{1-x}>0$ nên theo bất đẳng thức Côsi, ta có

$f\left(x\right)-4=\dfrac{4\left(1-x\right)}{x}+\dfrac{x}{1-x}\geq 2\sqrt{\dfrac{4\left(1-x\right)}{x}.\dfrac{x}{1-x}}=4\Leftrightarrow f\left(x\right)\geq 8.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1>x>0 \\ \dfrac{4\left(1-x\right)}{x}=\dfrac{x}{1-x} \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}.$ Vậy $m=8.$

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ với $0<x<1.$

A. $m=2.$ **B.** $m=4.$ **C.** $m=8.$ **D.** $m=16.$

Lời giải

Chọn B.

Cách 1. Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{x}.\dfrac{1}{1-x}}=\dfrac{2}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}.$

Mặt khác $x\left(1-x\right)\leq\dfrac{\left(x+1-x\right)^2}{4}=\dfrac{1}{4}\longrightarrow\sqrt{x\left(1-x\right)}\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x\left(1-x\right)}}\geq 2\Rightarrow f\left(x\right)\geq 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1>x>0 \\ x=1-x \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}.$ Vậy $m=4.$

Cách 2. Ta có $f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}=\frac{1-x+x}{x}+\frac{1-x+x}{1-x}=\frac{1-x}{x}+\frac{x}{1-x}+2.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{1-x}{x}+\frac{x}{1-x}\geq 2\sqrt{\frac{1-x}{x}.\frac{x}{1-x}}=2\Rightarrow f\left(x\right)\geq 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1>x>0\\ \frac{x}{1-x}=\frac{1-x}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2+32}{4\left(x-2\right)}$ với $x>2.$

A. $m=\frac{1}{2}.$ **B.** $m=\frac{7}{2}.$ **C.** $m=4.$ **D.** $m=8.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f\left(x\right)=\frac{x^2+32}{4\left(x-2\right)}=\frac{x^2-4+36}{4\left(x-2\right)}=\frac{x+2}{4}+\frac{9}{x-2}=\frac{x-2}{4}+\frac{9}{x-2}+1.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\frac{x-2}{4}+\frac{9}{x-2}\geq 2\sqrt{\frac{x-2}{4}.\frac{9}{x-2}}=3\Rightarrow f\left(x\right)\geq 3+1=4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\ \frac{x-2}{4}=\frac{9}{x-2}\end{cases}\Leftrightarrow x=8.$ Vậy $m=4.$

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\frac{2x^3+4}{x}$ với $x>0.$

A. $m=2.$ **B.** $m=4.$ **C.** $m=6.$ **D.** $m=10.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f\left(x\right)=\frac{2x^3+4}{x}=2x^2+\frac{4}{x}=2x^2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $2x^2+\frac{2}{x}+\frac{2}{x}\geq 3\sqrt[3]{2x^2.\frac{2}{x}.\frac{2}{x}}=3\sqrt[3]{8}=6.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 2x^2=\frac{2}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $m=6.$

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^4+3}{x}$ với $x>0.$

A. $m=4.$ **B.** $m=6.$ **C.** $m=\frac{13}{2}.$ **D.** $m=\frac{19}{2}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f\left(x\right)=\frac{x^4+3}{x}=x^3+\frac{3}{x}=x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq 4\sqrt[4]{x^3.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}.\frac{1}{x}}=4\Rightarrow f\left(x\right)\geq 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^3=\frac{1}{x}\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $m=4.$

Câu 19: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right)=\left(6x+3\right)\left(5x-2\right)$ với $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$

A. $M=0.$ **B.** $M=24.$ **C.** $M=27.$ **D.** $M=30.$

Lời giải

Chọn C.

Áp dụng bất đẳng thức hệ quả của Côsi $ab\leq\frac{\left(a+b\right)^2}{4},$ ta được

$f\left(x\right)=3\left(2x+1\right)\left(5-2x\right)\leq 3.\frac{\left(2x+1+5-2x\right)^2}{4}=27\Rightarrow f\left(x\right)\leq 27.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}\\ 2x+1=5-2x\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$ Vậy $M=27.$

Câu 20: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$ với $x\geq 1.$

A. $M=0.$ **B.** $M=\frac{1}{2}.$ **C.** $M=1.$ **D.** $M=2.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f\left(x\right)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}=\frac{\sqrt{x-1}}{x-1+1}=\frac{\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2.1}=2\sqrt{x-1}.$

$\longrightarrow f\left(x\right) \le \dfrac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = 2.$ Vậy $M = \dfrac{1}{2}.$

Câu 21: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{x}{x^2+4}$ với $x > 0.$

A. $M = \dfrac{1}{4}.$ **B.** $M = \dfrac{1}{2}.$ **C.** $M = 1.$ **D.** $M = 2.$

Lời giải

Chọn A.

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2 + 4 \ge 2\sqrt{x^2.4} = 4x$

$\longrightarrow f\left(x\right) \le \dfrac{x}{4x} = \dfrac{1}{4}.$ Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = 2.$ Vậy $M = \dfrac{1}{4}.$

Câu 22: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left(x+1\right)^2}$ với $x > 0.$

A. $M = 0.$ **B.** $M = \dfrac{1}{4}.$ **C.** $M = \dfrac{1}{2}.$ **D.** $M = 1.$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $f\left(x\right) = \dfrac{x}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{x}{x^2+2x+1}.$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $x^2 + 1 \ge 2\sqrt{x^2.1} = 2x \longrightarrow x^2 + 2x + 1 \ge 4x$

$\longrightarrow f\left(x\right) \le \dfrac{x}{4x} = \dfrac{1}{4}.$ Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x = 1.$ Vậy $M = \dfrac{1}{4}.$

Câu 23: Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-6}$

A. $m = \sqrt{2}, M = 3$ **B.** $m = 3, M = 3\sqrt{2}.$

C. $m = \sqrt{2}, M = 3\sqrt{2}.$ **D.** $m = 3, M = \sqrt{3}.$

Lời giải

Chọn B.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+3 \ge 0 \\ 6-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 6$ nên TXĐ $\mathrm{D} = \left[-3;6\right].$

Ta có $f^2\left(x\right) = 9 + 2\sqrt{\left(x+3\right)\left(6-x\right)}.$

- Vì $\sqrt{(3+x)(6-x)} \ge 0, \forall x \in [-3;6]$ nên suy ra $f^2(x) \ge 9 \longrightarrow f(x) \ge 3.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=6.$ Vậy $m=3.$

- Lại có $2\sqrt{(3+x)(6-x)} \le 3+x+6-x=9$ nên suy ra $f^2(x) \le 18 \longrightarrow f(x) \le 3\sqrt{2}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x+3=6-x \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}.$ Vậy $M=3\sqrt{2}.$

Vậy $m=3,\ M=3\sqrt{2}.$

Câu 24: Tìm giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M của hàm số $f(x)=2\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$

A. $m=0, M=4\sqrt{5}.$ **B.** $m=2, M=4.$

C. $m=2, M=2\sqrt{5}.$ **D.** $m=0, M=2\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn C.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-4 \ge 0 \\ 8-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \le x \le 8$ nên TXĐ $D=[4;8].$

- Ta có $f^2(x)=3x-8+4\sqrt{(x-4)(8-x)}=3(x-4)+4\sqrt{(x-4)(8-x)}+4.$

Vì $\begin{cases} x-4 \ge 0 \\ \sqrt{(x-4)(8-x)} \ge 0 \end{cases}, \forall x \in [4;8]$ nên suy ra $f^2(x) \ge 4 \longrightarrow f(x) \ge 4.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=4.$ Vậy $m=2.$

- Với $x \in [4;8]$, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

- $x-\dfrac{4}{5}=x-4+\dfrac{16}{5} \ge 2\sqrt{(x-4).\dfrac{16}{5}}=\dfrac{8\sqrt{x-4}}{\sqrt{5}}.$ (1)

- $\dfrac{44}{5}-x=8-x+\dfrac{4}{5} \ge 2\sqrt{(8-x).\dfrac{4}{x}}=\dfrac{4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}}.$ (2)

Lấy $(1)+(2)$ theo vế, ta được $\dfrac{8\sqrt{x-4}+4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}} \le x-\dfrac{4}{5}+\dfrac{44}{5}-x=8.$

Suy ra $\dfrac{8\sqrt{x-4}+4\sqrt{8-x}}{\sqrt{5}} \le 8 \Leftrightarrow \dfrac{4f(x)}{\sqrt{5}} \le 8 \Leftrightarrow f(x) \le 2\sqrt{5}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow x=\dfrac{36}{5}.$ Vậy $M=2\sqrt{5}.$

Vậy $m=2,\ M=2\sqrt{5}.$

Câu 25: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x)=\sqrt{7-2x}+\sqrt{3x+4}$

A. $m=3$. **B.** $m=\sqrt{10}$. **C.** $m=2\sqrt{3}$. **D.** $m=\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định khi $\begin{cases}7-2x\ge 0\\ 3x+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}\le x\le \dfrac{7}{2}$ nên TXĐ $\mathrm{D}=\left[-\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{2}\right]$.

Ta có $y^2=\left(\sqrt{7-2x}+\sqrt{3x+4}\right)^2=7-2x+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}+3x+4$

$=x+11+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}=\dfrac{1}{3}(3x+4)+2\sqrt{(7-2x)(3x+4)}+\dfrac{29}{3}$.

Vì $\begin{cases}3x+4\ge 0\\ \sqrt{(7-2x)(3x+4)}\ge 0\end{cases}$, $\forall x\in\left[-\dfrac{4}{3};\dfrac{7}{2}\right]$ nên suy ra $f^2(x)\ge\dfrac{29}{3}\longrightarrow f(x)\ge\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=-\dfrac{4}{3}$. Vậy $m=\dfrac{\sqrt{87}}{3}$.

Câu 26: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)=x+\sqrt{8-x^2}$.

A. $M=1$. **B.** $M=2$. **C.** $M=2\sqrt{2}$. **D.** $M=4$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f^2(x)=\left(x+\sqrt{8-x^2}\right)^2=x^2+2x\sqrt{8-x^2}+8-x^2=8+2x\sqrt{8-x^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $2x\sqrt{8-x^2}\le x^2+\left(\sqrt{8-x^2}\right)^2=8$

$\longrightarrow f^2(x)=8+2x\sqrt{8-x^2}\le 8+8=16\longrightarrow f(x)\le 4$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\left(\sqrt{8-x^2}\right)^2\\ 2x\sqrt{8-x^2}=8\end{cases}\Leftrightarrow x=2$. Vậy $M=4$.

Câu 27: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x^2+y^2+xy=3$. Tập giá trị của biểu thức $S=x+y$ là:

A. $[0;3]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-2;2]$. **D.** $\{-2;2\}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $x^2+y^2+xy=3\Leftrightarrow(x+y)^2-3=xy\le\dfrac{(x+y)^2}{4}$.

Suy ra $(x+y)^2 \le 4 \Leftrightarrow -2 \le x+y \le 2$.

Câu 28: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$. Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là:

A. $\left[0;\frac{1}{3}\right]$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $\left[\frac{1}{3};1\right]$. **D.** $\left[-1;\frac{1}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftrightarrow 1 - 3xy = (x-y)^2 \ge 0 \Rightarrow xy \le \frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftrightarrow 1 + xy = (x+y)^2 \ge 0 \Rightarrow xy \ge -1 \end{cases}$.

Câu 29: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $(x+y)^3 + 4xy \ge 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + y$ là:

A. $\sqrt[3]{2}$. **B.** 1. **C.** 8. **D.** $-\sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Với mọi $x,\ y$ ta có $(x+y)^2 \ge 4xy$.

Suy ra $(x+y)^3 + (x+y)^2 \ge (x+y)^3 + 4xy \ge 2$ hay $(x+y)^3 + (x+y)^2 \ge 2 \Leftrightarrow x + y \ge 1$.

Câu 30: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = x + y + xy$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[4;+\infty)$. **D.** $[0;4]$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $x^2 + y^2 = x + y + xy$

$\Leftrightarrow x + y = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy \ge (x+y)^2 - \frac{3}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}(x+y)^2$.

Suy ra $x + y \ge \frac{1}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow 0 \le x + y \le 4$.

Câu 31: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 - 3(x+y) + 4 = 0$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

A. $\{2;4\}$. **B.** $[0;4]$. **C.** $[0;2]$. **D.** $[2;4]$.

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết, ta có $3(x+y)-4=x^2+y^2\geq\dfrac{(x+y)^2}{2}$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-6(x+y)+8\leq 0\Leftrightarrow 2\leq x+y\leq 4.$

Câu 32: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $x+y=1$. Giá trị nhỏ nhất của $S=\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$ là:

A. 4. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1.\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)=5+\dfrac{4x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 5+2\sqrt{\dfrac{4x}{y}.\dfrac{y}{x}}=9.$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\dfrac{1}{3};\ y=\dfrac{2}{3}$.

Câu 33: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn điều kiện $x^2y+xy^2=x+y+3xy$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=x+y$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

Từ giả thiết, ta có $xy(x+y)=x+y+3xy$. $(*)$

Vì $x>0,\ y>0$ nên $x+y>0$. Do đó $(*)\Leftrightarrow x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+3\geq\dfrac{4}{x+y}+3$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+y\leq -1\\ x+y\geq 4\end{array}\right.\Leftrightarrow x+y\geq 4$.

Câu 34: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $x^4+y^4+\dfrac{1}{xy}=xy+2$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=xy$ lần lượt là:

A. $\dfrac{1}{2}$ và 1. **B.** 0 và 1. **C.** $\dfrac{1}{4}$ và 1. **D.** 1 và 2.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $x^4+y^4\geq 2x^2y^2$, kết hợp với giả thiết ta được $xy+2\geq 2x^2y^2+\dfrac{1}{xy}$.

Đặt $xy = t > 0$, ta được $t + 2 \ge 2t^2 + \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - (2t-1) \le 0$

$\Leftrightarrow (t+1)(t-1)(2t-1) \le 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le t \le 1.$

Câu 35: Cho hai số thực a, b thuộc khoảng $(0;1)$ và thỏa mãn $(a^3+b^3)(a+b) - ab(a-1)(b-1) = 0$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = ab$ bằng

A. $\frac{1}{9}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Giả thiết $\Leftrightarrow \frac{(a^3+b^3)(a+b)}{ab} = (1-a)(1-b)$. $(*)$

● $\frac{(a^3+b^3)(a+b)}{ab} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)(a+b) \ge 2\sqrt{ab}.2\sqrt{ab} = 4ab.$ (1)

● $(1-a)(1-b) = 1 - (a+b) + ab \le 1 - 2\sqrt{ab} + ab.$ (2)

Từ (1), (2) và kết hợp với $(*)$, ta được

$4ab \le 1 - 2\sqrt{ab} + ab \Leftrightarrow 3ab + 2\sqrt{ab} - 1 \le 0 \Rightarrow 0 < ab \le \frac{1}{9}.$

Câu 36: Cho hai số thực x, y thuộc đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $x + y = 4xy.$ Tập giá trị của biểu thức $P = xy$ là:

A. $[0;1]$. **B.** $\left[0;\frac{1}{4}\right]$. **C.** $\left[0;\frac{1}{3}\right]$. **D.** $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4xy = x + y \ge 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \ge \frac{1}{4}.$

Do $x, y \in [0;1]$, suy ra $(1-x)(1-y) \ge 0 \Leftrightarrow 1 - (x+y) + xy \ge 0$. $(*)$

Kết hợp $(*)$ và giả thiết, ta được $1 - 4xy + xy \ge 0 \Rightarrow xy \le \frac{1}{3}.$

Câu 37: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + 2y - xy = 0$. Giá trị nhỏ nhất của $S = x + 2y$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $x+2y=xy=\frac{1}{2}.x.2y\le\frac{1}{2}.\frac{(x+2y)^2}{4}$

$\Leftrightarrow (x+2y)\left[(x+2y)-8\right]\ge 0\Leftrightarrow x+2y\ge 8$.

Câu 38: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $x+y+xy\ge 7$. Giá trị nhỏ nhất của $S=x+2y$ là:

A. 8. **B.** 5. **C.** 7. **D.** -11.

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết $x+y+xy\ge 7\Leftrightarrow 2(x+1)(y+1)\ge 16$.

Ta có $16\le 2(x+1)(y+1)=(x+1)(2y+2)\le\left(\frac{1+x+2y+2}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow (x+2y+3)^2\ge 64\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2y\ge 5\\ x+2y\le -11\end{array}\right.\Leftrightarrow x+2y\ge 5$.

Câu 39: Cho hai số thực x,y thỏa mãn $2x+3y\le 7$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+y+xy$ là:

A. 3. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $6(x+1)(y+1)=(2x+2)(3y+3)\le\frac{(2x+2+3y+3)^2}{4}\le\frac{(7+5)^2}{4}\le 36$.

Suy ra $x+y+xy\le 5$.

Câu 40: Cho hai số thực x,y không âm và thỏa mãn $x^2+2y=12$. Giá trị lớn nhất của $P=xy$ là:

A. $\frac{13}{4}$. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết, ta có $16=(x^2+4)+2y\ge 4x+2y\ge 2\sqrt{4x.2y}$.

Suy ra $xy\le 8$. Dấu $"="$ xảy ra khi $x=2;\ y=4$.

Câu 41: Cho x,y là hai số thực thỏa mãn $x>y$ và $xy=1000$ Biết biểu thức $F=\frac{x^2+y^2}{x-y}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\begin{cases}x=a\\ y=b\end{cases}$. Tính $P=\frac{a^2+b^2}{1000}$

A. $P=2.$ **B.** $P=3.$ **C.** $P=4.$ **D.** $P=5.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $F=\dfrac{x^2+y^2}{x-y}=\dfrac{x^2-2xy+y^2+2xy}{x-y}=\dfrac{(x-y)^2+2.1000}{x-y}=x-y+\dfrac{2.1000}{x-y}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F=x-y+\dfrac{2.1000}{x-y}\ge 2\sqrt{(x-y).\dfrac{2.1000}{x-y}}=40\sqrt{5}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xy=1000 \\ x-y=\dfrac{2.1000}{x-y}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=1000 \\ x-y=20\sqrt{5} \end{cases}.$

Vậy $F_{\min}=4\sqrt{5}$ khi $\begin{cases} ab=1000 \\ a-b=20\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4000 \Rightarrow \dfrac{a^2+b^2}{1000}=4.$

Câu 42: Cho x,y là các số thực dương và thỏa mãn $x+y\ge 3$ Tìm giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F=x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}$

A. $F_{\min}=4\dfrac{1}{2}.$ **B.** $F_{\min}=3\sqrt{2}.$ **C.** $F_{\min}=4\dfrac{1}{3}.$ **D.** $F_{\min}=4\dfrac{2}{3}.$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số thực dương, ta có

$\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}\ge 2\sqrt{\dfrac{x}{2}.\dfrac{1}{2x}}=2.\dfrac{1}{\sqrt{4}}=1$ và $\dfrac{y}{2}+\dfrac{2}{y}\ge 2\sqrt{\dfrac{y}{2}.\dfrac{2}{y}}=2.$

Khi đó $F=x+y+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{x+y}{2}+\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)+\left(\dfrac{y}{2}+\dfrac{2}{y}\right)\ge \dfrac{3}{2}+1+2=4\dfrac{1}{2}.$

Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2x};\ \dfrac{y}{2}=\dfrac{2}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}.$ Vậy $F_{\min}=4\dfrac{1}{2}.$

Câu 43: Cho $x>8y>0.$ Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=x+\dfrac{1}{y(x-8y)}$ là

A. 3, **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F = x + \dfrac{1}{y(x-8y)} = (x-8y) + 8y + \dfrac{1}{y(x-8y)}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F \ge 3\sqrt[3]{(x-8y).8y.\dfrac{1}{y(x-8y)}} = 3\sqrt[3]{8} = 6.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x - 8y = 8y = \dfrac{1}{y(x-8y)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Câu 44: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)$. Tập giá trị của biểu thức $S = x + y$ là:

A. $[-1;7]$. **B.** $[3;7]$. **C.** $[3;7] \cup \{-1\}$. **D.** $[-7;7]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge -3 \end{cases}$, suy ra $x + y + 1 \ge 0$.

● Ta có $x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)$.

$$= 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{y+3} \le \frac{4 + x - 2}{2} + \frac{4 + y + 3}{2} = \frac{x + y + 9}{2}$$

Suy ra $x + y + 1 \le \dfrac{x + y + 9}{2} \Leftrightarrow x + y \le 7$.

● Lại có $x + y + 1 = 2\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3}\right)$

$\Leftrightarrow (x + y + 1)^2 = 4\left(x + y + 1 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}\right) \ge 4(x + y + 1)$

Suy ra $(x + y + 1)^2 \ge 4(x + y + 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y + 1 \le 0 \\ x + y + 1 \ge 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + y + 1 = 0 \\ x + y + 1 \ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x + y \ge 3 \end{array}\right.$.

Câu 45: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $a > 0, b > 0$ và $f(x) = ax^2 + bx + c \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ Tìm giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F = \dfrac{4a + c}{b}$

A. $F_{\min} = 1$. **B.** $F_{\min} = 2$. **C.** $F_{\min} = 3$. **D.** $F_{\min} = 5$.

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \longrightarrow 4ac \ge b^2$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $F=\dfrac{4a+c}{b}\geq\dfrac{2\sqrt{4ac}}{b}\geq\dfrac{2\sqrt{b^2}}{b}=\dfrac{2b}{b}=2.$

Dấu $"="$ xảy ra khi $\begin{cases}c=4a\\ b^2=4ac\end{cases}\Leftrightarrow b=c=4a.$

Câu 46: Cho ba số thực a,b,c không âm và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$ lần lượt là:

A. 1 và 3. **B.** 2 và 4. **C.** 2 và 3. **D.** 3 và 4.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết suy ra $a^2+b^2+c^2\leq 4.$

Ta có $4=a^2+b^2+c^2+abc=a^2+b^2+c^2+\sqrt{a^2b^2c^2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có $\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27}\geq a^2b^2c^2$.

Từ đó suy ra $4\leq a^2+b^2+c^2+\sqrt{\dfrac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^3}{27}}$ hay $\sqrt{\dfrac{S^3}{27}}\geq 4-S\Leftrightarrow 3\leq S\leq 4.$

Câu 47: Cho ba số thực dương x,y,z. Biểu thức $P=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)+\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}$ có giá trị nhỏ nhất bằng:

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$x^2+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}\geq 3.\sqrt[3]{x^2.\frac{y}{zx}.\frac{z}{xy}}=3;\quad y^2+\frac{x}{yz}+\frac{z}{xy}\geq 3;\quad z^2+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}\geq 3.$$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên, ta được $x^2+y^2+z^2+2\left(\dfrac{x}{yz}+\dfrac{y}{zx}+\dfrac{z}{xy}\right)\geq 9$.

Suy ra $P\geq\dfrac{9}{2}$. Khi $x=y=z=1$ thì $P=\dfrac{9}{2}$.

Câu 48: Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)$ bằng:

A. 12. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$x^3+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x}\geq 4x$ hay $x^3+3\sqrt[3]{x}\geq 4x$.

Tương tự: $y^3+3\sqrt[3]{y}\geq 4y$ và $z^3+3\sqrt[3]{z}\geq 4z$.

Suy ra $P=x^3+y^3+z^3+3\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}\right)\geq 4\left(x+y+z\right)=12.$

Khi $x=y=z=1$ thì $P=12.$

Câu 49: Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $x+y+z=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}$ bằng:

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có

$$\sqrt{\left(x+y\right).\frac{4}{3}}\leq\frac{x+y+\frac{4}{3}}{2};\ \sqrt{\left(y+z\right).\frac{4}{3}}\leq\frac{y+z+\frac{4}{3}}{2}\ \text{và}\ \sqrt{\left(z+x\right).\frac{4}{3}}\leq\frac{z+x+\frac{4}{3}}{2}.$$

Suy ra $\sqrt{\left(x+y\right).\frac{4}{3}}+\sqrt{\left(y+z\right).\frac{4}{3}}+\sqrt{\left(z+x\right).\frac{4}{3}}\leq x+y+z+2=4.$

Do đó $P=\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\geq 2\sqrt{3}.$ Khi $x=y=z=\dfrac{2}{3}$ thì $P=2\sqrt{3}.$

BÀI 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHÁI NIỆM BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Bất phương trình một ẩn

Bất phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$$f(x)<g(x) \quad (f(x)\le g(x)) \qquad (1)$$

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x.

Ta gọi $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là vế trái của bất phương trình (1). Số thực x_0 sao cho $f(x_0)<g(x_0)$ $(f(x_0)\le g(x_0))$ là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình (1).

Giải bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó, khi tập nghiệm rỗng thì ta nói bất phương trình vô nghiệm.

Chú ý:

Bất phương trình (1) cũng có thể viết lại dưới dạng sau: $g(x)>f(x)$ $(g(x)\ge f(x))$.

2. Điều kiện của một bất phương trình

Tương tự đối với phương trình, ta gọi các điều kiện của ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa là điều kiện xác định (hay gọi tắt là điều kiện) của bất phương trình (1).

3. Bất phương trình chứa tham số

Trong một bất phương trình, ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là tham số. Giải và biện luận bất phương trình chứa tham số là xét xem với các giá trị nào của tham số bất phương trình vô nghiệm, bất phương trình có nghiệm và tìm các nghiệm đó.

II – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Hệ bất phương trình ẩn x gồm một số bất phương trình ẩn x mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

Mỗi giá trị của x đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

Để giải một hệ bất phương trình ta giải từng bất phương trình rồi lấy giao của các tập nghiệm.

III – MỘT SỐ PHÉP BIẾN ĐỔI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

1. Bất phương trình tương đương

Ta đã biết hai bất phương trình có cùng tập nghiệm (có thể rỗng) là hai bất phương trình tương đương và dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình đó.

Tương tự, khi hai hệ bất phương trình có cùng một tập nghiệm ta cũng nói chúng tương đương với nhau và dùng kí hiệu "$\Leftrightarrow$" để chỉ sự tương đương đó.

2. Phép biến đổi tương đương

Để giải một bất phương trình (hệ bất phương trình) ta liên tiếp biến đổi nó thành những bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương cho đến khi được bất phương trình (hệ bất phương trình) đơn giản nhất mà ta có thể viết ngay tập nghiệm. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương.

3. Cộng (trừ)

Cộng (trừ) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{P(x)<Q(x) \Leftrightarrow P(x)+f(x)<Q(x)+f(x)}$$

4. Nhân (chia)

Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị dương (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) ta được một bất phương trình tương đương. Nhân (chia) hai vế của bất phương trình với cùng một biểu thức luôn nhận giá trị âm (mà không làm thay đổi điều kiện của bất phương trình) và đổi chiều bất phương trình ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x)<Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x)<Q(x).f(x), \quad f(x)>0, \forall x \\ P(x)<Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x)>Q(x).f(x), \quad f(x)<0, \forall x \end{array}}$$

5. Bình phương

Bình phương hai vế của một bất phương trình có hai vế không âm mà không làm thay đổi điều kiện của nó ta được một bất phương trình tương đương.

$$\boxed{P(x)<Q(x) \Leftrightarrow P^2(x)<Q^2(x), \quad P(x)\ge 0, Q(x)\ge 0, \forall x}$$

6. Chú ý

Trong quá trình biến đổi một bất phương trình thành bất phương trình tương đương cần chú ý những điều sau

1) Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình thì điều kiện của bất phương trình có thể bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của một bất phương trình ta phải tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình đó và là nghiệm của bất phương trình mới.

2) Khi nhân (chia) hai vế của bất phương trình $P(x)<Q(x)$ với biểu thức $f(x)$ ta cần lưu ý đến điều kiện về dấu của $f(x)$. Nếu $f(x)$ nhận cả giá trị dương lẫn giá trị âm thì ta phải lần lượt xét từng trường hợp. Mỗi trường hợp dẫn đến hệ bất phương trình.

3) Khi giải bất phương trình $P(x)<Q(x)$ mà phải bình phương hai vế thì ta lần lượt xét hai trường hợp

a) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị không âm, ta bình phương hai vế bất phương trình.

b) $P(x), Q(x)$ cùng có giá trị âm ta viết

$$P(x)<Q(x) \Leftrightarrow -Q(x)<-P(x)$$

rồi bình phương hai vế bất phương trình mới.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Điều kiện xác định của bất phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\frac{1}{x-1} > \frac{3}{x+2}$

Lời giải

Điều kiện của bất phương trình là: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{cases}$.

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của của bất phương trình

Lời giải

Điều kiện xác định của BPT : $\begin{cases} |x+1|-3 \neq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x \neq 2 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -4 \\ x < 2 \end{cases}$.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x-m} - \sqrt{6-2x}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-m \geq 0 \\ 6-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \leq 3 \end{cases}$.

- Nếu $m = 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = \{3\}$.
- Nếu $m > 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = \varnothing$.
- Nếu $m < 3$ thì tập xác định của hàm số là $D = [m;3]$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{2-x} + x < 2 + \sqrt{1-2x}$.

A. $x \in \mathbb{R}$. **B.** $x \in (-\infty;2]$. **C.** $x \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **D.** $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình xác định khi $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Câu 2: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $x + \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 2 - \sqrt{4-x}$.

A. $x \in [-5;4]$. **B.** $x \in (-5;4]$. **C.** $x \in [4;+\infty)$. **D.** $x \in (-\infty;-5)$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình xác định khi $\begin{cases} x+5>0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow -5<x\le 4$.

Câu 3: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình $\sqrt{\dfrac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1$.

A. $x \in [-1;+\infty)$. **B.** $x \in (-1;+\infty)$.

C. $x \in [-1;+\infty) \setminus \{2\}$. **D.** $x \in (-1;+\infty) \setminus \{2\}$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình xác định khi $\begin{cases} \dfrac{x+1}{(x-2)^2} \ge 0 \\ x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x-2 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ne 2 \end{cases}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sqrt{m-2x}-\sqrt{x+1}$ có tập xác định là một đoạn trên trục số.

A. $m<-2$. **B.** $m>2$. **C.** $m>-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m>-2$.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} m-2x \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{m}{2} \\ x \ge -1 \end{cases}$.

- Nếu $\dfrac{m}{2}=-1 \Leftrightarrow m=-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\{-1\}$.
- Nếu $\dfrac{m}{2}<-1 \Leftrightarrow m<-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\varnothing$.
- Nếu $\dfrac{m}{2}>-1 \Leftrightarrow m>-2$ thì tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\left[-1;\dfrac{m}{2}\right]$.

Dạng 2. Cặp bất phương trình tương đương

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Bất phương trình $2x+\dfrac{3}{2x-4}<5+\dfrac{3}{2x-4}$ tương đương với:

A. $2x<5$. **B.** $x<\dfrac{5}{2}$ và $x \ne 2$.

C. $x<\frac{5}{2}$. **D.** Tất cả đều đúng.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x\neq 2$. Bất phương trình tương đương với: $2x<5\Leftrightarrow x<\frac{5}{2}$ kết hợp với điều kiện ta có $x<\frac{5}{2}$ và $x\neq 2$.

Ví dụ 3: Cặp bất phương trình nào sau đây là tương đương?

A. $x-2\leq 0$ và $x^2(x-2)\leq 0$. **B.** $x-2<0$ và $x^2(x-2)>0$.

C. $x-2<0$ và $x^2(x-2)<0$. **D.** $x-2\geq 0$ và $x^2(x-2)\geq 0$.

Lời giải

Chọn A.

Ta xét từng bất phương trình trong đáp án A:

$x-2\leq 0\Leftrightarrow x\leq 2.$

$x^2(x-2)\leq 0\Leftrightarrow x\leq 2.$

Cả hai bất phương trình có cùng tập nghiệm nên chúng tương đương.

Ví dụ 4: Với giá trị nào của a thì hai bất phương trình $(a+1)x-a+2>0$ và $(a-1)x-a+3>0$ tương đương:

A. $a=1$. **B.** $a=5$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=2$.

Lời giải

Chọn B.

Phương pháp trắc nghiệm: Thay lần lượt từng đáp án vào hai phương trình.

- Thay $a=1$, ta được $\begin{cases}(a+1)x-a+2>0\longrightarrow 2x+1>0\leftrightarrow x>-\frac{1}{2}\\(a-1)x-a+3>0\longrightarrow 0x+2>0\leftrightarrow x\in\mathbb{R}\end{cases}$. Không thỏa.

- Thay $a=5$, ta được $\begin{cases}(a+1)x-a+2>0\longrightarrow 6x-3>0\leftrightarrow x>\frac{1}{2}\\(a-1)x-a+3>0\longrightarrow 4x-2>0\leftrightarrow x>\frac{1}{2}\end{cases}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Bất phương trình $2x+\frac{3}{2x-4}<3+\frac{3}{2x-4}$ tương đương với

A. $2x<3$. **B.** $x<\frac{3}{2}$ và $x\neq 2$.

C. $x < \frac{3}{2}$. **D.** Tất cả đều đúng.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện: $x \neq 2$. Bất phương trình tương đương với:

$2x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 2: Bất phương trình $2x-1 \geq 0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $2x-1+\frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3}$. **B.** $2x-1-\frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3}$.

C. $(2x-1)\sqrt{x-2018} \geq \sqrt{x-2018}$. **D.** $\frac{2x-1}{\sqrt{x-2018}} \geq \frac{1}{\sqrt{x-2018}}$.

Lời giải

Chọn B.

Nếu ta cộng $\frac{1}{x-3}$ vào hai vế bất phương trình $2x-1 \geq 0$ thì điều kiện của bất phương trình sẽ thay đổi suy ra đáp án A sai.

Tương tự nếu ta nhân hoặc chia hai vế bất phương trình đã cho với $\sqrt{x-2018}$ thì điều kiện của bất phương trình ban đầu cũng sẽ thay đổi suy ra đáp án C và D sai.

Câu 3: Bất phương trình nào sau đây tương đương với bất phương trình $x+5>0$?

A. $(x-1)^2(x+5)>0$. **B.** $x^2(x+5)>0$.

C. $\sqrt{x+5}(x+5)>0$. **D.** $\sqrt{x+5}(x-5)>0$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $x+5>0 \Leftrightarrow x>-5$.

Bất phương trình $(x-1)^2(x+5)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x>-5 \end{cases}$. Đáp án A sai.

Bất phương trình $x^2(x+5)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x>-5 \end{cases}$. Đáp án B sai.

Bất phương trình $\sqrt{x+5}(x+5)>0 \Leftrightarrow x>-5$.

Câu 4: Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với

A. $\sqrt{x(x+1)^2} \leq 0$. **B.** $(x+1)\sqrt{x}<0$ **C.** $(x+1)^2\sqrt{x} \leq 0$. **D.** $(x+1)^2\sqrt{x}<0$

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $(x+1)\sqrt{x}\le 0$ có điều kiện $x\ge 0\to(x+1)\sqrt{x}\le 0\Leftrightarrow x=0.$

Ta có: $\sqrt{x(x+1)^2}\le 0\Leftrightarrow x(x+1)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\end{array}\right.$. Đáp án A sai.

Ta có: $(x+1)\sqrt{x}<0$ vô nghiệm vì từ điều kiện $x\ge 0\Rightarrow(x+1)\sqrt{x}\ge 0$. Đáp án B sai.

Ta có: $(x+1)^2\sqrt{x}\le 0\Leftrightarrow x=0.$

Câu 5: Bất phương trình $\sqrt{x-1}\ge x$ tương đương với

A. $(1-2x)\sqrt{x-1}\ge x(1-2x).$

B. $(2x+1)\sqrt{x-1}\ge x(2x+1).$

C. $(1-x^2)\sqrt{x-1}\ge x(1-x^2).$

D. $x\sqrt{x-1}\le x^2.$

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\sqrt{x-1}\ge x\longrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x-1\ge x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-x+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Ta có: $(1-2x)\sqrt{x-1}\ge x(1-2x)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\\sqrt{x-1}\le x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 1.$ Đáp án A sai.

Ta có: $(2x+1)\sqrt{x-1}\ge x(2x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\\sqrt{x-1}\ge x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x^2-x+1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing.$

Câu 6: Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+2)x\le m+1$ và $3m(x-1)\le -x-1$ tương đương:

A. $m=-3.$ **B.** $m=-2.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=3.$

Lời giải

Chọn D.

Viết lại $(m+2)x\le m+1\quad(1)$ và $(3m+1)x\le 3m-1\quad(2).$

- Thay $m=-3$, ta được $\begin{cases}(m+2)x\le m+1\longrightarrow -x\le -2\leftrightarrow x\ge 2\\(3m+1)x\le 3m-1\longrightarrow -8x\le -10\leftrightarrow x\ge\dfrac{5}{4}\end{cases}$. Không thỏa mãn.
- Thay $m=-2$ thì hệ số của x ở (1) bằng 0, hệ số của x ở (2) khác 0. Không thỏa mãn.
- Thay $m=-1$ thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) âm. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Đến đây dùng phương pháp loại trừ thì chỉ còn đáp án D.

- Thay $m=3$, ta được $\begin{cases}(m+2)x\le m+1\longrightarrow 5x\le 4\leftrightarrow x\le\dfrac{4}{5}\\(3m+1)x\le 3m-1\longrightarrow 10x\le 8\leftrightarrow x\le\dfrac{4}{5}\end{cases}$.

Câu 7: Với giá trị nào của m thì hai bất phương trình $(m+3)x\ge 3m-6$ và $(2m-1)x\le m+2$ tương đương:

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=4$. **D.** $m=0$ hoặc $m=4$.

Lời giải

Chọn B.

Thay $m=1$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa.

Thay $m=0$, ta được $\begin{cases}(m+3)x\ge 3m-6 \longrightarrow 3x\ge -6 \leftrightarrow x\ge -2\\(2m-1)x\le m+2 \longrightarrow -x\le 2 \leftrightarrow x\ge -2\end{cases}$. Ta thấy thỏa mãn nhưng chưa đủ kết luận là đáp án B vì trong đáp án D cũng có $m=0$. Ta thử tiếp $m=4$.

Thay $m=4$, thì hệ số của x ở (1) dương, hệ số của x ở (2) dương. Suy ra nghiệm của hai bất phương trình ngược chiều. Không thỏa mãn.

Vậy với $m=0$ thỏa mãn.

Dạng 3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $\dfrac{2x-5}{3}>\dfrac{x-3}{2}$

Lời giải

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2(2x-5)>3(x-3)\Leftrightarrow 4x-10>3x-9\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(1;+\infty)$.

Ví dụ 1: Giải bất phương trình $|2-x|+3x-1\le 6$ có tập nghiệm là

Lời giải

Ta có : $|2-x|+3x-1\le 6\Leftrightarrow |2-x|\le 7-3x\Leftrightarrow \begin{cases}2-x\le 7-3x\\2-x\ge -7+3x\\7-3x\ge 0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x\le 5\\-4x\ge -9\\x\le \dfrac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{5}{2}\\x\le \dfrac{9}{4}\\x\le \dfrac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x\le \dfrac{9}{4}.$$

Ví dụ 3: Bất phương trình $4m^2(2x-1)\ge(4m^2+5m+9)x-12m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m=-1$. **B.** $m=\dfrac{9}{4}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $\left(4m^2-5m-9\right)x\ge 4m^2-12m$.

Dễ dàng thấy nếu $4m^2-5m-9\ne 0\Leftrightarrow \begin{cases} m\ne -1 \\ m\ne \dfrac{9}{4} \end{cases}$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $m=-1$ bất phương trình trở thành $0x\ge 16$: vô nghiệm.

Với $m=\dfrac{9}{4}$ bất phương trình trở thành $0x\ge -\dfrac{27}{4}$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Vậy giá trị cần tìm là $m=\dfrac{9}{4}$.

Ví dụ 4: Bất phương trình $m^2\left(x-1\right)\ge 9x+3m$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m=1$. **B.** $m=-3$. **C.** $m=\varnothing$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-9\right)x\ge m^2+3m.$

Dễ dàng thấy nếu $m^2-9\ne 0\Leftrightarrow m\ne\pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x>18$: vô nghiệm

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x\ge 0$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}.$

Vậy giá trị cần tìm là $m=-3.$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Bất phương trình $ax+b>0$ vô nghiệm khi:

A. $\begin{cases} a\ne 0 \\ b=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a=0 \\ b\ne 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=0 \\ b\le 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D.

Nếu $a>0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)\ne\varnothing$.

Nếu $a<0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)\ne\varnothing$.

Nếu $a=0$ thì $ax+b>0$ có dạng $0x+b>0$

Với $b>0$ thì $S=\mathbb{R}.$

Với $b\le 0$ thì $S=\varnothing.$

Câu 2: Bất phương trình $ax+b>0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi:

A. $\begin{cases} a=0 \\ b>0 \end{cases}$.   **B.** $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$.   **C.** $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$.   **D.** $\begin{cases} a=0 \\ b\leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Nếu $a>0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x>-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$.

Nếu $a<0$ thì $ax+b>0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)\neq\varnothing$.

Nếu $a=0$ thì $ax+b>0$ có dạng $0x+b>0$

Với $b\leq 0$ thì $S=\varnothing$.

Với $b>0$ thì $S=\mathbb{R}$.

Câu 3: Bất phương trình $ax+b\leq 0$ vô nghiệm khi:

A. $\begin{cases} a=0 \\ b>0 \end{cases}$.   **B.** $\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$.   **C.** $\begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$.   **D.** $\begin{cases} a=0 \\ b\leq 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Nếu $a>0$ thì $ax+b\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right]\neq\varnothing$.

Nếu $a<0$ thì $ax+b\leq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{b}{a}$ nên $S=\left[-\dfrac{b}{a};+\infty\right)\neq\varnothing$.

Nếu $a=0$ thì $ax+b\leq 0$ có dạng $0x+b\leq 0$

Với $b\leq 0$ thì $S=\mathbb{R}$.

Với $b>0$ thì $S=\varnothing$.

Câu 4: Tập nghiệm S của bất phương trình $5x-1\geq \dfrac{2x}{5}+3$ là:

A. $S=\mathbb{R}$.   **B.** $S=(-\infty;2)$.   **C.** $S=\left(-\dfrac{5}{2};+\infty\right)$.   **D.** $S=\left[\dfrac{20}{23};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $5x-1\geq \dfrac{2x}{5}+3 \Leftrightarrow 25x-5\geq 2x+15 \Leftrightarrow 23x\geq 20 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{20}{23}$.

Câu 5: Bất phương trình $\dfrac{3x+5}{2}-1\leq \dfrac{x+2}{3}+x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên lớn hơn -10?

A. 4.   **B.** 5.   **C.** 9.   **D.** 10.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\frac{3x+5}{2}-1\leq\frac{x+2}{3}+x \Leftrightarrow 9x+15-6\leq 2x+4+6x \Leftrightarrow x\leq -5.$

Vì $x\in\mathbb{Z}, -10<x\leq -5$ nên có 5 nghiệm nguyên

Câu 6: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(1-\sqrt{2}\right)x<3-2\sqrt{2}$ là:

A. $S=\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right).$ **B.** $S=\left(1-\sqrt{2};+\infty\right).$

C. $S=\mathbb{R}.$ **D.** $S=\varnothing.$

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\left(1-\sqrt{2}\right)x<3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow x>\frac{3-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}{1-\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}.$

Câu 7: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $x(2-x)\geq x(7-x)-6(x-1)$ trên đoạn $[-10;10]$ bằng:

A. 5. **B.** 6. **C.** 21. **D.** 40.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $x(2-x)\geq x(7-x)-6(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x-x^2\geq 7x-x^2-6x+6 \Leftrightarrow x\geq 6 \xrightarrow[x\in\mathbb{Z}]{x\in[-10;10]} x\in\{6;7;8;9;10\}$.

Câu 8: Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1\leq(x-1)(x+3)+x^2-5$ có tập nghiệm

A. $S=\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right).$ **B.** $S=\left[-\frac{2}{3};+\infty\right).$ **C.** $S=\mathbb{R}.$ **D.** $S=\varnothing.$

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $(2x-1)(x+3)-3x+1\leq(x-1)(x+3)+x^2-5$

tương đương với $2x^2+5x-3-3x+1\leq x^2+2x-3+x^2-5 \Leftrightarrow 0.x\leq -6 \Leftrightarrow x\in\varnothing \longrightarrow S=\varnothing.$

Câu 9: Tập nghiệm S của bất phương trình $5(x+1)-x(7-x)>-2x$ là:

A. $S=\mathbb{R}.$ **B.** $S=\left(-\frac{5}{2};+\infty\right).$ **C.** $S=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right).$ **D.** $S=\varnothing.$

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $5(x+1)-x(7-x)>-2x$ tương đương với:

$$5x+5-7x+x^2>-2x \Leftrightarrow x^2+5>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \longrightarrow S=\mathbb{R}.$$

Câu 10: Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-1)^2+(x-3)^2+15<x^2+(x-4)^2$ là:

A. $S=(-\infty;0)$. **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=\mathbb{R}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình tương đương $x^2-2x+1+x^2-6x+9+15<x^2+x^2-8x+16$

$\Leftrightarrow 0.x<-9$: vô nghiệm $\longrightarrow S=\varnothing$.

Câu 11: Tập nghiệm S của bất phương trình $x+\sqrt{x}<\left(2\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ là:

A. $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(3;+\infty)$. **C.** $S=[3;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;3]$.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x\ge 0$.

Bất phương trình tương đương

$$x+\sqrt{x}<2x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-3 \Leftrightarrow -x<-3 \Leftrightarrow x>3 \longrightarrow S=(3;+\infty)$$

Câu 12: Tập nghiệm S của bất phương trình $x+\sqrt{x-2}\le 2+\sqrt{x-2}$ là:

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=(-\infty;2]$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $x\ge 2$. Bất phương trình tương đương $x\le 2 \longrightarrow x=2$.

Câu 13: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\dfrac{x-2}{\sqrt{x-4}}\le\dfrac{4}{\sqrt{x-4}}$ bằng:

A. 15 . **B.** 11 . **C.** 26 . **D.** 0 .

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện: $x>4$. Bất phương trình tương đương :

$$x-2\le 4 \Leftrightarrow x\le 6 \Rightarrow 4<x\le 6, x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=5; x=6 \longrightarrow S=5+6=11.$$

Câu 14: Tập nghiệm S của bất phương trình $(x-3)\sqrt{x-2}\ge 0$ là:

A. $S=[3;+\infty)$. **B.** $S=(3;+\infty)$.

C. $S=\{2\}\cup[3;+\infty)$. **D.** $S=\{2\}\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện: $x \geq 2$.

Bất phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0\\ x-3\geq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x\geq 3\end{array}\right.$.

Câu 15: Bất phương trình $(m-1)x>3$ vô nghiệm khi

A. $m\neq 1$. **B.** $m<1$. **C.** $m=1$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Chọn C.

Rõ ràng nếu $m\neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m=1$ bất phương trình trở thành $0x>3$: vô nghiệm.

Câu 16: Bất phương trình $\left(m^2-3m\right)x+m<2-2x$ vô nghiệm khi

A. $m\neq 1$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m=1, m=2$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-3m+2\right)x<2-m$.

Rõ ràng nếu $m^2-3m+2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 2\end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x<1$: vô nghiệm.

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x<0$: vô nghiệm.

Câu 17: Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\geq\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2$ là:

A. $S=\left[\frac{\sqrt{3}}{6};+\infty\right)$. **B.** $S=\left(\frac{\sqrt{3}}{6};+\infty\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$. **D.** $S=\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $\left(x+\sqrt{3}\right)^2\geq\left(x-\sqrt{3}\right)^2+2$ tương đương với:

$$x^2+2\sqrt{3}x+3\geq x^2-2\sqrt{3}x+3+2 \Leftrightarrow 4\sqrt{3}x\geq 2 \Leftrightarrow x\geq\frac{\sqrt{3}}{6}\longrightarrow S=\left[\frac{\sqrt{3}}{6};+\infty\right).$$

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(m^2-m\right)x<m$ vô nghiệm.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B.

Rõ ràng nếu $m^2-m\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\m\neq 0\end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x<1$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Với $m=0$ bất phương trình trở thành $0x<0$: vô nghiệm

Câu 19: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(m^2-m\right)x+m<6x-2$ vô nghiệm. Tổng các phần tử trong S bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-m-6\right)x<-2-m$.

Rõ ràng nếu $m^2-m-6\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -2\\m\neq 3\end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=-2$ bất phương trình trở thành $0x<0$: vô nghiệm.

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x<-5$: vô nghiệm.

Suy ra $S=\{-2;3\}\longrightarrow -2+3=1$.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx-2\leq x-m$ vô nghiệm.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình tương đương với $(m-1)x\leq 2-m.$

Rõ ràng nếu $m\neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m=1$ bất phương trình trở thành $0x\leq 1$: nghiệm đúng với mọi x .

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21: Bất phương trình $\left(m^2+9\right)x+3\geq m(1-6x)$ nghiệm đúng với mọi x khi

A. $m\neq 3$. **B.** $m=3$. **C.** $m\neq -3$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình tương đương với $(m+3)^2x\geq m-3$.

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x\geq -6$: nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(x+m)m+x>3x+4$ có tập nghiệm là $(-m-2;+\infty)$.

A. $m=2$. **B.** $m\neq 2$. **C.** $m>2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn C.

Để ý rằng, bất phương trình $ax+b>0$ (hoặc $<0,\ \geq 0,\ \leq 0$)

● Vô nghiệm $(S=\varnothing)$ hoặc có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$ thì chỉ xét riêng $a=0$.

● Có tập nghiệm là một tập con của $\mathbb{R}$ thì chỉ xét $a>0$ hoặc $a<0$.

Bất phương trình viết lại $(m-2)x>4-m^2$.

Xét $m-2>0 \leftrightarrow m>2$, bất phương trình $\Leftrightarrow x>\dfrac{4-m^2}{m-2}=-m-2 \to S=(-m-2;+\infty)$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(x-m)\geq x-1$ có tập nghiệm là $(-\infty;m+1]$.

A. $m=1$. **B.** $m>1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình viết lại $(m-1)x\geq m^2-1$.

Xét $m-1>0 \leftrightarrow m>1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x\geq \dfrac{m^2-1}{m-1}=m+1 \longrightarrow S=[m+1;+\infty)$.

Xét $m-1<0 \leftrightarrow m<1$, bất phương trình $\Leftrightarrow x\leq \dfrac{m^2-1}{m-1}=m+1 \longrightarrow S=(-\infty;m+1]$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1)<2x-3$ có nghiệm.

A. $m\neq 2$. **B.** $m>2$. **C.** $m=2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình viết lại $(m-2)x<m-3$.

● Rõ ràng $m-2\neq 0 \leftrightarrow m\neq 2$ thì bất phương trình có nghiệm.

● Xét $m-2=0 \leftrightarrow m=2$, bất phương trình trở thành $0x<-1$ (vô lí).

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m\neq 2$.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m(x-1)<3-x$ có nghiệm.

A. $m\neq 1$. **B.** $m=1$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m\neq 3$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình viết lại $(m+1)x<m+3$.

Rõ ràng $m+1\neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

Xét $m+1=0 \leftrightarrow m=-1$, bất phương trình trở thành $0x<2$ (luôn đúng với mọi x).

Vậy bất phương trình có nghiệm với mọi m.

Câu 26: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $\left(m^2+m-6\right)x \geq m+1$ có nghiệm.

A. $m \neq 2$. **B.** $m \neq 2$ và $m \neq 3$. **C.** $m \in \mathbb{R}$. **D.** $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn A.

Rõ ràng $m^2+m-6 \neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

Xét $m^2+m-6=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \longrightarrow 0x \geq 3 \longrightarrow S=\varnothing \\ m=-3 \longrightarrow 0x \geq -2 \longrightarrow S=\mathbb{R} \end{array}\right.$.

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm khi $m \neq 2$.

Câu 27: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2x-1<mx+m$ có nghiệm.

A. $m=1$. **B.** $m=0$. **C.** $m=0;\ m=1$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình viết lại $\left(m^2-m\right)x<m+1$.

Rõ ràng $m^2-m \neq 0$ thì bất phương trình có nghiệm.

Xét $m^2-m=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \longrightarrow 0x<1 \longrightarrow S=\mathbb{R} \\ m=1 \longrightarrow 0x<2 \longrightarrow S=\mathbb{R} \end{array}\right.$.

Hợp hai trường hợp, ta được bất phương trình có nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Câu 28: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $mx+6<2x+3m$ với $m<2$. Hỏi tập hợp nào sau đây là phần bù của tập S?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(-\infty;3]$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình tương đương với $(m-2)x<3m-6$.

Với $m<2$, bất phương trình tương đương với $x>\dfrac{3m-6}{m-2}=3 \longrightarrow S=(3;+\infty)$

Suy ra phần bù của S là $(-\infty;3]$.

Câu 29: Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m(2x-1) \geq 2x+1$ có tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

A. $m=3$ **B.** $m=1$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình tương đương với $(2m-2)x \geq m+1$.

- Với $m=1$, bất phương trình trở thành $0x \geq 2$: vô nghiệm. Do đó $m=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Với $m>1$, bất phương trình tương đương với $x \geq \frac{m+1}{2m-2} \longrightarrow S = \left[\frac{m+1}{2m-2};+\infty\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{m+1}{2m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 3$: thỏa mãn $m>1$.

- Với $m<1$, bất phương trình tương đương với $x \leq \frac{m+1}{2m-2} \longrightarrow S = \left(-\infty;\frac{m+1}{2m-2}\right]$: không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Tìm giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x-m<3(x-1)$ có tập nghiệm là $(4;+\infty)$.

A. $m \neq 1$. **B.** $m = 1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình tương đương với $2x-m<3x-3 \Leftrightarrow x>3-m$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(3-m;+\infty)$

Để bất phương trình trên có tập nghiệm là $(4;+\infty)$ thì $3-m=4 \Leftrightarrow m=-1$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $mx+4>0$ nghiệm đúng với mọi $|x|<8$.

A. $m \in \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$. **B.** $m \in \left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$.

C. $m \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $m \in \left[-\frac{1}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn A.

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x)=mx+4>0, \forall x \in (-8;8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên khoảng $(-8;8)$ nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \geq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m+4 \geq 0 \\ 8m+4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2)-mx+x+5<0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-2018;2]$.

A. $m<\frac{7}{2}$. **B.** $m=\frac{7}{2}$. **C.** $m>\frac{7}{2}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Cách 1. Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2-m+1)x<2m^2-5 \longrightarrow x<\dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1}$

$\longrightarrow S=\left(-\infty;\dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1}\right)$ (vì $m^2-m+1=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-2018;2]\subset\left(-\infty;\dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1}\right)\leftrightarrow 2<\dfrac{2m^2-5}{m^2-m+1}\leftrightarrow m>\dfrac{7}{2}$.

Cách 2. Ta có $(m^2-m+1)x<2m^2-5\Leftrightarrow (m^2-m+1)x-2m^2+5<0$.

Hàm số bậc nhất $y=(m^2-m+1)x-2m^2+5$ có hệ số $m^2-m+1>0$ nên đồng biến.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y(2)<0\Leftrightarrow (m^2-m+1).2-2m^2+5<0\Leftrightarrow m>\dfrac{7}{2}$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $m^2(x-2)+m+x\geq 0$ có nghiệm $x\in[-1;2]$.

A. $m\geq -2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m\geq -1$. **D.** $m\leq -2$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $\Leftrightarrow (m^2+1)x\geq 2m^2-m \longrightarrow x\geq \dfrac{2m^2-m}{m^2+1} \longrightarrow S=\left[\dfrac{2m^2-m}{m^2+1};+\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow [-1;2]\cap\left[\dfrac{2m^2-m}{m^2+1};+\infty\right)\neq\varnothing \longleftrightarrow \dfrac{2m^2-m}{m^2+1}\leq 2\leftrightarrow m\geq -2.$

Dạng 4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}3x+1\geq 2x+7\\4x+3>2x+19\end{cases}$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}3x+1\geq 2x+7\\4x+3>2x+19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 6\\2x>16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 6\\x>8\end{cases}\Leftrightarrow x>8$.

Ví dụ 2: Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} < -x+1 \\ \dfrac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases}$ 1

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} > -x+1 \\ \dfrac{4-3x}{2} < 3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > -3x+3 \\ 4-3x < 6-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x > 4 \\ -x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{5} \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{5}$.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} (x-3)^2 \geq x^2+7x+1 \\ 2m \leq 8+5x \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Bất phương trình $(x-3)^2 \geq x^2+7x+1 \leftrightarrow x^2-6x+9 \geq x^2+7x+1 \leftrightarrow x \leq \dfrac{8}{13}$

$\longrightarrow S_1 = \left(-\infty; \dfrac{8}{13}\right]$.

Bất phương trình $2m \leq 8+5x \Leftrightarrow x \geq \dfrac{2m-8}{5} \longrightarrow S_2 = \left[\dfrac{2m-8}{5}; +\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow \dfrac{8}{13} = \dfrac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m = \dfrac{72}{13}$.

Ví dụ 4: Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1>0 \\ x-m<2 \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

Bất phương trình $2x-1>0$ có tập nghiệm $S_1 = \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bất phương trình $x-m<2$ có tập nghiệm $S_2 = (-\infty; m+2)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing \Leftrightarrow m+2 > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m > -\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases} mx \leq m-3 \\ (m+3)x \geq m-9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Giả sử hệ có nghiệm duy nhất thì $\dfrac{m-3}{m} = \dfrac{m-9}{m+3} \Leftrightarrow m=1$.

Thử lại với $m=1$, hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2x+1<x-2 \end{cases}$ là:

A. $S=(-\infty;-3)$. **B.** $S=(-\infty;2)$. **C.** $S=(-3;2)$. **D.** $S=(-3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} 2-x>0 \\ 2x+1<x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2>x \\ x<-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<-3 \end{cases} \Leftrightarrow x<-3.$

Câu 2: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}<-x+1 \\ 3+x>\dfrac{5-2x}{2} \end{cases}$ là:

A. $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}<-x+1 \\ 3+x>\dfrac{5-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<-2x+2 \\ 6+2x>5-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<3 \\ 4x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x>-\dfrac{1}{4} \end{cases}.$

Câu 3: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-1<-x+2017 \\ 3+x>\dfrac{2018-2x}{2} \end{cases}$ là:

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\left(\dfrac{2012}{8};\dfrac{2018}{3}\right)$.

C. $S=\left(-\infty;\dfrac{2012}{8}\right)$. **D.** $S=\left(\dfrac{2018}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} 2x-1<-x+2017 \\ 3+3x>\dfrac{2018-2x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x<2018 \\ 6+6x>2018-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x>2018 \\ 8x>2012 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2018}{3} \\ x>\dfrac{2012}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2018}{3}<x<\dfrac{2012}{8}.$

Câu 4: Tập $S=\left[-1;\dfrac{3}{2}\right)$ là tập nghiệm của hệ bất phương trình sau đây ?

A. $\begin{cases} 2(x-1)<1 \\ x\ge -1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} 2(x-1)>1 \\ x\ge -1 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} 2(x-1)<1 \\ x\le -1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} 2(x-1)<1 \\ x\le -1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases}2(x-1)<1\\x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x<3\\x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x<\dfrac{3}{2}\longrightarrow S=\left[-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **Chọn A.**

Ta có $\begin{cases}2(x-1)>1\\x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x>3\\x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{3}{2}\\x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}\longrightarrow S=\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. B sai.

Ta có $\begin{cases}2(x-1)<1\\x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x<3\\x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{3}{2}\\x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow x\le -1\longrightarrow S=(-\infty;-1]$. C sai.

Ta có $\begin{cases}2(x-1)>1\\x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x>3\\x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{3}{2}\\x\le -1\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing\longrightarrow S=\varnothing$. D sai.

Câu 5: Tập nghiệm S của bất phương trình $\begin{cases}2(x-1)<x+3\\2x\le 3(x+1)\end{cases}$ là:

A. $S=(-3;5)$. **B.** $S=(-3;5]$. **C.** $S=[-3;5)$. **D.** $S=[-3;5]$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $\begin{cases}2(x-1)<x+3\\2x\le 3(x+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-2<x+3\\2x\le 3x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<5\\x\ge -3\end{cases}\Leftrightarrow -3\le x<5\longrightarrow S=[-3;5)$.

Câu 6: Biết rằng bất phương trình $\begin{cases}x-1<2x-3\\\dfrac{5-3x}{2}\le x-3\\3x\le x+5\end{cases}$ có tập nghiệm là một đoạn $[a;b]$. Hỏi $a+b$ bằng:

A. $\dfrac{11}{2}$. **B.** 8. **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\dfrac{47}{10}$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $\begin{cases}x-1<2x-3\\5-3x\le 2x-6\\3x\le x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2<x\\11\le 5x\\2x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x\ge\dfrac{11}{5}\\x\le\dfrac{5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{11}{5}\le x\le\dfrac{5}{2}$.

Suy ra $a+b=\dfrac{11}{5}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{47}{10}$.

Câu 7: Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases}6x+\dfrac{5}{7}>4x+7\\\dfrac{8x+3}{2}<2x+25\end{cases}$ là:

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 42x+5>28x+49 \\ 8x+3<4x+50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x>44 \\ 4x<47 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{44}{14} \\ x<\dfrac{47}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{44}{14}<x<\dfrac{47}{4} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{4;5;6;7;8;9;10;11\}.$$

Câu 8: Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\begin{cases} 5x-2<4x+5 \\ x^2<(x+2)^2 \end{cases}$ bằng:

A. 21. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 29.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-2<4x+5 \\ x^2<x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ -4x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ -x<1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x<7 \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<7 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Suy ra tổng bằng 21.

Câu 9: Cho bất phương trình $\begin{cases} (1-x)^2\le 8-4x+x^2 \\ (x+2)^3<x^3+6x^2+13x+9 \end{cases}$. Tổng nghiệm nguyên lớn nhất và nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình bằng:

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x+x^2\le 8-4x+x^2 \\ x^3+6x^2+12x+8<x^3+6x^2+13x+9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x\le 8-4x \\ 12x+8<13x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x\le 7 \\ -x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{7}{2} \\ x>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x\le \dfrac{7}{2} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} x\in\{0;1;2;3\}.$$

Suy ra tổng cần tính là $0+3=3$.

Câu 10: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 3(x-6)<-3 \\ \dfrac{5x+m}{2}>7 \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>-11$. **B.** $m\ge -11$. **C.** $m<-11$. **D.** $m\le -11$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $3(x-6)<-3$ có tập nghiệm $S_1=(-\infty;5)$.

Bất phương trình $\frac{5x+m}{2}>7$ có tập nghiệm $S_2=\left(\frac{14-m}{5};+\infty\right)$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\neq\varnothing\Leftrightarrow\frac{14-m}{5}<5\Leftrightarrow m>-11$.

Câu 11: Hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-1\le 0\\x-m>0\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\neq 1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $x^2-1\le 0$ có tập nghiệm $S_1=[-1;1]$.

Bất phương trình $x-m>0$ có tập nghiệm $S_2=(m;+\infty)$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\neq\varnothing\Leftrightarrow m<1$.

Câu 12: Hệ bất phương trình $\begin{cases}x-2\ge 0\\(m^2+1)x<4\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>1$. **B.** $m<1$. **C.** $m<-1$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $x-2\ge\Leftrightarrow x\ge 2$ có tập nghiệm $S_1=[2;+\infty)$.

Bất phương trình $(m^2+1)x<4\Leftrightarrow x<\frac{4}{m^2+1}$ (do $m^2+1>0$).

Suy ra $S_2=\left(-\infty;\frac{4}{m^2+1}\right)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\neq\varnothing\longleftrightarrow\frac{4}{m^2+1}>2$

Giải bất phương trình $\frac{4}{m^2+1}>2\Leftrightarrow 4>2(m^2+1)\Leftrightarrow 2>2m^2\Leftrightarrow m^2<1\Leftrightarrow -1<m<1$.

Câu 13: Hệ bất phương trình $\begin{cases}m(mx-1)<2\\m(mx-2)\ge 2m+1\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m<\frac{1}{3}$. **B.** $0\neq m<\frac{1}{3}$. **C.** $m\neq 0$. **D.** $m<0$.

Lời giải

Chọn B.

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases}m^2x<m+2\\m^2x\ge 4m+1\end{cases}$.

• Với $m=0$, ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases}0x<2\\0x\ge 1\end{cases}$: hệ bất phương trình vô nghiệm.

• Với $m\ne 0$, ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases}x<\dfrac{m+2}{m^2}\\x\ge \dfrac{4m+1}{m^2}\end{cases}$.

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\dfrac{m+2}{m^2}>\dfrac{4m+1}{m^2}\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{3}$.

Vậy $0\ne m<\dfrac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-1\ge 3\\x-m\le 0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m>2$. **B.** $m=2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m\ge 2$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $2x-1\ge 3\leftrightarrow x\ge 2\longrightarrow S_1=[2;+\infty)$.

Bất phương trình $x-m\le 0\leftrightarrow x\le m\longrightarrow S_2=(-\infty;m]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1\cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow 2=m$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases}m^2x\ge 6-x\\3x-1\le x+5\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\pm 1$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn C.

Bất phương trình $m^2x\ge 6-x\leftrightarrow \left(m^2+1\right)x\ge 6\leftrightarrow x\ge \dfrac{6}{m^2+1}\longrightarrow S_1=\left[\dfrac{6}{m^2+1};+\infty\right)$.

Bất phương trình $3x-1\le x+5\leftrightarrow x\le 3\longrightarrow S_2=(-\infty;3]$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1\cap S_2$ là tập hợp có đúng một phần tử $\Leftrightarrow \dfrac{6}{m^2+1}=3\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Câu 16: Tìm giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases}2m(x+1)\ge x+3\\4mx+3\ge 4x\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m=\dfrac{5}{2}$. **B.** $m=\dfrac{3}{4}$. **C.** $m=\dfrac{3}{4};\ m=\dfrac{5}{2}$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn B.

Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases}(2m-1)x\ge 3-2m\\(4m-4)x\ge -3\end{cases}$.

Giả sử hệ bất phương trình có nghiệm duy nhất thì

$$\frac{3-2m}{2m-1}=\frac{-3}{4m-4}\Leftrightarrow 8m^2-26m+15=0\Leftrightarrow m=\frac{3}{4}\text{ hoặc } m=\frac{5}{2}.$$

Thử lại

- Với $m=\frac{3}{4}$, hệ trở thành $\begin{cases}\left(\frac{3}{2}-1\right)x\ge 3-\frac{3}{2}\\-x\ge -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3\\x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$: thỏa mãn.
- Với $m=\frac{5}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases}4x\ge -2\\6x\ge -3\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$: không thỏa mãn.

Vậy $m=\frac{3}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 17: Hệ bất phương trình $\begin{cases}3x+4>x+9\\1-2x\le m-3x+1\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>\frac{5}{2}.$ **B.** $m\ge\frac{5}{2}.$ **C.** $m<\frac{5}{2}.$ **D.** $m\le\frac{5}{2}.$

Lời giải

Chọn D.

Bất phương trình $3x+4>x+9\leftrightarrow 2x>5\leftrightarrow x>\frac{5}{2}\longrightarrow S_1=\left(\frac{5}{2};+\infty\right).$

Bất phương trình $1-2x\le m-3x+1\leftrightarrow x\le m\longrightarrow S_2=(-\infty;m]$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2=\varnothing\Leftrightarrow m\le\frac{5}{2}.$

Câu 18: Hệ bất phương trình $\begin{cases}2x+7\ge 8x+1\\m+5<2x\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>-3.$ **B.** $m\ge -3.$ **C.** $m<-3.$ **D.** $m\le -3.$

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $2x+7\ge 8x+1\leftrightarrow -6x\ge -6\leftrightarrow x\le 1\longrightarrow S_1=(-\infty;1].$

Bất phương trình $m+5<2x\leftrightarrow x>\frac{m+5}{2}\longrightarrow S_2=\left(\frac{m+5}{2};+\infty\right).$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2=\varnothing\Leftrightarrow 1\le\frac{m+5}{2}\Leftrightarrow m\ge -3.$

Câu 19: Hệ bất phương trình $\begin{cases}(x-3)^2 \geq x^2+7x+1 \\ 2m \leq 8+5x\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > \frac{72}{13}$. **B.** $m \geq \frac{72}{13}$. **C.** $m < \frac{72}{13}$. **D.** $m \leq \frac{72}{13}$.

Lời giải

Chọn A.

Bất phương trình $(x-3)^2 \geq x^2+7x+1 \leftrightarrow x^2-6x+9 \geq x^2+7x+1$

$\leftrightarrow -6x+9 \geq 7x+1 \leftrightarrow 8 \geq 13x \leftrightarrow x \leq \frac{8}{13} \longrightarrow S_1 = \left(-\infty; \frac{8}{13}\right]$.

Bất phương trình $2m \leq 8+5x \leftrightarrow 2m-8 \leq 5x \leftrightarrow x \geq \frac{2m-8}{5} \longrightarrow S_2 = \left[\frac{2m-8}{5}; +\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{8}{13} < \frac{2m-8}{5} \Leftrightarrow m > \frac{72}{13}$.

Câu 20: Hệ bất phương trình $\begin{cases}3x+5 \geq x-1 \\ (x+2)^2 \leq (x-1)^2+9 \\ mx+1 > (m-2)x+m\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m < 3$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $3x+5 \geq x-1 \leftrightarrow 2x \geq -6 \leftrightarrow x \geq -3 \longrightarrow S_1 = [-3; +\infty)$.

Bất phương trình $(x+2)^2 \leq (x-1)^2+9 \leftrightarrow x^2+4x+4 \leq x^2-2x+1+9$

$\leftrightarrow 4x+4 \leq -2x+1+9 \leftrightarrow 6x \leq 6 \leftrightarrow x \leq 1 \longrightarrow S_2 = (-\infty; 1]$.

Suy ra $S_1 \cap S_2 = [-3; 1]$.

Bất phương trình $mx+1 > (m-2)x+m \leftrightarrow mx+1 > mx-2x+m$

$\leftrightarrow 1 > -2x+m \leftrightarrow 2x > m-1 \leftrightarrow x > \frac{m-1}{2} \longrightarrow S_3 = \left(\frac{m-1}{2}; +\infty\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow (S_1 \cap S_2) \cap S_3 = \varnothing \Leftrightarrow \frac{m-1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 21: Hệ bất phương trình $\begin{cases}2(x-3) < 5(x-4) \\ mx+1 \leq x-1\end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > 1$. **B.** $m \geq 1$. **C.** $m < 1$. **D.** $m \leq 1$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $2(x-3)<5(x-4)\leftrightarrow x>\frac{14}{3}\longrightarrow S_1=\left(\frac{14}{3};+\infty\right)$.

Bất phương trình $mx+1\le x-1\leftrightarrow (m-1)x\le -2$. $(*)$

- Với $m=1$, khi đó $(*)$ trở thành $0x\le -2$: vô nghiệm $\longrightarrow$ hệ vô nghiệm.

$\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m=1$.

- Với $m>1$, ta có $(*)\leftrightarrow x\le \frac{-2}{m-1}\longrightarrow S_2=\left(-\infty;\frac{-2}{m-1}\right]$

$\longrightarrow$ hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2=\varnothing \Leftrightarrow \frac{-2}{m-1}\le \frac{14}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{-6}{3(m-1)}\le \frac{14(m-1)}{3(m-1)}\Leftrightarrow -6\le 14(m-1)\Leftrightarrow m\ge \frac{4}{7}$ (do với $m>1\to m-1>0$).

$\longrightarrow$ trong trường hợp này ta chọn $m>1$.

- Với $m<1$, ta có $(*)\leftrightarrow x\ge \frac{-2}{m-1}\longrightarrow S_2=\left[\frac{-2}{m-1};+\infty\right)$.

Khi đó $S_1\cap S_2$ luôn luôn khác rỗng nên $m<1$ không thỏa mãn.

Vậy $m\ge 1$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm.

BÀI 3. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

1. Nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất đối với x là biểu thức dạng $f(x)=ax+b$ trong đó a,b là hai số đã cho, $a\neq 0$.

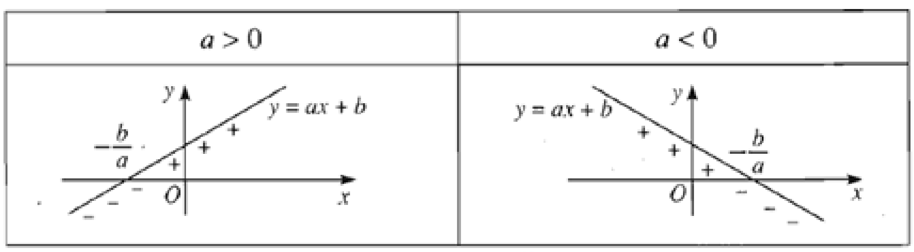
2. Dấu của nhị thức bậc nhất

Định lí

Nhị thức $f(x)=ax+b$ có giá trị cùng dấu với hệ số a khi x lấy các giá trị trong khoảng $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$, trái dấu với hệ số a khi x lấy giá trị trong khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $-\frac{b}{a}$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)=ax+b$	trái dấu với a $\quad 0 \quad$ cùng dấu với a

Minh họa bằng đồ thị



II – XÉT DẤU TÍCH, THƯƠNG CÁC NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử. Lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất có mặt trong $f(x)$ ta suy ra được dấu của $f(x)$. Trường hợp $f(x)$ là một thương cũng được xét tương tự.

III – ÁP DỤNG VÀO GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Giải bất phương trình $f(x)>0$ thực chất là xét xem biểu thức $f(x)$ nhận giá trị dương với những giá trị nào của x (do đó cũng biết $f(x)$ nhận giá trị âm với những giá trị nào của x), làm như vậy ta nói đã xét dấu biểu thức $f(x)$.

1. Bất phương trình tích, bất phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Ví dụ. Giải bất phương trình $\frac{1}{1-x}\geq 1$.

Giải.

Ta biến đổi tương đương bất phương trình đã cho

$\frac{1}{1-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \geq 0$

Xét dấu biểu thức $f(x) = \frac{x}{1-x}$

Ta suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là $0 \leq x < 1$.

2. Bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ. Giải bất phương trình $|-2x+1| + x - 3 < 5$.

Giải.

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối, ta có

$$|-2x+1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{neu } -2x+1 \geq 0 \\ -(-2x+1) & \text{neu } -2x+1 < 0. \end{cases}$$

Do đó, ta xét phương trình trong hai khoảng

a) Với $x \leq \frac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ (-2x+1) + x - 3 < 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ -x < 7 \end{cases}$.

Hệ này có nghiệm là $-7 < x \leq \frac{1}{2}$.

b) Với $x > \frac{1}{2}$ ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (2x-1) + x - 3 < 5 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x > \frac{1}{2}. \\ x < 3 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm là $\frac{1}{2} < x < 3$.

Tổng hợp lại tập nghiệm của bất phương trình đã cho là hợp của hai khoảng $\left(-7; \frac{1}{2}\right]$ và $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

Kết luận. Bất phương trình đã cho có nghiệm là $-7 < x < 3$.

Bằng cách áp dụng tính chất của giá trị tuyệt đối ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình dạng $|f(x)| \leq a$ và $|f(x)| \geq a$ với $a > 0$ đã cho.

Ta có

$$\begin{array}{l} |f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a \\ |f(x)| \geq a \Leftrightarrow f(x) \leq -a \text{ hoặc } f(x) \geq a \end{array} \quad (a > 0)$$

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xét dấu nhị thức bậc nhất

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x)\le 0$ là

A. $x\in(-\infty;2]$. **B.** $x\in(-\infty;2)$. **C.** $x\in(2;+\infty)$. **D.** $x\in[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3x-6}\le 0 \Leftrightarrow 3x-6<0 \Leftrightarrow x<2$. vậy $x\in(-\infty;2)$

Ví dụ 2: Cho biểu thức $f(x)=(x+5)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\le 0$ là

A. $x\in(-\infty;5)\cup(3;+\infty)$. **B.** $x\in(3;+\infty)$.

C. $x\in(-5;3)$. **D.** $x\in(-\infty;-5]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow (x+5)(3-x)=0 \Leftrightarrow x=-5; x=3$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-5]\cup[3;+\infty)$.

Ví dụ 3: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{(x+3)(2-x)}{x-1}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)>0$ là

A. $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$. **B.** $x\in(-3;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $x\in(-3;1)\cup(1;2)$. **D.** $x\in(-\infty;-3)\cup(1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3)\cup(1;2)$.

Ví dụ 4: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{(4x-8)(2+x)}{4-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$ là

A. $x\in(-\infty;-2]\cup[2;4)$. **B.** $x\in(3;+\infty)$.

C. $x\in(-2;4)$. **D.** $x\in(-2;2)\cup(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$; $2+x=0 \Leftrightarrow x=-2$; $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		2		4		$+\infty$
$4x-8$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$4-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in x\in(-\infty;-2]\cup[2;4)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho biểu thức $f(x)=2x-4$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x)\geq 0$ là

A. $x\in[2;+\infty)$. **B.** $x\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $x\in(-\infty;2]$. **D.** $x\in(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)\ge 0\Leftrightarrow 2x-4\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2\Leftrightarrow x\in[2;+\infty)$.

Câu 2: Cho biểu thức $f(x)=x(x-2)(3-x)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)<0$ là

A. $x\in(0;2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

C. $x\in(-\infty;0]\cup(2;+\infty)$. **D.** $x\in(-\infty;0)\cup(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)(3-x)=0\Leftrightarrow x=0;x=2;x=3$ **.**

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(0;2)\cup(3;+\infty)$

Câu 3: Cho biểu thức $f(x)=9x^2-1$. Tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x)<0$ là

A. $x\in\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$. **B.** $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow 9x^2-1=0\Leftrightarrow(3x-1)(3x+1)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3};x=-\frac{1}{3}$ **.**

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 4: Cho biểu thức $f(x)=(2x-1)(x^3-1)$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$ là

A. $x\in\left[\frac{1}{2};1\right]$.

B. $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$.

D. $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(2x-1)(x^3-1)=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x-1)(x^2+x+1)=0$

Phương trình $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$; $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ và $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$	|	$-$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$.

Câu 5: Cho biểu thức $f(x)=\frac{x(x-3)}{(x-5)(1-x)}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\geq 0$ là

A. $x\in(-\infty;0]\cup(3;+\infty)$.

B. $x\in(-\infty;0]\cup(1;5)$.

C. $x\in[0;1)\cup[3;5)$.

D. $x\in(-\infty;0)\cup(1;5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x=0$; $x-3=0\Leftrightarrow x=3$; $x-5=0\Leftrightarrow x=5$ và $1-x=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	||	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	||	$-$	|	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\ge 0\Leftrightarrow x\in[0;1)\cup[3;5)$.

Câu 6: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)\le 0$ là

A. $x\in(0;3]\cup(4;+\infty)$.

B. $x\in(-\infty;0]\cup[3;4)$.

C. $x\in(-\infty;0)\cup[3;4)$.

D. $x\in(-\infty;0)\cup(3;4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\dfrac{4x-12}{x^2-4x}=\dfrac{4x-12}{x(x-4)}$.

Phương trình $4x-12=0\Leftrightarrow x=3$; $x=0$ và $x-4=0\Leftrightarrow x=4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-4$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	

$f(x)$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, suy ra $f(x) \le 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0) \cup [3;4)$.

Câu 7: Cho biểu thức $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1} + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) < 0$ là

A. $x \in (-\infty;-1)$.

B. $x \in (-1;+\infty)$.

C. $x \in (-4;-1)$.

D. $x \in (-\infty;-4) \cup (-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1} + 2 = \dfrac{2-x+2(x+1)}{x+1} = \dfrac{x+4}{x+1}$.

Phương trình $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
$x+1$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4;-1)$.

Câu 8: Cho biểu thức $f(x) = 1 - \dfrac{2-x}{3x-2}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x) \le 0$ là

A. $x \in \left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

B. $x \in \left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

C. $x \in \left(\dfrac{2}{3};1\right]$.

D. $x \in (-\infty;1) \cup \left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = 1 - \dfrac{2-x}{3x-2} = \dfrac{3x-2-2+x}{3x-2} = \dfrac{4x-4}{3x-2}$.

Phương trình $4x-4=0 \Leftrightarrow x=1$ và $3x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$4x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left(\frac{2}{3};1\right]$.

Câu 9: Cho biểu thức $f(x)=\frac{-4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)>0$ là

A. $x\in\left(-\frac{11}{5};-\frac{1}{3}\right)\cup[2;+\infty)$.

B. $x\in\left(-\frac{11}{5};-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\frac{11}{5}\right]\cup\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

D. $x\in\left(-\infty;-\frac{11}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=-\frac{4}{3x+1}-\frac{3}{2-x}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{3x+1}=\frac{5x+11}{(x-2)(3x+1)}$.

Phương trình $5x+11=0\Leftrightarrow x=-\frac{11}{5}$; $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ và $3x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{11}{5}$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$5x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{11}{5};-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$.

Câu 10: Cho biểu thức $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}-\frac{3}{x+3}$. Tập hợp tất cả các giá trị của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)<0$ là

A. $x\in(-12;-4)\cup(-3;0)$.

B. $x\in\left(-\frac{11}{5};-\frac{1}{3}\right)\cup(2;+\infty)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\frac{11}{5}\right]\cup\left(-\frac{1}{3};2\right]$.

D. $x\in\left(-\infty;-\frac{11}{5}\right)\cup\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}-\frac{3}{x+3}<0\Leftrightarrow\frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}<0$.

Phương trình $x+12=0\Leftrightarrow x=-12$; $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$ và $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-12		-4		-3		0		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-12;-4)\cup(-3;0)$.

Câu 11: Cho biểu thức $f(x)=\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của x thỏa mãn bất phương trình $f(x)<1$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $1-f(x)=1-\frac{(x-3)(x+2)}{x^2-1}=1-\frac{x^2-x-6}{x^2-1}=\frac{x+5}{(x-1)(x+1)}$.

Phương trình $x+5=0\Leftrightarrow x=-5$; $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-1		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	

$x-1$	$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$
$1-f(x)$	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $1-f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-5;-1)\cup(1;+\infty)$.

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên âm của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Bất phương trình tích

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $(x+3)(x-1)\le 0$ là

A. 1. **B.** -4. **C.** -5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=(x+3)(x-1)$

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ và $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$x-1$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $(x+3)(x-1)\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 1 \Leftrightarrow x\in[-3;1]$.

Suy ra các nghiệm nguyên của bất phương trình là $-3,-2,-1,0,1$.

Suy ra tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình bằng -5.

Ví dụ 2: Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $x(x-2)(x+1)>0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x(x-2)(x+1)$.

Phương trình $x=0$; $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ và $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là 3.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $(2x+8)(1-x)>0$ có dạng $(a;b)$. Khi đó $b-a$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** 9. **D.** không giới hạn.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=(2x+8)(1-x)$

Phương trình $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$ và $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$2x+8$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)>0 \Leftrightarrow -4<x<1 \Leftrightarrow x\in(-4;1)$.

Khi đó $b=1,\ a=-4 \Rightarrow b-a=5$.

Câu 2: Tập nghiệm $S=(-4;5)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $(x+4)(x+5)<0.$ **B.** $(x+4)(5x-25)<0.$

C. $(x+4)(5x-25)\geq 0.$ **D.** $(x-4)(x-5)<0.$

Lời giải

Chọn B

Phương trình $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$ và $x+5=0\Leftrightarrow x=-5.$

Phương trình $x-4=0\Leftrightarrow x=4$ và $5x-25=0\Leftrightarrow x-5=0\Leftrightarrow x=5.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-4		4		5		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+4)(x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x+4)(x-5)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x-4)(x-5)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S=(-4;5)$ là nghiệm của bất phương trình $(x+4)(5x-25)<0.$

Câu 3: Tập nghiệm $S=[0;5]$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $x(x-5)<0.$ **B.** $x(x-5)\leq 0.$ **C.** $x(x-5)\geq 0.$ **D.** $x(x-5)>0.$

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x(x-5).$

Phương trình $x=0$ và $x-5=0\Leftrightarrow x=5.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $x \in [0;5] \Leftrightarrow f(x) \le 0 \Leftrightarrow x(x-5) \le 0$.

Câu 4: Tập nghiệm $S = (-\infty;3) \cup (5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

A. $(x+3)(x-5)(14-2x) \le 0$. **B.** $(x-3)(x-5)(14-2x) > 0$.

C. $(x-3)(x-5)(14-2x) < 0$. **D.** $(x+3)(x-5)(14-2x) < 0$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$; $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$. Và $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$; $14-2x=0 \Leftrightarrow x=7$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		3		5		7		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$		$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	|	$-$	0	$+$		$+$	
$14-2x$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+3)(x-5)(14-2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-3)(x-5)(14-2x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Từ bảng xét dấu ta thấy tập nghiệm $S = (-\infty;3) \cup (5;7)$ là tập nghiệm của bất phương trình $(x-3)(x-5)(14-2x) > 0$.

Câu 5: Hỏi bất phương trình $(2-x)(x+1)(3-x) \le 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = (2-x)(x+1)(3-x)$

Phương trình $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$; $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $3-x=0 \Leftrightarrow x=3$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$2-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	

$x+1$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$
$3-x$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;3]$.

Vậy bất phương trình đã cho có 2 nghiệm nguyên dương.

Câu 6: Tích của nghiệm nguyên âm lớn nhất và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1)>0$ là

A. -9. **B.** -6. **C.** -4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $(3x-6)(x-2)(x+2)(x-1)>0 \Leftrightarrow 3(x-2)^2(x+2)(x-1)>0$

Vì $(x-2)^2>0,\ \forall x\ne 2$ nên bất phương trình trở thành $\begin{cases} x\ne 2 \\ (x+2)(x-1)>0 \end{cases}$.

Đặt $f(x)=(x+2)(x-1)$. Phương trình $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$ và $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

Kết hợp với điều kiện $x\ne 2$, ta được $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$.

Do đó, nghiệm nguyên âm lớn nhất của bất phương trình là -3 và nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của bất phương trình là 3. Vậy tích cần tính là $(-3).3=-9$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $2x(4-x)(3-x)(3+x)>0$ là

A. Một khoảng **B.** Hợp của hai khoảng.

C. Hợp của ba khoảng. **D.** Toàn trục số.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=2x(4-x)(3-x)(3+x)$.

Phương trình $2x=0 \Leftrightarrow x=0;\;\; 4-x=0 \Leftrightarrow x=4;$

Và $3-x=0 \Leftrightarrow x=3;\;\; 3+x=0 \Leftrightarrow x=-3.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		0		3		4		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3-x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$4-x$		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ 0<x<3 \\ x<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(0;3)\cup(4;+\infty).$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình là hợp của ba khoảng.

Câu 8: Nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)}\ge 0$ là

A. $x=-2.$ **B.** $x=0.$ **C.** $x=1.$ **D.** $x=2.$

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $(x-1)\sqrt{x(x+2)}\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x(x+2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x(x+2)\ge 0 \end{cases}.$

Đặt $f(x)=x(x+2)$.

Phương trình $x=0$ và $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -2 \end{array}\right..$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 1,$ ta được tập nghiệm $S=[1;+\infty).$

Vậy nghiệm nguyên nhỏ nhất thỏa mãn bất phương trình là $x=1.$

Dạng 3. Bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Bất phương trình $\frac{3}{2-x}<1$ có tập nghiệm là

A. $S=(-1;2)$. **B.** $S=[-1;2)$.

C. $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\frac{3}{2-x}<1 \Leftrightarrow \frac{3}{2-x}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x}<0$.

Đặt $f(x)=\frac{x+1}{2-x}$. Ta có $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $2-x=0 \Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Ví dụ 2: Bất phương trình $\frac{3}{1-x}\geq\frac{5}{2x+1}$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{11};1\right)$. **B.** $S=\left(-\frac{1}{2};\frac{2}{11}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{11};1\right)$. **D.** $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{11};1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $\frac{3}{1-x}\geq\frac{5}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{11x-2}{(1-x)(2x+1)}\geq 0$.

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{11x-2}{\left(1-x\right)\left(2x+1\right)}$. Ta có $11x-2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{11}$; $\begin{cases}1-x=0\Leftrightarrow x=1\\2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{2}{11}$		1		$+\infty$
$11x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f\left(x\right)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f\left(x\right)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{1}{2}\\\dfrac{2}{11}\leq x<1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2}{11};1\right)$.

Ví dụ 3: Bất phương trình $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\leq 2$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-1;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left(1;+\infty\right)$.

B. $S=\left(-\infty;-1\right]\cup\left(1;+\infty\right)$.

C. $S=\left(-1;\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

D. $S=\left(-\infty;-1\right]\cup\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\leq 2\Leftrightarrow\dfrac{1-3x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}\leq 0$.

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{1-3x}{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}$. Ta có $1-3x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$; $\begin{cases}x-1=0\Leftrightarrow x=1\\x+1=0\Leftrightarrow x=-1\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$1-3x$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	

$x+1$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$
$f(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x\le \frac{1}{3} \\ x>1 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-1;\frac{1}{3}\right]\cup(1;+\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Bất phương trình $\frac{2-x}{2x+1}\ge 0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $S=\left[-\frac{1}{2};2\right]$. **C.** $S=\left(-\frac{1}{2};2\right]$. **D.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có Đặt $f(x)=\frac{2-x}{2x+1}$. Ta có $2-x=0\Leftrightarrow x=2$ và $2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$2x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy rằng $f(x)\ge 0\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x\le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{1}{2};2\right]$.

Câu 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{(3-x)(x-2)}{x+1}\le 0$ là

A. $S=(-1;2]\cup[3;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1)\cup[2;3]$.

C. $S=[-1;2]\cup[3;+\infty)$. **D.** $S=(-1;2)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x)=\frac{(3-x)(x-2)}{x+1}$. Ta có $\begin{cases}3-x=0\Leftrightarrow x=3\\ x-2=0\Leftrightarrow x=2\end{cases}$; $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
$3-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le 2\\ x\ge 3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;2]\cup[3;+\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2+x-3}{x^2-4}\ge 1$ là

A. $S=(-\infty;-2)\cup(-1;2)$.

B. $S=(-2;1]\cup(2;+\infty)$.

C. $S=[-2;1)\cup(2;+\infty)$

D. $S=(-2;1]\cup[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\frac{x^2+x-3}{x^2-4}\ge 1\Leftrightarrow\frac{x^2+x-3}{x^2-4}-1\ge 0\Leftrightarrow\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}\ge 0$.

Đặt $f(x)=\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}$. Ta có $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ và $(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x\le -1\\ x>2\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;-1]\cup(2;+\infty)$.

Câu 4: Bất phương trình $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}<\frac{3}{x+3}$ có tập nghiệm là

A. $S=(-\infty;-12)\cup(-4;3)\cup(0;+\infty)$.
B. $S=[-12;-4)\cup(-3;0)$.

C. $S=(-\infty;-12)\cup[-4;3]\cup(0;+\infty)$.
D. $S=(-12;-4)\cup(-3;0)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $\frac{1}{x}+\frac{2}{x+4}<\frac{3}{x+3}\Leftrightarrow\frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}<0$.

Đặt $f(x)=\frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}$. Ta có $x+12=0\Leftrightarrow x=-12$; $\begin{cases}x+3=0\Leftrightarrow x=-3\\x+4=0\Leftrightarrow x=-4\end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-12		-4		-3		0		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	‖	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-12<x<-4\\-3<x<0\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-12;-4)\cup(-3;0)$.

Câu 5: Bất phương trình $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{(x-1)^2}$ có tập nghiệm S là

A. $T=(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup[1;3]$.
B. $T=[-1;0)\cup(-3;+\infty)$.

C. $T=(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;3)$.
D. $T=(-1;0]\cup(-3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x-1)^2}<0$.

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2-(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}<0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-3)}{(x+1)(x-1)^2}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \dfrac{x(x-3)}{x+1}<0 \end{cases}$ (vì $(x-1)^2>0, \forall x\in\mathbb{R}$).

Đặt $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{x+1}$. Ta có $x-3=0\Leftrightarrow x=3$ và $x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$-$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 0<x<3 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x\neq 1,$ ta được tập nghiệm $S=(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(1;3)$.

Câu 6: Bất phương trình $\dfrac{x+4}{x^2-9}-\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{4x}{3x-x^2}$ có nghiệm nguyên lớn nhất là

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương với

$$\frac{x(x+4)}{x(x-3)(x+3)}-\frac{2x(x-3)}{x(x-3)(x+3)}<-\frac{4x(x+3)}{x(x-3)(x+3)}\Leftrightarrow \frac{3x+22}{(x-3)(x+3)}<0.$$

Đặt $f(x)=\dfrac{3x+22}{(x-3)(x+3)}$. Ta có $3x+22=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{22}{3};\begin{cases} x-3=0\Leftrightarrow x=3 \\ x+3=0\Leftrightarrow x=-3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{22}{3}$		-3		3		$+\infty$
$3x+22$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$-$	|	$+$	|	$+$	

$f(x)$	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $f(x)<0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;-\dfrac{22}{3}\right)\cup(-3;3)$.

Vậy nghiệm nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình là $x=2$.

Dạng 4. Bất phương trình chứa trị tuyệt đối

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Nghiệm của bất phương trình $|2x-3|\le 1$ là

A. $1\le x\le 3$. **B.** $-1\le x\le 1$. **C.** $1\le x\le 2$. **D.** $-1\le x\le 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|2x-3|\le 1 \Leftrightarrow -1\le 2x-3\le 1 \Leftrightarrow 2\le 2x\le 4 \Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Ví dụ 2: Bất phương trình $|1-3x|>2$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|1-3x|>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-3x>2\\1-3x<-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1>3x\\3x>3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{1}{3}\\x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Ví dụ 3: Bất phương trình: $|3x-3|\le|2x+1|$ có nghiệm là

A. $[4;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{2}{5}\right]$. **C.** $\left[\dfrac{2}{5};4\right]$. **D.** $(-\infty;4]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|3x-3|\le|2x+1| \Leftrightarrow |3x-3|^2\le|2x+1|^2 \Leftrightarrow (3x-3)^2-(2x+1)^2\le 0$

$\Leftrightarrow (3x-3-2x-1)(3x-3+2x+1)\le 0 \Leftrightarrow (x-4)(5x-2)\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}\le x\le 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\dfrac{2}{5};4\right]$.

Ví dụ 4: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{|x-1|}{x+2}<1$ là

A. $S=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

C. $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **D.** $S=\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$.

TH1. Với $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1,$ ta có $\frac{|x-1|}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{x-1}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{3}{x+2}>0\Leftrightarrow x>-2.$

Kết hợp với điều kiện $x\geq 1,$ ta được tập nghiệm $S_1=(1;+\infty)$.

TH2. Với $x-1<0\Leftrightarrow x<1,$ ta có $\frac{|x-1|}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{1-x}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x+2}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>-\frac{1}{2}\\x<-2\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x<1,$ ta được tập nghiệm là $S_2=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=(-\infty;-2)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 5: Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $x+12\geq|2x-4|$ là

A. 5. **B.**19 **C.** 11. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

TH1. Với $2x-4\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2,$ ta có $x+12\geq|2x-4|\Leftrightarrow x+12\geq 2x-4\Leftrightarrow x\leq 16.$

Kết hợp với điều kiện $x\geq 2,$ ta được tập nghiệm $S_1=[2;16]$.

TH2. Với $2x-4<0\Leftrightarrow x<2,$ ta có $x+12\geq -2x+4\Leftrightarrow 3x\geq -8\Leftrightarrow x\geq -\frac{8}{3}.$

Kết hợp với điều kiện $x<2,$ ta được tập nghiệm $S_2=\left[-\frac{8}{3};2\right)$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=\left[-\frac{8}{3};16\right]$.

Vậy số nghiệm nguyên x thỏa mãn bất phương trình là 19.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tất cả các giá trị của x thoả mãn $|x-1|<1$ là

A. $-2<x<2$. **B.** $0<x<1$. **C.** $x<2$. **D.** $0<x<2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|x-1|<1 \Leftrightarrow -1<x-1<1 \Leftrightarrow 0<x<2.$

Câu 2: Bất phương trình $|3x-4|\le 2$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty).$ **B.** $\left[\frac{2}{3};2\right].$ **C.** $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right].$ **D.** $[2;+\infty).$

Lời giải

Chọn B

Ta có $|3x-4|\le 2 \Leftrightarrow -2\le 3x-4\ge 2 \Leftrightarrow 2\le 3x\le 6 \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x\le 2.$

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $|x-3|>-1$ là

A. $(3;+\infty).$ **B.** $(-\infty;3).$ **C.** $(-3;3).$ **D.** $\mathbb{R}.$

Lời giải

Chọn D

Vì $|x-3|\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên suy ra $|x-3|>-1,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}.$

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $|5x-4|\ge 6$ có dạng $S=(-\infty;a]\cup[b;+\infty).$ Tính tổng $P=5a+b.$

A. $1.$ **B.** $2.$ **C.** $0.$ **D.** $3.$

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Bất phương trình $|5x-4|\ge 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x-4\ge 6\\5x-4\le -6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x\ge 10\\5x\le -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le -\frac{2}{5}\end{array}\right..$

Cách 2. TH1. Với $5x-4\ge 0,$ bất phương trình $|5x-4|\ge 6 \Leftrightarrow 5x-4\ge 6 \Leftrightarrow x\ge 2.$

TH2. Với $5x-4<0,$ bất phương trình $|5x-4|\ge 6 \Leftrightarrow -5x+4\ge 6 \Leftrightarrow 5x\le -2 \Leftrightarrow x\le -\frac{2}{5}.$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup[2;+\infty).$

Mặt khác $S=(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$ suy ra $\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=2\end{cases} \Rightarrow 5a+b=5.\left(-\frac{2}{5}\right)+2=0.$

Câu 5: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x thỏa mãn bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right|\ge 2$?

A. $1.$ **B.** $2.$ **C.** $4.$ **D.** $3.$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$.

Bất phương trình $\left|\frac{2-x}{x+1}\right|\geq 2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2-x}{x+1}\geq 2\\ \frac{2-x}{x+1}\leq -2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2-x}{x+1}-2\geq 0\\ \frac{2-x}{x+1}+2\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}-\frac{3x}{x+1}\geq 0 & (1)\\ \frac{4+x}{x+1}\leq 0 & (2)\end{array}\right.$

Giải (1), ta có bất phương trình $(1)\Leftrightarrow \frac{x}{x+1}\leq 0\Leftrightarrow -1<x\leq 0$.

Giải (2), ta có bất phương trình $(2)\Leftrightarrow -4\leq x<-1$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;-1)\cup(-1;0]$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên x cần tìm là $x=\{-4;-3;-2;0\}$.

Câu 6: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $1\leq|x-2|\leq 4$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $1\leq|x-2|\leq 4\Leftrightarrow \begin{cases}|x-2|\leq 4\\ |x-2|\geq 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-4\leq x-2\leq 4\\ \left[\begin{array}{l}x-2\geq 1\\ x-2\leq -1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-2\leq x\leq 6\\ \left[\begin{array}{l}x\geq 3\\ x\leq 1\end{array}\right.\end{cases}$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;1]\cup[3;6]$.

Vậy số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình là 8.

Câu 7: Bất phương trình $|x-3|>|2x+4|$ có nghiệm là

A. $\left(-7;\frac{1}{3}\right)$.

B. $\left(7;-\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-7;-\frac{1}{3}\right)$.

D. $(-\infty;-7)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|x-3|>|2x+4|\Leftrightarrow|x-3|^2>|2x+4|^2\Leftrightarrow(x-3)^2-(2x+4)^2>0$

$\Leftrightarrow(x-3-2x-4)(x-3+2x+4)>0\Leftrightarrow(-x-7)(3x+1)>0\Leftrightarrow -7<x<-\frac{1}{3}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-7;-\frac{1}{3}\right)$.

Câu 8: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên x trong $[-2017;2017]$ thỏa mãn bất phương trình

$|2x+1|<3x$?

A. 2016. **B.** 2017. **C.** 4032. **D.** 4034.

Lời giải

Chọn A

TH1. Với $2x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$, khi đó $|2x+1|<3x \Leftrightarrow 2x+1<3x \Leftrightarrow x>1$.

Kết hợp với điều kiện $x\ge -\frac{1}{2}$ suy ra $S_1=(1;+\infty)$.

TH2. Với $2x+1<0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$, khi đó $|2x+1|<3x \Leftrightarrow -2x-1<3x \Leftrightarrow x>-\frac{1}{5}$.

Kết hợp với điều kiện $x<-\frac{1}{2}$ suy ra $S_2=\varnothing$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=(1;+\infty)$.

Câu 9: Bất phương trình $|3x-4|\ge x-3$ có nghiệm là

A. $\left(-\infty;\frac{7}{4}\right]$. **B.** $\left[\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right]$. **C.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|3x-4|\ge x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-4\ge x-3\\ 3x-4\le -(x-3)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x\ge 1\\ 4x\le 7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge \frac{1}{2}\\ x\le \frac{7}{4}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right]$.

Câu 10: Nghiệm của bất phương trình $\frac{|x+2|-x}{x}\le 2$ là

A. $(0;1]$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

C. $(-\infty;0)\cup[1;+\infty)$. **D.** $[0;1]$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x\ne 0$.

TH1. Với $x+2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -2$, ta có

$\frac{|x+2|-x}{x}\le 2 \Leftrightarrow \frac{x+2-x}{x}\le 2 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x<0\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq -2,$ ta được tập nghiệm $S_1 = (-2;0) \cup [1;+\infty).$

TH2. Với $x+2<0 \Leftrightarrow x<-2,$ ta có $\dfrac{|x+2|-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{-x-2-x}{x} \leq 2 \Leftrightarrow -\dfrac{2x+2}{x} \leq 2$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x+1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 1+\dfrac{x+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x \leq -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x<-2,$ ta được tập nghiệm là $S_2 = \left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right].$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty;0) \cup [1;+\infty).$

Câu 11: Số nghiệm nguyên thỏa mãn bất phương trình $|x+2|+|-2x+1| \leq x+1$ là

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Ta có Xét bất phương trình $|x+2|+|-2x+1| \leq x+1$ $(*)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-2x+1$		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	

TH1. Với $x<-2,$ khi đó $(*) \Leftrightarrow (-x-2)+(-2x+1) \leq x+1 \Leftrightarrow -2 \leq 4x \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x<-2,$ ta được tập nghiệm $S_1 = \varnothing.$

TH2. Với $-2 \leq x < -\dfrac{1}{2},$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x+2-2x+1 \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1.$

Kết hợp với điều kiện $-2 \leq x < \dfrac{1}{2},$ ta được tập nghiệm $S_2 = \varnothing.$

TH3. Với $x \geq \dfrac{1}{2},$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x+2-(-2x+1) \leq x+1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0.$

Kết hợp với điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2},$ ta được tập nghiệm $S_3 = \varnothing.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \varnothing.$

Câu 12: Bất phương trình $|x+2|-|x-1| < x-\dfrac{3}{2}$ có tập nghiệm là

A. $(-2;+\infty).$ **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$ **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right).$ **D.** $\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right).$

Lời giải

Chọn D

Xét bất phương trình $|x+2|-|x-1|\le x-\dfrac{3}{2}$ $\qquad(*)$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	

TH1. Với $x<-2,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -x-2+x-1<x-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x<-2,$ ta được tập nghiệm $S_1=\varnothing.$

TH2. Với $-2\le x<1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+2+x-1<x-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x<-\dfrac{5}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $-2\le x<1,$ ta được tập nghiệm $S_2=\varnothing.$

TH3. Với $x\ge 1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow x+2-x+1<x-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow x>\dfrac{9}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 1,$ ta được tập nghiệm $S_3=\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right).$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2\cup S_3=\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right).$

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $|x+1|-|x-2|\ge 3$ là

A. $[-1;2].$ **B.** $[2;+\infty).$ **C.** $(-\infty;-1).$ **D.** $(-2;1).$

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $|x+1|-|x-2|\ge 3$ $\qquad(*)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$ $+\infty$		-1		2	
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$

TH1. Với $x<-1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -x-1+x-2\ge 3\Leftrightarrow -3\ge 3$ (vô lý) suy ra $S_1=\varnothing.$

TH2. Với $-1 \le x < 2,$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1+x-2 \ge 3 \Leftrightarrow 2x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 2.$

Kết hợp với điều kiện $-1 \le x < 2,$ ta được tập nghiệm $S_2 = \varnothing.$

TH3. Với $x \ge 2,$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x+1-x+2 \ge 3 \Leftrightarrow 3 \ge 3$ (luôn đúng).

Kết hợp với điều kiện $x \ge 2,$ ta được tập nghiệm $S_3 = [2;+\infty).$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [2;+\infty).$

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right|$ là

A. một khoảng. **B.** hai khoảng. **C.** ba khoảng. **D.** toàn trục số.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x \ne -2 \\ x \ne 1 \end{cases}.$

Bất phương trình $\left|\dfrac{-5}{x+2}\right| < \left|\dfrac{10}{x-1}\right| \Leftrightarrow \dfrac{1}{|x+2|} < \dfrac{2}{|x-1|} \Leftrightarrow |x-1| - 2|x+2| < 0 \qquad (*).$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	

TH1. Với $x < -2,$ khi đó $(*) \Leftrightarrow -x+1+2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x < -5.$

Kết hợp với điều kiện $x < -2,$ ta được tập nghiệm $S_1 = (-\infty;-5).$

TH2. Với $-2 < x < 1,$ khi đó $(*) \Leftrightarrow -x+1-2(x+2) < 0 \Leftrightarrow 3x > -3 \Leftrightarrow x > -1.$

Kết hợp với điều kiện $-2 < x < 1,$ ta được tập nghiệm $S_2 = (-1;1).$

TH3. Với $x > 1$ khi đó $(*) \Leftrightarrow x-1-2(x+2) < 0 \Leftrightarrow x > -5.$

Kết hợp với điều kiện $x > 1,$ ta được tập nghiệm $S_3 = (1;+\infty).$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty;-5) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty).$

Câu 15: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right| \le 1$ là

A. $1.$ **B.** $2.$ **C.** $0.$ **D.** $3.$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1.$

TH1. Với $x\geq 0,$ ta có $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right|\leq 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{2-3x}{x+1}\right|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq\dfrac{2-3x}{x+1}\leq 1\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\leq x\leq\dfrac{3}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x\geq 0,$ ta được tập nghiệm $S_1=\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{2}\right].$

TH2. Với $x<0,$ ta có $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right|\leq 1\Leftrightarrow\left|\dfrac{2+3x}{x+1}\right|\leq 1\Leftrightarrow -1\leq\dfrac{2+3x}{x+1}\leq 1\Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}\leq x\leq -\dfrac{1}{2}.$

Kết hợp với điều kiện $x<0,$ ta được tập nghiệm $S_2=\left[-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2}\right].$

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2}\right].$

Vậy số nghiệm nguyên x cần tìm là 1 $(x=1).$

BÀI 4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là $ax+by\le c$ $(ax+by<c, ax+by\ge c; ax+by>c)$

trong đó a,b,c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng $0, x$ và y là các ẩn số.

II – BIỂU DIỄN TẬP NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Cũng như bất phương trình bậc nhất một ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn thường có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của chúng, ta sử dụng phương pháp biểu diễn hình học.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Từ đó ta có quy tắc thực hành biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax+by\le c$ như sau

Bước 1. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ đường thẳng $\Delta: ax+by=c$

Bước 2. Lấy một điểm $M_0\left(x_0; y_0\right)$ không thuộc Δ

Bước 3. Tính ax_0+by_0 và so sánh ax_0+by_0 với c

Bước 4. Kết luận

Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c$

Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0+by_0\le c$

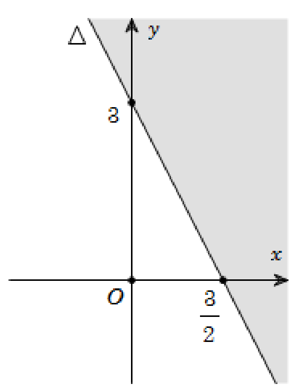
Chú ý:

Miền nghiệm của bất phương trình $ax_0+by_0\le c$ bỏ đi đường thẳng $ax+by=c$ là miền nghiệm của bất phương trình $\alpha x_0+by_0<c$

Ví dụ. Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $2x+y\le 3$

Giải

Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x+y=3$



Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$ ta thấy $O \notin \Delta$ và có $2.0+0<3$ nên nửa mặt phẳng bờ Δ chứa gốc tọa độ 0 là miền nghiệm của bất phương trình đã cho .

III – HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn

Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm các nghiệm chung của chúng. Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

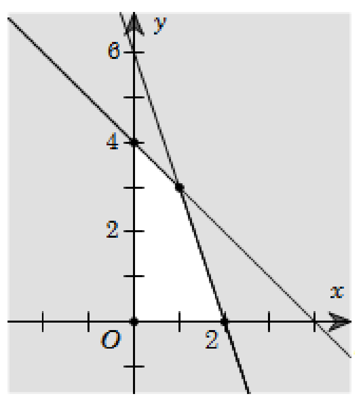
Cũng như bất phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 2. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y \le 6 \\ x+y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Giải.

Vẽ các đường thẳng

$d_1 : 3x+y=6$
$d_2 : x+y=4$
$d_2 : x=0 \quad (Oy)$
$d_2 : y=0 \quad (Ox)$



Vì điểm $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ (d_1) (d_2) (d_3) (d_4) không chứa điểm M_0 Miền không bị tô đậm trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho.

IV – ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ

Giải một số bài toán kinh tế thường dẫn đến việc xét những hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và giải chúng. Loại bài toán này được nghiên cứu trong một ngành toán học có tên gọi là Quy hoạch tuyến tính.

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $2x-5y+3z\le 0$. **B.** $3x^2+2x-4>0$. **C.** $2x^2+5y>3$. **D.** $2x+3y<5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo định nghĩa bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Ví dụ 2. Cặp số $(1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình

A. $x+4y<1$. **B.** $x+y-2>0$. **C.** $-x-y<0$. **D.** $-x-3y-1<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $1+4(-1)=-3<1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

A. $2x^2+3y>0$ **B.** $x^2+y^2<2$ **C.** $x+y^2\ge 0$ **D.** $x+y\ge 0$

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa thì $x+y\ge 0$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Các bất phương trình còn lại là bất phương trình bậc hai.

Câu 2. Cho bất phương trình $2x+3y-6\le 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Bất phương trình (1) chỉ có một nghiệm duy nhất.

B. Bất phương trình (1) vô nghiệm.

C. Bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

D. Bất phương trình (1) có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Trên mặt phẳng tọa độ, đường thẳng $(d): 2x+3y-6=0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng.

Chọn điểm $O(0;0)$ không thuộc đường thẳng đó. Ta thấy $(x;y)=(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ (d) chứa điểm $O(0;0)$ kể cả (d).

Vậy bất phương trình (1) luôn có vô số nghiệm.

Câu 3. Miền nghiệm của bất phương trình: $3x+2(y+3)\geq 4(x+1)-y+3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(3;0)$ **B.** $(3;1)$ **C.** $(2;1)$ **D.** $(0;0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $3x+2(y+3)\geq 4(x+1)-y+3 \Leftrightarrow -x+3y-1\geq 0$.

Vì $-2+3.1-1>0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(2;1)$.

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình: $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$ là nửa mặt phẳng chứa điểm:

A. $(0;0)$ **B.** $(-4;2)$ **C.** $(-2;2)$ **D.** $(-5;3)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $3(x-1)+4(y-2)<5x-3 \Leftrightarrow -2x+4y-8<0$.

Vì $-2.0+4.0-8<0$ là mệnh đề đúng nên miền nghiệm của bất phương trình trên chứa điểm có tọa độ $(0;0)$.

Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ là nửa mặt phẳng **không** chứa điểm nào trong các điểm sau?

A. $(0;0)$ **B.** $(1;1)$ **C.** $(4;2)$ **D.** $(1;-1)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x+2+2(y-2)<2(1-x) \Leftrightarrow x+2y<4$.

Vì $-4+2.2<4$ là mệnh đề sai nên $(-4;2)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 6. Trong các cặp số sau đây, cặp nào không thuộc nghiệm của bất phương trình: $x-4y+5>0$

A. $(-5;0)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(0;0)$ **D.** $(1;-3)$

Lời giải

Chọn A

Vì $-5-4.0+5>0$ là mệnh đề sai nên $(-5;0)$ không thuộc miền nghiệm của bất phương trình.

Câu 7. Điểm $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình:

A. $-3x+2y-4>0$ **B.** $x+3y<0$ **C.** $3x-y>0$ **D.** $2x-y+4>0$

Lời giải

Chọn A

Vì $-3.(-1)+2.3-4>0$ là mệnh đề đúng nên $A(-1;3)$ là điểm thuộc miền nghiệm của bất phương trình $-3x+2y-4>0$.

Câu 8. Cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

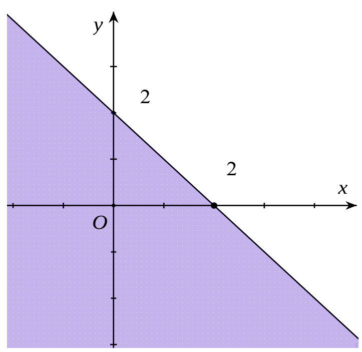
A. $2x-3y-1>0$. **B.** $x-y<0$. **C.** $4x>3y$. **D.** $x-3y+7<0$.

Lời giải

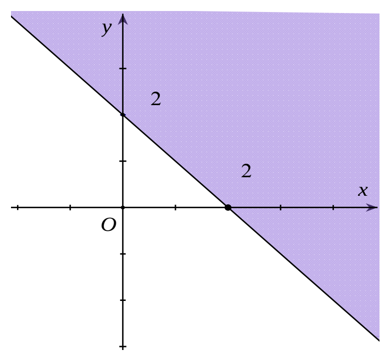
Chọn B

Vì $2-3<0$ là mệnh đề đúng nên cặp số $(2;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x-y<0$.

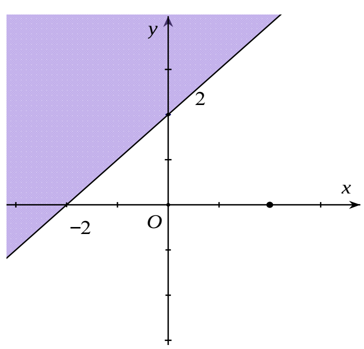
Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $x+y\le 2$ là phần **tô đậm** trong hình vẽ của hình vẽ nào, trong các hình vẽ sau?



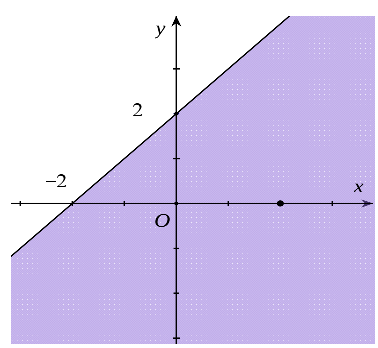
A.



B.



C.



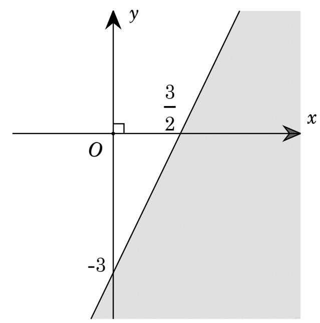
D.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng $\Delta: x+y-2=0$ đi qua hai điểm $A(2;0), B(0;2)$ và cặp số $(0;0)$ thỏa mãn bất phương trình $x-y\le 2$ nên Hình 1 biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x+y\le 2$.

Câu 10. Phần **tô đậm** trong hình vẽ sau, biểu diễn tập nghiệm của bất phương trình nào trong các bất phương trình sau?



A. $2x-y<3$ **B.** $2x-y>3$ **C.** $x-2y<3$ **D.** $x-2y>3$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng đi qua hai điểm $A\left(\frac{3}{2};0\right)$ và $B(0;-3)$ nên có phương trình $2x-y=3$.

Mặt khác, cặp số $(0;0)$ không thỏa mãn bất phương trình $2x-y>3$ nên phần tô đậm ở hình trên biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $2x-y>3$.

Dạng 2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+3y-2\ge 0 \\ 2x+y+1\le 0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $M(0;1)$ **B.** $N(-1;1)$ **C.** $P(1;3)$ **D.** $Q(-1;0)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $M(0;1)\Rightarrow \begin{cases} 0+3.1-2\ge 0 \\ 2.0+1+1\le 0 \end{cases}$. Bất phương trình thứ hai sai nên A sai.

Với $N(-1;1)\Rightarrow \begin{cases} -1+3.1-2\ge 0 \\ 2.(-1)+1+1\le 0 \end{cases}$: Đúng. **Chọn B.**

Câu 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}2x-5y-1>0\\2x+y+5>0\\x+y+1<0\end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;0)$ **C.** $N(0;-2)$ **D.** $P(0;2)$

Lời giải

Chọn C

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0)\Rightarrow\begin{cases}2.0-5.0-1>0\\2.0+0+5>0\\0+0+1<0\end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất và thứ ba sai nên A sai.

Với $M(1;0)\Rightarrow\begin{cases}2.1-5.0-1>0\\2.1+0+5>0\\1+0+1<0\end{cases}$. Bất phương trình thứ ba sai nên B sai.

Với $N(0;-3)\Rightarrow\begin{cases}2.0-5.(-3)-1>0\\2.0+(-2)+5>0\\0+(-2)+1<0\end{cases}$: Đúng. **Chọn C.**

Câu 3. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1\geq 0\\x\geq 0\\x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3y}{2}\leq 2\end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(2;1)$ **C.** $N(1;1)$ **D.** $P(5;1)$

Lời giải

Chọn B

Ta thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Với $O(0;0)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{0}{2}+\dfrac{0}{3}-1\geq 0\\0\geq 0\\0+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3.0}{2}\leq 2\end{cases}$. Bất phương trình thứ nhất sai nên A sai.

Với $M(2;1)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{3}-1\geq 0\\2\geq 0\\2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3.1}{2}\leq 2\end{cases}$: Đúng. **Chọn B.**

Câu 4. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 3x+y\ge 9 \\ x\ge y-3 \\ 2y\ge 8-x \\ y\le 6 \end{cases}$ chứa điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;2)$ **C.** $N(2;1)$ **D.** $P(8;4)$

Lời giải

Chọn D

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

Câu 5. Điểm $M(0;-3)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trìnhnào sau đây?

A. $\begin{cases} 2x-y\le 3 \\ 2x+5y\le 12x+8 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 2x-y>3 \\ 2x+5y\le 12x+8 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} 2x-y>-3 \\ 2x+5y\le 12x+8 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} 2x-y\le -3 \\ 2x+5y\ge 12x+8 \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Thay tọa độ $M(0;-3)$ lần lượt vào từng hệ bất phương trình.

Câu 6. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$. Trong các điểm sau, điểm nào không thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình?

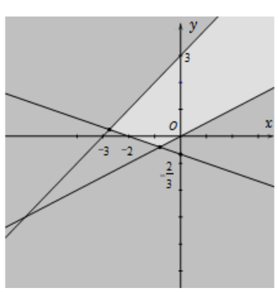
A. $O(0;0)$ **B.** $M(1;1)$ **C.** $N(-1;1)$ **D.** $P(-1;-1)$

Lời giải

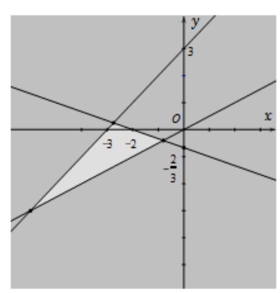
Chọn C

Thay lần lượt tọa độ các điểm vào hệ bất phương trình.

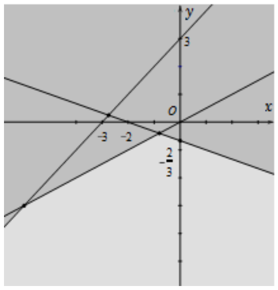
Câu 7. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ y-x<3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



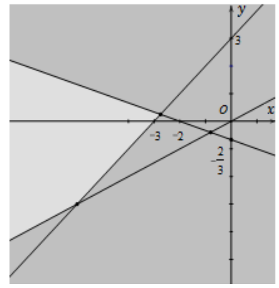
A.



B.



C.



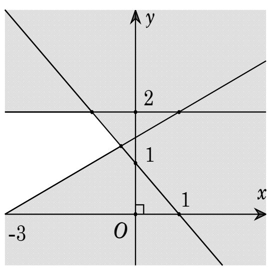
D.

Lời giải

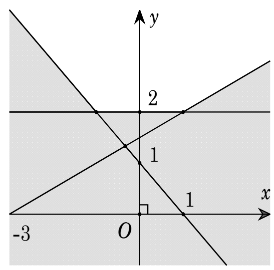
Chọn A

Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

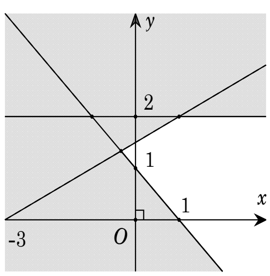
Câu 8. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-1>0 \\ y \geq 2 \\ -x+2y>3 \end{cases}$ là phần không tô đậm của hình vẽ nào trong các hình vẽ sau?



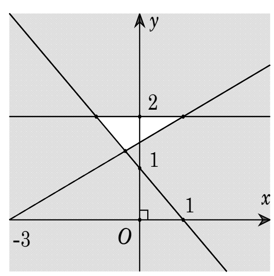
A.



B.



C.



D.

Lời giải

Chọn B

Chọn điểm $M(0;4)$ thử vào các bất phương trình của hệ thấy thỏa mãn.

Câu 9. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?

Lời giải

Chọn B

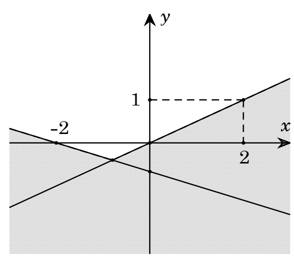
A. $\begin{cases} x-y\ge 0 \\ 2x-y\ge 1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x-y>0 \\ 2x-y>1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x-y<0 \\ 2x-y>1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x-y<0 \\ 2x-y<1 \end{cases}$

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án **A.**

Chọn điểm $M(1;0)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 1-0>0 \\ 2.1-0>1 \end{cases}$: Đúng và miền nghiệm không chứa biên.

Câu 10. Phần không tô đậm trong hình vẽ dưới đây , biểu diễn tập nghiệm của hệ bất phương trình nào trong các hệ bất phương trình sau?



A. $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\ge -2 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x-2y>0 \\ x+3y<-2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} x-2y\le 0 \\ x+3y\le -2 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Do miền nghiệm không chứa biên nên ta loại đáp án A và **C.** Chọn điểm $M(0;1)$ thử vào các hệ bất phương trình.

Xét đáp án B, ta có $\begin{cases} 0-2.1>0 \\ 0+3.1<-2 \end{cases}$: Sai.

Dạng 3. Bài toán tối ưu

1. Phương pháp

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x,y)=ax+by$ với $(x;y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

Bước 1: Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.

Bước 2: Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

Bước 3: Kết luận:

- Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.

• Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \le 2 \\ 2y - x \ge 4 \\ x + y \le 5 \end{cases}$ là

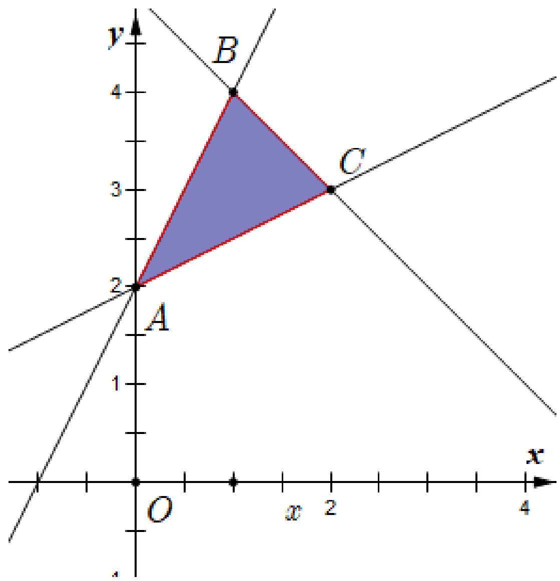
A. $\min F = 1$ khi $x = 2$, $y = 3$. **B.** $\min F = 2$ khi $x = 0$, $y = 2$.

C. $\min F = 3$ khi $x = 1$, $y = 4$. **D.** $\min F = 0$ khi $x = 0$, $y = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y - 2x \le 2 \\ 2y - x \ge 4 \\ x + y \le 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên



Ta thấy $F = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C.

Tại $A(0;2)$ thì $F = 2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F = 3$

Tại $A(2;3)$ thì $F = 1$.

Vậy $\min F = 1$ khi $x = 2$, $y = 3$.

Ví dụ 2 : Giá trị nhỏ nhất $F_{\min}$ của biểu thức $F(x;y) = 4x + 3y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases}$

là

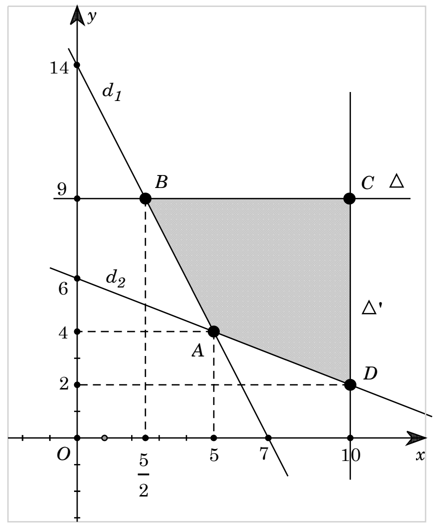
A. $F_{\min}=23$ **B.** $F_{\min}=26$ **C.** $F_{mim}=32$ **D.** $F_{\min}=67$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng

$d_1: 2x+y-14=0,\quad d_2: 2x+5y-30=0,\quad \Delta: y=9,\quad \Delta': x=10.$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $A(5;4)$, $B\left(\frac{5}{2};9\right)$, $C(10;9)$, $D(10;2)$.

Ta có $\begin{cases} F(5;4)=32 \\ F\left(\frac{5}{2};9\right)=37 \\ F(10;9)=67 \\ F(10;2)=46 \end{cases} \longrightarrow F_{\min}=32.$

Ví dụ 3: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

● Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;

● Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

A. 5 lít nước cam và 4 lít nước táo. **B.** 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.

C. 4 lít nước cam và 5 lít nước táo. **D.** 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Lời giải

Chọn C

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế.

Suy ra $30x+10y$ là số gam đường cần dùng;

$x+y$ là số lít nước cần dùng;

$x+4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 30x+10y\le 210 \\ x+y\le 9 \\ x+4y\le 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 3x+y\le 21 \\ x+y\le 9 \\ x+4y\le 24 \end{cases}$. $(*)$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P=60x+80y$.

Ta đi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P với $x,\ y$ thỏa mãn $(*)$.

Ví dụ 4 : Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

● Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;

● Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

A. 30 kg loại I và 40 kg loại II. **B.** 20 kg loại I và 40 kg loại II.

C. 30 kg loại I và 20 kg loại II. **D.** 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Lời giải

Chọn B

Gọi $x\ge 0,\ y\ge 0\ (\text{kg})$ lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.

Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x+4y\le 200$.

Tổng số giờ làm việc: $30x+15y\le 1200$.

Lợi nhuận tạo thành: $L=40x+30y$.

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x\ge 0,\ \ y\ge 0$ thoả mãn hệ

$\begin{cases} 2x+4y\le 200 \\ 30x+15y\le 1200 \end{cases}$ sao cho $L=40x+30y$ đạt giá trị lớn nhất.

Vi dụ 5: Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

A. 32 triệu đồng. **B.** 35 triệu đồng. **C.** 14 triệu đồng. **D.** 30 triệu đồng.

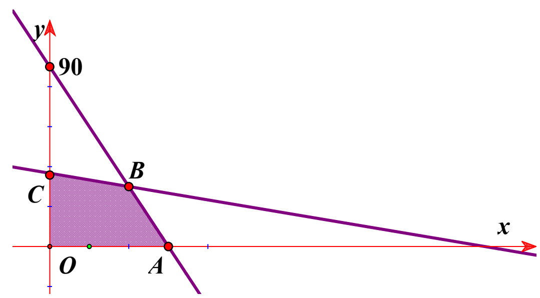
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 3x+2y \le 180 \\ x+6y \le 220 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ trên là



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T=0,5x+0,4y$.

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C. Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60;0)$ thì $T=30$ triệu đồng.

Tại $B(40;30)$ thì $T=32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

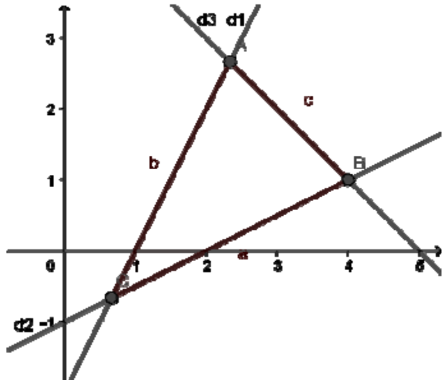
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Biểu thức $F(x;y)=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất với điều kiện $\begin{cases} 2x-y \ge 2 \\ x-2y \le 2 \\ x+y \le 5 \\ x \ge 0 \end{cases}$ tại điểm M có toạ độ là:

A. $(4;1)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};-\frac{7}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ **D.** $(5;0)$

Lời giải

Chọn A



Vẽ các đường thẳng :

$(d_1): y = 2x - 2$

$(d_2): y = \frac{1}{2}x - 1$

$(d_3): y = 5 - x$

Khi đó miền nghiệm của hệ là miền trong của tam giác ABC

Tọa độ các đỉnh: $A\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right); B(4;1); C\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$

Ta có : $F(4;1) = -3;\ F\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3} \Rightarrow F_{\min} = -3$

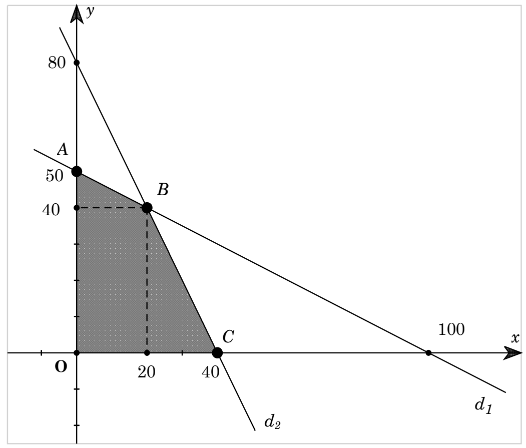
Câu 2. Cho x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x + 2y - 100 \le 0 \\ 2x + y - 80 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = (x; y) = 40000x + 30000y$

A. $P_{\max} = 2000000$ **B.** $P_{\max} = 2400000$ **C.** $P_{\max} = 1800000$ **D.** $P_{\max} = 1600000$

Lời giải

Chọn A

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d_1: x + 2y - 100 = 0,\quad d_2: 2x + y - 80 = 0.$



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là

$O(0;0)$, $A(0;50)$, $B(20;40)$, $C(40;0)$.

Ta có $\begin{cases} P(0;0)=0 \\ P(0;50)=1500000 \\ P(20;40)=2000000 \\ P(40;0)=1600000 \end{cases} \longrightarrow P_{\max}=2000000.$

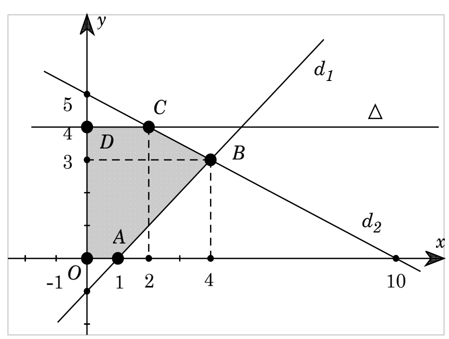
Câu 3. Giá trị lớn nhất $F_{\max}$ của biểu thức $F(x;y)=x+2y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 0\le y\le 4 \\ x\ge 0 \\ x-y-1\le 0 \\ x+2y-10\le 0 \end{cases}$ là

A. $F_{\max}=6$ **B.** $F_{\max}=8$ **C.** $F_{\max}=10$ **D.** $F_{\max}=12$

Lời giải

Chọn C

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ các đường thẳng $d_1: x-y-1=0$, $d_2: x+2y-10=0$, $\Delta: y=4$.



Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt phẳng tô màu như hình vẽ.

Xét các đỉnh của miền khép kín tạo bởi hệ là $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(4;3)$, $C(2;4)$, $D(0;4)$.

Ta có $\begin{cases} F(0;0)=0 \\ F(1;0)=1 \\ F(4;3)=10 \longrightarrow F_{\max}=10. \\ F(2;4)=10 \\ F(0;4)=8 \end{cases}$

Câu 4. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá 7,5 đồng.

A. 600 đơn vị Vitamin A, 400 đơn vị Vitamin B

B. 600 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B

C. 500 đơn vị Vitamin A, 500 đơn vị Vitamin B

D. 100 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B

Lời giải

Chọn D

Gọi $x \geq 0,\ y \geq 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có: $400 \leq x+y \leq 1000$.

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \leq 600,\ y \leq 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \leq y \leq 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x,y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0,\ y \geq 0$ thỏa mãn hệ

$\begin{cases} 0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x+y \leq 1000 \\ 0,5x \leq y \leq 3x \end{cases}$ để $T(x,y) = 9x + 7,5y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm. Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp.

Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

A. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

B. Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.

C. Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.

D. Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x \geq 0,\ y \geq 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \geq 0,\ y \geq 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$ sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.

Câu 6. Một nhà máy sản xuất, sử dụng ba loại máy đặc chủng để sản xuất sản phẩm A và sản phẩm B trong một chu trình sản xuất. Để sản xuất một tấn sản phẩm A lãi 4 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 1 giờ, máy $\mathbb{U}$ trong 2 giờ và máy MI trong 3 giờ. Để sản xuất ra một tấn sản phẩm B lãi được 3 triệu đồng người ta sử dụng máy I trong 6 giờ, máy $\mathbb{U}$ trong 3 giờ và máy MI trong 2 giờ. Biết rằng máy I chỉ hoạt động không quá 36 giờ, máy hai hoạt động không quá 23 giờ và máy MI hoạt động không quá 27 giờ. Hãy lập kế hoạch sản xuất cho nhà máy để tiền lãi được nhiều nhất.

A. Sản xuất 9 tấn sản phẩm A và không sản xuất sản phẩm B

B. Sản xuất 7 tấn sản phẩm A và 3 tấn sản phẩm B

C. Sản xuất $\dfrac{10}{3}$ tấn sản phẩm A và $\dfrac{49}{9}$ tấn sản phẩm B

D. Sản xuất 6 tấn sản phẩm B và không sản xuất sản phẩm A

Lời giải

Chọn B

Gọi $x \geq 0,\ y \geq 0$ là sản lượng cần sản xuất của sản phẩm A và sản phẩm $B.$ Ta có:

$x + 6y$ là thời gian hoạt động của máy I.

$2x + 3y$ là thời gian hoạt động của máy II.

$3x + 2y$ là thời gian hoạt động của máy III.

Số tiền lãi của nhà máy: $T = 4x + 3y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0,\ y \geq 0$ thỏa mãn $\begin{cases} x + 6y \leq 36 \\ 2x + 3y \leq 23 \\ 3x + 2y \leq 27 \end{cases}$ để $T = 4x + 3y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kiogam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất $1,6$ kg thịt bò và $1,1$ kg thịt lợn. Giá tiền một kg thịt bò là 160 nghìn đồng, một kg thịt lợn là 110 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua. Tìm x, y để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn?

A. $x=0,3$ và $y=1,1$. **B.** $x=0,3$ và $y=0,7$. **C.** $x=0,6$ và $y=0,7$. **D.** $x=1,6$ và $y=0,2$.

Hướng dẫn giải

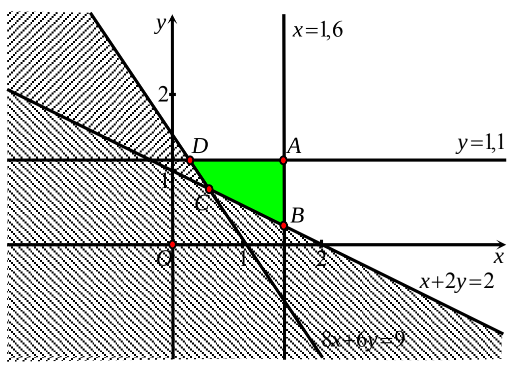
Chọn A.

Theo bài ra ta có số tiền gia đình cần trả là $160.x+110.y$ với x, y thỏa mãn: $\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \end{cases}$.

Số đơn vị protein gia đình có là $0,8.x+0,6.y \ge 0,9 \Leftrightarrow 8x+6y \ge 9 \ (d_1)$.

Số đơn vị lipit gia đình có là $0,2.x+0,4.y \ge 0,4 \Leftrightarrow x+2y \ge 2 \ (d_2)$.

Bài toán trở thành: Tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \\ 8x+6y \ge 9 \\ x+2y \ge 2 \end{cases}$ sao cho $T=160.x+110.y$ nhỏ nhất.



Vẽ hệ trục tọa độ ta tìm được tọa độ các điểm $A(1,6;1,1)$; $B(1,6;0,2)$; $C(0,6;0,7)$; $D(0,3;1,1)$.

Nhận xét: $T(A)=377$ nghìn, $T(B)=278$ nghìn, $T(C)=173$ nghìn, $T(D)=169$ nghìn.

Vậy tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn thì $x=0,6$ và $y=0,7$.

BÀI 5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ĐỊNH LÍ VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng

$f(x) = ax^2 + bx + c,$

trong đó a, b, c là những hệ số, $a \neq 0.$

2. Dấu của tam thức bậc hai

Người ta đã chứng minh được định lí về dấu tam thức bậc hai sau đây

Định lý

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0),\ \Delta = b^2 - 4ac.$

Nếu $\Delta < 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a,$ với mọi $x \in \mathbb{R}.$

Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số $a,$ trừ khi $x = -\dfrac{b}{2a}.$

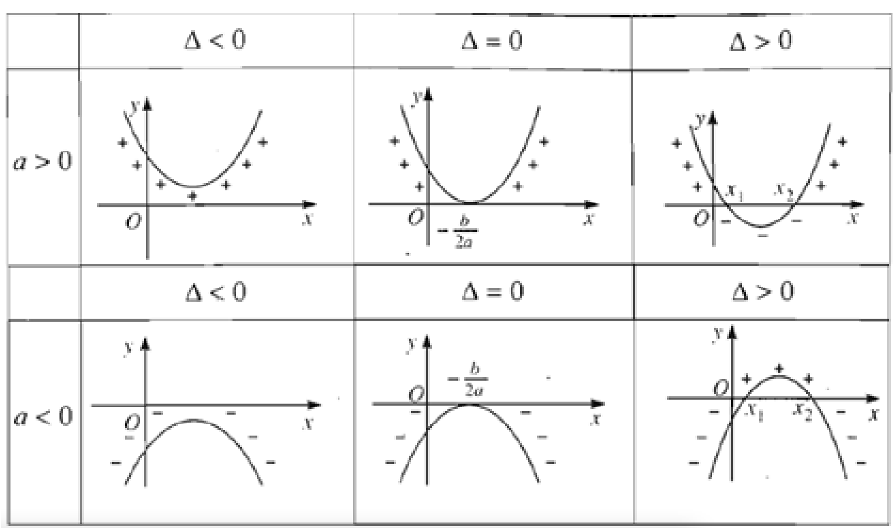
Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2,$ trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ trong đó $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$ là hai nghiệm của $f(x).$

Chú ý

Trong định lí trên, có thể thay biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ bằng biệt thức thu gọn $\Delta' = (b')^2 - ac.$

Minh họa hình học

Định lí về dấu của tam thức bậc hai có minh họa hình học sau



II – BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc hai

Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình dạng $ax^2+bx+c<0$ (hoặc $ax^2+bx+c\le 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$), trong đó a, b, c là những số thực đã cho, $a\ne 0$.

2. Giải bất phương trình bậc hai

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp $a<0$) hay trái dấu với hệ số a (trường hợp $a>0$).

B. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Dạng 1. Xét dấu của tam thức bậc hai áp dụng vào giải bất phương trình bậc hai đơn giản

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tam thức bậc hai $f(x)=x^2+\left(\sqrt{5}-1\right)x-\sqrt{5}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\sqrt{5};1\right)$.

B. $x\in\left(-\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup(1;+\infty)$.

D. $x\in(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup(1;+\infty)$.

Ví dụ 2: Tam thức bậc hai $f(x)=-x^2+3x-2$ nhận giá trị không âm khi và chỉ khi

A. $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

B. $x\in[1;2]$.

C. $x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

D. $x\in(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2$.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1<0$ là:

A. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$.

B. $\varnothing$.

C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};1\right]$.

D. $\left(-\infty;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\sqrt{2}x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$.

Ví dụ 4: Tập nghiệm của bất phương trình $6x^2+x-1\leq 0$ là

A. $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right]$.

B. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$.

C. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=6x^2+x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{3}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta\ge 0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta>0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

$f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a>0$ và $\Delta<0$.

Câu 2: Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta\ge 0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta>0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a>0$ và $\Delta\le 0$.

Câu 3: Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta=0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a<0$ và $\Delta<0$.

Câu 4: Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$. Điều kiện để $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ là

A. $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta\ge 0\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}a<0\\ \Delta>0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ khi $a<0$ và $\Delta\le 0$.

Câu 5: Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$ có $\Delta=b^2-4ac<0$. Khi đó mệnh đề nào đúng?

A. $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

C. $f(x)$ không đổi dấu. **D.** Tồn tại x để $f(x)=0$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\Delta < 0$ và $a \neq 0$ nên $f(x)$ không đổi dấu trên $\mathbb{R}$.

Câu 6: Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x \in (0;+\infty)$. **B.** $x \in (-2;+\infty)$. **C.** $x \in \mathbb{R}$. **D.** $x \in (-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\begin{cases} a = 2 > 0 \\ \Delta' = 1 - 2.5 = -9 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Câu 7: Số giá trị nguyên của x để tam thức $f(x) = 2x^2 - 7x - 9$ nhận giá trị âm là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{9}{2} \end{array}\right.$. Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{9}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \dfrac{9}{2}$. Mà x nguyên nên $x \in \{0;1;2;3;4\}$.

Câu 8: Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + \left(1 - \sqrt{3}\right)x - 8 - 5\sqrt{3}$:

A. Dương với mọi $x \in \mathbb{R}$. **B.** Âm với mọi $x \in \mathbb{R}$.

C. Âm với mọi $x \in \left(-2 - \sqrt{3}; 1 + 2\sqrt{3}\right)$. **D.** Âm với mọi $x \in (-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 - \sqrt{3} \\ x = 1 + 2\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		$1+2\sqrt{3}$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu $f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 - \sqrt{3} < x < 1 + 2\sqrt{3}$.

Câu 9: Tam thức bậc hai $f(x)=\left(1-\sqrt{2}\right)x^2+\left(5-4\sqrt{2}\right)x-3\sqrt{2}+6$

A. Dương với mọi $x\in\mathbb{R}$.

B. Dương với mọi $x\in\left(-3;\sqrt{2}\right)$.

C. Dương với mọi $x\in\left(-4;\sqrt{2}\right)$.

D. Âm với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)>0\Leftrightarrow-3<x<\sqrt{2}$.

Câu 10: Cho $f(x)=x^2-4x+3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề đúng là:

A. $f(x)<0,\forall x\in(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$

B. $f(x)\le 0,\forall x\in[1;3]$

C. $f(x)\ge 0,\forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

D. $f(x)>0,\forall x\in[1;3]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Câu 11: Dấu của tam thức bậc 2: $f(x)=-x^2+5x-6$ được xác định như sau:

A. $f(x)<0$ với $2<x<3$ và $f(x)>0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

B. $f(x)<0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)>0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

C. $f(x)>0$ với $2<x<3$ và $f(x)<0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

D. $f(x)>0$ với $-3<x<-2$ và $f(x)<0$ với $x<-3$ hoặc $x>-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta được

$f\left(x\right)>0$ với $2<x<3$ và $f\left(x\right)<0$ với $x<2$ hoặc $x>3$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình: $2x^2-7x-15\geq 0$ là:

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[5;+\infty\right)$. **B.** $\left[-\frac{3}{2};5\right]$. **C.** $\left(-\infty;-5\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[-5;\frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2x^2-7x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $2x^2-7x-15\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 5\\x\leq-\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình: $-x^2+6x+7\geq 0$ là:

A. $\left(-\infty;-1\right]\cup\left[7;+\infty\right)$. **B.** $\left[-1;7\right]$. **C.** $\left(-\infty;-7\right]\cup\left[1;+\infty\right)$. **D.** $\left[-7;1\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $-x^2+6x+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7\\x=-1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $-x^2+6x+7\geq 0\Leftrightarrow-1\leq x\leq 7$.

Câu 14: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $-2x^2+3x-7\ge 0$.

A. $S=0$. **B.** $S=\{0\}$. **C.** $S=\varnothing$. **D.** $S=\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-2x^2+3x-7=0$ vô nghiệm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	

Dựa vào bảng xét dấu $-2x^2+3x-7\ge 0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Câu 15: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-3x+2<0$ là:

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=x^2-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0\Leftrightarrow 1<x<2$.

Câu 16: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+5x-4<0$ là

A. $[1;4]$. **B.** $(1;4)$.

C. $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=-x^2+5x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=1\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0		

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>4 \end{array}\right.$.

Câu 17: Số thực dương lớn nhất thỏa mãn $x^2-x-12\le 0$ là ?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)\le 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 4$. Suy ra số thực dương lớn nhất thỏa $x^2-x-12\le 0$ là 4.

Câu 18: Cho bất phương trình $x^2-8x+7\ge 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào có chứa phần tử **không phải** là nghiệm của bất phương trình.

A. $(-\infty;0]$. **B.** $[8;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[6;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=x^2-8x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=7 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 7 \end{array}\right.$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]\cup[7;+\infty)$.

Vì $\frac{13}{2}\in[6;+\infty)$ và $\frac{13}{2}\notin S$ nên $[6;+\infty)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 2. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để giải phương trình tích

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Biểu thức $(3x^2-10x+3)(4x-5)$ âm khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\infty;\frac{5}{4}\right)$. **B.** $x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$. **C.** $x\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{4}\right)\cup(3;+\infty)$. **D.** $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=(3x^2-10x+3)(4x-5)$

Phương trình $3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$ và $4x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{4}$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$3x^2-10x+3$		$+$	0	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	
$4x-5$		$-$	$\mid$	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{4};3\right)$.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8\geq 0$ là

A. $x\in[-4;-1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $x\in(-4;-1)\cup(2;+\infty)$.

C. $x\in[-1;+\infty)$. **D.** $x\in(-\infty;-4]\cup[-1;2]$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $x^3+3x^2-6x-8\geq 0\Leftrightarrow(x-2)(x^2+5x+4)\geq 0$.

Phương trình $x^2+5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=-1\end{array}\right.$ và $x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$

x^2+5x+4	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x-2$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$(x-2)(x^2+5x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy rằng $(x-2)(x^2+5x+4)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-4;-1]\cup[2;+\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giải bất phương trình $x(x+5)\leq 2(x^2+2)$.

A. $x\leq 1$. **B.** $1\leq x\leq 4$. **C.** $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $x\geq 4$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $x(x+5)\leq 2(x^2+2)\Leftrightarrow x^2+5x\leq 2x^2+4\Leftrightarrow x^2-5x+4\geq 0$

Xét phương trình $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
x^2-5x+4		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2-5x+4\geq 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$.

Câu 2: Biểu thức $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$ âm khi

A. $x\in(1;2)$. **B.** $x\in(-3;-2)\cup(1;2)$.

C. $x\geq 4$. **D.** $x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)$

Phương trình $4-x^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Phương trình $x^2+2x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Ta có $x^2+5x+9=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0 \Rightarrow x^2+5x+9=0 \Leftrightarrow x\in\varnothing$. Lập bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		1		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
x^2+2x-3		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2+5x+9		$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $(4-x^2)(x^2+2x-3)(x^2+5x+9)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ -2<x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-2;1)\cup(2;+\infty)$.

Dạng 3. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{x-7}{4x^2-19x+12}>0$ là

A. $S=\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;7)$. **B.** $S=\left(\frac{3}{4};4\right)\cup(7;+\infty)$.

C. $S=\left(\frac{3}{4};4\right)\cup(4;+\infty)$. **D.** $S=\left(\frac{3}{4};7\right)\cup(7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $4x^2-19x+12\neq 0 \Leftrightarrow (x-4)(4x-3)\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 4 \\ x\neq \frac{3}{4} \end{cases}$.

Phương trình $x-7=0 \Leftrightarrow x=7$ và $4x^2-19x+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\frac{3}{4} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	4	7	$+\infty$

$x-7$	$-$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$
$4x^2-19x+12$	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	$\mid$	$+$
$f(x)$	$-$	$\parallel$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $\dfrac{x-7}{4x^2-19x+12}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{4}<x<4 \\ x>7 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\dfrac{3}{4};4\right)\cup(7;+\infty)$.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của x thỏa mãn $\dfrac{x+3}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{2x}{2x-x^2}$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4\neq 0 \\ x+2\neq 0 \\ 2x-x^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$. Bất phương trình:

$$\frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}<\frac{2x}{2x-x^2} \Leftrightarrow \frac{x+3}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}+\frac{2x}{x^2-2x}<0 \Leftrightarrow \frac{2x+9}{x^2-4}<0.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		-2		2		$+\infty$
$2x+9$		$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	$\mid$	$+$	
x^2-4		$+$	$\mid$	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	$\parallel$	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\dfrac{2x+9}{x^2-4}<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right)\cup(-2;2)$.

Vậy có chỉ có duy nhất một giá trị nguyên dương của x $(x=1)$ thỏa mãn yêu cầu.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Biểu thức $f(x)=\dfrac{11x+3}{-x^2+5x-7}$ nhận giá trị dương khi và chỉ khi

A. $x\in\left(-\dfrac{3}{11};+\infty\right)$. **B.** $x\in\left(-\dfrac{3}{11};5\right)$. **C.** $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{11}\right)$. **D.** $x\in\left(-5;-\dfrac{3}{11}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-x^2+5x-7=-\left(x^2-5x+7\right)=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Do đó, bất phương trình $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow 11x+3<0\Leftrightarrow x<-\frac{3}{11}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{3}{11}\right).$

Câu 2: Tập nghiệm S của bất phương trình $\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\le -1$ là

A. Hai khoảng.

B. Một khoảng và một đoạn.

C. Hai khoảng và một đoạn.

D. Ba khoảng.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2-3x-10\ne 0\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(x-5\right)\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -2\\x\ne 5\end{cases}.$

Bất phương trình

$$\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}\le -1\Leftrightarrow\frac{-2x^2+7x+7}{x^2-3x-10}+1\le 0\Leftrightarrow\frac{-x^2+4x-3}{x^2-3x-10}\le 0\qquad(*).$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		1		3		5		$+\infty$
$-x^2+4x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$x^2-3x-10$		$+$	||	$-$	|	$-$	|	$-$	||	$+$	
$f\left(x\right)$		$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, bất phương trình $\left(*\right)\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left[1;3\right]\cup\left(5;+\infty\right).$

Câu 3: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $\frac{x^4-x^2}{x^2+5x+6}\le 0$?

A. 0.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $\frac{x^4-x^2}{x^2+5x+6}\le 0\Leftrightarrow\frac{x^2\left(x^2-1\right)}{x^2+5x+6}\le 0\qquad\left(*\right).$

Vì $x^2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên bất phương trình

$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ \dfrac{x^2-1}{x^2+5x+6}\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+6}\le 0\end{array}\right..$

Phương trình $x^2-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ và $x^2+5x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right..$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+5x+6		$+$	||	$-$	||	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(x)\le 0\Leftrightarrow x\in(-3;-2)\cup[-1;1]$

Kết hợp với $x\in\mathbb{Z},$ ta được $x=\{-1;0;1\}.$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên cần tìm.

Dạng 4. Ứng dụng về dấu của tam thức bậc hai để tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}.$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $2x^2-5x+2\ge 0.$

Phương trình $2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow(x-2)(2x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $2x^2-5x+2\ge 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty).$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{3-x}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $4-3x-x^2>0$.

Phương trình $4-3x-x^2=0\Leftrightarrow(x-1)(x+4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$4-3x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $4-3x-x^2>0\Leftrightarrow x\in(-4;1)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-4;1)$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác đinh D của hàm số $y=\sqrt{x^2+x-6}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2+x-6\ge 0\\x+4>0\end{cases}$.

Phương trình $x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-3\end{array}\right.$ và $x+4=0\Leftrightarrow x=-4$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
x^2+x-6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $\begin{cases}x^2+x-6\ge 0\\x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-4;-3]\cup[2;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-4;-3]\cup[2;+\infty)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Giá trị nguyên dương lớn nhất để hàm số $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ xác định là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho xác định khi và chỉ khi $5-4x-x^2 \geq 0$.

Phương trình $5-4x-x^2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$5-4x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $5-4x-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-5;1]$.

Vậy nghiệm dương lớn nhất để hàm số xác định là $x=1$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5}}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;1)$. **C.** $\mathrm{D}=[-5;1]$. **D.** $\mathrm{D}=\left[-5;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5} \geq 0$.

Phương trình

$\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow (x+5)\left(x-\sqrt{5}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=\sqrt{5} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\left(2-\sqrt{5}\right)x^2+\left(15-7\sqrt{5}\right)x+25-10\sqrt{5} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-5;\sqrt{5}\right]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=\left[-5;\sqrt{5}\right]$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x^2-4x+1}}$.

A. $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$.

B. $\mathrm{D}=\left(\frac{1}{3};1\right)$.

C. $\mathrm{D}=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

D. $\mathrm{D}=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $3x^2-4x+1>0$.

Phương trình $3x^2-4x+1=0\Leftrightarrow(x-1)(3x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-4x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $3x^2-4x+1>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 4: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{x^2+2x+3}+\frac{1}{\sqrt{5-2x}}$.

A. $\mathrm{D}=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $\mathrm{D}=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]$. **C.** $\mathrm{D}=\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathrm{D}=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2+2x+3\ge 0\\5-2x>0\end{cases}$.

Phương trình $x^2+2x+3=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$ và $5-2x=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
x^2+2x+3		$+$	|	$+$	
$5-2x$		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases}x^2+2x+3\ge 0\\5-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right]$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=\sqrt{\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1}$.

A. $\mathrm{D}=[4;+\infty)$.

B. $\mathrm{D}=(-5;-3]\cup(3;4]$.

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-5)$.

D. $\mathrm{D}=(-5;3)\cup(3;4]$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1\geq 0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{x^2-x-12}{-x^2-2x+15}\geq 0$.

Phương trình $x^2-x-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-3\end{array}\right.$ và $-x^2-2x+15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=3\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-3		3		4		$+\infty$
x^2-x-12		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$-x^2-2x+15$		$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	
$f(x)$		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1\geq 0\Leftrightarrow x\in(-5;-3]\cup(3;4]$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-5;-3]\cup(3;4]$.

Câu 6: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}}$.

A. $\mathrm{D}=[-4;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

B. $\mathrm{D}=(-\infty;-4]\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$.

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-4]\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

D. $\mathrm{D}=\left[-4;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)=\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1}\geq 0$.

Phương trình $x^2+5x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \end{array}\right.$ và $2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
x^2+5x+4		+	0	−	0	+	|	+	
$2x^2+3x+1$		+	|	+	‖	−	‖	+	
$f(x)$		+	0	−	‖	−	‖	+	

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $\frac{x^2+5x+4}{2x^2+3x+1} \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-4] \cup \left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-4]\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=\sqrt{\sqrt{x^2+x-12}-2\sqrt{2}}$.

A. $\mathrm{D}=(-5;4]$. **B.** $\mathrm{D}=(-\infty;-5)\cup(4;+\infty)$.

C. $\mathrm{D}=(-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$. **D.** $\mathrm{D}=(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sqrt{x^2+x-12}-2\sqrt{2} \ge 0 \\ x^2+x-12 \ge 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-12 \ge 8 \\ x^2+x-12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2+x-12 \ge 8 \Leftrightarrow x^2+x-20 \ge 0.$

Phương trình $x^2+x-20=0 \Leftrightarrow (x+5)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
x^2+x-20		+	0	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $x^2+x-20 \ge 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-5]\cup[4;+\infty)$.

Dạng 5. Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai Vô nghiệm – có nghiệm – có hai nghiệm phân biệt

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Phương trình $x^2-(m+1)x+1=0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m>1$. **B.** $-3<m<1$. **C.** $m\le -3$ hoặc $m\ge 1$. **D.** $-3\le m\le 1$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta_x<0\Leftrightarrow (m+1)^2-4<0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-3<0\Leftrightarrow (m-1)(m+3)<0\Leftrightarrow -3<m<1$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0$ vô nghiệm?

A. $m<0$. **B.** $m>2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>3\\m<1\end{array}\right.$. **D.** $\begin{cases}m\ne 2\\1<m<3\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0 \qquad (*)$.

TH1. Với $m-2=0\Leftrightarrow m=2,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow 2x+4=0\Leftrightarrow x=-2.$

Suy ra với $m=2$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=-2.$

Do đó $m=2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2. Với $m-2\ne 0\Leftrightarrow m\ne 2,$ khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow (2m-3)^2-(m-2)(5m-6)<0\Leftrightarrow 4m^2-12m+9-\left(5m^2-16m+12\right)<0$

$\Leftrightarrow -m^2+4m-3<0\Leftrightarrow m^2-4m+3>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m>3\\m<1\end{array}\right.$.

Do đó, với $\left[\begin{array}{l}m>3\\m<1\end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l}m>3\\m<1\end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Phương trình $x^2+2(m+2)x-2m-1=0$ (m là tham số) có nghiệm khi

A. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-5 \end{array}\right.$. **B.** $-5 \le m \le -1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-5 \\ m>-1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -5 \\ m\ge -1 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x^2+2(m+2)x-2m-1=0,$ có $\Delta'_x=(m+2)^2+2m+1.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta'_x \ge 0 \Leftrightarrow m^2+4m+4+2m+1\ge 0 \Leftrightarrow m^2+6m+5\ge 0$

$\Leftrightarrow (m+1)(m+5)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge -1 \\ m\le -5 \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Tìm các giá trị của m để phương trình $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ có nghiệm.

A. $m\ne 5$. **B.** $-\frac{10}{3}\le m\le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\frac{10}{3} \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\le -\frac{10}{3} \\ 1\le m\ne 5 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $(m-5)x^2-4mx+m-2=0$ $(*)$.

TH1. Với $m-5=0\Leftrightarrow m=5,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -20x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{20}.$

Suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{20}.$

TH2. Với $m-5\ne 0\Leftrightarrow m\ne 5,$ khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x\ge 0$

$\Leftrightarrow (-2m)^2-(m-5)(m-2)\ge 0\Leftrightarrow 4m^2-(m^2-7m+10)\ge 0$

$\Leftrightarrow 3m^2+7m-10\ge 0\Leftrightarrow (m-1)(3m+10)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$.

Do đó, với $\left[\begin{array}{l} 5\ne m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -\frac{10}{3} \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $(m-1)x^2+(3m-2)x+3-2m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\ne 1$ **B.** $2<m<6$. **C.** $-1<m<6$. **D.** $-1<m<2$.

Lời giải

Chọn A

Kiểm tra với m = 1 không thỏa mãn ycbt. Do đó

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = m-1 \neq 0 \\ \Delta_x = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 9m^2 - 12m + 4 - 4(-2m^2 + 5m - 3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 32m + 16 > 0 \end{cases} \quad (*).$

Ta có $\begin{cases} a = 17 > 0 \\ \Delta'_m = 16^2 - 17.16 = -16 < 0 \end{cases}$ suy ra $17m^2 - 32m + 16 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}.$

Do đó, hệ bất phương trình $(*) \Leftrightarrow m \neq 1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình sau vô nghiệm $(2m^2+1)x^2 - 4mx + 2 = 0.$

A. $m \in \mathbb{R}.$ **B.** $m > 3.$ **C.** $-\frac{3}{5} < m < 3.$ **D.** $m > -\frac{3}{5}.$

Lời giải

Chọn A

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2m^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta'_x = 4m^2 - 2(2m^2+1) = -2 < 0 \end{cases},\ \forall m \in \mathbb{R}.$

Vậy phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi $m \in \mathbb{R}.$

Câu 2: Phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $0 < m < 4.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 4 \end{array}\right.$. **C.** $0 \leq m \leq 4.$ **D.** $0 \leq m < 4.$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $mx^2 - 2mx + 4 = 0 \qquad (*).$

TH1. Với $m = 0,$ khi đó phương trình $(*) \Leftrightarrow 4 = 0$ (vô lý).

Suy ra với $m = 0$ thì phương trình $(*)$ vô nghiệm.

TH2. Với $m \neq 0,$ khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow m(m-4) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Kết hợp hai **TH**, ta được $0 \leq m < 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 3: Phương trình $(m^2-4)x^2 + 2(m-2)x + 3 = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi

A. $m \geq 0.$ **B.** $m = \pm 2.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m < -4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình $\left(m^2-4\right)x^2+2\left(m-2\right)x+3=0\qquad(*)$.

TH1. Với $m^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-2\end{array}\right.$.

- Khi $m=2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 3=0$ (vô lý).

- Khi $m=-2\Rightarrow(*)\Leftrightarrow -8x+3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{8}$.

Suy ra với $m=2$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

TH2. Với $m^2-4\neq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 2\\m\neq -2\end{array}\right.$, khi đó để phương trình $(*)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'_x<0$

$\Leftrightarrow\left(m-2\right)^2-3\left(m^2-4\right)<0\Leftrightarrow m^2-4m+4-3m^2+12<0\Leftrightarrow -2m^2-4m+16<0$

$\Leftrightarrow m^2+2m-8>0\Leftrightarrow\left(m-2\right)\left(m+4\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-4\end{array}\right.$.

Suy ra với $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-4\end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Kết hợp hai **TH**, ta được $\left[\begin{array}{l}m\geq 2\\m<-4\end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2x^2+2\left(m+2\right)x+3+4m+m^2=0$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét $2x^2+2\left(m+2\right)x+3+4m+m^2=0$, có $\Delta'_x=\left(m+2\right)^2-2\left(m^2+4m+3\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\Delta'_x\geq 0\Leftrightarrow m^2+4m+4-2m^2-8m-6\geq 0\Leftrightarrow -m^2-4m-2\geq 0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+2\leq 0\Leftrightarrow\left(m+2\right)^2\leq 2\Leftrightarrow -2-\sqrt{2}\leq m\leq -2+\sqrt{2}$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$, ta được $m=\left\{-3;-2;-1\right\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 5: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $\left(m-1\right)x^2-2\left(m+3\right)x-m+2=0$ có nghiệm.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $-1<m<3$. **D.** $-2<m<2$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\left(m-1\right)x^2-2\left(m+3\right)x-m+2=0\qquad(*)$.

TH1. Với $m-1=0\Leftrightarrow m=1,$ khi đó $(*)\Leftrightarrow -2.4x-1+2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}.$

Suy ra với $m=1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{8}.$

TH2. Với $m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1,$ khi đó để phương trình $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'_x\geq 0$

$\Leftrightarrow (m+3)^2-(m-1)(2-m)\geq 0\Leftrightarrow m^2+6m+9-\left(-m^2+3m-2\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow 2m^2+3m+11\geq 0\Leftrightarrow 2\left(m+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{79}{8}\geq 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$ suy ra $\Delta'_x\geq 0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Do đó, với $m\neq 1$ thì phương trình $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Kết hợp hai **TH**, ta được $m\in\mathbb{R}$ là giá trị cần tìm.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $x^2+(m+1)x+m-\frac{1}{3}=0$ có nghiệm?

A. $m\in\mathbb{R}.$ **B.** $m>1.$ **C.** $-\frac{3}{4}<m<1.$ **D.** $m>-\frac{3}{4}.$

Lời giải

Chọn A

Xét $x^2+(m+1)x+m-\frac{1}{3}=0,$ có $\Delta_x=(m+1)^2-4\left(m-\frac{1}{3}\right)=m^2-2m+\frac{7}{3}.$

Ta có $\begin{cases}a=1>0\\ \Delta'_m=1-\frac{7}{3}=-\frac{4}{3}<0\end{cases}$ suy ra $m^2-2m+\frac{7}{3}>0,\ \forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow \Delta_x>0,\ \forall m\in\mathbb{R}.$

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi $m\in\mathbb{R}.$

Câu 7: Phương trình $(m-1)x^2-2x+m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khi

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$ **B.** $m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right).$

C. $m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\setminus\{1\}.$ **D.** $m\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\setminus\{1\}.$

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}a=m-1\neq 0\\ \Delta'_x=(-1)^2-(m-1)(m+1)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ 1-m^2+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m^2<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\setminus\{1\}.$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m\in\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\setminus\{1\}.$

Câu 8: Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2+(m+3)x-(m+1)=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$.   **B.** $m\in\left(-\dfrac{3}{5};1\right)$.

C. $m\in\left(-\dfrac{3}{5};+\infty\right)$.   **D.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lời giải

Chọn C

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\begin{cases}a=m-3\neq 0\\ \Delta_x=(m+3)^2+4(m-3)(m+1)>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ m^2+6m+9+4(m^2-2m-3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ 5m^2-2m-3>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ (m-1)(5m+3)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 3\\ \left[\begin{array}{l}m>1\\ m<-\dfrac{3}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$$ là giá trị cần tìm.

Dạng 6. Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai có nghiệm thỏa mãn điều kiện cho trước

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tìm m để phương trình $x^2-mx+m+3=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $m>6$.   **B.** $m<6$.   **C.** $6>m>0$.   **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4(m+3)>0\\ x_1+x_2=m>0\\ x_1x_2=m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4m-12>0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>6.$$

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $(m-2)x^2-2mx+m+3=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

A. $2<m<6$.   **B.** $m<-3$ hoặc $2<m<6$.

C. $m<0$ hoặc $-3<m<6$.   **D.** $-3<m<6$.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ m^2-(m-2)(m+3)>0 \\ \dfrac{2m}{m-2}>0 \\ \dfrac{m+3}{m-2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2<m<6 \\ m<-3 \end{array}\right.$.

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $x^2+2(m+1)x+9m-5=0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A. $m<6$. **B.** $\frac{5}{9}<m<1$ hoặc $m>6$. **C.** $m>1$. **D.** $1<m<6$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2-(9m-5)>0 \\ -2(m+1)<0 \\ 9m-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-7m+6>0 \\ m>\dfrac{5}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ \dfrac{5}{9}<m<1 \end{array}\right..$$

Câu 4: Phương trình $x^2-(3m-2)x+2m^2-5m-2=0$ có hai nghiệm không âm khi

A. $m \in \left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. **B.** $m \in \left[\frac{5+\sqrt{41}}{4};+\infty\right)$.

C. $m \in \left[\frac{2}{3};\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right]$. **D.** $m \in \left(-\infty;\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm không âm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2-4\left(2m^2-5m-2\right)>0 \\ 3m-2 \geq 0 \\ 2m^2-5m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 \geq 0 \\ m^2+8m+12 \geq 0 \\ 2m^2-5m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{5+\sqrt{41}}{4}.$$

Câu 5: Phương trình $2x^2-\left(m^2-m+1\right)x+2m^2-3m-5=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi

A. $m<-1$ **hoặc** $m>\frac{5}{2}$. **B.** $-1<m<\frac{5}{2}$. **C.** $m \leq -1$ **hoặc** $m \geq \frac{5}{2}$. **D.** $-1 \leq m \leq \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$ac < 0 \Leftrightarrow 2.\left(2m^2 - 3m - 5\right) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \dfrac{5}{2}.$

Câu 6: Phương trình $\left(m^2 - 3m + 2\right)x^2 - 2m^2x - 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu khi

A. $m \in (1;2)$. **B.** $m \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$. **C.** $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$ac < 0 \Leftrightarrow \left(m^2 - 3m + 2\right).(-5) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right.$.

Câu 7: Giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0$ có hai nghiệm trái dấu trong đó nghiệm âm có trị tuyệt đối lớn hơn là

A. $0 < m < 2$. **B.** $0 < m < 1$. **C.** $1 < m < 2$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < 0 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 + 2x - 2m = 0$

$\Leftrightarrow (x-m)^2 + 2(x-m) = 0 \Leftrightarrow (x-m)(x-m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m-2 \end{cases}$.

Để phương trình đã cho có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ x_1x_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2 \qquad (\text{I})$.

Với $m \in (0;2)$ suy ra $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$, theo bài ra, ta có $|x_2| > |x_1| \Leftrightarrow |x_2|^2 > |x_1|^2 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 > 0$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \Leftrightarrow (m - 2 - m)(m - 2 + m) > 0 \Leftrightarrow 2m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 1.$

Kết hợp với (I), ta được $0 < m < 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 8: Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

A. $1 < m < 2$. **B.** $1 < m < 3$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0 \qquad (*)$, có $a + b + c = 0$.

Suy ra phương trình $(*) \Leftrightarrow (x-1)\left[(m-1)x - m + 3\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ (m-1)x = m-3 \end{array}\right.$.

Để phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1\neq 0 \\ \dfrac{m-3}{m-1}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1 \qquad (\mathrm{I}).$

Khi đó, gọi $x_1,\, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m-4}{m-1} \\ x_1x_2=\dfrac{m-3}{m-1} \end{cases}.$

Theo bài ra, ta có $x_1+x_2+x_1x_2=\dfrac{3m-7}{m-1}<1\Leftrightarrow \dfrac{2m-6}{m-1}<0\Leftrightarrow 1<m<3.$

Kết hợp với (I), ta được $1<m<3$ là giá trị cần tìm.

Câu 9: Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\, x_2$ khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}<3$?

A. $m<2 \vee m>6.$ **B.** $-2<m\neq -1<2 \vee m>6.$ **C.** $2<m<6.$ **D.** $-2<m<6.$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $(m+1)x^2-2mx+m-2=0 \quad (*)$, có $\Delta'=m+2.$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi

$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ P\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1\neq 0 \\ m+2>0 \\ m-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq \{-1;2\} \\ m>-2 \end{cases} \qquad (\mathrm{I}).$

Khi đó, gọi $x_1,\, x_2$ là nghiệm của phương trình $(*)$ suy ra $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2m}{m+1} \\ x_1x_2=\dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}.$

Theo bài ra, ta có $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{2m}{m-2}<3\Leftrightarrow \dfrac{m-6}{m-2}>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<2 \end{array}\right..$

Kết hợp với (I), ta được $\left[\begin{array}{l} m>6 \\ m\in(-2;-1)\cup(-1;2) \end{array}\right.$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2-(m-1)x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\, x_2$ khác 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}>1.$

A. $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(7;+\infty).$ **B.** $m\in(-\infty;-2)\cup\left(-2;-\dfrac{11}{10}\right).$

C. $m\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1).$ **D.** $m\in(7;+\infty).$

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x)=x^2-(m-1)x+m+2$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 0 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta>0\\ f(0)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-6m-7>0\\ m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>7\\ m<-1\end{array}\right.\\ m\neq -2\end{cases}.\quad (*)$$

Gọi $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình đã cho. Theo Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m-1\\ x_1x_2=m+2\end{cases}$.

Yêu cầu bài toán $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}>1\Leftrightarrow\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2.x_2^2}>1\Leftrightarrow\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}>1$

$$\Leftrightarrow\frac{(m-1)^2-2(m+2)}{(m+2)^2}>1\Leftrightarrow\frac{8m+7}{(m+2)^2}<0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -2\\ m<-\frac{7}{8}\end{cases}\xrightarrow{(*)}-2\neq m<-1.$$

Dạng 7. Tìm điều kiện của tham số để bất phương trình vô nghiệm – có nghiệm – nghiệm đúng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tam thức $f(x)=3x^2+2(2m-1)x+m+4$ dương với mọi x khi:

A. $-1<m<\frac{11}{4}$. **B.** $-\frac{11}{4}<m<1$. **C.** $-\frac{11}{4}\leq m\leq 1$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\ m>\frac{11}{4}\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A

Tam thức $f(x)$ có $a=3>0$. Do đó $f(x)>0,\forall x$ khi

$$\Delta'=(2m-1)^2-3(m+4)=4m^2-7m-11<0\Leftrightarrow -1<x<\frac{11}{4}.$$

Câu 2: Tam thức $f(x)=-2x^2+(m-2)x-m+4$ không dương với mọi x khi:

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{6\}$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m=6$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Tam thức $f(x)$ có $a=-2<0$. Do đó $f(x)\leq 0,\forall x$ (không dương) khi

$$\Delta=(m-2)^2+8(-m+4)=m^2-12m+36\leq 0\Leftrightarrow m=6.$$

Câu 3: Tam thức $f\left(x\right)=-2x^2+\left(m+2\right)x+m-4$ âm với mọi x khi:

A. $m<-14$ hoặc $m>2$. **B.** $-14\le m\le 2$. **C.** $-2<m<14$. **D.** $-14<m<2$.

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f\left(x\right)$ có $a=-2<0$. Do đó $f\left(x\right)<0,\forall x$ khi

$\Delta=\left(m+2\right)^2+8\left(m-4\right)=m^2+12m-28\le 0\Leftrightarrow -14<m<2$.

Câu 4: Tam thức $f\left(x\right)=x^2-\left(m+2\right)x+8m+1$ không âm với mọi x khi:

A. $m>28.$ **B.** $0\le m\le 28.$ **C.** $m<1.$ **D.** $0<m<28.$

Lời giải

Chọn B

Tam thức $f\left(x\right)$ có $a=1>0$ nên $f\left(x\right)\ge 0,\forall x$ (không âm) khi

$\Delta=\left(m+2\right)^2-4\left(8m+1\right)=m^2-28m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 28$.

Câu 5: Bất phương trình $x^2-mx-m\ge 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

A. $m\le -4$ hoặc $m\ge 0$. **B.** $-4<m<0$. **C.** $m<-4$ hoặc $m>0$. **D.** $-4\le m\le 0$.

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f(x)=x^2-mx-m$ có hệ số $a=1>0$ nên bất phương trình $f\left(x\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $\forall x$ khi và chỉ khi $\Delta=m^2+4m\le 0\Leftrightarrow -4\le m\le 0$.

Câu 6: Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2+\left(2m-1\right)x+m<0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $m=\frac{1}{2}.$ **B.** $m=-\frac{1}{2}.$ **C.** $m\in\mathbb{R}.$ **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn D

Tam thức $f\left(x\right)=-x^2+\left(2m-1\right)x+m$ có hệ số $a=-1<0$ nên bất phương trình $f\left(x\right)<0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $\Delta=\left(2m-1\right)^2+4m=4m^2+1<0\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Câu 7: Bất phương trình $x^2-\left(m+2\right)x+m+2\le 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m\in\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **C.** $m\in\left[-2;2\right]$. **D.** $m\in\left(-2;2\right)$.

Lời giải

Chọn D

Bất phương trình $f\left(x\right)=x^2-\left(m+2\right)x+m+2\le 0$ khi và chỉ khi $f\left(x\right)>0$ nghiệm đúng với mọi x.

Tam thức $f(x)=x^2-(m+2)x+m+2$ có hệ số $a=1>0$ nên $f(x)>0$ nghiệm đúng với mọi x khi $\Delta=(m+2)^2-4(m+2)=m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Câu 8: Tam thức $f(x)=\left(m^2+2\right)x^2-2(m+1)x+1$ dương với mọi x khi:

A. $m<\frac{1}{2}$. **B.** $m\le\frac{1}{2}$. **C.** $m>\frac{1}{2}$. **D.** $m\ge\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tam thức $f(x)$ có hệ số $a=m^2+2>0,\forall x$ nên $f(x)$ dương với mọi x khi $\Delta'=(m+1)^2-\left(m^2+2\right)=2m-1<0\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$.

Câu 9: Tam thức $f(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$ không dương với mọi x khi:

A. $m\le 4$. **B.** $m\ge 4$. **C.** $m<4$. **D.** $m>4$.

Lời giải

Chọn A

- Với $m=4$, ta có $f(x)=-1<0$: đúng với mọi x.
- Với $m\ne 4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m-4)x^2+(2m-8)x+m-5\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-4<0\\ (m-4)^2-(m-4)(m-5)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<4\\ m-4\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m<4.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\le 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 10: Tam thức $f(x)=mx^2-mx+m+3$ âm với mọi x khi:

A. $m\in(-\infty;-4]$. **B.** $m\in(-\infty;-4)$.

C. $m\in(-\infty;-4]\cup[0;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;-4]\cup(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

- Với $m=0$ thay vào ta được $f(x)=3<0$ (vô lý) suy ra $m=0$ không thỏa mãn.
- Với $m\ne 0$, yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \Delta<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m^2-4m(m+3)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -3m^2-12m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \left[\begin{array}{l}m<-4\\ m>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m<-4.$$

Câu 11: Tam thức $f(x)=(m+2)x^2+2(m+2)x+m+3$ không âm với mọi x khi:

A. $m\ge -2$. **B.** $m\le -2$. **C.** $m>-2$. **D.** $m<-2$.

Lời giải

Chọn A

- Với $m=-2$, tam thức bậc hai trở thành $1>0$: đúng với mọi x.
- Với $m\neq -2$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (m+2)x^2+2(m+2)x+m+3\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ (m+2)^2-(m+2)(m+3)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ -m-2\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m\geq -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: Bất phương trình $(3m+1)x^2-(3m+1)x+m+4\geq 0$ có nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi:

A. $m>-\frac{1}{3}.$ **B.** $m\geq -\frac{1}{3}.$ **C.** $m>0.$ **D.** $m>15.$

Lời giải

Chọn B

Xét bất phương trình $(3m+1)x^2-(3m+1)x+m+4\geq 0.$ $(*)$

TH1. Với $3m+1=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3},$ bất phương trình $(*)$ trở thành $4-\frac{1}{3}\geq 0$ (luôn đúng).

TH2. Với $3m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -\frac{1}{3},$ bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1>0 \\ (3m+1)^2-4(3m+1)(m+4)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m+1>0 \\ 3m^2+46m+15\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m>-\frac{1}{3}.$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m\geq -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $(2m^2-3m-2)x^2+2(m-2)x-1\leq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. $\frac{1}{3}\leq m<2.$ **B.** $\frac{1}{3}\leq m\leq 2.$ **C.** $m\geq \frac{1}{3}.$ **D.** $m\leq 2.$

Lời giải

Chọn B

Xét $2m^2-3m-2=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ hoặc $m=2$

- Khi $m=-\frac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành $-5x-1\leq 0\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{5}$: không nghiệm đúng với mọi x.
- Khi $m=2$ thì bất phương trình trở thành $-1\leq 0$: nghiệm đúng với mọi x.

• Khi $\begin{cases} m \neq -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 2 \end{cases}$ thì yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left(2m^2-3m-2\right)x^2+2(m-2)x-1 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \le 0 \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-7m+2 \le 0 \\ 2m^2-3m-2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3} \le m \le 2 \\ -\dfrac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le m < 2.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $\dfrac{1}{3} \le m \le 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(m^2-4\right)x^2+(m-2)x+1<0$ vô nghiệm.

A. $m \in \left(-\infty;-\dfrac{10}{3}\right] \cup [2;+\infty)$.

B. $m \in \left(-\infty;-\dfrac{10}{3}\right] \cup (2;+\infty)$.

C. $m \in \left(-\infty;-\dfrac{10}{3}\right) \cup (2;+\infty)$.

D. $m \in [2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

• Xét $m^2-4=0 \Leftrightarrow m=\pm 2.$

Với $m=-2$, bất phương trình trở thành $-4x+1<0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{4}$: không thỏa mãn.

Với $m=2$, bất phương trình trở thành $1<0$: vô nghiệm. Do đó $m=2$ thỏa mãn.

• Xét $m^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow \left(m^2-4\right)x^2+(m-2)x+1 \ge 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ \Delta=(m-2)^2-4\left(m^2-4\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4>0 \\ -3m^2-4m+20 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le -\dfrac{10}{3} \\ m>2 \end{array}\right..$$

Kết hợp hai trường hợp, ta được $m \le -\dfrac{10}{3}$ hoặc $m \ge 2$.

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\sqrt{(m+4)x^2-(m-4)x-2m+1}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \le 0.$ **B.** $-\dfrac{20}{9} \le m \le 0.$ **C.** $m \ge -\dfrac{20}{9}.$ **D.** $m>0.$

Lời giải

Chọn D

$f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

TH1: $m=-4$ thì $f(x)=8x+9 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{9}{8} \longrightarrow m=-4$ không thỏa.

TH2: $m \neq -4$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4 \\ 9m^2 + 20m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{20}{9} \leq m \leq 0.$

Câu 16: Hàm số $y = \sqrt{(m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4}$ có tập xác định là $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ khi

A. $-1 \leq m \leq 3.$ **B.** $-1 < m < 3.$ **C.** $-1 < m \leq 3.$ **D.** $m > -1.$

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x + 4 \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.\ (1)$

- $m = -1$ thì $f(x) = 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$: thỏa mãn.
- $m \neq -1$, khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m^2 - 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -1 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3.$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-1 \leq m \leq 3.$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để biểu thức $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2}$ luôn dương.

A. $m \geq -\dfrac{5}{8}.$ **B.** $m < -\dfrac{5}{8}.$ **C.** $m < \dfrac{5}{8}.$ **D.** $m \geq \dfrac{5}{8}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $-4x^2 + 5x - 2 = -\left(2x - \dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{7}{16} < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2}{-4x^2 + 5x - 2} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -x^2 + 4(m+1)x + 1 - 4m^2 < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = 4(m+1)^2 + (1 - 4m^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{5}{8}.$

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 < 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}.$ **B.** $m \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty).$ **C.** $m \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty).$ **D.** $m \in [0;2].$

Lời giải

Chọn A

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m.$

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình có nghiệm.
- $\Delta' = 0 \longrightarrow f(x) = 0$ tại $x = \dfrac{m-2}{2}$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình có nghiệm.

- $\Delta' > 0 \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

Vậy cả ba trường hợp ta thấy bất phương trình đều có nghiệm.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $-2x^2 + 2(m-2)x + m - 2 \geq 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **C.** $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. **D.** $m \in [0; 2]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = -2x^2 + 2(m-2)x + m - 2$ và $\Delta' = (m-2)^2 + 2(m-2) = m^2 - 2m$.

- $\Delta' < 0 \xrightarrow{a=-2<0} f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

  Do đó trường hợp này không có m thỏa mãn.

- $\Delta' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ khi } x = -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ m = 2 \longrightarrow f(x) = 0 \text{ khi } x = -\dfrac{b}{2a} = 0 \end{array}\right.$, còn ngoài ra thì $f(x) < 0$ nên bất phương trình vô nghiệm.

  Do đó trường hợp này có $m = 0$ hoặc $m = 2$ thỏa mãn.

- $\Delta' > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right. \longrightarrow f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$. Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in [x_1; x_2]$.

  Do đó trường hợp này có $m < 0$ hoặc $m > 2$ thỏa mãn.

Hợp các trường hợp ta được $m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ thỏa mãn.

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $mx^2 + 2(m+1)x + m - 2 > 0$ có nghiệm.

A. $m \in \mathbb{R}$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{4}\right)$. **C.** $m \in \left(-\dfrac{1}{4}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $f(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2$ và $\Delta' = (m+1)^2 - m(m-2) = 4m + 1$.

- $m = 0 \longrightarrow$ bất phương trình trở thành $2x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1$. Do đó $m = 0$ thỏa mãn.
- $m > 0$, ta biện luận các trường hợp như câu. Do đó $m > 0$ thỏa mãn.
- $m < 0$, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{4} \longrightarrow f(x) = 0$

có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$.

Khi đó bất phương trình đã cho có nghiệm $x \in (x_1; x_2)$.

Do đó $-\frac{1}{4} < m < 0$ thỏa mãn. Hợp các trường hợp ta được $m > -\frac{1}{4}$.

Dạng 8. Hệ bất phương trình bậc hai

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases}$ là:

A. $S = [1;2)$. **B.** $S = [1;3)$. **C.** $S = (1;2]$. **D.** $S = [2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $2 - x \geq 0$ là $S_1 = (-\infty; 2]$.

Tập nghiệm của $x^2 - 4x + 3 < 0$ là $S_1 = (1;3)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (1;2]$.

Câu 2: Tìm x thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 11x + 28 \geq 0 \end{cases}$.

A. $x > 3$. **B.** $3 < x \leq 7$. **C.** $4 \leq x \leq 7$. **D.** $3 < x \leq 4$.

Lời giải

Chọn D

Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2 - 11x + 28 \geq 0$ là $S_2 = (-\infty; 4] \cup [7; +\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; -1) \cup (3; 4] \cup [7; +\infty)$.

Câu 3: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 8 > 0 \end{cases}$ là:

A. $S = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. **B.** $S = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **D.** $S = (1; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2-4x+3>0$ là $S_1=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Tập nghiệm của $x^2-6x+8>0$ là $S_2=(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

Câu 4: Tập nghiệm S của hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-3x+2\le 0\\x^2-1\le 0\end{cases}$ là:

A. $S=1$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=[1;2]$. **D.** $S=[-1;1]$.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2-3x+2\le 0$ là $S_1=[1;2]$.

Tập nghiệm của $x^2-1\le 0$ là $S_2=[-1;1]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\{1\}$.

Câu 5: Giải hệ bất phương trình $\begin{cases}3x^2-4x+1>0\\3x^2-5x+2\le 0\end{cases}$.

A. $x\ge 1$. **B.** $x\le\frac{1}{3}$. **C.** $x\in\varnothing$. **D.** $x\le\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $3x^2-4x+1>0$ là $S_1=\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Tập nghiệm của $3x^2-5x+2\le 0$ là $S_2=\left[\frac{2}{3};1\right]$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\varnothing$.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn $\begin{cases}-2x^2-5x+4<0\\-x^2-3x+10>0\end{cases}$?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $-2x^2-5x+4<0$ là $S_1=\left(-\infty;\frac{-5-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{57}}{4};+\infty\right)$.

Tập nghiệm của $-x^2-3x+10>0$ là $S_2=(-5;2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\left(-5;\frac{-5-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{57}}{4};2\right)$.

Do đó các giá trị nguyên của x thuộc tập S là $\{-4;1\}$.

Câu 7: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-9<0 \\ (x-1)(3x^2+7x+4)\ge 0 \end{cases}$ có nghiệm là:

A. $-1\le x<2$.

B. $-3<x\le -\dfrac{4}{3}$ hoặc $-1\le x\le 1$.

C. $-\dfrac{4}{3}\le x\le -1$ hay $1\le x\le 3$.

D. $-\dfrac{4}{3}\le x\le -1$ hoặc $1\le x<3$.

Lời giải

Chọn D

Tập nghiệm của $x^2-9<0$ là $S_1=(-3;3)$.

Tập nghiệm của $(x-1)(3x^2+7x+4)\ge 0$ là $S_2=\left[\dfrac{-4}{3};-1\right]\cup[1;+\infty)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=\left[\dfrac{-4}{3};-1\right]\cup[1;3)$.

Câu 8: Tập nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-7x+6<0 \\ |2x-1|<3 \end{cases}$ là:

A. $(1;2)$.

B. $[1;2]$.

C. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

D. $\varnothing$.

Lời giải

Chọn C

Tập nghiệm của $x^2-7x+6<0$ là $S_1=(1;6)$.

Tập nghiệm của $|2x-1|<3$ là $S_2=(-1;2)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(1;2)$.

Câu 9: Hệ bất phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ -2x^2+x-1<0 \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ -2x^2+x-1>0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ 2x^2+x+1>0 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x^2-2x-3<0 \\ 2x^2-x+1>0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án **A.** Tập nghiệm của $x^2-2x-3>0$ là $S_1=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Tập nghiệm của $-2x^2+x-1<0$ là $S_2=\mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=S_1\cap S_2=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Đáp án **B.** Tập nghiệm của $x^2-2x-3<0$ là $S_1=(-1;3)$.

Tập nghiệm của $-2x^2+x-1>0$ là $S_2=\varnothing$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

Đáp án **C.** Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 > 0$ là $S_1 = (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 + x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

Đáp án **D.** Tập nghiệm của $x^2 - 2x - 3 < 0$ là $S_1 = (-1;3)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x + 1 > 0$ là $S_2 = \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 = (-1;3)$.

Câu 10: Số nghiệm nguyên của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 - x - 10 \leq 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$ là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ là $S_1 = (-\infty;-3] \cup [-1;+\infty)$.

Tập nghiệm của $2x^2 - x - 10 \leq 0$ là $S_2 = \left[-2;\frac{5}{2}\right]$.

Tập nghiệm của $2x^2 - 5x + 3 > 0$ là $S_3 = (-\infty;1) \cup \left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = [-1;1) \cup \left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right]$.

Suy ra nghiệm nguyên là $\{-1;0;2\}$.

Câu 11: Hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + m < 0 & (1) \\ 3x^2 - x - 4 \leq 0 & (2) \end{cases}$ vô nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m > -\frac{8}{3}$. **B.** $m < 2$. **C.** $m \geq 2$. **D.** $m \geq -\frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{4}{3}$. Suy ra $S_1 = \left[-1;\frac{4}{3}\right]$

Bất phương trình $(2) \Leftrightarrow x < -\frac{m}{2}$. Suy ra $S_2 = \left(-\infty;-\frac{m}{2}\right)$.

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $S_1 \cap S_2 = \varnothing \Leftrightarrow -\frac{m}{2} \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 2$.

Câu 12: Hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-1\le 0(1) \\ x-m>0(2) \end{cases}$ có nghiệm khi:

A. $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ne 1$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Suy ra $S_1=[-1;1]$.

Bất phương trình $(2)\Leftrightarrow x>m$. Suy ra $S_2=(m;+\infty)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow m<1$.

Câu 13: Hệ bất phương trình $\begin{cases} (x+3)(4-x)>0(1) \\ x<m-1(2) \end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m<5$. **B.** $m>-2$. **C.** $m=5$. **D.** $m>5$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -3<x<4$. Suy ra $S_1=(-3;4)$.

Bất phương trình có $S_2=(-\infty;m-1)$.

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $S_1\cap S_2\ne\varnothing \Leftrightarrow m-1>-3\Leftrightarrow m>-2$.

Câu 14: Tìm m để $-9<\dfrac{3x^2+mx-6}{x^2-x+1}<6$ nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $-3<m<6$. **B.** $-3\le m\le 6$. **C.** $m<-3$. **D.** $m>6$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình đã cho tương tương với

$-9\left(x^2-x+1\right)<3x^2+mx-6<6\left(x^2-x+1\right)$ (do $x^2-x+1>0\forall x\in\mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 12x^2+(m-9)x+3>0 \ \ (1) \\ 3x^2-(m+6)x+12>0 \ \ (2) \end{cases}$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \Delta_{(1)}<0 \\ \Delta_{(2)}<0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (m-9)^2-144<0 \\ (m+6)^2-144<0 \end{cases}\Leftrightarrow -3<m<6.$$

Câu 15: Xác định m để với mọi x ta có $-1\le\dfrac{x^2+5x+m}{2x^2-3x+2}<7$.

A. $-\dfrac{5}{3}\le m<1$. **B.** $1<m\le\dfrac{5}{3}$. **C.** $m\le-\dfrac{5}{3}$. **D.** $m<1$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình tương đương

$$\begin{cases}\dfrac{3x^2+2x+2+m}{2x^2-3x+2}\ge 0\\ \dfrac{13x^2-26x+14-m}{2x^2-3x+2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+2x+2+m\ge 0(1)\\ 13x^2-26x+14-m>0(2)\end{cases}.$$

Yêu cầu $\Leftrightarrow$ (1) và (2) nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_{(1)}\le 0\\ \Delta_{(2)}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^2-4.3(2+m)\le 0\\ 26^2-4.13(14-m)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge\dfrac{-5}{3}\\ m<1\end{cases}.$$

Câu 16: Hệ bất phương trình $\begin{cases}x-1>0\\ x^2-2mx+1\le 0\end{cases}$ có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m>1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ne 1$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $x-1>0\Leftrightarrow x>1$. Suy ra $S_1=(1;+\infty)$.

Bất phương trình $x^2-2mx+1\le 0\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2\le m^2-1\Leftrightarrow(x-m)^2\le m^2-1$

$\Leftrightarrow-\sqrt{m^2-1}\le x-m\le\sqrt{m^2-1}$ (điều kiện: $m^2-1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le -1\end{array}\right.$)

$\Leftrightarrow m-\sqrt{m^2-1}\le x\le m+\sqrt{m^2-1}$. Suy ra $S_2=\left[m-\sqrt{m^2-1};m+\sqrt{m^2-1}\right]$.

Để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2-1}>1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{m^2-1}>1-m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-m<0\\ m^2-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-m\ge 0\\ m^2-1>(1-m)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>1\\ m\le -1\vee m\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}m\le 1\\ m>1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow m>1$$

Đối chiếu điều kiện, ta được $m>1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 17: Tìm m để hệ $\begin{cases}x^2-2x+1-m\le 0 & (1)\\ x^2-(2m+1)x+m^2+m\le 0 & (2)\end{cases}$ có nghiệm.

A. $0<m<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **B.** $0\le m\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $0\le m<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $0<m\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để (1) có nghiệm là $\Delta'=m\ge 0$.

Khi đó (1) có tập nghiệm $S_1=\left[1-\sqrt{m};1+\sqrt{m}\right]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2=[m;m+1]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1\cap S_2\neq\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1+\sqrt{m}\\1-\sqrt{m}\le m+1\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18: Tìm m sao cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2-3x-4\le 0(1)\\(m-1)x-2\ge 0(2)\end{cases}$ có nghiệm.

A. $-1\le m\le\frac{3}{2}$. **B.** $m\ge\frac{3}{2}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $m\ge -1$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -1\le x\le 4$. Suy ra $S_1=[-1;4]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m-1=0\Leftrightarrow m=1$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x\ge 2$: vô nghiệm.

Với $m-1>0\Leftrightarrow m>1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x\ge\dfrac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2=\left[\dfrac{2}{m-1};+\infty\right)$.Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\dfrac{2}{m-1}\le 4\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3}{2}$.

Với $m-1<0\Leftrightarrow m<1$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x\le\dfrac{2}{m-1}$.

Suy ra $S_2=\left(-\infty;\dfrac{2}{m-1}\right]$.

Hệ bất phương trình có nghiệm khi $\dfrac{2}{m-1}\ge -1\Leftrightarrow m\le -1$ (không thỏa)

Để hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge\dfrac{3}{2}$.

Câu 19: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình $\begin{cases}x^2+10x+16\le 0(1)\\mx\ge 3m+1(2)\end{cases}$ vô nghiệm.

A. $m>-\frac{1}{5}$. **B.** $m>\frac{1}{4}$. **C.** $m>-\frac{1}{11}$. **D.** $m>\frac{1}{32}$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow -8\le x\le -2$. Suy ra $S_1=[-8;-2]$.

Giải bất phương trình (2)

Với $m=0$ thì bất phương trình (2) trở thành $0x\ge 1$: vô nghiệm.

Với $m>0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \ge \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left[\frac{3m+1}{m};+\infty\right)$.

Hệ bất phương trình vô nghiệm khi $\frac{3m+1}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{5}$.

Với $m<0$ thì bất phương trình (2) tương đương với $x \le \frac{3m+1}{m}$.

Suy ra $S_2 = \left(-\infty;\frac{3m+1}{m}\right]$.Hệ bất phương trình vô nghiệm khi

$\frac{3m+1}{m} < -8 \Leftrightarrow m > \frac{-1}{11}$

Để hệ bất phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $m > -\frac{1}{11}$.

Câu 20: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2-2(a+1)x+a^2+1 \le 0(2) \\ x^2-6x+5 \le 0(1) \end{cases}$. Để hệ bất phương trình có nghiệm, giá trị thích hợp của tham số a là:

A. $0 \le a \le 2$. **B.** $0 \le a \le 4$. **C.** $2 \le a \le 4$. **D.** $0 \le a \le 8$.

Lời giải

Chọn A

Bất phương trình $(1) \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$. Suy ra $S_1 = [1;5]$.

Ta thấy (2) có tập nghiệm $S_2 = \left[a+1-\sqrt{2a};a+1+\sqrt{2a}\right]$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \ne \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} a+1+\sqrt{2a} \ge 1 \\ a+1-\sqrt{2a} \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le a \le 2$.