BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Ôn tập về hàm số

1. Hàm số. Tập xác định của hàm số

Định nghĩa: Cho D ⊂ R, D ≠ ∅. **Hàm số *f*** xác định trên D là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in$ D với một và chỉ một số , kí hiệu là $f(x)$, số $f(x)$ được gọi là giá trị của hàm số f tại x . Kí hiệu: $y = f(x)$.

- x được gọi là **biến số**
- D được gọi là tập xác định của hàm số.
- T = $\{y = f(x) | x \in D\}$ được gọi là tập giá trị của hàm số.

2. Cách cho hàm số

- Cho bằng bảng
- Cho bằng biểu đồ
- Cho bằng công thức $y = f(x)$.

***Tập xác định của hàm số** $y = f(x)$**)** là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức f có nghĩa.*

Chú ý: Trong kí hiệu $y = f(x)$, ta còn gọi x là biến số độc lập, y là biến số phụ thuộc của hàm số f. Biến số độc lập và biến số phụ thuộc của một hàm số có thể được kí hiệu bởi hai chữ cái tùy ý khác nhau. Chẳng hạn, $y = x^3 + 4x^2 + 1;$ và $u = t^3 + 4t^2 + 1;$ là hai cách viết biểu thị cùng một hàm số.

3. Đồ thị của hàm số: Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x \in$ D.

***Chú ý:** Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường. Khi đó ta nói $y = f(x)$ là phương trình của đường đó.*

II. Sự biến thiên của hàm số

1. Hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến

Định nghĩa: Cho hàm số *f* xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến** trên K nếu

  $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến** trên K nếu

  $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Nhận xét: Nếu một hàm số đồng biến trên K thì trên đó, đồ thị hàm số nó đi lên; ngược lại hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số đi xuống.

Chú ý: Nếu $f(x_1)=f(x_2)$ với mọi $x_1,x_2\in K$, tức là $f(x)=c,\forall x\in K$ thì ta gọi là hàm số không đổi hay hàm số hằng trên K.

2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số:

Khảo sát sự biến thiên của hàm số là xét xem hàm số đồng biến, nghịch biến, không đổi trên các khoảng nào trong tập xác định.

Đối với hàm số cho bằng biểu thức, để khảo sát sự biến thiên của hàm số ta có thể dựa vào định nghĩa hoặc dựa vào nhận xét sau:

- $y=f\left(x\right)$ ***đồng biến*** *trên K*

  $$\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in K: x_1\neq x_2\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$$

- $y=f\left(x\right)$ ***nghịch biến*** *trên K*

  $$\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in K: x_1\neq x_2\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}<0$$

III. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

1. Khái niệm hàm số chẵn, hàm số lẻ

Định nghĩa: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định D.

- Hàm số f được gọi là **hàm số chẵn** nếu với $\forall x\in$ D thì $-x\in$ D và $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$.
- Hàm số f được gọi là **hàm số lẻ** nếu với $\forall x\in$ D thì $-x\in$ D và $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$.

2. Đồ thị của hàm số chẵn và hàm số lẻ

- *Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.*
- *Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.*

3. Sơ lượt tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị của hàm số $y=f(x)$; p và q là hai số dương tùy ý. Khi đó

- Tịnh tiến lên trên q đơn vị thì được đồ thị hàm số $y=f(x)+q$
- Tịnh tiến xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị hàm số $y=f(x)-q$
- Tịnh tiến sang trái p đơn vị thì được đồ thị hàm số $y=f(x+p)$
- Tịnh tiến sang phải p đơn vị thì được đồ thị hàm số $y=f(x-p)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính giá trị của hàm số tại một điểm

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$. Tìm tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số và có tung độ bằng -2.

A. $(0;-2)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{3};-2\right)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(-1;-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi $M_0(x_0;-2)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -2.

Khi đó: $\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=-2 \Leftrightarrow x_0+1=2(1-x_0) \Leftrightarrow 3x_0=1 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{1}{3} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{3};-2\right)$.

Câu 2. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x(x-1)}$

A. $M(0;-1)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $M(2;0)$. **D.** $M(1;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thử trực tiếp thấy tọa độ của $M(2;0)$ thỏa mãn phương trình hàm số.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{x-1} & \text{khi } x\ge 2 \\ x^2+2 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Tính $P=f(2)+f(-2)$.

A. $P=3$. **B.** $P=2$. **C.** $P=\dfrac{7}{3}$. **D.** $P=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f(2)+f(-2)=\dfrac{2\sqrt{2-2}-3}{2-1}+(-2)^2+2 \Rightarrow P=3$.

Câu 5. Đồ thị của hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x\le 2 \\ -3 & \text{khi } x>2 \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây:

A. $(0;-3)$. **B.** $(3;7)$. **C.** $(2;-3)$. **D.** $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Thử lần lượt từng phương án A,B,C,D với chú ý về điều kiện ta được:

$f(0)=2.0+1=1\neq -3$, đồ thị không đi qua điểm $(0;-3)$.

$f(3)=-3\neq 7$, đồ thị không đi qua điểm $(3;7)$.

$f(2)=2.2+1=5\neq -3$, đồ thị không đi qua điểm $(2;-3)$.

$f(0)=2.0+1=1$, đồ thị không đi qua điểm $(0;1)$.

Câu 6. Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}-2(x-3) & \text{khi} \quad -1\le x\le 1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{khi} \quad x>1\end{cases}$. Giá trị của $f(-1)$; $f(1)$ lần lượt là

A. 8 và 0. **B.** 0 và 8. **C.** 0 và 0. **D.** 8 và 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $f(-1)=-2(-1-3)=8$; $f(1)=\sqrt{1^2-1}=0$.

Câu 7. Cho hàm số $y=\begin{cases}-2x+1 & \text{khi} \quad x\le -3\\ \dfrac{x+7}{2} & \text{khi} \quad x>-3\end{cases}$. Biết $f(x_0)=5$ thì x_0 là

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

TH1. $x_0\le -3$: Với $f(x_0)=5\Leftrightarrow -2x_0+1=5\Leftrightarrow x_0=-2$.

TH2. $x_0>-3$: Với $f(x_0)=5\Leftrightarrow \dfrac{x_0+7}{2}=5\Leftrightarrow x_0=3$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x+1} & \text{khi} \quad x\ge 0\\ \dfrac{\sqrt[3]{2+3x}}{x-2} & \text{khi} \quad -2\le x<0\end{cases}$. Ta có kết quả nào sau đây đúng?

A. $f(-1)=\dfrac{1}{3};\ f(2)=\dfrac{7}{3}$. **B.** $f(0)=2;\ f(-3)=\sqrt{7}$.

C. $f(-1)$: không xác định; $f(-3)=-\dfrac{11}{24}$. **D.** $f(-1)=\sqrt{8};f(3)=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$f\left(-1\right)=\dfrac{\sqrt[3]{2-3}}{-1-2}=\dfrac{1}{3}$; $f\left(2\right)=\dfrac{2.2+3}{2+1}=\dfrac{7}{3}$.

Dạng 2: Tìm tập xác định của hàm số

1. Phương pháp

- *Tìm tập xác định D của hàm số $y=f\left(x\right)$ là tìm tất cả những giá trị của biến số x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa:*

  $D=\left\{x\in R\,|\,f(x)\text{ có nghĩa}\right\}$.

- *Điều kiện xác định của một số hàm số thường gặp:*

1) Hàm số $y=\dfrac{A(x)}{B(x)}$. Khi đó : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid A(x)\text{ xác định và } A(x)\neq 0\right\}$

2) Hàm số $y=\sqrt[2k]{A(x)},k\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid A(x)\text{ xác định và } A(x)\geq 0\right\}$

3) Hàm số $y=\dfrac{A(x)}{\sqrt[2k]{B(x)}},k\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó : $D=\left\{x\in\mathbb{R}\mid A(x),B(x)\text{ xác định và } B(x)>0\right\}$

Chú ý:

- *Đôi khi ta sử dụng phối hợp các điều kiện với nhau.*
- $A.B\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}A\neq 0\\ B\neq 0\end{cases}$.
- Nếu $y=f(x)$ có tập xác định là D. Khi đó: $y=f(x)$ xác định trên tập $X\Leftrightarrow X\subset D$

  $y=f(x)$ xác định trên tập $X\Leftrightarrow f(x)$ xác định với mọi $x\in X$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1 : Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-1}$

Hướng dẫn giải

Hàm số $y=\sqrt{x-1}$ xác định $\Leftrightarrow x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+2x}+\sqrt{6+x}$

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định khi $\begin{cases}1+2x\ge 0\\6+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{2}\\x\ge -6\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -\dfrac{1}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x-2}$

Hướng dẫn giải

Hàm số xác định khi: $\begin{cases}x\ge 0\\x-2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\ne 2\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=[0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Ví dụ 4: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{x-3}+\sqrt{x-1}$.

Hướng dẫn giải

Điều kiện để hàm số xác định: $\begin{cases}x-3\ne 0\\x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\ne 3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=[1;+\infty)\setminus\{3\}$.

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y=(x-2)\sqrt{3x-m-1}$ xác định trên tập $(1;+\infty)$?

Lời giải

ĐK: $x\ge\dfrac{m+1}{3}\Rightarrow D=\left[\dfrac{m+1}{3};+\infty\right)$.

Để hàm số xác định trên $(1;+\infty)$ thì

$(1;+\infty)\subset\left[\dfrac{m+1}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{3}\le 1\Leftrightarrow m+1\le 3\Rightarrow m\le 2$.

Ví dụ 6. Xác định tham số m để hàm số $y=\sqrt{3x-m}$ xác định trên tập $(1;+\infty)$

Hướng dẫn:

Tập xác định của hàm số $D=\left[\dfrac{m}{3};+\infty\right)$. Do đó hàm số xác định trên tập $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $(1;+\infty)\subset D=\left[\dfrac{m}{3};+\infty\right)\Leftrightarrow 1\ge\dfrac{m}{3}\Leftrightarrow m\le 3$

Ví dụ 7. Xác định tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2-m}$ xác định trên tập $(-\infty;-3]$

Hướng dẫn:

hàm số xác định khi và chỉ khi $x^2 - m \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \ge m$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} m > 0 \\ x \in \left(-\infty; -\sqrt{m}\right] \cup \left[\sqrt{m}; +\infty\right) \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \begin{cases} \mathbb{R} & khi\ m \le 0 \\ \left(-\infty; -\sqrt{m}\right] \cup \left[\sqrt{m}; +\infty\right) & khi\ m > 0 \end{cases}$

Do đó hàm số xác định trên tập $\left(-\infty; -3\right]$ khi và chỉ khi

$\left(-\infty; -3\right] \subset D \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ -3 \le -\sqrt{m} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 0 \\ 0 < m \le 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 9$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định D của hàm số $f\left(x\right) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. **C.** $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$. **D.** $D = [-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x \ne 0 \end{cases}$. Vậy tập xác định: $D = [-1; +\infty) \setminus \{0\}$.

Câu 2. Cho hàm số: $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x \le 0 \\ \sqrt{x+2} & x > 0 \end{cases}$. Tập xác định của hàm số là tập hợp nào sau đây?

A. $[-2; +\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $\{x \in \mathbb{R} \setminus x \ne 1 \text{ và } x \ge -2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với $x \le 0$ ta có: $y = \dfrac{1}{x-1}$ xác định với mọi $x \ne 1$ nên xác định với mọi $x \le 0$.

Với $x > 0$ ta có: $y = \sqrt{x+2}$ xác định với mọi $x \ge -2$ nên xác định với mọi $x > 0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Câu 3. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$ là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $[-1;3)\cup(3;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+1\geq 0\\x-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\x\neq 3\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=[-1;3)\cup(3;+\infty)$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2-x}{x^2-4x}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0;2;4\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus[0;4]$. **C.** $\mathbb{R}\setminus(0;4)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2-4x\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\x\neq 4\end{cases}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $D=[1;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$. **D.** $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $\begin{cases}x+1\geq 0\\x\neq 0\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{4x^2-4x+1}$.

A. $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $4x^2-4x+1\geq 0\Leftrightarrow(2x-1)^2\geq 0$.

Do đó tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Câu 7. Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{3-x} + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $D = (1;\ 3]$. **B.** $D = (-\infty;1) \cup [3;+\infty)$.

C. $D = [1;3]$. **D.** $D = \varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1;\ 3]$.

Câu 8. Tập hợp nào sau đây là tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1+5x} + \dfrac{|x|}{\sqrt{7-2x}}$?

A. $\left(\dfrac{1}{5}; -\dfrac{7}{2}\right)$. **B.** $\left[-\dfrac{1}{5}; \dfrac{7}{2}\right]$. **C.** $\left[-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{7}{2}\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{5}; \dfrac{7}{2}\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác đinh khi và chỉ khi $\begin{cases} 1+5x \geq 0 \\ 7-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{5} \\ x < \dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{5} \leq x < \dfrac{7}{2}$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-6x+8}$ là

A. $(3;8) \backslash \{4\}$. **B.** $[-3;3] \backslash \{2\}$. **C.** $(-3;3) \backslash \{2\}$. **D.** $(-\infty;3) \backslash \{2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Hàm số xác định khi và chỉ khi

$\begin{cases} 9-x^2 \geq 0 \\ x^2-6x+8 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 4 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Vậy $x \in [-3;3] \backslash \{2\}$.

Câu 10. Tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{-3x+8}+x & \text{khi} \quad x<2\\ \sqrt{x+7}+1 & \text{khi} \quad x\ge 2\end{cases}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$. **C.** $\left(-\infty;\frac{8}{3}\right]$. **D.** $\left[-7;+\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có:

• Khi $x<2$: $y=f\left(x\right)=\sqrt{-3x+8}+x$ xác định khi $-3x+8\ge 0\Leftrightarrow x\le\frac{8}{3}$.

Suy ra $D_1=\left(-\infty;2\right)$.

• Khi $x\ge 2$: $y=f\left(x\right)=\sqrt{x+7}+1$ xác định khi $x+7\ge 0\Leftrightarrow x\ge -7$.

Suy ra $D_1=\left[2;+\infty\right)$.

Vậy TXĐ của hàm số là $D=D_1\cup D_2=\left(-\infty;+\infty\right)=\mathbb{R}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+3}-\frac{x}{x-3}$.

A. $\left(-\infty;1\right]\cup\left(3;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;1\right)\cup\left(3;+\infty\right)$. **C.** $\left(3;+\infty\right)$. **D.** $\left(1;3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y=\sqrt{x^2-4x+3}-\frac{x}{x-3}$ xác định

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+3\ge 0\\ x-3\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 1 \text{ v } x\ge 3\\ x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow x\le 1$ hoặc $x>3$.

Câu 12. Tập xác định của hàm số $y=\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$ là

A. $\left[-1;3\right)\setminus\left\{2\right\}$. **B.** $\left[-1;2\right]$. **C.** $\left[-1;3\right]$. **D.** $\left(2;3\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3-x}+\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$ có nghĩa khi

$$\begin{cases}3-x\ge 0\\ x+1\ge 0\\ x^2-5x+6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 3\\ x\ne 2;x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left[-1;3\right)\backslash\left\{2\right\}.$$

Câu 13. Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$.

A. $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **B.** $\left[2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x^2-5x+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{1}{2}\\ x\ge 2\end{array}\right.$.

Câu 14. Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $\left(0;1\right)$.

A. $m\in\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

B. $m\in\left[-3;0\right]$.

C. $m\in\left[-3;0\right]\cup\left[0;1\right]$.

D. $m\in\left[-4;0\right]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

*Gọi D là tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$.

$$*\ x\in \mathrm{D}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2m+3\ge 0\\ x-m\ne 0\\ -x+m+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2m-3\\ x\ne m\\ x<m+5\end{cases}.$$

*Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $\left(0;1\right)$

$$\Leftrightarrow\left(0;1\right)\subset D\Leftrightarrow\begin{cases}2m-3\le 0\\ m+5\ge 1\\ m\notin\left(0;1\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{3}{2}\\ m\ge -4\\ \left[\begin{array}{l}m\ge 1\\ m\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in\left[-4;0\right]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right].$$

Dạng 3: Tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp

Cho hàm số f xác định trên K.

- $y = f(x)$ ***đồng biến*** *trên K* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $y = f(x)$ ***nghịch biến*** *trên K* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Từ đó, ta có hai cách để xét tính đồng biến nghịch biến:

Cách 1: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2$. Xét hiệu số $A = f(x_2) - f(x_1)$

- Nếu $A > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A < 0$ thì hàm số nghịch biến

Cách 2: $\forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2$. Xét tỉ số $A = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Nếu $A > 0$ thì hàm số đồng biến
- Nếu $A < 0$ thì hàm số nghịch biến

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

$a)\ y = x^2 - 4x + 6$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 2); (2 + \infty)$

$b)\ y = -x^2 - 6x + 5$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -3); (-3; +\infty)$

Hướng dẫn

$a)$ Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 - 4 = (x_2 - 2) + (x_1 - 2)$$

Do đó:

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (-\infty; 2), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < 2; x_2 < 2 \Rightarrow x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0 \Rightarrow A < 0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 2; x_2 > 2 \Rightarrow x_1 - 2 > 0, x_2 - 2 > 0 \Rightarrow A > 0$

Vậy, hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Ví dụ 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau

$a)\ y = \dfrac{3}{x - 1}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 1); (1; +\infty)$

$b)\ y = \dfrac{x + 1}{2x + 4}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -2); (-2; +\infty)$

Hướng dẫn

$a)$ Với $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-3}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

Do đó:

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (-\infty;1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 < 1; x_2 < 1 \Rightarrow x_1 - 1 < 0, x_2 - 1 < 0 \Rightarrow A < 0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1;+\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 1; x_2 > 1 \Rightarrow x_1 - 1 > 0, x_2 - 1 > 0 \Rightarrow A < 0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Ví dụ 3. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của hàm số sau

$a)\, y = \sqrt[3]{x} + 3;$ $\qquad$ $b)\, y = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

Hướng dẫn

$a)$ Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} + 3 < \sqrt[3]{x_2} + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Vậy, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$b)$ Tập xác định: $D=[0;+\infty)\backslash\{1\}$

$\forall x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$A=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-1}{(\sqrt{x_1}-1)(\sqrt{x_2}-1)(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}$$

Do đó:

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in [0;1), x_1 \neq x_2 \Rightarrow 0 \le x_1 < 1; 0 \le x_2 < 1 \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 < 0, \sqrt{x_2} - 1 < 0 \Rightarrow A < 0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $[0;1)$

$\triangleright \forall x_1, x_2 \in (1;+\infty), x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 > 1; x_2 > 1 \Rightarrow \sqrt{x_1} - 1 > 0, \sqrt{x_2} - 1 > 0 \Rightarrow A < 0$

Vậy, hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Ví dụ 5: Tìm a để hàm số $f(x) = ax - \sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Hàm số $f(x) = ax - \sqrt{1-a}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ 1-a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a \le 1$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = 3 - x$. $\qquad$ **B.** $y = 3x + 1$.

C. $y = 4$. $\qquad$ **D.** $y = x^2 - 2x + 3$.

Lời giải

Chọn B

$y = 3x + 1$ có $a = 3 > 0$ hàm số đồng biến trên TXĐ.

Câu 2: Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \dfrac{3}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$\forall x_1, x_2 \in (0;+\infty): x_1 \neq x_2$

$f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{3}{x_2} - \dfrac{3}{x_1} = \dfrac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 x_1} \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\dfrac{3}{x_2 x_1} < 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x$. **B.** $y = -2x$. **C.** $y = 2x$. **D.** $y = \dfrac{1}{2}x$

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 0$.

Câu 4. Chọn khẳng định đúng ?

A. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

B. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

D. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1; x_2 \in K,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Lời giải

Chọn D

Lí thuyết định nghĩa hàm số đồng biến, nghịch biến

Câu 5. Tìm m để hàm số $y=\left(2m-1\right)x+7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m\ge \frac{1}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m\in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

hàm số $y=\left(2m-1\right)x+7$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $2m-1>0$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left(2m+3\right)x+m+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le -\frac{3}{2}$. **B.** $m\ge -\frac{3}{2}$. **C.** $m>-\frac{3}{2}$. **D.** $m<-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=\left(2m+3\right)x+m+3$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow 2m+3<0\Leftrightarrow m<-\frac{3}{2}$.

Câu 7. Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=-2x^2+\left(m+1\right)x+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;5\right)$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y=-2x^2+\left(m+1\right)x+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{m+1}{4};+\infty\right)$.

Để hàm số $y=-2x^2+\left(m+1\right)x+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;5\right)$ thì ta phải có $\left(1;5\right)\subset\left(\frac{m+1}{4};+\infty\right)\Leftrightarrow \frac{m+1}{4}\le 1\Leftrightarrow m\le 3$.

Các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=-2x^2+\left(m+1\right)x+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;5\right)$ là $m=1, m=2, m=3$.

Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=-2x^2+\left(m+1\right)x+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;5\right)$ là $S=1+2+3=6$.

Câu 8. Cho hàm số $y=(m+2)x+\sqrt{2-m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số có dạng $y=ax+b$, nên để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m+2>0 \\ 2-m\geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m\leq 2 \end{cases}$. Mặt khác do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m.

Câu 9. Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$.

A. $\begin{cases} m\leq -1 \\ m\geq 2 \end{cases}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-1<m<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định khi $x\neq m$.

Để hàm số $y=\dfrac{x+m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;2)$ khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m\leq -1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$.

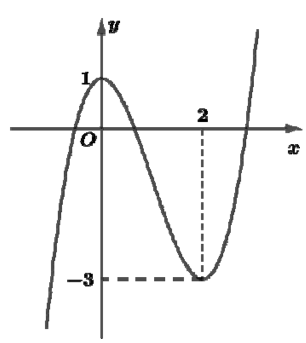
Dạng 4: Dựa vào đồ thị tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1: Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

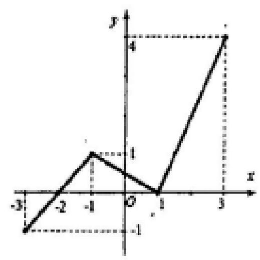
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$ và có đồ thị được biểu diễn bởi hình bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

B. Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(1;3)$.

C. Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$.

D. Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $(C): y=f(x), (C') y=f(x)+2018$. Khi tịnh tiến đồ thị (C) theo phương song song trục tung lên phía trên 2018 đơn vị thì được đồ thị (C'). Nên tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(x)+2018$ trong từng khoảng tương ứng không thay đổi.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

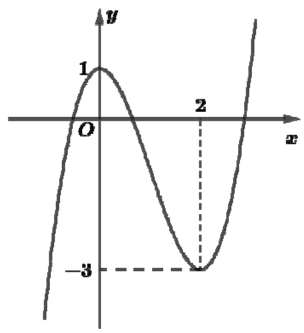
Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

Hàm số $y=f(x)+2018$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(1;3)$.

Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số $y=f(x)+2018$ nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

Câu 3. Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là ***đúng***?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

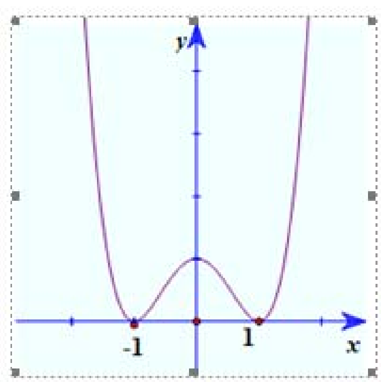
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn C

Trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 4. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ.



Chọn đáp án sai.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải

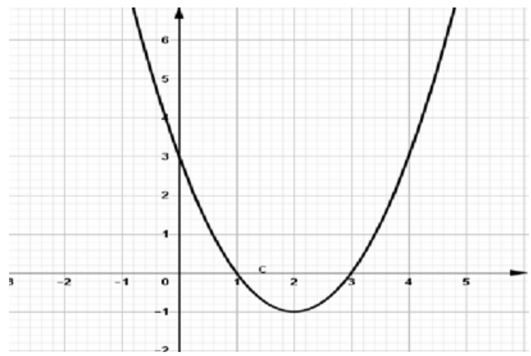
Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Hàm số nghịch biến trong các khoảng: $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Hàm số đồng biến trong các khoảng: $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

A. Đồ thị hàm số cắt trục hoành theo một dây cung có độ dài bằng 2 .

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;5)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$.

D. $f\left(\sqrt{2019}\right) < f\left(\sqrt{2017}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào đồ thị hàm số ta có :

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm $M(1;0), N(3;0) \Rightarrow MN = 2 \Rightarrow A$ đúng.

Trên khoảng $(0;2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và trên khoảng $(2;5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;5) \Rightarrow B$ sai.

Trên khoảng $(0;2)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ và trên khoảng $(2;3)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;3) \Rightarrow C$ sai.

Ta có : $\sqrt{2019}, \sqrt{2017} \in (2;+\infty)$ và trên khoảng $(2;+\infty)$ hàm số đồng biến nên

$$\begin{cases} \sqrt{2019} > \sqrt{2017} \\ f\left(\sqrt{2019}\right) > f\left(\sqrt{2017}\right) \end{cases} \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Dạng 5: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

1. Phương pháp

Để xét tính chẵn lẻ của hàm số y = f(x) ta tiến hành các bước như sau:

- *Tìm tập xác định D của hàm số và xét xem D có là tập đối xứng hay không.*
- *Nếu D là tập đối xứng thì so sánh f(–x) với f(x) (x bất kì thuộc D).*

+ Nếu $f(-x) = f(x),\ \forall x \in D$ thì f là hàm số chẵn.

+ Nếu $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in D$ thì f là hàm số lẻ.

Chú ý:

- *Tập đối xứng là tập thoả mãn điều kiện: Với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.*
- *Nếu $\exists x \in D$ mà $f(-x) \neq \pm f(x)$ thì f là hàm số không chẵn không lẻ.*

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a. $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

b. $f\left(x\right)=x^2-\left|x\right|$.

c. $f\left(x\right)=x^3+x+1$.

d. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1}$.

Lời giải

+ Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ có TXĐ $D=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ nên hàm số lẻ.

+ Hàm số $f\left(x\right)=x^2-\left|x\right|$ có TXĐ $D=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ nên hàm số chẵn.

+ Hàm số $f\left(x\right)=x^3+x+1$ có TXĐ $D=\mathbb{R}$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và

$f\left(-x\right)=-x^3-x+1\Rightarrow\begin{cases}f\left(-x\right)\neq f\left(x\right)\\ f\left(-x\right)\neq -f\left(x\right)\end{cases}$ nên hàm số không chẵn không lẻ.

+ Hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1}$ có TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$. Ta có $x=1\in D$ nhưng $-x=-1\notin D$ nên hàm số không chẵn không lẻ.

Ví dụ 2. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y=\sqrt{20-x^2}$,

b) $y=-7x^4+2|x|+1$,

c) $y=\dfrac{x^4+10}{x}$,

d) $y=|x+2|+|x-2|$,

e) $y=\dfrac{\sqrt{x^4-x}+\sqrt{x^4+x}}{|x|+4}$

Lời giải:

- Xét $y=\sqrt{20-x^2}$ có tập xác định $D=\left[-2\sqrt{5};2\sqrt{5}\right]$,

  $f(-x)=\sqrt{20-(-x)^2}=\sqrt{20-x^2}=f(x)$

  Nên $y=\sqrt{20-x^2}$ là hàm số chẵn.

- Xét $y=-7x^4+2|x|+1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, $f(-x)=-7(-x)^4+2|-x|+1=f(x)$

  Nên $y=-7x^4+2|x|+1$ là hàm số chẵn.

- Xét $y=\dfrac{x^4+10}{x}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f(-x)=\dfrac{(-x)^4+10}{-x}=-f(x)$.

  Nên $y=\dfrac{x^4+10}{x}$ là hàm số lẻ.

- Xét $y=|x+2|+|x-2|$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, $f(-x)=|-x+2|+|-x-2|=f(x)$.

  Nên $y=|x+2|+|x-2|$ là hàm số chẵn.

- Xét $y=\dfrac{\sqrt{x^4-x}+\sqrt{x^4+x}}{|x|+4}$ có tập xác định $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)\cup\{0\}$.

  $f(-x)=\dfrac{\sqrt{(-x)^4-(-x)}+\sqrt{(-x)^4-x}}{|-x|+4}=f(x)$ nên $y=\dfrac{\sqrt{x^4-x}+\sqrt{x^4+x}}{|x|+4}$ là hàm số chẵn.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{2016+9x}-\sqrt{2016-9x}}{|x|}$. Tính giá trị của biểu thức:

$S=f(220)+f(-221)+f(222)+f(-223)+f(-220)+f(221)+f(-222)+f(223)+f(224)$

Lời giải

Tập xác định $D=\left[\frac{-2016}{9};\frac{2016}{9}\right]\backslash\{0\}$.

$\forall x\in D$, ta có $-x\in D$ và

$f(-x)=\frac{\sqrt{2016-9x}-\sqrt{2016+9x}}{|-x|}=-\frac{\sqrt{2016+9x}-\sqrt{2016-9x}}{|x|}=-f\left(x\right)$.

Do đó $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ, và $f\left(x\right)+f(-x)=0$.

$S=f\left(220\right)+f\left(-221\right)+f\left(222\right)+f\left(-223\right)+f\left(-220\right)+f\left(221\right)+f\left(-222\right)+f\left(223\right)+f\left(224\right)$
$=f\left(220\right)+f\left(-220\right)+f\left(-221\right)+f\left(221\right)+f\left(222\right)+f\left(-222\right)+f\left(-223\right)+f\left(223\right)+f\left(224\right)$
$=f\left(224\right)=\frac{3\sqrt{7}}{28}$.

Ví dụ 4. Tìm điều kiện của m để hàm số $y=x^4-m(m-1)x^3+x^2+mx+m^2$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Hàm $y=x^4-m(m-1)x^3+x^2+mx+m^2$ có tập xác định là R nên hàm số chẵn khi:

$\begin{cases}-m\left(m-1\right)=0\\ m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=0$.

Vậy $m=0$.

Ví dụ 5: Tìm m thì hàm số $f\left(x\right)=x^3+\left(m^2-1\right)x^2+2x+m-1$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ do đó $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.
Theo đề bài, ta có $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$, $\forall x\in D$ nghĩa là
$-x^3+\left(m^2-1\right)x^2-2x+m-1=-x^3-\left(m^2-1\right)x^2-2x-m+1$, $\forall x\in D$. Điều này xảy ra khi
$\begin{cases}m^2-1=-m^2+1\\ m-1=-m+1\end{cases}\Leftrightarrow m=1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên tập D. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Nếu $f\left(x\right)$ không là hàm số lẻ thì $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

B. Nếu $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$, $\forall x\in D$ thì $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

C. Đồ thị hàm số lẻ nhận trục tung làm trục đối xứng.

D. Nếu $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ thì $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$, $\forall x\in D$.

Lời giải

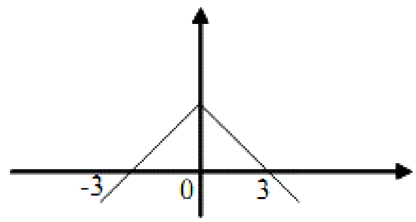
Chọn D.

A sai vì có những hàm số không chẵn, không lẻ.

B sai vì $f(x)=0$ thì $f(-x)=-f(x)$ nhưng $f(x)$ cũng là hàm số chẵn.

C sai vì đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

Câu 2. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Kết luận nào trong các kết luận sau là đúng?



A. Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số chẵn.

C. Hàm số lẻ.

D. Cả ba đáp án đều sai

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đối xứng qua trục Oy nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 3. Hàm số $y=x^4-x^2+3$ là

A. hàm số vừa chẵn, vừa lẻ.

B. hàm số không chẵn, không lẻ.

C. hàm số lẻ.

D. hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x)=x^4-x^2+3$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$.

$f(-x)=(-x)^4-(-x)^2+3 = x^4-x^2+3 = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 4: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

A. $g(x)=|x|$.

B. $k(x)=x^2+x$.

C. $h(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

D. $f(x)=\sqrt{x^2+1}-2$.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)=3x^4-4x^2+3$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn. **B.** $y=f\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

C. $y=f\left(x\right)$ là hàm số không có tính chẵn lẻ. **D.** $y=f\left(x\right)$ là hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ f\left(-x\right)=3\left(-x\right)^4-4\left(-x\right)^2+3=3x^4-4x^2+3=f\left(x\right),\forall x\in D\end{cases}$

Do đó hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào **không** phải là hàm số lẻ:

A. $y=x^3+x$. **B.** $y=x^3+1$. **C.** $y=x^3-x$. **D.** $y=\frac{1}{x}$

Lời giải

Chọn B

Hàm số lẻ phải triệt tiêu số hạng tự do

Câu 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=x^2+\frac{1}{x}$. **B.** $y=\frac{x}{x^4-2x^2+1}$.

C. $y=\frac{1}{4x^3}$. **D.** $y=\left(2x-1\right)^{2018}+\left(2x+1\right)^{2018}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $y=f\left(x\right)=\left(2x-1\right)^{2018}+\left(2x+1\right)^{2018}$.

Tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)$ là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$..

Lại có: $f\left(-x\right)=\left(2\left(-x\right)-1\right)^{2018}+\left(2\left(-x\right)+1\right)^{2018}=\left(2x+1\right)^{2018}+\left(2x-1\right)^{2018}=f\left(x\right)$.

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)$ là số chẵn.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

A. $y=\left|x-4\right|-\left|x+4\right|$. **B.** $y=\left|3-x\right|+\left|3+x\right|$.

C. $y=\sqrt{x}$. **D.** $y=x^2-5x+1$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=\left|x-4\right|-\left|x+4\right|$

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

+ $f\left(-x\right)=\left|-x-4\right|-\left|-x+4\right|=-\left(\left|x-4\right|-\left|x+4\right|\right)=-f\left(x\right)$ với $\forall x\in D$

Vậy hàm số $y=f\left(x\right)=\left|x-4\right|-\left|x+4\right|$ là hàm số lẻ.

Câu 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\left|x-2018\right|+\left|x+2018\right|$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**

A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định là R.

B. Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

C. Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

D. Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $-x\in\mathbb{R}$ ta có:

$f\left(-x\right)=\left|-x-2018\right|+\left|-x+2018\right|=\left|x+2018\right|+\left|x-2018\right|=f\left(x\right)$

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Do vậy các phương án A,B,C đều đúng. Đáp án D sai.

Câu 10. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=x^3-2x$. **B.** $y=3x^4+x^2+5$. **C.** $y=\sqrt{x+1}$. **D.** $y=2x^2+x$.

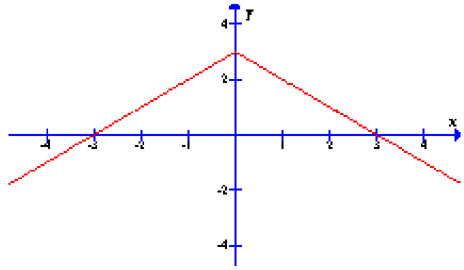
Lời giải

Chọn B

Ta thấy hàm số $y=3x^4+x^2+5$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$,

$f\left(-x\right)=3\left(-x\right)^4+\left(-x\right)^2+5=3x^4+x^2+5=f\left(x\right)$. Vậy hàm số $y=3x^4+x^2+5$ là hàm số chẵn.

Câu 11. Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ



Kết luận nào trong các kết luận sau là đúng:

A. Hàm số lẻ. **B.** Hàm số vừa chẵn vừa lẻ.

C. Đồng biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D.

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ và đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 12. Đồ thị hàm số nào sau đây có tâm đối xứng?

A. $y = x^3 + x$. **B.** $y = x^2$. **C.** $y = x^4 + 3x^2 - 1$. **D.** $y = |x|$.

Lời giải

Chọn A

+ Ba hàm số: $y = x^2$; $y = x^4 + 3x^2 - 1$; $y = |x|$ đều là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ nên đồ thị của chúng nhận trục Oy làm trục đối xứng, đồ thị không có tâm đối xứng.

+ Hàm số: $y = x^3 + x$ có:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + x \\ f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow \; y = x^3 + x \text{ là hàm số lẻ trên } \mathbb{R}.$$

Nên đồ thị hàm số $y = x^3 + x$ nhận gốc toạ độ O làm tâm đối xứng.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x\sqrt{x^2+3}; g(x) = |x+3| + |x-3|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ là hàm chẵn; $g(x)$ là hàm lẻ. **B.** Cả f và $g(x)$ là hàm chẵn.

C. Cả $f(x)$ và $g(x)$ là hàm lẻ **D.** $f(x)$ là hàm lẻ; $g(x)$ là hàm chẵn.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x) = x\sqrt{x^2+3}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta thấy $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = (-x)\sqrt{(-x)^2 + 3} = -x\sqrt{x^2+3} = -f(x)$

Vậy nên $f(x)$ là hàm lẻ.

Xét $g(x)=|x+3|+|x-3|$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta thấy $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $-x\in\mathbb{R}$ và

$g(-x)=|-x+3|+|-x-3|=|-(x-3)|+|-(x+3)|=|x-3|+|x+3|=g(x)$

Vậy nên $g(x)$ là hàm chẵn.

Câu 14: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm chẵn?

A. $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$.
B. $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$.
C. $y=|x+2|-|x-2|$.
D. $y=x^4+x+1$.

Lời giải

Chọn A

➢ Hàm số $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$ có tập xác định là $D=[-2;2]$.

Suy ra: $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có : $f(-x)=\sqrt{2-(-x)}+\sqrt{2+(-x)}=\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=f(x)$.

Vậy hàm số $y=\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}$ là hàm số chẵn.

➢ Hàm số $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}$ có tập xác định là $D=[2;+\infty)$.

Ta có: $2\in D$ nhưng $-2\notin D$ nên hàm số trên không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

➢ Hàm số $y=|x+2|-|x-2|$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Suy ra: $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có : $f(-x)=|-x+2|-|-x-2|=|x-2|-|x+2|=-f(x)$.

Vậy hàm số $y=|x+2|-|x-2|$ là hàm số lẻ.

➢ Hàm số $y=x^4+x+1$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Suy ra: $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(1)=3$ và $f(-1)\neq 1$. Do $f(1)\neq f(-1)$ và $f(1)\neq -f(-1)$ nên hàm số trên không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

Câu 15: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y=2x$.
B. $y=x^3+x^2$.
C. $y=x^3+1$.
D. $y=|x|+1$.

Lời giải

Chọn A

➢ Hàm số $y = 2x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Ta có: $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f\left(-x\right) = -2x = -f\left(x\right)$

Do đó hàm số $y = 2x$ là hàm số lẻ.

➢ Hàm số $y = x^3 + x^2$ và $y = x^3 + 1$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

➢ Hàm số $y = \left|x\right| + 1$ là hàm số chẵn.

Câu 16. Cho hàm số $f\left(x\right) = \left|x+2\right| + \left|x-2\right|$ và $g\left(x\right) = x^3 + 5x$. Khi đó:

A. $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ đều là hàm số lẻ.
B. $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ đều là hàm số chẵn.

C. $f\left(x\right)$ lẻ, $g\left(x\right)$ chẵn.
D. $f\left(x\right)$ chẵn, $g\left(x\right)$ lẻ.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $D = \mathbb{R}$ khi đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f\left(-x\right) = \left|-x+2\right| + \left|-x-2\right| = \left|x-2\right| + \left|x+2\right| = f\left(x\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ là hàm số chẵn

$g\left(-x\right) = -x^3 - 5x = -\left(x^3 + 5x\right) = -f\left(x\right) \Rightarrow f\left(x\right)$ là hàm số lẻ

Câu 17. Nêu tính chẵn, lẻ của hai hàm số $f\left(x\right) = \left|x+2\right| - \left|x-2\right|$, $g\left(x\right) = -\left|x\right|$?

A. $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

B. $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ, $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

C. $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ, $g\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

D. $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, $g\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

 Xét $f\left(x\right)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$f\left(-x\right) = \left|-x+2\right| - \left|-x-2\right| = -\left(\left|x+2\right| - \left|x-2\right|\right) = -f\left(x\right)$.

Nên $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

 Xét $g\left(x\right)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x)$.

Nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 18: Cho hai hàm số $f(x) = |x+2| - |x-2|$, $g(x) = -|x|$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số chẵn.

B. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số chẵn.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ, $g(x)$ là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn B

 Xét $f(x)$ có TXĐ. $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$f(-x) = |-x+2| - |-x-2| = -(|x+2| - |x-2|) = -f(x)$.

Nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

 Xét $g(x)$ có TXĐ. $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$g(-x) = -|-x| = -|x| = g(x)$.

Nên $g(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 19: Cho hai hàm số $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Có thể kết luận gì về chiều biến thiên của hàm số $y = f(x) + g(x)$ trên khoảng $(a;b)$?

A. đồng biến. **B.** nghịch biến.

C. không đổi. **D.** không kết luận được

Lời giải

Chọn D

Lấy hàm số $f(x) = x$ và $g(x) = -x$ trên $(0;1)$ thỏa mãn giả thiết

Ta có $y = f(x) + g(x) = x - x = 0 \longrightarrow$ không kết luận được tính đơn điệu.

Câu 20: Cho hai hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}$ và $g\left(x\right)=\left|x^3\right|-4\left|x\right|$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn và $g\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

B. $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

C. $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ là hàm số lẻ.

D. $f\left(x\right)$ là hàm số lẻ và $g\left(x\right)$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}$ có

Tập xác định: $D=\left[-1;1\right]\backslash\left\{0\right\}$.

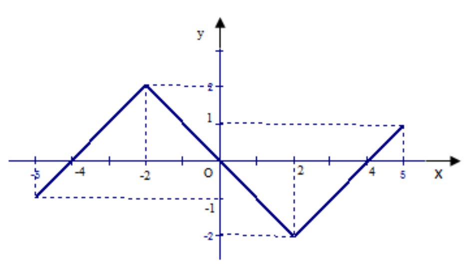
Ta có: $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $f\left(-x\right)=\dfrac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{-x}=-f\left(x\right)$. Vậy nên;hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x}$ là hàm số lẻ.

Xét hàm số có

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ và $g\left(-x\right)=\left|\left(-x\right)^3\right|-4\left|-x\right|=\left|x^3\right|-4\left|x\right|=g\left(x\right)$. Vậy nên;hàm số $g\left(x\right)=\left|x^3\right|-4\left|x\right|$ là hàm số chẵn.

Câu 21. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định là $\left[-5;5\right]$ và đồ thị của nó được biểu diễn bởi hình dưới đây.



Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-2;2\right)$.

B. Đồ thị cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5;-2)$ và $(2;5)$.

D. Hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số chẵn nhận Oy làm trục đối xứng.

Câu 22. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Hàm số $y=\sqrt{x^2+2x+2}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=x^3$ là hàm số lẻ.

C. Hàm số $y=(x-1)^2$ là hàm số chẵn.

D. Hàm số $y=x^2+1$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y=f(x)=(x-1)^2$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}\\ f(-x)=(-x-1)^2\neq f(x)\end{cases}\Rightarrow f(x)$ không là hàm số chẵn.

Câu 23. Cho hàm số $y=x^4+1$ có đồ thị (C). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (C) nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

B. (C) qua $A(0;2)$.

C. (C) tiếp xúc Ox.

D. (C) nhận trục tung làm trục đối xứng.

Lời giải

Chọn D

$(C): y=f(x)=x^4+1$, TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$+\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$+f(-x)=x^4+1=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Nên $y=f(x)$ là hàm số chẵn, nên (C) nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 24: Cho các khẳng định:

(I). Hàm số $y=x^4+12x^2-5$ là hàm số chẵn.

(II). Hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ là hàm số lẻ.

(III). Hàm số $y=\sqrt{20-x}+\sqrt{20+x}$ là hàm số chẵn.

(IV). Hàm số $y=|x-20|-|x+20|$ là hàm số lẻ.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là bao nhiêu?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

•Xét hàm số $y=f(x)=x^4+12x^2-5$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ và $f(-x)=(-x)^4+12(-x)^2-5=x^4+12x^2-5=f(x)$.

Do đó $y=f(x)=x^4+12x^2-5$ là hàm số chẵn. Vậy đúng.

•Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Tồn tại $-1\in D$ mà $1\notin D$.

Do đó $y=f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ. Vậy sai.

• Xét hàm số $y=f(x)=\sqrt{20-x}+\sqrt{20+x}$.

Tập xác định $D=[-20;20]$.

Với mọi $x\in D\Rightarrow -x\in D$ và

$f(-x)=\sqrt{20-(-x)}+\sqrt{20+(-x)}=\sqrt{20+x}+\sqrt{20-x}=f(x)$.

Do đó $y=f(x)=\sqrt{20-x}+\sqrt{20+x}$ là hàm số chẵn. Vậy đúng.

• Xét hàm số $y=f(x)=|x-20|-|x+20|$.

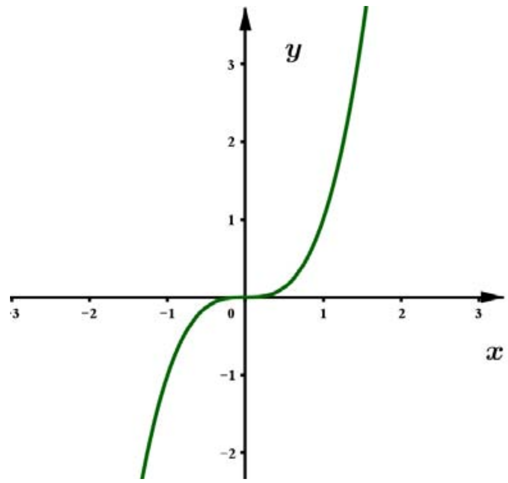
Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với mọi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ và

$f(-x)=|(-x)-20|-|(-x)+20|=|x+20|-|x-20|=-\left(|x-20|-|x+20|\right)=-f(x)$

Do đó $y=f(x)=|x-20|-|x+20|$ là hàm số lẻ. Vậy đúng.

Câu 25. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tnh giá trị biểu thức $f\left(\sqrt{2018}\right)+f\left(-\sqrt{2018}\right)$

A. -2018 . **B.** 0. **C.** 2018. **D.** 4036.

Lời giải

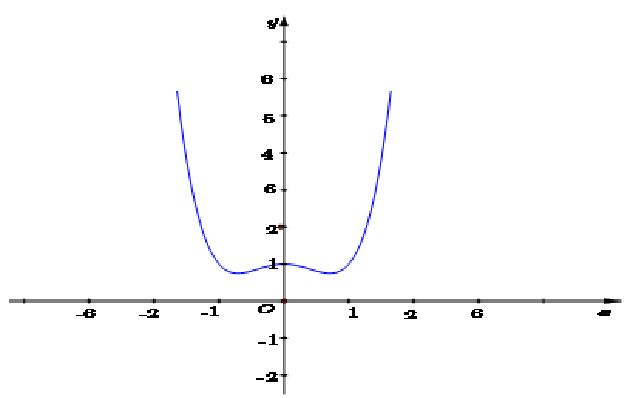
Chọn B

Dựa vào hình dáng của đồ thị ta thấy rằng hàm số đối xứng qua $O(0;0)$ nên là hàm số lẻ.

Suy ra $f(-x)=-f(x)\Rightarrow f(-x)+f(x)=0$

Vì vậy $f\left(\sqrt{2018}\right)+f\left(-\sqrt{2018}\right)=0$.

Câu 26. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. $f(-1)=f(1)=1$.

B. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn đồ thị ta có :

$f(-1)=f(1)=1\Rightarrow$ A đúng.

Đồ thị không có tâm đối xứng nên B sai.

Trên khoảng $(1;5)$ đồ thị hàm số đi lên nên hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)\Rightarrow$ C đúng.

Trên khoảng $(-6;-1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-6;-1)\Rightarrow$ D đúng.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x^3-6 & \text{khi } x\le -2\\ |x| & \text{khi } -2<x<2\\ x^3-6 & \text{khi } x\ge 2\end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số $f(x)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

B. Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng qua trục hoành.

C. $f(x)$ là hàm số lẻ.

D. $f(x)$ là hàm số chẵn

Lời giải

Chọn D

Hàm số có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Với $x\in(-2;2)$ ta có $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$

Với $x\in(-\infty;-2)\Rightarrow -x\in(2;+\infty)$; $f(-x)=(-x)^3-6=-x^3-6=f(x)$ và ngược lại

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)=(m^2+3m-4)x^{2017}+m^2-7$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số f là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$. Tính **tổng** các phần tử của S.

A. 0. **B.** -3. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $2\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Suy ra: $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có: $f(-x)=-(m^2+3m-4)x^{2017}+m^2-7$.

Để f là hàm số lẻ thì $\forall x\in D$, $f(x)=-f(-x)$.

$\Rightarrow \left(m^2+3m-4\right)x^{2017}+m^2-7=\left(m^2+3m-4\right)x^{2017}-m^2+7$

$\Rightarrow m^2=7 \Rightarrow m=\pm\sqrt{7}$. Vậy tổng các phần tử của S là $\sqrt{7}+\left(-\sqrt{7}\right)=0$.

Câu 29. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=2x^3+2\left(m^2-4\right)x^2+\left(4+m\right)x+3m-6$ là một hàm số lẻ

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải

Chọn B

$y=f\left(x\right)=2x^3+2\left(m^2-4\right)x^2+\left(4+m\right)x+3m-6$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Có $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

Hàm số $y=f\left(x\right)$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow f\left(-x\right)=-f\left(x\right),\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2x^3+2\left(m^2-4\right)x^2-\left(4+m\right)x+3m-6=-\left[2x^3+2\left(m^2-4\right)x^2+\left(4+m\right)x+3m-6\right],\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2\left(m^2-4\right)x^2+\left(3m-6\right)=0,\forall x\in\mathbb{R}$

Câu 30. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{m\sqrt{2018+x}+(m^2-2)\sqrt{2018-x}}{(m^2-1)x}$ có đồ thị là (C_m) (m là tham số). Số giá trị của m để đồ thị (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

ĐK : $m^2-1\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq -1 \end{cases}$.

Vì đồ thị (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng nên hàm số $f\left(x\right)$ là hàm số chẵn, suy ra $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$.

Ta có : $f\left(-x\right)=\dfrac{m\sqrt{2018-x}+(m^2-2)\sqrt{2018+x}}{(m^2-1)\left(-x\right)}=\dfrac{\left(2-m^2\right)\sqrt{2018+x}-m\sqrt{2018-x}}{\left(m^2-1\right)x}$.

Đồng nhất, ta được : $\begin{cases} 2-m^2=m \\ m^2-2=-m \end{cases} \Rightarrow m^2+m-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện, suy ra $m=-2$ thỏa mãn.

BÀI 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

I. Ôn tập về hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất ***y = ax + b***

- Tập xác định: D = R.
- Sự biến thiên:
    - Khi *a > 0*, hàm số đồng biến trên R.
    - Khi *a < 0*, hàm số nghịch biến trên R.
- Đồ thị là đường thẳng có hệ số góc bằng *a*, cắt trục tung tại điểm B.

Chú ý: *Cho hai đường thẳng : y = ax + b và : y = a′x + b′*

- *song song với* $\Leftrightarrow a = a'$ *và* $b \neq b'$.
- *trùng với* $\Leftrightarrow a = a'$ *và* $b = b'$.
- *cắt* $\Leftrightarrow a \neq a'$.

II. Hàm số hằng $y = b$

Đồ thị của hàm số $y = b$ là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0;b)$. Đường thẳng này gọi là đường thẳng $y = b$

III. Hàm số $y = |x|$

1. TXĐ: $D = \mathbb{R}$

2. Chiều biến thiên

$$y = |x| = \begin{cases} x & khi\ x \geq 0 \\ -x & khi\ x < 0 \end{cases}$$

3. Đồ thị

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

1. Phương pháp

Cho hàm số $y = ax + b,\ (a \neq 0)$

- Khi *a > 0*, hàm số đồng biến trên R.
- Khi *a < 0*, hàm số nghịch biến trên R.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (2m+3)x + m + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Hàm số $y=(2m+3)x+m+3$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m+3<0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của tham số để $y=(m-1)x-\sqrt{2-m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

Hướng dẫn giải

Hàm số $y=(m-1)x-\sqrt{2-m}$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow m-1>0 \Leftrightarrow m>1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Khẳng định nào về hàm số $y=3x+5$ là **sai**:

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Đồ thị cắt Ox tại $\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$.

C. Đồ thị cắt Oy tại $(0;5)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y=3x+5$ có hệ số $a=3>0$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$, suy ra đáp án D sai.

Câu 2. Tìm m để hàm số $y=(3-m)x+2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m>0$. **B.** $m=3$. **C.** $m>3$. **D.** $m<3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=(3-m)x+2$ có dạng hàm số bậc nhất.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $3-m<0 \Leftrightarrow m>3$.

Câu 3. Tìm m để hàm số $y=(-2m+1)x+m-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m<\dfrac{1}{2}$. **B.** $m>\dfrac{1}{2}$. **C.** $m<3$. **D.** $m>3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Khi $-2m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=-\dfrac{5}{2}<0$ nên nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Vậy hàm số $y=(-2m+1)x+m-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$-2m+1>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{2}$.

Câu 4. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(m-2\right)x+1$. Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?; nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Với $m\neq 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m>2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Với $m\neq 2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m<2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Với $m<2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m=2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

D. Với $m>2$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$; $m<2$ thì hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $f\left(x\right)=\left(m-2\right)x+1$ đồng biến khi $m-2>0\Leftrightarrow m>2$.

Hàm số $f\left(x\right)=\left(m-2\right)x+1$ nghịch biến khi $m-2<0\Leftrightarrow m<2$.

Câu 5. Cho hàm số $f\left(x\right)=\left(\sqrt{7}-m\right)x+3$. Có bao nhiêu số tự nhiên m để $f\left(x\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Để hàm số $f(x)=\left(\sqrt{7}-m\right)x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\sqrt{7}-m>0\Leftrightarrow m<\sqrt{7}$

Vậy $m\in\{0;1;2\}$ thỏa mãn $m<\sqrt{7}$ để hàm số $f(x)=\left(\sqrt{7}-m\right)x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Dạng 2: Đồ thị hàm số bậc nhất

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

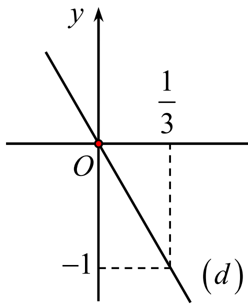
Câu 1. Hệ số góc của đồ thị hàm số $y=2018x-2019$ bằng

A. $-\dfrac{2019}{2018}$. **B.** 2018. **C.** -2019. **D.** $-\dfrac{2018}{2019}$.

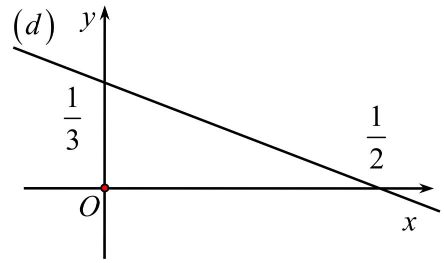
Hướng dẫn giải

Chọn B.

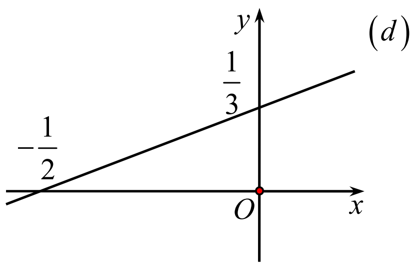
Câu 2. Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$ là

A. 

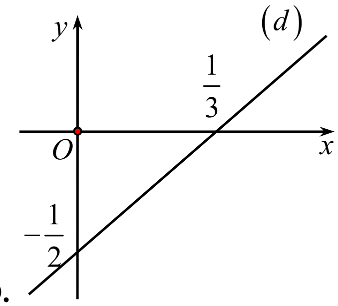
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

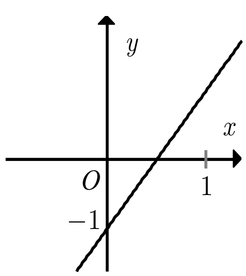
Hướng dẫn giải

Chọn C.

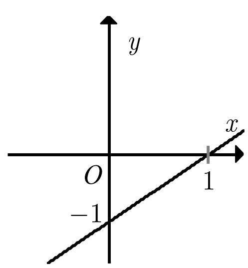
Từ giả thiết hàm số đồng biến nên loại đáp án A và **B.**

Mặt khác cho $x = 0$ vào $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ nên loại đáp án **D.**

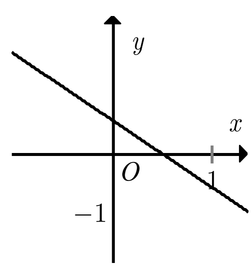
Câu 3. Hàm số $y = 2x - 1$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



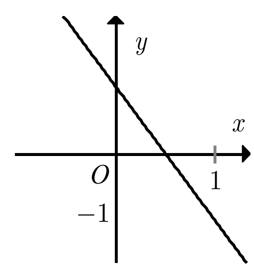
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

A. Hình 2 **B.** Hình 4. **C.** Hình 3. **D.** Hình 1.

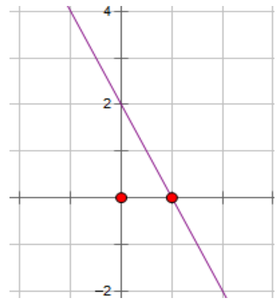
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = 2x - 1$ đi qua hai điểm có tọa độ $(0;-1)$ và $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Do đó chỉ có hình 1 thỏa mãn.

Câu 4. Hàm số nào cho dưới đây có đồ thị như hình vẽ bên:



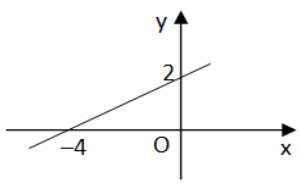
A. $y=-2x+2$. **B.** $y=x+2$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=2x+2$.

Lời giải

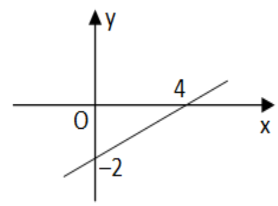
Chọn A.

Đồ thị hàm số cắt Ox và Oy lần lượt tạ $A(1;0)$ và $B(0;b)$.

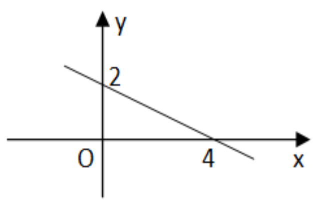
Câu 5. Đồ thị của hàm số $y=-\dfrac{x}{2}+2$ là hình nào?



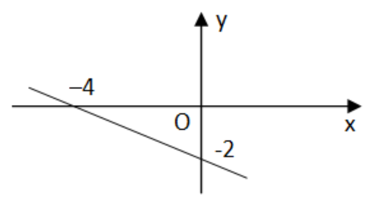
A.



B.



C.



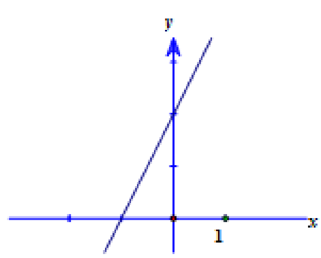
D.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=-\dfrac{x}{2}+2$ đi qua $A(0;2), B(4;0)$. Quan sát đồ thị ta được đáp án C thỏa yêu cầu.

Câu 6. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



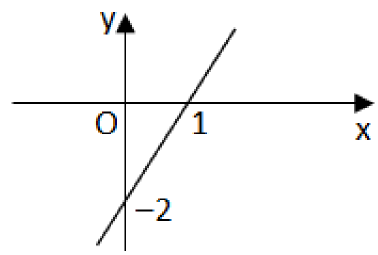
A. $y=-2x+2$. **B.** $y=2x+2$.**C.** $y=2x-1$. **D.** $y=-\frac{1}{2}x-1$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số là đường thẳng đi qua 2 điểm $A(-1;0), B(0;2)$. Hàm số có dạng $y=ax+b$ ta được: $\begin{cases}0=-a+b\\2=a.0+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}\Rightarrow y=2x+2$.

Câu 7 Hình vẽ sau đây là đồ thị của hàm số nào?



.

A. $y=x-2$. **B.** $y=-x-2$. **C.** $y=-2x-2$. **D.** $y=2x-2$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử hàm số cần tìm có dạng: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$.

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(0;-2)$, $(1;0)$nên ta có: $\begin{cases}-2=b\\0=a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y=2x-2$.

Câu 8: Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y=3x+1$?

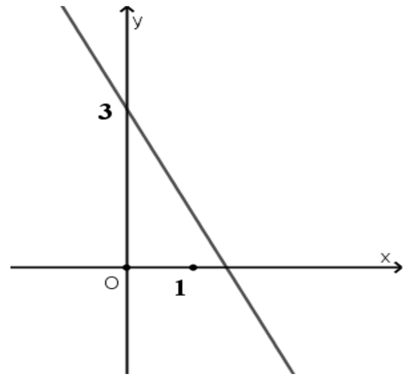
A. $M(2;6)$. **B.** $N(1;4)$. **C.** $P(0;1)$. **D.** $Q(-1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3.2+1=7\neq 6$, do đó $M(2;6)$ không thuộc đồ thị hàm số $y=3x+1$.

Câu 9: Đường thẳng trong hình bên là đồ thị của một hàm số nào?



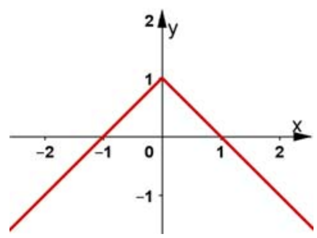
A. $y=-5x+3$. **B.** $y=x+3$. **C.** $y=3-3x$. **D.** $y=3-2x$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $y=ax+b$. Dựa vào đồ thị có $\begin{cases}3=0.x+b\\0=\dfrac{3}{2}a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=3\end{cases}$.

Câu 10. Đường gấp khúc trong hình vẽ là dạng đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê trong các phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



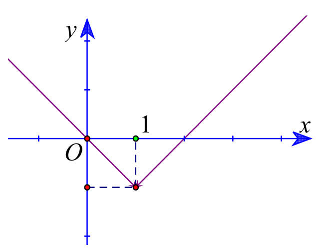
A. $y=|x|-1$. **B.** $y=-|x+1|$. **C.** $y=-|x-1|$. **D.** $y=1-|x|$.

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;1)$ và $(1;0)$ nên chỉ có hàm số $y=1-|x|$ thỏa mãn.

Câu 11. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình vẽ?



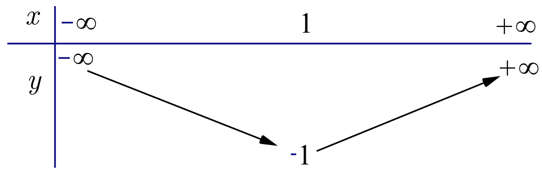
A. $y=\begin{cases}x-2,\ khi\ x\ge 1\\x,\ khi\ x<1\end{cases}$. **B.** $y=\begin{cases}x+2,\ khi\ x\ge 1\\-x,\ khi\ x<1\end{cases}$.

C. $y=\begin{cases}x-2,\ khi\ x\ge 1\\-x,\ khi\ x<1\end{cases}$. **D.** $y=\begin{cases}x,\ khi\ x\ge 1\\-x,\ khi\ x<1\end{cases}$.

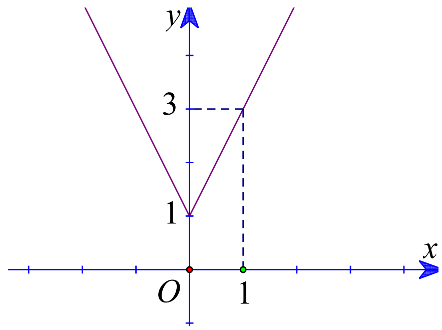
Lời giải

Chọn C

Bảng biến thiên:



Câu 12. Đồ thị bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=|x|+1$. **B.** $y=2|x|+1$. **C.** $y=|2x+1|$. **D.** $y=|x+1|$

Lời giải

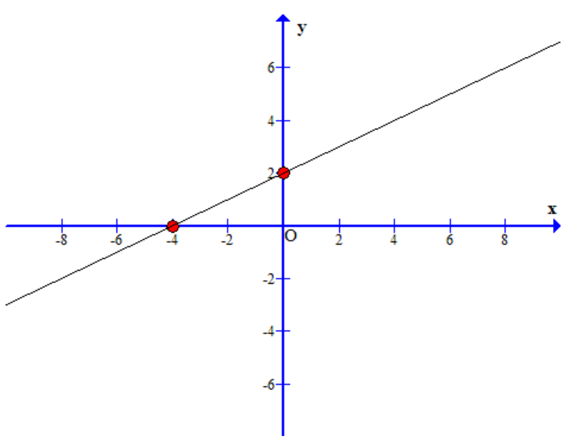
Chọn B

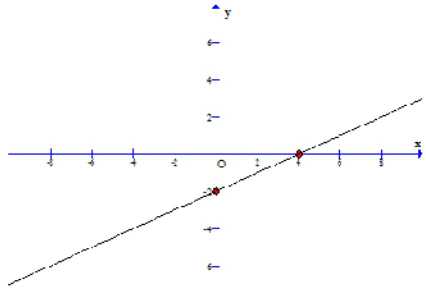
Đồ thị nhận trục Oy là trục đối xứng nên hàm số tương ứng là hàm chẵn nên loại phương án C, D.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;3)$. Thay vào B thấy thỏa mãn nên chọn B.

Câu 13. Đồ thị của hàm số $y=-\dfrac{x}{2}+2$ là hình nào?

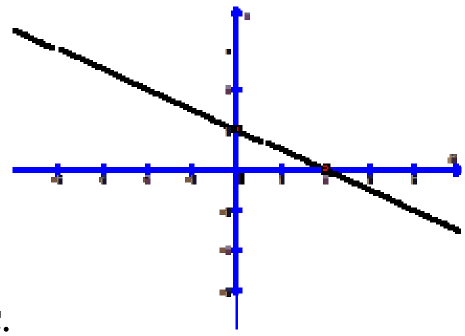
A.



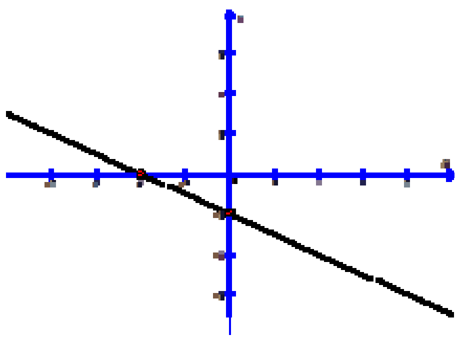


B.

B.



C.



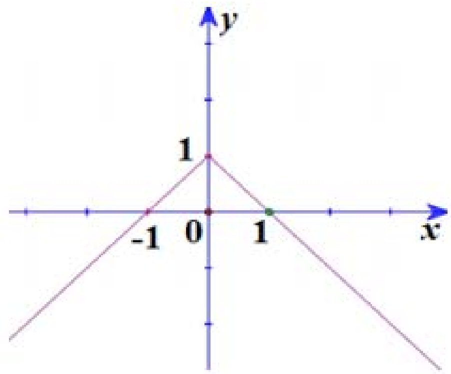
D.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số $y=-\dfrac{x}{2}+2$ cắt trục hoành tại điểm $(4;0)$ và cắt trục tung tại điểm $(0;2)$ nên chọn đáp án C.

Câu 14. Hình vẽ sau đây là đồ thị hàm số nào?



A. $y=1-|x|$.   **B.** $y=|x|+1$.   **C.** $y=|x|-1$.   **D.** $y=|x|$.

Lời giải

Chọn A

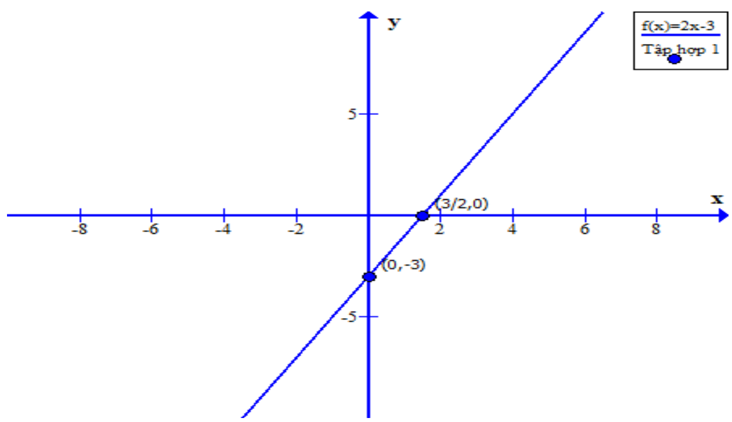
Nhìn vào đồ thị hàm số đã cho ta thấy:

-Đồ thị đi qua điểm $A(0;1)$ nên loại trừ đáp án **C, D.**

-Đồ thị đi qua điểm $\mathrm{B}(-1;0)$, $\mathrm{C}(1;0)$ nên loại trừ đáp án **B.**

Chọn đáp án A

Câu 15. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



A. $y=x-3$.   **B.** $y=2x-3$.   **C.** $y=4x-6$.   **D.** $y=-4x+6$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị là một đường thẳng qua điểm $(0;-3)$ và $\left(\frac{3}{2};0\right)$

Nên hàm số có dạng: $y=ax+b$ thỏa: $\begin{cases}-3=a.0+b\\ 0=\frac{3}{2}a+b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$

Câu 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $[-3;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

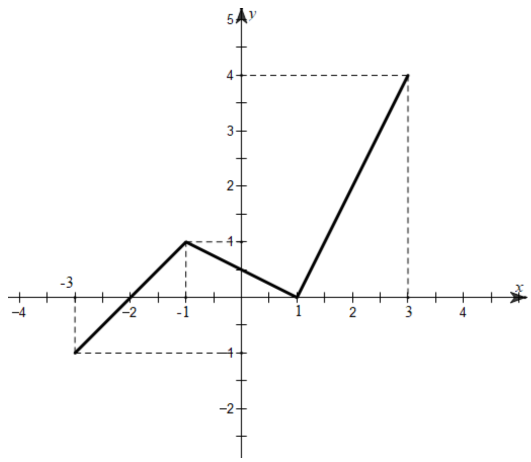
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;1)$ và $(1;4)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

D. Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải

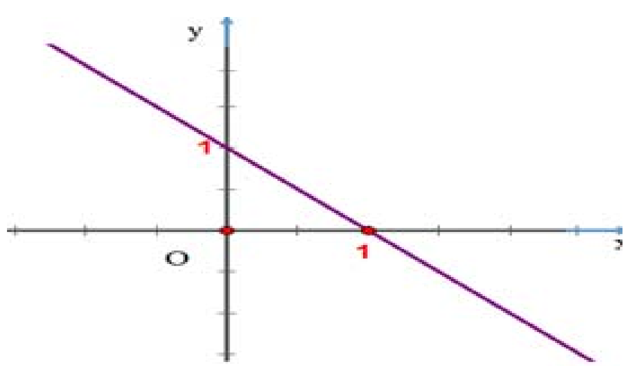


Chọn C

+) Dựa vào đồ thị nhận thấy: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$ và $(1;3)$.

Câu 17. Hàm số nào trong bốn phương án liệt kê ở A, B, C, D có đồ thị như hình bên

A. $y=-x+2$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=x+1$. **D.** $y=-x+1$.



Lời giải

Chọn D

Gọi $d: y=ax+b$

Đồ thị hàm số cắt các trục tọa độ lần lượt tại $A(0;1)$ và $B(1;0)$

$$\begin{cases} A(0;1) \in d \\ B(1;0) \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow d : y = -x + 1.$$

Dạng 3: Vị trí tương đối của hai đường thẳng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = \frac{1}{2}x + 100$ và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x + 100$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (d_1) và (d_2) trùng nhau. **B.** (d_1) và (d_2) vuông góc nhau.

C. (d_1) và (d_2) cắt nhau. **D.** (d_1) và (d_2) song song với nhau.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số gốc của (d_1) và (d_2). Khi đó

$k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow k_1.k_2 = -\frac{1}{4}$ nên (d_1) và (d_2) không vuông góc nhau.

Xét hệ: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 100 \\ y = -\frac{1}{2}x + 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 100 \\ \frac{1}{2}x + y = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 100 \end{cases}$

Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Cách 2: Ta thấy $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ nên (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Câu 2. Biết ba đường thẳng $d_1 : y = 2x - 1$, $d_2 : y = 8 - x$, $d_3 : y = (3 - 2m)x + 2$ đồng quy. Giá trị của m bằng

A. $m = -\frac{3}{2}$. **B.** $m = 1$. **C.** $m = -1$. **D.** $m = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Gọi M là giao điểm của d_1 và d_2.

Xét hệ: $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 8 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = -1 \\ x + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow M(3;5)$.

+ $M \in d_3$ nên ta có: $5=(3-2m).3+2 \Leftrightarrow 5=9-6m+2 \Leftrightarrow 6m=6 \Leftrightarrow m=1$.

Câu 3. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(m^2-3)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$?

A. $m=\pm 2$. **B.** $m=\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng $y=(m^2-3)x+3m+1$ song song với đường thẳng $y=x-5$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2-3=1 \\ 3m+1\neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=4 \\ 3m\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \vee m=2 \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Câu 4. Các đường thẳng $y=-5(x+1)$; $y=3x+a$; $y=ax+3$ đồng quy với giá trị của a là

A. -11. **B.** -10. **C.** -12. **D.** -13.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $d_1: y=-5x-5$, $d_2: y=3x+a$, $d_3: y=ax+3$ $(a\neq 3)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2: $-5x-5=3x+a \Leftrightarrow x=\dfrac{-a-5}{8}$.

Giao điểm của d_1 và d_2 là $A\left(\dfrac{-a-5}{8};\dfrac{5a-15}{8}\right)$.

Đường thẳng d_1, d_2 và d_3 đồng qui khi $A\in d_3$

$$\Leftrightarrow \frac{5a-15}{8}=a.\frac{-a-5}{8}+3 \Leftrightarrow a^2+10a-39=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-13 \end{array}\right. \Leftrightarrow a=-13.$$

Dạng 4: Xác định hàm số bậc nhất

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Biết đồ thị hàm số $y=ax+b$ đi qua điểm $M(1;4)$ và có hệ số góc bằng -3. Tìm a,b.

Lời giải

Vì $y=ax+b$ có hệ số góc bằng -3 nên $a=-3$.

Mà $y=ax+b$ đi qua $M(1;4)$ nên $y=-3x+b \Leftrightarrow 4=-3.1+b \Leftrightarrow b=7$.

Ví dụ 2: Đồ thị hàm số $y=ax+b$ là một đường thẳng đi qua $A(3;4)$ và song song với đường thẳng $y=3x-1$. Tìm a,b.

Lời giải

Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua $A(3;4)$ và song song với đường thẳng $y = 3x - 1$;suy ra $\begin{cases} 3a + b = 4 \\ a = 3 \\ b \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 \\ a = 3 \end{cases}$.

Ví dụ 3: Đồ thị hàm số $y = ax + b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 3$ và đi qua điểm $M(-2;4)$. Tìm $a, b.$

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 3 \Leftrightarrow 3a + b = 0$.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(-2;4) \Leftrightarrow -2a + b = 4$.

Ta có hệ $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ -2a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{5} \\ b = \dfrac{12}{5} \end{cases}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$?

A. $y = \dfrac{2}{\sqrt{2}}x - 5$. **B.** $y = 1 - \sqrt{2}x$. **C.** $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - 3$. **D.** $y = -\sqrt{2}x + 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hai đường thẳng song song khi hai hệ số góc bằng nhau.

Câu 2. Hàm số $f(x) = (m-1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi

A. $m \neq -1$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \neq 1$. **D.** $m \neq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $f(x) = (m-1)x + 2m + 2$ là hàm số bậc nhất khi và chỉ khi $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.

Câu 3. Tìm m để $f(x) = (m-2)x + 2m - 1$ là nhị thức bậc nhất.

A. $m \neq 2$. **B.** $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$. **C.** $m > 2$. **D.** $m < 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Để $f(x)=(m-2)x+2m-1$ là nhị thức bậc nhất thì $m-2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2$.

Câu 4. Một hàm số bậc nhất $y=f(x)$ có $f(-1)=2$ và $f(2)=-3$. Hàm số đó là

A. $y=-2x+3$. **B.** $f(x)=\dfrac{-5x+1}{3}$.

C. $y=2x-3$. **D.** $f(x)=\dfrac{-5x-1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số đã cho có dạng $y=f(x)=ax+b$.

Ta có $\begin{cases} f(-1)=2 \\ f(2)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a.(-1)+b=2 \\ a.2+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow a=-\dfrac{5}{3},\ b=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $f(x)=\dfrac{-5x+1}{3}$.

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y=ax+b$ đi qua điểm $M(1;4)$ và có hệ số góc bằng -3. Tích $P=ab$?

A. $P=13$. **B.** $P=21$. **C.** $P=4$. **D.** $P=-21$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $y=ax+b$ có hệ số góc bằng -3 nên $a=-3$.

Mà $y=ax+b$ đi qua $M(1;4)$ nên $y=-3x+b \Leftrightarrow 4=-3.1+b \Leftrightarrow b=7$.

Do đó $P=a.b=-3.7=-21$.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây đi qua 2 điểm $A(-1;2)$ và $B(0;-1)$.

A. $y=x+1$. **B.** $y=x-1$. **C.** $y=3x-1$ **D.** $y=-3x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi đường thẳng đi qua hai điểm $A(-1;2)$ và $B(0;-1)$ có dạng: $y=ax+b\ (d)$.

Do $A(-1;2)$ và $B(0;-1)$ thuộc đường thẳng (d) nên a, b là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2=-a+b \\ -1=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Vậy đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(-1;2)$ và $B(0;-1)$ là $y=-3x-1$.

Câu 7. Đường thẳng $y=ax+b$ có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $A(-3;1)$ là

A. $y=-2x+1$. **B.** $y=2x+7$. **C.** $y=2x+5$. **D.** $y=-2x-5$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng có hệ số góc bằng $2\Leftrightarrow a=2\Rightarrow y=2x+b$ và đi qua điểm $A(-3;1)$.

Nên $1=2.(-3)+b\Leftrightarrow b=7$. Vậy hàm số cần tìm là $y=2x+7$.

Câu 8. Đường thẳng đi qua điểm $M(2;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+5$ có phương trình là

A. $y=3x-7$. **B.** $y=3x+5$. **C.** $y=-3x-7$. **D.** $y=-3x+5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Do d vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+5$ nên $d: y=3x+m$.

Do d đi qua điểm $M(2;-1)$ nên $-1=3.2+m\Leftrightarrow m=-7$.

Vậy $d: y=3x-7$.

Câu 9. Điểm A có hoành độ $x_A=1$ và thuộc đồ thị hàm số $y=mx+2m-3$. Tìm m để điểm A nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ phía trên trục hoành .

A. $m>0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m>1$. **D.** $m<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ giả thiết điểm A nằm trong nửa mặt phẳng tọa độ phía trên trục hoành nên $y_A>0$ ta có $y_A=mx+2m-3=m.1+2m-3=3m-3>0\Leftrightarrow m>1$.

Câu 10. Tìm phương trình đường thẳng $d: y=ax+b$. Biết đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ và tạo với hai tia Ox, Oy một tam giác có diện tích bằng 6?

A. $y=-3x+6$. **B.** $y=\left(9-\sqrt{72}\right)x+\sqrt{72}-6$.

C. $y=\left(9+\sqrt{72}\right)x-\sqrt{72}-6$. **D.** $y=3x+6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do đường thẳng d đi qua điểm $I(1;3)$ nên $a+b=3 \Rightarrow a=3-b$.

Giao điểm của d và các tia Ox, Oy lần lượt là $M\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và $N(0;b)$

.

Do đó: $S_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}.OM.ON=\frac{1}{2}.\left|\frac{b}{a}\right|.|b|=\frac{b^2}{2|a|}$. Mà

$$S_{\Delta OMN}=6 \Leftrightarrow b^2=12|a| \Leftrightarrow b^2=12|3-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=36-12b \\ b^2=-36+12b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=6 \\ b=-6+\sqrt{72}\ (\text{L}) \\ b=-6-\sqrt{72}\ (\text{L}) \end{array}\right..$$

Với $b=6 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow d: y=-3x+6$.

Câu 11. Tìm điểm $M(a;b)$ với $a<0$ nằm trên $\Delta: x+y-1=0$ và cách $N(-1;3)$ một khoảng bằng 5. Giá trị của $a-b$ là

A. 3. **B.** -1. **C.** -11. **D.** 1 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$M \in \Delta \Rightarrow M(t;1-t) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(-1-t;t+2)$.

Ta có: $MN=5 \Rightarrow MN^2=(-1-t)^2+(2+t)^2=25$

$$\Leftrightarrow 2t^2+6t-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \Rightarrow M(2;-1) \\ t=-5 \Rightarrow M(-5;6) \end{array}\right. \Rightarrow M(-5;6) \Rightarrow a-b=-11$$

Câu 12. Cho hàm số bậc nhất $y=(m^2-4m-4)x+3m-2$ có đồ thị là (d). Tìm số giá trị nguyên dương của m để đường thẳng (d) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác cân (O là gốc tọa độ).

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng (d) tạo với trục hoành và trục tung một tam giác OAB là tam giác vuông cân $\Leftrightarrow$ đường thẳng (d) tạo với chiều dương trục hoành bằng $45°$ hoặc $135°$ $\Leftrightarrow$ hệ số góc tạo của (d) bằng 1 hoặc $-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-4m-4=1 \\ m^2-4m-4=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-4m-3=0 \\ m^2-4m-5=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=5 \\ m=2\pm\sqrt{7} \end{array}\right..$$

Thử lại: $m=5$ thì d không đi qua O.

Vậy có duy nhất một giá trị $m=5$ nguyên dương thỏa ycbt.

Câu 13. Đường thẳng $d: y=(m-3)x-2m+1$ cắt hai trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho tam giác OAB cân. Khi đó, số giá trị của m thỏa mãn là

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$A=d\cap Ox$ nên tọa độ A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=(m-3)x-2m+1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m-1}{m-3} \\ y=0 \end{cases} \text{ nên } A\left(\dfrac{2m-1}{m-3};\ 0\right).$$

$B=d\cap Oy$ nên tọa độ B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=(m-3)x-2m+1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2m+1 \end{cases} \text{ nên } B(0;-2m+1).$$

Ta có $OA=OB \Leftrightarrow \left|\dfrac{2m-1}{m-3}\right|=|-2m+1| \Leftrightarrow |2m-1|\left(\dfrac{1}{|m-3|}-1=0\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-1=0 \\ |m-3|=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{2} \\ m=4,\ m=2 \end{array}\right..$$

Nhận xét: Với $m=\dfrac{1}{2}$ thì $A\equiv B\equiv O(0;0)$ nên không thỏa mãn.

Vậy $m=4,\ m=2$.

Câu 14: Biết rằng với mọi giá trị thực của tham số m, các đường thẳng $d_m: y=(m-2)x+2m-3$ cùng đi qua một điểm cố định là $I(a;b)$. Tính giá trị của biểu thức: $S=a+b$

A. $S=-3$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1$. **D.** $S=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình của đường thẳng đã cho:
$d_m: y=(m-2)x+2m-3=(x+2)m-2x-3$

Vì các đường thẳng d_m luôn đi qua điểm I nên ta tìm x để m bị triệt tiêu

$\Rightarrow I(-2;1) \Rightarrow S=-1$

$\Rightarrow$ Chọn B

Câu 15. Đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ tạo với hệ trục tọa độ Oxy tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$. Khi đó m bằng

A. $m = 2$; $m = 3$. **B.** $m = 2$; $m = 4$. **C.** $m = -2$; $m = 3$. **D.** $m = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi: A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - 2m + 1$ với trục hoành và trục tung

Suy ra $A(2m-1;0)$; $B(0;1-2m)$.

Theo giả thiết thì tam giác có diện tích bằng $\frac{25}{2}$ là tam giác OAB vuông tại O.

Do đó: $S_{OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB = \frac{25}{2}$

$\Leftrightarrow OA.OB = 25 \Leftrightarrow |2m-1|.|1-2m| = 25 \Leftrightarrow |2m-1|.|2m-1| = 25$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m-1=5 \\ 2m-1=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=-2 \end{array}\right.$.

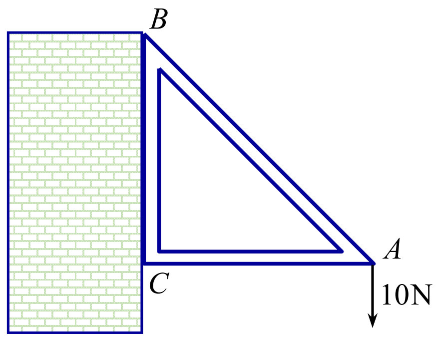
Dạng 4: Bài toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Một giá đỡ được gắn vào bức tường như hình vẽ. Tam giác ABC vuông cân ở đỉnh C. Người ta treo vào điểm A một vật có trọng lượng 10 N. Khi đó lực tác động vào bức tường tại hai điểm B và C có cường độ lần lượt là:



A. $10\sqrt{2}\text{ N}$ và 10 N. **B.** 10 N và 10 N. **C.** 10 N và $10\sqrt{2}\text{ N}$. **D.** $10\sqrt{2}\text{ N}$ và $10\sqrt{2}\text{ N}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cường độ lực tại C bằng cường độ lực tại A và bằng 10 N.

Cường độ lực tại B bằng $10\sqrt{2}\text{ N}$.

Câu 2. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích $800\,m^2$. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu $3.000.000$ đồng trên $100\,m^2$ nếu trồng cà thì cần 30 công và thu $4.000.000$ đồng trên 100 m^2 Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180. Hãy chọn phương án đúng nhất trong các phương án sau:

A. Trồng $600\,m^2$ đậu, $200\,m^2$ cà. **B.** Trồng 500 m^2đậu, 300 m^2cà.

C. Trồng $400\,m^2$ đậu, $200\,m^2$ cà. **D.** Trồng $200\,m^2$ đậu, $600\,m^2$ cà.

Hướng dẫn giải

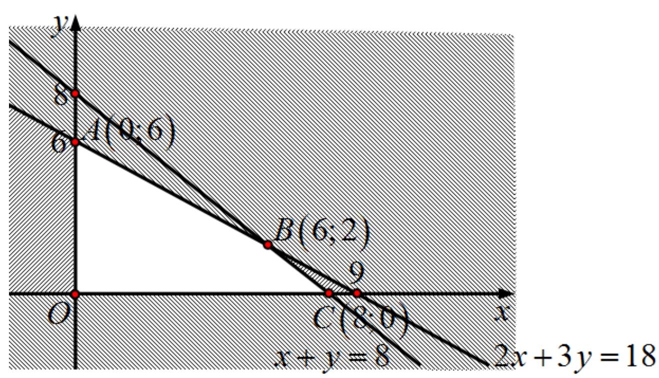
Chọn A.

Gọi x là số $x00$ m^2 đất trồng đậu, y là số $y00$ m^2 đất trồng cà. Điều kiện $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Số tiền thu được là $T = 3x + 4y$ triệu đồng.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} x + y \le 8 \\ 20x + 30y \le 180 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \le 8 \\ 2x + 3y \le 18 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Đồ thị:



Dựa đồ thị ta có tọa độ các đỉnh $A(0;6)$, $B(6;2)$, $C(8;0)$, $O(0;0)$.

Thay vào $T = 3x + 4y$ ta được $T_{\max} = 26$ triệu khi trồng $600\,m^2$ đậu và 200 m^2 cà.

Câu 3. Một nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 8 ha trong vụ Đông Xuân. Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Nếu trồng đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất. Biết rằng tổng số công không quá 180.

A. 1 ha đậu và 7 ha cà. **B.** 6 ha đậu và 2 ha cà.

C. 2 ha đậu và 6 ha cà. **D**. 3 ha đậu và 5 ha cà.

Lời giải

Chọn B

Gọi diện tích trồng đậu là x , , vậy diện tích trồng cà là $8-x$.

Số công phải bỏ ra là: $20x+30(8-x) \ =240-10x$.

Do tổng số công không quá 180 nên ta có: $240-10x\le 180 \Leftrightarrow x\ge 6$.

Số tiền thu được là $g(x)=3x+4(8-x)=32-x$; $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[6;8]$ nên $\max\limits_{[6;8]} g(x)=26$ tại $x=6$. Vậy cần trồng 6 ha đậu và 2 ha cà.

BÀI 3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và $a \neq 0$.

I. Đồ thị của hàm số bậc hai

$$y = ax^2 + bx + c$$

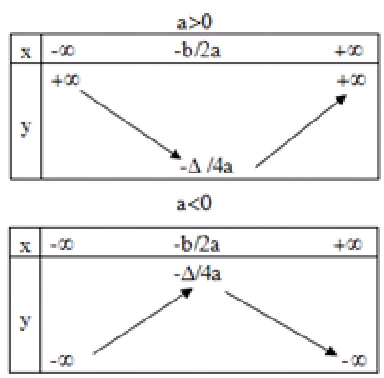
- Tập xác định: D = R
- Đồ thị là một parabol có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, nhận đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$ làm trục đối xứng, hướng bề lõm lên trên khi $a > 0$, xuông dưới khi $a < 0$.

Chú ý: *Để vẽ đường parabol ta có thể thực hiện các bước như sau:*

- *Xác định toạ độ đỉnh* $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
- *Xác định trục đối xứng* $x = -\dfrac{b}{2a}$ *và hướng bề lõm của parabol.*
- *Xác định một số điểm cụ thể của parabol .*
- *Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.*

II. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

Bảng biến thiên:



Như vậy:

- Khi $a > 0$ hàm nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a} : +\infty\right)$ và có GTNN là $\dfrac{-\Delta}{4a}$ khi $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Khi $a < 0$ hàm đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a} : +\infty\right)$

và có GTLN là $\frac{-\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Bảng biến thiên, tính đơn điệu, GTLN và GTNN của hàm số

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-3x$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Lời giải

Hàm số $y=x^2-3x$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}\in\left[0;2\right]$.

Vậy $\begin{cases} m=\min y=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4} \\ M=\max y=\max\left\{f\left(0\right),f\left(2\right)\right\}=\max\left\{0,-2\right\}=0 \end{cases}$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=f\left(x\right)=-x^2-4x+3$ trên đoạn $\left[0;4\right]$.

Lời giải

Hàm số $y=-x^2-4x+3$ có $a=-1<0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x=-\frac{b}{2a}=-2\notin\left[0;4\right]$.

Ta có $\begin{cases} f\left(4\right)=-29 \\ f\left(0\right)=3 \end{cases} \longrightarrow m=\min y=f\left(4\right)=-29;\ M=\max y=f\left(0\right)=3$.

Ví dụ 3: Tìm giá trị thực của tham số $m\neq 0$ để hàm số $y=mx^2-2mx-3m-2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

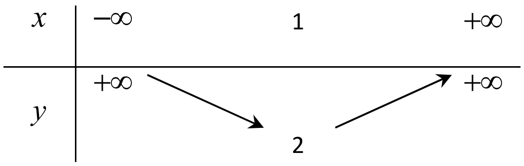
Ta có $x=-\frac{b}{2a}=\frac{2m}{2m}=1$, suy ra $y=-4m-2$.

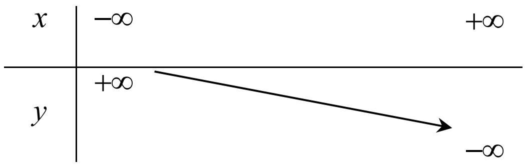
Để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi và chỉ khi $\frac{m}{2}>0\Leftrightarrow m>0$

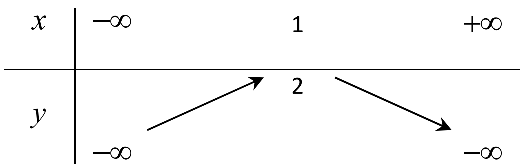
$\Leftrightarrow\begin{cases} m>0 \\ -4m-2=-10 \end{cases}\Leftrightarrow m=2$.

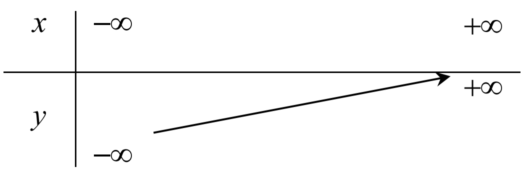
3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+1$:

A.


B.


C.


D.


Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét hàm số $y=-x^2+2x+1$ có $a=-1<0$, tọa độ đỉnh $I(1;2)$ do đó hàm số trên tăng trên khoảng $(-\infty;1)$ và giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 2. Trục đối xứng của parabol $y=-x^2+5x+3$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=\frac{5}{4}$. **B.** $x=-\frac{5}{2}$. **C.** $x=-\frac{5}{4}$. **D.** $x=\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của parabol $y=ax^2+bx+c$ là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$.

Trục đối xứng của parabol $y=-x^2+5x+3$ là đường thẳng $x=\frac{5}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=x^2-2x+3$. Chọn câu đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $a=1>0$, $b=-2$, $c=3$ nên hàm số có đỉnh là $I(1;2)$. Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 4. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)=x^2-4x+5$ trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$, nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$f(x)=x^2-4x+5$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Tọa độ đỉnh $I(2;1)$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4x+1$.

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 13.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3\geq -3$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x=2$.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+9}$ bằng

A. $\dfrac{11}{8}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{8}{11}$. **D.** $\dfrac{4}{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x^2-5x+9=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}\ge\dfrac{11}{4}\Rightarrow\dfrac{2}{x^2-5x+9}\le\dfrac{2}{\frac{11}{4}}=\dfrac{8}{11}$

$\dfrac{2}{x^2-5x+9}=\dfrac{8}{11}\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+9}$ bằng $\dfrac{8}{11}$.

Câu 8. Hàm số $y=x^2-4x+3$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(1;3)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng $x=2$. Ta có $a=1>0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 9. Cho parabol (P) có phương trình $y=3x^2-2x+4$. Tìm trục đối xứng của parabol

A. $x=-\dfrac{2}{3}$. **B.** $x=-\dfrac{1}{3}$. **C.** $x=\dfrac{2}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Có $a=3$; $b=-2$; $c=4$.

+ Trục đối xứng của parabol là $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{1}{3}$.

Câu 10. Cho hàm số $y=2x^2-4x+3$ có đồ thị là parabol (P). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. (P) không có giao điểm với trục hoành. **B.** (P) có đỉnh là $S(1;1)$.

C. (P) có trục đối xứng là đường thẳng $y=1$. **D.** (P) đi qua điểm $M(-1;9)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(P) có đỉnh là $S(1;1)$; trục đối xứng là đường thẳng $x=1$ nên C sai.

và (P) đi qua điểm $M(-1;9)\Rightarrow$ B, D đều đúng.

Xét phương trình $2x^2-4x+3=0$ vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ nên (P) không có giao điểm với trục hoành $\Rightarrow$ A đúng.

Câu 11. Hàm số $y=-x^2+2x-5$ đồng biến trên khoảng:

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có đồ thị hàm số là một parabol có hoành độ đỉnh: $x=-\dfrac{b}{2a}=1$

Mà hệ số $a=-1<0$ nên đồ thị hàm số có bề lõm quay xuống

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

Câu 12. Cho hàm số $y=x^2-2x+4$ có đồ thị (P). Tìm mệnh đề **sai**.

A. (P) có đỉnh $I(1;3)$.

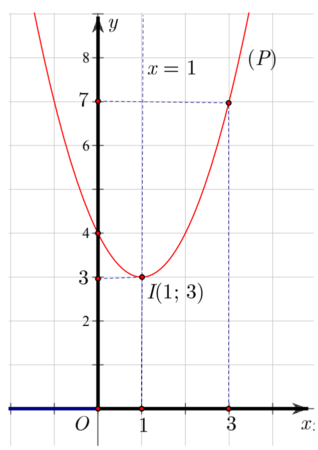
B. $\min y=4,\forall x\in[0;3]$.

C. (P) có trục đối xứng $x=1$.

D. $\max y=7,\forall x\in[0;3]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Dựa vào đồ thị của hàm số $y=x^2-2x+4:(P)$, ta nhận thấy:

(P) có đỉnh $I(1;3)$ nên A đúng.

$\min y=3,\forall x\in[0;3]$, đạt được khi $x=1$ nên B sai.

(P) có trục đối xứng $x=1$ nên C đúng.

$\max y=7,\forall x\in[0;3]$, đạt được khi $x=3$ nên D đúng.

Câu 13. Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $(3;4)$?

A. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

B. $y=x^2-7x+2$.

C. $y=-3x+1$.

D. $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

+ Hàm số $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$ đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên đồng biến trên $(3;4)$. **Chọn A**

+ Hàm số $y=x^2-7x+2$ đồng biến trên $\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$. Loại **B.**

+ Hàm số $y=-3x+1$ nghịc biến trên $\mathbb{R}$. Loại **C.**

+ Hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+x-1$ đồng biến trên $(-\infty;1)$. Loại **D.**

Câu 14. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình bên?

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=-x^2+5x+2$.

B. $y=-\frac{1}{2}x^2+x$.

C. $y=x^2-3x+1$.

D. $y=\frac{1}{4}x^2-x+3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị có bề lõm hướng xuống nên loại C, **D.**

Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+x$ có tọa độ đỉnh $I\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Câu 16. Bảng biến thiên của hàm số $y=-2x^2+4x+1$ là bảng nào sau đây?

A.

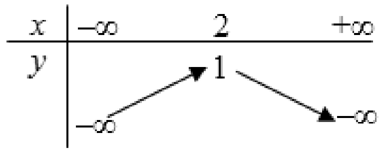
x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

.

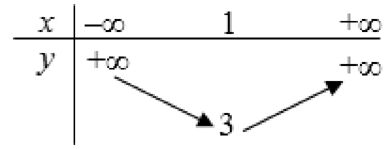
B.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

.

C. 

.

D. 

.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Do hệ số $a = -2 < 0$ nên parabol có bề lõm hướng xuống và đỉnh có tọa độ $I(1;3)$.

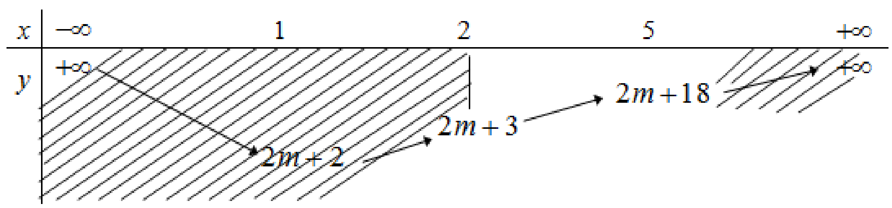
Câu 17. Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng -3.

A. $m = -3$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ trên đoạn $[2;5]$:



Do đó giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ bằng $2m + 3$.

Theo giả thiết $2m + 3 = -3 \Leftrightarrow m = -3$.

Câu 18. Cho hàm số $y = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m \ (m > 0)$ xác định trên $[-1;1]$. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;1]$ lần lượt là y_1, y_2 thỏa mãn $y_1 - y_2 = 8$. Khi đó giá trị của m bằng

A. $m = 1$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$, $m = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $y = f(x) = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right)x + m$.

Hoành độ đỉnh của đồ thị hàm số là $x = m + \frac{1}{m} \geq 2$.

Vì hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; m + \frac{1}{m}\right)$.

Suy ra, hàm số nghịch biến $[-1;1]$.

$\Rightarrow y_1 = f(-1) = 3m + \dfrac{2}{m} + 1$.

$y_2 = f(1) = 1 - m - \dfrac{2}{m}$.

Theo đề bài ta có: $y_1 - y_2 = 8$

$\Leftrightarrow 3m + \dfrac{2}{m} + 1 - 1 + m + \dfrac{2}{m} = 8 \; (m > 0) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Câu 19. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x - 3$ trên đoạn $[-1;4]$ là

A. $y_{\min} = -\dfrac{37}{4}$, $y_{\max} = 21$. **B.** $y_{\max} = \dfrac{37}{4}$, $y_{\min} = -21$.

C. $y_{\min} = \dfrac{37}{4}$, $y_{\max} = 21$. **D.** $y_{\max} = 5$, $y_{\min} = -\dfrac{37}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y = x^4 - 4x^3 - x^2 + 10x - 3 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x^2 + 10x - 5 + 2$

$= (x^2 - 2x)^2 - 5(x-1)^2 + 2 = \left[(x-1)^2 - 1\right]^2 - 5(x-1)^2 + 2$.

Đặt $t = (x-1)^2$, $x \in [-1;4] \Rightarrow t \in [0;9]$.

$y = (t-1)^2 - 5t + 2 = t^2 - 7t + 3 = \left(t - \dfrac{7}{2}\right)^2 - \dfrac{37}{4}$.

Cách 1: Ta có $0 \le \left(t - \dfrac{7}{2}\right)^2 \le \dfrac{121}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{37}{4} \le y \le 21$.

Cách 2: Vẽ BBT

t	0		$\frac{7}{2}$		9
y	3	$\searrow$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	21

Vậy $y_{\min} = -\dfrac{37}{4}$, $y_{\max} = 21$.

Dạng 2: Xác định hàm số bậc hai

1. Phương pháp

- $M(x_0; y_0) \in (P) \Leftrightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$

- (P) có đỉnh $I\left(x_0;y_0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\dfrac{b}{2a} \\ y_0=-\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$ hoặc: $\begin{cases} x_0=-\dfrac{b}{2a} \\ y_0=ax_0^2+bx_0+c \end{cases}$
- (P) nhận $x=x_0$ làm trục đối xứng $\Leftrightarrow x_0=-\dfrac{b}{2a}$
- (P) có giá trị nhỏ nhất (hay lớn nhất) bằng $y_0 \Leftrightarrow \dfrac{-\Delta}{4a}=y_0$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Xác định Parabol $y=ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=-2$ và đồ thị đi qua $A\left(0;6\right)$

Hướng dẫn giải

Parabol có đỉnh $I\left(-2;4\right)$ và đi qua $A\left(0;6\right)$ nên ta có

$\begin{cases} 4a-2b+c=4 \\ c=6 \\ -\dfrac{b}{2a}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=2 \\ c=6 \end{cases}$. Vậy $y=\dfrac{1}{2}x^2+2x+6$.

Ví dụ 2. Parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua $A\left(8;0\right)$ và có đỉnh $I\left(6;-12\right)$. Xác định a,b,c

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có hệ $\begin{cases} 64a+8b+c=0 \\ 36a+6b+c=-12 \\ -\dfrac{b}{2a}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-36 \\ c=96 \end{cases}$.

Ví dụ 3. Tìm các hệ số a,b,c của $(P): y=\text{ax}^2+bx+c,\left(a\neq 0\right)$

a) (P) đi qua $A\left(-1;0\right);B\left(2;0\right);C\left(0;-4\right)$;

b) (P) đi qua $A\left(-1;-2\right)$ và có đỉnh $I\left(1;2\right)$.

Giải

a) Ta có:

$A\left(-1;0\right)\in\left(P\right)\Rightarrow a-b+c=0$

$B\left(2;0\right)\in\left(P\right)\Rightarrow 4a+2b+c=0$

$C\left(0;-4\right)\in\left(P\right)\Rightarrow c=-4$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a-b+c=0 \\ 4a+2b+c=0 \\ c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases}$

Vậy $a=2, b=-2, c=-4$

b) Vì (P) đi qua $A\left(-1;-2\right)$ nên $a-b+c=-2$

Mặt khác, vì (P) có đỉnh là $I\left(1;2\right)$ nên $I\left(1;2\right)\in\left(P\right)$ hay $a+b+c=2$

Và $\dfrac{-b}{2a}=1 \Leftrightarrow 2a+b=0$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a-b+c=-2 \\ a+b+c=2 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$

Vậy $a=-1; b=2; c=1$

Ví dụ 4. Tìm các hệ số a,b,c của $(P): y=\mathrm{ax}^2+bx+c, \left(a\neq 0\right)$

a) y nhận giá trị bằng -3 khi $x=2$ và (P) cắt $d: y=x+1$ tại hai điểm có hoành độ bằng 0 và bằng 5.

b) (P) đi qua hai điểm $A\left(-1;6\right)$, $B\left(4;3\right)$ và có trục đối xứng là $x=2$.

Giải

a) Theo đề : y nhận giá trị bằng -3 khi $x=2$ nên $4a+2b+c=-3$

Gọi (P) cắt $d: y=x+1$ tại hai điểm M và N. Suy ra: $M\left(0;1\right)$, $N\left(1;6\right)$

$M\left(0;1\right)\in\left(P\right)\Rightarrow c=1$

$N\left(1;6\right)\in\left(P\right)\Rightarrow a+b+c=6$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4a+2b+c=-3 \\ a+b+c=6 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-7 \\ b=12 \\ c=1 \end{cases}$

Vậy $a=-7$, $b=12$, $c=1$

b) (P) đi qua hai điểm $A\left(-1;6\right)$, $B\left(4;3\right)$ nên

$A\left(-1;6\right)\in\left(P\right)\Rightarrow a-b+c=6$

$B\left(4;3\right)\in\left(P\right)\Rightarrow 16a+4b+c=3$

(P) và có trục đối xứng là $x=2$ nên $-\dfrac{b}{2a}=2 \Leftrightarrow 4a+b=0$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} a-b+c=6 \\ 16a+4b+c=3 \\ 4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{5} \\ b=-\dfrac{12}{5} \\ c=3 \end{cases}$

Vậy $a=\dfrac{3}{5}; b=-\dfrac{12}{5}; c=3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai.

B. $f(x)=2x-4$ là tam thức bậc hai.

C. $f(x)=3x^3+2x-1$ là tam thức bậc hai.

D. $f(x)=x^4-x^2+1$ là tam thức bậc hai.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x)=3x^2+2x-5$ là tam thức bậc hai.

Câu 2. Xác định parabol (P): $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ biết (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{2}$

A. (P): $y=-x^2+x+1$.

B. (P): $y=x^2-x+1$.

C. (P): $y=2x^2-2x+1$.

D. (P): $y=x^2+x+0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1: Khi $x=0$ thì $y=1 \Rightarrow c=1$.

(P) có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ khi $x=\dfrac{1}{2}$ nên:

$$\begin{cases} y\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{-b}{2a}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b+1=\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{-b}{2a}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{2}b=-\dfrac{1}{4} \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}.$$

Vậy (P): $y=x^2-x+1$.

Câu 3. Đồ thị của hàm số nào sau đây là parabol có đỉnh $I(-1;3)$.

A. $y=2x^2+4x-3$. **B.** $y=x^2-x+1$.

C. $y=2x^2+4x+5$. **D.** $y=2x^2-2x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đỉnh Parabol là $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

Do đó chỉ có đáp án C thoả.

Câu 4. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=1$. Khi đó $4a+2b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=1$ nên $-\frac{b}{2a}=1$

$\Leftrightarrow 2a=-b \Leftrightarrow 2a+b=0 \Leftrightarrow 4a+2b=0$.

Câu 5. Đồ thị hàm số $y=mx^2-2mx-m^2-2$ $(m\neq 0)$ là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x-3$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(1;6)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-3;3)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có đồ thị hàm số $y=mx^2-2mx-m^2-2$ là parabol có đỉnh $I(1;-m^2-m-2)$.

$I\in d: y=x-3 \Leftrightarrow -m^2-m-2=1-3 \Leftrightarrow m^2+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right. \Rightarrow m\in(-3;3)$.

Câu 6. Xác định a, b, c biết Parabol có đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $M(0;-1)$, $N(1;-1)$, $P(-1;1)$.

A. $y=x^2-x-1$. **B.** $y=x^2-x+1$.

C. $y=-2x^2-1$. **D.** $y=-x^2+x-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì $M \in (P)$, $N \in (P)$, $P \in (P)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -x^2 - x - 1$.

Câu 7. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol có trục đối xứng $x = -3$.

A. $y = x^2 + 3x - 2$. **B.** $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$.

C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$. **D.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của (P) có dạng:

$x = -\frac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow -\frac{3}{2a} = -3 \Leftrightarrow -3 = -6a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy (P) có phương trình: $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

Câu 8. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ và có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$. Tính tích $P = abc$.

A. $P = -6$. **B.** $P = -3$. **C.** $P = 6$. **D.** $P = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Hàm số đi qua điểm $A(0;6)$; đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = 2$ nên đồ thị hàm số đi qua $I(2;4)$ và nhận $x = 2$ làm trục đối xứng, hàm số cũng đi qua điểm $A(0;6)$ suy ra:

$$\begin{cases} \frac{-b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow abc = -6.$$

Câu 9. Xác định phương trình của Parabol có đỉnh $I(0;-1)$ và đi qua điểm $A(2;3)$.

A. $y = (x-1)^2$. **B.** $y = x^2 + 1$. **C.** $y = (x+1)^2$. **D.** $y = x^2 - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Parabol (P) có dạng $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

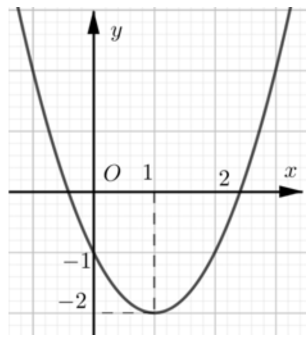
Do $I \in (P) \Rightarrow c = -1$.

$I(0;-1)$ là đỉnh của $(P) \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0$.

Lại có $A(2;3) \in (P) \Rightarrow 3 = 4a + 2b + c \Rightarrow a = 1$.

Nên $(P): y = x^2 - 1$.

Câu 10. Đồ thị dưới đây là của hàm số nào sau đây?



A. $y = -x^2 - 2x + 3$. **B.** $y = x^2 + 2x - 2$.

C. $y = 2x^2 - 4x - 2$. **D.** $y = x^2 - 2x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Do parabol có bề lõm quay lên nên $a > 0$, từ đó ta loại **A.**

Trục đối xứng của parabol là $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$ nên ta loại **B.**

Khi $x = 0$ thì $y = -1$ nên loại **C.**

Vậy đồ thị trên là của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Câu 11. Tìm m để Parabol $(P): y = mx^2 - 2x + 3$ có trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$.

A. $m = 2$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

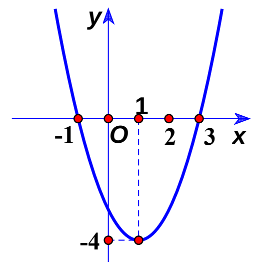
Với $m = 0$ ta có phương trình $y = -2x + 3$ là phương trình đuồng thẳng nên loại $m = 0$.

Với $m \neq 0$. Ta có phương trình của Parabol:

Trục đối xứng: $x = -\dfrac{-2}{2m} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{m}$.

Trục đối xứng đi qua điểm $A(2;3)$ nên $2=\frac{1}{m}\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho parabol $(P): y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Khi đó $2a+b+2c$ có giá trị là



A. -9. **B.** 9. **C.** -6. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Parabol $(P): y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ -4)$, $C(3;\ 0)$

nên có hệ phương trình: $\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+b+c=-4 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$.

Khi đó: $2a+b+2c=2.1-2+2(-3)=-6$.

Câu 13. Cho hàm số $y=-x^2-2x+1$. Chọn câu **sai**.

A. Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x=-1$.

B. Hàm số không chẵn, không lẻ.

C. Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;-1)$.

D. Đồ thị hàm số nhận $I(-1;4)$ làm đỉnh.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $a=-1$, $b=-2$, $c=1$ nên đồ thị có trục đối xứng là $x=-\frac{-2}{2.(-1)}=-1$ và tọa độ đỉnh của parabol là $I(-1;2)$.

Câu 14. Cho parabol $y=ax^2+bx+4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x=\frac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$. Tổng giá trị $a+2b$ là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì parabol $y = ax^2 + bx + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = \dfrac{1}{3}$ và đi qua điểm $A(1;3)$

Nên ta có: $\begin{cases} a + b + 4 = 3 \\ -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

Do đó: $a + 2b = -3 + 4 = 1$

Câu 15. Để đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 1$ $(m \neq 0)$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x - 2$ thì m nhận giá trị nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(2;6)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2mx - m^2 - 1$ $(m \neq 0)$ có đỉnh là $I(1;-m^2 - m - 1)$.

Để $I(1;-m^2 - m - 1)$ nằm trên đường thẳng $y = x - 2$ thì $-m^2 - m - 1 = -1$

$\Leftrightarrow m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \ (l) \\ m = -1 \ (n) \end{array}\right.$. Vậy $m = -1 \in (-2;2)$.

Câu 16. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$. Xác định hệ số a, b biết (P) có đỉnh $I(2;-2)$.

A. $a = -1$, $b = 4$. **B.** $a = 1$, $b = 4$. **C.** $a = 1$, $b = -4$. **D.** $a = 4$, $b = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

+ Điều kiện: $a \neq 0$.

+ (P) có đỉnh $I(2;-2)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -2 = a.2^2 + b.2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + b = 0 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$.

Câu 17. Parabol $(P): y = -2x^2 - ax + b$ có điểm $M(1;3)$ với tung độ lớn nhất. Khi đó giá trị của b là

A. 5. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm của (P) quay xuống và M có tung độ lớn nhất nên M là đỉnh của (P).

Ta có $M\left(1;3\right)$ là đỉnh của parabol nên $\dfrac{a}{-4}=1 \Leftrightarrow a=-4$.

Suy ra $y=-2x^2+4x+b$ qua $M\left(1;3\right)$ nên $b=1$.

Câu 18. Xác định các hệ số a và b để Parabol $\left(P\right): y=ax^2+4x-b$ có đỉnh $I\left(-1;-5\right)$.

A. $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$.

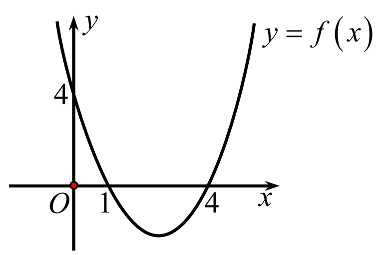
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $x_I=-1 \Rightarrow -\dfrac{4}{2a}=-1 \Rightarrow a=2.$

Hơn nữa: $I \in \left(P\right)$ nên $-5=a-4-b \Rightarrow b=3.$

Câu 19. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $\Delta=b^2-4ac$, tìm dấu của a và Δ.



A. $a>0$, $\Delta>0$. **B.** $a<0$, $\Delta>0$.

C. $a>0$, $\Delta=0$. **D.** $a<0$, , $\Delta=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

* Đồ thị hàm số là một Parabol quay lên nên $a>0$ và đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta>0$.

Câu 20. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$. Biểu thức $f\left(x+3\right)-3f\left(x+2\right)+3f\left(x+1\right)$ có giá trị bằng

A. ax^2-bx-c. **B.** ax^2+bx-c. **C.** ax^2-bx+c. **D.** ax^2+bx+c.

Lời giải

Chọn D

$f\left(x+3\right)=a\left(x+3\right)^2+b\left(x+3\right)+c=ax^2+\left(6a+b\right)x+9a+3b+c$.

$f\left(x+2\right)=a\left(x+2\right)^2+b\left(x+2\right)+c=ax^2+\left(4a+b\right)x+4a+2b+c$.

$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$.

$\Rightarrow f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)=ax^2+bx+c$.

Dạng 3: Đồ thị hàm số bậc hai

1. Phương pháp

Để vẽ đường parabol $y=\mathrm{ax}^2+bx+c$ ta có thể thực hiện các bước như sau:

- Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

Để vẽ đồ thị hàm số $y=\left|\mathrm{ax}^2+bx+c\right|$ ta lần lượt làm như sau:

Trước hết ta vẽ đồ thị $(P): y=ax^2+bx+c$

Ta có:

$$y=\left|ax^2+bx+c\right|=\begin{cases} ax^2+bx+c, & khi \quad ax^2+bx+c\ge 0 \\ -\left(ax^2+bx+c\right), & khi \quad ax^2+bx+c<0 \end{cases}$$

Vậy đồ thị hàm số $y=\left|\mathrm{ax}^2+bx+c\right|$ bao gồm hai phần

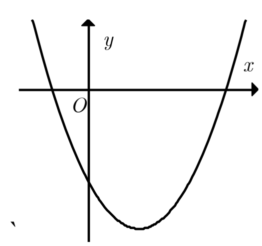
- Phần 1: Chính là đồ thị (P) lấy phần phía trên trục Ox
- Phần 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (P) phía dưới trục Ox qua trục Ox.

Vẽ đồ thị hàm số (P_1) và (P_2)

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b<0,\ c<0$. **B.** $a>0,\ b<0,\ c>0$.

C. $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. **D.** $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$ loại D.

Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$ loại B, C. Chọn A.

Câu 2. Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có phương trình trục đối xứng là

A. $x = -1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Parabol $y = -x^2 + 2x + 3$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a} \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 3. Cho hàm số: $y = x^2 - 2x - 1$, mệnh đề nào **sai**:

A. Đồ thị hàm số nhận $I(1;-2)$ làm đỉnh.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số có trục đối xứng: $x = -2$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Trục đối xứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$.

Câu 4. Parabol $(P): y = -2x^2 - 6x + 3$ có hoành độ đỉnh là?

A. $x = -3$. **B.** $x = \dfrac{3}{2}$. **C.** $x = -\dfrac{3}{2}$. **D.** $x = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hoành độ đỉnh của parabol (P) là: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2}$.

Câu 5. Viết phương trình trục đối xứng của đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 4$.

A. $x = 1$. **B.** $y = 1$. **C.** $y = 2$. **D.** $x = 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Vậy đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = 1$.

Câu 6. Trục đối xứng của parabol $y = 2x^2 + 2x - 1$ là đường thẳng có phương trình

A. $x = 1$. **B.** $x = \dfrac{1}{2}$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình của trục đối xứng là $x = -\dfrac{2}{2.2} = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 7. Tọa độ đỉnh I của parabol $y = x^2 - 2x + 7$ là

A. $I(-1;-4)$. **B.** $I(1;\ 6)$. **C.** $I(1;-4)$. **D.** $I(-1;\ 6)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đỉnh I: $x = \dfrac{2}{2.1} = 1$, $y = 1^2 - 2.1 + 7 = 6$. Vậy $I(1;\ 6)$.

Câu 8. Cho parabol $(P): y = 3x^2 - 2x + 1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P)?

A. $I(0;1)$. **B.** $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(\dfrac{-1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{-2}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{3}$ nên loại A và C.

Khi $x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{2}{3}$. Do đó, Chọn B.

Câu 9. Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị (P), đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

A. $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$. **B.** $I\left(-\dfrac{b}{a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

C. $I\left(\dfrac{b}{a};\ \dfrac{\Delta}{4a}\right)$. **D.** $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{2a}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đỉnh của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ là điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 10. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c \ (a > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị của hàm số có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.

B. Đồ thị của hàm số luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Dựa vào sự biến thiên của hàm số $y = ax^2 + bx + c \ (a > 0)$ ta thấy các khẳng định A, C, D đúng

Khẳng định B sai vì có những hàm số bậc hai không cắt trục hoành như hàm $y = -2x^2 + 3x - \dfrac{9}{8}$

Câu 11. Cho hàm số $y = (m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 \ (m \neq 1) \ (P)$. Đỉnh của (P) là $S(-1;-2)$ thì m bằng bao nhiêu:

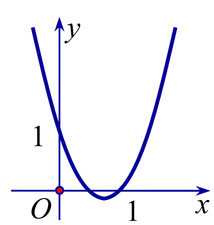
A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do đỉnh của (P) là $S(-1;-2)$ suy ra $-1 = \dfrac{m-2}{m-1} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$.

Câu 12. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = -2x^2 + 3x - 1$. **B.** $y = -x^2 + 3x - 1$.

C. $y = 2x^2 - 3x + 1$. **D.** $y = x^2 - 3x + 1$.

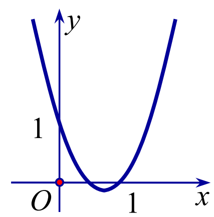
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1

Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1, phương trình hoành độ giao điểm phải có nghiệm $x = 1$, ta chỉ có phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Câu 13. Đồ thị hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = x^2 - 3x + 1$. **B.** $y = 2x^2 - 3x + 1$.

C. $y = -x^2 + 3x - 1$. **D.** $y = -2x^2 + 3x - 1$.

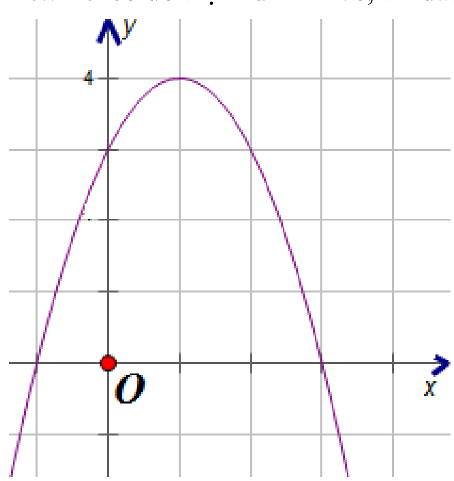
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì bề lõm hướng lên trên nên $a > 0 \Rightarrow$ loại đáp án C, D

Đồ thì giao trục Ox tại điểm $(1;0)$ và $\left(\dfrac{1}{2};0\right) \Rightarrow$ loại **A.**

Câu 14. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ, thì dấu các hệ số của nó là



A. $a < 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c > 0$.

C. $a > 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

Hướng dẫn giải

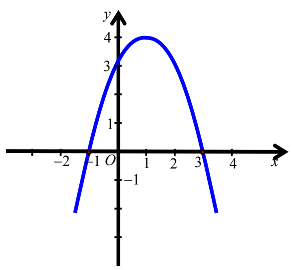
Chọn B.

Đồ thị là parabol có bề lõm hướng xuống dưới nên $a<0$.

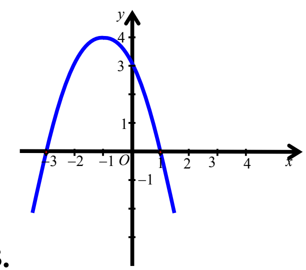
Đồ thị cắt chiều dương trục Oy nên $c>0$.

Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}>0$, mà $a<0$, nên $b>0$.

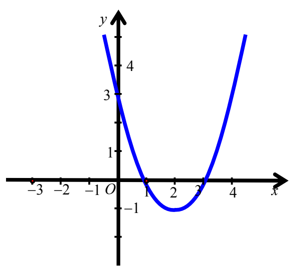
Câu 15. Hàm số $y=-x^2+2x+3$ có đồ thị là hình nào trong các hình sau?



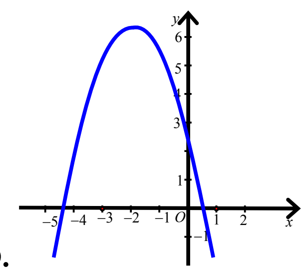
A.



B.



C.



D.

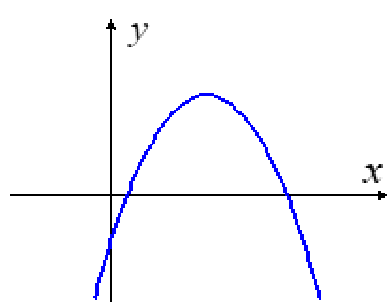
Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $a=-1$ nên đồ thị lõm xuống dưới $\Rightarrow$ Loại **C.**

Đồ thị có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)\Rightarrow I\left(1;4\right)$

Câu 16. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a<0,b>0,\Delta>0$.

B. $a<0,b<0,\Delta>0$.

C. $a>0,b>0,\Delta<0$.

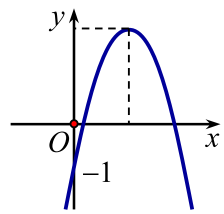
D. $a>0,b>0,\Delta>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát bề lõm của parabol như hình vẽ ta có $a<0$ loại **C.** và **D.** , parabol cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt nên $\Delta>0$. Cho $x=0$ thì giao của parabol với trục tung Oy là $b<0$.

Câu 17. Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ sau



A. $y=x^2-3x-1$. **B.** $y=-2x^2+5x-1$.

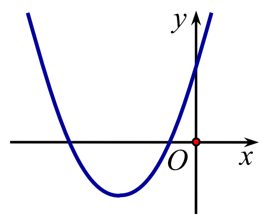
C. $y=2x^2-5x-1$. **D.** $y=-2x^2+5x$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do bề lõm parabol hướng xuống nên $a<0$ và qua $A\left(0;-1\right)$.

Câu 18. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh nào sau đây đúng?



A. $a>0$, $b=0$, $c>0$. **B.** $a>0$, $b>0$, $c>0$.

C. $a>0$, $b<0$, $c>0$. **D.** $a<0$, $b>0$, $c>0$.

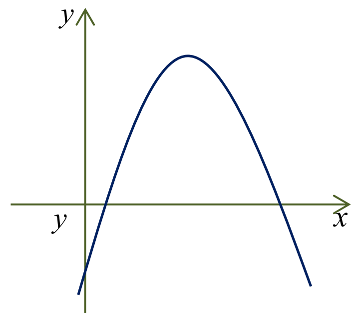
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đồ thị có bề lõm quay lên trên $\Rightarrow a>0$. Loại đáp án **D.**

Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}<0\Rightarrow a.b>0\Rightarrow b>0$.

Câu 19. Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $a<0$, $b>0$, $c>0$. **B.** $a>0$, $b<0$, $c>0$.

C. $a<0$, $b>0$, $c<0$. **D.** $a>0$, $b>0$, $c<0$.

Hướng dẫn giải

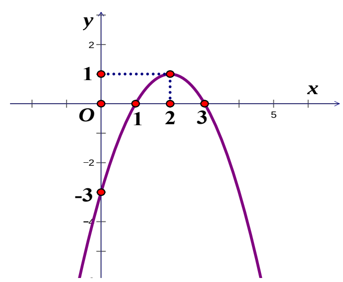
Chọn C.

Nhìn vào đồ thị ta có:

- Bề lõm hướng xuống $\Rightarrow a<0$.
- Hoành độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}>0\Rightarrow \dfrac{b}{2a}<0\Rightarrow b>0$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm $\Rightarrow c<0$.

Do đó: $a<0$, $b>0$, $c<0$.

Câu 20. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?



A. $y=-x^2+2x-3$. **B.** $y=-x^2+4x-3$.

C. $y=x^2-4x+3$. **D.** $y=x^2-2x-3$.

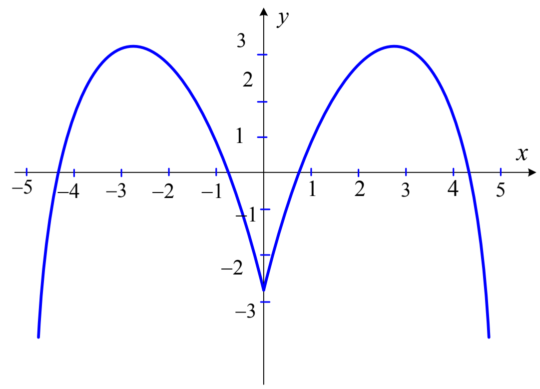
Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra: $a<0$ và hoành độ đỉnh là 2.

$y=-x^2+4x-3\Rightarrow a=-1;I\left(2;1\right)$

Câu 21. Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên



A. $y = x^2 - 3x - 3$.

B. $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

C. $y = -x^2 - 3|x| - 3$.

D. $y = -x^2 + 5x - 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta loại A. và D. Phần đồ thị bên phải trục tung là phần đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2 + 5x - 3$ với $x > 0$, tọa độ đỉnh của (P) là $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{4}\right)$, trục đối xứng là $x = 2,5$. Phần đồ thị bên trái trục tung là do lấy đối xứng phần đồ thị bên phải của (P) qua trục tung Oy. Ta được cả hai phần là đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 5|x| - 3$.

Câu 22. Đồ thị hàm số $y = x^2 - 6|x| + 5$.

A. có tâm đối xứng $I(3;-4)$.

B. có tâm đối xứng $I(3;-4)$ và trục đối xứng có phương trình $x = 0$.

C. không có trục đối xứng.

D. có trục đối xứng là đường thẳng có phương trình $x = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

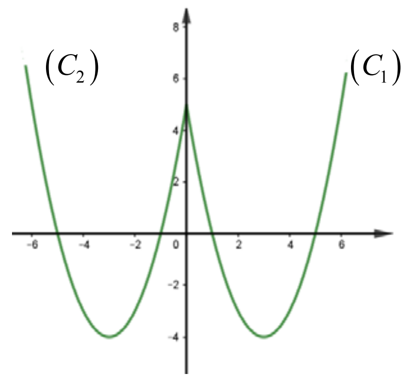
Ta có: $y = x^2 - 6|x| + 5 = \begin{cases} y_1 = x^2 - 6x + 5 \text{ khi } x \ge 0 \ (C_1) \\ y_2 = x^2 + 6x + 5 \text{ khi } x < 0 \ (C_2) \end{cases}$

Đồ thị (C) của hàm số $y = x^2 - 6|x| + 5$ gồm hai phần

Phần đồ thị (C_1): là phần đồ thị của hàm số $y_1 = x^2 - 6x + 5$ nằm bên phải trục tung

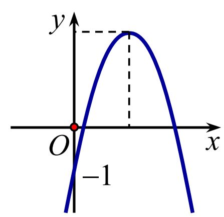
Phần đồ thị (C_2): là phần đồ thị của hàm số $y_2 = x^2 + 6x + 5$ có được bằng cách lấy đối xứng phần đồ thị (C_1) qua trục tung

Ta có đồ thị (C) như hình vẽ



Vậy: đồ thị (C) có trục đối xứng có phương trình $x = 0$.

Câu 23. hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$. **B.** $a < 0$, $b = 0$, $c < 0$.

C. $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$. **D.** $a < 0$, $\text{b} > 0$, $\text{c} < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

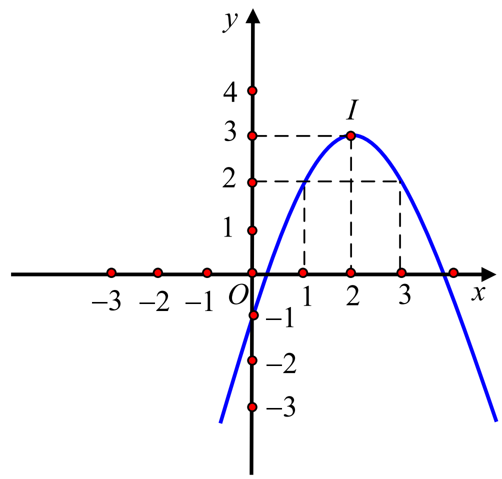
Quan sát đồ thị ta có:

Đồ thị quay bề lõm xuống dưới nên $a < 0$; có hoành độ đỉnh $x_I = -\dfrac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$.

Lại có: đồ thị cắt Ox tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$.

Vậy $a < 0$, $\text{b} > 0$, $\text{c} < 0$.

Câu 24. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị m để phương trình $\left|ax^2 + bx + c\right| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



A. $-1 < m < 3$. **B.** $0 < m < 3$. **C.** $0 \le m \le 3$. **D.** $-1 \le m \le 3$.

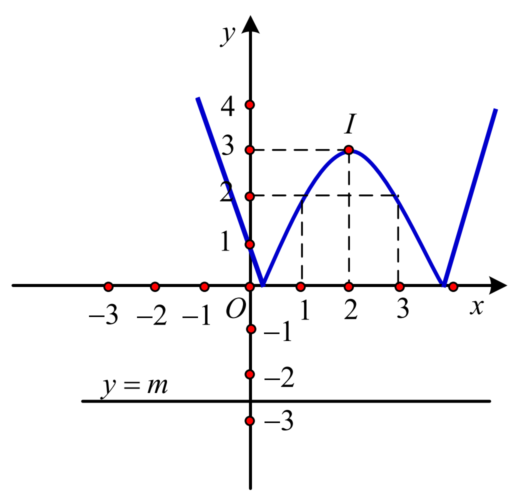
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta có đỉnh của parabol là $I(2;3)$ nên $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$.

Mặt khác (P) cắt trục tung tại $(0;-1)$ nên $c = -1$. Suy ra $\begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}$.

$(P): y = -x^2 + 4x - 1$ suy ra hàm số $y = \left|-x^2 + 4x - 1\right|$ có đồ thị là là phần đồ thị phía trên trục hoành của (P) và phần có được do lấy đối xứng phần phía dưới trục hoành của (P), như hình vẽ sau:



Phương trình $\left|ax^2 + bx + c\right| = m$ hay $\left|-x^2 + 4x - 1\right| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số hàm số $y = \left|-x^2 + 4x - 1\right|$ tại bốn điểm phân biệt.

Suy ra $0 < m < 3$.

Dạng 4: Sự tương giao

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Cho parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là

$$x^2 - 2x + m - 1 = 0. \quad (1)$$

Để parabol cắt Ox tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 2 - m > 0 \\ S = 2 > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = mx$ cắt đồ thị hàm số $(P): y = x^3 - 6x^2 + 9x$ tại ba điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với d là $x^3 - 6x^2 + 9x = mx$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 6x + 9 - m\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 6x + 9 - m = 0. \quad (1) \end{array}\right.$$

Để (P) cắt d tại ba điểm phân biệt khi và chỉ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0^2 - 6.0 + 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 9 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 9 \end{cases}.$$

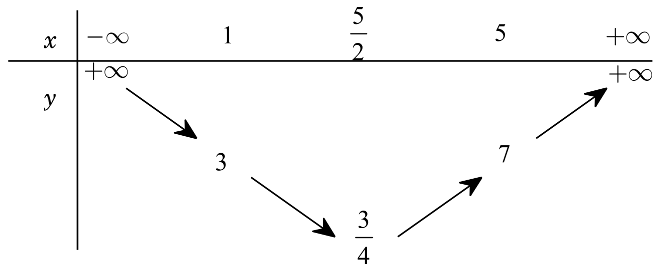
Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;5]$.

Lời giải

Ta có $x^2 - 5x + 7 + 2m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = -2m. \quad (*)$

Phương trình $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của parabol $(P): x^2 - 5x + 7$ và đường thẳng $y = -2m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 5x + 7$ trên $[1;5]$ như sau:



Dựa vào bảng biến ta thấy $x \in [1;5]$ thì $y \in \left[\frac{3}{4};7\right]$.

Do đo để phương trình $(*)$ có nghiệm $x \in [1;5] \Leftrightarrow \frac{3}{4} \le -2m \le 7 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \ge m \ge -\frac{7}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c\ (a \ne 0)$ có đồ thị là parabol (P). Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0\ (1)$. Chọn khẳng định **sai**:

A. Số giao điểm của parabol (P) với trục hoành là số nghiệm của phương trình (1).

B. Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

C. Nghiệm của phương trình (1) là giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

D. Nghiệm của phương trình (1) là hoành độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Câu 2. Tọa độ giao điểm của đường thẳng $d: y = -x + 4$ và parabol $y = x^2 - 7x + 12$ là

A. $(-2;6)$ và $(-4;8)$. **B.** $(2;2)$ và $(4;8)$.

C. $(2;-2)$ và $(4;0)$. **D.** $(2;2)$ và $(4;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 7x + 12 = -x + 4 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right.$$

Câu 3. Nghiệm của phương trình $x^2 - 8x + 5 = 0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

A. $y = x^2$ và $y = -8x + 5$. **B.** $y = x^2$ và $y = -8x - 5$.

C. $y = x^2$ và $y = 8x - 5$. **D.** $y = x^2$ và $y = 8x + 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x^2-8x+5=0 \Leftrightarrow x^2=8x-5$.

Do đó nghiệm của phương trình $x^2-8x+5=0$ có thể xem là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8x-5$.

Câu 4. Giao điểm của parabol $(P): y=x^2-3x+2$ với đường thẳng $y=x-1$ là

A. $(-1;2)$; $(2;1)$.

B. $(1;0)$; $(3;2)$.

C. $(2;1)$; $(0;-1)$.

D. $(0;-1)$; $(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là

$$x^2-3x+2=x-1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy hai giao điểm của (P) và (d) là $(1;0)$; $(3;2)$.

Câu 5. Cho đường thẳng $d: y=x+1$ và Parabol $(P): y=x^2-x-2$. Biết rằng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó diện tích tam giác OAB bằng

A. 4.

B. 2.

C. $\frac{3}{2}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $x^2-x-2=x+1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$.

Phương trình này có $a-b+c=0$ nên có hai nghiệm $x_1=-1, x_2=3$.

Suy ra $A(-1;0)$ và $B(3;4)$.

Diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}.1.3=\frac{3}{2}$.

Câu 6. Biết đường thẳng $d: y=mx$ cắt Parabol $(P): y=x^2-x+1$ tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

A. $I\left(\frac{1+m}{2};\frac{m^2+m}{2}\right)$.

B. $I\left(\frac{1+m}{2};\frac{-m^2-2m+3}{4}\right)$.

C. $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$.

D. $I\left(\frac{1}{2};\frac{m}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$mx = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 = 0$

Vì hoành độ giao điểm x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình nên ta có tọa độ trung điểm I là $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{m(x_A + x_B)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{m+1}{2} \\ y_I = \dfrac{m^2 + m}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1+m}{2}; \dfrac{m^2+m}{2}\right)$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2 + (m+2)x - m$ tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy.

A. $m > -3$. **B.** $m < -3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$x^2 + (m+2)x - m = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + mx - m - 3 = 0$. (1)

Để đường thẳng d cắt parabol tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m + 12 > 0 \\ -m - 3 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m < -3$.

Câu 8. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10;-4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt Parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét phương trình: $-(m+1)x + m + 2 = x^2 + x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x(m+2) - m - 4 = 0$

Để đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt cùng phía với trục tung vậy điều kiện là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 + 4(m+4) > 0 \\ -m - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 20 > 0, \forall m \\ m < -4 \end{cases}$

Vậy trong nửa khoảng $[-10;-4)$ có 6 giá trị nguyên m.

Câu 9. Tìm m để Parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$.

A. $m = 2$. **B.** Không tồn tại m. **C.** $m = -2$. **D.** $m = \pm 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$ (1).

Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2 = 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 10. Cho hai hàm số $y_1 = x^2 + (m-1)x + m$, $y_2 = 2x + m + 1$. Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì m có giá trị là

A. $m > 0$. **B.** $m < 0$. **C.** m tùy ý. **D.** không có giá trị nào.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + (m-1)x + m = 2x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 1 = 0\,(1)$.

Khi đồ thị hai hàm số cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì pt(1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta = (m-3)^2 + 4 > 0$ luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 11. Đường thẳng $d_m : (m-2)x + my = -6$ luôn đi qua điểm:

A. $(3;-3)$ **B.** $(2;1)$ **C.** $(1;-5)$ **D.** $(3;1)$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$(m-2)x + my = -6 \Leftrightarrow (x+y)m - 2x + 6 = 0 \qquad (*)$

Phương trình $(*)$ luôn đúng với mọi m khi $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy d_m luôn đi qua điểm cố định $(3;-3)$.

Câu 12. Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

A. $m < -3$. **B.** $-3 < m < 4$. **C.** $m < 4$. **D.** $m \le 4$.

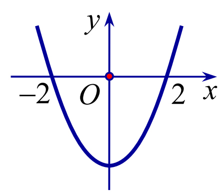
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow$
$x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0 \ (*)$.

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Câu 13. Cho parabol $y = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$, (P) có đồ thị như hình vẽ:



Biết đồ thị (P) cắt trục Ox tại các điểm lần lượt có hoành độ là -2, 2. Tập nghiệm của bất phương trình $y < 0$ là

A. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **B.** $(-2; 2)$.

C. $[-2; 2]$. **D.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta thấy $y < 0$ khi $x \in (-2; 2)$.

Câu 14. Giá trị nào của m thì phương trình $(m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1) = 0 \ (1)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$. **D.** $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 \ne 0 \\ \Delta = (m+3)^2 + 4(m-3)(m+1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ 5m^2 - 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{3}{5} \\ x > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}.$$

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đường thẳng $d: y = 4x - 2m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = (m-2)x^2 + 2mx - 3m + 1$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là $(m-2)x^2 + 2mx - 3m + 1 = 4x - 2m$

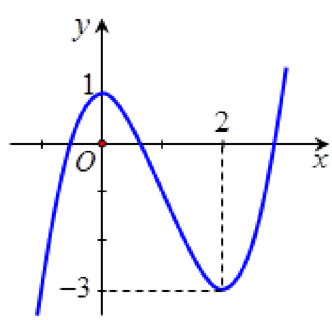
$\Leftrightarrow (m-2)x^2 + 2(m-2)x - m + 1 = 0$.

d tiếp xúc với $(P) \Rightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có nghiệm kép.

$$\Rightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ \Delta' = (m-2)^2 - (m-2)(-m+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}.$$

Vậy có 1 giá trị m để đường thẳng d tiếp xúc với (P).

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình $2f(x) - 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Số nghiệm phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x) - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

A. $m = 1$. **B.** $1 < m < 3$. **C.** $0 < m < 1$. **D.** $m \geq 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

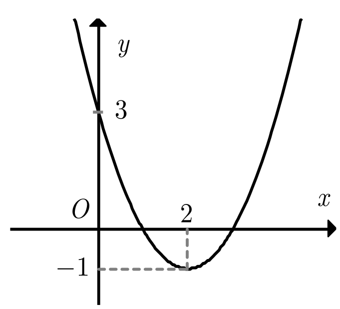
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x) - 1|$.

x	$-\infty$				0				1				$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT suy ra phương trình $|f(x) - 1| = m$ có bốn nghiệm phân biệt khi $1 < m < 3$.

Vậy $1 < m < 3$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



A. $-2 < m < 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m > 3$. **D.** $m = 2$.

Hướng dẫn giải

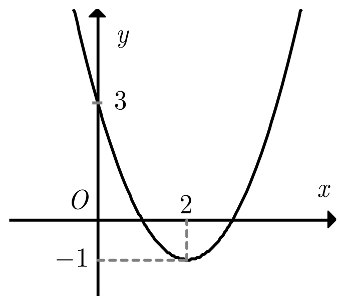
Chọn D.

Hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là (C), lấy đối xứng phần đồ thị nằm bên phải Oy của (C) qua Oy ta được đồ thị (C') của hàm số $y = f(|x|)$.

Dựa vào đồ thị, phương trình $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow (|x|) = m + 1$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi

$m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình bên dưới. Hỏi với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $|f(x)| - 1 = m$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.



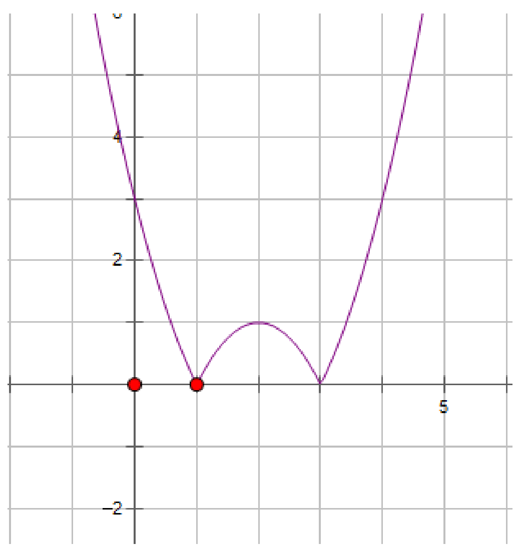
A. $\left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m = -1 \end{array}\right.$. **C.** $m \geq -1$. **D.** $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Phương trình $\Leftrightarrow |f(x)| = m + 1$.

+ Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có dạng:



+ Dựa vào đồ thị, để phương trình $|f(x)| = m + 1$ có hai nghiệm phân biệt thì:

$\left[\begin{array}{l} m+1>1 \\ m+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m=-1 \end{array}\right.$.

Câu 20. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $\left(0;2017\right]$ để phương trình $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2016. **B.** 2008. **C.** 2009. **D.** 2017.

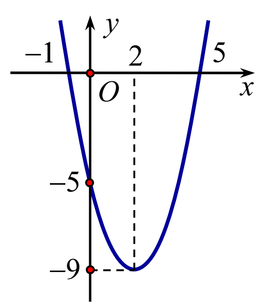
Hướng dẫn giải

Chọn B.

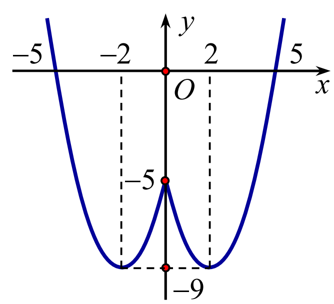
PT: $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0 \Leftrightarrow \left|x^2-4|x|-5\right|=m$.

Số nghiệm phương trình $(1) \Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|(P)$ và đường thẳng $y=m$.

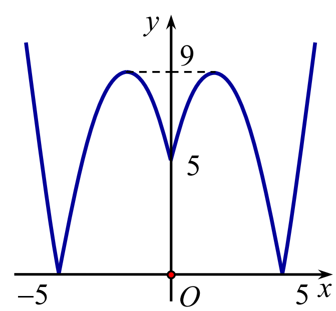
Xét hàm số $y=x^2-4x-5\ (P_1)$ có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y=x^2-4|x|-5\ (P_2)$ là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y=x^2-4|x|-5=x^2-4x-5$ nếu $x\geq 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

□ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy.

□ Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy.

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|(P)$, ta có: $y=\begin{cases} x^2-4|x|-5 & (y\geq 0) \\ -\left(x^2-4|x|-5\right) & (y<0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

□ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox.

□ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox.

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $\left|x^2-4|x|-5\right|=m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>9 \\ m=0 \end{array}\right.$.

Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(0;2017] \end{cases} \Rightarrow m\in\{10;11;12;...;2017\}$.

Câu 21. Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0;2017]$ để phương trình $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0$ có hai nghiệm phân biệt?

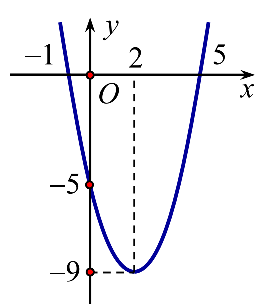
A. 2016. **B.** 2008. **C.** 2009. **D.** 2017.

Hướng dẫn giải

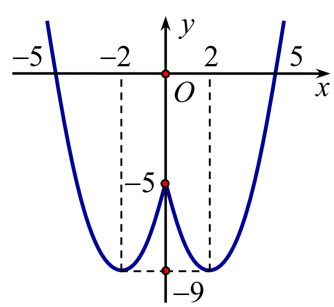
Chọn B.

PT: $\left|x^2-4|x|-5\right|-m=0 \Leftrightarrow \left|x^2-4|x|-5\right|=m(1)$. Số nghiệm phương trình $(1)\Leftrightarrow$ số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|(P)$ và đường thẳng $y=m$.

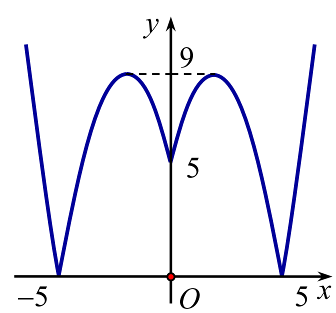
Xét hàm số $y=x^2-4x-5$ (P_1) có đồ thị như hình 1.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.

Xét hàm số $y=x^2-4|x|-5$ (P_2) là hàm số chẵn nên có đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng. Mà $y=x^2-4|x|-5=x^2-4x-5$ nếu $x\ge 0$. Suy ra đồ thị hàm số (P_2) gồm hai phần:

- Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_1) phần bên phải Oy.
- Phần 2: Lấy đối xứng phần 1 qua trục Oy.

Ta được đồ thị (P_2) như hình 2.

Xét hàm số $y=\left|x^2-4|x|-5\right|(P)$, ta có: $y=\begin{cases} x^2-4|x|-5 & (y\ge 0) \\ -\left(x^2-4|x|-5\right) & (y<0) \end{cases}$.

Suy ra đồ thị hàm số (P) gồm hai phần:

□ Phần 1: Giữ nguyên đồ thị hàm số (P_2) phần trên Ox.

□ Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị hàm số (P_2) phần dưới Ox qua trục Ox.

Ta được đồ thị (P) như hình 3.

Quan sát đồ thị hàm số (P) ta có: Để $\left|x^2-4|x|-5\right|=m$ (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>9 \\ m=0 \end{array}\right.$.

Mà $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(0;2017] \end{cases} \Rightarrow m\in\{10;11;12;...;2017\}$.

Dạng 4: Toán thực tế

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=360-10n$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lương cá sau một vụ thu được nhiều nhất?

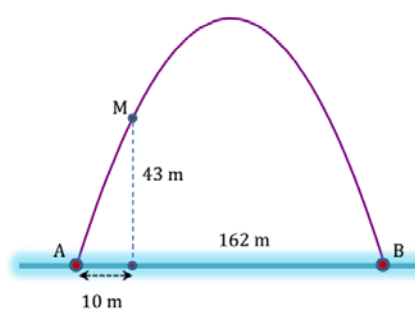
Hướng dẫn giải

Trọng lượng cá trên đơn vị diện tích là

$T=(360-10n)n=360n-10n^2 \quad =-10\left(n^2-36n+324-324\right) \quad =-10(n-18)^2+3240$

$\Rightarrow T_{\max}=3240$ khi $n=18$.

Ví dụ 2: Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol . Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162 m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43 m so với mặt đất , người ta thả một sợi dây chạm đất . Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10 m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch .



Hướng dẫn giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Phương trình Parabol (P) có dạng

$y=ax^2+bx+c$.

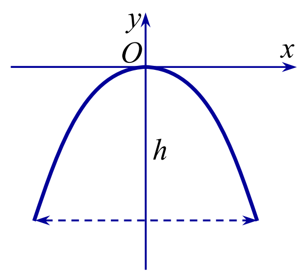
Parabol (P) đi qua điểm $A(0;0)$, $B(162;0)$, $M(10;43)$ nên ta có

$$\begin{cases} c=0 \\ 162^2a+162b+c=0 \\ 10^2a+10b+c=43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=-\dfrac{43}{1520} \\ b=\dfrac{3483}{760} \end{cases} \Rightarrow (P): y=-\dfrac{43}{1520}x^2+\dfrac{3483}{760}x.$$

Do đó chiều cao của cổng là $h=-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\approx 185,6$ m.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Một chiếc cổng hình parabol có phương trình $y=-\dfrac{1}{2}x^2$. Biết cổng có chiều rộng $d=5$ mét . Hãy tính chiều cao h của cổng.



A. $h=4,45$ mét. **B.** $h=3,125$ mét. **C.** $h=4,125$ mét. **D.** $h=3,25$ mét.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A và B là hai điểm ứng với hai chân cổng như hình vẽ.

Vì cổng hình parabol có phương trình $y=-\dfrac{1}{2}x^2$ và cổng có chiều rộng $d=5$ mét nên:

$AB=5$ và $A\left(-\dfrac{5}{2};-\dfrac{25}{8}\right)$; $B\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{25}{8}\right)$.

Vậy chiều cao của cổng là $\left|-\dfrac{25}{8}\right|=\dfrac{25}{8}=3,125$ mét.

Câu 2. Một của hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

A. 80 USD. **B.** 160 USD. **C.** 40 USD. **D.** 240 USD.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

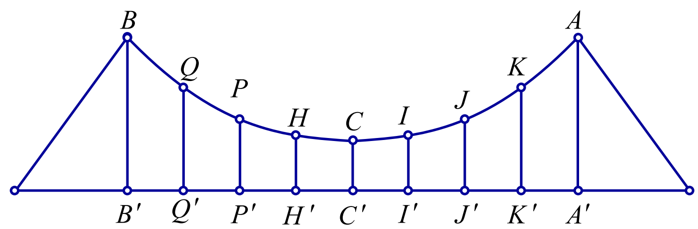
Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y=(120-x)(x-40)=-x^2+160x-4800=-(x-80)^2+1600\le 1600$.

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow x=80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD.

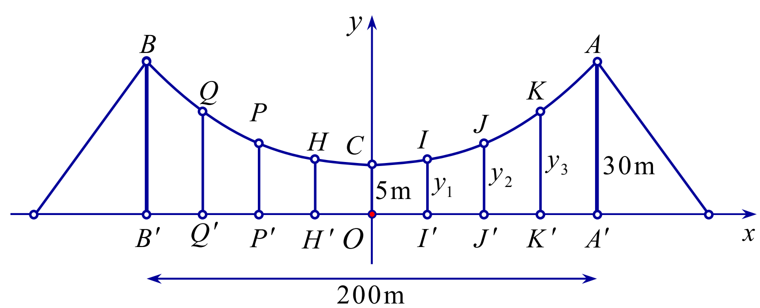
Câu 3. Dây truyền đỡ trên cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu, cuối của dây được gắn vào các điểm A, B trên mỗi trục AA' và BB' với độ cao $30\,\text{m}$. Chiều dài đoạn $A'B'$ trên nền cầu bằng $200\,\text{m}$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên cầu là $OC=5\,\text{m}$. Gọi Q', P', H', O, I', J', K' là các điểm chia đoạn $A'B'$ thành các phần bằng nhau. Các thanh thẳng đứng nối nền cầu với đáy dây truyền: QQ', PP', HH', OC, II', JJ', KK' gọi là các dây cáp treo. Tính tổng độ dài của các dây cáp treo?



A. Đáp án khác. **B.** $36,87\,\text{m}$. **C.** $73,75\,\text{m}$. **D.** $78,75\,\text{m}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Giả sử Parabol có dạng: $y=ax^2+bx+c$, $a\ne 0$.

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ, khi đó parabol đi qua điểm $A(100;30)$, và có đỉnh $C(0;5)$. Đoạn AB chia làm 8 phần, mỗi phần $25\,\text{m}$.

Suy ra: $\begin{cases}30=10000a+100b+c\\ \dfrac{-b}{2a}=0\\ 5=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{400}\\ b=0\\ c=5\end{cases} \Rightarrow (P): y=\dfrac{1}{400}x^2+5$.

Khi đó, tổng độ dài của các dây cáp treo bằng $OC+2y_1+2y_2+2y_3$

$=5+2\left(\dfrac{1}{400}.25^2+5\right)+2\left(\dfrac{1}{400}.50^2+5\right)+2\left(\dfrac{1}{400}.75^2+5\right)$

$= 78,75(\mathrm{m})$.

Câu 4. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

A. 30 triệu đồng. **B.** 29 triệu đồng.

C. $30,5$ triệu đồng. **D.** $29,5$ triệu đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \le x \le 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400$.

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0;4]$ có bảng biến thiên

Vậy $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 2\,450 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá mới của chiếc xe là $30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 5. Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth ,trong đó t là thời gian , kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\mathrm{m}$. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao $8,5\mathrm{m}$ và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao $6\mathrm{m}$. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

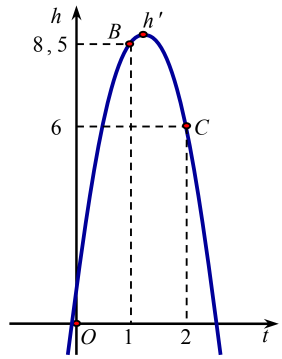
A. $y = 4,9t^2 + 12,2t + 1,2$. **B.** $y = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$.

C. $y = -4,9t^2 + 12,2t - 1,2$. **D.** $y = -4,9t^2 - 12,2t + 1,2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tại $t=0$ ta có $y=h=1,2$; tại $t=1$ ta có $y=h=8,5$; tại $t=2$, ta có $y=h=6$.



Chọn hệ trục Oth như hình vẽ.

Parabol (P) có phương trình: $y=at^2+bt+c$, với $a\neq 0$.

Giả sử tại thời điểm t' thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất h'.

Theo bài ra ta có: tại $t=0$ thì $h=1,2$ nên $A(0;1,2)\in(P)$.

Tại $t=1$ thì $h=8,5$ nên $B(1;8,5)\in(P)$.

Tại $t=2$ thì $h=6$ nên $C(2;6)\in(P)$.

Vậy ta có hệ: $\begin{cases} c=1,2 \\ a+b+c=8,5 \\ 4a+2b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1,2 \\ a=-4,9 \\ b=12,2 \end{cases}$.

Vậy hàm số Parabol cần tìm có dạng: $y=-4,9t^2+12,2t+1,2$.