BÀI 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

1. Phương trình một ẩn

Phương trình ẩn x là mệnh đề chứa biến có dạng

$f(x)=g(x)$ (1)

trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là những biểu thức của x. Ta gọi $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình (1).

Nếu có số thực x_0 sao cho $f(x_0)=g(x_0)$ là mệnh đề đúng thì x_0 được gọi là một **nghiệm của phương trình** (1).

Giải phương trình (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó .

Nếu phương trình không có nghiệm nào cả thì ta nói phương trình **vô nghiệm** .

2. Điều kiện của một phương trình

Khi giải phương trình (1), ta cần lưu ý với điều kiện đối với ẩn số x để $f(x)$ và $g(x)$ có nghĩa . Ta cũng nói đó là điều kiện xác định của phương trình .

3. Phương trình nhiều ẩn

Ngoài các phương trình một ẩn, ta còn gặp những phương trình có nhiều ẩn số, chẳng hạn

$3x+2y=x^2-2xy+8,$ (2)

$4x^2-xy+2z=3z^2+2xz+y^2.$ (3)

Phương trình (2) là phương trình hai ẩn (x và y), còn (3) là phương trình ba ẩn (x,y và z).

Khi $x=2, y=1$ thì hai vế của phương trình (2) có giá trị bằng nhau, ta nói cặp $(x;y)=(2;1)$ là một nghiệm của phương trình (2).

Tương tự, bộ ba số $(x;y;z)=(-1;1;2)$ là một nghiệm của phương trình (3).

4. Phương trình chứa tham số

Trong một phương trình , ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là **tham số.**

II – PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ PHƯƠNG TRÌNH HỆ QUẢ

1. Phương trình tương đương

Hai phương trình được gọi là tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

2. Phép biến đổi tương đương

Định lí

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện của nó thì ta được một phương trình mới tương đương

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hoặc cùng một biểu thức;

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

Chú ý: Chuyển vế và đổi dấu một biểu thức thực chất là thực hiện phép cộng hay trừ hai vế với biểu thức đó.

3. Phương trình hệ quả

Nếu mọi nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ đều là nghiệm của phương trình $f_1\left(x\right)=g_1\left(x\right)$ thì phương trình $f_1\left(x\right)=g_1\left(x\right)$ được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$.

Ta viết

$f\left(x\right)=g\left(x\right)\Rightarrow f_1\left(x\right)=g_1\left(x\right)$.

Phương trình hệ quả có thể có thêm nghiệm không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Ta gọi đó là **nghiệm ngoại lai**.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Điều kiện xác định của phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\dfrac{2x}{x^2+1}-5=\dfrac{3}{x^2+1}$

Lời giải

Chọn D

Do $x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên điều kiện xác định của phương trình là $D=\mathbb{R}$.

Ví dụ 2. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x-3}$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình là: $\begin{cases}x-1\ge 0\\x-2\ge 0\\x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\x\ge 2\\x\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 3$.

Ví dụ 3. Tìm điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2}+\dfrac{6}{x-3}=4$

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình: $\begin{cases}x-2\ge 0\\x-3\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x\ne 3\end{cases}$

Ví dụ 4. Cho phương trình $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$. Tìm điều kiện xác định của phương trình đã cho.

Lời giải

Điều kiện xác định của phương trình $\begin{cases} x^3-1\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tìm tập xác định của phương trình $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}+3x^5-2017=0$.

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **C.** $[-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **D.** $(-1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ne 0 \end{cases}$.

Tập xác định của phương trình là $[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

Câu 2. Điều kiện xác định của phương trình $x+\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}=\dfrac{\sqrt{3-2x}}{x}$ là

A. $x>-2$ và $x<\dfrac{3}{2}$. **B.** $-2\le x\le \dfrac{3}{2}$.

C. $x>-2$ và $x\ne 0$. **D.** $\begin{cases} -2<x\le \dfrac{3}{2} \\ x\ne 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 3-2x\ge 0 \\ 2x+4>0 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{3}{2} \\ x>-2 \\ x\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x\le \dfrac{3}{2} \\ x\ne 0 \end{cases}$

Câu 3. Cho phương trình $x^2+1=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. Tập giá trị của x để phương trình xác định là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$x^2+1=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ xác định $\Leftrightarrow x-1>0 \ \Leftrightarrow x>1$.

Câu 4: Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2}=8-x$ là

A. $x\in[2;8]\oplus$. **B.** $x\le 8$. **C.** $x\ge 2$. **D.** $x<8$.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$

Câu 5. Giá trị $x\ge 2$ là điều kiện của phương trình nào sau đây?

A. $x+\dfrac{1}{x-2}=2x-1$. **B.** $x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x-2}=0$.

C. $x+\dfrac{1}{4-x}=\sqrt{x-2}$. **D.** $x+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $x+\dfrac{1}{x-2}=2x-1$ có điều kiện là $x-2\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 2$.

Phương trình $x+\dfrac{1}{x}+\sqrt{x-2}=0$ có điều kiện là $\begin{cases}x-2\ge 0\\ x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 2$.

Phương trình $x+\dfrac{1}{4-x}=\sqrt{x-2}$ có điều kiện là $\begin{cases}x-2\ge 0\\ 4-x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 2\\ x\ne 4\end{cases}$.

Phương trình $x+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}=0$ có điều kiện là $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

Câu 6. Điều kiện xác định của phương trình $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x}=\dfrac{3}{\sqrt{5-x}}$ là

A. $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-2\}$. **B.** $x\in(-2;5)\setminus\{0\}$.

C. $[-2;5]\setminus\{0;-2\}$. **D.** $(-\infty;5)\setminus\{0;-2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+2x}=\dfrac{3}{\sqrt{5-x}}$ có nghĩa khi

$\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2+2x\ne 0 \\ 5-x>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne 0; x\ne -2 \\ x<5 \end{cases}\Rightarrow x\in(-2;5)\setminus\{0\}$.

Câu 7. Điều kiện xác định của phương trình $\dfrac{\sqrt{x+4}}{x^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{3-x}}$ là

A. $x\in(-4;+\infty)$. **B.** $x\in[-4;3)\setminus\{\pm1\}$. **C.** $x\in(-\infty;3)$. **D.** $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình đã cho xác định khi $\begin{cases} x+4\ge 0 \\ x^2-1\ne 0 \\ 3-x>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -4 \\ x\ne \pm1 \\ x<3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -4\le x<3 \\ x\ne \pm1 \end{cases}$.

Câu 8. Tập xác định của phương trình $\sqrt{x}+\dfrac{x^2-1}{x-1}=\sqrt[3]{x-2}$ là

A. $D=[2;+\infty)$. **B.** $D=[0;+\infty)\setminus\{1\}$.

C. $D=[0;+\infty)$. **D.** $D=[0;+\infty)\setminus\{1;2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện xác định:

$\begin{cases} x\ge 0 \\ x-1\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 1 \end{cases}$. Vậy đáp án $D=[0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Câu 9. Điều kiện xác định của phương trình $\dfrac{\sqrt{x+5}}{x-2}=1$ là

A. $x\ge -5$. **B.** $\begin{cases} x>-5 \\ x\ne 2 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x\ge -5 \\ x\ne 2 \end{cases}$. **D.** $x>2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x+5\ge 0 \\ x-2\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\ge -5 \\ x\ne 2 \end{cases}$.

Câu 10. Điều kiện xác định của phương trình $x+\sqrt{2x+1}=\sqrt{1-x}$ là

A. $-\frac{1}{2} < x < 1$. **B.** $-\frac{1}{2} \le x \le 1$. **C.** $x \ge -\frac{1}{2}$. **D.** $x \le 1$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} 2x+1 \ge 0 \\ 1-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x \le 1$.

Câu 11. Điều kiện xác định của phương trình $\sqrt{x-2} + \frac{x^2+5}{\sqrt{7-x}} = 0$?

A. $[2;7)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $[2;7]$. **D.** $[7;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của phương trình đã cho là: $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 7-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \le x < 7$.

Câu 12. Điều kiện xác định của phương trình $\frac{\sqrt{x+4}}{x^2-1} = \frac{2}{\sqrt{3-x}}$ là:

A. $x \in (-4;+\infty)$. **B.** $x \in [-4;3) \setminus \{\pm 1\}$. **C.** $x \in (-\infty;3)$. **D.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Lời giải:

Chọn B

Phương trình đã cho xác định khi $\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x^2-1 \ne 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x \ne \pm 1 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x < 3 \\ x \ne \pm 1 \end{cases}$.

Dạng 2: Sử dụng điêu kiện xác định của phương trình để tìm gghiệm của phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1 : Giải phương trình $x(x^2-1)\sqrt{x-1} = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

Lời giải

Vì : $x(x^2-1)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Ví dụ 2 : Giải phương trình $\sqrt{2x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 2$

Lời giải

Vì : Điều kiện của pt $\begin{cases} x-2 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$. Thay x = 2 vào phương trình thấy thỏa mãn nên x = 2 là nghiệm phương trình.

Ví dụ 3: Giải phương trình $\sqrt{x^3-4x^2+5x-2}+x=\sqrt{2-x}$

Lời giải

Vì: $\sqrt{x^3-4x^2+5x-2}+x=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(x-1)^2}+x=\sqrt{2-x}$.

Điều kiện của phương trình: $\begin{cases}(x-2)(x-1)^2 \ge 0\\ 2-x \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x-2\ge 0\\ x=1\end{array}\right.\\ 2-x\ge 0\end{cases} \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x=1\end{array}\right.\\ x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\end{array}\right.$

Ví dụ 4: Giải phương trình $\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}=0$

Lời giải

Vì : $\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-3\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\ x-3=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=3$

+ Thay $\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=1\end{array}\right.$ vào phương trình thì thấy chỉ có x = 1 thỏa mãn. Nên x = 1 là nghiệm pt

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cặp số $(x;y)$ nào sau đây không là nghiệm của phương trình $2x-3y=5$?

A. $(x;y)=\left(\frac{5}{2};0\right)$. **B.** $(x;y)=(1;-1)$.

C. $(x;y)=\left(0;\frac{5}{3}\right)$. **D.** $(x;y)=(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thay các bộ số $(x;y)$ vào phương trình, ta thấy bộ số đáp án C không thỏa mãn: $2.0-3.\frac{5}{3}=-5\ne 5$.

Câu 2. Số nghiệm của phương trình $2x+\frac{1}{\sqrt{x+1}}=-x^2+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x>-1$. Khi đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2x=-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\,(L)\end{array}\right. \Rightarrow x=0$.

Câu 3. Số nghiệm của phương trình $\frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đkxđ: $x > 3$

Với điều kiện $x > 3$ phương trình đã cho trở thành $\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 2 < 3$

Vậy phương trình không có nghiệm.

Câu 4. Tập nghiệm của phương trình $x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1$ là

A. $S = \mathbb{R}$. **B.** $S = \varnothing$. **C.** $S = \{0\}$. **D.** $S = \{-1\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x \ge 0$.

$x + \sqrt{x} = \sqrt{x} - 1 \Leftrightarrow x = -1$.

Vây tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \varnothing$.

Câu 5. Phương trình nào sau đây nhận 2 làm nghiệm ?

A. $x^4 - 4x^2 + 3 = 0.$ **B.** $x^2 - 4x + 3 = 0.$

C. $\sqrt{1-x} + x = \sqrt{1-x} + 2$. **D.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$

Lời giải

Chọn D

- Xét PT: $x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy $x = 2$ không phải nghiệm của PT đã cho.

- Xét PT: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Vậy $x = 2$ không phải nghiệm của PT đã cho.

- Xét PT: $\sqrt{1-x} + x = \sqrt{1-x} + 2$.

Điều kiện $1 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 1$

Vậy $x = 2$ không phải nghiệm của PT đã cho.

- Xét PT: $x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Vậy $x=2$ là nghiệm của PT đã cho.

Câu 6. Phương trình $x\left(x^2-1\right)\sqrt{x-1}=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì : $x\left(x^2-1\right)\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Câu 7. Phương trình $\sqrt{-x^2+6x-9}+x^3=27$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì $\sqrt{-x^2+6x-9}+x^3=27 \Leftrightarrow \sqrt{-(x-3)^2}=27-x^3$

Đk : $-(x-3)^2\geq 0 \Leftrightarrow x=3$. Thay x = 3 vào phương trình thấy thỏa mãn nên x = 3 là nghiệm pt

Câu 8. Phương trình $\sqrt{(x-3)^2(5-3x)}+2x=\sqrt{3x-5}+4$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì điều kiện của phương trình: **:** $\begin{cases} (x-3)^2(5-3x)\geq 0 \\ 3x-5\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5-3x\geq 0 \\ x=3 \end{array}\right. \\ 3x-5\geq 0 \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq \dfrac{5}{3} \\ x=3 \end{array}\right. \\ x\geq \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$

+ Thay $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$ vào phương trình thì thấy chỉ có x = 3 thỏa mãn. Nên x = 3 là nghiệm pt

Câu 9. Phương trình $x+\sqrt{x-1}=\sqrt{1-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Vì : Điều kiện của pt : $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$. Thay x = 1 vào phương trình thấy vô lí nên pt vô nghiệm.

+ Thay $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.$ vào phương trình thì thấy chỉ có x = 1 thỏa mãn. Nên x = 1 là nghiệm pt

Câu 10. Phương trình $\left(x^2-x-2\right)\sqrt{x+1}=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Vì : $\left(x^2-x-2\right)\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Dạng 3: Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Cho phương trình $f\left(x\right)=0$ có tập nghiệm $S_1=\left\{m;2m-1\right\}$ và phương trình $g\left(x\right)=0$ có tập nghiệm $S_2=\left[1;2\right]$. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình $g\left(x\right)=0$ là phương trình hệ quả của phương trình $f\left(x\right)=0$.

A. $1<m<\dfrac{3}{2}$. **B.** $1\le m\le 2$. **C.** $m\in\varnothing$.. **D.** $1\le m\le\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi S_1, S_2 lần lượt là tập nghiệm của hai phương trình $f\left(x\right)=0$ và $g\left(x\right)=0$.

Ta nói phương trình $g\left(x\right)=0$ là phương trình hệ quả của phương trình $f\left(x\right)=0$ khi $S_1\subset S_2$.

Khi đó ta có $\begin{cases} 1\le m\le 2 \\ 1\le 2m-1\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m\le 2 \\ 1\le m\le\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1\le m\le\dfrac{3}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào tương đương với phương trình $x-1=0$?

A. $x+2=0$. **B.** $x+1=0$.

C. $2x-2=0$. **D.** $(x-1)(x+2)=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $x-1=0 \Leftrightarrow 2x-2=0$.

Câu 2. Cho phương trình $(x^2+1)(x-1)(x+1)=0$. Phương trình nào sau đây tương đương với phương trình đã cho?

A. $x^2+1=0$. **B.** $x-1=0$. **C.** $(x-1)(x+1)=0$. **D.** $x+1=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hai phương trình tương đương khi chúng có cùng tập nghiệm.

Phương trình $(x^2+1)(x-1)(x+1)=0$ có tập nghiệm $S=\{-1;1\}$.

Phương trình $(x-1)(x+1)=0$ có tập nghiệm $S=\{-1;1\}$.

Câu 3. Phương trình $\sqrt{2x-3}=1$ tương đương với phương trình nào dưới đây?

A. $(x-3)\sqrt{2x-3}=x-3$. **B.** $(x-4)\sqrt{2x-3}=x-4$.

C. $x\sqrt{2x-3}=x$. **D.** $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-3}=1+\sqrt{x-3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$\sqrt{2x-3}=1 \Leftrightarrow x=2$.

Xét $(x-3)\sqrt{2x-3}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \sqrt{2x-3}=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$ nên phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

Xét $(x-4)\sqrt{2x-3}=x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ \sqrt{2x-3}=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$ nên phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

Xét $x\sqrt{2x-3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3} \\ x=0 \\ \sqrt{2x-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

$\Rightarrow$ phương trình tương đương với phương trình đã cho.

Xét $\sqrt{x-3}+\sqrt{2x-3}=1+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \sqrt{2x-3}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$ nên phương trình này không tương đương với phương trình đã cho.

Câu 4: Cho phương trình: $x^2+x=0$ (1). Phương trình nào tương đương với phương trình (1)?

A. $x(x+1)=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $x^2+(x+1)^2=0$. **D.** $x=0$

Lời giải

Chọn A

$(1) \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array} \right.$

Ý A: $x(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array} \right.$

Câu 5. Phương trình nào dưới đây tương đương với phương trình $x^2-3x=0$?

A. $x^2+\sqrt{2x-1}=3x+\sqrt{2x-1}$. **B.** $x^2\sqrt{x-3}=3x\sqrt{x-3}$.

C. $x^2+\sqrt[3]{x-3}=3x+\sqrt[3]{x-3}$. **D.** $x^2-x+\dfrac{1}{x}=2x+\dfrac{1}{x}$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x^2-3x=0$ có tập nghiệm là $S=\{0;3\}$ nên phương trình tương đương cũng phải có tập nghiệm như vậy. Chọn C

Chú ý lý thuyết:

+ Phép biến đổi tương đương cho hai phương trình tương đương

+ Phép biến đổi cộng hai vế một biểu thức hoặc nhân 2 vế với một biểu thức khác 0 là phép biến đổi tương đương khi chúng không làm thay đổi điều kiện

Do đó dựa và điều kiện của các phương trình ta cũng có thể chọn C

Câu 6. Phép biến đổi nào sau đây là phép biến đổi tương đương?

A. $x+\sqrt{x^2-2}=x^2+\sqrt{x^2-2} \Leftrightarrow x=x^2$. **B.** $\sqrt{2-x}=x \Leftrightarrow 2-x=x^2$.

C. $x+\sqrt{x-2}=x^2+\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x=x^2$. **D.** $x+\sqrt{x^2+3}=x^2+\sqrt{x^2+3} \Leftrightarrow x=x^2$.

Lời giải

Chọn D

* Xét phương án A:

$$x+\sqrt{x^2-2}=x^2+\sqrt{x^2-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\ge 0\\ x=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

$$x=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

2 phương trình không có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi không tương đương.

* Xét phương án B:

$$\sqrt{2-x}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 2-x=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

$$2-x=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\end{array}\right.$$

2 phương trình không có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi không tương đương.

* Xét phương án C:

$$x+\sqrt{x-2}=x^2+\sqrt{x-2}\Leftrightarrow x=x^2\Leftrightarrow\begin{cases}x-2\ge 0\\ x=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$$

$$x=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

2 phương trình không có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi không tương đương.

* Xét phương án D:

$$x+\sqrt{x^2+3}=x^2+\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow x=x^2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+3\ge 0\\ x=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

$$x=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

2 phương trình có cùng tập nghiệm nên phép biến đổi là tương đương.

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương:

$$2x^2+mx-2=0\ \ (1)\ \text{ và }\ 2x^3+(m+4)x^2+2(m-1)x-4=0\ \ (2).$$

A. $m=2.$ **B.** $m=3.$ **C.** $m=\frac{1}{2}.$ **D.** $m=-2.$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình

$2x^3+(m+4)x^2+2(m-1)x-4=0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2+mx-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ 2x^2+mx-2=0(1) \end{array}\right.$

để hai phương trình trên tương đương thì x = - 2 phải là nghiệm của phương trình (1) từ đó suy ra m = 3.

Cách khác : có thể thử ngược đáp án.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để cặp phương trình sau tương đương:

$$mx^2-2(m-1)x+m-2=0 \;\; (1) \text{ và } (m-2)x^2-3x+m^2-15=0 \;\; (2).$$

A. $m=-5.$ **B.** $m=-5;\, m=4.$ **C.** $m=4.$ **D.** $m=5.$

Lời giải

Chọn C

Vì xét phương trình: $mx^2-2(m-1)x+m-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(mx-m+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ mx-m+2=0 \end{array}\right.$

Để hai phương trình tương đương thì điều kiện cần x = 1 phải là nghiệm của phương trình (2).

Thay x = 1 vào (2) ta được: $m^2+m-20=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-5 \end{array}\right.$

+ Với m = 4 : (1) $\Leftrightarrow 4x^2-6x+2=0$

(2) $\Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0$ suy ra m = 4 thỏa mãn

+ Với m = -5: (1) $\Leftrightarrow -5x^2+12x-7=0$

(2) $\Leftrightarrow -7x^2-3x+10=0$ suy ra m = -5 (loại)

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ÔN TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

1. Phương trình bậc nhất

Cách giải và biện luận phương trình dạng $ax+b=0$ được tóm tắt trong bảng sau

$ax+b=0 \qquad (1)$		
Hệ số		Kết luận
$a\neq 0$		(1) có nghiệm duy nhất $x=-\frac{b}{a}$
$a=0$	$b\neq 0$	(1) vô nghiệm
	$b=0$	(1) nghiệm đúng với mọi x

Khi $a\neq 0$ phương trình $ax+b=0$ được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn.

2. Phương trình bậc hai

Cách giải và công thức nghiệm của phương trình bậc hai được tóm tắt trong bảng sau

$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0) \qquad (2)$	
$\Delta=b^2-4ac$	Kết luận
$\Delta>0$	(2) có hai nghiệm phân biệt $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta=0$	(2) có nghiệm kép $x=-\frac{b}{2a}$
$\Delta<0$	(2) vô nghiệm

3. Định lí Vi–ét

Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u+v=S$ và tích $uv=P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình

$$x^2-Sx+P=0.$$

II – PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

Có nhiều phương trình khi giải có thể biến đổi về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai.

Sau đây ta xét hai trong các dạng phương trình đó.

1. Phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối

Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối ta có thể dùng định nghĩa của giá trị tuyệt đối hoặc bình phương hai vế để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 1. Giải phương trình $|x-3|=2x+1.\ \ (3)$

Giải

Cách 1

a) Nếu $x\ge 3$ thì phương trình (3) trở thành $x-3=2x+1.$ Từ đó $x=-4.$

Giá trị $x=-4$ không thỏa mãn điều kiện $x\ge 3$ nên bị loại.

b) Nếu $x<3$ thì phương trình (3) trở thành $-x+3=2x+1.$ Từ đó $x=\frac{2}{3}.$

Giá trị này thỏa mãn điều kiện $x<3$ nên là nghiệm.

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình là $x=\frac{2}{3}.$

Cách 2. Bình phương hai vế của phương trình (3) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$\begin{aligned}(3)&\Rightarrow (x-3)^2=(2x+1)^2\\ &\Rightarrow x^2-6x+9=4x^2+4x+1\\ &\Rightarrow 3x^2+10x-8=0.\end{aligned}$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x=-4$ và $x=\frac{2}{3}.$

Thử lại ta thấy phương trình (3) chỉ có nghiệm là $x=\frac{2}{3}.$

2. Phương trình chứa ẩn dưới dấu căn

Để giải các phương trình chứa ẩn dưới dấu căn bậc hai, ta thường bình phương hai vế để đưa về một phương trình hệ quả không chứa ẩn dưới dấu căn.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{2x-3}=x-2.\ \ (4)$

Giải.

Điều kiện của phương trình (4) là $x\ge \frac{3}{2}.$

Bình phương hai vế của phương trình (4) ta đưa tới phương trình hệ quả

$$\begin{aligned}(4)&\Rightarrow 2x-3=x^2-4x+4\\ &\Rightarrow x^2-6x+7=0.\end{aligned}$$

Phương trình cuối có hai nghiệm là $x=3+\sqrt{2}$ và $x=3-\sqrt{2}.$ Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện của phương trình $(4),$ nhưng khi thay vào phương trình (4) thì giá trị $x=3-\sqrt{2}$ bị loại , còn giá trị $x=3+\sqrt{2}$ là nghiệm .

Kết luận. Vậy nghiệm của phương trình (4) là $x=3+\sqrt{2}.$

Dạng 1: Phương trình tích

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x-2}=0$

Hướng dẫn giải

$$\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{x-2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right. .$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Ví dụ 2. Giải phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định của phương trình $2x+7\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{7}{2}.$

Ta có $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7}=(x-2)(x+2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\sqrt{2x+7}-(x+2)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \sqrt{2x+7}-(x+2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \sqrt{2x+7}=x+2 \quad (1) \end{array}\right. .$$

Giải phương trình

$$(1): \sqrt{2x+7}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ 2x+7=(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1, x=2$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho phương trình $x^3-mx^2-4x+4m=0$. Tìm m để có đúng hai nghiệm

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m\in\{2;-2\}$. **D.** $m=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$x^3-mx^2-4x+4m=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-4\right)-m\left(x^2-4\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)(x-m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2 \\ x=m \end{array}\right.$$

Để phương trình có đúng hai nghiệm thì $m=\pm 2$.

Câu 2. Phương trình $x^4-5x^3+8x^2-10x+4=0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$x^4-5x^3+8x^2-10x+4=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)\left(x^2-4x+2\right)=0$

Phương trình không có nghiệm nguyên.

Câu 3. Phương trình $x^4+4x^2-5=0$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(x^2+5\right)=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực.

Câu 4. Phương trình $\left(x^2-6x\right)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $17-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{17} \le x \le \sqrt{17}$.

Ta có: $\left(x^2-6x\right)\sqrt{17-x^2}=x^2-6x \Leftrightarrow \left(x^2-6x\right)\left(\sqrt{17-x^2}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x=0 \\ \sqrt{17-x^2}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-6)=0 \\ 16-x^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & (T) \\ x=6 & (L) \\ x=\pm 4 & (T) \end{array}\right.$. Vậy phương trình có 3 thực phân biệt.

Câu 5. Phương trình $\left(x^2+5x+4\right)\sqrt{x+3}=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định của phương trình là $x \ge -3$.

Phương trình tương đương với $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-4 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Câu 6. Số nghiệm của phương trình: $\left(\sqrt{x-4}-1\right)\left(x^2-7x+6\right)=0$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện xác định của phương trình $x \ge 4$.

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-4}=1 \\ x^2-7x+6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \\ x=6 \end{array}\right.$ kết hợp điều kiện suy ra

$\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=6 \end{array}\right.$.

Dạng 2: Phương trình chứa ẩn trong giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $|3x-2|=2x-1$

Hướng dẫn giải

Ta có $|3x-2|=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\ge 0 \\ (3x-2)^2=(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 5x^2-8x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ví dụ 2. Giải phương trình $|2x^2-3x-2|=|x+2|$

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-2=x+2 \\ 2x^2-3x-2=-x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-4x-4=0 \\ 2x^2-2x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\pm\sqrt{3} \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $|x-2|=|3x-1|$ có tổng các nghiệm là

A. $-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $|x-2|=|3x-1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=3x-1 \\ x-2=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$. Vậy tổng các nghiệm là $\dfrac{1}{4}$.

Câu 2. Phương trình $|x^2+2x-8|=x-2$ có số nghiệm là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $|x^2+2x-8|=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ (x^2+2x-8)=\pm(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+2x-8=x-2 \\ x^2+2x-8=-x+2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2+x-6=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2+3x-10=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 2 \\ x=2,\ x=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge 2 \\ x=2,\ x=-5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2$.

Câu 3. Phương trình $|2x-4|-2x+4=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$|2x-4|-2x+4=0 \Leftrightarrow |2x-4|=2x-4 \Leftrightarrow 2x-4\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2$.

Câu 4. Phương trình $|x^2+2x-3|=x+5$ có tổng các nghiệm nguyên là

A. -2. **B.** -3. **C.** -1. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

TH1: $x^2+2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>1 \end{array}\right.$. Khi đó phương trình trở thành:

$x^2+2x-3=x+5 \Leftrightarrow x^2+x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$.

TH2: $x^2+2x-3<0 \Leftrightarrow -3<x<1$. Khi đó phương trình trở thành:

$-x^2-2x+3=x+5 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm nguyên là $T=-1-2=-3$.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình: $|x-2|=|3x-5|$ là tập hợp nào sau đây?

A. $\left\{-\frac{7}{4};-\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$. **C.** $\left\{-\frac{7}{4};\frac{3}{2}\right\}$. **D.** $\left\{-\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$|x-2|=|3x-5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=3x-3 \\ x-2=-3x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{7}{4} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right\}$.

Câu 6. Tổng nghiệm bé nhất và lớn nhất của phương trình $|x+1|+|3x-3|=|4-2x|$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $|x+1|+|3x-3|=|4-2x| \Leftrightarrow \left(|x+1|+|3x-3|\right)^2=(4-2x)^2$

$\Leftrightarrow 10x^2-16x+10+2\left|3x^2-3\right|=16-16x+4x^2 \Leftrightarrow 6\left|x^2-1\right|=6-6x^2 \Leftrightarrow \left|x^2-1\right|=1-x^2$

$\Leftrightarrow 1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$. Vậy tổng nghiệm lớn nhất và bé nhất bằng 0.

Câu 8. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $|x+2|=2|x-2|$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** 6. **D.** $\frac{20}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$|x+2|=2|x-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=2x-4 \\ x+2=-2x+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm là $\frac{20}{3}$.

Câu 10. Để giải phương trình $|x-2|=2x-3\,(1)$, một học sinh đã lập luận như sau:

(I) Bình phương 2 vế: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9 \quad (2)$

$(\mathrm{II}) \Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 5 = 0 \quad (3)$.

$(\mathrm{III}) \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{5}{3}$.

(IV) Vậy (1) có hai nghiệm $x_1 = 1$ và $x_2 = \dfrac{5}{3}$

Cách giải trên sai từ bước nào?

A. (IV). **B.** (II). **C.** (III). **D.** (I).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Muốn bình phương hai vế của phương trình thì hai vế phải không âm

Để giải phương trình này ta áp dụng công thức $|x-2| = 2x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 2 = 2x - 3 \\ x - 2 = -2x + 3 \end{array}\right. \end{cases}$

Hoặc ta giải bằng phương pháp hệ quả thì $(1) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 4x^2 - 12x + 9 \quad (2)$.

Câu 11. Cho phương trình: $|x-2| = 2 - x \quad (1)$. Tập hợp các nghiệm của phương trình (1) là tập hợp nào sau đây?

A. $(-\infty; 2]$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[2; +\infty)$. **D.** $\{0; 1; 2\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $|x-2| = 2 - x \Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.

Phương trình có tập nghiệm $S = (-\infty; 2]$.

Câu 12. Giải phương trình $|1-3x| - 3x + 1 = 0$.

A. $\left(\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$. **B.** $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **C.** $\left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $|1-3x| - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow |1-3x| = 3x - 1 \Leftrightarrow 1 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{3}$.

Câu 13. Phương trình $x^2 + 3|x-3| = 2x + 5$ có tích của tất cả các nghiệm nguyên là

A. 4. **B.** 1. **C.** -56. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $x^2+3|x-3|=2x+5 \Leftrightarrow 3|x-3|=2x+5-x^2\ (*)$.

Điều kiện $2x+5-x^2\ge 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{6}\le x\le 1+\sqrt{6}$.

TH1: $3\le x\le 1+\sqrt{6}$. Phương trình $(*) \Leftrightarrow x^2+x-14=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{57}}{2}$.

TH2: $1-\sqrt{6}\le x<3$. Phương trình $(*) \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 14. Phương trình $|x^2+2x-3|=x+5$ có tổng các nghiệm nguyên là

A. -2. **B.** -3. **C.** -1. **D.** -4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Với $x+5<0 \Leftrightarrow x<-5$ ta có $\text{VP}\ge 0$, $\text{VP}<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

+ Với $x+5\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -5$

Phương trình $\Leftrightarrow |x^2+2x-3|^2=(x+5)^2 \Leftrightarrow (x^2+2x-3)^2=(x+5)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x-8=0 \\ x^2+3x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{array}\right. \text{ hoặc } \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Tổng các nghiệm bằng -4 .

Dạng 3: Phương trình chứa ẩn ở mẫu

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Giải phương trình $2x+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1}$

Lời giải

Điều kiện $x\ne 1$. Khi đó phương trình

$\Leftrightarrow 2x+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{3x}{x-1} \Leftrightarrow 2x=\dfrac{3(x-1)}{x-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện

Ví dụ 2. Giải phương trình $\dfrac{2x^2-10x}{x^2-5x}=x-3$.

Lời giải

$$\frac{2x^2-10x}{x^2-5x}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x\neq 0 \\ \dfrac{2x(x-5)}{x(x-5)}=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x\neq 0 \\ 2=x-3 \end{cases} \to S=\varnothing.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình $1-\frac{2}{x-2}=\frac{10}{x+3}-\frac{50}{(2-x)(x+3)}$.

Lời giải

$$\Leftrightarrow (2-x)(x+3)-2(x+3)=10(2-x)-50 \Leftrightarrow x^2-7x-30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10\,(\text{thoả mãn}) \\ x=-3\,(\text{loại}) \end{array}\right..$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Gọi n là các số các giá trị của tham số m để phương trình $\frac{(x+1)(mx+2)}{x-2}=0$ có nghiệm duy nhất. Khi đó n là:

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x\neq 2$.

Phương trình có nghiệm duy nhất khi xảy ra hai trường hợp:

TH 1: tử thức có đúng một nghiệm thỏa điều kiện, suy ra $-m+2=0 \Leftrightarrow m=2$.

TH 2: tử thức có hai nghiệm và một nghiệm $x=2$, suy ra $2m+2=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $n=2$.

Câu 2. Tìm phương trình tương đương với phương trình $\frac{(x^2+x-6)\sqrt{x+1}}{|x|-2}=0$ trong các phương trình sau:

A. $\frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+4}}=0$. **B.** $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=1$.

C. $x^3+1=0$. **D.** $(x-3)^2=\frac{-x}{\sqrt{x-2}}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét phương trình $\frac{(x^2+x-6)\sqrt{x+1}}{|x|-2}=0 \;\; (1)$. ĐK: $x\geq -1$ và $x\neq 2$.

Với điều kiện ở trên, ta có $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0 \\ x^2+x-6=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1 \\ x=-3 \\ x=2\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện, phương trình (1) có nghiệm $x=-1$.

Xét phương trình $\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+4}}=0$ (2). ĐK: $x>-4$. $(2) \Leftrightarrow x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1 \\ x=-3\end{array}\right.$.

Loại A

Xét phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{2+x}=1$. ĐK: $x \geq 0$. Loại B

Xét phương trình $x^3+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Xét phương trình $(x-3)^2=\dfrac{-x}{\sqrt{x-2}}$. ĐK: $x>2$. Loại D

Đã sửa đáp án C từ $x^2=1$ thành $x^3+1=0$.

Câu 3. Cho phương trình: $\dfrac{x^2-3x-2}{x-3}=-x$ có nghiệm a. Khi đó a thuộc tập:

A. $\left(\dfrac{1}{3};3\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \neq 3$.

Ta có: $\dfrac{x^2-3x-2}{x-3}=-x \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-2+x(x-3)}{x-3}=0 \Rightarrow 2x^2-6x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$.

Ta có: $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}<0$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho thuộc tập $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Dạng 4: Phương trình chứa ẩn ở trong dấu căn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1$

Lời giải

Ta có : $\sqrt{2x^2+3x-5}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases}x+1 \geq 0 \\ 2x^2+3x-5=(x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geq -1 \\ x^2+x-6=0\end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$?

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ 2-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Thay $x=2$ vào phương trình ta được $0=0$ hay $x=2$ là nghiệm của phương trình.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{2x^2-8x+4}=x-2$.

A. $x=4$. **B.** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$. **C.** $x=4+2\sqrt{2}$. **D.** $x=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\sqrt{2x^2-8x+4}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ 2x^2-8x+4=(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $x^2+5x+2+2\sqrt{x^2+5x+10}=0$

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định $x^2+5x+10\ge 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow x^2+5x+10+2\sqrt{x^2+5x+10}-8=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+5x+10}=2 \\ \sqrt{x^2+5x+10}=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+10}=2 \Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \end{array}\right..$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Số nghiệm nguyên dương của phương trình $\sqrt{x-1}=x-3$ là

A. 0. **B.** 1. **B.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt{x-1}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x-1=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=5.$$

Câu 2. Số các nghiệm nguyên của phương trình $x(x+5)=2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t=\sqrt[3]{x^2+5x-2}\Rightarrow x^2+5x=t^3+2$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^3-2t+4=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow x^2+5x+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-3\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên.

Câu 3. Cho phương trình $\dfrac{x^2-4x+2}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{x-2}$. Số nghiệm của phương trình này là

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

ĐKXĐ: $x>2$ khi đó phương trình trở thành

$x^2-4x+2=x-2\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Đối chiếu điề kiện suy ra phương trình có một nghiệm $x=4$.

Câu 5. Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ là

A. 2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\\sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\3x+7=4+x+1+4\sqrt{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\x+1=2\sqrt{x+1}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\x^2-2x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 2.

Câu 6. Số nghiệm nguyên của phương trình: $\sqrt{x-3}+5=\sqrt{7-x}+x$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

+ Điều kiện: $\begin{cases}x-3\ge 0\\7-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\x\le 7\end{cases}$.

+ Thay x lần lượt bằng 3, 4, 5, 6, 7 vào phương trình ta thấy các số 3, 7 là nghiệm.

+ Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên.

Câu 7. Số nghiệm của phương trình: $x^2 - x + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + 6$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$x^2 - x + \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x^2-x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=-2 \vee x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.

Vập phương trình đã cho có một nghiệm $x=3$.

Câu 8. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$?

A. 0. **B.** vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Với $x=1$ thay vào phương trình thỏa mãn. Vậy phương trình có một nghiệm.

Câu 9. Tổng tất cả các nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2+3x-2} = \sqrt{1+x}$ là

A. 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\sqrt{x^2+3x-2} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \geq 0 \\ x^2+3x-2=1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Câu 10. Phương trình $\sqrt{x^2+4x-1} = x-3$ có nghiệm là

A. $x=1$ hoặc $x=3$. **B.** Vô nghiệm. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\sqrt{x^2+4x-1} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2+4x-1 = x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x=1 \end{cases}$.

Câu 11. Biết phương trình $3x+1-\sqrt{3x^2+7x}-\sqrt{3x-1}=0$ có một nghiệm có dạng $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$, trong đó a, b, c là các số nguyên tố. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=14$. **B.** $S=21$. **C.** $S=10$. **D.** $S=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $\begin{cases}3x^2+7x\ge 0\\3x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{3}\,(*)$

Với điều kiện trên, phương trình tương đương

$$\left[(2x+1)-\sqrt{3x^2+7x}\right]+\left[x-\sqrt{3x-1}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3x+1}{(2x+1)+\sqrt{3x^2+7x}}+\frac{x^2-3x+1}{x+\sqrt{3x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+1\right)\left(\frac{1}{2x+1+\sqrt{3x^2+7x}}+\frac{1}{x+\sqrt{3x-1}}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\text{ hoặc } x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Theo yêu cầu đề bài ta chọn nghiệm $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Vậy $a=3$, $b=5$, $c=2$ $\Rightarrow S=a+b+c=10$.

Câu 12. Phương trình $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$ có bao nhiêu nghiệm.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$$

$$\Leftrightarrow x+5+x+6+3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\left(\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}\right)=2x+11$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{x+5}\sqrt[3]{x+6}\sqrt[3]{2x+11}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=-6\\x=-\frac{11}{2}\end{array}\right.$$

Thử lại ta được các nghiệm đều thỏa mãn

Câu 13. Tập nghiệm của phương trình $\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=2$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\left\{\frac{7}{2};1\right\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{1\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t=\sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}, t>0 \Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{t^2}$

Ta có pt: $t+\dfrac{1}{t^2}=2 \Leftrightarrow t^3-2t^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện $t>0$ ta tìm được $t=1,\ t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 1: $t=1: \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}=1 \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1$

$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-2x+1=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Trường hợp 2: $t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \sqrt[4]{x-\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x-\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}=\sqrt{x^2-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ \left(x-\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^2=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x\in\varnothing$

Câu 14. Số nghiệm của phương trình $x^2-2x-8=4\sqrt{(4-x)(x+2)}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $(4-x)(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-2;4]$.

$x^2-2x-8=4\sqrt{(4-x)(x+2)} \Leftrightarrow x^2-2x-8=4\sqrt{-(x^2-2x-8)}\,(1)$.

Đặt $t=\sqrt{-(x^2-2x-8)}$, $t\geq 0 \Leftrightarrow t^2=-(x^2-2x-8) \Leftrightarrow x^2-2x-8=-t^2$.

$(1) \Leftrightarrow -t^2=4t \Leftrightarrow t^2+4t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\,(n) \\ t=-4\,(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{-(x^2-2x-8)}=0 \Leftrightarrow -(x^2-2x-8)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\,(n) \\ x=4\,(n) \end{array}\right.$. Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Câu 15. Tổng các bình phương các nghiệm của phương trình $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$ là

A. 17. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $(x-1)(x-3)+3\sqrt{x^2-4x+5}-2=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+5+3\sqrt{x^2-4x+5}-4=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-4x+5}=1$

$\Leftrightarrow x^2-4x+5=1 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2$.

Câu 16. Phương trình $\sqrt{3x}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{1-x}+2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

ĐKXĐ: $\begin{cases}3x\ge 0\\2x-2\ge 0\\1-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\x\ge 1\\x\le 1\end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Thay $x=1$ vào $\sqrt{3x}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{1-x}+2$, ta được: $\sqrt{3}=2$.

Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 17. Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}}=2-\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\sqrt{x+8-2\sqrt{x+7}}=2-\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\sqrt{x+7}-1\right|=2-\sqrt{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+2\right)}\\\sqrt{x+7}\ge 3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+7}-3+\sqrt{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+2\right)}=0\\x\ge 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\sqrt{x+7}-3}\left(\sqrt{\sqrt{x+7}-3}+\sqrt{\sqrt{x+7}+2}\right)=0\\x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+7}-3=0\\x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

Dạng 5: Định lý viet và ứng dụng

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tìm tham số m để phương trình $(m-1)x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm trái dấu

Hướng dẫn giải

Phương trình $(m-1)x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m-1\neq 0 \\ (m-1)(m+2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<1.$$

Ví dụ 2. Cho phương trình $mx^2+(m^2-3)x+m=0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=\frac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=\frac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta\geq 0 \\ -\frac{b}{a}=\frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ (m^2-3)^2-4m^2\geq 0 \\ -\frac{m^2-3}{m}=\frac{13}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ (m^2-3-2m)(m^2-3+2m)\geq 0 \\ 4m^2+13m-12=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\in(-\infty;-3]\cup[-1;1]\cup[3;+\infty) \\ \left[\begin{array}{l} m=\frac{3}{4} \\ m=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{3}{4} \\ m=-4 \end{array}\right..$$

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là $\frac{265}{16}$.

Ví dụ 3. Tìm tham số m để phương trình $x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

Hướng dẫn giải

Để phương trình $x^2-2mx+m+2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-m)^2-1.(m+2)>0 \\ 2m>0 \\ m+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2>0 \\ m>0 \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<-1 \text{ v } m>2 \\ m>0 \\ m>-2 \end{cases} \Leftrightarrow m>2.$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Phương trình $ax^2+bx+c=0\ \left(a\ne 0\right)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases}\Delta>0\\P>0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}\Delta>0\\S<0\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}\Delta\ge 0\\P>0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}\Delta>0\\S>0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $ax^2+bx+c=0\ \left(a\ne 0\right)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu khi và chỉ

$\begin{cases}\Delta>0\\P>0\end{cases}$.

Câu 2. Biết phương trình $ax^2+bx+c=0$, $(a\ne 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Khi đó:

A. $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{a}{b}\\x_1x_2=\dfrac{a}{c}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{b}{a}\\x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{2a}\\x_1x_2=\dfrac{c}{2a}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Theo Hệ thức Viet, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-7;7\right]$ để phương trình $mx^2-2\left(m+2\right)x+m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 14. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

- TH1: $m=0\Leftrightarrow -4x-1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{4}$; phương trình chỉ có một nghiệm duy nhất nên loại $m=0$
- TH2: $m\ne 0$

  Để $mx^2-2\left(m+2\right)x+m-1=0$ với $m\in\left[-7;7\right]$ có hai nghiệm phân biệt thì

$\Delta' = (m+2)^2 - m(m-1) > 0 \Leftrightarrow 5m > -4 \Leftrightarrow m > -\dfrac{4}{5}$ đồng thời $m \in [-7;7]$

Vậy $m = \{1;2;3;4;5;6;7\} \to$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 4. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = 0 \end{array}\right.$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{2} \\ m = 0 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình: $x^2 + 2mx - m - 1 = 0$.

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 + m + 1 > 0$, luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó, theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -m - 1 \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m + 2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{2} \\ m = 0 \end{array}\right.$.

Câu 5. Phương trình $(m^2 - 4)x^2 + 5x + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu, giá trị m là

A. $m \in (-\infty; -2] \cup [0; 2]$.

B. $m \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

C. $m \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$.

D. $m \in (-2; 2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \dfrac{m}{m^2 - 4} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ 0 < m < 2 \end{array}\right.$ hay $m \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$.

Câu 6. Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác vuông với cạnh huyền có độ dài bằng 2 là

A. $m \in (0; 2)$. **B.** $m = \pm\sqrt{3}$. **C.** $m \in (-2; 0)$. **D.** $m \in \varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình $x^2-mx+m^2-3=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài các cạnh góc vuông của một tam giác với cạnh huyền có độ bài bằng 2 khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\Delta=m^2-4m^2+12\ge 0\\ S=x_1+x_2=m>0\\ P=x_1.x_2>0\\ x_1^2+x_2^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<m^2\le 4\\ m>0\\ \left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}<m\le 2\\ m^2-2\left(m^2-3\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3}<m\le 2\\ m^2=2\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Câu 7. Cho hàm số $y=-x^2+4x-3$, có đồ thị (P). Giả sử d là dường thẳng đi qua $A(0;-3)$ và có hệ số góc k. Xác định k sao cho d cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt E, F sao cho ΔOEF vuông tại O (O là gốc tọa độ). Khi đó

A. $\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=3\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\ k=2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\ k=2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\ k=3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình đường thẳng $d: y=kx-3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$-x^2+4x-3=kx-3\Leftrightarrow -x^2+\left(4-k\right)x=0\Leftrightarrow x\left(-x+4-k\right)=0\ (1)$.

d cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt khi (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4-k\ne 0\Leftrightarrow k\ne 4$.

Ta có $E\left(x_1;kx_1-3\right)$, $F\left(x_2;kx_2-3\right)$ với x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1).

ΔOEF vuông tại $O\Rightarrow\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{OF}=0\Leftrightarrow x_1.x_2+\left(kx_1-3\right)\left(kx_2-3\right)=0\Leftrightarrow x_1.x_2\left(1+k^2\right)-3k\left(x_1+x_2\right)+9=0$

$\Leftrightarrow 0.\left(1+k^2\right)-3k\left(4-k\right)+9=0$

$\Leftrightarrow k^2-4k+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=1\\ k=3\end{array}\right.$.

Câu 8. Giả sử phương trình $2x^2-4mx-1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left|x_1-x_2\right|$.

A. $\min T=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\min T=\sqrt{2}$. **C.** $\min T=2$. **D.** $\min T=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $2x^2-4mx-1=0$ có $\Delta'=4m^2+2>0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $S=x_1+x_2=2m$, $P=x_1x_2=-\frac{1}{2}$.

Ta có $T^2=\left(x_1-x_2\right)^2=S^2-4P=4m^2+2\ge 2\Rightarrow T\ge\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=0$.

Vậy $\min T=\sqrt{2}$.

Câu 9. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho parabol (P): $y=x^2-4x+m$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA=3OB$. Tính tổng T các phần tử của S.

A. $T=3$. **B.** $T=-15$. **C.** $T=\frac{3}{2}$. **D.** $T=-9$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox: $x^2-4x+m=0$

Để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt thì có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ a\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4-m>0\\ 1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow m<4$. Giả sử $A\left(x_1;0\right)$, $B\left(x_2;0\right)$ và $x_1+x_2=4$, $x_1x_2=m$.

Ta có $OA=3OB\Leftrightarrow\left|x_1\right|=3\left|x_2\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=3x_2\\ x_1=-3x_2\end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $x_1=3x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\\ x_2=1\end{cases}\Rightarrow m=3$

Trường hợp 2: $x_1=-3x_2\Rightarrow\begin{cases}x_1=6\\ x_2=-2\end{cases}\Rightarrow m=-12$

Vậy $S=-12+3=-9$.

Câu 10. Cho hàm số $y=x^2-2x-2$ có đồ thị (P), và đường thẳng (d) có phương trình $y=x+m$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho OA^2+OB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=-\frac{5}{2}$. **B.** $m=\frac{5}{2}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x-2=x+m\Leftrightarrow x^2-3x-2-m=0$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, $B \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 17 + 4m > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{17}{4}$.

$A(x_1; x_1 + m) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 + m)$

$B(x_2; x_2 + m) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 + m)$

$OA^2 + OB^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + m)^2 + (x_2 + m)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + 2m^2$

$= 18 - 4(2 - m) + 6m + 2m^2 = 2m^2 + 10m + 10 = 2\left(m + \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{2} \geq \dfrac{15}{2}$ với $m > -\dfrac{17}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $OA^2 + OB^2$ là $\dfrac{15}{2}$ khi $m = -\dfrac{5}{2}$.

Câu 11. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để phương trình $x^2 + 4mx + m^2 = 0$ có hai nghiệm âm phân biệt là

A. 5. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 11

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 > 0 \\ -4m < 0 \\ m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy trong đoạn $[-5;5]$ có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12. Với giá trị nào của m thì phương trình $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1$?

A. $1 < m < 3$. **B.** $1 < m < 2$. **C.** $m > 2$. **D.** $m > 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương $(m-1)x^2 - 2(m-2)x + m - 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi

$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (m-2)^2 - (m-1)(m-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 1$.

Theo định lí Vi-et ta có: $x_1 + x_2 = \dfrac{2m-4}{m-1}$, $x_1x_2 = \dfrac{m-3}{m-1}$.

Theo đề ta có: $x_1 + x_2 + x_1x_2 < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-4}{m-1} + \dfrac{m-3}{m-1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2m-6}{m-1} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 3$.

Vậy $1 < m < 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 13. Cho phương trình $(m-5)x^2+2(m-1)x+m=0$ (1). Với giá trị nào của m thì (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1<2<x_2$?

A. $m\ge 5$. **B.** $m<\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}<m<5$. **D.** $\frac{8}{3}\le m\le 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m-5\ne 0 \\ (m-1)^2-m(m-5)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 5 \\ m>-\frac{1}{3} \end{cases} (*)$.

Khi đó theo định lý Viète, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{2(m-1)}{m-5} \\ x_1x_2=\dfrac{m}{m-5} \end{cases}$.

Với

$x_1<2<x_2 \Rightarrow (x_1-2)(x_2-2)<0 \Leftrightarrow x_1x_2-2(x_1+x_2)+4<0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{m-5}+\dfrac{4(m-1)}{m-5}+4<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{9m-24}{m-5}<0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{3}<m<5$. Kiểm tra điều kiện $(*)$ ta được $\dfrac{8}{3}<m<5$.

Câu 14. Gọi S là tập hợp tất các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $(d): y=mx$ cắt parabol $(P): y=-x^2+2x+3$ tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trung điểm I của đoạn thẳng AB thuộc đường thẳng $(\Delta): y=x-3$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+2x+3=mx \Leftrightarrow x^2+(m-2)x-3=0$ (1).

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\ne 0 \\ \Delta=(m-2)^2+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m$.

Khi đó (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1;mx_1)$, $B(x_2;mx_2)$, với x_1, x_2 là nghiệm phương trình (1). Theo Viét, có: $x_1+x_2=2-m$, $x_1x_2=-3$.

I là trung điểm $AB \Rightarrow I=\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{mx_1+mx_2}{2}\right)=\left(\dfrac{2-m}{2};\dfrac{-m^2+2m}{2}\right)$.

Mà

$I\in(\Delta): y=x-3 \Rightarrow \frac{-m^2+2m}{2}=\frac{2-m}{2}-3 \Leftrightarrow m^2-3m-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1=m_1 \\ m=4=m_2 \end{array}\right. \Rightarrow m_1+m_2=3$.

Dạng 6: Giải và biện luận phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Tìm tham số m để phương trình $x^2-2mx+3m-2=0$ có nghiệm là

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để phương trình $x^2-2mx+3m-2=0$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (-m)^2-(3m-2)\geq 0 \Leftrightarrow m^2-3m+2\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\leq 1 \\ m\geq 2 \end{array}\right.$.

Ví dụ 2. Cho phương trình $(m+1)^2 x+1=(7m-5)x+m$. Tìm tham số m để phương trình đã cho vô nghiệm là

Hướng dẫn giải

Ta có: $(m+1)^2 x+1=(7m-5)x+m \;\; (1)$

$\Leftrightarrow (m^2-5m+6)x=m-1$

$\Leftrightarrow (m-2)(m-3)x=m-1 \quad (2)$

Để phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) vô nghiệm

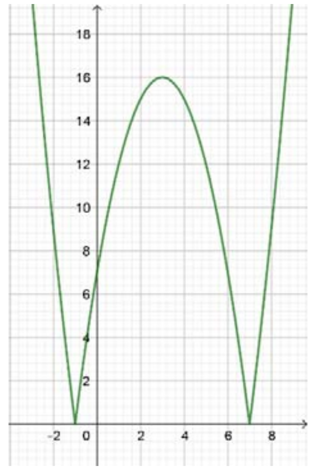
$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)(m-3)=0 \\ m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \text{ v } m=3 \\ m\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m=2 \text{ v } m=3$

Ví dụ 3. Xác định m để phương trình $m=\left|x^2-6x-7\right|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

$m=\left|x^2-6x-7\right|$ là phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=m$ và đồ thị $(C): y=\left|x^2-6x-7\right|$.

Vẽ $(P): y=x^2-6x-7$, lấy đối xứng phần phía dưới Ox của (P) lên trên Ox và xóa đi phần phía dưới Ox , ta được đồ thị (C).



Dựa vào đồ thị: phương trình $m = \left|x^2 - 6x - 7\right|$ có 4 nghiệm phân biệt khi $m \in (0;16)$.

Ví dụ 4. Tìm m để phương trình $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} + 2\sqrt{-x^2+4} + 2m + 3 = 0$ có nghiệm.

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

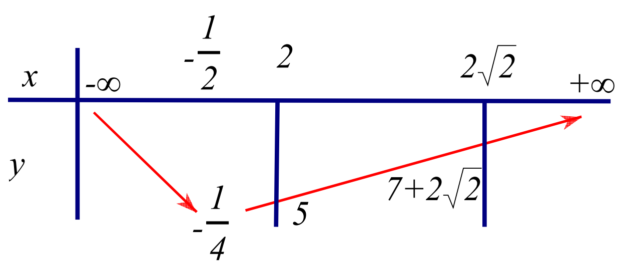
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{4-x^2} \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \dfrac{t^2-4}{2}$, Điều kiện $2 \le t \le 2\sqrt{2}$

Phương trình trở thành: $t + 2\dfrac{t^2-4}{2} + 2m + 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t + 2m - 1 = 0$ (*)

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t - 1$, có bảng biến thiên



Phương trình có nghiệm thỏa $2 \le t \le 2\sqrt{2}$ khi $5 \le 2m \le 7 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{5}{2} \le m \le \dfrac{7+2\sqrt{2}}{2}$

Ví dụ 5. Tìm tham số m để phương trình $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 2m + 1 = 0$ có nghiệm

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định: $x \ne 0$. Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} \ge 2 \Rightarrow |t| \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 2 \\ t \le -2 \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho trở thành $2\left(t^2 - 2\right) - 3t - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2m - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2t^2-3t-3=2m$

Xét hàm số $y=f\left(t\right)=2t^2-3t-3$ có bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	11	$-\frac{33}{8}$	-1	$+\infty$

có nghiệm t thỏa $\left[\begin{array}{l} t\ge 2 \\ t\le -2 \end{array}\right.$ khi $\left[\begin{array}{l} 2m\ge -1 \\ 2m\ge 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\ge -\frac{1}{2}$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $mx+m-\left(m+2\right)x=m^2-2x$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Biến đổi phương trình đã cho thành $0x=m^2-m$.

Phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì $m^2-m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Suy ra $S=\left\{0;1\right\}$. Do đó ta có $0+1=1$.

Câu 2. Cho phương trình $\left(2-m\right)x=m^2-4$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$?

A. vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình bậc nhất đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-m=0 \\ m^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=\pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m=2.$$

Vậy có duy nhất một giá trị của tham số m để phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Câu 3. Cho phương trình $m\left(3m-1\right)x=1-3m$ (m là tham số). Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $m=\frac{1}{3}$ thì phương trình có tập nghiệm là $\left\{-\frac{1}{m}\right\}$.

B. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình có tập nghiệm là $\left\{-\frac{1}{m}\right\}$.

C. $m = 0$ thì phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

D. $m \neq 0$ và $m \neq \frac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giải và biện luận phương trình: $m(3m-1)x = 1-3m$ như sau:

+ Khi $m(3m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{1}{3} \end{array}\right.$.

- $m = 0$: phương trình trở thành $0x = 1$.
- $m = \frac{1}{3}$: phương trình trở thành $0x = 0$.

+ Khi $m(3m-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{3} \end{cases}$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{m}$.

Câu 4. Tìm m để phương trình $mx^2 - 2(m+1)x + m + 1 = 0$ vô nghiệm.

A. $m < -1$. **B.** $m \leq 1$ hoặc $m \geq 0$.

C. $m = 0$ và $m < -1$. **D.** $m = 0$ và $m > -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $m = 0$ phương trình thành $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ nên ta loại $m = 0$.

Xét $m \neq 0$ phương trình có biệt thức $\Delta' = (m+1)^2 - m(m+1) = m+1$.

Phương trình đã cho vô nghiệm khi $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -1$ thỏa $m \neq 0$.

Câu 5. Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt khi và chỉ khi:

A. $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt thì tổng hai nghiệm âm và tích hai nghiệm dương.

Câu 6. Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

A. $a=0$ và $b\neq 0$.

B. $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=0\\ b\neq 0\end{cases}$.

C. $a=b=0$.

D. $\begin{cases}a\neq 0\\ \Delta=0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Nếu $a\neq 0$ thì phương trình đã cho là PTB2 nên có nghiệm duy nhất khi $\Delta=0$.

Nếu $a=0$ ta được phương trình $bx+c=0$. Phương trình này có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $b\neq 0$.

Câu 7. Phương trình $x^4-2mx^2+(2m-1)=0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

A. $m>\frac{1}{2}$. **B.** $m>\frac{1}{2}$ và $m\neq 1$. **C.** $\forall m\in\mathbb{R}$. **D.** $m>1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=x^2, t\geq 0$, khi đó phương trình trở thành: $t^2-2mt+(2m-1)=0$ $(*)$.

Để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m+1>0\\ 2m>0\\ 2m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m>0\\ m>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\frac{1}{2}\\ m\neq 1\end{cases}.$$

Câu 8. Vậy $m>\frac{1}{2}$ và $m\neq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tất cả các tham số m để phương trình $(m^2-9)x=m-3$ nghiệm đúng với mọi x.

A. $m=\pm 3$. **B.** $m\neq\pm 3$. **C.** Không tồn tại m. **D.** $m=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình $(m^2-9)x=m-3$ nghiệm đúng với mọi x khi $\begin{cases}m-3=0\\ m^2-9=0\end{cases}\Leftrightarrow m=3$.

Câu 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hai đồ thị hàm số $y=-x^2-2x+3$ và $y=x^2-m$ có điểm chung.

A. $m=-\frac{7}{2}$. **B.** $m>-\frac{7}{2}$. **C.** $m\ge -\frac{7}{2}$. **D.** $m<-\frac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm $-x^2-2x+3=x^2-m \Leftrightarrow 2x^2+2x-m-3=0(*)$

có nghiệm khi $\Delta'=2m+7\ge 0 \Leftrightarrow m\ge \frac{-7}{2}$.

Câu 10. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để phương trình $(m^2-9)x=3m(m-3)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2. **B.** 21. **C.** 19. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình $(m^2-9)x=3m(m-3)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$m^2-9\ne 0 \Leftrightarrow m\ne \pm 3$.

Vì $m\in[-10;10]$ nên $m\in[-10;10]\backslash\{\pm 3\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của m để $(m^2-9)x=3m(m-3)$ có nghiệm duy nhất.

Câu 11. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $mx+2+m^2=m^2x+3m$ vô nghiệm.

A. $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=-\frac{1}{2}$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$mx+2+m^2=m^2x+3m \Leftrightarrow (m^2-m)x=m^2-3m+2 \ (*)$.

Xét $m^2-m=0 \Leftrightarrow m=0 \vee m=1$.

Với $m=0$, $(*)\Rightarrow 0x=2$, phương trình vô nghiệm.

Với $m=1$, $(*)\Rightarrow 0x=0$, phương trình có vô số nghiệm.

Với $m\notin\{0;1\}$, $(*)\Rightarrow x=\frac{m^2-3x+2}{m^2-m}=\frac{m-2}{m}$, nên $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Vậy $m=0$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 12. Điều kiện cần và đủ để phương trình $mx^2+2(m+1)x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. $m\neq 0, m>-\frac{1}{2}$. **B.** $m>\frac{1}{2}$. **C.** $m>-\frac{1}{2}$. **D.** $m>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases}$.

Ta có: $\Delta'=(m+1)^2-m^2=2m+1$.

Hệ có nghiệm: $\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\frac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy $\begin{cases}m\neq 0\\ m>-\frac{1}{2}\end{cases}$ cần tìm.

Câu 13. Phương trình $(m-1)x^2+3x-1=0$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $m\geq-\frac{5}{4}$. **B.** $m>-\frac{5}{4}$. **C.** $m=-\frac{5}{4}$. **D.** $m\geq-\frac{5}{4}$, $m\neq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Trường hợp 1: Xét $m=1$, phương trình có nghiệm $x=\frac{1}{3}$.

Trường hợp 2: Xét $m\neq 1$, $\Delta=9+4(m-1)=4m+5$. Phương trình có nghiệm khi $\Delta\geq 0$

$\Leftrightarrow 4m+5\geq 0\Leftrightarrow m\geq-\frac{5}{4}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm khi $m\geq-\frac{5}{4}$.

Câu 14. Với m bằng bao nhiêu thì phương trình $mx+m-1=0$ vô nghiệm?

A. $m=0$. **B.** $m=0$ và $m=1$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $mx+m-1=0$ vô nghiệm khi $\begin{cases}m=0\\ m-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\ m\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m=0$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $\left(m^2-m\right)x=2x+m^2-1$ vô nghiệm?

A. 2. **B.** Đáp án khác. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\left(m^2-m\right)x=2x+m^2-1 \Leftrightarrow \left(m^2-m-2\right)x=m^2-1$.

Để phương trình vô nghiệm thì $\begin{cases} m^2-m-2=0 \\ m^2-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2$.

Câu 16. Cho phương trình $\left(m^2-1\right)x+m+1=0$ (1). Trong các kết luận sau kết luận nào đúng?

A. Với $m\neq -1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

B. Với $m\neq 1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

C. Với $m\neq \pm 1$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

D. Cả ba kết luận trên đều đúng.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$(1)\Leftrightarrow \left(m^2-1\right)x=-m-1$

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi $m^2-1 \Leftrightarrow m\neq \pm 1$.

Câu 17. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1=0$ có nghiệm là

A. $m\in\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

C. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{3}{4}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-2m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+1=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2m\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1=0$

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$, $|t|\geq 2$ ta được $t^2-2mt-1=0$.

Phương trình luôn có hai nghiệm $t_1 < 0 < t_2 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi phương trình có ít nhất một nghiệm t sao cho $|t| \geq 2$, hay ít nhất một trong hai số $2; -2$ phải nằm giữa hai nghiệm t_1, t_2; hay $\left[\begin{array}{l} f(2) \leq 0 \\ f(-2) \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-4m \leq 0 \\ 3+4m \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq \dfrac{3}{4} \\ m \leq -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1;3]$.

A. $\dfrac{2}{3} \leq m \leq \dfrac{11}{3}$. **B.** $-\dfrac{11}{3} \leq m \leq -\dfrac{2}{3}$.

C. $-1 \leq m < -\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{11}{3} \leq m \leq -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0 \Leftrightarrow 3m = -x^2 + 4x - 6$.

Số nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 6 + 3m = 0$ là số nghiệm của đường thẳng $y = 3m$ và parabol $y = -x^2 + 4x - 6$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = -x^2 + 4x - 6$ trên đoạn $[-1;3]$:

x	-1	2	3
y	-11 ↗	-2	↘ -3

Phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[-1;3] \Leftrightarrow -11 \leq 3m \leq -2 \Leftrightarrow -\dfrac{11}{3} \leq m \leq -\dfrac{2}{3}$.

Câu 19. Số giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm là

A. 21. **B.** 9. **C.** 20. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (-1)^2 - 4.1.m < 0 \Leftrightarrow 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{1}{4}$.

Vậy số các trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-10;10]$ để phương trình $x^2 - x + m = 0$ vô nghiệm là $m \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2-4\sqrt{x^2+1}-(m-1)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

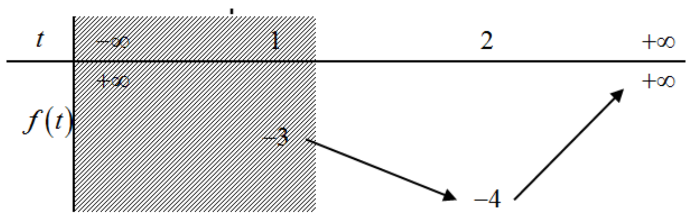
Điều kiện xác định $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}$, $t\ge 1$.

Phương trình trở thành $t^2-1-4t-m+1=0 \Leftrightarrow t^2-4t=m$. (2)

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Vẽ BBT ta có



Dựa BBT ta có $-4<m<-3$. Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 21. Để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt: $\left|10x-2x^2-8\right|=x^2-5x+a$. Giá trị của tham số a là

A. $a\in(1;10)$. **B.** $a=1$. **C.** $4<a<\dfrac{43}{4}$. **D.** $a\in\left[4;\dfrac{45}{4}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình đã cho tương đương: $2\left|x^2-5x+4\right|=x^2-5x+a$, (1).

Đặt $t=x^2-5x+a$.

Phương trình (1) trở thành: $2\left|t+4-a\right|=t$, (2)

Phương trình $(2)\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} t=2a-8 \\ t=\dfrac{2a-8}{3} \end{array}\right. \end{cases}$, để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì (2) phải có 2 nghiệm phân biệt, tức là $2a-8>0 \Leftrightarrow a>4$, $(*)$.

Khi đó, thay lại ta có: $\left[\begin{array}{l} x^2-5x+a=2a-8 \\ 3x^2-15x+3a=2a-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+8-a=0 \\ 3x^2-15x+a+8=0 \end{array}\right.$. Điều kiện để (1) có 4 nghiệm phân biệt là mỗi phương trình bậc 2 ở trên có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy $\begin{cases} \Delta_1=25-4(8-a)>0 \\ \Delta_2=15^2-4.3.(a+8)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{7}{4} \\ a<\dfrac{43}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{7}{4}<a<\dfrac{43}{4}$.

So với điều kiện $(*)$, suy ra $4<a<\dfrac{43}{4}$.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên không dương của tham số m để phương trình $\sqrt{2x+m}=x-1$ có nghiệm duy nhất?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\sqrt{2x+m}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ 2x+m=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-4x+1-m=0\,(*) \end{cases}$.

Phương trình có nghiệm duy nhất khi hệ có nghiệm duy nhất.

Xét $x^2-4x+1-m=0$; $\Delta'=3+m$

TH1: $\Delta'=0 \Leftrightarrow m=-3$ thì có nghiệm kép $x=2\ge 1$.

TH2: $\Delta'>0 \Leftrightarrow m>-3$ thì phương trình có nghiệm duy nhất khi có 2 nghiệm thỏa $x_1<1<x_2 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-1)<0 \Leftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<0 \Leftrightarrow 1-m-4+1<0 \Leftrightarrow m>-2$.

m không dương nên $m\in\{-3;-1;0\}$.

Câu 23. Phương trình $(m^2-4m+3)x=m^2-3m+2$ có nghiệm duy nhất khi:

A. $m\ne 3$. **B.** $m\ne 1$ và $m\ne 3$. **C.** $m\ne 1$. **D.** $m\ne 1$ hoặc $m\ne 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $(m^2-4m+3)x=m^2-3m+2$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow m^2-4m+3\ne 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\ne 1 \\ m\ne 3 \end{cases}$.

Câu 24. Tìm m để phương trình $(m-1)x^4-mx^2+m^2-1=0$ có ba nghiệm phân biệt.

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

+ Khi $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$ phương trình cho trở thành: $-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Do đó: $m=1$ không thỏa mãn đề bài.

+ Khi $m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$

Đặt $t=x^2\ \left(t\geq 0\right)$.

Phương trình cho trở thành $\left(m-1\right)t^2-mt+m^2-1=0\ \ \left(1\right)$.

Phương trình cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left(1\right)$ có hai nghiệm t_1,t_2 thoả $t_1=0<t_2$

Khi $t_1=0\Rightarrow m=\pm 1$. Do có hai nghiệm phân biệt nên $m\neq 1$.

Với $m=-1\Rightarrow t_2=\dfrac{1}{2}$.

Do đó phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm khi $\begin{cases} m\geq -\dfrac{5}{4} & \left(**\right) \\ m\neq 1 \end{cases}$

Từ $\left(*\right)$ và $\left(**\right)$ phương trình $\left(1\right)$ có nghiệm $m\geq -\dfrac{5}{4}$.

Câu 25. Có tất cả bao nhiêu giá trị của m để phương trình $\dfrac{\left(x+2\right)\left(mx+3\right)}{x-1}=0$ có nghiệm duy nhất?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x\neq 1$.

$$\frac{\left(x+2\right)\left(mx+3\right)}{x-1}=0\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(mx+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=\dfrac{-3}{m} \end{array}\right.$$

Vậy để phương trình có nghiệm duy nhất thì $m=0$ hoặc $\dfrac{-3}{m}=1\Leftrightarrow m=-3$

hoặc $\dfrac{-3}{m}=-2\Leftrightarrow m=6$

Câu 26. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2-2x-3-m=0$ có nghiệm $x\in\left[0;4\right]$.

A. $m\in\left(-\infty;5\right]$. **B.** $m\in\left[-4;-3\right]$. **C.** $m\in\left[-4;5\right]$. **D.** $m\in\left[3;+\infty\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Phương trình có nghiệm khi $\Delta' = 4 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4 \ \ (1)$.

Khi đó, phương trình có nghiệm $x_1 = 1 - \sqrt{4+m}$, $x_2 = 1 + \sqrt{4+m}$.

Để phương trình có nghiệm $x \in [0;4]$ thì $\left[\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 0 \leq x_2 \leq 4 \end{array}\right.$

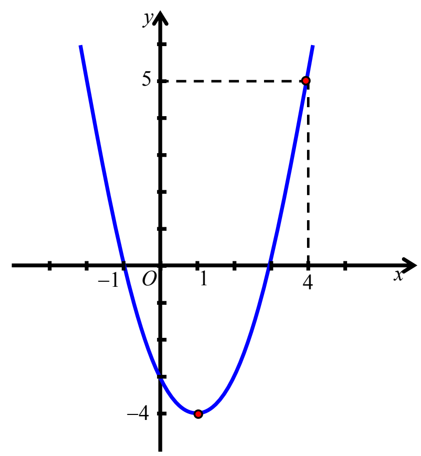
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq 1 - \sqrt{4+m} \leq 4 \\ 0 \leq 1 + \sqrt{4+m} \leq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{4+m} \leq 1 \\ \sqrt{4+m} \geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{4+m} \geq -1 \\ \sqrt{4+m} \leq 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{4+m} \leq 1 \\ \sqrt{4+m} \leq 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -3 \\ m \leq 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \leq 5.$$

So với điều kiện (1), $m \in [-4;5]$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x \in [0;4]$.

Cách 2: Phương trình đã cho tương đương $m = x^2 - 2x - 3$.

Đặt $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:



Dựa vào đồ thị. Để phương trình $y = f(x) = x^2 - 2x - 3 = m$ có nghiệm $x \in [0;4]$ thì $-4 \leq m \leq 5$

Câu 27. Tìm m để phương trình $\dfrac{2(2-2m-x)}{x+1} = x - 2m$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $m \neq \dfrac{5}{2}$ và $m \neq 1$. **B.** $m \neq \dfrac{5}{2}$ và $m \neq \dfrac{3}{2}$. **C.** $m \neq \dfrac{5}{2}$ và $m \neq \dfrac{1}{2}$. **D.** $m \neq \dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x \neq -1$. Với điều kiện đó, phương trình đã cho tương đương với:

$(x-2m)(x+1)=2(2-2m-x) \Leftrightarrow x^2-2mx+x-2m=4-4m-2x$

$\Leftrightarrow x^2-(2m-3)x+2m-4=0$ $(*)$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác -1 $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(2m-3)^2-4(2m-4)>0\\(-1)^2-(2m-3).(-1)+2m-4\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}4m^2-20m+25>0\\4m-6\neq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(2m-5)^2>0\\4m\neq 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\neq \dfrac{5}{2}\\m\neq \dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Câu 28. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2-2x-3-2m=0$ có đúng một nghiệm $x\in[0;4]$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $x^2-2x-3-2m=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=2m$.

Để phương trình đã cho có đúng một nghiệm $x\in[0;4]$ thì đường thẳng $y=2m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-2x-3$ trên $[0;4]$ tại một điểm duy nhất.

Lập bảng biến thiên

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\left[\begin{array}{l}2m=-4\\-3<2m\leq 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\-\dfrac{3}{2}<m\leq \dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Vậy các giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$

Câu 29. Cho phương trình $x^3-(2m+1)x^2+(4m-1)x-2m+1=0$. Số các giá trị của m để phương trình có một nghiệm duy nhất?

A. 0. **B.** vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Phương trình tương đương với

$$(x-1)(x^2-2mx+2m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2mx+2m-1=0\ (*) \end{array}\right..$$

Ta có, phương trình $(*)$ có $\Delta' = m^2-2m+1=(m-1)^2 \geq 0$.

Phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm nếu phương trình $(*)$ có nghiệm kép $x=1$

$\Rightarrow \Delta' = 0 \ \Leftrightarrow m=1$.

Thay $m=1$ vào phương trình $(*)$, ta được $x^2-2x+1=0 \ \Leftrightarrow x=1$.

Vậy với $m=1$ thì phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất.

Câu 30. Tập hợp các giá trị của m để phương trình $\sqrt{x-1}+\dfrac{x-m}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{2m}{\sqrt{x-1}}$ có nghiệm là

A. $\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $x>1$. Khi đó, ta có

$$\sqrt{x-1}+\frac{x-m}{\sqrt{x-1}}=\frac{2m}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow x-1+x-m=2m \Leftrightarrow 2x=3m+1 \Leftrightarrow x=\frac{3m+1}{2}.$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi $\dfrac{3m+1}{2}>1 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}$.

Câu 31. Cho hàm số $f(x)=mx+3-m$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$?

A. vô số **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow mx+3-m=0 \Leftrightarrow mx=m-3$

Với $m=0$ thì phương trình tương đương: $0=-3$.

Với $m \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x=\dfrac{m-3}{m}$

Để phương trình không có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$ thì

$$\begin{cases}\dfrac{m-3}{m}<0\\ \dfrac{m-3}{m}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m-3}{m}<0\\ \dfrac{-m-3}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<m<3\\ -3<m<0\end{cases}$$

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-2;-1;1;2\}$.

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Tìm các giá trị của m để phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm:

A. $m>2$. **B.** $m\ge 2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$2\sqrt{x+1}=x+m\ (1)$

Phương trình tương đương:

$$\begin{cases}x+m\ge 0\\ 4(x+1)=x^2+2mx+m^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -m\\ x^2+2(m-2)x+m^2-4=0\ (2)\end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ pt(2) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng $-m$.

$\Delta'=8-4m$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'\ge 0\Leftrightarrow m\le 2$

$$\left[\begin{array}{l}x_1=2-m-\sqrt{8-4m}\\ x_2=2-m+\sqrt{8-4m}>-m\end{array}\right.$$

Vậy $m\le 2$.

Câu 33. Cho biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-5m+1=0$ có nghiệm là $S=\left[-\dfrac{a}{b};+\infty\right)$, với a, b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T=a.b$

A. $T=-5$. **B.** $T=5$. **C.** $T=11$. **D.** $T=55$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x+\dfrac{1}{x}=t$, $|t|\ge 2$ khi đó phương trình trở thành $2t^2-3t-5m-3=0$

Phương trình $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-5m+1=0$ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình có nghiệm t thỏa mãn $|t|\ge 2$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của parabol $(P): y = 2t^2 - 3t - 3$ và đường thẳng $d: y = 5m$.

Xét parabol $(P): y = 2t^2 - 3t - 3$ ta có bảng biến thiên như sau

t	$-\infty$	-2	$\frac{3}{4}$	2	$+\infty$
$y = 2t^2 - 3t - 3$	$+\infty$	11	$-\frac{33}{8}$	-1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $5m \geq -1 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{5}$.

Vậy khi $m \in \left[-\frac{1}{5}; +\infty\right)$ thì phương trình có nghiệm $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow T = 5$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I – ÔN TẬP VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là $ax+by=c \qquad (1)$, trong đó a, b, c là các hệ số, với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

CHÚ Ý

a) Khi $a=b=0$ ta có phương trình $0x+0y=c.$ Nếu $c\neq 0$ thì phương trình này vô nghiệm, còn nếu $c=0$ thì mọi cặp số $(x_0;y_0)$ đều là nghiệm.

b) Khi $b\neq 0,$ phương trình $ax+by=c$ trở thành $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b} \qquad (2)$

Cặp số $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của phương trình (1) khi và chỉ khi điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng (2).

Tổng quát, người ta chứng minh được rằng phương trình bậc nhất hai ẩn luôn luôn có vô số nghiệm. Biểu diễn hình học tập nghiệm của phương trình của phương trình (1) là một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ Oxy.

2. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng tổng quát là $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \qquad (3)$

Trong đó x, y là hai ẩn; các chữ số còn lại là hệ số.

Nếu cặp số $(x_0;y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình của hệ thì $(x_0;y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (3).

Giải hệ phương trình (3) là tìm tập nghiệm của nó.

II – HỆ BA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT BA ẨN

Phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là $ax+by+cz=d,$ trong đó x, y, z là ba ẩn; a, b, c, d là các hệ số và a, b, c không đồng thời bằng 0.

Hệ phương trình bậc nhất ba ẩn có dạng tổng quát là $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases} \qquad (4)$

Trong đó x, y, z là ba ẩn; các chữ còn lại là các hệ số.

Mỗi bộ ba số $(x_0;y_0;z_0)$ nghiệm đúng ba phương trình của hệ được gọi là một nghiệm của hệ phương trình (4).

Dạng 1: Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-4=y \\ -4x+2y-5=0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} 2x-4=y \\ -4x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=y \\ -4x+2(2x-4)-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4=y \\ -13=0 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=3 \\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{10}{y}=1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0$.

Ta có $\begin{cases} \dfrac{6}{x}+\dfrac{5}{y}=3 \\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{10}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(\dfrac{1}{x}\right)+5\left(\dfrac{1}{y}\right)=3 \\ 9\left(\dfrac{1}{x}\right)-10\left(\dfrac{1}{y}\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$.

Vậy $y-x=5-3=2$.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{5}{x-2}-\dfrac{2}{y}=3 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{4}{x-2}+\dfrac{1}{y}=5 \\ \dfrac{5}{x-2}-\dfrac{2}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-2}=1 \\ \dfrac{1}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=2m \\ 4x-my=m+6 \end{cases}$ vô nghiệm

Lời giải

Cách 1.

Từ phương trình đầu ta có $y = mx - 2m \quad (*)$.

Thế $(*)$ vào phương trình thứ hai ta được:

$4x - m\left(mx - 2m\right) = m + 6 \Leftrightarrow \left(4 - m^2\right)x = -2m^2 + m + 6 \qquad (**)$.

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(**)$ vô nghiệm.

$(**)$ vô nghiệm khi và chỉ khi: $\begin{cases} 4 - m^2 = 0 \\ -2m^2 + m + 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Cách 2.

$D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 4 & -m \end{vmatrix} = 4 - m^2 = \left(2 - m\right)\left(2 + m\right)$.

$D_x = \begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m+6 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6 = \left(m - 2\right)\left(-2m - 3\right)$.

$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 4 & m+6 \end{vmatrix} = m^2 - 2m = m\left(m - 2\right)$.

Hệ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi:

$\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

$\begin{cases} mx - 2y = 1 \, (1) \\ 2x + y = 2 \, (2) \end{cases}$

Từ pt $\Leftrightarrow y = 2 - 2x$. Thế vào pt ta được:

$mx - 2(2 - 2x) = 1 \Leftrightarrow (m + 4)x = 5 \, (3)$

$\Rightarrow m \neq -4$ thì pt có nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ Hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 5. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} mx - (m+1)y = 3m \\ x - 2my = m + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ có nghiệm

Lời giải

Xét hệ $\begin{cases} mx-(m+1)y=3m \ (1) \\ x-2my=m+2 \ (2) \\ x+2y=4 \ (3) \end{cases}$,

Trừ theo vế hai phương trình (2) và (3) ta được: $2(m+1)y=2-m \ \ (4)$

Nếu $m=-1$ thì (4) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Nếu $m\neq -1$ thì $(4)\Leftrightarrow y=\dfrac{2-m}{2(m+1)}$, thay vào (3) được $x=\dfrac{5m+2}{m+1}$.

Thế các giá trị x,y tìm được vào (1) ta được phương trình:

$$m.\frac{5m+2}{m+1}-(m+1).\frac{2-m}{2(m+1)}=3m$$
$$\Leftrightarrow 2m(5m+2)-(m+1)(2-m)=6m(m+1)$$
$$\Leftrightarrow 5m^2-3m-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{2}{5} \end{array}\right.$$

Ví dụ 6. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=3 \\ x+my=2m+1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$ thỏa mãn ${x_0}^2+{y_0}^2=10$.

Lời giải

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $m^2-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq \pm 1$.
Khi đó

$$\begin{cases} mx+y=3 \\ x+my=2m+1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-mx \\ x+m(3-mx)=2m+1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} y=3-mx \\ x=\dfrac{1-m}{1-m^2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{m+1} \\ y=\dfrac{2m+3}{m+1} \end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{m+1} \\ y_0=\dfrac{2m+3}{m+1} \end{cases}$.

Nên: ${x_0}^2+{y_0}^2=10\Leftrightarrow 1+(2m+3)^2=10.(m+1)^2 \Leftrightarrow 6m^2+8m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{-4}{3} \end{array}\right. \ (TM)$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=13 \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=12 \end{cases}$ có nghiệm là

A. $x=\dfrac{1}{2}$; $y=-\dfrac{1}{3}$. **B.** $x=-\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{1}{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$.

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$ và $b=\dfrac{1}{y}$ thì hệ trở thành $\begin{cases} 2a+3b=13 \\ 3a+2b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là $x=\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{1}{3}$.

Câu 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+my=1 \\ mx+y=1 \end{cases}$ (I), m là tham số. Mệnh đề nào **sai**?

A. Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\forall m\neq \pm 1$.

B. Khi $m=1$ thì hệ (I) có vô số nghiệm.

C. Khi $m=-1$ thì hệ (I) vô nghiệm.

D. Hệ (I) có vô số nghiệm.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}\neq \dfrac{m}{1} \Leftrightarrow m\neq \pm 1$, A đúng.

Hệ (I) vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}=\dfrac{m}{1}=1 \Leftrightarrow m=1$, B đúng. Hệ (I) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{m}=\dfrac{m}{1}\neq 1 \Leftrightarrow m=-1$, C đúng.

D sai.

Câu 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=m-1 \\ 3x+y=4m+1 \end{cases}$. Giá trị m thuộc khoảng nào sau đây để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0)$ thỏa mãn $2x_0-3y_0=1$?

A. $m\in(5;9)$. **B.** $m\in(-5;1)$. **C.** $m\in(0;3)$. **D.** $m\in(-4;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\begin{cases} 2x-y=m-1 \\ 3x+y=4m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m \\ y=m+1 \end{cases}$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $(m; m+1)$ mà

$2x_0-3y_0=1 \Leftrightarrow 2m-3(m+1)=1 \Leftrightarrow m=-4$. Vậy $m\in(-5;1)$.

Câu 4. Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương để hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 3 \\ 2x + my = 9 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho biểu thức $A = 3x - y$ nhận giá trị nguyên

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $D = \begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + 2 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$ nên hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất.

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & m \end{vmatrix} = 3m + 9$; $D_y = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9m - 6$.

Vậy hệ luôn có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x = \dfrac{3m+9}{m^2+2} \\ y = \dfrac{9m-6}{m^2+2} \end{cases}$.

Ta có $A = 3x - y = \dfrac{3(3m+9)}{m^2+2} - \dfrac{9m-6}{m^2+2} = \dfrac{33}{m^2+2}$.

Để A nguyên thì $m^2 + 2$ là ước của 33 mà $m^2 + 2 \ge 2$ nên ta có các trường hợp sau:

+ TH1: $m^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

+ TH2: $m^2 + 2 = 11 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

+ TH3: $m^2 + 2 = 33 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{31}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên dương của m để A nguyên.

Câu 5. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x - y = m + 2 \\ mx - (m+1)y = -2 \end{cases}$ có nghiệm là $(2; y_0)$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$D = -(m+1)^2 + m = -m^2 - m - 1 \ne 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$

$D_x = -(m+1)(m+2) - 2 = -m^2 - 3m - 4$

$D_y = -2(m+1) - m(m+2) = -m^2 - 4m - 2$

Suy ra với mọi giá trị của m thì hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m^2+3m+4}{m^2+m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{m^2+4m+2}{m^2+m+1} \end{cases}$

Để $(2; y_0)$ là nghiệm của hệ thì $\dfrac{m^2+3m+4}{m^2+m+1} = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Vậy $S=\{-1;2\}$

Câu 6. Hệ phương trình $\begin{cases} mx-y=2m \\ 4x-my=m+6 \end{cases}$ vô nghiệm khi giá trị m bằng

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $D=\begin{vmatrix} m & -1 \\ 4 & -m \end{vmatrix}=4-m^2$; $D_x=\begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m+6 & -m \end{vmatrix}=-2m^2+m+6$; $D_y=\begin{vmatrix} m & 2m \\ 4 & m+6 \end{vmatrix}=m^2-2m$

Xét $D=0 \Leftrightarrow 4-m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm 2$

Khi $m=2 \Rightarrow D_x=D_y=0$ hệ phương trình có vô số nghiệm

Khi $m=-2 \Rightarrow D_x=-4\neq 0$ hệ phương trình vô nghiệm

Câu 7. Gọi m_0 là giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=m \\ mx+y=m-\dfrac{2}{9} \end{cases}$ có vô số nghiệm. Khi đó:

A. $m_0\in\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $m_0\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **D.** $m_0\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ m & 1 \end{vmatrix}=1-3m$.

Để hệ phương trình vô số nghiệm thì $D=D_x=D_y=0$

Ta có $D=0 \Leftrightarrow 1-3m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$

Thay $m=\dfrac{1}{3}$ vào hệ phương trình ta có: $\begin{cases} x+3y=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3}x+y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3}x+y=\dfrac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=\dfrac{1}{3} \\ x+3y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy $m=\dfrac{1}{3}$ hệ phương trình vô số nghiệm.

Câu 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}2x-y=2-a\\x+2y=a+1\end{cases}$. Gọi a_0 là giá trị của tham số a để tổng bình phương hai nghiệm của hệ phương trình đạt giá trị nhỏ nhất. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $a_0 \in (-10;0)$ **B.** $(5;8)$ **C.** $a_0 \in (0;5)$ **D.** $[8;12]$

Lời giải

Chọn C.

Ta có : $\begin{cases}2x-y=2-a\\x+2y=a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-2y=4-2a\\x+2y=a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{5-a}{5}\\y=\dfrac{3a}{5}\end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+y^2=\left(\frac{5-a}{5}\right)^2+\frac{9a^2}{25}=\frac{10a^2-10a+25}{25}=\frac{1}{5}\left(2a^2-2a+5\right)=\frac{1}{5}\left(\left(\sqrt{2}a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{9}{2}\right)\ge\frac{9}{10}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=\dfrac{1}{2}$.

Dạng 2: Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất ba ẩn

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x-y+z=-3\\x+y+z=3\\2x-2y+z=-2\end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases}2x-y+z=-3\\x+y+z=3\\2x-2y+z=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-8\\y=-1\\z=12\end{cases}$$

Vậy nghiệm duy nhất của hệ phương trình là $(x;y;z)=(-8;-1;12)$

Ví dụ 2. Tìm giá trị thực của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases}2x+3y+4=0\\3x+y-1=0\\2mx+5y-m=0\end{cases}$ có duy nhất một nghiệm

Lời giải

$$\begin{cases}2x+3y+4=0\\3x+y-1=0\\2mx+5y-m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\2m.2+5.2-m=0\end{cases}\Rightarrow m=10.$$

Vậy $m=10$.

Ví dụ 3. Cho $(x;y;z)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}mx+ny+pz=6\\2mx-3ny+pz=-1\\mx+7ny-10pz=-15\end{cases}$

biết hệ có nghiệm $(x;y;z)=(1;2;3)$. Tìm m,n,p

Lời giải

Hệ phương trình $\begin{cases}mx+ny+pz=6\\2mx-3ny+pz=-1\\mx+7ny-10pz=-15\end{cases}$ có nghiệm $(x;y;z)=(1;2;3)$ nên ta có

$$\begin{cases}m+2n+3p=6\\2m-6n+3p=-1\\m+14n-30p=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\n=1\\p=1\end{cases}$$

Vậy $S=m+n+p=1+1+1=3$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Khi hệ phương trình $\begin{cases}x+2my-z=1\\2x-my-2z=2\\x-(m+4)y-z=1\end{cases}$ có nghiệm $(x;y;z)$ với $\begin{cases}m\neq 0\\m\neq -\dfrac{4}{3}\end{cases}$, giá trị $T=2017x-2018y-2017z$ là

A. $T=-2017$. **B.** $T=2018$. **C.** $T=2017$. **D.** $T=-2018$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Kí hiệu $\begin{cases}x+2my-z=1 & (1)\\2x-my-2z=2 & (2)\\x-(m+4)y-z=1 & (3)\end{cases}$.

Do $\begin{cases}m\neq 0\\m\neq -\dfrac{4}{3}\end{cases}$, từ (1) và (3) ta có $\begin{cases}x-z=1\\y=0\end{cases}$.

Ta có $T=2017x-2018y-2017z=2017(x-z)=2017$.

Dạng 3: Giải và biện luận hệ phương trình bậc cao

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2-2x+2y+2=0 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ x^2-2x+2y+2=0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow y=1-x$

Thế vào phương trình (2);ta được :

$x^2-2x+2(1-x)+2=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2$

Với $x=2 \Rightarrow y=-1$

Hệ có 1 nghiệm : $(x;y)=(2;-1)$

Ví dụ 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-xy=2 \\ 2x^2+xy-y^2=9 \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

Đặt $y=tx$ thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2(1-t)=2 & (1) \\ x^2(2+t-t^2)=9 & (2) \end{cases}$.

Do $t=1$ không thỏa mãn nên suy ra $\dfrac{2+t-t^2}{1-t}=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow 2t^2-11t+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=5 \\ t=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

+ Với $t=5$ thay vào ta được $-4x^2=2$.

+ Với $t=\dfrac{1}{2}$ thay vào ta được $x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2>1 \\ x=-2<1 \end{array}\right.$.

Vậy $x_0=2 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow S=x_0+y_0=3$.

Ví dụ 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x+xy+y=-1 \end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy=3 \\ (x+y)+xy=-1 \end{cases}$.

Đặt $S=x+y, P=x.y \quad (S^2 \ge 4P)$

Ta được hệ mới $\begin{cases} S^2-P=3 \\ S+P=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S^2-3 \\ S^2+S-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S^2-3 \\ \left[\begin{array}{l} S=1 \\ S=-2 \end{array}\right. \end{cases}$

Với $S=1 \Rightarrow P=-2$

Với $S=-2 \Rightarrow P=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ x.y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-y \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=-1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-1;-1)$.

Ví dụ 4. Các nghiệm của hệ $\begin{cases} xy-3x-2y=16 \\ x^2+y^2-2x-4y=33 \end{cases}$ là

Hướng dẫn giải

Ta có: $\begin{cases} xy-3x-2y=16 \\ x^2+y^2-2x-4y=33 \end{cases} \quad (1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy-2x-y+2)-x+1-y+2=21 \\ (x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-2)-(x-1)-(y-2)=21 \\ (x-1)^2+(y-2)^2=38 \end{cases} \quad (2)$

Đặt $u=x-1$; $v=y-2$ ta được hệ phương phương $\begin{cases} uv-(u+v)=21 \\ u^2+v^2=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv-(u+v)=21 \\ (u+v)^2-2uv=38 \end{cases}$

Đặt $S=u+v$; $P=uv$ ta được hệ phương phương $\begin{cases} P-S=21 \\ S^2-2P=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=S+21 \\ S^2-2S-80=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S=-8 \\ P=13 \end{cases}$ v $\begin{cases} S=10 \\ P=31 \end{cases}$.

+ Khi $\begin{cases} S=-8 \\ P=13 \end{cases}$ thì u ; v là nghiệm của phương trình: $X^2+8X+13=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u=-4+\sqrt{3} \\ v=-4-\sqrt{3} \end{cases}$ v $\begin{cases} u=-4-\sqrt{3} \\ v=-4+\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-4+\sqrt{3} \\ y-2=-4-\sqrt{3} \end{cases}$ v $\begin{cases} x-1=-4-\sqrt{3} \\ y-2=-4+\sqrt{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-3+\sqrt{3} \\ y=-2-\sqrt{3} \end{cases}$ v v $\begin{cases} x=-3-\sqrt{3} \\ y=-2+\sqrt{3} \end{cases}$.

+ Khi $\begin{cases} S=10 \\ P=31 \end{cases}$ thì u ; v là nghiệm của phương trình: $X^2-10X+31=0$

Ví dụ 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2xy+8x=3y^2+12y+9 \\ x^2+4y+18-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{3y+1}=0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện $\begin{cases} x\ge -7 \\ y\ge -\dfrac{1}{3} \end{cases}$ $(*)$

$\begin{cases} x^2+2xy+8x=3y^2+12y+9 & (1) \\ x^2+4y+18-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{3y+1}=0 & (2) \end{cases}$.

Có: $(1)\Leftrightarrow x^2+2(y+4)x-3y^2-12y-9=0$, ta coi (1) là phương trình bậc hai ẩn x và y là tham số, giải x theo y ta được $\left[\begin{array}{l} x=-3y-9 \\ x=y+1 \end{array}\right.$,

Với $x=-3y-9$ thì $(*)\Rightarrow \begin{cases} -3x-9\ge -7 \\ y\ge -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le -\dfrac{2}{3} \\ y\ge -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Với $x=y+1$ thì

$(2)\Rightarrow x^2+4x-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{3x-2}+14=0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3x-2}\right)^2+\left(\sqrt{x+7}-3\right)^2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3x-2} \\ \sqrt{x+7}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=1$.

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases}$ có tất cả các nghiệm là

A. $(x;y)=(-1;-2)$; $(x;y)=(-2;-1)$; $(x;y)=(-1;2)$; $(x;y)=(2;-1)$.

B. $(x;y)=(-1;-2)$; $(x;y)=(-2;-1)$.

C. $(x;y)=(1;2)$; $(x;y)=(2;1)$.

D. $(x;y)=(-1;-2)$; $(x;y)=(-2;-1)$; $(x;y)=(1;2)$; $(x;y)=(2;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^2+y^2-xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=5 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2=9 \Rightarrow x+y=\pm 3 \\ xy=2 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$ thì $(x;y)=(1;2)$; $(x;y)=(2;1)$.

Với $\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=2 \end{cases}$ thì $(x;y)=(-1;-2)$; $(x;y)=(-2;-1)$.

Câu 2. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2=3x-y \\ y^2=3y-x \end{cases}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$\begin{cases} x^2=3x-y \ (1) \\ y^2=3y-x \ (2) \end{cases}$.

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được:

$x^2-y^2=4x-4y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=4-x \end{array}\right.$.

TH1: $\begin{cases} x^2=3x-y \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=0 \\ x=y=2 \end{array}\right.$.

TH2: $\begin{cases} x^2=3x-y \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=0 \\ y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$.

Vậy hệ có hai nghiệm.

Câu 3. Hệ phương trình $\begin{cases} (2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(4x^2-4xy+y^2)=0 \\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3 \end{cases}$ có một nghiệm $(x_0;y_0)$. Khi đó $P=x_0+y_0^2$ có giá trị là

A. 1. **B.** $\dfrac{17}{16}$. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\begin{cases} (2x+y)^2-5(4x^2-y^2)+6(4x^2-4xy+y^2)=0 \ (1) \\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3 \ \ (2) \end{cases}$.

$(1) \Leftrightarrow 8x^2+12y^2-20xy=0 \Leftrightarrow (x-y)(2x-3y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2x=3y \end{array}\right.$.

Với $x=y$ ta có $(2) \Rightarrow 3x+\dfrac{1}{x}=3 \Leftrightarrow 3x^2-3x+1=0$: phương trình vô nghiệm.

Với $2x=3y$ ta có $(2)\Rightarrow 4y+\dfrac{1}{2y}=3 \Leftrightarrow 8y^2-6y+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$.

Với $y=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=\dfrac{3}{4}\Rightarrow P=1$.

Với $y=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\dfrac{3}{8}\Rightarrow P=\dfrac{7}{16}$.

Câu 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2y+xy^2=4m^2-2m\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hệ trên có nghiệm.

A. $\left[-\dfrac{1}{2};1\right]$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $[0;2]$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2y+xy^2=4m^2-2m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy(x+y)=4m^2-2m\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2xy=4m^2-2m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 2.(2-y)y=4m^2-2m \ (*)\end{cases}$

$(*)\Leftrightarrow -2y^2+4y-4m^2+2m=0$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0 \Leftrightarrow 4+2.(-4m^2+2m)\ge 0$

$\Leftrightarrow -8m^2+4m+4\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2}\le m\le 1$.

Câu 5. Hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy=3 \\ y^2+xy=m^2-4\end{cases}$ có nghiệm khi

A. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1\end{array}\right.$. **B.** $m>1$. **C.** $m<-1$. **D.** $m\ne \pm 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$\begin{cases} x^2+xy=3 \\ y^2+xy=m^2-4\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+2xy=m^2-1 \Rightarrow (x+y)^2=m^2-1$.

Phương trình này có nghiệm khi $m^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1\end{array}\right.$.

Câu 6: Gọi $(x;y)$ là nghiệm dương của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \\ x^2+y^2=128\end{cases}$. Tổng $x+y$ bằng.

A. 12. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x \geq y > 0$

Ta có : $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=8-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8 \\ y^2=16x-64 \end{cases}$

Thay $y^2=16x-64$ vào PT $x^2+y^2=128$ ta được PT: $x^2+16x-192=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-24 \end{array}\right.$.

Suy ra PT có nghiệm $\begin{cases} x=8 \\ y=8 \end{cases}$. Vậy $x+y=16$

Câu 7. Hệ phương trình $\begin{cases} x^3-2019y=x \\ y^3-2019x=y \end{cases}$ có số nghiệm là:

A. 4. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Trừ hai phương trình theo vế ta được: $x^3-2019y-y^3+2019x=x-y$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+2018\right)=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+2018+\frac{3}{4}y^2\right)=0 \Leftrightarrow x=y$

vì biểu thức $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+2018+\frac{3}{4}y^2>0, \forall x, y$.

Với $y=x$ ta được: $x^3-2020x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-2020\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=0 & \Rightarrow y=0 \\ x=\sqrt{2020} & \Rightarrow y=\sqrt{2020} \\ x=-\sqrt{2020} & \Rightarrow y=-\sqrt{2020} \end{array}\right.$.

Vậy hệ đã cho có 3 nghiệm.

Câu 8. Giả sử $(x;y)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases}$

Tính $x-2y$

A. 2. **B.** -3. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

. Điều kiện: $\begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$.

$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 \\ x+y+2\sqrt{x+y+xy+1}=14 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=x+y \\ b=\sqrt{xy} \end{cases}$ $(a \geq -2, b \geq 0)$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} a-b=3 \\ a+2\sqrt{a+b^2+1}=14 \end{cases}$

$\Rightarrow a+2\sqrt{a+(a-3)^2+1}=14 \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-5a+10}=14-a \Leftrightarrow \begin{cases} 14-a \geq 0 \\ 4(a^2-5a+10)=(14-a)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 14 \\ 3a^2+8a-156=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 14 \\ \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-\dfrac{26}{3} \end{array}\right. \end{cases} \overset{a \geq -2}{\Leftrightarrow} a=6 \Rightarrow b=3.$

$\begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ \sqrt{xy}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases}$.

x, y là nghiệm của phương trình: $X^2-6X+9=0 \Leftrightarrow X=3 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$.

Vậy $x-2y=-3$.

Câu 9: Tìm a để biểu thức $F=xy+2(x+y)$ đạt giá trị nhỏ nhất, biết $(x;y)$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=6-a^2 \end{cases}$.

A. $a=0$. **B.** $a=3$. **C.** $a=-1$. **D.** $a=-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\begin{cases} x+y=a \\ x^2+y^2=6-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ (x+y)^2-2xy=6-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ xy=a^2-3 \end{cases}$

Điều kiện tồn tại x, y: $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow a^2 \geq 4(a^2-3) \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2.$

Khi đó: $F=a^2+2a-3=(a+1)^2-4 \geq -4$

$\Rightarrow \min F = -4 \Leftrightarrow a = -1(t/m)$

Do đó chọn đáp án C

Câu 10. Gọi $(x_1; y_1); (x_2; y_2)$ là hai nghiệm phân biệt của hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x+y) = 1 \end{cases}$. Tính $|x_1 - x_2|$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 3xy + x + y = 8 \\ xy + 3(x+y) = 1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}; S^2 \geq 4P$, hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} S^2 + S - 3P = 8 \\ 3S + P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + S - 3(1-3S) = 8 \\ P = 1 - 3S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 10S - 11 = 0 \\ P = 1 - 3S \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S = 1 \\ P = -2 \end{cases} (N) \\ \begin{cases} S = -11 \\ P = 34 \end{cases} (L) \end{array}\right.$$

Với $S = 1; P = -2$ ta có $x; y$ là nghiệm của phương trình $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(1;-2);(-2;1) \Rightarrow |x_1 - x_2| = |1-(-2)| = |-2-1| = 3$, chọn A.

Câu 11. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của tham số m để hệ $\begin{cases} x^3 = 2y + x + m \\ y^3 = 2x + y + m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

A. $m = 2$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

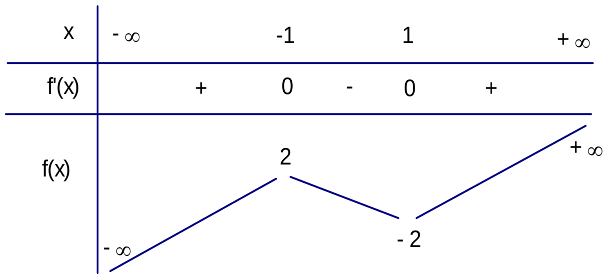
Trừ vế với vế của hai phương trình ta được: $x^3 - y^3 = y - x \Leftrightarrow x = y$.

Thay y bởi x vào một trong hai phương trình của hệ ta được: $m = x^3 - 3x$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên R, ta có

$$f'(x)=3x^2-3,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra: Phương trình có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow m \in (-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Chọn B.

Câu 12. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 6x^4-(x^3-x)y^2-(y+12)x^2=-6 \\ 5x^4-(x^2-1)^2.y^2-11x^2=-5 \end{cases}$. Biết hệ có 2 nghiệm là: $(x_1;y_1)$,$(x_2;y_2)$. Đặt S = y_1+y_2 . Khi đó S bằng:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} 6x^4-(x^3-x)y^2-(y+12)x^2=-6 \\ 5x^4-(x^2-1)^2.y^2-11x^2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x^2-1)^2=xy\left[y(x^2-1)+x\right] \\ 5(x^2-1)^2=y^2(x^2-1)^2+x^2 \end{cases}$

Dễ thấy $x=0$ hoặc $y=0$ đều không là nghiệm của hệ phương trình.

Với $x\neq 0;\ y\neq 0$ ta có: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6(x^2-1)^2}{x^2y^2}=\dfrac{x^2-1}{x}+\dfrac{1}{y} \\ \dfrac{5(x^2-1)^2}{x^2y^2}=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^2}+\dfrac{1}{y^2} \end{cases}$

Đặt $u=\dfrac{x^2-1}{x};\ v=\dfrac{1}{y}$.

Khi đó hệ trở thành:

$\begin{cases} 6u^2v^2=u+v \\ 5u^2v^2=u^2+v^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2v^2=u+v \\ 5u^2v^2=(u+v)^2-2uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2v^2=u+v \\ 5u^2v^2=36u^4v^4-2uv \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2v^2 = u+v \\ 5uv = 36u^3v^3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u^2v^2 = u+v \\ (2uv-1)\underbrace{\left(36u^2v^2+9uv+2\right)}_{>0;\forall u,v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \dfrac{3}{2} \\ uv = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ được $(u;v) \in \left\{\left(1;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};1\right)\right\}$. Khi đó $y_1 = 2;\ y_2 = 1$ S = $\Rightarrow S = y_1 + y_2 = 3.$

Câu 13. Tìm các giá trị của m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x+y=2 \\ x^2y+xy^2 = 4m^2-2m \end{cases}$ có nghiệm:

A. $\left[-1;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left[-\frac{1}{2};1\right]$. **C.** $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. **D.** $[1;+\infty)$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x^2y+xy^2 = 4m^2-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ xy = 2m^2-m \end{cases}$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi $4 \ge 4\left(2m^2-m\right) \Leftrightarrow 2m^2-m-1 \le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m \le 1$

Câu 14. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-x^2y+xy^2+x-y=0 & (1) \\ \sqrt{2x^2+y+9}+\sqrt{2y^2-x+1} = x+4 & (2) \end{cases}$. Gọi nghiệm dương của hệ phương trình là $\left(\frac{a}{b};\frac{c}{d}\right)$ trong đó $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Khi đó biểu thức $P = (a-b)^{2018} + (c-d)^{2019}$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $2x^2+y+9 \ge 0$; $2y^2-x+1 \ge 0$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) - xy(x-y) + x - y = 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = y$.

Thế $x = y$ vào (2) ta được $\sqrt{2x^2+x+9}+\sqrt{2x^2-x+1} = x+4 \quad (3)$

Đặt $\sqrt{2x^2+x+9}=u$; $\sqrt{2x^2-x+1}=v$ thì $u+v=x+4$.

Mặt khác $u^2-v^2=2(x+4)=2(\mathrm{u}+\mathrm{v})$.

Suy ra $(u+v)(u-v-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=0 \\ u-v=2 \end{array}\right.$

Với $u+v=0$. Suy ra $x+4=0 \Leftrightarrow x=-4 \Rightarrow (3)$ vô nghiệm.

Với $u-v=2$ ta có $\begin{cases} u+v=x+4 \\ u-v=2 \end{cases} \Rightarrow 2u=x+6$

Khi đó ta được phương trình $2\sqrt{2x^2+x+9}=x+6$

$\Leftrightarrow 4(2x^2+x+9)=(x+6)^2$

$\Leftrightarrow 7x^2-8x=0 \Leftrightarrow x(7x-8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{8}{7} \end{array}\right.$.

Với $x=0 \Rightarrow y=0$; $x=\dfrac{8}{7} \Rightarrow y=\dfrac{8}{7}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là $(x;y)=\left\{(0;0),\left(\dfrac{8}{7};\dfrac{8}{7}\right)\right\}$.

Do đó $a=8;b=7;c=8;d=7 \Rightarrow P=2$

Dạng 4: Các bài toán thực tế phương trình, hệ phương trình

1. Phương pháp

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. Hiện nay tuổi của mẹ gấp 7 lần tuổi con. Sau 2 năm nữa tuổi của mẹ gấp 5 lần tuổi con. Hỏi mẹ sinh con lúc đó mẹ bao nhiêu tuổi ?

Lời giải

Gọi x $(x \in \mathbb{N}^*)$ là tuổi mẹ hiện nay, y $(y \in \mathbb{N}^*)$ là tuổi con hiện nay.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} x=7y \\ x+2=5(y+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7y=0 \\ x-5y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=28 \\ y=4 \end{cases}$.

Vậy mẹ sinh con năm $28-4=24$ tuổi.

Ví dụ 2: Một khách hàng vào cửa hàng bách hóa mua một đồng hồ treo tường, một đôi giày và một máy tính bỏ túi. Đồng hồ và đôi giày giá 420.000 đ; máy tính bỏ túi và đồng hồ giá 570.000 đ; máy tính bỏ túi và đôi giày giá 750.000 đ. Hỏi mỗi thứ giá bao nhiêu?

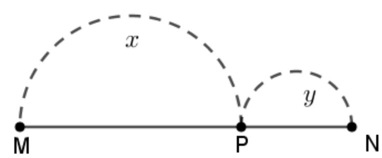
Lời giải

Gọi giá của đồng hồ, máy tính bỏ túi và đôi giá lần lượt là x, y, z.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+z=420.000 \\ x+y=570.000 \\ y+z=750.000 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $\begin{cases} x=120.000 \\ y=450.000 \\ z=300.000 \end{cases}$

Ví dụ 3: Cho hai người A và B xuất phát cùng một lúc ngược chiều từ thành phố M và N. Khi họ gặp nhau, người ta nhận thấy A đã đi nhiều hơn B là 6km. Nếu mỗi người tiếp tục đi theo hướng cũ với cùng vận tốc ban đầu thì A sẽ đến N sau 4,5 giờ, còn B đến M sau 8 giờ tính từ thời điểm họ gặp nhau. Gọi v_A, v_B lần lượt là vận tốc của người A và người B.
Tìm vận tốc của mỗi người

Lời giải



Gọi P là điểm mà hai người A và B gặp nhau. Gọi đoạn $MP = x$ là quãng đường A đi được, $NP = y$ là quảng đường B đi được.

Khi họ gặp nhau, người ta nhận thấy A đã đi nhiều hơn B 6km có nghĩa là đoạn MP dài hơn NP là 6km và thời gian đi của hai người cho đến lúc gặp nhau là bằng nhau. Ta có hệ

$$\begin{cases} x-y=6 \\ \dfrac{x}{v_A}=\dfrac{y}{v_B} \end{cases} (1)$$

Nếu mỗi người tiếp tục đi theo hướng cũ với cùng vận tốc ban đầu thì A sẽ đến N sau 4,5 giờ,

còn B đến M sau 8 giờ tính từ thời điểm họ gặp nhau nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{v_A}=4,5 \\ \dfrac{x}{v_B}=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4,5v_A \\ x=8v_B \end{cases}$$

Thế vào ta có hệ :

$$\begin{cases} 8v_B - 4,5v_A = 6 \\ \dfrac{8v_B}{v_S} = \dfrac{4,5v_A}{v_B} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8v_B - 4,5v_A = 6 \\ \sqrt{8}v_B = \sqrt{4,5}v_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_B = 3 \\ v_A = 4 \end{cases}$$

3. Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Hai bạn Vân và Lan đi mua trái cây. Vân mua 10 quả quýt, 7 quả cam với giá tiền là 17800. Lan mua 12 quả quýt, 6 quả cam hết 18000. Hỏi giá tiền mỗi quả quýt, quả cam là bao nhiêu?

A. Quýt 1400, cam 800. **B.** Quýt 700, cam 200.

C. Quýt 800, cam 1400. **D.** Quýt 600, cam 800.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Gọi số tiền để mua một quả quýt là x đồng ; số tiền để mua một quả cam là y đồng.

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 10x + 7y = 17\,800 \\ 12x + 6y = 18\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 800 \\ y = 1400 \end{cases}$.

Vậy giá tiền mỗi quả quýt là 800 đồng, mỗi quả cam là 1400 đồng.

Cách 2: Thử các đáp án, **Chọn C.**

Câu 2. Một xe hơi khởi hành từ Krông Năng đi đến Nha Trang cách nhau 175 km. Khi về xe tăng vận tốc trung bình hơn vận tốc trung bình lúc đi là 20 km/giờ. Biết rằng thời gian dùng để đi và về là 6 giờ; vận tốc trung bình lúc đi là

A. 60 km/giờ. **B.** 45 km/giờ. **C.** 55 km/giờ. **D.** 50 km/giờ.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi x, $y > 0$ lần lượt là vận tốc trung bình lúc đi và vận tốc trung bình lúc về.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y - x = 20 \\ \dfrac{175}{x} + \dfrac{175}{y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 + x \ (1) \\ \dfrac{175}{x} + \dfrac{175}{y} = 6 \ (2) \end{cases}.$$

Thế (1) vào (2) ta được

$$\frac{175}{x} + \frac{175}{20+x} = 6 \Leftrightarrow 6x^2 - 230x - 3500 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 50 \\ x = -\dfrac{35}{3} \end{array}\right. \Rightarrow x = 50 \text{ vì } x > 0.$$

Vậy vận tốc lúc đi là 50 km/giờ.

Câu 3. Một đoàn xe tải chở 290 tấn xi măng cho một công trình xây đập thủy điện. Đoàn xe có 57 chiếc gồm ba loại, xe chở 3 tấn, xe chở 5 tấn và xe chở $7,5$ tấn. Nếu dùng tất cả xe $7,5$ tấn chở ba chuyến thì được số xi măng bằng tổng số xi măng do xe 5 tấn chở ba chuyến và xe 3 tấn chở hai chuyến. Hỏi số xe mỗi loại?

A. 18 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 20 xe chở $7,5$ tấn.

B. 20 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 18 xe chở $7,5$ tấn.

C. 19 xe chở 3 tấn, 20 xe chở 5 tấn và 18 xe chở $7,5$ tấn.

D. 20 xe chở 3 tấn, 18 xe chở 5 tấn và 19 xe chở $7,5$ tấn.

Lời giải

Chọn B

Gọi x là số xe tải chở 3 tấn, y là số xe tải chở 5 tấn và z là số xe tải chở $7,5$ tấn.

Điều kiện: x, y, z nguyên dương.

Theo giả thiết của bài toán ta có $\begin{cases} x+y+z=57 \\ 3x+5y+7,5z=290 \\ 22,5z=6x+15y \end{cases}.$

Giải hệ ta được $x=20,\ y=19,\ z=18.$

Câu 4: Có ba lớp học sinh $10A,\ 10B,\ 10C$ gồm 128 em cùng tham gia lao động trồng cây. Mỗi em lớp $10A$ trồng được 3 cây bạch đàn và 4 cây bàng. Mỗi em lớp $10B$ trồng được 2 cây bạch đàn và 5 cây bàng. Mỗi em lớp $10C$ trồng được 6 cây bạch đàn. Cả ba lớp trồng được là 476 cây bạch đàn và 375 cây bàng. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh?

A. $10A$ có 40 em, lớp $10B$ có 43 em, lớp $10C$ có 45 em.
B. $10A$ có 45 em, lớp $10B$ có 43 em, lớp $10C$ có 40 em.
C. $10A$ có 45 em, lớp $10B$ có 40 em, lớp $10C$ có 43 em.
D. $10A$ có 43 em, lớp $10B$ có 40 em, lớp $10C$ có 45 em.

Lời giải

Chọn A

Gọi số học sinh của lớp $10A,\ 10B,\ 10C$ lần lượt là $x,\ y,\ z.$

Điều kiện: x, y, z nguyên dương.

Theo đề bài, ta lập được hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=128 \\ 3x+2y+6z=476 \\ 4x+5y=375 \end{cases}.$

Giải hệ ta được $x=40, y=43,\ z=45.$