PHÁT TRIỂN ĐỀ THI THAM KHẢO CỦA BGD – THÁNG 4 – 2020

Môn: TOÁN

Sản phẩm đặc biệt của Tổ Phản Biện Các Sản Phẩm Quan Trọng Của Nhóm Toán VD- VDC

Câu 1-2-3 Thầy Hùng Nguyễn phát triển Cô Thoan Nguyễn Phản Biện

Câu 1: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Từ một nhóm học sinh gồm 10 nam và 15 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

A. 25. **B.** 150. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Để chọn ra một học sinh ta có 2 phương án thực hiện:

Phương án 1: Chọn một học sinh nam, có 10 cách chọn.

Phương án 2: Chọn một học sinh nữ, có 15 cách chọn.

Theo quy tắc cộng, ta có: $10+15=25$ cách chọn ra một học sinh.

Câu hỏi phát triển tương tự câu 1:

Câu 1: **1.1** ***(Câu tương tự câu1)*** Một nhóm học sinh gồm 9 học sinh nam và x học sinh nữ. Biết rằng có 15 cách chọn ra một học sinh từ nhóm học sinh trên, khi đó giá trị của x là

A. 24. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 225.

Lời giải

Chọn B

Để chọn ra một học sinh ta có 2 phương án thực hiện:

Phương án 1: Chọn một học sinh nam, có 9 cách chọn.

Phương án 2: Chọn một học sinh nữ, có x cách chọn.

Theo quy tắc cộng, ta có: $9+x$ cách chọn ra một học sinh.

Theo bài ra, ta có: $9+x=15 \Leftrightarrow x=6$.

Câu 2: **1.2** ***(Câu phát triển câu1)*** Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 3 học sinh có cả nam và nữ?

A. 120. **B.** 168. **C.** 288. **D.** 364.

Lời giải

Chọn C

Phương án 1: Chọn 2 học sinh nam và 1 học sinh nữ, có $C_6^2.C_8^1=120$ cách thực hiện.

Phương án 2: Chọn 1 học sinh nam và 2 học sinh nữ, có $C_6^1.C_8^2=168$ cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng, ta có: $120+168=288$ cách chọn ra 3 học sinh có cả nam và nữ.

Câu 3: **1.3** ***(Câu phát triển câu1)*** Một lớp có 30 học sinh gồm 20 nam và 10 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất một học sinh nữ?

A. 1140. **B.** 2920. **C.** 1900. **D.** 900.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Để chọn ra 3 học sinh trong đó có ít nhất một học sinh nữ ta có các phương án sau:

Phương án 1: Chọn 1 học sinh nữ và 2 học sinh nam, có $C_{10}^1.C_{20}^2$ cách thực hiện.

Phương án 2: Chọn 2 học sinh nữ và 1 học sinh nam, có $C_{10}^{2}.C_{20}^{1}$ cách thực hiện.

Phương án 3: Chọn 3 học sinh nữ, có C_{10}^{3} cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng, ta có: $C_{10}^{1}.C_{20}^{2}+C_{10}^{2}.C_{20}^{1}+C_{10}^{3}=2920$ cách chọn ra một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất một học sinh nữ.

Cách 2:

Có C_{30}^{3} cách chọn ra 3 học sinh từ 30 học sinh, trong đó có C_{20}^{3} cách chọn ra 3 học sinh, không có học sinh nữ.

Suy ra có $C_{30}^{3}-C_{20}^{3}=2920$ cách chọn ra một nhóm 3 học sinh sao cho nhóm đó có ít nhất một học sinh nữ.

Câu 2: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=3$ và $u_2=15$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 5. **B.** -12. **C.** 12. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Công bội của cấp số nhân đã cho là $q=\frac{u_2}{u_1}=5$.

Câu hỏi phát triển tương tự câu 2:

Câu 1: **2.1** ***(Câu phát triển câu2)*** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1=2$ và công bội $q=3$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân.

A. 24. **B.** 54. **C.** 162. **D.** 48.

Lời giải

Chọn B

Số hạng thứ 4 của cấp số nhân là $u_4=u_1.q^3=2.3^3=54$.

Câu 2: **2.2** ***(Câu phát triển câu2)*** Cho cấp số nhân (u_n) với $u_3=9$ và $u_6=243$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

A. 3. **B.** 27. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** 126.

Lời giải

Chọn A

Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho, ta có: $\begin{cases} u_3=u_1.q^2 \\ u_6=u_1.q^5 \end{cases} \Rightarrow q^3=\frac{u_6}{u_3}=27 \Rightarrow q=3$.

Câu 3: **2.3** ***(Câu phát triển câu2)*** Dãy số (u_n) với $u_n=2^n$ là một cấp số nhân với

A. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1. **B.** Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2. **D.** Công bội là 1 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân đã cho là: $2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\,;\,\ldots \Rightarrow \begin{cases} u_1=2 \\ q=\frac{u_2}{u_1}=2 \end{cases}$.

Câu 3: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh $4a$ và bán kính đáy a bằng

A. $16\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\frac{4}{3}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn C

Diện tích xung quanh của hình nón có độ dài đường sinh $l = 4a$ và bán kính đáy $r = a$ là $S_{xq} = \pi rl = \pi.a.4a = 4\pi a^2$.

Câu hỏi phát triển tương tự câu 3:

Câu 1: **3.1** ***(Câu phát triển câu3)*** Cho hình nón có diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$ và đường kính đáy bằng $2a$. Tính độ dài đường sinh hình nón đã cho.

A. $3a$. **B.** $2a$. **C.** $6a$. **D.** $\sqrt{6}a$.

Lời giải

Chọn C

Bán kính đáy $r = \frac{2a}{2} = a$.

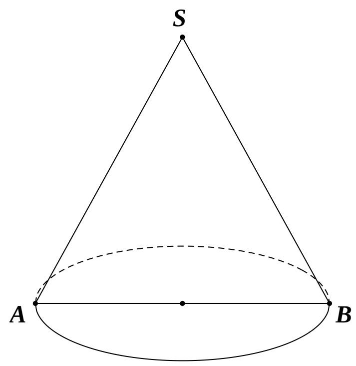
Diện tích xung quanh của hình nón $S_{xq} = \pi rl = \pi.a.l = 6\pi a^2 \Rightarrow l = 6a$.

Câu 2: **3.2** ***(Câu phát triển câu3)*** Cho hình nón có thiết diện qua trục là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng

A. $2\pi a^2$. **B.** $8\pi a^2$. **C.** $4\pi a^2$. **D.** $\frac{2}{3}\pi a^2$.

Lời giải

Chọn A



Vì thiết diện qua trục của hình nón là tam giác đều cạnh bằng $2a$ nên $\begin{cases} l = 2a \\ 2r = 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 2a \\ r = a \end{cases}$.

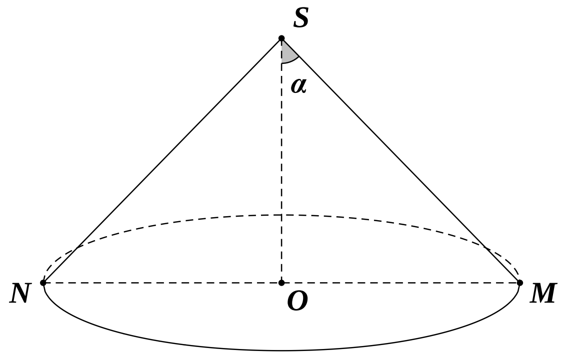
Diện tích xung quanh của hình nón đã cho là $S_{xq} = \pi rl = \pi.a.2a = 2\pi a^2$.

Câu 3: **3.3** ***(Câu phát triển câu3)*** Cho hình nón có bán kính đáy R, góc ở đỉnh là 2α với $45° < \alpha < 90°$. Tính diện tích xung quanh của hình nón theo R và α.

A. $\frac{4\pi R^2}{\sin\alpha}$. **B.** $\frac{2\pi R^2}{\sin\alpha}$. **C.** $\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$. **D.** $\frac{\pi R^2}{3\sin\alpha}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $l = SM = \dfrac{OM}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\alpha}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq} = \pi rl = \pi.R.\dfrac{R}{\sin\alpha} = \dfrac{\pi R^2}{\sin\alpha}$.

Câu 4-5-6 Thầy Nguyễn Phương phát triển cô Phương Thuý Phản Biện

Câu 4: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Ta chọn phương án D.

Câu hỏi phát triển tương tự :

Câu 4a: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(1;3)$.

Câu 4b: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-4\right)$. **B.** $\left(-3;5\right)$. **C.** $\left(2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;4\right)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-3\right)$ và $\left(2;5\right)$.

Do đó hàm số cũng đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-4\right)$.

Câu 4c: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;2\right)$. **B.** $\left(-3;2\right)$. **C.** $\left(2;3\right)$. **D.** $\left(2;6\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-3\right)$ và $\left(2;5\right)$.

Do đó hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $\left(2;3\right)$.

Câu 4d: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\infty;-2\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-4;-2\right)$. **D.** $\left(-2;4\right)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-4;1)$ và $(2;+\infty)$.

Do đó hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(-4;-2)$.

Câu 5: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho khối lập phương có cạnh bằng 6. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 216. **B.** 18. **C.** 36. **D.** 72.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lập phương đã cho là $V=6^3=216$.

Câu hỏi phát triển tương tự :

Câu 5a: Cho khối lập phương có cạnh bằng 4. Thể tích của khối lập phương đã cho bằng

A. 12. **B.** 32. **C.** 16. **D.** 64.

Lời giải

Chọn D

Thể tích khối lập phương đã cho là $V=4^3=64$.

Câu 5b: Cho khối lập phương có thể tích bằng V. Thể tích của khối lập phương có cạnh bằng một nửa cạnh của khối lập phương đã cho bằng

A. $\frac{V}{2}$. **B.** $\frac{V}{4}$. **C.** $\frac{V}{8}$. **D.** $\frac{V}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi cạnh của khối lập phương ban đầu là $a \Rightarrow a^3=V$.

Thể tích khối lập phương có cạnh bằng $\frac{a}{2}$ sẽ là: $V'=\left(\frac{a}{2}\right)^3=\frac{a^3}{8}=\frac{V}{8}$.

Câu 5c: Cho khối lập phương có cạnh bằng a. Chia khối lập phương thành 64 khối lập phương nhỏ có thể tích bằng nhau. Độ dài cạnh của mỗi khối lập phương nhỏ bằng

A. $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a}{8}$. **C.** $\frac{a}{16}$. **D.** $\frac{a}{64}$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối lập phương lớn là: $V=a^3$.

Gọi chiều dài cạnh hình lập phương nhỏ là x $\Rightarrow$ thể tích khối lập phương nhỏ là: $V'=x^3$

Từ giả thiết $\Rightarrow V=64V' \Rightarrow a^3=64x^3 \Rightarrow x=\frac{a}{4}$.

Câu 5d: Biết diện tích toàn phần của một khối lập phương bằng 96. Tính thể tích khối lập phương

A. 32 . **B.** 64 . **C.** 16 . **D.** 128 .

Lời giải

Chọn B

Gọi độ dài cạnh hình lập phương bằng a $\Rightarrow 6a^2 = 96 \Rightarrow a = 4$.

Thể tích khối lập phương: $V = 4^3 = 64$.

Câu 6: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1) = 2$ là

A. $x = 3$. **B.** $x = 5$. **C.** $x = \frac{9}{2}$. **D.** $x = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_3(2x-1) = 2 \Leftrightarrow 2x-1 = 3^2 \Leftrightarrow 2x-1 = 9 \Leftrightarrow x = 5.$

Câu hỏi phát triển tương tự:

Câu 6a: Nghiệm của phương trình $\log_4(3x-2) = 2$ là

A. $x = 6$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = \frac{10}{3}$. **D.** $x = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_4(3x-2) = 2 \Leftrightarrow 3x-2 = 4^2 \Leftrightarrow 3x-2 = 16 \Leftrightarrow x = 6.$

Câu 6b: Nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = 2$ là

A. $x = 2$. **B.** $x = 6$. **C.** $x = \frac{10}{3}$. **D.** $x = \frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} = 4 \Leftrightarrow x-1 = 4x-8 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$.

Câu 6c: Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x-1)^2 = 6$ là

A. $x = 6$. **B.** $x = 3$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_2(x-1) + \log_2(x-1)^2 = 6$ (đk: $x > 1$)

$\Rightarrow \log_2(x-1) + 2\log_2(x-1) = 6$

$\Rightarrow \log_2(x-1) = 2 \Rightarrow x = 5$.

Câu 6d: Nghiệm của phương trình $\log_4(x^2-9) = 2$ là

A. $x = 5$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = \pm 5$. **D.** $x = -3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_4\left(x^2-9\right)=2 \Leftrightarrow x^2-9=4^2 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm 5$.

Câu 7-8-9 Thầy Kiet Tan thực hiện thầy Võ Toàn Thắng Phản Biện

Câu 7: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Nếu $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-2$ và $\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=1$ thì $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int\limits_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3 f(x)\mathrm{d}x=-1$.

Câu tương tự:

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\int_0^{10} f(x)dx=7$ và $\int_0^7 f(x)dx=-5$ thì $\int\limits_7^{10} f(x)dx$ bằng

A. 2. **B.** -12. **C.** 12. **D.** -2.

Lời giải

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx+\int\limits_b^c f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx$ **ta có**

$$\int\limits_7^{10} f(x)dx=\int\limits_7^0 f(x)dx+\int\limits_0^{10} f(x)dx=-\int\limits_0^7 f(x)dx+\int\limits_0^{10} f(x)dx=-(-5)+7=12.$$

Chọn C

Câu phát triển

7.1: Cho $\int\limits_0^2 f(x)dx=2; \int\limits_2^5 2f(x)dx=6; \int\limits_5^{10} f(x)dx=5$. Tính $I=\int\limits_0^{10} f(x)dx$?

A. $I=13$. **B.** $I=10$. **C.** $I=16$. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\int\limits_0^{10} f(x)dx=\int\limits_0^2 f(x)dx+\int\limits_2^5 f(x)dx+\int\limits_5^{10} f(x)dx=2+3+5=10$.

Chọn B.

7.2: Cho $\int\limits_0^4 f(x)dx=16$. **Tính** $I=\int\limits_0^2 f(2x)dx$.

A. $I=32$. **B.** $I=8$. **C.** $I=16$. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t=2x \Rightarrow dt=2dx \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{2}$. Khi đó ta có

$$I=\int\limits_0^4 f(t)\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 f(t)dt=\frac{1}{2}.16=8$$

Chọn B.

7.3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = 4$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx = 2$. Tính tích phân $I = \int_0^3 f(x)dx$?

A. $I = 2$. **B.** $I = 6$. **C.** $I = 4$. **D.** 10.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$. Khi đó

$$4 = \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int_1^3 f(t)2dt = 2\int_1^3 f(t)dt = 2\int_1^3 f(x)dx \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx = 2.$$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$. Khi đó

$$2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos dx = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = 2$$

Từ đây ta suy ra $I = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = 4$.

Chọn C

Câu 8: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4.

Câu tương tự:

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có giá trị cực đại bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hàm số có giá trị cực đại bằng 0.

Câu phát triển

8.1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		-	$\|\|$	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai?**

A. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1.

B. Hàm số có đúng một cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Lời giải

Chọn C

Khi qua $x=0$ đạo hàm không đổi dấu nên hàm số không thể đạt cực trị tại $x=0$.

Vậy khẳng định câu C là sai.

8.2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=2f\left(x\right)+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=5$. **B.** $x=2$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=2f\left(x\right)+1 \Rightarrow y'=2f'\left(x\right)$.

Suy ra: Điểm cực tiểu của hàm số $y=f\left(x\right)$ cũng chính là điểm cực tiểu của hàm số $y=2f\left(x\right)+1$.

Vậy: Hàm số $y=2f\left(x\right)+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$.

8.3: Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2\right|$ là:

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=(x-1)(x-2)^2=x^3-5x^2+8x-4$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-10x+8$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-10x+8=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=\frac{4}{3}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.

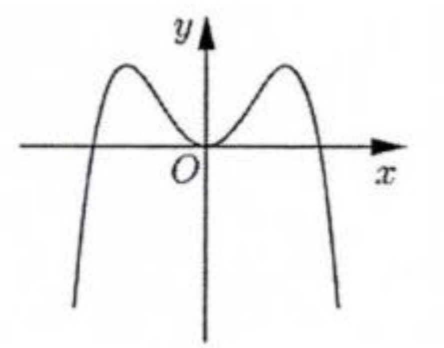
Từ BBT của $y=(x-1)(x-2)^2$ suy ra BBT của $y=\left|(x-1)(x-2)^2\right|$:

x	$-\infty$		1		$\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 9: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^4-2x^2$. **C.** $y=x^3-3x^2$. **D.** $y=-x^3+3x^2$.

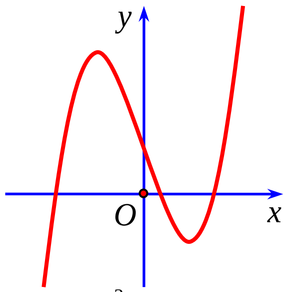
Lời giải

Chọn A

Đồ thị trên là đồ thị của hàm số dạng $y=ax^4+bx^2+c$ với $a<0$.

Câu tương tự:

9.1 Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào ?



A. $y = x^3 + 3x + 1$. **B.** $y = -x^3 + 3x - 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = -x^4 - 4x^2 + 1$.

Lời giải

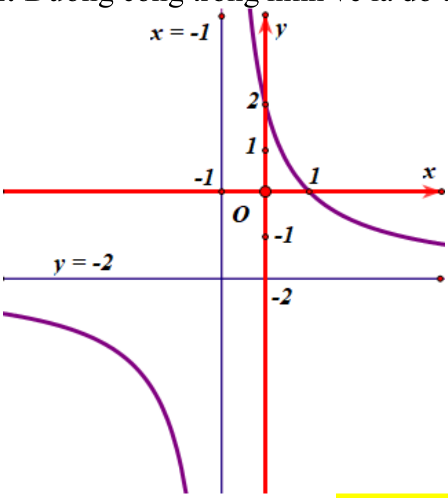
Chọn C

Đây là đồ thị hàm bậc ba có hệ số a dương nên loại đáp án B, D.

Đồ thị hàm bậc ba có hai điểm cực trị nên loại A.

Câu phát triển

9.2: Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau



A. $y = \frac{x-2}{x+1}$. **B.** $y = \frac{-2x+2}{x+1}$. **C.** $y = \frac{-x+2}{x+2}$. **D.** $y = \frac{2x-2}{x+1}$.

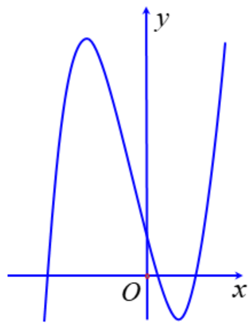
Lời giải

Chọn B

Ta có từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số giảm, có tiệm cận ngang là $y = -2$, tiệm cận đứng là $x = -1$, giao với Ox tại điểm $(1;0)$, giao với Oy tại điểm $(0;2)$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{-2x+2}{x+1}$.

9.3: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$. **B.** $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$. **D.** $a>0,\ b<0,\ c>0,\ d>0$.

Lời giải

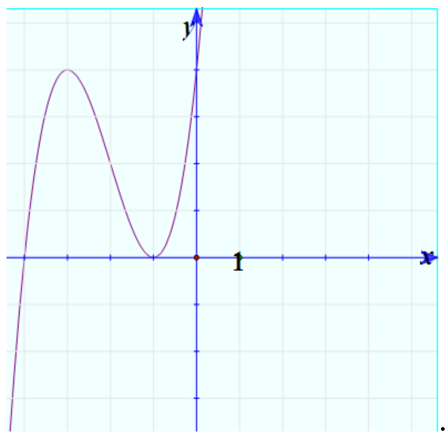
Chọn A

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$.

Xét $f'(x)=3ax^2+2bx+c$, $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu nên suy ra $a.c<0$ $\Rightarrow c<0$.

Xét $y''=6ax+2b=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-b}{3a}$, dựa vào đồ thị ta thấy hoành độ của điểm uốn âm $\Rightarrow \dfrac{-b}{3a}<0 \Rightarrow b>0$.

9.4: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(x)$ là hàm số nào trong bốn hàm số sau:

A. $y=x^3+3x^2+2$. **B.** $y=x^3-3x^2+2$.

C. $y=x^3+6x^2+9x+4$. **D.** $y=x^3-6x^2+9x+4$.

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ đi qua các điểm $(0;4),(-1;0),(-2;2)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases}0^3+6.0^2+9.0+4=0\\(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+4=0\\(-2)^2+a(-2)^2+b(-2)+4=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=-3\\4a-2b=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\b=9\end{cases}.$$

Vậy $y=x^3+6x^2+9x+4$.

Câu 10-11-12 Thầy Nam Phương thực hiện thầy Đào Văn Tiến Phản Biện

Câu 10: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2\left(a^2\right)$ bằng

A. $2+\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{2}+\log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_2 a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_2\left(a^2\right)=2\log_2 a$.

Phân tích: sử dụng các công thức về logarit.

Câu tương tự câu 10

Câu 1: **10.1** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(a^4\right)$ bằng

A. $4+\log_3 a$. **B.** $\frac{1}{4}+\log_3 a$. **C.** $4\log_3 a$. **D.** $\frac{1}{4}\log_3 a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3\left(a^4\right)=4\log_3 a$.

Phát triển

Câu 2: **10.2** Với a là số thực dương tùy ý, $\log\left(100a^3\right)$ bằng

A. $6\log a$. **B.** $3+3\log a$. **C.** $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\log a$. **D.** $2+3\log a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log\left(100a^3\right)=\log 10^2+\log a^3=2+3\log a$.

Câu 3: **10.3** Cho các số thực $a,b\neq 0$ thoả mãn $3^a=4^b$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

A. $\log_4 3$. **B.** $\ln 12$. **C.** $\ln 0,75$. **D.** $\log_3 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $3^a=4^b\Rightarrow a.\ln 3=b.\ln 4\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\ln 4}{\ln 3}=\log_3 4$

Câu 4: **10.4** Cho $\log 3=a$. Giá trị của $\frac{1}{\log_{81}1000}$ bằng?

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{4a}{3}$. **C.** $\frac{1}{12a}$. **D.** $12a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\frac{1}{\log_{81}1000}=\log_{1000}81=\log_{10^3}3^4=\frac{4}{3}\log 3=\frac{4a}{3}$.

Câu 11: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos x+6x$ là

A. $\sin x+3x^2+C$. **B.** $-\sin x+3x^2+C$. **C.** $\sin x+6x^2+C$. **D.** $-\sin x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int(\cos x+6x)\mathrm{d}x=\sin x+3x^2+C$.

Phân tích: Sử dụng các nguyên hàm cơ bản.

Câu tương tự

Câu 1: **11.1** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+\sin x$ là

A. $x^2+\cos x+C$. **B.** $x^2-\cos x+C$

C. $2x^2+\cos x+C$. **D.** $2x^2-\cos x+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int f(x)=\int(2x+\sin x)\mathrm{d}x=x^2-\cos x+C$

Phát tiển

Câu 2: **11.2**Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x-e^x$ là

A. $2-e^x+C$. **B.** $x^2+e^{-x}+C$. **C.** x^2-e^x+C. **D.** $x^2-e^{-x}+C$.

Lời giải

Chọn C

$\int(2x-e^x)dx=x^2-e^x+C$.

Câu 3: **11.3** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=3^x+\sin 8x$ là

A. $\dfrac{3^x}{\ln 3}-\cos 8x+C$. **B.** $\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{8}\cos 8x+C$.

C. $\dfrac{3^x}{\ln 3}+\dfrac{1}{8}\cos 8x+C$. **D.** $3^x\ln 3-\dfrac{1}{8}\cos 8x+C$

Lời giải

Chọn B

$\int(3^x+\sin 8x)dx=\dfrac{3^x}{\ln 3}-\dfrac{1}{8}\cos 8x+C$.

Câu 4: **11.4** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+\cos 2x$ là

A. $x^2+\sin 2x+C$. **B.** $x^2+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

C. $x^2-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. **D.** $x^2+2\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int f(x)=\int(2x+\cos 2x)\mathrm{d}x=x^2+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

Câu 5: **11.5** Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+\sin 3x$ là

A. $3x^2+3\cos 3x+C$. **B.** $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

C. $x^4-\cos 3x+C$. **D.** $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int(x^3+\sin 3x)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{1}{3}\cos 3x+C$.

Câu 12: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Mô-đun của số phức $1+2i$ bằng

5. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Phân tích: xác định các yếu cơ bản của số phức như: Số phức liên hợp, mo đun của số phức, điểm biểu diễn số phức,…

Câu tương tự

Câu 1: **12.1** Tính modul của số phức $z=4-3i$:

A. $|z|=25$. **B.** $|z|=\sqrt{7}$. **C.** $|z|=7$. **D.** $|z|=5$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức tính thể modul số phức $z=a+bi$: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Theo đầu bài ta có:

$|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

Phát triển

Câu 2: **12.2** Cho số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(-1;3)$ trên mặt phẳng tọa độ. Môđun của số phức z bằng

A. 10. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Số phức z được biểu diễn bởi điểm $M(-1;3)\Rightarrow z=-1+3i$.

Ta có $|z|=|-1+3i|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$.

Câu 3: **12.3** Cho số phức $z=2-3i$. Môđun của số phức $\overline{z}$ là

A. 1. **B.** -1. **C.** $2+3i$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $|z|=|\overline{z}|=|2-3i|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$.

Câu 4: **12.4** Nếu điểm $M\ x;y$ là điểm biểu diễn hình học của số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy thoả mãn $OM=4$ thì

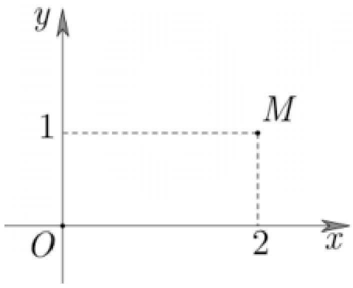
A. $|z|=\dfrac{1}{4}$. **B.** $|z|=4$. **C.** $|z|=16$. **D.** $|z|=2$.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra $OM=4\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=4\Rightarrow|z|=4$.

Câu 5: **12.5** Trong hình vẽ bên dưới, điểm M biểu diễn cho số phức z. Sô phức z là



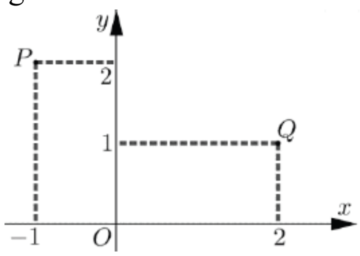
A. $2-i$. **B.** $1+2i$. **C.** $1-2i$. **D.** $2+i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $M(2;1) \Rightarrow z = 2+i$

Câu 6: **12.6** Trong hình vẽ bên, điểm P biểu diễn số phức z_1, điểm Q biểu diễn số phức z_2. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $z_1 = \overline{z_2}$. **B.** $|z_1| = |z_2| = 5$. **C.** $|z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$. **D.** $z_1 = -z_2$.

Lời giải

Chọn C

$z_1 = -1+2i; z_2 = 2+i \Rightarrow |z_1| = |z_2| = \sqrt{5}$

Câu 7: **12.7**Số phức liên hợp của số phức $z = 5+6i$ là

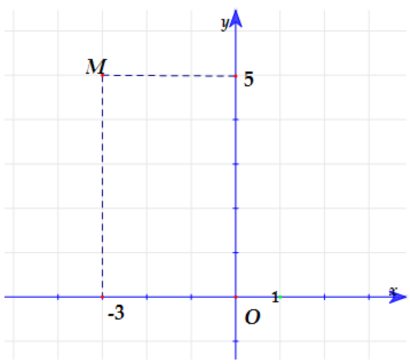
A. $\overline{z} = -5+6i$. **B.** $\overline{z} = -5-6i$. **C.** $\overline{z} = 6-5i$. **D.** $\overline{z} = 5-6i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức liên hợp của số phức $z = x+yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ là số phức $\overline{z} = x-yi$. Do đó số phức liên hợp của số phức $z = 5+6i$ là $\overline{z} = 5-6i$.

Câu 8: **12.8** Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z. Số phức $\overline{z}$ là



A. $\overline{z} = 3+5i$. **B.** $\overline{z} = -3+5i$. **C.** $\overline{z} = 3-5i$. **D.** $\overline{z} = -3-5i$.

Lời giải

Chọn D

Tọa độ điểm $M(-3;5) \Rightarrow z = -3+5i \Rightarrow \overline{z} = -3-5i$.

Câu 13-14-15 Thầy Bình Nguyễn thực hiện thầy Huỳnh Đức Vũ Phản Biện

Câu 13: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu của $M(2;-2;1)$ lên mặt phẳng (Oxy) thì cao độ bằng 0.

Phân tích ý tưởng câu hỏi:

☑ Đây là dạng toán tìm tọa độ các điểm trên mặt phẳng tọa độ hoặc các trục tọa độ. Đây là dạng toán cơ bản. Nằm trong mạch kiến thức của khái niệm hệ trục tọa độ của hình học không gian $Oxyz$.

☑ Cho điểm $M=(a;b;c)$ khi đó

+ Hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (Oxy) là $(a;b;0)$.

+ Hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (Oyz) là $(0;b;c)$.

+ Hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (Oxz) là $(a;0;c)$.

+ Hình chiếu của điểm M trên trục Ox là $(a;0;0)$.

+ Hình chiếu của điểm M trên trục Oy là $(0;b;0)$.

+ Hình chiếu của điểm M trên trục Oz là $(0;0;c)$.

☑ Các bài toán khai thác phát triển từ bài toán này là: Xác định điểm đối xứng của một điểm qua mặt phẳng tọa độ, qua trục tọa độ, khoảng cách một điểm đến mặt phẳng tọa độ, trục tọa độ; phương trình mặt cầu tiếp xúc mặt phẳng tọa độ, trục tọa độ…v.v.

Bài tập tương tự:

13.1. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;-2;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn C

Hình chiếu của $M(2;-2;1)$ lên mặt phẳng (Oyz) là một điểm có hoành độ bằng 0 nên hình chiếu là điểm $(0;-2;1)$.

Bài tập phát triển

13.2. Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M(2;-2;1)$ qua mặt phẳng (Oyz) có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(-2;-2;1)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi điểm $H=(0;-2;1)$ là hình chiếu của M trên mặt phẳng (Oyz). Điểm đối xứng với điểm $M(2;-2;1)$ qua mặt phẳng $(Oyz): x=0$ là điểm $M_1(a;b;c)$ sao cho M_1M nhận H làm trung điểm. Suy ra $M_1(-2;-2;1)$.

13.3. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2;-2;1)$ trên trục Ox là điểm có tọa độ là

A. $(2;0;1)$. **B.** $(2;0;0)$. **C.** $(0;-2;1)$. **D.** $(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu của M trên trục Ox là điểm có tọa độ $(2;0;0)$.

13.4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-3;1;2)$. Tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua trục Oy là

A. $(-3;-1;2)$. **B.** $(3;1;-2)$. **C.** $(3;-1;-2)$. **D.** $(3;-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Gọi M là hình chiếu của điểm A lên trục $Oy \Rightarrow M(0;1;0)$.

Ta có A' đối xứng với điểm A qua trục Oy nên M là trung điểm của AA'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_M - x_A \\ y_{A'} = 2y_M - y_A \\ z_{A'} = 2z_M - z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 0+3=3 \\ y_{A'} = 2.1-1=1 \\ z_{A'} = 0-2=-2 \end{cases} \Rightarrow A'(3;1;-2).$$

13.5 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;6)$, $B(5;-4;2)$, đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại M và $\overrightarrow{MA} = k\cdot\overrightarrow{MB}$. Tính k.

A. $k=-\frac{1}{2}$. **B.** $k=\frac{1}{2}$. **C.** $k=2$. **D.** $k=-2$

Lời giải

Chọn A

Dễ nhận thấy hai điểm A,B nằm khác phía so với mặt phẳng $(Oxz): y=0$.

Suy ra điểm M nằm trong đoạn AB nên $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, k<0$.

Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{d(A,(Oxz))}{d(B,(Oxz))} = \frac{2}{|-4|} = \frac{1}{2}$. Suy ra $k=-\frac{1}{2}$.

Câu 14: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Phân tích ý tưởng câu hỏi:

☑ Đây là dạng xác định tâm và bán kính mặt cầu, xác định một phương trình có phải là phương trình mặt cầu hay không? Đây là dạng toán rất cơ bản.

☑ Cho mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ bán kính R thì ta có

+ Phương trình mặt cầu là $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

+ Ngược lại mọi phương trình có dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $a^2+b^2+c^2-d>0$. Khi đó tâm mặt cầu là $I=(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

☑ Các bài toán khai thác phát triển từ bài toán này là xác định một phương trình có phải là phương trình mặt cầu hay không? Tập hợp điểm là mặt cầu.

Bài tập tương tự:

14.1 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=5$. Tâm của (S) có tọa độ là

A. $(-1;-2;-3)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(-1;2;-3)$. **D.** $(1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Bài tập phát triển

14.2. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z-3=0$ có tâm và bán kính là

A. $I(2;-1;1)$, $R=9$. **B.** $I(-2;1;-1)$, $R=3$.

C. $I(2;-1;1)$, $R=3$. **D.** $I(-2;1;-1)$, $R=9$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2-(-3)}=3$.

14.3. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-3)^2=4$. Tìm tâm I và bán kính r của mặt cầu (S).

A. $I(1;0;-3)$, $r=4$. **B.** $I(-1;0;3)$, $r=2$.

C. $I(-1;0;3)$, $r=4$. **D.** $I(1;0;-3)$, $r=2$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm là điểm $I(-1;0;3)$ và bán kính $r=2$.

14.4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2-x+1=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2-6x+9=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+9=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2-2=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2+y^2+z^2-2=0 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$. Mặt cầu có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

14.5. Trong không gian $Oxyz$, tìm điều kiện của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2mx+4y+2mz+m^2+5m=0$ là phương trình mặt cầu

A. $m<4$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$. **C.** $m>1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình

$$x^2+y^2+z^2-2mx+4y+2mz+m^2+5m=0 \Leftrightarrow (x-m)^2+(y+2)^2+(z+m)^2=m^2-5m+4$$

Để thỏa mãn bài toán khi $m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4. \end{array}\right.$.

14.6. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y+4z-m=0$ (m là tham số). Biết mặt cầu có bán kính bằng 5. Tìm m.

A. $m=25$. **B.** $m=11$. **C.** $m=16$. **D.** $m=-16$

Lời giải

Chọn C

$R=5 \Leftrightarrow \sqrt{1+4+4+m}=5 \Leftrightarrow m=16$.

Câu 15: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y-4z+1=0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α)?

A. $\overrightarrow{n_2}(3;2;4)$. **B.** $\overrightarrow{n_3}(2;-4;1)$. **C.** $\overrightarrow{n_1}(3;-4;1)$. **D.** $\overrightarrow{n_4}(3;2;-4)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(\alpha): 3x+2y-4z+1=0$ có một vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}(3;2;-4)$.

Phân tích bài toán:

Đây là dạng toán căn bản xác định véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

☑ Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng là véc-tơ khác véc-tơ không và có giá vuông góc với mặt phẳng.

☑ Nếu hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng thì tích có hướng của chúng bằng véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

☑ Nếu $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng thì véc tơ $k\vec{n}$ cũng là véc-tơ pháp tuyến, $k \neq 0$.

☑ Trong không gian mọi mặt phẳng phương trình luôn có dạng $A.x+B.y+C.z+D=0$ trong đó $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Khi đó véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

Bài tập tương tự:

15.1 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): z-2x+3=0$. Một véc-tơ pháp tuyến của (P) là

A. $\vec{u}=(0;1;-2)$. **B.** $\vec{v}=(1;-2;3)$. **C.** $\vec{n}=(2;0;-1)$. **D.** $\vec{w}=(1;-2;0)$.

Lời giải

Ta viết lại phương trình mặt phẳng $(P): 2x-z-3=0$ và thấy (P) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;0;-1)$.

Bài tập phát triển

15.2 Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây nhận $\vec{n}=(1;2;3)$ làm véc-tơ pháp tuyến?

A. $x-2y+3z+1=0$. **B.** $2x+4y+6z+1=0$.

C. $2x-4z+6=0$. **D.** $x+2y-3z-1=0$.

Lời giải

Ta có mặt phẳng $2x+4y+6z+1=0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;4;6)=2(1;2;3)$.

15.3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-3;2)$ và chứa trục Oz. Gọi $\vec{n}=(a;b;c)$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P). Tính $M=\dfrac{b+c}{a}$.

A. $M=-\dfrac{1}{3}$. **B.** $M=3$. **C.** $M=\dfrac{1}{3}$. **D.** $M=-3$.

Lời giải

(P) chứa Oz nên $\vec{k}=(0;0;1)$ nằm trên (P).

Ngoài ra, (P) chứa O và A nên véc-tơ $\overrightarrow{OA}=(1;-3;2)$ nằm trên (P).

Vậy ta có $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{k},\overrightarrow{OA}\right]=(3;1;0)$. Do đó $M=\frac{1}{3}$.

15.4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1;2;0)$ và chứa đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;a;b)$. Tính $a+b$.

A. $a+b=2$. **B.** $a+b=0$. **C.** $a+b=-3$. **D.** $a+b=3$.

Lời giải

Lấy $B(-1;0;0)\in d$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;0),\overrightarrow{u_d}=(2;3;1)$.

Mặt phẳng đi qua A và chứa d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}_d\right]=(-2;2;-2)$.

Một trong các véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng là $\vec{n}=(1;-1;1)\Rightarrow a=-1,b=1$.

Vậy $a+b=0$.

15.5. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng là $ax+by+cz-11=0$. Tính $a+b+c$.

A. $a+b+c=10$. **B.** $a+b+c=3$. **C.** $a+b+c=5$. **D.** $a+b+c=-7$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$ và véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(1;-3;2)$.

Mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có một véc-tơ chỉ phương là

$\vec{n}_Q=\left[\overrightarrow{AB},\vec{n}_P\right]=(0;8;12)=4(0;2;3)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là $0\cdot(x-2)+2\cdot(y-4)+3\cdot(z-1)=0$.

Hay $(Q):2y+3z-11=0$. Từ đó suy ra $a=0$, $b=2$, $c=3$. Do đó $a+b+c=0+2+3=5$.

Câu 16-17-18 Thầy Trần Tuấn Huy thực hiện thầy Trần Đức Nội Phản Biện

Câu 16. **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$?

A. $P(-1;2;1)$. **B.** $Q(1;-2;-1)$. **C.** $N(-1;3;2)$. **D.** $M(1;2;1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $d:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{3}$.

Thay tọa độ điểm $P(-1;2;1)$ vào phương trình đường thẳng d ta có $\frac{-1+1}{-1}=\frac{2-2}{3}=\frac{1-1}{3}$ ta thấy $P\in d$ và các điểm Q,N,M không thuộc đường thẳng d.

Câu 16.1. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$ ***không*** đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(-1;2;0)$. **B.** $(-1;-3;1)$. **C.** $(3;-1;-1)$. **D.** $(1;-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\dfrac{-1-1}{2} \neq \dfrac{2+2}{1} \neq \dfrac{0}{-1}$ nên điểm $A(-1;2;0)$ không thuộc đường thẳng (Δ).

Câu 16.2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 2+t \end{cases}$. Đường thẳng d đi qua điểm nào sau đây?

A. $K(1;-1;1)$. **B.** $H(1;2;0)$. **C.** $E(1;1;2)$. **D.** $F(0;1;2)$.

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d đi qua điểm $F(0;1;2)$.

Câu 16.3. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (P): $2x-y+2z-3=0$; (Q): $x+y+z-3=0$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là đường thẳng đi qua điểm nào dưới đây?

A. $P(1;1;1)$. **B.** $M(2;-1;0)$. **C.** $N(0;-3;0)$. **D.** $Q(-1;2;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Giả sử giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q) là một đường thẳng đi qua điểm I.

Khi đó: $\begin{cases} I \in (P) \\ I \in (Q) \end{cases}$.

Kiểm tra các điểm M, N, P, Q. Ta thấy chỉ có điểm P cùng thuộc hai mặt phẳng (P), (Q).

Vậy $P(1;1;1)$ là điểm cần tìm.

Cách 2:

(P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1} = (2;-1;2)$.

(Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=(1;1;1)$.

Gọi $\Delta=(P)\cap(Q)$.

Ta có Δ qua điểm $I(0;1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-3;0;3)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-t\\y=1\\z=2+t\end{cases}$.

Dễ thấy $P(1;1;1)\in\Delta$.

Câu 16.4. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-2+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và điểm $M(1;2;m)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để điểm M thuộc đường thẳng d.

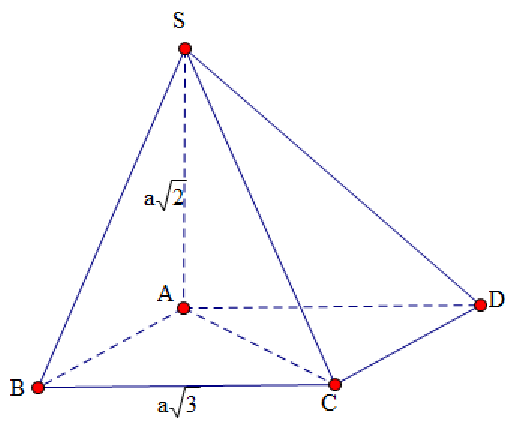
A. $m=2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(1;2;m)$ thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2-t\\z=-2+2t\end{cases}$ khi và chỉ khi $\begin{cases}1+2t=1\\2-t=2\\-2+2t=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=0\\m=-2\end{cases}$.

Câu 17. **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ bên dưới). Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. 45°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là SCA

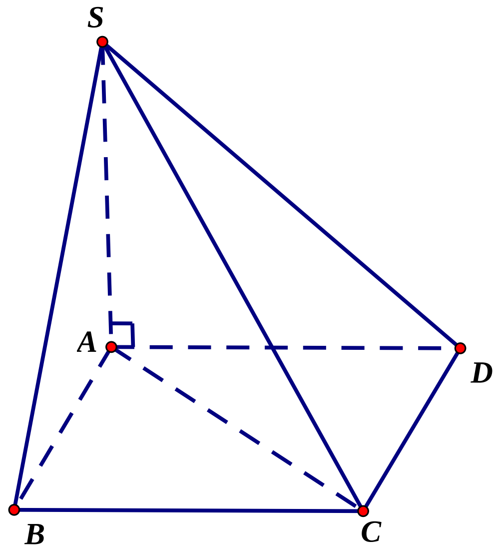
Ta có $\tan SCA=\frac{SA}{AC}=\frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow SCA=30^\circ$.

Câu 17.1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Khi đó $\tan\alpha$ bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là α. Suy ra $\alpha=SCA$.

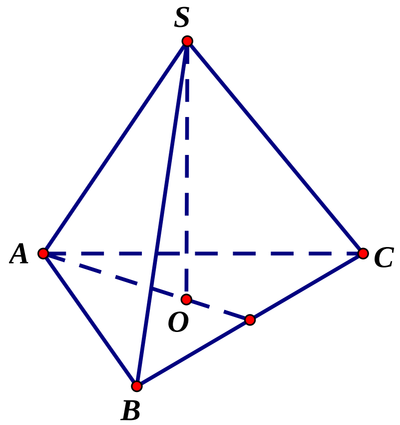
$\tan\alpha=\frac{SA}{AC}=\frac{2a}{a\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Câu 17.2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng a. Độ dài cạnh bên của hình chóp bằng bao nhiêu để góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60°?

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a}{6}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là tâm của tam giác đều $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) là $AO \Rightarrow$ góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy là góc $SAO = 60°$.

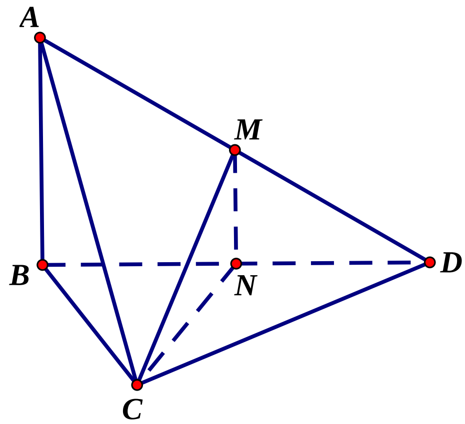
Xét tam giác vuông SAO: $\cos 60° = \dfrac{AO}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{AO}{\cos 60°} = \dfrac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 17.3. Cho tứ diện $ABCD$ có tam giác BCD đều cạnh a, AB vuông góc với mặt phẳng (BCD), $AB = 2a$. M là trung điểm đoạn AD, gọi φ là góc giữa CM với mặt phẳng (BCD), khi đó

A. $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\tan\varphi = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải.

Chọn B



Gọi N là trung điểm BD, suy ra $MN//AB \Rightarrow MN \perp (BCD)$, do đó góc giữa CM với $mp(BCD)$ bằng góc $\widehat{MCN} = \varphi$.

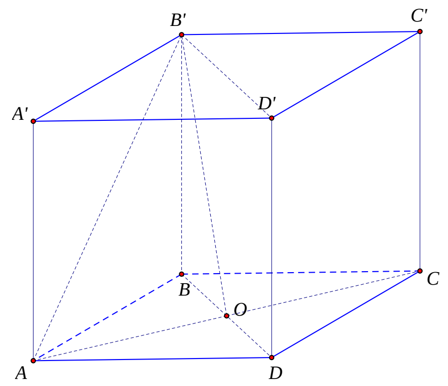
$$MN = \frac{AB}{2} = a,\ CN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{MN}{CN} = a.\frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 17.4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(BDD'B')$.

A. $60°$. **B.** $90°$. **C.** $45°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ khi đó ta có $AO \perp BD$ (1).

Mặt khác ta lại có $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $BB' \perp (ABCD) \Rightarrow BB' \perp AO$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AO \perp (BDD'B') \Rightarrow \left(AB',(ABCD)\right) = \left(AB', B'O\right) = \widehat{AB'O}$.

Xét tam giác vuông $AB'O$ có $\sin \widehat{AB'O} = \frac{AO}{AB'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{AB'O} = 30°$.

Vậy $\left(AB',(ABCD)\right) = 30°$.

Câu 18. [ĐỀ THI THAM KHẢO] Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Vì đạo hàm của hàm số đã cho đổi dấu 2 lần qua $x = \pm 1$ nên hàm số đã cho có điểm 2 cực trị.

Câu 18.1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Khi đó số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right)$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Do hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và có biểu thức đạo hàm đổi dấu ba lần tại x_1; x_2; x_3 nên hàm số $y = f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị.

Câu 18.2. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'(x) = \left(x^2 - \sqrt{2}\right)x^2\left(x+2\right)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)$ có 4 nghiệm phân biệt là $\pm\sqrt[4]{2}$; 0; -2.

Tuy nhiên $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi đi qua các nghiệm $\pm\sqrt[4]{2}$ và -2 nên hàm số $f\left(x\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 18.3. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = (x-1)\left(x^2-2\right)\left(x^4-4\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x\right)$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

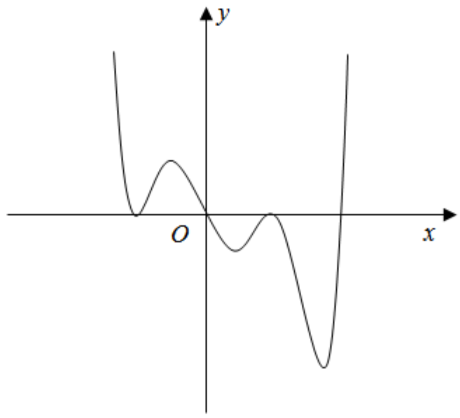
Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2\right)^2\left(x^2+2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$			y_{CT}			$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số có 1 điểm cực trị.

Câu 18.4. Đường cong của hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = f'(x)$.



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là?

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Từ hình vẽ ta thấy $f'(x) = 0$ và đổi dấu tại đúng hai điểm nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 19-20-21 Cô Đặng Thị Mến thực hiện thầy Dấu Vết Hát Phản Biện

Câu 19: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1 **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C. Hàm số liên tục và xác định trên $[-1;2]$.

Ta có $f'(x) = -4x^3 + 24x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 24x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{6} \notin [-1;2] \\ x = -\sqrt{6} \notin [-1;2] \end{array}\right.$.

Ta có $f(0) = 1$; $f(-1) = 12$; $f(2) = 33$. Vậy $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 33$.

Phát triển

Câu 19.1: (Tương tự) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$ trên đoạn $[1;5]$

.

A. $\max\limits_{[1;5]} f\left(x\right)=3\sqrt{2}$. **B.** $\max\limits_{[1;5]} f\left(x\right)=\sqrt{2}$. **C.** $\max\limits_{[1;5]} f\left(x\right)=2\sqrt{2}$. **D.** $\max\limits_{[1;5]} f\left(x\right)=2$.

Lời giải

Chọn C.

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn $\left[1;5\right]$.

Ta có $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}}{2.\sqrt{x-1}.\sqrt{5-x}}$.

Do đó $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\sqrt{5-x}=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x=3\in\left[1;5\right]$.

Mặt khác $f\left(1\right)=2;\ f\left(3\right)=2\sqrt{2};\ f\left(5\right)=2$. Vậy $\max\limits_{[1;5]} f\left(x\right)=f\left(3\right)=2\sqrt{2}$.

Câu 19.2: Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|x-3\right|\sqrt{x+1}$ trên đoạn $\left[0;4\right]$. Tính $M+2N$.

A. $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$. **B.** $\dfrac{256}{27}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $f(x)=\left|x-3\right|\sqrt{x+1}=\sqrt{(x-3)^2(x+1)}$. Xét hàm số $g(x)=(x-3)^2(x+1)$, với $x\in\left[0;4\right]$.

$g'(x)=2(x-3)(x+1)+(x-3)^2=(x-3)\left(2(x+1)+x-3\right)=(x-3)(3x-1)$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\in(0;4)\\ x=\dfrac{1}{3}\in(0;4)\end{array}\right.$; $g(0)=9$; $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{256}{27}$; $g(3)=0$; $g(4)=5$;

Khi đó $\min\limits_{[0;4]} g(x)=0$; $\max\limits_{[0;4]} g(x)=\dfrac{256}{27}$. Hay $M=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$; $N=0$. Vậy $M+2N=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$.

Câu 19.3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;3\right]$ và có bảng biến thiên như sau

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(3\left|\sin x\right|-1\right)$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

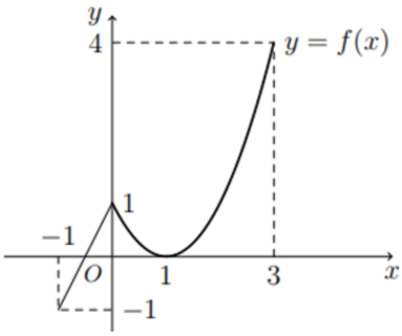
Chọn C.

Đặt $t=3\left|\sin x\right|-1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Ta có $0\le\left|\sin x\right|\le1\Leftrightarrow0\le3\left|\sin x\right|\le3\Leftrightarrow-1\le3\left|\sin x\right|-1\le2$. Vậy $t\in\left[-1;2\right]$.

Do đó, giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(3\left|\sin x\right|-1\right)$ chính là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(t\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ ta có $\max\limits_{\mathbb{R}} f(3|\sin x|-1)=\max\limits_{[-1;2]} f(t)=f(0)=2$.

Câu 19.4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên $[-1;3]$. Tính $M-m$.



A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B.

Quan sát đồ thị ta thấy hàm số $y=f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $[-1;3]$ là -1 tại điểm $x=-1$ và đạt giá trị lớn nhất trên $[-1;3]$ là 4 tại điểm $x=3$. Do đó $M=4, m=-1$ nên $M-m=4-(-1)=5$.

Câu 20: [ĐỀ THI THAM KHẢO] Xét tất cả các số thực dương a và b thỏa mãn $\log_2 a=\log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=b^2$. **B.** $a^3=b$. **C.** $a=b$. **D.** $a^2=b$.

Lời giải

Chọn D. Ta có $\log_2 a=\log_8(ab)\Leftrightarrow \log_2 a=\log_2(ab)^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow a=(ab)^{\frac{1}{3}}\Leftrightarrow a^2=b.$

Phát triển câu 20

Câu 20.1: (Tương tự) Cho $a>0,b>0$ và $\ln\frac{a+b}{3}=\frac{2\ln a+\ln b}{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $a^3+b^3=8a^2b-ab^2$.

B. $a^3+b^3=3(a^2b-ab^2)$.

C. $a^3+b^3=3(8a^2b+ab^2)$.

D. $a^3+b^3=3(8a^2b-ab^2)$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\ln\frac{a+b}{3}=\frac{2\ln a+\ln b}{3}\Leftrightarrow 3\ln\frac{a+b}{3}=2\ln a+\ln b\Leftrightarrow \ln\frac{(a+b)^3}{27}=\ln(a^2b)$

$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^3}{27}=a^2b\Leftrightarrow (a+b)^3=27a^2b\Leftrightarrow a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=27a^2b\Leftrightarrow a^3+b^3=3(8a^2b-ab^2)$.

Câu 20.2: Cho $\log_a\left(\frac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}\right)=\frac{m}{n}$ với $a>0$; $m, n\in\mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m^2 - n^2 = 312$. **B.** $m^2 + n^2 = 543$. **C.** $m^2 - n^2 = -312$. **D.** $m^2 + n^2 = 409$.

Lời giải

Chọn A.

Đặt $A = \dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}} = \dfrac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.a^{\frac{-5}{7}}} = \dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}} = a^{\frac{19}{7}}$, suy ra $\log_a A = \log_a a^{\frac{19}{7}} = \dfrac{19}{7}$.

Vậy $\dfrac{m}{n} = \dfrac{19}{7}$, mà $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản nên $m = 19,\ n = 7 \Rightarrow m^2 - n^2 = 312$.

Câu 20.3: Cho $a > 0,\ b > 0$ và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a b = \dfrac{b}{4}$; $\log_2 a = \dfrac{16}{b}$. Tính tổng $a + b$.

A. 12. **B.** 18. **C.** 16. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B.

$\log_2 a = \dfrac{16}{b} \Leftrightarrow a = 2^{\frac{16}{b}}$ suy ra $\log_a b = \log_{2^{\frac{16}{b}}} b = \dfrac{b}{16}\log_2 b = \dfrac{b}{4}$ ta được $b = 16 \Rightarrow a = 2.$

Vậy $a + b = 18$.

Câu 20.4: Nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của $\dfrac{a}{b}$ là

A. 2. **B.** 2^{18}. **C.** 8. **D.** 2^9.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện $a > 0, b > 0$.

$$\begin{cases} \log_8 a + \log_4 b^2 = 5 \\ \log_4 a^2 + \log_8 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b = 5 \\ \log_2 a + \dfrac{1}{3}\log_2 b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 a = 6 \\ \log_2 b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^6 \\ b = 2^3 \end{cases}.$$ Vậy $\dfrac{a}{b} = 2^3 = 8$.

Câu 21: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

A. $[-2;4]$. **B.** $[-4;2]$. **C.** $(-\infty;2] \cup [4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A. Ta có bất phương trình $\Leftrightarrow x - 1 \geq x^2 - x - 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S = [-2;4]$.

Phát triển

Câu 21.1: (Tương tự) Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq 4$ là

A. $(-\infty;0] \cup [3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[3;+\infty)$. **D.** $[0;3]$.

Lời giải

Chọn D. Ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq 4 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-3x-2} \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$.

Câu 21.2: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 \leq 0$ là

A. $[4;+\infty)$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(0;2]\cup[4;+\infty)$. **D.** $(0;2]$.

Lời giải

Chọn B.

Điều kiện xác định $x>0$.

Ta có $\log_2^2 x-3\log_2 x+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le \log_2 x\le 2 \Leftrightarrow 2\le x\le 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[2;4]$.

Câu 21.3: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+4)>\log_{0,8}(13x+8)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\log_{0,8}(15x+4)>\log_{0,8}(13x+8) \Leftrightarrow \begin{cases}15x+4<13x+8\\15x+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x<4\\15x>-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<2\\x>-\dfrac{4}{15}\end{cases}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{4}{15}<x<2$.

Nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $x\in\{0;1\}$. Chọn D.

Câu 21.4: Tổng tất cả các nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $2^{x^2-x-1}.3^{x^2-x}\le 18$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $2^{x^2-x-1}.3^{x^2-x}\le 18 \Leftrightarrow 2^{x^2-x}.3^{x^2-x}\le 36 \Leftrightarrow (2.3)^{x^2-x}\le 36 \Leftrightarrow 6^{x^2-x}\le 6^2 \Leftrightarrow x^2-x-2\le 0$

$\Leftrightarrow -1\le x\le 2$.

Như vậy các nghiệm nguyên không âm của bất phương trình là $x\in\{0;1;2\}$.

Do đó tổng tất cả các nghiệm nguyên không âm của bất phương trình đã cho bằng 3.

Câu 22-23-24 Thầy Lê Đình Mẫn thực hiện cô Thoa Nguyễn Phản Biện

Câu 22: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Biết rằng khi cắt hình trụ đã cho bởi một mặt phẳng qua trục, thiết diện thu được là một hình vuông. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. 18π. **B.** 36π. **C.** 54π. **D.** 27π.

Lời giải

Chọn B

Ta có hình trụ có bán kính đáy $R=3$.

Thiết diện qua trục thu được là một hình vuông nên hình trụ có chiều cao $h=2R=6$.

Vậy $S_{xq}=2\pi Rh=36\pi$.

Nhận xét. Đây là một dạng toán cơ bản, học sinh phải hình dung được hình dạng của thiết diện tạo thành khi cắt hình trụ, hình nón, hình cầu bởi một mặt phẳng.

Câu 22: (Tương tự)

Cho hình nón đỉnh S, đáy là hình tròn tâm O, bán kính $R=3$, góc ở đỉnh của hình nón là $\varphi=120^0$. Cắt hình nón bởi một mặt phẳng qua đỉnh S tạo thành tam giác đều SAB, trong đó A,B thuộc đường tròn đáy. Diện tích của tam giác SAB bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** 6. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Do góc ở đỉnh của hình nón $\varphi=120^0$, gọi l là độ dài đường sinh ta có $l=\dfrac{2R}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}=SA$.

Khi đó, diện tích của tam giác SAB bằng $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}SA^2=3\sqrt{3}$.

Câu 22: (Phát triển 1)

Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A,B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $ABCD$ tạo với đáy hình trụ góc 45°. Tính diện tích xung quanh hình trụ?

A. $S_{xq}=\dfrac{2\pi a^2\sqrt{3}}{5}$. **B.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$. **D.** $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

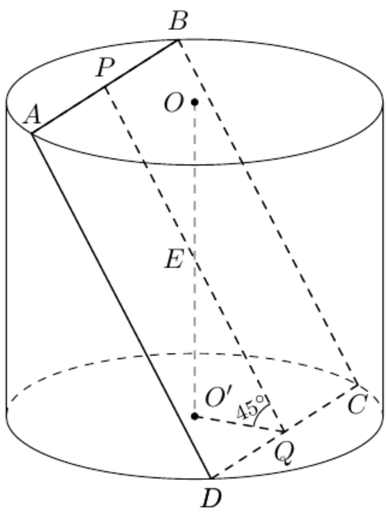
Lời giải

Chọn D

Gọi P,Q,E lần lượt là trung điểm của AB,CD,OO'. Góc giữa $(ABCD)$ và mặt đáy là $O'QE=45^\circ$. Ta có $EQ=\dfrac{a}{2}$, do đó $O'Q=EO'=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Suy ra $h=OO'=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $r=O'C=\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Diện tích xung quanh của hình trụ là $S_{xq}=2\pi\cdot\dfrac{a\sqrt{6}}{4}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.



Câu 22: (Phát triển 2)

Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục của hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$, BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60^0. Tính theo a diện tích S của tam giác IBC.

A. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $S=\dfrac{a^2}{3}$. **C.** $S=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $S=\dfrac{2a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

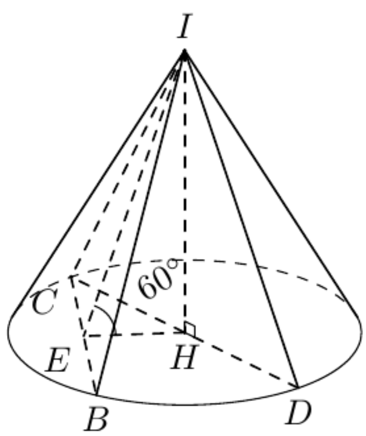
Tam giác IDC vuông cân có $DC=a\sqrt{2}\Rightarrow IH=HC=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và $IC=a$.

Gọi E là trung điểm cạnh BC, góc giữa mặt phẳng (IBC) và (BCD) là $\widehat{IEH}=60^0$.

Trong tam giác IHE có $IE=\dfrac{IH}{\sin 60^0}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

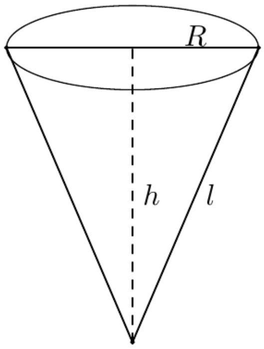
Tam giác IEC có $CE=\sqrt{IC^2-IE^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{2}{3}a^2}=a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S=EI.EC=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.



Câu 22: (Phát triển 3)

Khi sản xuất cái phễu hình nón (không có nắp) bằng nhôm, các nhà thiết kế luôn đạt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm phễu ít nhất, tức là diện tích xung quanh của hình nón là nhỏ nhất. Hỏi nếu ta muốn sản xuất cái phễu có thể tích là $2\ \text{dm}^3$ thì diện tích xung quanh của cái phễu sẽ có giá trị nhỏ nhất gần với giá trị nào sau đây nhất?



A. $6,85\text{ dm}^2$. **B.** $6,75\text{ dm}^2$. **C.** $6,65\text{ dm}^2$. **D.** $6,25\text{ dm}^2$.

Lời giải

Chọn C

Gọi R, h, l lần lượt là bán kính đáy, chiều cao và độ dài đường sinh của cái phễu.

Khi đó $V=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot h=2\Leftrightarrow h=\frac{6}{\pi R^2}$ và $l=\sqrt{h^2+R^2}=\sqrt{\frac{36}{\pi^2R^4}+R^2}$.

Diện tích xung quanh của hình nón là $S_{xq}=\pi\cdot R\cdot l=\pi R\sqrt{\frac{36}{\pi^2R^4}+R^2}=\sqrt{\frac{36}{R^2}+\pi^2R^4}$.

Ta có $\frac{36}{R^2}+\pi^2R^4=\frac{18}{R^2}+\frac{18}{R^2}+\pi^2R^4\ge 3\sqrt[3]{(18\pi)^2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{18}{R^2}=\pi^2R^4\Leftrightarrow R=\sqrt[6]{\frac{18}{\pi^2}}$. Suy ra $\min S_{xq}=\sqrt{3\sqrt[3]{(18\pi)^2}}\approx 6,65$.

Câu 23: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3f(x)-2=0\Leftrightarrow f(x)=\frac{2}{3}$.

Từ bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $d: y=\frac{2}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Nhận xét. Dạng toán ở mức độ thông hiểu. Học sinh cần kĩ năng quan sát và đọc bảng biến thiên, từ đó biện luận được số nghiệm phương trình thông qua sự tương giao giữa hai đồ thị.

Câu 23 (Tương tự)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$ ↗		$+\infty$ || 1	↗	3	↘	$-\infty$

Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $m \in (1;3)$ **B.** $m \in (1;3]$ **C.** $m \in [1;3]$ **D.** $m \in [1;3)$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào biến thiên, phương trình có ba nghiệm thực phân biệt khi $m \in (1;3)$.

Câu 23 (Phát triển 1)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x - m - \sqrt{9 - x^2} = 0$ có đúng 1 nghiệm dương?

A. $m \in (-3;3]$ **B.** $m \in [-3;3] \cup \left\{-3\sqrt{2}\right\}$

C. $m \in [0;3]$ **D.** $m = \pm 3\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-3 \le x \le 3$. Phương trình tương đương với $x - \sqrt{9 - x^2} = m$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ và đường thẳng $y = m$.

Xét hàm số $y = x - \sqrt{9 - x^2}$ với $-3 \le x \le 3$. Ta có $y' = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}} = \dfrac{\sqrt{9 - x^2} + x}{\sqrt{9 - x^2}}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 9 - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \in [-3;3].$$

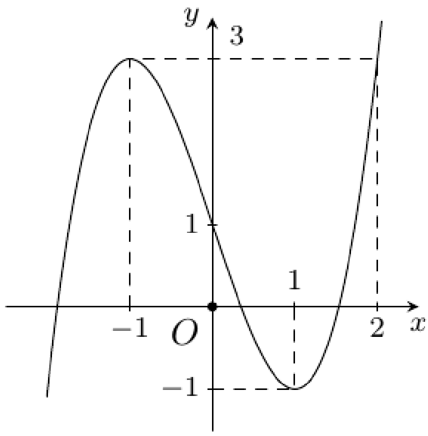
Bảng biến thiên

x	-3		$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$		0		3
y'	$\|$	$-$	0	$+$	0	$+$	$\|$
y	-3	$\searrow$	$-3\sqrt{2}$	$\nearrow$	-3	$\nearrow$	3

Dựa vào bảng biến thiên phương trình có đúng một nghiệm khi $-3 < m \le 3$.

Câu 23 (Phát triển 2)

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ sau



Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(7^{x+1}\right) - \frac{m^2-1}{8} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 6 **B.** 4 **C.** 7 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta suy ra hàm số $y = f(x)$ có phương trình $y = x^3 - 3x + 1$.

Đặt $t = 7^{x+1}, (t > 0)$. Khi đó ta có phương trình

$$f(t) - \frac{m^2-1}{8} = 0 \Leftrightarrow f(t) = \frac{m^2-1}{8}, (t > 0).$$

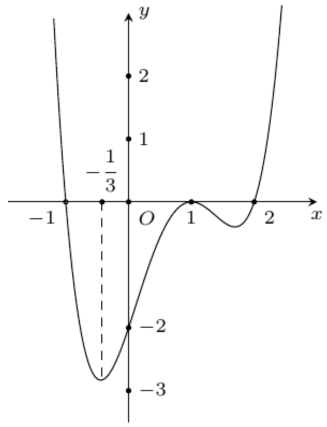
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Với $t > 0$ để phương trình $f(t) = \frac{m^2-1}{8}$ có hai nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 < \frac{m^2-1}{8} < 1 \Leftrightarrow -8 < m^2 - 1 < 8 \Leftrightarrow -7 < m^2 < 9 \Rightarrow m \in \{0; \pm 1; \pm 2\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 23 (Phát triển 3)

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f\left(f(x) - 1\right)$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.



A. 3 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 8

Lời giải

Chọn C

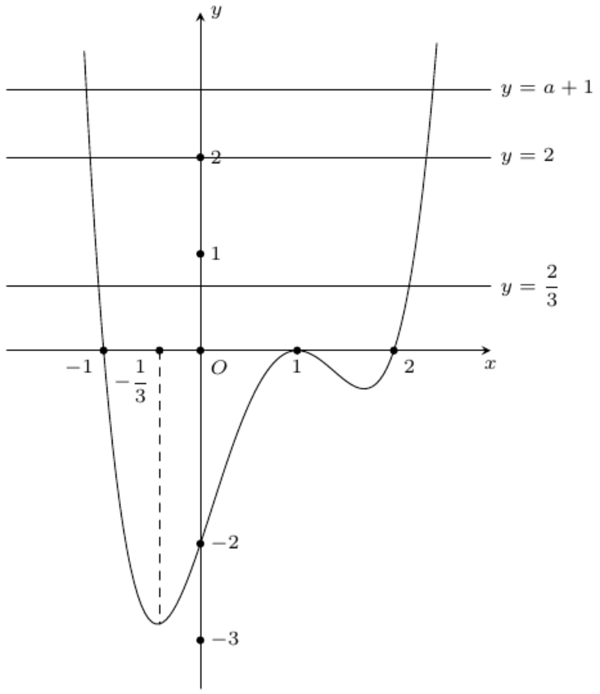
Từ đồ thị, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị $x = -\frac{1}{3}, x = 1$ và $x = a \quad (1 < a < 2)$. Do đó $f'(x) = 0$ có ba nghiệm $x = -\frac{1}{3}, x = 1$ và $x = a \quad (1 < a < 2)$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x).f'(f(x)-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x) = 0 & (1) \\ f'(f(x)-1) = 0 & (2) \end{array}\right.$

Phương trình (1) có ba nghiệm $x = -\frac{1}{3}, x = 1$ và $x = a \quad (1 < a < 2)$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) - 1 = -\frac{1}{3} \\ f(x) - 1 = 1 \\ f(x) - 1 = a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x) = \frac{2}{3} & (3) \\ f(x) = 2 & (4) \\ f(x) = a + 1 & (5) \end{array}\right.$.

Nghiệm của phương trình $f(x) = m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = m$. Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta vẽ thêm các đường thẳng $y = 2, y = \frac{2}{3}$ và $y = a + 1$ (với $2 < a + 1 < 3$) như sau



Từ đồ thị trên, ta thấy các đường thẳng $y=2, y=\frac{2}{3}$ và $y=a+1$ (với $2<a+1<3$) lần lượt cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt khác nhau và khác với $-\frac{1}{3}, 1, a$. Do đó các phương trình $(3),(4),(5)$ lần lượt có hai nghiệm phân biệt khác nhau và khác với $-\frac{1}{3}, 1, a$.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 9 nghiệm phân biệt.

Câu 24: Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $x+3\ln(x-1)+C.$ **B.** $x-3\ln(x-1)+C.$

C. $x-\frac{3}{(x-1)^2}+C.$ **D.** $x+\frac{3}{(x-1)^2}+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x)=\frac{x+2}{x-1}=1+\frac{3}{x-1}$

$\Rightarrow \int f(x)dx=\int\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x+3\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=x+3\ln(x-1)+C$ với $x\in(1;+\infty)$.

Nhận xét. Đây là một dạng toán cơ bản về nguyên hàm, mức độ thông hiểu. Học sinh biết chia đa thức để tách phân thức hữu tỉ đưa về các nguyên hàm quen thuộc.

Câu 24 (Tương tự)

Cho hàm số $y=\frac{2x^4+3}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{2x}+\mathrm{C}$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2x^3}{3}+\frac{3}{x}+\mathrm{C}$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x^3 - \frac{3}{x} + C$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2x^4+3}{x^2}\mathrm{d}x = \int\left(2x^2 + \frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$.

Câu 24 (Phát triển 1)

Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0;\pi)$. Biết rằng giá trị lớn nhất của $F(x)$ trên khoảng $(0;\pi)$ là $\sqrt{3}$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$. **B.** $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. **D.** $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x) - \int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x.$

Do đó $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + C$.

Ta có $F'(x) = f(x) = \frac{2\cos x - 1}{\sin^2 x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \in (0;\pi)$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$		$\nearrow$	$F\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\searrow$	

Hàm $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = \frac{\pi}{3}$. Suy ra

$$-\frac{2}{\sin\frac{\pi}{3}} + \cot\frac{\pi}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + C = \sqrt{3} \Leftrightarrow C = 2\sqrt{3}.$$

Do đó $F(x) = -\frac{2}{\sin x} + \cot x + 2\sqrt{3}$ nên $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3} - 4$.

Câu 24 (Phát triển 2)

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(-1;+\infty)$. Biểu thức

$2f(x) + \left(x^2 - 1\right)f'(x) = \frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}$ được thoả mãn $\forall x \in (-1;+\infty)$. Tính giá trị $f(0)$.

A. $3-\sqrt{3}$. **B.** $2-\sqrt{3}$. **C.** $-\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $2f(x)+\left(x^2-1\right)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}$ được thoả mãn $\forall x\in(-1;+\infty)$ nên $f(1)=1$.

Trên khoảng $(-1;+\infty)$, ta có:

$$2f(x)+\left(x^2-1\right)f'(x)=\frac{x(x+1)^2}{\sqrt{x^2+3}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{(x+1)^2}f(x)+\frac{x-1}{x+1}f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}.f(x)\right)'=\left(\sqrt{x^2+3}\right)'.$$

Do đó $\frac{x-1}{x+1}\cdot f(x)=\sqrt{x^2+3}+C$.

Khi $x=1$ ta có $\frac{0}{2}\cdot f(1)=\sqrt{1^2+3}+C\Rightarrow C=-2$. Vậy $f(0)=2-\sqrt{3}$.

Câu 24 (Phát triển 3)

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0,\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cdot\cos x f(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{7}{5}$. **B.** 4. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Xét tích phân $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\cdot\cos x f(\sin x)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$. Ta có $x=0\Rightarrow t=0; x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$.

Ta có $I=\int_0^1 t^2f(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$(tính chất không phụ thuộc biến số).

Ta có $\int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x=-1$.

Ta có $\int_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2\mathrm{d}x=\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x+14\int_0^1 x^3f'(x)\mathrm{d}x+49\int_0^1 x^6\mathrm{d}x=7-14+7=0$.

Do đó $\int_0^1 \left[f'(x)+7x^3\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x)+7x^3=0 \Leftrightarrow f'(x)=-7x^3 \Rightarrow f(x)=-\frac{7}{4}x^4+C$.

Theo giả thiết $f(1)=0 \Rightarrow C=\frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\left(-\frac{7}{4}x^4+\frac{7}{4}\right)dx=\frac{7}{5}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{5}$.

Câu 25-26-27 Thầy Kiên Nguyễn phát triển thầy TRị Trọng Trần Phản Biện

Câu 25. **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S=A.e^{nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ gia tăng dân số hằng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là $93.671.600$ người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, $Tr.79$). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

A. $109.256.100$. **B.** $108.374.700$. **C.** $107.500.500$. **D.** $108.311.100$.

Lời giải

Chọn B

Từ năm 2017 đến năm 2035 có 18 năm.

Áp dụng công thức $S=A.e^{nr}=93.671.600.e^{18.0,81\%}\approx 108.374.700$

Chọn **B.**

Câu 25.1 (câu tương tự).

Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S=A.e^{nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ gia tăng dân số hằng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là $93.671.600$ người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, $Tr.79$). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,79\%$, dự báo dân số Việt Nam năm 2040 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

A. $112.336.100$. **B.** $112.336.075$. **C.** $112.336.080$. **D.** $112.366.100$.

Lời giải

Chọn A

Từ năm 2017 đến năm 2040 có 23 năm.

Áp dụng công thức $S=A.e^{nr}=93.671.600.e^{23.0,79\%}\approx 112.336.100$

Chọn **A.**

Câu 25.2 (phát triển)

Số lượng của một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm tăng lên theo công thức $S=A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng ban đầu, t là thời gian (tính bằng giờ), r là tỉ lệ tăng trưởng, S là số lượng sau t giờ. Biết rằng $A=1000$ (con), $r=10\%$, hỏi cần khoảng mấy giờ để đạt được 20000 con?

A. 29 giờ. **B.** 30 giờ. **C.** 31 giờ. **D.** 32 giờ.

Lời giải

Chọn B

Từ công thức $S=A.e^{rt} \Rightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{S}{A}\right)}{r}$, thay số ta được:

$t=\frac{\ln\left(\frac{20000}{1000}\right)}{10\%}=\frac{\ln 20}{0,1}\approx 29,96$, hay cần khoảng 30 giờ để đạt được số lượng cần thiết.

Chọn **B.**

Câu 25.3 (phát triển).
Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất là 7% /năm. Biết rằng nếu không rút ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi là lãi kép). Để người đó lãnh được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong khoảng thời gian là ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền và lãi suất không thay đổi)

A. 12 năm . **B.** 15 năm . **C.** 14 năm. **D.** 13 năm.

Lời giải

Chọn C

Gọi n là số năm cần gửi, bài toán thuộc lãi kép gửi một lần tính theo công thức $T = M\left(1+r\right)^n$ với M, r là số tiền ban đầu và lãi suất định kì. Thế thì ta có $250 = 100\left(1+0,07\right)^n$ suy ra $n \approx 13,5$ nên người đó gửi ít nhất là 14 năm mới đủ số tiền.

Câu 25.4 (phát triển)
Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với kì hạn 3 tháng (1 quý), lãi suất 6% một quý theo hình thưc lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó lại gửi thêm 100 triệu đồng với hình thức và lãi suất như trên. Hỏi sau 1 năm tính từ lần gửi đầu tiên người đó nhận số tiền gần với kết quả nào nhất?

A. $224,7$ triệu đồng. **B.** $243,5$ triệu đồng. **C.** $236,2$ triệu đồng. **D.** $238,6$ triệu đồng.

Lời giải

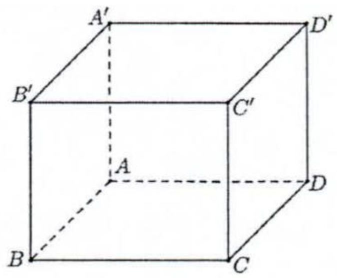
Chọn D

Sau 6 tháng đầu thì người đó gửi được hai kì hạn nên tổng cả vốn và lãi lúc đó là $A = 100.\left(1,06\right)^2$ triệu đồng.

Người đó gửi thêm 100 triệu thì số tiền gửi là $B = A + 100$ triệu.

Vậy sau một năm thì được số tiền là $B\left(1,06\right)^2 = 100.\left(1,06\right)^4 + 100.\left(1,06\right)^2 \approx 238,6$ triệu đồng.

Câu 26. [ĐỀ THI THAM KHẢO] Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a, $BD = a\sqrt{3}$ và $AA' = 4a$ (minh họa như hình bên dưới). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $4\sqrt{3}a^3$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. **D.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh a, có $BD = a\sqrt{3} \Rightarrow AC = 2AO = 2\sqrt{a^2 - \dfrac{3}{4}a^2} = a$, với O là trung điểm AC.

Suy ra $S_{ABCD} = AC \cdot BD = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

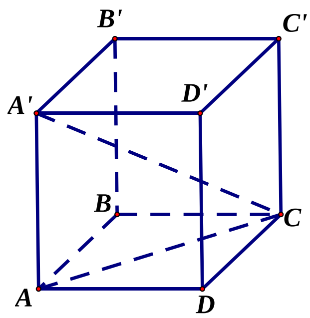
Vậy $V = AA'.S_{ABCD} = 2\sqrt{3}a^3$. Chọn **A.**

Câu 26.1 (câu tương tự)
Tính thể tích khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a và đường chéo $A'C = 2a$.

A. a^3. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $a^3\sqrt{2}$. **D.** $2a^3$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $AC = a\sqrt{2}$, $AA' = \sqrt{A'C^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$.

$S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V = a^2.a\sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$.

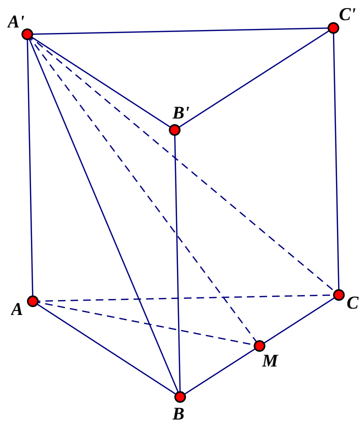
Câu 26.2 (phát triển)

Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = 2a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

A. $3a^3\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. **C.** $3a^3\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC. Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$, vì AA' là đường cao lăng trụ nên $BC \perp AA'$. Do đó, $BC \perp (AA'M)$ nên $((A'BC);(ABC)) = AMA' = 60°$.

Suy ra $AA' = AM.\tan AMA' = a\sqrt{3}.\tan 60° = 3a$.

Vậy thể tích cần tìm là $V = AA'.S_{ABC} = 3a.\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{4} = 3a^3\sqrt{3}$.

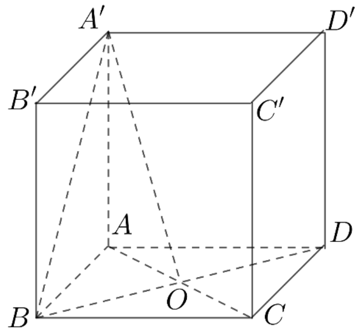
Câu 26.3 (phát triển)

Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a và góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(A'ACC')$ bằng 30^0. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = a^3$. **B.** $V = a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = a^3\sqrt{2}$. **D.** $V = 2a^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi $O = AC \cap BD$.

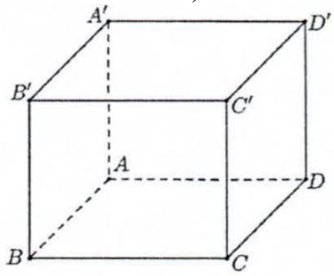
Ta có: $\begin{cases} BO \perp AC \\ BO \perp A'A \end{cases} \Rightarrow BO \perp (ACC'A')$ tại O. Do đó góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(A'ACC')$ là $\widehat{BA'O} \Rightarrow \widehat{BA'O} = 30^0$.

Su ra: $\dfrac{BO}{A'O} = \tan 30^0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow A'O = \dfrac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow A'A = \sqrt{A'O^2 - AO^2} = \sqrt{\dfrac{3a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2}} = a$.

Vậy thể tích V của khối lăng trụ đã cho là $V = AA'.S_{ABCD} = a.a^2 = a^3$.

Câu 26.4 (phát triển)

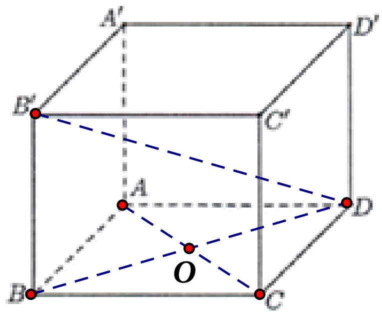
Cho khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $AA' = 2a$, góc giữa $B'D$ và mặt đáy bằng $30°$ (minh họa như hình bên dưới). Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng



A. $2\sqrt{3}a^3$. **B.** $4a^3\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn B



Vì BD là hình chiếu của $B'D$ trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên $\widehat{B'DB} = 30°$ là góc giữa $B'D$ và mặt đáy $\Rightarrow BD = B'B.\cot 30° = 2a\sqrt{3}$.

Vì $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$ có $BD = 2a\sqrt{3}$

$\Rightarrow AC = 2AO = 2\sqrt{AB^2 - BO^2} = 2\sqrt{4a^2 - 3a^2} = 2a$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{2}.2a.2a\sqrt{3} = 2a^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow V = AA'.S_{ABCD} = 2a.2a^2\sqrt{3} = 4a^3\sqrt{3}$

Chọn **B.**

Câu 27. [ĐỀ THI THAM KHẢO] Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$. Suy ra : TXĐ : $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(5x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+1}{x+1}=3$

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{5x+1}{x+1}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x+1}{x+1}=-\infty$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=5$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=5 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=5$.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là 2.

Câu 27.1 (câu tương tự)

Tìm tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}}$

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases}(x^2-4x+3)\neq 0\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\ x\neq 3\end{cases}$. Suy ra : TXĐ : $D=(2;+\infty)\setminus\{3\}$.

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-6x+8}{(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\sqrt{x-2}}=0$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là: $y=0$.

+ Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-6x+8}{(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x-2)(x-4)}{(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}(x-4)}{(x^2-4x+3)}=0$

+ Ta có:

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-6x+8}{(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}}=\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\dfrac{1}{x-3}.\dfrac{\sqrt{x-2}(x-4)}{x-1}\right]=-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là: $x=3$.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 27.2 (phát triển) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ có bao nhiêu tiệm cận?

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=-\infty$

Suy ra $x=1$ là tiệm cận đứng.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=1$

Suy ra $y=1$ là tiệm cận ngang.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}=-1$

Suy ra $y=-1$ là tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số có 3 tiệm cận.

Câu 27.3 (phát triển)

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

+) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=-1$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai tiện cận ngang.

+) Ta lại có:

$\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}=0$.

$\lim\limits_{x\to(-2)^-} y=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=-\infty$ do $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-2)^-}(x-2)=-4<0\\ \lim\limits_{x\to(-2)^-}\sqrt{x^2-4}=0\\ \sqrt{x^2-4}>0,\forall x<-2\end{cases}$.

Suy ra $x=-2$ là một đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 27.4 (phát triển)

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2020}{3-2f(x)}$ là

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

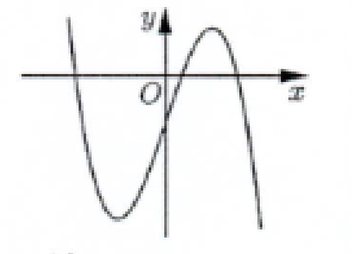
Lời giải

Chọn C

Dựa vào BBT, phương trình $3-2f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\frac{3}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt và tử số là hằng số nên đồ thị hàm số $y=\frac{2020}{3-2f\left(x\right)}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 28-29-30 Thầy Nguyễn Chiến phát triển thầy Nguyễn Đức Lợi Phản Biện

Câu 16: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $y=ax^3+3x+d \quad a,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình bên.Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0,d>0$. **B.** $a<0,d>0$. **C.** $a>0;d<0$. **D.** $a<0;d<0$.

Lời giải

Chọn D

Do nhánh tiến đến $+\infty$ của đồ thị hàm số đi xuống $\Rightarrow a<0$.

Do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ nhỏ hơn $0 \Rightarrow d<0$.

Phát triển câu 28.

Nhận xét: Đây là câu mức độ vận dụng, dạng cho đồ thị hàm số đa thức, tìm dấu các hệ số

Phương pháp:

+ Tính $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ để tìm dấu hệ số có lũy thừa cao nhất. $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty \Rightarrow a<0$.

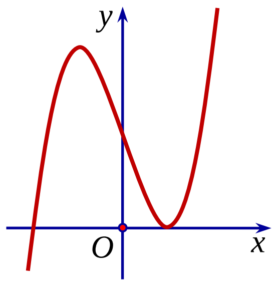
Nhận diện nhanh: Nhánh ngoài cùng của đồ thị đi lên từ trái qua phải $\Rightarrow a>0$, đi xuống từ trái qua phải $\Rightarrow a<0$.

+ Xét giao điểm đồ thị với trục hoành, trục tung.

+ Dựa vào điểm cực trị.

Câu tương tự:

Cho hàm số $y=ax^3-3x+d \ \left(a,d\in \square\right)$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,d>0$. **B.** $a<0,d>0$. **C.** $a>0,d<0$. **D.** $a<0,d<0$.

Lời giải

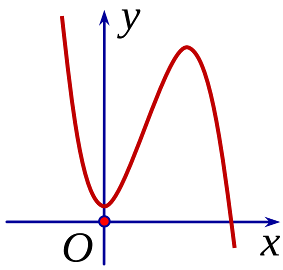
Chọn A.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0$.

Đồ thị hàm số cắt trục Oy là điểm nằm phía trên trục Ox nên $d>0$.

Phát triển

Câu 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị hàm số như hình bên.



Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. $a<0; b<0; c=0; d>0$. **B.** $a>0, c>0, d>0; b<0$.

C. $a<0; b>0, c>0, d>0$. **D.** $a<0; b>0, d>0; c=0$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty \Rightarrow a<0$.

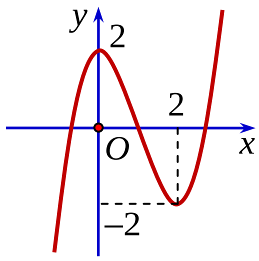
Đồ thị hàm số cắt trục Oy là điểm nằm phía trên Ox nên $d>0$.

Ta lại có hàm số có hai điểm cực trị trong đó có một điểm đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ và một điểm cực đại đạt tại điểm $x>0$.

Suy ra phương trình $f'\left(x\right)=3ax^2+2bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1=0<x_2$.

Khi đó ta có $\begin{cases} f'\left(0\right)=0 \\ x_1+x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{3a}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a<0 \\ b>0 \end{cases}$. Đáp án D.

Câu 2. Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Tính tổng $S=a+b+c+d$.

A. $S=0$. **B.** $S=6$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=2$.

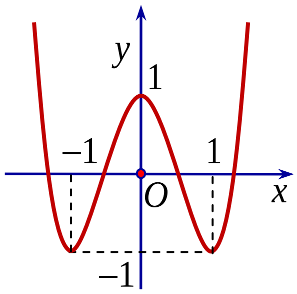
Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ liên tục trên $\mathbb{R}$; đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(2;-2)$ và $(0;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2)=-2 \\ f'(2)=0 \\ f(0)=2 \\ f'(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a+4b+2c+d=-2 \\ 12a+4b+c=0 \\ d=2 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow S=0.$$

Câu 3. Biết rằng hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong hình vẽ bên.



Tính giá trị $f(3a+2b+c)$.

A. $f(3a+2b+c)=-125$. **B.** $f(3a+2b+c)=-144$.

C. $f(3a+2b+c)=-113$. **D.** $f(3a+2b+c)=1$.

Lời giải

Chọn A.

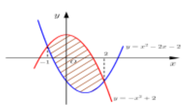
Ta có $f'(x)=4ax^3+2bx$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(0;1),(1;-1)$ và có điểm cực trị $(1;-1)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a=-2 \\ b=4 \end{cases}$.

Ta có hàm số $f(x)=-2x^4+4x^2+1$.

Khi đó $f(3a+2b+c)=f(3)=-125$.

Câu 29: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình dưới đây bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)dx$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)dx$ **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)dx$

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo bằng

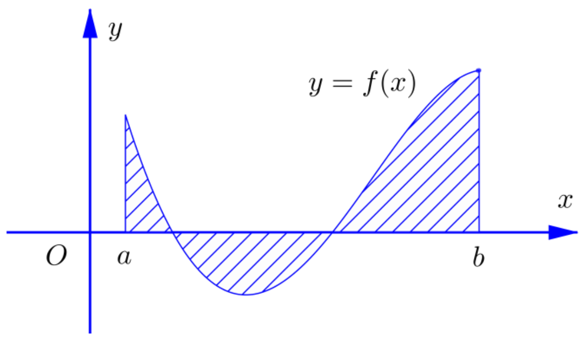
$$S=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2\right)-\left(x^2-2x-2\right)\right]dx=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)dx$$

Phát triển câu 29.

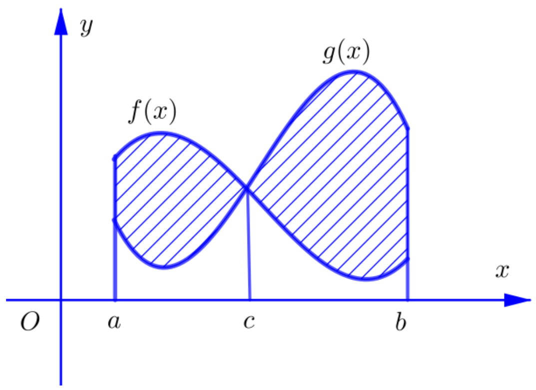
Nhận xét: Câu hỏi ở mức độ vận dụng

Phương pháp:

1) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_{a}^{b}f(x)dx$



2) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_{a}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|dx$



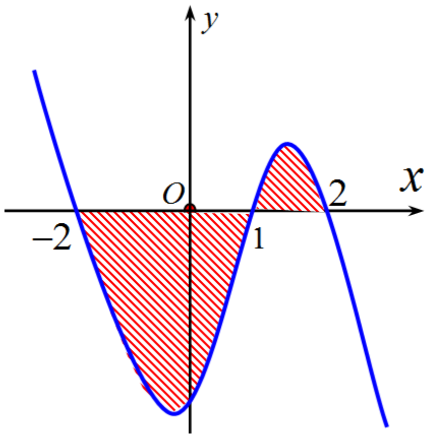
- Trên $\left[a;b\right]$ hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_{a}^{b}\left|f(x)\right|dx=\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$
- Nắm vững cách tính tích phân của hàm số chứa giá trị tuyệt đối
- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$,

$x=h(y)$ và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ được xác định: $S=\int_{c}^{d}\left|g(y)-h(y)\right|dy$

3) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $\left(C_1\right):f_1\left(x\right),\left(C_2\right):f_2\left(x\right)$ là:

$S=\int_{x_1}^{x_n}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx$. Trong đó: x_1,x_n tương ứng là nghiệm nhỏ và lớn nhất của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

Câu tương tự Cho đồ thị $y=f(x)$ như hình vẽ sau đây. Diện tích S của hình phẳng (phần gạch chéo) được xác định bởi.



A. $S=\int_{-2}^{2}f(x)dx$.

B. $S=\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$.

C. $S=\int_{1}^{-2}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$.

D. $S=\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{2}f(x)dx$.

Lời giải

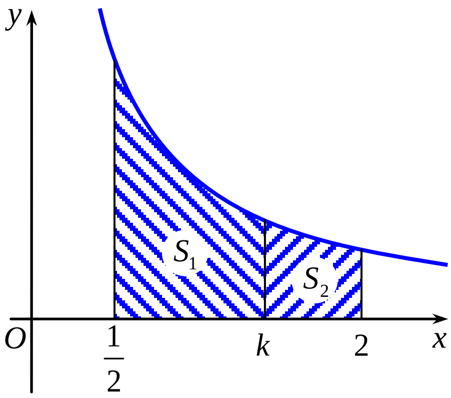
Chọn C

Diện tích cần tích là: $S=\int_{-2}^{2}|f(x)|dx=\int_{-2}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{2}|f(x)|dx$

$$=-\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx=\int_{1}^{-2}f(x)dx+\int_{1}^{2}f(x)dx$$

Phát triển CÂU 29

Câu 1. ***(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)*** Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{1}{x}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$ và trục hoành. Đường thẳng $x=k\left(\frac{1}{2}<k<2\right)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ dưới đây.



Tìm tất cả giá trị thực của k để $S_1=3S_2$.

A. $k=\sqrt{2}$.

B. $k=1$.

C. $k=\frac{7}{5}$.

D. $k=\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $S_1 = 3S_2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{k}\left|\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x = 3\int_{k}^{2}\left|\frac{1}{x}\right|\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 3\int_{k}^{2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \ln|x|\Big|_{\frac{1}{2}}^{k} = 3\ln|x|\Big|_{k}^{2}$

$\Leftrightarrow \ln k - \ln\frac{1}{2} = 3(\ln 2 - \ln k) \Leftrightarrow \ln 2k = 3\ln\frac{2}{k} \Leftrightarrow 2k = \left(\frac{2}{k}\right)^3 \Leftrightarrow 2k = \frac{8}{k^3}$

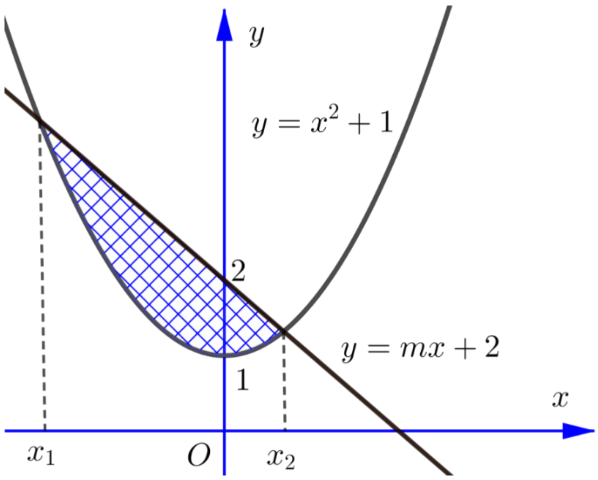
$\Leftrightarrow k^4 = 4 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{2}$ mà $\frac{1}{2} < k < 2$ nên $k = \sqrt{2}$.

Câu 2. ***(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)*** Với mọi m thì đường thẳng $d: y = mx + 2$ luôn cắt parabol $(P): y = x^2 + 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2. Tìm m để diện tích của hình phẳng giới hạn bởi d và (P) là nhỏ nhất.

A. $m = 0$. **B.** $m = \frac{4}{3}$. **C.** $m = \frac{3}{4}$. **D.** $m = 4$.

Lời giải

Chọn A



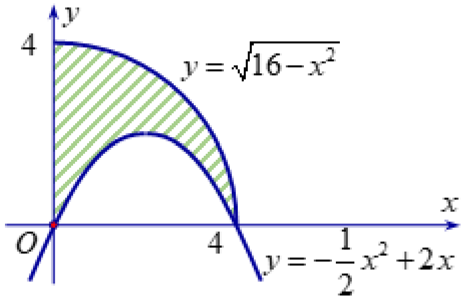
Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $-x^2 + mx + 1 = 0$. Khi đó

$$S = \int_{x_1}^{x_2}\left(mx + 2 - x^2 - 1\right)dx = \left(\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} = (x_2 - x_1)\left[-\frac{1}{3}\left((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2\right) + \frac{m}{2}(x_1 + x_2) + 1\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\sqrt{m^2 + 4}\left[2\left(m^2 + 1\right) - 3m^2 - 6\right] = \frac{1}{6}\sqrt{m^2 + 4}\left(m^2 + 4\right) \geq \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$$

$\Rightarrow S_{\min} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 3. ***(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)*** Cho hình phẳng D giới hạn bởi parabol $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$, với $(0 \leq x \leq 4)$, trục tung (phần tô đậm trong hình vẽ). Tính diện tích của hình D.



A. $8\pi-\dfrac{16}{3}$. **B.** $2\pi-\dfrac{16}{3}$. **C.** $4\pi+\dfrac{16}{3}$. **D.** $4\pi-\dfrac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Diện tích hình phẳng D là $S=\int\limits_0^4\left(\sqrt{16-x^2}-\left(-\dfrac{1}{2}x^2+2x\right)\right)dx$.

Xét tích phân $I=\int\limits_0^4\sqrt{16-x^2}dx$

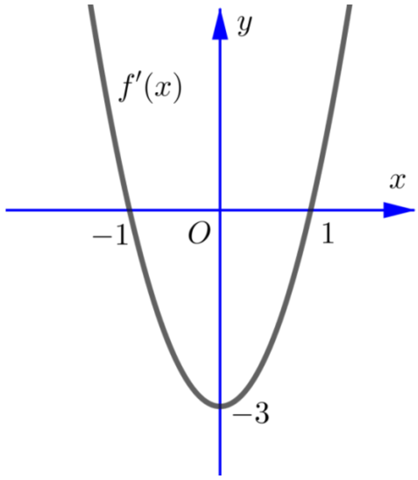
Đặt $x=4\sin t$, $t\in\left[\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó $I=\int dt\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2 t}.4\cos t dt=16\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=16\left(\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2}\sin 2t\right)=4\pi$.

$J=\int\limits_0^4\left(-\dfrac{1}{2}x^2+2x\right)dx=\left(-\dfrac{1}{6}x^3+x^2\right)\Big|_0^4=\dfrac{16}{3}$.

Vậy $S=4\pi-\dfrac{16}{3}$.

Câu 4. *(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)* Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.



Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành.

A. $S=9$. **B.** $S=\dfrac{27}{4}$. **C.** $S=\dfrac{21}{4}$. **D.** $S=\dfrac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $f'(x)=3x^2-3$.

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int(3x^2-3)\mathrm{d}x=x^3-3x+C$.

Do (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ x_0 âm nên

$$f'(x_0)=0\Leftrightarrow 3x_0^2-3=0\Leftrightarrow x_0=-1.$$

Vậy $f(-1)=4$ nên có ngay $C=2$. Vậy phương trình đường cong (C) là $y=x^3-3x+2$.

Xét phương trình $x^3-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng cần tìm là $\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\mathrm{d}x=\dfrac{27}{4}$.

Câu 30: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hai số phức $z_1=-3+i$ và $z_2=1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1+\overline{z_2}=-3+i+1+i=-2+2i$

Vậy phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng 2

Phát triển câu 30

Nhân xét : Câu hỏi ở mức độ thông hiểu :

Phương pháp

Số phức $z=a+bi,\ (a;b\in\mathbb{R})$, a là phần thực, b là phần ảo.

Số phức liên hợp $\overline{z}=a-bi,\ (a;b\in\mathbb{R})$.

Câu tương tự ***(Phát triển câu 30- Đề thi tham khảo)*** Cho hai số phức $z_1=5-i$ và $z_2=7+2i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. 3 **B.** $3i$. **C.** -3. **D.** $-3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1+\overline{z_2}=5-i+7-2i=12-3i$

Vậy phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng -3.

Câu phát triển

Câu 2: ***(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)*** Cho hai số phức $z_1=2-4i$ và $z_2=1-3i$. Phần ảo của số phức $z_1+i\overline{z_2}$ bằng

A. 5. **B.** $-5i$. **C.** -3. **D.** $3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1 + i\overline{z_2} = 2 - 4i + i(1+3i) = -1 - 3i$

Vậy phần ảo của số phức $z_1 + i\overline{z_2}$ bằng -3.

Câu 3: ***(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)*** Cho hai số phức $z_1 = 5 + 6i$ và $z_2 = 1 - 8i$. Phần ảo của số phức liên hợp $w = z_1 - i\overline{z_2}$ bằng

A. $-5i$. **B.** -5. **C.** $5i$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $w = z_1 - i\overline{z_2} = (5+6i) - i(1-8i) = -3 + 5i \Rightarrow \overline{w} = -3 - 5i$

Vậy phần ảo của số phức $w = z_1 - i\overline{z_2}$ bằng -5.

Câu 4: ***(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)*** Cho hai số phức $z_1 = 2019 + 2020i$ và $z_2 = 2002i$. Phần ảo của số phức $iz_1 - \overline{z_2}$ bằng

A. 2020. **B.** -4021. **C.** -2020. **D.** 4021.

Lời giải

Chọn D

Ta có $iz_1 - \overline{z_2} = i(2019 + 2020i) - (-2002i) = -2020 + 4021i$

Vậy phần ảo của số phức $iz_1 - \overline{z_2}$ bằng 4021.

Câu 5: ***(Phát triển câu 29- Đề thi tham khảo)*** Nếu số phức $z \neq 1$ thỏa mãn $|z| = 1$ thì phần thực của $\frac{1}{1-z}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** 2.. **D.** -2..

i giải

Chọn A

Cách 1:

Gọi $z = a + bi,\ (a, b \in \mathbb{R}),\ z \neq 1$. Vì $|z| = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Ta có $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a) - bi} = \frac{(1-a) + bi}{(1-a)^2 + b^2} = \frac{1-a}{2-2a} + \frac{b}{2-2a}i = \frac{1}{2} + \frac{b}{2-2a}i$.

Vậy phần thực của số phức $\frac{1}{1-z}$ là $\frac{1}{2}$.

Cách 2:

Ta có: $z.\overline{z} = |z|^2 = 1$.

Khi đó: $2\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{1-z} + \overline{\left(\frac{1}{1-z}\right)} = \frac{1}{1-z} + \frac{\overline{1}}{\overline{1-z}} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\overline{z}}$

$=\dfrac{2-z-\overline{z}}{1-z-\overline{z}+z.\overline{z}}=\dfrac{2-z-\overline{z}}{1-z-\overline{z}+1}=1.$

Suy ra: $\text{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)=\dfrac{1}{2}$

Câu 31-32-33: Thầy Nguyễn Xuân Sơn phát triển thầy Thân Đức Minh Phản Biện

Câu 31: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3)$ và đi qua điểm $M(4;0;0)$. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z+3)^2=25.$ **B.** $x^2+y^2+(z+3)^2=5.$

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=25.$ **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=5.$

Lời giải

Chọn A

Bán kính mặt cầu $r=IM=\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}=5.$

Phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+(z+3)^2=25.$

Câu 1. **(Tương tự câu 31)** Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=i(3+2i)$ là điểm nào dưới đây?

A. $M(3;2)$ **B.** $N(3;-2)$. **C.** $P(-2;3)$. **D.** $Q(2;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z=i(3+2i)=3i+2i^2=3i-2=-2+3i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức z trong mặt phẳng phức là điểm có tọa độ $(-2;3)$.

Phát triển câu 31, tìm điểm biểu diễn cho số phức w biết só phức w tính thông qua z và z thỏa mãn một biểu thức cho trước

Câu 2. **(Phát triển câu 31)** Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z=3+4i$. Tìm phần thực của số phức $w=2-iz+3\overline{z}$.

A. 9. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $z=\dfrac{3+4i}{2+i}=2+i$. Suy ra $w=2-iz+3\overline{z}=2-i(2+i)+3(2-i)=9-5i$.

Vậy phần thực của số phức w là 9.

□Phát triển câu 31, kết hợp việc tìm tọa độ điểm biểu diễn cho số phức với kiến thức tính diện tích tam giác khi biết tọa độ 3 đỉnh ở lớp 10

Câu 3. **(Phát triển câu 31)** Trong mặt phẳng tọa độ, cho A, B, C là ba điểm biểu diễn lần lượt cho ba số phức $z_1=5-i$, $z_2=(4+i)^2$ và $z_3=(2i)^3$. Diện tích của tam giác ABC là kết quả nào dưới đây?

A. 25. **B.** $\dfrac{25}{2}$. **C.** $\dfrac{185}{2}$. **D.** 185.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1 = 5 - i \Rightarrow A(5;-1)$

$z_2 = (4+i)^2 = 16 + 8i + i^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i \Rightarrow B(15;8)$

$z_3 = (2i)^3 = -8i \Rightarrow C(0;-8)$.

Diện tích tam giác ABC khi biết tọa độ 3 đỉnh là

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|5(8+8) + 15(-8+1) + 0(-1-8)\right| = \frac{25}{2}$ (đvdt)

Phát triển câu 31, ý tưởng điểm biểu diễn gắn với hình học phẳng. Sử dụng vectơ bằng nhau và tích vô hướng để tìm điều kiện cho một tứ giác là hình chữ nhật

Câu 4. **(Phát triển câu 31)** Cho số phức $z = a + bi$ (với $a, b \in \mathbb{R}$) và số phức liên hợp của nó là $\overline{z}$ có điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức là A và D. Số phức $(2+5i)z$ và liên hợp của nó có điểm biểu diễn là B và C. Biết rằng tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và $|z + 3 - i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tích $a.b$.

A. $-\frac{80}{169}$. **B.** $\frac{80}{169}$. **C.** $-\frac{16}{169}$. **D.** $\frac{16}{169}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z = a + bi \Rightarrow A(a;b)$; $\overline{z} = a - bi \Rightarrow D(a;-b)$.

$(2+5i)z = (2+5i)(a+bi) = (2a-5b) + (5a+2b)i \Rightarrow B(2a-5b;5a+2b)$.

Điểm biểu diễn cho số phức liên hợp của số phức $(2+5i)z$ là $C(2a-5b;-5a-2b)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (a-5b;5a+b)$, $\overrightarrow{AD} = (0;-2b)$, $\overrightarrow{DC} = (a-5b;-5a-b)$.

Để tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì $\begin{cases} a, b \neq 0 \\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b \neq 0 \\ a - 5b = a - 5b \\ 5a + b = -5a - 5b \\ -2b(5a+b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b \neq 0 \\ b = -5a \end{cases}$

Khi đó số phức $z = a + bi = a - 5ai$.

Xét

$|z+3-i| = |a - 5ai + 3 - i| = \sqrt{(a+3)^2 + (5a+1)^2} = \sqrt{26a^2 + 16a + 10} = \sqrt{26\left(a + \frac{4}{13}\right)^2 + \frac{98}{13}} \geq \sqrt{\frac{98}{13}}$

Vậy $|z+3-i|$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\sqrt{\frac{98}{13}}$ đạt được khi $a = -\frac{4}{13}, b = \frac{20}{13}$ (thỏa mãn)

Do đó $z = -\frac{4}{13} + \frac{20}{13}i$, suy ra: $a.b = -\frac{80}{169}$.

Câu 32: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x + 2y + z + 3 = 0$. **B.** $x - 2y - z = 0$.

C. $2x + 2y + z - 3 = 0$. **D.** $x - 2y - z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}=(2;2;1)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $M(1;1;-1)$, nhận $\vec{u}=(2;2;1)$ làm vtpt nên có phương trình

$2(x-1)+2(y-1)+1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-3=0$.

Câu 1. **(Tương tự câu 32)** Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;7;-3)$, $\vec{b}=(2;1;4)$. Tính tích vô hướng $\vec{a}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$ bằng

A. 21. **B.** 63. **C.** 53. **D.** 52.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a}-\vec{b}=(0;6;-7)$

Vậy $\vec{a}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=2.0+7.6-3(-7)=63$.

Phát triển câu 32, sử dụng ứng dụng của tích vô hướng vào việc tìm tham số để một tam giác trong không gian là tam giác vuông

Câu 2. **(Phát triển câu 32)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;1)$, $B(-1;4;3)$ và $C(m;2m-3;1)$. Tìm m để tam giác ABC vuông tại B.

A. -7. **B.** 4. **C.** 7. **D.** -4.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{BA}=(3;-4;-2)$, $\overrightarrow{BC}=(m+1;2m-7;-2)$

Để tam giác ABC vuông tại B thì

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow 3(m+1)-4(2m-7)+4=0 \Leftrightarrow -5m+35=0 \Leftrightarrow m=7$.

Phát triển câu 32, sử dụng ứng dụng của tích vô hướng vào việc quỹ tích điểm M thỏa mãn đẳng thức cho trước, bài toán có sử dụng việc khai thác điểm trung gian

Câu 3. **(Phát triển câu 32)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;0;4)$ và $B(0;-6;0)$, M là một điểm bất kỳ thỏa mãn $3MA^2+2MB^2=\dfrac{561}{280}AB^2$. Khi đó M thuộc mặt cầu có bán kính là giá trị nào dưới đây?

A. 3. **B.** 9. **C.** $\sqrt{56}$. **D.** 56.

Lời giải

Chọn A

Xét điểm $I(x;y)$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases}3(2-x)+2(0-x)=0\\3(0-y)+2(-6-y)=0\\3(4-z)+2(0-z)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{6}{5}\\y=-\dfrac{12}{5}\\z=\dfrac{12}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow I\left(\frac{6}{5};-\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right)$.

Mà $AB^2=2^2+6^2+4^2=56$

Xét $3MA^2+2MB^2=\frac{561}{5}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=\frac{561}{5}$

$3\left(MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+IA^2\right)+2\left(MI^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+IB^2\right)=\frac{561}{5}$

$\Leftrightarrow 5.MI^2+2.\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{3.\overrightarrow{IA}+2.\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right)+3.IA^2+2.IB^2=\frac{561}{5}\Leftrightarrow 5.MI^2+\frac{672}{25}+\frac{1008}{25}=\frac{561}{5}\Leftrightarrow MI^2=9$

Vậy M luôn chạy trên mặt cầu tâ $I\left(\frac{6}{5};-\frac{12}{5};\frac{12}{5}\right)$ và có bán kính là 3.

Phát triển câu 32, sử dụng kiến thức về độ dài vectơ, điểm trên tia để lấy tọa độ không âm, áp dụng biến dạng của bất đẳng thức BunhiaCopxki vào đánh giá GTNN.

Câu 4. **(Phát triển câu 32)** Trong không gian $Oxyz$, trên các tia Ox, Oy, Oz lấy ba điểm không trùng O là A, B, C. Biết $OA+OB+OC=1$ và biểu thức $\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$.

A. 1. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** 0. **D.** $\frac{1}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Vì A, B, C thuộc các tia Ox, Oy, Oz nên gọi tọa độ các điểm là $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, suy ra $\overrightarrow{OA}=(a;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(0;b;0)$, $\overrightarrow{OC}=(0;0;c)$, $a,b,c>0$

Theo giả thiết $OA+OB+OC=1\Leftrightarrow a+b+c=1$.

Xét $\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}\geq\frac{(1+2+3)^2}{OA+OB+OC}=\frac{36}{a+b+c}=36$.

Biểu thức $\frac{1}{OA}+\frac{4}{OB}+\frac{9}{OC}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 36 xảy ra khi $\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\ a+b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{6}\\ b=\frac{1}{3}\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}$

Suy ra $\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{6};0;0\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(0;\frac{1}{3};0\right)$, $\overrightarrow{OC}=\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(0;\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};0\right)$.

Vậy $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right).\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{6}.0+\frac{1}{3}.\frac{1}{3}+0.\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$.

Câu 33: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2;3;-1)$ và $N(4;5;3)$?

A. $\vec{u}=(1;1;1)$. **B.** $\vec{u}=(1;1;2)$. **C.** $\vec{u}=(3;4;1)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vectơ $\overrightarrow{MN}=\left(2;2;4\right)$ là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm MN

mà $\overrightarrow{MN}=2\left(1;1;2\right)=2\vec{u};\vec{u}=\left(1;1;2\right)$ nên chọn B

Câu 1. (Tương tự câu 33) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(8;0;0\right)$ và đi qua điểm $M\left(0;-6;0\right)$. Phương trình của $\left(S\right)$ là

A. $\left(x-8\right)^2+y^2+z^2=100$. **B.** $\left(x-8\right)^2+y^2+z^2=10$.

C. $\left(x+8\right)^2+y^2+z^2=100$. **D.** $\left(x+8\right)^2+y^2+z^2=10$.

Lời giải

Chọn A

Vì $M\in\left(S\right)$ nên bán kính mặt cầu là $R=IM=\sqrt{\left(8-0\right)^2+\left(0+6\right)^2+\left(0-0\right)^2}=\sqrt{100}=10$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $\left(x-8\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z-0\right)^2=10^2\Leftrightarrow\left(x-8\right)^2+y^2+z^2=100$.

Phát triển câu 33, sử dụng công thức tính khoảng cách để tìm bán kính mặt cầu trong trường hợp tiếp xúc.

Câu 2. (Phát triển câu 33) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;0;-4\right)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $\left(Oxy\right)$. Phương trình mặt cầu $\left(S\right)$ là

A. $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+4\right)^2=4$. **B.** $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+4\right)^2=16$.

C. $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+4\right)^2=1$. **D.** $\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+4\right)^2=2$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ là $z=0$. Vậy bán kính mặt cầu $\left(S\right)$ là $R=d\left(I,\left(Oxy\right)\right)=\frac{\left|-4\right|}{1}=4$

Phương trình mặt cầu cần tìm là $\left(x-1\right)^2+\left(y-0\right)^2+\left(z+4\right)^2=4^2\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+y^2+\left(z+4\right)^2=16$.

Phát triển câu 33, mặt cầu đi qua 2 điểm thì tâm mặt cầu phải thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng tạo bởi hai điểm đó.

Câu 3. (Phát triển câu 33) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm I thuộc đường thẳng $d:\frac{x-4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-1}$ và $\left(S\right)$ đi qua hai điểm $A\left(-3;0;5\right)$ và $B\left(1;4;-1\right)$. Khi đó bán kính mặt cầu $\left(S\right)$ là giá trị nào dưới đây?

A. $\sqrt{290}$. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{299}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M là trung điểm của AB, tọa độ điểm $M\left(-1;2;2\right)$.

Gọi $\left(\alpha\right)$ là mặt phẳng trung trực của AB, khi đó $M\in\left(\alpha\right)$ và một vectơ pháp tuyến của $\left(\alpha\right)$ là $\overrightarrow{MA}=\left(-2;-2;-3\right)$

Phương trình mặt phẳng $(\alpha):-2(x+1)-2(y-2)-3(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+3z-8=0$

Mà $I\in d$ suy ra tọa độ $I(4+2t;t;-3-t)$, $t\in\mathbb{R}$

$I\in(\alpha)$ suy ra $2(4+2t)+2t+3(-3-t)-8=0 \Leftrightarrow t=3 \Rightarrow I(10;3;-6)$

Vậy bán kính mặt cầu là $R=IA=\sqrt{(-3-10)^2+(0-3)^2+(5+6)^2}=\sqrt{299}$.

Phát triển câu 33, mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện thì tâm mặt cầu phải nằm trên đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp một trong các mặt phẳng của tứ diện và vuông góc với mặt phẳng đó. Để thể tích đạt giá trị lớn nhất thì đỉnh còn lại của tứ diện phải thuộc đường thẳng đi qua tâm mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng đối diện. Điểm còn lại tìm được tính khoảng cách đến mặt phẳng đã cho mà có giá trị lớn hơn thì đó là đỉnh còn lại của tứ diện

Câu 4. (Phát triển cầu 33) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S)\ x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ và tam giác BCD với tọa độ các đỉnh là $B(3;1;-2)$, $C(0;-2;-2)$, $D(0;1;1)$. Tìm tọa độ điểm A thuộc mặt cầu (S) sao cho thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $A(-\sqrt{3};1-\sqrt{3};-2-\sqrt{3})$. **B.** $A(\sqrt{3};1+\sqrt{3};-2+\sqrt{3})$. **C.** $A(0;2;-2-2\sqrt{2})$. **D.** $A(0;2;-2+2\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy ba điểm B,C,D đều thuộc mặt cầu (S). Để $A\in(S)$ mà thể tích khối tứ diện $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất thì A là một trong 2 giao điểm của đường thẳng Δ với mặt cầu; trong đó Δ là đường thẳng đi qua tâm I của mặt cầu và vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-3;-3;0)$, $\overrightarrow{BD}=(-3;0;3)$. Tọa độ tâm mặt cầu (S) là $I(0;1;-2)$

Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (BCD) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(-9;-9-9)$

Vì Δ vuông góc với (α) nên 1 vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(1;1;1)$

Phương trình đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=t\\ y=1+t\\ z=-2+t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Vì $A\in\Delta\Rightarrow A(t;1+t;-2+t)$, mà $A\in(S)\Rightarrow t^2+(1+t-1)^2+(-2+t+2)^2=9\Leftrightarrow t^2=3$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{3}\Rightarrow A_1(\sqrt{3};1+\sqrt{3};-2+\sqrt{3})\\ t=-\sqrt{3}\Rightarrow A_2(-\sqrt{3};1-\sqrt{3};-2-\sqrt{3})\end{array}\right.$$

Phương trình mặt phẳng $(BCD):1(x-0)+1(y-1)+1(z-1)=0\Leftrightarrow x+y+z-2=0$

□Xét A_1: $d(A_1,(BCD))=\dfrac{|\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3}}=3-\sqrt{3}$

□Xét A_2: $d(A_2,(BCD))=\dfrac{|-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-2-\sqrt{3}-2|}{\sqrt{3}}=3+\sqrt{3}$

Dễ thấy $d(A_2,(BCD))>d(A_1,(BCD))\Rightarrow A(-\sqrt{3};1-\sqrt{3};-2-\sqrt{3})$ là điểm cần tìm.

Câu 34-35: Thầy Bùi Sỹ Khanh phát triển thầy Bình Hoàng Phản Biện

Câu 34: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1;1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ có phương trình là

A. $2x+2y+z+3=0.$ **B.** $x-2y-z=0.$

C. $2x+2y+z-3=0.$ **D.** $x-2y-z-2=0.$

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}=(2;2;1)$.

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $M(1;1;-1)$, nhận $\vec{u}=(2;2;1)$ làm vtpt nên có phương trình

$2(x-1)+2(y-1)+1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y+z-3=0.$

Phân tích : Một câu viết phương trình mặt phẳng khi cho véc tơ pháp tuyến và điểm đi qua.

Câu 1 : ***(Phát triển câu 34- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-3);B(2;-2;1);C(-1;3;4)$ mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với BC có phương trình là

A. $3x-5y-3z-2=0.$ **B.** $x-4y+4z-3=0.$

C. $3x-5y-3z+2=0.$ **D.** $2x-y-7z+3=0.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-3;5;3)$

Mặt phẳng cần tìm đi qua điểm $A(1;2;-3)$, nhận $\vec{n}=(3;-5;-3)$ làm vtpt nên có phương trình

$3(x-1)-5(y-2)-3(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-5y-3z-2=0.$

Câu 2 : ***(Phát triển câu 34- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1;2;1);B(-1;3;1);C(3;4;3)$ có phương trình là

A. $x+2y-3z+2=0.$ **B.** $x+2y-3z-2=0.$

C. $x-2y-3z+6=0.$ **D.** $x-2y-3z+10=0.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;1;0);\overrightarrow{BC}(4;1;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right]=(2;4;-6)=2(1;2;-3)$

Mặt phẳng cần tìm đi qua ba điểm $A(1;2;1)$ nhận $\vec{n}=(1;2;-3)$ làm vtpt nên có phương trình

$(x-1)+2(y-2)-3(z-1)=0 \Leftrightarrow x+2y-3z-2=0.$

Câu 3 : ***(Phát triển câu 34- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}$ và

song song với $\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{-3}$ có phương trình là

A. $4x-7y+5z+9=0.$ **B.** $4x+7y+5z-9=0.$

C. $x+2y+2z-3=0.$ **D.** $4x-7y+5z-9=0.$

Lời giải

Chọn D

$d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{2}\Rightarrow \overrightarrow{u_1}(1;2;2)$ là véctơ chỉ phương của d

$\Delta:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+3}{-3}\Rightarrow \overrightarrow{u_2}(2;-1;-3)$ là véctơ chỉ phương của Δ

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và song song với Δ nên nhận $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ là VTCP

$\Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=(-4;7;-5)$ là vtptvà qua điểm $A(1;0;1)$

$\Rightarrow (P):-4(x-1)+7(y-0)-5(z-1)=0\Leftrightarrow 4x-7y+5z-9=0$

Câu 4 : ***(Phát triển câu 34- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(2;-3;3)$ và chứa $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ có phương trình là

A. $4x-y-z+10=0.$ **B.** $5x+y-z-10=0.$

C. $5x+y+z+10=0.$ **D.** $5x-y-z-10=0.$

Lời giải

Chọn D

$d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}\Rightarrow \vec{u}(1;2;3)$ là véctơ chỉ phương của d

$B(2;1;-1)\in d\Rightarrow \overrightarrow{AB}(0;4;-4)$

Mặt phẳng (P) đi qua $A(2;-3;3)$ và nhận $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ là VTCP

$\Rightarrow \vec{n}=\left[\vec{u};\overrightarrow{AB}\right]=(-20;4;4)=-4(5;-1;-1)$ là VTPT

và qua điểm $A(2;-3;3)\Rightarrow (P):5(x-2)-(y+3)-(z-3)=0\Leftrightarrow 5x-y-z-10=0$

Câu 35: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm $M(2;3;-1)$ và $N(4;5;3)$?

A. $\vec{u}=(1;1;1)$. **B.** $\vec{u}=(1;1;2)$. **C.** $\vec{u}=(3;4;1)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có vectơ $\overrightarrow{MN}=(2;2;4)$ là một vec tơ chỉ phương của đường thẳng đi qua hai điểm MN

mà $\overrightarrow{MN}=2(1;1;2)=2\vec{u};\vec{u}=(1;1;2)$ nên chọn B

Phân tích : Một câu về xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng trong không gian.

Câu 1 : ***(Phát triển câu 35- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;3);B(2;3;1);C(-2;-1;4)$ một vectơ chỉ phương của đường thẳng d qua A và song song với BC là vectơ nào sau đây

A. $\vec{u}=(4;4;-3)$ **B.** $\vec{u}=(4;4;3)$ **C.** $\vec{u}=(1;1;-1)$ **D.** $\vec{u}=(2;2;-1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-4;-4;3)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d

Một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}=-\overrightarrow{BC}=(4;4;-3)$

Câu 2 : ***(Phát triển câu 35- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;1);B(-1;3;1);C(3;4;3)$ đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng đi qua ba điểm $A;B;C$ có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-3}$

B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3}$

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-3}$

D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{-3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;1;0);\overrightarrow{BC}(4;1;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right]=(2;4;-6)=2(1;2;-3)$

Đường thẳng d đi qua $A(1;2;1)$ nhận $\vec{u}=(1;2;-3)$ làm VTCP

nên có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-3}$

Câu 3 : ***(Phát triển câu 35- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, một vectơ chỉ phương của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x+2y-3z+2=0$ và $(Q):2x+y+3z-4=0$ là

A. $\vec{u}(3;3;-1)$. **B.** $\vec{u}(3;-3;1)$. **C.** $\vec{u}(3;3;1)$. **D.** $\vec{u}(3;-3;-1)$.

Lời giải

Chọn D

$(P):x+2y-3z+2=0\Rightarrow\overrightarrow{n_1}(1;2;-3)$ là véctơ pháp tuyến của (P)

$(Q):2x+y+3z-4=0\Rightarrow\overrightarrow{n_2}(2;1;3)$ là véctơ pháp tuyến của (Q)

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên nhận $\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(9;-9;-3)=3(3;-3;-1)$ là một vectơ chỉ phương

Vậy $\vec{u}(3;-3;-1)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Câu 4 : ***(Phát triển câu 35- Đề thi tham khảo)*** Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$ và vuông góc với $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-2}$ có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}=(1;0;1)$.

B. $\vec{u}=(0;-1;1)$.

C. $\vec{u}=(1;-1;0)$.

D. $\vec{u}=(0;1;1)$.

Lời giải

Chọn D

$(P): x+y-z-2=0 \Rightarrow \vec{n}(1;1;-1)$ là véctơ pháp tuyến của (P)

$\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{-2} \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta}(1;2;-2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ

Vectơ $\vec{u}=\left[\vec{n};\overrightarrow{u_\Delta}\right]=(0;1;1)$ là là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

Câu 36: Thầy DucThanh Pham phát triển thầy Duy Nguyen Phản Biện

Câu 36: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Chọn ngẫu nghiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là chẵn bằng

A. $\dfrac{41}{81}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{16}{81}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $n(\Omega)=9.9.8=648$.

Gọi $N=\overline{abc}$ (với $a,b,c \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; a,b,c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và $a+b+c$ là số chẵn)

+ Trường hợp 1: Ba chữ số a,b,c đều chẵn, có: $4.4.3=48$ (số).

+ Trường hợp 2: Ba chữ số a,b,c trong đó có hai chữ số lẻ và một chữ số chẵn:

Chọn 1 chữ số chẵn có C_5^1 cách,

chọn 2 chữ số lẻ có C_5^2 cách,

hoán vị 3 chữ số được chọn có $3!$ cách.

Loại đi A_5^2 cách có chữ số 0 đứng đầu.

Vậy trường hợp này có: $C_5^1.C_5^2.3!-A_5^2=280$ số.

Vậy có tất cả $48+280=328$ (số).

Suy ra xác suất cần tìm: $P=\dfrac{328}{648}=\dfrac{41}{81}$.

PHÁT TRIỂN THÊM CÂU 36:

Câu 36.1. ***(Phát triển câu 36- Đề thi tham khảo)*** Chọn ngẫu nghiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số hàng trăm và hàng đơn vị bằng hai lần chữ số hàng chục.

A. $\dfrac{5}{81}$. **B.** $\dfrac{1}{18}$. **C.** $\dfrac{5}{162}$. **D.** $\dfrac{2}{81}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $n(\Omega)=9.9.8=648$.

Gọi $N=\overline{abc}$ (với $a,b,c \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; a,b,c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và $a+c=2b$).

Vì $a+c=2b$ nên $a+c$ là số chẵn khác 0, ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $\{a,c\} \in \{1;3;5;7;9\}$, mỗi cách chọn a, c có duy nhất 1 cách chọn b nên có: $A_5^2=20$ (số).

+ Trường hợp 2: $\{a,c\}\in\{0;2;4;6;8\}$, $a\neq 0$, mỗi cách chọn a, c có duy nhất 1 cách chọn b nên có: $A_5^2-4=16$ (số).

Vậy có tất cả $20+16=36$ (số).

Suy ra xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{36}{648}=\dfrac{1}{18}$

Câu 36.2. ***(Phát triển câu 36- Đề thi tham khảo)*** Chọn ngẫu nghiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có chữ số hàng trăm, chữ số hàng đơn vị và tổng các chữ số theo thứ tự tạo thành 1 cấp số cộng có công sai dương.

A. $\dfrac{5}{162}$. **B.** $\dfrac{4}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{16}{81}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $n(\Omega)=9.9.8=648$.

Gọi $N=\overline{abc}$ (với $a,b,c\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; a,b,c đôi một khác nhau, $a\neq 0$ và a, c, $a+b+c$ theo thứ tự tạo thành 1 cấp số cộng có công sai d dương).

Ta có: $\begin{cases} c=a+d\\ a+b+c=a+2d\\ 1\le a\le 9\\ 0\le b,c\le 9\\ d>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=a+d\\ b=d-a\\ -a\le d\le 9-a\\ a\le d\le 9+a\\ 1\le a\le 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} c=a+d\\ b=d-a\\ a\le d\le 9-a\\ 1\le a\le 4\end{cases}$

Với mỗi $1\le a\le 4$ có $9-a-a+1=10-2a$ cách chọn d.

Suy ra có tất cả: $\sum\limits_{a=1}^{4}(10-2a)=20$ (số)

Vậy xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{20}{648}=\dfrac{5}{162}$

Câu 36.3. ***(Phát triển câu 36- Đề thi tham khảo)*** Chọn ngẫu nghiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tích các chữ số là số dương và chia hết cho 6.

A. $\dfrac{55}{108}$. **B.** $\dfrac{23}{54}$. **C.** $\dfrac{13}{27}$. **D.** $\dfrac{49}{108}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $n(\Omega)=9.9.8=648$.

Gọi $N=\overline{abc}$ (với $a,b,c\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; a,b,c đôi một khác nhau, $a\neq 0$ và abc là số dương và chia hết cho 6).

Ta có: abc là số dương chia hết cho 6 nên $abc>0$, chia hết cho 2 và 3.

abc chia hết cho 2 thì ít nhất một trong các số a,b,c thuộc $\{2;4;6;8\}$.

abc chia hết cho 3 thì ít nhất một trong các số a,b,c thuộc $\{3;6;9\}$.

Do đó ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: N có mặt số 6, có: $3.A_8^2 = 168$ (số).

+ Trường hợp 2: N có mặt số 3 hoặc 9, không có mặt số 6 và có ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{2;4;8\}$, có: $2.\left(C_3^1.C_3^1.3! + C_3^2.3!\right) + C_3^1.3! = 162$ (số).

Vậy có tất cả: $168 + 162 = 330$ (số).

Suy ra xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{330}{648} = \dfrac{55}{108}$.

Câu 36.4. ***(Phát triển câu 36- Đề thi tham khảo)*** Chọn ngẫu nghiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tích các chữ số là số chia hết cho 15.

A. $\dfrac{13}{36}$. **B.** $\dfrac{10}{27}$. **C.** $\dfrac{7}{18}$. **D.** $\dfrac{13}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega) = 9.9.8 = 648$.

Gọi $N = \overline{abc}$ (với $a, b, c \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; a, b, c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và abc là số dương và chia hết cho 15).

Ta có: abc là số chia hết cho 15 nên abc chia hết cho 3 và 5.

abc chia hết cho 5 thì ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{5;0\}$.

abc chia hết cho 3 thì ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{0;3;6;9\}$.

Do đó ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: N có mặt số 0, có: $2.A_9^2 = 144$ (số).

+ Trường hợp 2: N có mặt số 5, không có mặt số 0 và có ít nhất một trong các số a, b, c thuộc $\{3;6;9\}$, có: $C_3^1.C_5^1.3! + C_3^2.3! = 108$ (số).

Vậy có tất cả: $144 + 108 = 252$ (số).

Suy ra xác suất cần tìm là: $P = \dfrac{252}{648} = \dfrac{7}{18}$.

Câu 36.5. ***(Phát triển câu 36- Đề thi tham khảo)*** Chọn ngẫu nghiên một số từ tập các số tự nhiên có ba chữ số đôi một khác nhau. Xác suất để số được chọn có tổng các chữ số là số chia hết cho 3.

A. $\dfrac{1}{36}$. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{19}{54}$. **D.** $\dfrac{11}{108}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $n(\Omega) = 9.9.8 = 648$.

Gọi $N = \overline{abc}$ (với $a, b, c \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; a, b, c đôi một khác nhau, $a \neq 0$ và $a + b + c$ là số chia hết cho 3).

Gọi $A = \{0;3;6;9\}$, $B = \{1;4;7\}$, $C = \{2;5;8\}$.

Để $a + b + c$ chia hết cho 3 ta có các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: a, b, c thuộc A hoặc B hoặc C, có: $3.A_3^2 + 3! = 30$ (số).

+ Trường hợp 2: 3 số a, b, c thuộc 3 tập khác nhau A, B, C

Có: $2.C_3^1.C_3^1.2!+C_3^1.C_3^1.C_3^1.3!=198$ (số).

Vậy có tất cả: $30+198=228$ (số).

Suy ra xác suất cần tìm là: $P=\dfrac{228}{648}=\dfrac{19}{54}$.

Câu 37: Thầy Dinh An phát triển thầy Nguyễn Ngọc Hoá Phản Biện

Câu 37: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x\neq m$.

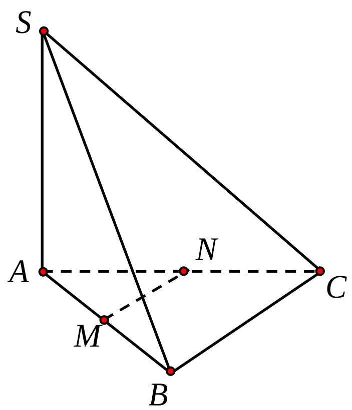
Ta có $y'=\dfrac{-m^2+4}{\left(x-m\right)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$ thì

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0\\ m\notin\left(0;+\infty\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\ m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq 0.$$

Do m nguyên nên $m=-1;m=0$. Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

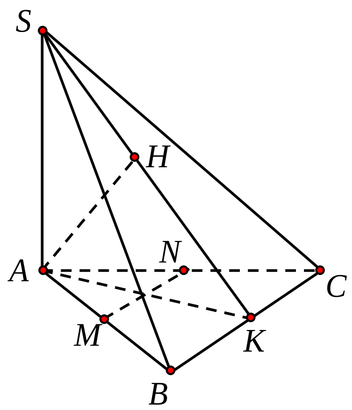
Câu 37-1. [Tương tự câu 37-MH-2020] Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$ (minh họa như hình bên). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN bằng



A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{57}a}{19}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{57}}{19}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $MN//BC \Rightarrow MN//(SBC)$

Do đó $d(MN,SB) = d(MN,(SBC)) = d(M,(SBC)) = \frac{1}{2}d(A,(SBC))$ (vì $MB = \frac{1}{2}AB$)

Kẻ $AK \perp BC$, $AH \perp SK$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow AH \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$.

Xét tam giác SAK vuông tại A, có đường cao AH, ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{19}{12a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

Vậy $d(DM,SB) = \frac{1}{2}d(A,(SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{57}}{19}$.

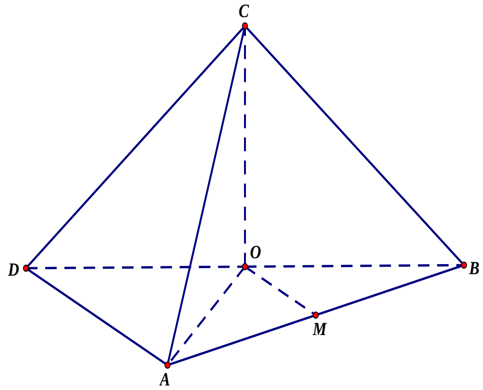
Câu 37-2. **[Phát triển câu 37-MH-2020 theo hướng thay đổi đa giác đáy]** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc, $OA = OB = a$, $OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của AB. Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AC bằng

A. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Gọi D đối xứng với B qua O.

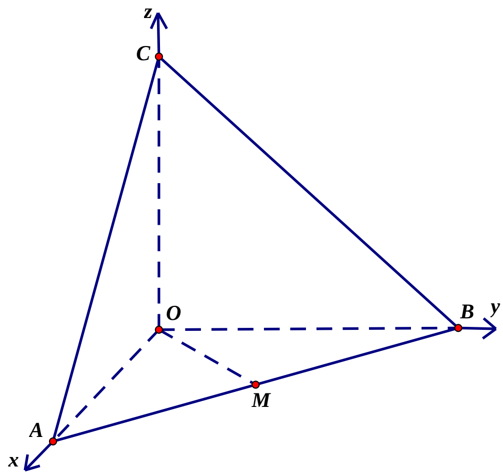


Ta có: $OM//AD \Rightarrow OM//(CAD) \Rightarrow d(OM,AC) = d(OM,(ACD)) = d(O,(ACD))$.

Vì OA, OC, OD đôi một vuông góc nên ta có $\dfrac{1}{\left[d(O,(ACD))\right]^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OC^2} + \dfrac{1}{OD^2} = \dfrac{9}{4a^2}$

$\Rightarrow d(O,(ACD)) = \dfrac{2a}{3}$. Vậy $d(OM,AC) = \dfrac{2a}{3}$.

Cách 2: Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O(0;0;0)$; $A(a;0;0)$; $B(0;a;0)$; $C(0;0;2a)$.



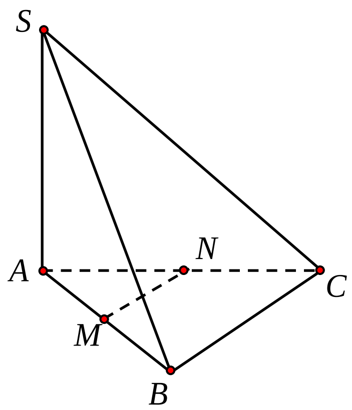
M là trung điểm của $AB \Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.

Đường thẳng OM qua O và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{OM} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.

Đường thẳng AC qua A và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AC} = (-a;0;c)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right] = \left(a^2;-a^2;\dfrac{a^2}{2}\right)$; $\overrightarrow{OA} = (a;0;0) \Rightarrow d(OM,AC) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{OA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right]\right|} = \dfrac{2a}{3}$.

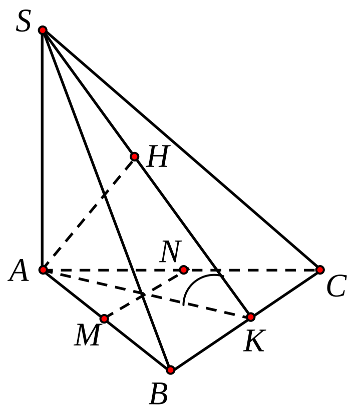
Câu 37-3. **[Phát triển câu 37-MH-2020 theo hướng giúp học sinh khắc sâu thêm cách xác định góc giữa hai mặt phẳng]** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SBC) và mặt đáy là 60^0 (minh họa như hình bên). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và MN bằng



A. $\frac{3a}{8}$. **B.** $\frac{3a}{4}$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $MN // BC \Rightarrow MN // (SBC)$

Do đó $d(MN, SB) = d(MN, (SBC)) = d(M, (SBC)) = \frac{1}{2} d(A, (SBC))$ (vì $MB = \frac{1}{2} AB$)

Kẻ $AK \perp BC$, $AH \perp SK$, ta có: $\begin{cases} BC \perp AK \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAK) \Rightarrow AH \perp BC$.

Khi đó $\begin{cases} AH \perp SK \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Ta lại có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AK \\ BC \perp SK \; (BC \perp (SAK)) \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = SKA = 60^\circ$

Xét tam giác AKH vuông tại H, ta có

$AH = AK.\sin SKA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$.

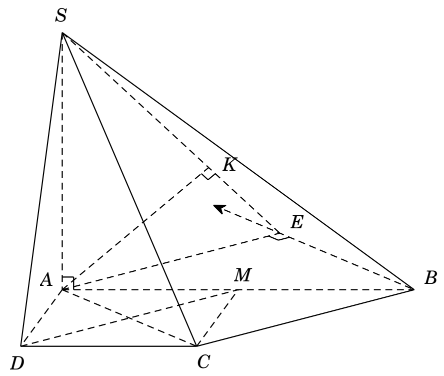
Vậy $d\left(DM,SB\right)=\frac{1}{2}d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\frac{1}{2}AH=\frac{3a}{8}$.

Câu 37-4. **[Phát triển câu 37-MH-2020 theo hướng giúp học sinh khắc sâu thêm cách xác định góc giữa dường thẳng và mặt phẳng]** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB=2a$, $AD=DC=a$. Hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAD\right)$ cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB.

A. $d=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **B.** $d=2a$. **C.** $d=a\sqrt{2}$. **D.** $d=\frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Lời giải

Chọn A



Xác định $60^0=SC,\left(ABCD\right)=SC,AC=SCA$ và $SA=AC.\tan SCA=a\sqrt{6}$.

Gọi M là trung điểm AB, suy ra $ADCM$ là hình vuông nên $CM=AD=a$.

Xét tam giác ACB, ta có trung tuyến $CM=a=\frac{1}{2}AB$ nên tam giác ACB vuông tại C.

Lấy điểm E sao cho $ACBE$ là hình chữ nhật, suy ra $AC//BE$.

Do đó $d\left[AC,SB\right]=d\left[AC,\left(SBE\right)\right]=d\left[A,\left(SBE\right)\right]$. Kẻ $AK\perp SE$.

Khi đó $d\left[A,\left(SBE\right)\right]=AK=\frac{SA.AE}{\sqrt{SA^2+AE^2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Cách khác: **Hệ tọa độ hóa trong không gian.**

Chọn hệ trục tọa độ với $A\left(0;0;0\right)$, $S\left(0;0;a\sqrt{6}\right)$, $C\left(a;a;0\right)$, $B\left(2a;0;0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\left(a;a;0\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(2a;0;-a\sqrt{6}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]=\left(-\sqrt{6}a^2;\sqrt{6}a^2;-2a^2\right)$ và $\overrightarrow{AB}=\left(2a;0;0\right)$.

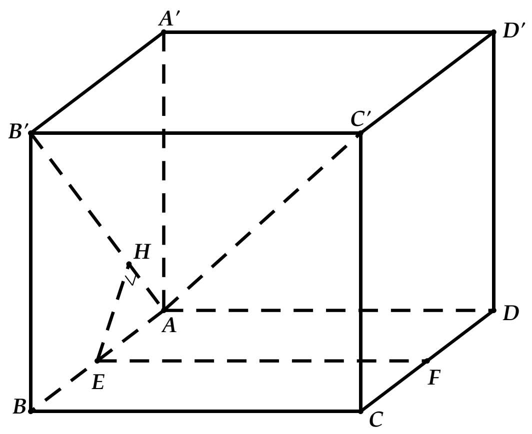
Vậy $d\left(AC;SB\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SB}\right]\right|}=\frac{\left|-2\sqrt{6}a^3\right|}{4a^2}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 37-5. **[Phát triển câu 37-MH-2020 theo hướng giúp học sinh khắc sâu thêm cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau]** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khoảng cách d giữa hai đường thẳng EF và AC' là

A. $d=a$. **B.** $d=\frac{\sqrt{2}a}{4}$. **C.** $d=\frac{\sqrt{2}a}{2}$. **D.** $d=\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $EF//B'C' \Rightarrow EF//(AC'B')$

Nên $d(EF;AC')=d(EF;(AC'B'))=d(E;(AC'B'))$

Kẻ $EH\perp AB'$ $(H\in AB')$

Do $C'B'\perp(ABB'A')$ nên $B'C'\perp EH$

Suy ra $EH\perp(AC'B')$

Do đó $d(E;(AC'B'))=EH$

Xét ΔAEH vuông cân tại H có: $EA=\frac{a}{2}\Rightarrow EH=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Vậy $d(EF;AC')=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 38: Thầy Trần Quốc Đại thực hiện cô Bích Ngọc Phản Biện

Câu 38. **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$ với $x>0$. Khi đó $\int_3^8 f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{197}{6}$. **C.** $\frac{29}{2}$. **D.** $\frac{181}{6}$

Lời giải

Chọn B

$f(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'(x)=\frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$

$$\int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)}dx = \int\left(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx = x+2\sqrt{x+1}+C$$

Suy ra $f\left(x\right)=x+2\sqrt{x+1}+C$

$f\left(3\right)=3 \Leftrightarrow C=-4$

$f\left(x\right)=x+2\sqrt{x+1}-4$

Dùng máy tính bấm $\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)dx=\frac{197}{6}$

Bình luận. Bài này hoàn toàn có thể đặt $t=\sqrt{x+1}$ để tìm nguyên hàm của hàm số.

Câu 1. **[Phát triển câu 38 tương tự dùng liên hiệp].** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có $f\left(0\right)=1$ và $f'(x)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}$ với $x\geq 0$. Khi đó $\int\limits_0^1 f\left(x\right)dx$ bằng

A. $\sqrt{32}-\sqrt{12}-1$. **B.** $\frac{17}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{32}+\sqrt{12}-1$. **D.** $\frac{17}{3}+\frac{8}{3}\sqrt{2}$

Chọn B

$$\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}{(x+1)^2x-x^2(x+1)}dx$$

$$=\int\frac{(x+1)\sqrt{x}-x\sqrt{x+1}}{x\left(x+1\right)}dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+C$$

Suy ra $f\left(x\right)=2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+C$

Mà $f\left(0\right)=1 \Leftrightarrow C=3$

Bấm máy tính $\int\limits_0^1\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}+3\right)dx=\frac{17}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{2}$

Câu 2. **Phát triển 2 câu 38 [Nâng cao đổi biến]** Cho $\int\limits_0^{\frac{9}{16}}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}\text{dt}=\frac{a-b\ln 2}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương và $\frac{a}{c}$ tối giản. Giá trị của biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 43. **B.** 48. **C.** 88. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=t\\ \sqrt{x-1}-\sqrt{x}=\frac{1}{t}\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{x}=t-\frac{1}{t} \Rightarrow 4x=\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 \Rightarrow 4dx=\frac{2\left(t^4-1\right)}{t^3}dt$

Đổi cận: $x=0 \Rightarrow t=1; x=\frac{9}{16} \Rightarrow t=2$.

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{9}{16}} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}+1}dt = \int\limits_1^2 \frac{t^4-1}{2t^3(t+1)}dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{(t^2+1)(t-1)}{t^3}dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{t^3-t^2+t-1}{t^3}dt$

$= \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \left(1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)dt = \frac{1}{2}\left(t-\ln|t|-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9-8\ln 2}{16}.$

Vậy $a=9; b=8; c=16 \Rightarrow a+b+c=33.$.

Câu 3. **Phát triển 3 câu 38[nâng cao, kết hợp liên hiệp]**

Cho $\int_1^2 \frac{3x^4-3x-3}{x^2+\sqrt{x+1}}dx = a+\sqrt{b}-\sqrt{c}$, với a,b,c là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $a+b+c$ bằng

A. 59. **B.** 104. **C.** 111. **D.** 147.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\int_1^2 \frac{3x^4-3x-3}{x^2+\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{3(x^4-x-1)}{x^2+\sqrt{x+1}}dx = \int_1^2 \frac{3(x^2+\sqrt{x+1})(x^2-\sqrt{x+1})}{x^2+\sqrt{x+1}}dx$$

$$= \int\limits_1^2 \left(3x^2-3\sqrt{x+1}\right)dx = \left(x^3-2\sqrt{(x+1)^3}\right)\Bigg|_1^2 = \left(8-6\sqrt{3}\right)-\left(1-4\sqrt{2}\right)$$

$$= 7-6\sqrt{3}+4\sqrt{2} = 7+\sqrt{32}-\sqrt{108}$$

Vậy $a=7; b=32; c=108 \Rightarrow a+b+c=147$.

Câu 4. **Phát triển 4 câu 38 [nâng cao, kết hợp lương hiệp và đổi biến]**

Cho $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$ với a,b,c,d là các số hữu tỷ. Giá trị của biểu thức $a+b+c+d$ bằng:

A. 0. **B.** 3. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $x\in\left[1;\sqrt{3}\right]$ nên $I = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x)^2-(1+x^2)}dx = \int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x-\sqrt{1+x^2}}{2x}dx$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}} dx-\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx = \frac{1}{2}\ln x\Big|_1^{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)-\frac{1}{2}\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}xdx$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}, (t>0) \Rightarrow x^2=t^2-1 \Rightarrow xdx=tdt$

Đổi cận: - Với $x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

- Với $x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2$.

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\ln\sqrt{3}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)-\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{t^2-1}tdt$$

Ta có: $\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=\int_{\sqrt{2}}^{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_{\sqrt{2}}^{2}$

$=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln\sqrt{3}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)-\frac{1}{2}\left[2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]$

$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(3\sqrt{2}-3\right)$

$\Rightarrow a=-\frac{3}{2},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{2},d=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow a+b+c+d=0$.

Câu 39: GV phát triển: Nguyễn Văn Viễn - GV phản biện: Trương Đức Thịnh.

Câu 39: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $f(x)=\frac{mx-4}{x-m}$ (với m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x\neq m$.

Ta có $y'=\frac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0,\ \forall x\neq m\\ m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\ m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq 0$.

Do m nguyên nên $m\in\{-1;0\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Phân tích:

Đây là bài toán "Xét tính đơn điệu của hàm số phân thức hữu tỉ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$, với $ad-bc\neq 0$".

Kiến thức này ở bài học "***Tính đơn điệu của hàm số***" thuộc ***Chương I – Giải tích 12***.

Để nắm vững các bài toán kiểu này, các em học sinh cần ghi nhớ các kiến thức cơ bản sau đây:

Bài toán 1: Đối với hàm số $\boxed{y=\frac{ax+b}{cx+d}}$, với $ad-bc\neq 0$.

+ Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

+ Đạo hàm $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $\forall x\in D$.

Kiến thức 1: Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $y'>0$, với mọi $x\in D$ $\Leftrightarrow ad-bc>0$.

Kiến thức 2: Hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $y'<0$, với mọi $x\in D$ $\Leftrightarrow ad-bc<0$.

Kiến thức 3: Hàm số đã cho đồng biến trên K khi và chỉ khi $y'>0$, với mọi $x\in K$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc>0 \\ K\subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc>0 \\ -\dfrac{d}{c}\notin K \end{cases}$. (*Ở đây, K có thể là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn*)

Kiến thức 4: Hàm số đã cho nghịch biến trên K khi và chỉ khi $y'<0$, với mọi $x\in K$ $\Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc<0 \\ K\subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc<0 \\ -\dfrac{d}{c}\notin K \end{cases}$.

Chú ý rằng:

+ Nếu $-\dfrac{d}{c}\notin(\alpha;\beta)$ thì ta phải có $-\dfrac{d}{c}\le\alpha$ hoặc $-\dfrac{d}{c}\ge\beta$.

+ Nếu $-\dfrac{d}{c}\notin[\alpha;+\infty)$ thì ta phải có $-\dfrac{d}{c}<\alpha$.

+ Nếu $-\dfrac{d}{c}\notin(-\infty;\beta)$ thì ta phải có $-\dfrac{d}{c}\ge\beta$.

+ Các em có thể áp dụng cho các trường hợp tương tự. Bên cạnh đó, cần nắm vững các phép toán tập hợp để tránh những nhầm lẫn đáng tiếc.

Bài toán 2: Đối với hàm số $\boxed{y=\dfrac{a.u(x)+b}{c.u(x)+d}}$, với $ad-bc\ne0$. Trong đó, $u(x)$ là hàm số theo biến x.

+ **Bước 1:** Đặt $u=u(x)$, ta có $u'=u'(x)$.

+ **Bước 2:** Đưa hàm số đã cho về dạng $y=\dfrac{a.u+b}{c.u+d}$, với $ad-bc\ne0$. Đến đây, ta thấy bài toán đã cho trở về bài toán giống như "**Bài toán 1**". Tuy nhiên, ở đây ta cần chú ý cụ thể đến tính đồng biến hoặc nghịch biến của hàm số $u(x)$ để xử lí bài toán 2 cho chuẩn xác, cụ thể:

Trường hợp 1: Nếu $u=u(x)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ thì hàm số $y=\dfrac{a.u(x)+b}{c.u(x)+d}$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(\alpha;\beta)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{a.u+b}{c.u+d}$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(u(\alpha);u(\beta))$.

Trường hợp 2: Nếu $u=u(x)$ là hàm nghịch biến trên khoảng $(\alpha;\beta)$ thì hàm số $y=\dfrac{a.u(x)+b}{c.u(x)+d}$ đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(\alpha;\beta)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{a.u+b}{c.u+d}$ nghịch biến (hoặc đồng biến) trên khoảng $(u(\beta);u(\alpha))$.

Ta sẽ tìm hiểu chi tiết qua các câu hỏi tương tự sau đây:s

CÂU HỎI TƯƠNG TỰ:

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2x-m}{x-1}$ đồng biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $m<-2$. **B.** $m>-2$. **C.** $m>2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m-2}{(x-1)^2}$, $\forall x\in D$.

YCBT $\Leftrightarrow y'>0, \forall x\in D$ $\Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định của nó.

A. $1<m<2$. **B.** $1\le m\le 2$.

C. $m\ge 2$ hoặc $m\le 1$. **D.** $m>2$ hoặc $m<1$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{3-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-3m+2}{(x+m-3)^2}$, $\forall x\in D$.

YCBT $\Leftrightarrow y'<0, \forall x\in D$ $\Leftrightarrow m^2-3m+2<0 \Leftrightarrow 1<m<2$.

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-5m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$, $\forall x\in D$.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} y'>0,\ \forall x\in D \\ (-\infty;-10)\subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2>0 \\ -5m\notin(-\infty;-10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{2}{5} \\ -5m\geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}<m\leq 2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2\}$. Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{(m+1)x+2m+2}{x+m}$ nghịch biến trên $(-1;+\infty)$?

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-m-2}{(x+m)^2},\ \forall x\in D$.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{cases} y'<0,\ \forall x\in D \\ (-1;+\infty)\subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m-2<0 \\ -m\notin(-1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ -m\leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq m<2$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=1$. Vậy có 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 5. **B.** 15. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x+m)^2},\ \forall x\in D$.

YCBT $\Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in D \Leftrightarrow -m^2+2m+3>0 \Leftrightarrow -1<m<3$.

Do đó, $S=\{0;1;2\}$. Vậy tổng bình phương các phần tử của S bằng 5.

Câu 6: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2},\ \forall x\in D$.

YCBT $\Leftrightarrow y'<0,\ \forall x\in D \Leftrightarrow m^2-4m<0 \Leftrightarrow 0<m<4$.

Do đó, $S=\{1;2;3\}$. Vậy số phần tử của S là 3.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Đặt $u=\tan x$, ta có $u'=\dfrac{1}{\cos^2 x}>0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Do đó $u=\tan x$ **đồng biến** trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Và khi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ ta có $u\in(0;1)$.

Bài toán đã cho trở thành: "Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(u)=\dfrac{u-2}{u-m}$ **đồng biến** trên khoảng $(0;1)$"

+ Ta có $f'(u)=\dfrac{2-m}{(u-m)^2}$.

+ YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m<2$.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x-1}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\le 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m>1$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $u=\cos x$, ta có $u'=-\sin x<0,\ \forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Do đó $u=\cos x$ **nghịch biến** trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Và khi $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ ta có $u\in(0;1)$.

Bài toán đã cho trở thành: "Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(u)=\dfrac{2u-1}{u-m}$ **đồng biến** trên khoảng $(0;1)$"

+ Ta có $f'(u)=\dfrac{-2m+1}{(u-m)^2}$.

+ YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}-2m+1>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\le 0$.

Câu 9: Cho hàm số $y=\dfrac{2\sqrt{9-x^2}-m}{\sqrt{9-x^2}-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m không vượt quá 2020 để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\sqrt{5}\right)$. Tính tổng các phần tử của tập hợp S.

A. 2041205. **B.** 2039190. **C.** 2039191. **D.** 2041210.

Lời giải

Chọn D

Đặt $u=\sqrt{9-x^2}$, ta có $u'=-\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}<0,\ \forall x\in\left(0;\sqrt{5}\right)$. Do đó $u=\sqrt{9-x^2}$ **nghịch biến** trên khoảng $\left(0;\sqrt{5}\right)$. Và khi $x\in\left(0;\sqrt{5}\right)$ ta có $u\in(2;3)$.

Bài toán đã cho trở thành: "Cho hàm số $f(u)=\dfrac{2u-m}{u-m}$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m không vượt quá 2020 để hàm số **nghịch biến** trên khoảng $(2;3)$. Tính tổng các phần tử của tập hợp S".

+ Ta có $f'(u)=\dfrac{-m}{(u-m)^2}$.

+ YCBT $\Leftrightarrow\begin{cases}-m<0\\ m\notin(2;3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \left[\begin{array}{l}m\le 2\\ m\ge 3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(0;2]\cup[3;+\infty)$.

+ Do đó $S=\{1;2;3;4;...;2020\}$. Tổng phần tử của S là $T=\dfrac{2020.2021}{2}=2041210$.

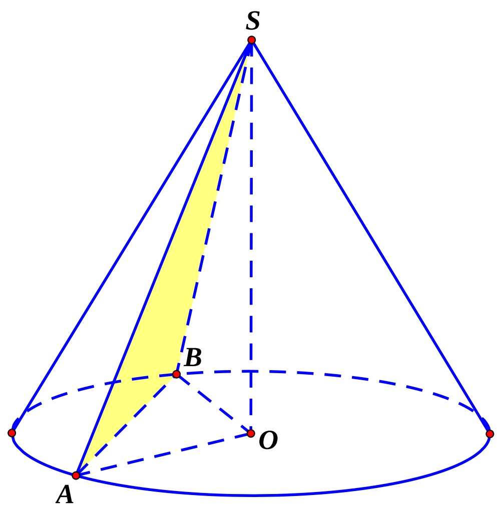
Câu 40: GV phát triển: Thom Chu - GV phản biện: Nam Nguyễn Bá

Câu 40: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hình nón có chiều cao bằng $2\sqrt{5}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích bằng $9\sqrt{3}$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$. **B.** 32π. **C.** $32\sqrt{5}\pi$. **D.** 96π.

Lời giải

Chọn A



Ta có $S_{SAB}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\Rightarrow AB^2=36\Rightarrow SA^2=36$.

$R=OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{36-20}=4$

Thể tích của khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{32\sqrt{5}\pi}{3}$.

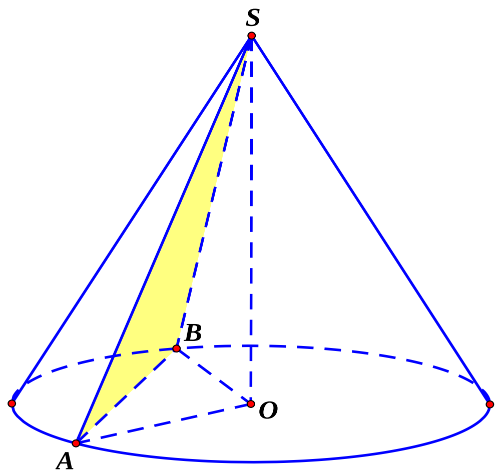
Câu tương tự

40.1 ***(Câu tương tự 40 đề thi tham khảo)*** Cho hình nón có chiều cao bằng $\sqrt{11}$. Một mặt phẳng đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác vuông cân có diện tích bằng 18. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{25\sqrt{11}\pi}{3}$. **B.** 150π. **C.** $25\sqrt{11}\pi$. **D.** 50π.

Lời giải

Chọn A



Theo giả thiết, ΔSAB vuông cân tại S.

Ta có $S_{SAB}=\dfrac{SA^2}{2}=18\Rightarrow SA^2=36$.

$R=OA=\sqrt{SA^2-SO^2}=\sqrt{36-11}=5$

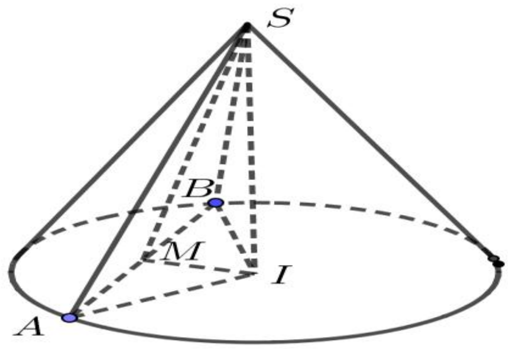
Thể tích của khối nón là $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{25\sqrt{11}\pi}{3}$.

Các câu phát triển

Ý tưởng: Ta biết rằng với hình nón, ta có công thức: $R^2+h^2=l^2$. Trong ba đại lượng R,l,h, nếu biết hai đại lượng thì tính được đại lượng còn lại. Nếu cho một trong ba đại lượng và ẩn giấu đại lượng thứ hai trong một giả thiết nào đó thì bài toán sẽ khó hơn cho luôn hai đại lượng.

Câu 1: **40.2** ***(Phát triển đề thi tham khảo câu 40)*** Cho hình nón có chiều cao bằng 3. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều. Biết góc giữa đường thẳng chứa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là $45°$. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $5\sqrt{24}\pi$. **B.** $15\sqrt{24}\pi$. **C.** 45π. **D.** 15π.



Lời giải

Chọn D

Gọi thiết diện của hình nón cắt bởi (α) là tam giác đều SAB, I là tâm của đáy, M là trung điểm của AB. Ta có góc giữa đường thẳng chứa trục của hình nón và mặt phẳng (α) là $45°$.

$\Rightarrow MSI = 45° \Rightarrow \Delta MSI$ vuông cân tại I.

$SM = SI\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, $MB = \dfrac{SM}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$, $MI = SI = 3$, $R = \sqrt{MB^2 + MI^2} = \sqrt{15}$.

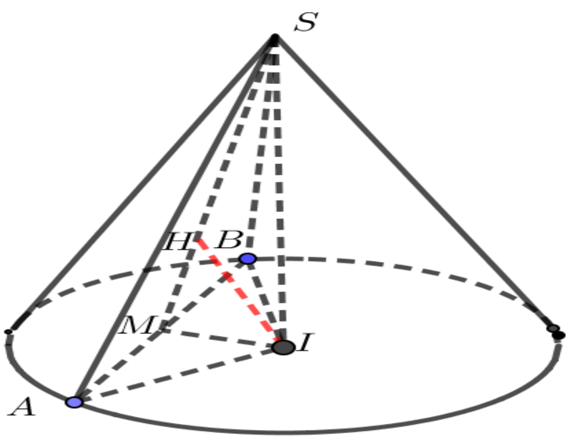
Thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = 15\pi$.

Câu 2: **40.3** ***(Phát triển đề thi tham khảo câu 40)*** Cho hình nón có chiều cao bằng $\sqrt{2}$. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều. Biết khoảng cách từ tâm của đáy hình nón đến mặt phẳng (α) là $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Diện tích xung quanh của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{8\pi\sqrt{3}}{3}$. **C.** $8\pi\sqrt{3}$. **D.** $4\pi\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi thiết diện của hình nón cắt bởi (α) là tam giác đều SAB, I là tâm của đáy, M là trung điểm của AB. Kẻ $IH \perp SM$ tại H.

$\Rightarrow d(I,(\alpha)) = IH = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Mà $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IM^2} \Rightarrow IM = 2 \Rightarrow SM = \sqrt{SI^2 + IM^2} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow MB = \dfrac{SM}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \Rightarrow R = \sqrt{IM^2 + MB^2} = \sqrt{6}$ và $l = SB = AB = 2MB = 2\sqrt{2}$.

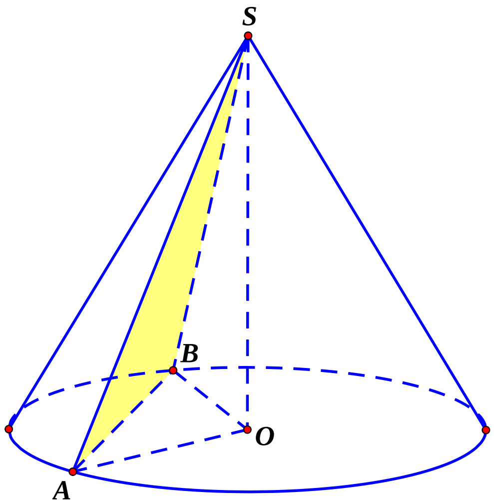
$\Rightarrow S_{xq} = \pi Rl = \pi\sqrt{6}.2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}\pi$.

Câu 3: **40.4** ***(Phát triển đề thi tham khảo câu 40)*** Cho hình nón có chiều cao bằng 1. Một mặt phẳng (α) đi qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là tam giác đều có diện tích S. Gọi S_d là diện tích đáy của hình nón. Biết $S = \dfrac{5\sqrt{3}}{4\pi}S_d$. Diện tích toàn phần của hình nón đã cho bằng

A. $\dfrac{(\sqrt{5}+3)\pi}{6}$. **B.** $\dfrac{(\sqrt{5}+1)\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{(\sqrt{5}+1)\pi}{4}$. **D.** $\dfrac{(\sqrt{5}+3)\pi}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi R là bán kính đáy của hình nón.

Cạnh của thiết diện là: $SA = \sqrt{SO^2 + R^2} = \sqrt{1+R^2}$.

Diện tích thiết diện là: $S = \dfrac{SA^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(1+R^2)\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích đáy hình nón: $S_d = \pi R^2$.

Ta có $S = \dfrac{5\sqrt{3}}{4\pi}S_d \Leftrightarrow \dfrac{(1+R^2)\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\pi R^2.5\sqrt{3}}{4\pi} \Leftrightarrow R = \dfrac{1}{2} \Rightarrow SA = \dfrac{\sqrt{5}}{2} = l$

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{tp} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi.\frac{1}{4} + \pi\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}+1)\pi}{4}$$

Câu 41 : Phát triển: Hoàng Quân - Phản biện: Ái Nguyễn Văn

Câu 41: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log_2\dfrac{3}{2}$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x+y) = t$

suy ra $\begin{cases} x = 9^t, y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2.9^t + 6^t = 4^t \Leftrightarrow 2\left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}$.

Vậy $\frac{x}{y} = \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}$.

Câu 41.1. ***(Phát triển Tương tự câu 41 đề thi tham khảo)*** Giả sử p, q là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25}(p+q)$. Tìm giá trị của $\frac{p}{q}$?

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. **C.** $\frac{8}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \log_{16} p = \log_{20} q = \log_{25}(p+q) \Rightarrow p = 16^t$, $q = 20^t$, $p + q = 25^t$. Suy ra :

$16^t + 20^t = 25^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{2t} + \left(\frac{4}{5}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Vì $\left(\frac{4}{5}\right)^t > 0$ nên $\left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Từ đó ta được $\frac{p}{q} = \frac{16^t}{20^t} = \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 41.2.((*Phát triển Tương tự câu 41 đề thi tham khảo* : nâng độ khó, khi tính tổng tỷ lệ)Cho các số $a, b > 0$ thỏa mãn $\log_3 a = \log_6 b = \log_2(a+b)$. Giá trị $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ bằng

A. 18. **B.** 45. **C.** 27. **D.** 36.

Lờigiải

Chọn B

Đặt $t = \log_3 a = \log_6 b = \log_2(a+b) \Rightarrow \begin{cases} a = 3^t \\ b = 6^t \\ a + b = 2^t \end{cases} \Rightarrow 3^t + 6^t = 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t + 3^t = 1 \quad (1)$

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t + 3^t$ trên $\mathbb{R}$, có $f'(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t.\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 3^t.\ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $(1) \Leftrightarrow f(t) = f(-1) \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 45$.

Câu 41.3. ((*Phát triển Tương tự câu 41 đề thi tham khảo* : Phát triển cho 3 số với giả thiết hàm logarit) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16}\frac{a-4b}{12}$. Giá trị $\frac{a}{b}$ bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Đặt $\log_{100} a = \log_{40} b = \log_{16} \dfrac{a-4b}{12} = t$. Ta có $a = 100^t$, $b = 40^t$, $\dfrac{a-4b}{12} = 16^t$.

Suy ra $100^t - 4.40^t = 12.16^t \Leftrightarrow 12.\left(\dfrac{4}{25}\right)^t + 4.\left(\dfrac{2}{5}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{2}{5}\right)^t = \dfrac{1}{6} \\ \left(\dfrac{2}{5}\right)^t = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Do đó $\left(\dfrac{2}{5}\right)^t = \dfrac{1}{6} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \left(\dfrac{100}{40}\right)^t = \left(\dfrac{5}{2}\right)^t = 6$.

Câu 41.4. ((***Phát triển** Tương tự câu 41 đề thi tham khảo*: **Phát triển cho 3 số với giả thiết hàm mũ)**

Cho các số $m > 0$, $n > 0$, $p > 0$ thỏa mãn $4^m = 10^n = 25^p$. Tính giá trị biểu thức $T = \dfrac{n}{2m} + \dfrac{n}{2p}$.

A. $T = 1$. **B.** $T = \dfrac{5}{2}$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = \dfrac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $4^m = 10^n \Rightarrow n = m\log 4 \Rightarrow \dfrac{n}{2m} = \dfrac{\log 4}{2} = \log 2$.

Vì $10^n = 25^p \Rightarrow n = p\log 25 \Rightarrow \dfrac{n}{2p} = \dfrac{\log 25}{2} = \log 5$.

Suy ra $T = \dfrac{n}{2m} + \dfrac{n}{2p} = \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1$.

Câu 42 : Phát triển: Nguyễn Khắc Thành - Phản biện: Tran Chinh

Câu 42: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tính tổng các phần tử của S bằng

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Nhận xét: Hàm số $g(x) = x^3 - 3x + m$ là hàm số bậc ba không đơn điệu trên đoạn $[0;3]$ nên ta sẽ đưa hàm số này về hàm bậc nhất để sử dụng các tính chất cho bài tập này.

Đặt $t = x^3 - 3x$, do $[0;3]$ nên ta tìm được miền giá trị $t \in [-2;18]$. Khi đó $y = t + m$ đơn điệu trên $[-2;18]$.

Ta có

$$\max_{x\in[0;3]} y = \max_{t\in[-2;18]} |t+m| = \max\left\{|m-2|;|m+18|\right\} = \frac{|m-2+m+18| + |m-2-m-18|}{2}. = |m+8| + 10$$

Từ giả thiết ta có $\max\limits_{x\in[0;2]} y=16 \Leftrightarrow |m+8|+10=16 \Leftrightarrow |m+8|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-14 \end{array}\right.$.

Chú ý: Cách giải trên ta đã sử dụng tính chất của hàm số bậc nhất là $\max\left\{|a|;|b|\right\}=\dfrac{|a+b|+|a-b|}{2}\ (1)$.

Tuy nhiên có thể trình bày phần sau bài toán như sau mà không cần công thức (1).

Ta có

$\max\limits_{x\in[0;3]} y=\max\limits_{t\in[-2;18]}|t+m| = \max\left\{|m-2|;|m+18|\right\}$

+ Trường hợp 1: $\max\limits_{x\in[0;3]} y=|m+18|=16 \Leftrightarrow \begin{cases} |m+18|=16 \\ |m-2|<16 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$.

+ Trường hợp 2: $\max\limits_{x\in[0;3]} y=|m-2|=16 \Leftrightarrow \begin{cases} |m-2|=16 \\ |m+18|<16 \end{cases} \Leftrightarrow m=-14$.

Chọn A.

CÂU TƯƠNG TỰ

Câu 42.1: (*Phát triển Tương tự câu 42 đề thi tham khảo*) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 5. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -2.　　**B.** 2.　　**C.** -12.　　**D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x+m$ trên đoạn $[0;3]$

$f'(x)=2x-2$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$

$f(0)=m,\ f(1)=m-1,\ f(3)=m+3$

$\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=\max\left\{m-1;m;m+3\right\}=m+3$

$\min\limits_{x\in[0;3]} f(x)=\min\left\{m-1;m;m+3\right\}=m-1$

$$\max\limits_{x\in[0;3]} y=\max\limits_{x\in[0;3]}\left|f(x)\right|=\max\left\{|m-1|;|m+3|\right\}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m-1|=5 \\ |m+3|\le 5 \end{cases} \\ \begin{cases} |m+3|=5 \\ |m-1|\le 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-4 \\ m=2 \end{array}\right..$$

Vậy $S=\{-4;2\}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng -2.

CÂU PHÁT TRIỂN 1. Phát triển theo ý tưởng so sánh giữa max và min của hàm chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Câu 42.2: (*Phát triển Tương tự câu 42 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+a\right|$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;2]$. Có bao nhiêu số nguyên dương a thuộc đoạn $[0;100]$ sao cho $M\le 2m$?

A. 36.　　**B.** 37.　　**C.** 40.　　**D.** 38.

Lời giải

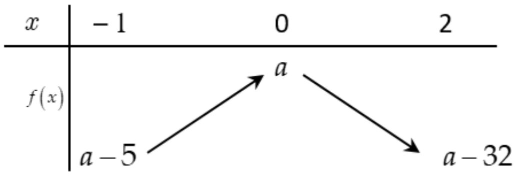
Chọn B

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+a$ trên đoạn $[-1;2]$

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$f(0)=a,\ f(-1)=a-5,\ f(2)=a-32$



Để có được $M\le 2m$ thì $m>0$(có nghĩa là phần đồ thị hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+a$ trên đoạn $[-1;2]$ không cắt trục hoành).

Vậy ta suy ra $\left[\begin{array}{l}a<0\\a-32>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>32\end{array}\right.$

Vì $a\in[0;100]$ nên ta chỉ loại trường hợp $a<0$

Với $a>32$, ta có: $m=|a-32|=a-32,\ M=|a|=a$

Vậy $M\le 2m\Leftrightarrow a\le 2(a-32)\Leftrightarrow a\ge 64$ (thỏa mãn)

Kết luận: Trong đoạn $[0;100]$ có 37 số nguyên dương a thỏa mãn.

CÂU PHÁT TRIỂN 2. Phát triển theo ý tưởng tìm min của hàm số chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối .

Câu 42.3: (*Phát triển Tương tự câu 42 đề thi tham khảo*) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2+m|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 3. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[1;3]$

$f'(x)=3x^2-6x$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$f(1)=m-2,\ f(2)=m-4,\ f(3)=m$

Gọi A,a lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[1;3]$. Ta có:

$A=\max\limits_{x\in[1;3]}f(x)=\max\{m-4;m-2;m\}=m$

$a=\min\limits_{x\in[1;3]}f(x)=\min\{m-4;m-2;m\}=m-4$

+ Nếu $a > 0 \Leftrightarrow m-4>0 \Leftrightarrow m>4$ thì $\min\limits_{x\in[1;3]} y = |m-4| = m-4 = 3 \Leftrightarrow m = 7$ (thỏa mãn)

+ Nếu $A < 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì $\min\limits_{x\in[1;3]} y = |m| = -m = 3 \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn)

+ Nếu $Aa < 0$ thì $\min\limits_{x\in[1;3]} y = 0$ (loại)

Vậy $S = \{-3;7\}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng 4.

CÂU PHÁT TRIỂN 3. Phát triển theo ý tưởng tìm max của hàm số chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối chứa hai tham số khác nhau.

Câu 42.4: (*Phát triển Tương tự câu 42 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $y = |8x^4 + ax^2 + b|$. Trong đó a,b là các hệ số thực. Tìm mối liên hệ giữa a và b để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;1]$ bằng 1?

A. $b - 8a = 0$. **B.** $b - 4a = 0$. **C.** $b + 4a = 0$. **D.** $b + 8a = 0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = x^2$, suy ra $t \in [0;1]$

Xét $g(t) = 8t^2 + at + b$, đây là đồ thị Parabol có bề lõm quay lên và tọa độ đỉnh là

$I\left(-\frac{a}{16}; -\frac{a^2}{32} + b\right)$

Trường hợp 1. $-\frac{a}{16} \in [0;1]$

Để thỏa mãn yêu cầu của bài toán, ta phải có:

$$\begin{cases} -1 \le g(0) \le 1 \\ -1 \le g(1) \le 1 \\ -1 \le -\frac{a^2}{32} + b \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le b \le 1 \\ -1 \le a+b+8 \le 1 \\ -32 \le -a^2 + 32b \le 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -32 \le 32b \le 32 \\ -32 \le 32a + 32b + 256 \le 32 \\ -32 \le a^2 - 32b \le 32 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -64 \le a^2 \le 64 \\ -64 \le a^2 + 32a + 256 \le 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8 \le a \le 8 \\ a^2 + 32a + 192 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \le a \le 8 \\ -24 \le a \le -8 \end{cases} \Leftrightarrow a = -8$$

Với $a = -8$ thay vào hệ $\begin{cases} -1 \le b \le 1 \\ -1 \le a+b+8 \le 1 \\ -32 \le -a^2 + 32b \le 32 \end{cases}$, ta được:

$$\begin{cases} -1 \le b \le 1 \\ -32 \le -64 + 32b \le 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le b \le 1 \\ 1 \le b \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = 1$$

Thử lại: $g(t) = 8t^2 - 8t + 1$ với $t \in [0;1]$

$g'(t) = 16t - 8$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 16t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

$g(0) = 1, g\left(\frac{1}{2}\right) = -1, g(1) = 1$

Vậy $\max\limits_{[-1;1]} y = \max\limits_{[0;1]} g(t) = 1$, suy ra $\begin{cases} a = -8 \\ b = 1 \end{cases}$ thỏa mãn.

Trường hợp 2. $\left[\begin{array}{l} -\dfrac{a}{16} < 0 \\ -\dfrac{a}{16} > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > 0 \\ a < -16 \end{array}\right.$

Để thỏa mãn yêu cầu của bài toán, ta phải có:

$\begin{cases} -1 \le g(0) \le 1 \\ -1 \le g(1) \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le b \le 1 \\ -1 \le a + b + 8 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le -b \le 1 \\ -1 \le a + b + 8 \le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow -2 \le a + 8 \le 2 \Leftrightarrow -10 \le a \le -6$ **(loại)**

Câu 43 : Kiên Cao Văn phát triển Nguyễn Hoàng Việt Phản Biện

Câu 17: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình: $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - m\log_2 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)(\log_2 x + 1 - m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x - 1 = 0 \\ \log_2 x = m - 1 \end{array}\right.$.

Ta có: $\log_2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (thỏa mãn).

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \log_2 x = m - 1 \Leftrightarrow x = 2^{m-1}$ có nghiệm duy nhất trên $[1;2)$

$\Leftrightarrow 1 \le 2^{m-1} < 2 \Leftrightarrow 0 \le m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \le m < 2$.

Bình luận:

Dạng toán: Tìm điều kiện của m để phương trình có dạng $P(\log_a x; m) = 0$ với m là tham số thực có k nghiệm thực phân biệt trên K.

Phương pháp chung:

Bước 1: Đặt $t = \log_a x$, khi $x \in K \Rightarrow t \in K_1$.

Bước 2: Phương trình $P(\log_a x; m) = 0 \Leftrightarrow P(t; m) = 0$ (*).

Phương trình đã cho có k nghiệm trên $K \Leftrightarrow (*)$ có k nghiệm trên K_1.

Câu 43.1.(Bài toán tương tự) (***Phát triển** Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Định hướng xây dựng bài toán: Tương tự như câu 43 giữ nguyên dạng phương trình và cách đặt vấn đề cũng như yêu cầu của bài toán.

Cho phương trình $\log_3^2 3x + \log_3 x + m - 1 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $m > \dfrac{9}{4}$. **B.** $0 < m < \dfrac{1}{4}$. **C.** $0 < m < \dfrac{9}{4}$. **D.** $m > -\dfrac{9}{4}$.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3^2 3x+\log_3 3x+m-2=0$ (1).

Đặt $t=\log_3 3x$, thì phương trình (1) có dạng: $t^2+t+m-2=0 \quad (2)$.

Khi $x\in(0;1)\Rightarrow 0<3x<3\Leftrightarrow \log_3 3x<1\Leftrightarrow t<1$.

Yêu cầu đề bài tương đương với tìm tham số m để phương trình (2) có đúng hai nghiệm phân biệt t_1,t_2 nhỏ hơn 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\(t_1-1)(t_2-1)>0\\t_1+t_2-2<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\t_1t_2-(t_1+t_2)+1>0\\t_1+t_2-2<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1-4m+8>0\\m-2+1+1>0\\-1-2<0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}9-4m>0\\m>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}.$$

Vậy $0<m<\frac{9}{4}$.

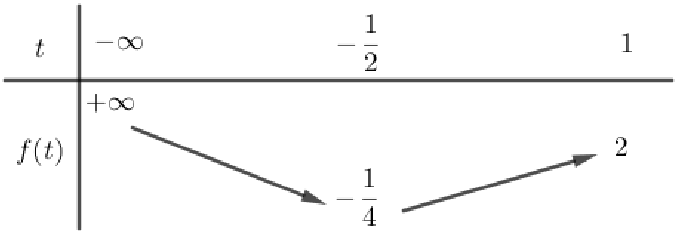
Cách 2: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3^2 3x+\log_3 3x+m-2=0$ (1).

Đặt $t=\log_3 3x$, thì phương trình (1) có dạng: $t^2+t+m-2=0\Leftrightarrow t^2+t=2-m$ (2).

Khi $x\in(0;1)\Rightarrow 0<3x<3\Leftrightarrow \log_3 3x<1\Leftrightarrow t<1$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ với $t\in(-\infty;1)$.

Bảng biến thiên của $f(t)$:



Số nghiệm của phương trình (2) bằng số giao điểm của đồ thị $y=f(t)$ và đường thẳng $y=2-m$.

Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $1\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<2-m<2\Leftrightarrow 0<m<\frac{9}{4}$.

Vậy $0<m<\frac{9}{4}$.

Câu 43.2. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Định hướng xây dựng bài toán: Bài toán giữ nguyên ý tưởng câu 43 thay đổi cách đặt vấn đề và hướng tiếp cận bài toán.

Gọi S là tập tất cả giá trị nguyên của tham số m để phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x-3}+4(m-1)=0$ có nghiệm trên đoạn $\left[\frac{10}{3};6\right]$. Số phần tử của tập S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn C.

Cách 1: Ta có $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x-3}+4(m-1)=0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)-4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+4(m-1)=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)-(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+m-1=0$

Đặt $t=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$ khi $x\in\left[\frac{10}{3};6\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Phương trình trở thành: $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0.$

Bài toán trở thành tìm giá trị nguyên của m để phương trình: $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0(*)$ có nghiệm $t\in[-1;1]$.

$(*)\Leftrightarrow m=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$ có nghiệm $t\in[-1;1]\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(t)\le m\le \max\limits_{[-1;1]} g(t)$.

Xét hàm: $g(t)=\frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$. Ta có: $g'(t)=\frac{4(t^2-1)}{(t^2-t+1)^2}\le 0,\forall t\in(-1;1)$

Lại có hàm số $g(t)$ liên tục trên $[-1;1]$

Suy ra, $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $[-1;1]$

$\Rightarrow \min\limits_{[-1;1]} g(t)=g(1)=-3;\ \max\limits_{[-1;1]} g(t)=g(-1)=\frac{7}{3}.$

$\Rightarrow -3\le m\le\frac{7}{3}$ và $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Cách 2:

Với điều kiện $x>3$ thì $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x-3}+4(m-1)=0\ \ (1)$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)-4(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+4(m-1)=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)-(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+(m-1)=0$

Đặt $t=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$, khi đó $x\in\left[\frac{10}{3};6\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$

Vậy (1) có nghiệm trên $\left[\frac{10}{3};6\right]\Leftrightarrow f(t)=(m-1)t^2-(m-5)t+(m-1)=0\ \ (2)$

có nghiệm trên $[-1;1]$

+ Với $m=1$ $(2)\Leftrightarrow t=0\in[-1;1]$, vậy $m=1$ thỏa mãn điều kiện bài toán (3)

+ Với $m\ne 1$ (2) có nghiệm khi $\Delta=(m-5)^2-4(m-1)^2\ge 0\Leftrightarrow(-m-3)(3m-7)\ge 0\Leftrightarrow -3\le m\le\frac{7}{3}$

Vậy $m\in\left[-3;\frac{7}{3}\right]\backslash\{1\}$ thì (2) có nghiệm.

Xét thấy $f(-1).f(1)=(3m-7)(m+3)\le 0$ đúng với $\forall m\in\left[-3;\frac{7}{3}\right]\backslash\{1\}$

Nên $\forall m\in\left[-3;\frac{7}{3}\right]\backslash\{1\}$ thì (2) luôn có đúng 1 nghiệm $\in[-1;1]$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $m\in\left[-3;\frac{7}{3}\right]$ thì (2) có nghiệm trên $[-1;1]\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm trên $\left[\frac{10}{3};6\right]$

Vì m nguyên nên $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên của *m* để (1) có nghiệm trên $\left[\frac{10}{3};6\right]$.

Câu 43.3. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Định hướng xây dựng bài toán: Bài toán giữ nguyên ý tưởng câu 43 (sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ) thay đổi cách đặt vấn đề và hướng tiếp cận bài toán.

Cho phương trình $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}}x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)$, ($m$ là tham số thực). Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc $\left[8\sqrt{2};+\infty\right)$ là $(a;b]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2a+b=3$. **B.** $2a+b=4$. **C.** $2a+b=0$. **D.** $2a+b=5$.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}}x^2-3}=m\left(\log_4 x^2-3\right)\Leftrightarrow\sqrt{\log_2^2 x-2\log_2 x-3}=m\left(\log_2 x-3\right)$ $(*)$.

Đặt $t=\log_2 x$, khi $x\in\left[8\sqrt{2};+\infty\right)\Rightarrow\log_2 x\ge\frac{7}{2}\Rightarrow t\ge\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Suy ra phương trình $(*)\Leftrightarrow\sqrt{t^2-2t-3}=m(t-3)\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\ t^2-2t-3=m^2(t-3)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge 0\\ m^2=\dfrac{t+1}{t-3}\end{cases}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t+1}{t-3}$, $t\in\left[\frac{7}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=\frac{-4}{(t-3)^2}<0,\forall t\ge\frac{7}{2}$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	9	$\searrow$	1

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ 1 < m^2 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \le 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 5$.

Câu 43.4. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Định hướng xây dựng bài toán: Bài toán giữ nguyên ý tưởng câu 43 (sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ) thay đổi cách đặt vấn đề và phương trình mũ thay cho phương trình logarit.

Tính tổng T các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^x + \left(m^2 - m\right)3^{-x} = 2m$ có đúng hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn $\dfrac{1}{\log 3}$.

A. $T = 28$. **B.** $T = 20$. **C.** $T = 21$. **D.** $T = 27$.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn D

$3^x + \left(m^2 - m\right)3^{-x} = 2m \Leftrightarrow 3^x + \dfrac{\left(m^2 - m\right)}{3^x} - 2m = 0$ (1).

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$

(1) $\Leftrightarrow t^2 - 2mt + m^2 - m = 0$ (2)

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1; x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2 < \dfrac{1}{\log 3}$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt t_1; t_2 thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 10$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 0 < \dfrac{S}{2} < 10 \\ P > 0 \\ (t_1 - 10)(t_2 - 10) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 < m < 10 \\ m^2 - m > 0 \\ m^2 - 21m + 100 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (0; +\infty) \\ m \in (0; 10) \\ m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ m \in \left(-\infty; \dfrac{21 - \sqrt{41}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{21 + \sqrt{41}}{2}; +\infty\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 1 < m < \dfrac{21 - \sqrt{41}}{2}$, vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Vậy $T = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$.

Câu 43.5. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Định hướng xây dựng bài toán: Bài toán giữ nguyên ý tưởng câu 43 (sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ) thay đổi cách đặt vấn đề và phương trình mũ thay cho phương trình logarit.

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x - m.2^x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1; 1)$. Số tập con của tập hợp S là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn A

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{2x}-m.2^{x}-m+3=0$ (1).

Đặt $t=2^x$ khi $x\in(-1;1)\Rightarrow t\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)$, ta có: $(1)\Leftrightarrow t^2-mt-m+3=0\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+3}{t+1}$ (2).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+3}{t+1}, t\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

$\Rightarrow f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-3\\t=1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	$\frac{1}{2}$		1		2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{13}{6}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{7}{3}$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $\left(\dfrac{1}{2};2\right)\Leftrightarrow 2<m<\dfrac{13}{6}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow S=\varnothing$.

Vậy tập S có 1 tập con là chính nó.

Câu 43.6. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Tập hợp các số thực m để phương trình $\ln(3x-mx+1)=\ln\left(-x^2+4x-3\right)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng của $a+b$ bằng

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\dfrac{22}{3}$. **D.** 7.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\ln(3x-mx+1)=\ln\left(-x^2+4x-3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4x-3>0\\3x-mx+1=-x^2+4x-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<3\\x^2-x+4=mx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<3\\m=\dfrac{x^2-x+4}{x}\ (*)\end{cases}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x}$ với $1<x<3$.

Khi đó $f'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x}$ trên khoảng $(1;3)$

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{10}{3}$

Nhận xét: Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm trên khoảng $(1;3)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $(*)$ có nghiệm trên khoảng $(1;3)$ khi và chỉ khi $3\le m<4$ hay $m\in[3;4)$. Do đó $a=3$, $b=4$.

Vậy $a+b=7$.

Câu 43.7. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $m^2\ln\left(\dfrac{x}{e}\right)=(2-m)\ln x-4$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;\sqrt{e}\right]$?

A. 0. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$

$m^2\ln\left(\dfrac{x}{e}\right)=(2-m)\ln x-4\Leftrightarrow\left(m^2+m-2\right)\ln x=m^2-4$ (1)

Đặt $t=\ln x$, $x\in\left[1;\sqrt{e}\right]$ $\Rightarrow t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

Phương trình (1) trở thành $\left(m^2+m-2\right)t=m^2-4$ (2)

TH1: $m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$

Với $m=1$, phương trình (2) $\Rightarrow 0t=-3\Rightarrow m=1$ (Loại)

Với $m=-2$, phương trình (2) $\Rightarrow 0t=0\Rightarrow$ Phương trình (2) vô số nghiệm

$\Rightarrow m=-2$ (thỏa mãn).

TH2: $m^2+m-2\ne0\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne1\\m\ne-2\end{cases}$

Phương trình (2) trở thành $t = \dfrac{m^2-4}{m^2+m-2} = \dfrac{m-2}{m-1}$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thuộc đoạn $\left[1;\sqrt{e}\right]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow 0 \le \frac{m-2}{m-1} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-2}{m-1} \ge 0 \\ \dfrac{m-3}{2(m-1)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \ge 2 \\ m \le 1 \end{array}\right. \\ 1 \le m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [2;3] \cup \{1\}.$$

Vậy $m \in [2;3] \cup \{-2;1\}$. Vậy số giá trị nguyên dương của tham số m là 3.

Câu 43.8. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8} - 2m + 2020 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1;2]$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 6.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn A

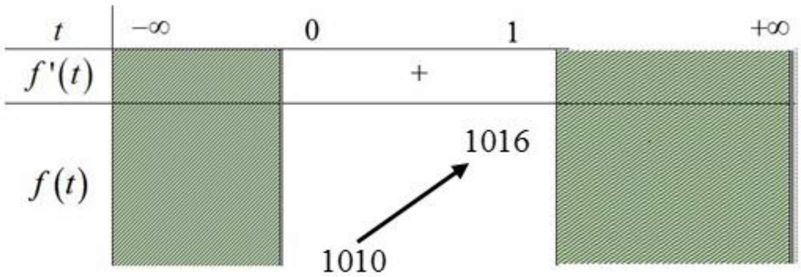
Khi $x \in [1;2]$ ta có $2\log_2 x^4 + \sqrt{2\log_2 x^8} - 2m + 2020 = 0 \Leftrightarrow 4\log_2 x + 2\sqrt{\log_2 x} + 1010 = m$.

Đặt $t = \sqrt{\log_2 x}$. Vì $x \in [1;2] \Rightarrow \sqrt{\log_2 x} \in [0;1]$.

$\Rightarrow f(t) = 4t^2 + 2t + 1010 = m$ có nghiệm thuộc $[1;2]$

Ta có $f'(t) = 8t + 2 > 0,\ \forall t \in [0;1]$

Bảng biến thiên:



$\Rightarrow 1010 \le m \le 1016 \Rightarrow S = \{1010;1011;1012;1013;1014;1015;1016\}$.

Số phần tử của S là 7.

Câu 43.9. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Cho phương trình $(3x-5)\log_3^2(x+m) + (9x-19)\log_3(x+m) = 12$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(2;+\infty)$

A. $\left(-\infty;-\dfrac{53}{27}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{53}{27};79\right)$. **C.** $(-79;+\infty)$. **D.** $(-\infty;79)$.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=(-m;+\infty)$.

Đặt $t=\log_3(x+m)$. Phương trình đã cho trở thành $(3x-5)t^2+(9x-19)t-12=0$

$\Leftrightarrow (3x-5)t^2+(9x-15)t-4t-12=0 \Leftrightarrow (3x-5)t(t+3)-4(t+3)=0 \Leftrightarrow (t+3)[(3x-5)t-4]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t+3=0 \\ (3x-5)t-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=\dfrac{4}{3x-5} \end{array}\right.$ (do $x>2$)

+) Với $t=-3 \Rightarrow \log_3(x+m)=-3 \Leftrightarrow x+m=\dfrac{1}{27} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{27}-m$.

Để $x=\dfrac{1}{27}-m$ là nghiệm thuộc khoảng $(2;+\infty)$ thì $\dfrac{1}{27}-m>2 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{27}-2 \Leftrightarrow m<\dfrac{-53}{27}$.

+) Với $t=\dfrac{4}{3x-5} \Rightarrow \log_3(x+m)=\dfrac{4}{3x-5}$

$\Leftrightarrow x+m=3^{\frac{4}{3x-5}} \Leftrightarrow m=3^{\frac{4}{3x-5}}-x$.

Đặt $f(x)=3^{\frac{4}{3x-5}}-x$ với $x>2 \Rightarrow f'(x)=3^{\frac{4}{3x-5}}.\dfrac{-12}{(3x-5)^2}.\ln 3-1<0 \ \forall x>2$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $(2;+\infty) \Rightarrow f(x)<f(2) \Leftrightarrow f(x)<79$.

Phương trình có nghiệm thuộc khoảng từ $(2;+\infty)$ thì $m<79$.

Kết hợp hai trường hợp trên ta được $m\in(-\infty;79)$.

Câu 43.10. (Bài toán phát triển) (*Phát triển Tương tự câu 43 đề thi tham khảo*)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m đề đồ thị hàm số $y=m\log_2^2 x-2\log_2 x+2m+1$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc khoảng $[1;+\infty)$.

A. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **B.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

C. $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Giáo viên soạn bài: Cao Văn Kiên, Phản biện: Nguyễn Hoàng Việt

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $m\log_2^2 x-2\log_2 x+2m+1=0$ (1).

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $[1;+\infty)$.

Đặt $t=\log_2 x\geq 0 \ \forall x\in[1;+\infty)$.

Phương trình (1) $\Leftrightarrow mt^2-2t+2m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{2t-1}{t^2+2}$ (2).

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có duy nhất một nghiệm $t\in[0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t-1}{t^2+2}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(t^2+2)-2t(2t-1)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-2t^2+2t+4}{(t^2+1)^2}$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow -2t^2+2t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\notin[0;+\infty) \\ t=2\in[0;+\infty) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		2		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta suy ra: ycbt $\Leftrightarrow m\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Câu 44 : Nguyễn Tất Thành phát triển Võ Trọng Trí Phản Biện

Câu 44: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là

A. $-\sin 2x+\cos 2x+C.$ **B.** $-2\sin 2x+\cos 2x+C.$

C. $-2\sin 2x-\cos 2x+C.$ **D.** $2\sin 2x-\cos 2x+C.$

Phân tích ý tưởng: Bài toán sử dụng định nghĩa nguyên hàm: $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì $F'(x)=f(x)$.

+ Tính chất: $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$.

+ Bản chất của dạng toán là tìm được hàm $f(x)$ từ dữ kiện ban đầu.

+ Nguyên hàm từng phần.

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $(\cos 2x)'=f(x)e^x \Rightarrow f(x)e^x=-2\sin 2x.$

Xét $I=\int f'(x)e^x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=e^x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=e^x\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

$I=f(x)e^x-\int f(x)e^x\mathrm{d}x=-2\sin 2x+2\int \sin 2x\mathrm{d}x=-2\sin 2x-\cos 2x+C.$

Phát triển câu 44

Câu 44.1 (Tương tự ***Phát triển Tương tự câu 44 đề thi tham khảo***) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}_+^*$. Biết $\sin 2x$ là một nguyên hàm của hàm số

$\dfrac{f(x)}{x}$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. $2x\cos 2x.\ln x+\sin 2x+C$ **B.** $2x\sin 2x.\ln x-\cos 2x+C$

C. $2x\cos 2x.\ln x-\sin 2x+C$ **D.** $-2x\cos 2x.\ln x+\sin 2x+C$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết $(\sin 2x)'=\dfrac{f(x)}{x}\Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}=2\cos 2x\Rightarrow f(x)=2x\cos 2x.$

Xét $I=\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

$I=f(x)\ln x-\int \dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=2x\cos 2x.\ln x-2\int \cos 2x\mathrm{d}x=2x\cos 2x.\ln x-\sin 2x+C.$

Phát triển hướng 1 : Áp dụng $\int u^n\mathrm{d}u=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C;\int \dfrac{1}{u}\mathrm{d}u=\ln|u|+C.$

Câu 44.2. (*Phát triển Tương tự câu 44 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=0$, $F(x)=[f(x)]^{2020}$ là một nguyên hàm của $2020x.e^x$. Họ các nguyên hàm của $f^{2020}(x)$ là

A. $2020(x-2)e^x+C$. **B.** xe^x+C. **C.** $2020(x+2)e^x+C$. **D.** $(x-2)e^x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $F'(x)=2020xe^x\Leftrightarrow 2020.f'(x).f^{2019}(x)=2020x.e^x\Rightarrow f'(x).f^{2019}(x)=x.e^x$.

$\Rightarrow \int f'(x).[f(x)]^{2019}\mathrm{d}x=\int x.\mathrm{d}e^x\Leftrightarrow \int [f(x)]^{2019}\mathrm{d}f(x)=(x-1).e^x+C'$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2020}.[f(x)]^{2020}=(x-1).e^x+C'\Leftrightarrow [f(x)]^{2020}=2020(x-1).e^x+2020C'$.

Do $f(1)=0\Rightarrow C'=0$ hay $[f(x)]^{2020}=2020(x-1).e^x$.

Do đó $I=\int f^{2020}(x)\mathrm{d}x=\int (x-1)e^x\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x-1 \\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ v=e^x \end{cases}$

$I=(x-1)e^x-\int e^x\mathrm{d}x=(x-2)e^x+C.$

Phát triển hướng 2: Áp dụng $u.v' + u'v = (u.v)'$.

Câu 44.3 : (***Phát triển Tương tự câu 44 đề thi tham khảo***) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 1$, $F(x) = f(x) - e^x - x$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Họ các nguyên hàm của $f(x)$ là

A. $(x+1)e^x + C$. **B.** $(x+1)e^x - x + C$. **C.** $(x+2)e^x - x + C$. **D.** $(x+1)e^x + x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $F'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - e^x - 1 = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = e^x + 1 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = 1 + e^{-x}$

$\Leftrightarrow \left[e^{-x}f(x)\right]' = 1 + e^{-x} \Rightarrow e^{-x}f(x) = x - e^{-x} + C' \Rightarrow f(x) = xe^x - 1 + C'e^x$.

Do $f(0) = 1 \Rightarrow C' = 2 \Rightarrow f(x) = (x+2)e^x - 1$.

Do đó $I = \int f(x)\mathrm{dx} = \int\left[(x+2)e^x - 1\right]\mathrm{dx} = \int(x+2)e^x\mathrm{dx} - \int\mathrm{dx}$.

Đặt $\begin{cases} u = x+2 \\ \mathrm{dv} = e^x\mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{du} = \mathrm{dx} \\ v = e^x \end{cases}$

$I = (x+2)e^x - \int e^x\mathrm{dx} - \int\mathrm{dx} = (x+2)e^x - e^x - x + C = (x+1)e^x - x + C.$

Phát triển hướng 3: Áp dụng $\dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \left(\dfrac{u}{v}\right)'$.

Câu 44.4 : (***Phát triển Tương tự câu 44 đề thi tham khảo***) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0$, $F(x) = f(x).e^{3x}$ là một nguyên hàm của $e^{3x}.\left[6f(x) + 2xe^{3x}\right]$. Họ các nguyên hàm của $f(x)$ là

A. $\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$. **B.** $\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} - \frac{2}{27}e^{3x} + C$.

C. $\frac{1}{3}x^2e^{3x} + \frac{1}{9}xe^{3x} + \frac{1}{27}e^{3x} + C$. **D.** $\frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{1}{9}xe^{3x} + \frac{1}{27}e^{3x} + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F'(x) = e^{3x}.\left[6f(x) + 2xe^{3x}\right] \Leftrightarrow f'(x)e^{3x} + 3f(x)e^{3x} = 6e^{3x}f(x) + 2xe^{6x}$

$\Leftrightarrow f'(x)e^{3x} - 3f(x)e^{3x} = xe^{6x} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)e^{3x} - 3f(x)e^{3x}}{\left(e^{3x}\right)^2} = x$

$\Leftrightarrow \left[\dfrac{f(x)}{e^{3x}}\right]' = 2x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{e^{3x}} = x^2 + C'$.

Do $f(0) = 0 \Rightarrow C' = 0 \Rightarrow f(x) = x^2e^{3x}$.

Do đó $I=\int f\left(x\right)\mathrm{dx}=\int x^2\mathrm{e}^{3x}\mathrm{dx}$.

Đặt $\begin{cases} u_1=x^2 \\ \mathrm{d}v_1=e^{3x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_2=2x\mathrm{d}x \\ v_2=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}\mathrm{d}x.$$

Đặt $\begin{cases} u_2=x \\ \mathrm{d}v_2=e^{3x}\mathrm{d}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u_2=\mathrm{d}x \\ v_2=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}\right)+C.$$

$$=\frac{1}{3}x^2e^{3x}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$$

Câu 45 : Phong Do phát triển – Hưng Hoàng phản biện

Câu 45: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\pi;2\pi\right]$ của phương trình $2f\left(\sin x\right)+3=0$ là

A. 4.. **B.** 6.. **C.** 3.. **D.** 8.

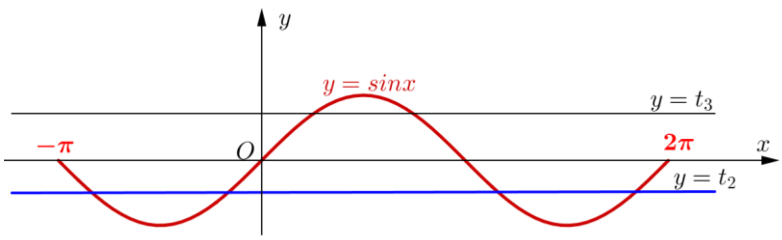
Lời giải

Chọn B

Ta có $2f\left(\sin x\right)+3=0\Leftrightarrow f\left(\sin x\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

$$f\left(\sin x\right)=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} \sin x=t_1\in\left(-\infty;-1\right) & (1) \\ \sin x=t_2\in\left(-1;0\right) & (2) \\ \sin x=t_3\in\left(0;1\right) & (3) \\ \sin x=t_4\in\left(1;+\infty\right) & (4) \end{array}\right.$$



Phương trình (1) và (4) vô nghiệm.

Phương trình (2) có 4 nghiệm phân biệt

Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của (2).

Do đó tổng số nghiệm của phương trình đã cho là 6.

Phân tích: Bài toán là sự kết hợp giữa kiến thức

1) Dựa vào BBT xác định số nghiệm phương trình $f(x)=M$ lớp 12

2) Xác định số nghiệm phương trình $\sin x=m$ trên một đoạn $[a;b]$ lớp 11

Hướng phát triển:

1) Thay BBT thành đồ thị của hàm số $y=f(x)$ $\Rightarrow$ xác định số nghiệm $f(x)=a$, $f(x)=ax+b$, $f(x)=ax^2+bx+c$

2) Thay phương trình $f(u)=m$ thành phương trình chứa dấu trị tuyệt đối, căn thức, phương trình chứa tham số.

Bài tập : Tương tự

45.1 (*Phát triển Tương tự câu 45 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	-1	1	-1	-3	-1	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};3\pi\right]$ của phương trình $2f(2\cos x+1)+3=0$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 11. **D.** 12

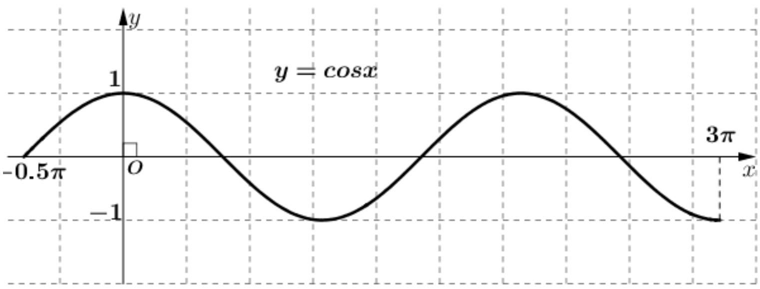
Lời giải

Chọn B

Ta có: $2f(2\cos x+1)+3=0 \Leftrightarrow f(2\cos x+1)=-\frac{3}{2}$

Dựa vào BBT ta có:

$$f(2\cos x+1)=-\frac{3}{2}<-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\cos x+1=m\in(-\infty;-2) & (1) \\ 2\cos x+1=n\in(0;1) & (2) \\ 2\cos x+1=p\in(1;2) & (3) \end{array}\right.$$



Dựa vào đồ thị hàm số $y=\cos x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};3\pi\right]$ ta có:

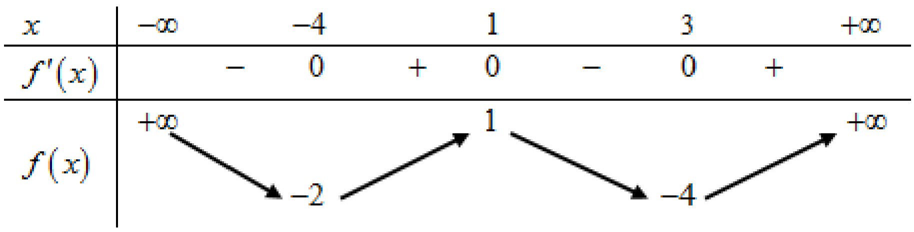
$(1)\Leftrightarrow 2\cos x+1=m\in(-\infty;-2)\Leftrightarrow \cos x=\frac{m-1}{2}\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

$(2)\Leftrightarrow 2\cos x+1=n\in(0;1)\Leftrightarrow \cos x=\frac{n-1}{2}\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\Rightarrow$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt

$(3)\Leftrightarrow 2\cos x+1=p\in(1;2)\Leftrightarrow \cos x=\frac{p-1}{2}\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$ phương trình có 4 nghiệm phân biệt

Phát triển theo hướng phương trình chứa dấu trị tuyệt đối.

45.2 (***Phát triển Tương tự câu 45 đề thi tham khảo***) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình $|f(f(x))|=2$

A. 4. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 9

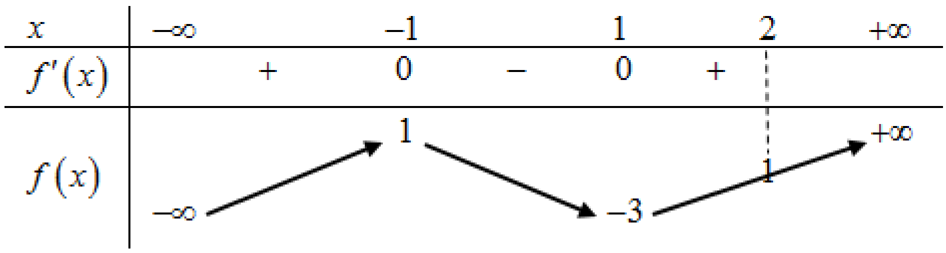
Lời giải

Chọn C

Ta có: $|f(f(x))|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(f(x))=2\\f(f(x))=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=a<-4\\f(x)=b>3\\f(x)=-4\\f(x)=c\in(1;3)\\f(x)=d>3\end{array}\right.\Rightarrow$ phương trình có 7 nghiệm phân biệt

Phát triển theo hướng phương trình chứa tham số.

45.3 (***Phát triển Tương tự câu 45 đề thi tham khảo***) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|2f(x)+m|)=1$ có đúng 2 nghiệm trên $[-1;1]$

A. 13. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 5

Lời giải

Chọn D

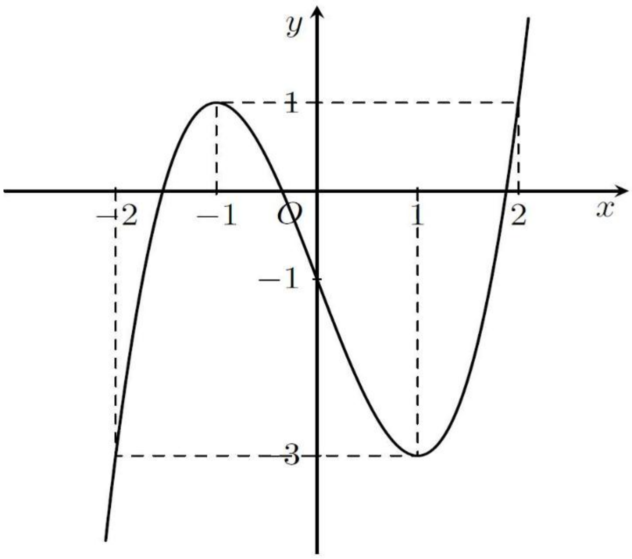
Ta có: $f\left(\left|2f\left(x\right)+m\right|\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|2f\left(x\right)+m\right|=-1\ \text{(VN)}\\\left|2f\left(x\right)+m\right|=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2f\left(x\right)+m=2\\2f\left(x\right)+m=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=\dfrac{2-m}{2}\\f\left(x\right)=\dfrac{-2-m}{2}\end{array}\right.$

Dựa vào BBT ta có trên $\left[-1;1\right]$, để phương trình $f\left(\left|2f\left(x\right)+m\right|\right)=1$ có đúng 2 nghiệm thì $\begin{cases}-3\le\dfrac{2-m}{2}\le1\\-3\le\dfrac{-2-m}{2}\le1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le m\le8\\-4\le m\le4\end{cases}\Leftrightarrow0\le m\le4\Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên của tham số m.

Phát triển theo hướng đồ thị và phương trình chứa tham số

45.4 (*Phát triển Tương tự câu 45 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(f\left(x\right)+m\right)+1=f\left(x\right)+m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt trên $\left[-1;1\right]$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(f\left(x\right)+m\right)+1=f\left(x\right)+m\Leftrightarrow f\left(t\right)=t-1$ với $t=f\left(x\right)+m$

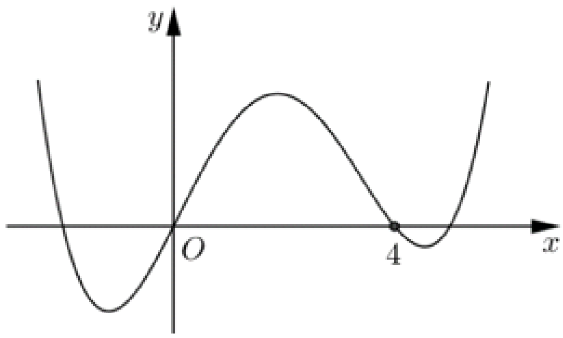
Dựa vào đồ thị ta có: $f\left(t\right)=t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=0\\t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=-m-2\\f\left(x\right)=-m\\f\left(x\right)=-m+2\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị trên $[-1;1]$, phương trình $f\left(f\left(x\right)+m\right)+1=f\left(x\right)+m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases}-3\le -m-2\le 1\\ -3\le -m\le 1\\ -3\le -m+2\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le m\le 1\\ -1\le m\le 3\\ 1\le m\le 5\end{cases}\Rightarrow m=1$$

Câu 46 : NgoNguyenQuocMan phát triển – ĐinhNgọc Phúc phản biện

Câu 46: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $u=x^3+3x^2$ ta có $u'=3x^2+6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=0\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

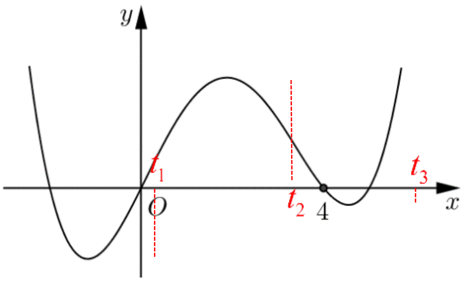
x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Xét hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)$, ta có $g'\left(x\right)=\left(3x^2+6x\right)f'\left(x^3+3x^2\right)$

$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0\end{array}\right.$$

Phương trình $3x^2+6x=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=-2,\ x=0$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$



Suy ra: phương trình $f'\left(x^3+3x^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3+3x^2=t_1\in(-\infty;0) & (1)\\ x^3+3x^2=t_2\in(0;4) & (2)\\ x^3+3x^2=t_3\in(4;+\infty) & (3)\end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $u=x^3+3x^2$ ta thấy:

(1) có 1 nghiệm duy nhất

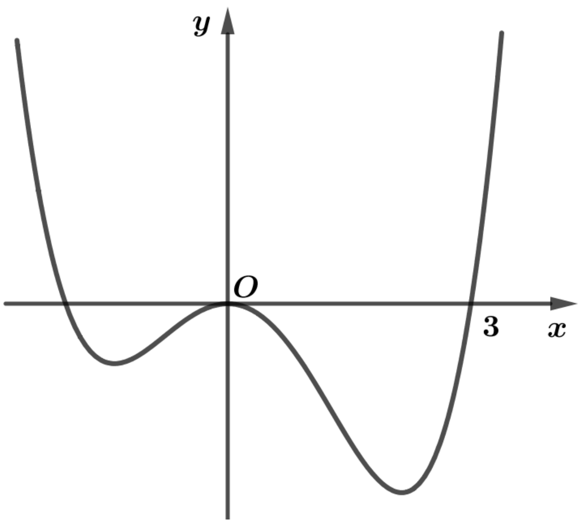
(2) có 3 nghiệm phân biệt

(3) có 1 nghiệm duy nhất.

Suy ra $g'(x)=0$ có 7 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Bài tương tự câu 46:

Câu 1: 46.1 (*Phát triển Tương tự câu 46 đề thi tham khảo*) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x^2\right)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 9

Lời giải

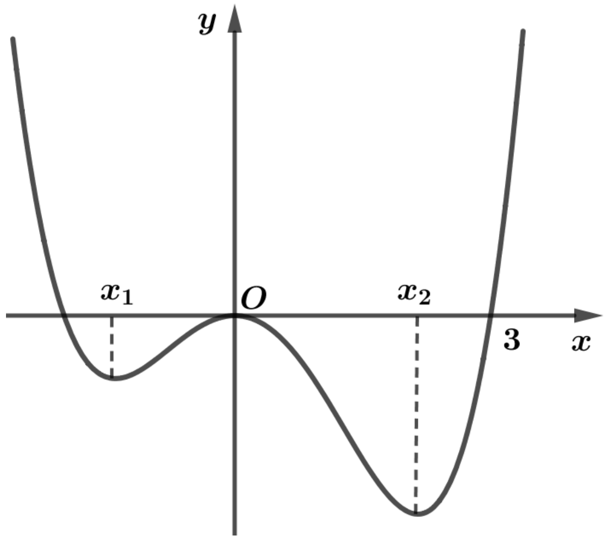
Chọn C

Xét hàm số $u=x^3-3x^2$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x) f'(x^3 - 3x^2)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \\ f'(x^3 - 3x^2) = 0 \end{array}\right..$$



Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có:

$$f'(x^3 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 - 3x^2 = 0 & (1) \\ x^3 - 3x^2 = x_1 \in (-3;0) & (2) \\ x^3 - 3x^2 = x_2 \in (1;3) & (3) \end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $u = x^3 - 3x^2$ ta thấy:

(1) có 2 nghiệm phân biệt, trong đó $x = 0$ là nghiệm kép.

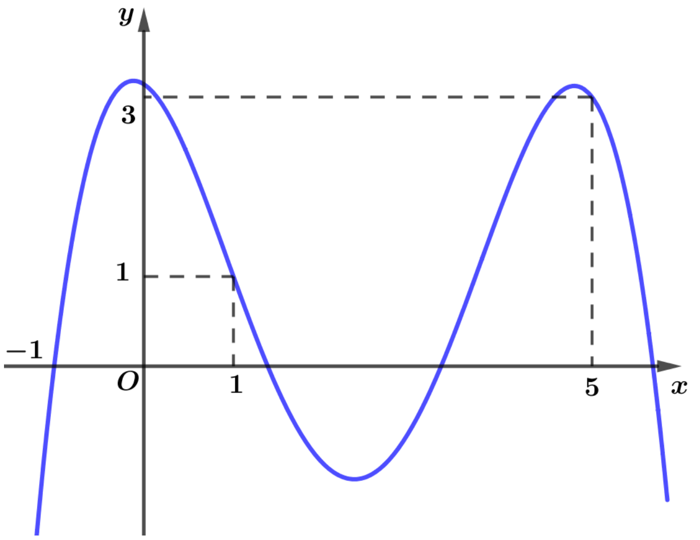
(2) có 3 nghiệm phân biệt khác với các nghiệm trên.

(3) có nghiệm duy nhất khác với tất cả các nghiệm trên.

Suy ra $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này (trong đó $x = 0$ là nghiệm bội 3) nên hàm số $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Bài phát triển câu 46

46.2 (*Phát triển Tương tự câu 46 đề thi tham khảo*) Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=8f\left(x^3-3x+3\right)-\left(2x^6-12x^4+16x^3+18x^2-48x+1\right)$ là:

A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 9.

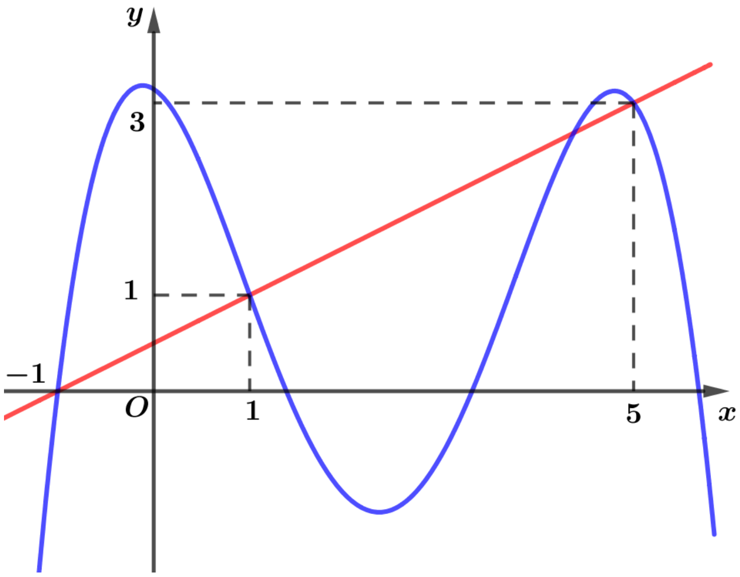
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'\left(x\right)=8\left(3x^2-3\right)f'\left(x^3-3x+3\right)-\left(12x^5-48x^3+48x^2+36x-48\right)$

$$=24\left(x^2-1\right)\left[f'\left(x^3-3x+3\right)-\frac{\left(x^3-3x+3\right)+1}{2}\right]$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1\\ f'(x^3-3x+3)=\dfrac{\left(x^3-3x+3\right)+1}{2}\quad(*)\end{array}\right.$$



Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, ta có:

Đặt: $x^3-3x+3=t$

Phương trình (*) trở thành: $f'(t)=\dfrac{t+1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=1\\ t=5\end{array}\right.$

+) Với $t=-1$ ta có: $x^3-3x+3=-1$ (phương trình này có 1 nghiệm không nguyên).

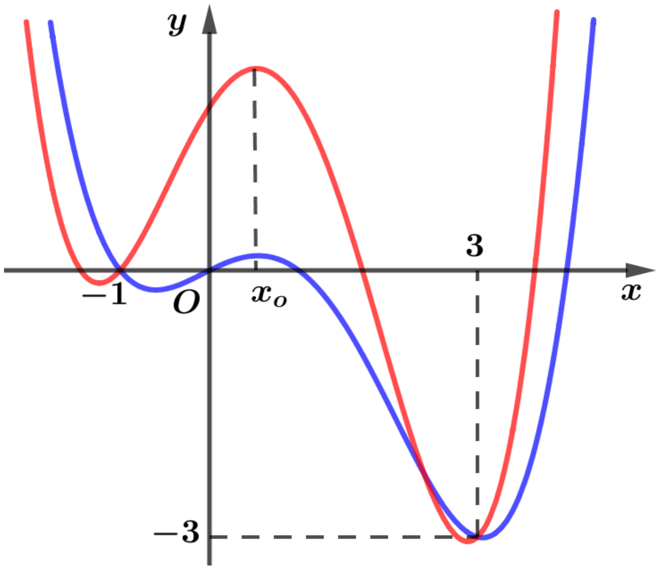
+) Với $t=1$ ta có: $x^3-3x+3=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.$, trong đó $x=1$ là nghiệm bội hai.

+) Với $t=5$ ta có: $x^3-3x+3=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.$, trong đó $x=-1$ là nghiệm bội hai.

Suy ra $g'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này (trong đó $x=\pm1$ là nghiệm bội 3) nên hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Phân tích hướng phát triển: *tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(u)+u(x)$ trong đó $u(x)$ là hàm cụ thể và $f(x)$ là hàm đã cho sẵn đồ thị*

46.3 (*Phát triển Tương tự câu 46 đề thi tham khảo*) Cho hai hàm số bậc bốn $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có các đồ thị như hình dưới đây (2 đồ thị chỉ có đúng 3 điểm chung).



Số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f^2(x)+g^2(x)-2f(x).g(x)$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $h(x)=\left[f(x)-g(x)\right]^2\Rightarrow h'(x)=2\left[f(x)-g(x)\right]\left[f'(x)-g'(x)\right]$

$h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)-g(x)=0 & (1)\\ f'(x)-g'(x)=0 & (2)\end{array}\right.$

Từ đồ thị ta thấy phương trình (1) có đúng 3 nghiệm phân biệt là $x=-1; x=x_1\in(-1;3); x=3$ và đa thức $f(x)-g(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm này. Do đó các nghiệm trên là các nghiệm bội lẻ của (1). Mà

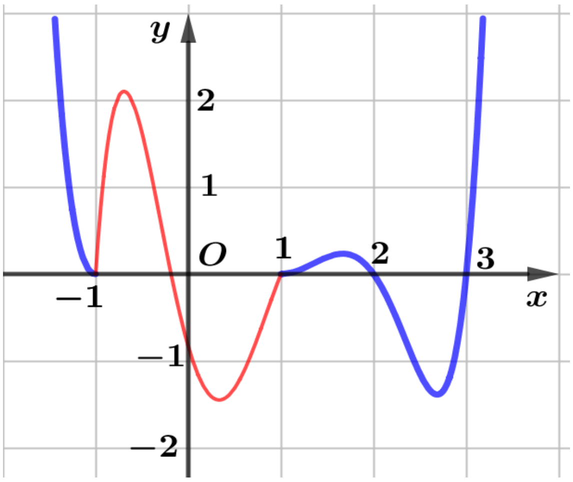
$f(x)$ và $g(x)$ đều là đa thức bậc 4 nên bậc của phương trình (1) nhỏ hơn hoặc bằng 4. Từ đó suy ra phương trình (1) là phương trình bậc 3.

Do phương trình (1) là phương trình bậc 3 có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt không trùng các nghiệm của phương trình (1).

Suy ra $h'(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt và $h'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này nên hàm số $h(x)$ có 5 điểm cực trị.

Phân tích hướng phát triển: *tìm số điểm cực trị của hàm số* $h(x)=u[f(x);g(x)]$ *trong đó* $g(x)$ *và* $f(x)$ *là hàm đã cho sẵn đồ thị*

46.4 (*Phát triển Tương tự câu 46 đề thi tham khảo*) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Trong hình vẽ dưới đây, gồm đồ thị $y=f(x)$ trên $(-\infty;-1]$ và $[1;+\infty)$ (đậm hơn), đồ thị $y=f'(x)$ trên $[-1;1]$. Biết $\max\limits_{[-1;1]} f(x)>1$

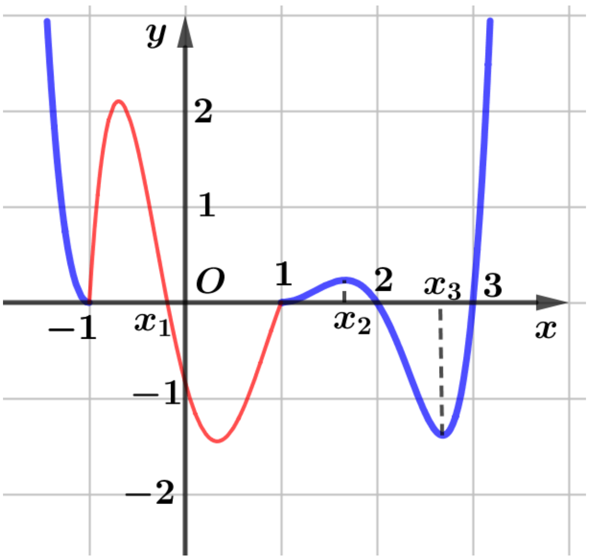


Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f[f(x)+2]$ là

A. 9. **B.** 7. **C.** 13. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C



Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		x_1		1		x_2		2		x_3		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0		$-$		0		$+$		
y	$+\infty$		0				0						$f(x_3)$				$+\infty$

Chú ý rằng : $\begin{cases} \max\limits_{[-1;1]} f(x) = f(x_1) > 1 \\ f(x_2) \in (0;0,5) \\ \min f(x) = f(x_3) > -1,5 \end{cases}$

Ta có: $g'(x) = f'(x).f'\left[f(x)+2\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1) \\ f'\left[f(x)+2\right]=0 & (2) \end{array}\right..$$

$(1) \Leftrightarrow x=\pm1 \vee x=x_1 \vee x=x_2 \vee x=x_3$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(x)+2=-1 & (3) \\ f(x)+2=x_1 \in (-0,5;0) & (4) \\ f(x)+2=1 & (5) \\ f(x)+2=x_2 \in (1,5;2) & (6) \\ f(x)+2=x_3 \in (2,5;3) & (7) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị và bảng biến thiên ta có:

(3) và (4) vô nghiệm.

$(5) \Leftrightarrow f(x)=-1$: có 2 nghiệm phân biệt

$(6) \Leftrightarrow f(x)=x_2-2 \in (-0,5;0)$: có 2 nghiệm phân biệt.

$(7) \Leftrightarrow f(x)=x_3-2 \in (0,5;1)$: có 4 nghiệm phân biệt.

Suy ra $g'(x)=0$ có 13 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm này nên hàm số $g(x)$ có 13 điểm cực trị.

Phân tích hướng phát triển: *tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(f(x)+\alpha)$ trong đó α là hằng số và cho sẵn 1 phần đồ thị của $f(x)$ và của $f'(x)$*

Câu 47 : Bùi Văn Nam phát triển – Lê Thảo phản biện

Câu 47. **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le x \le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x>-1$

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+(x+1)=2y+3^{2y}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t+3^t, t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=1+3^t\ln 3>0, \forall t\in\mathbb{R}$, tức hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow f(\log_3(x+1))=f(2y)\Leftrightarrow \log_3(x+1)=2y\Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020$ nên $0\le 9^y-1\le 2020\Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2021$.

Do y nguyên nên $y\in\{0;1;2;3\}$.

$\Rightarrow (x;y)\in\{(0;0);(8;1);(80;2);(728;3)\}$ nên tổng cộng có 4 cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa đề.

Bài tập tương tự

47.1 (*Phát triển Tương tự câu 47 đề thi tham khảo*) Cho x,y là các số thực thỏa mãn $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$. Biết $0\le x\le 2018$, số cặp $(x;y)$ nguyên thỏa mãn đẳng thức là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y \Leftrightarrow 2^{\log_2(x+1)}+\log_2(x+1)=2^{3y}+3y$ (1).

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ có $f'(t)=2^t\ln 2+1>0$

Nên $(1)\Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y\Leftrightarrow x=2^{3y}-1$.

Với $0\le x\le 2018\Leftrightarrow 1\le 8^y\le 2019\Leftrightarrow 0\le y\le \log_8 2019$, $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$.

Bài tập phát triển:

Biến đổi phương trình đưa về hàm đặc trưng. Là điểm mấu chốt bài toán từ đó suy ra $f(u)=f(v)$

Vấn đề khó nhất trong lời giải là tìm ra được hàm đặc trưng từ đó xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên tập xác định của nó, suy ra $f(u)=f(v)$, muốn làm được dạng này học sinh phải thành thạo các kĩ năng biến đổi phương trình mũ, phương trình logarit. từ đó suy ra hàm đặc trưng.

47.2 (*Phát triển Tương tự câu 47 đề thi tham khảo*) Cho phương trình $4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2)=0$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt. Tổng các phần tử của S bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định: $x\in\mathbb{R}$.

Xét phương trình $4^{-|x-m|}\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+3)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{2}}(2|x-m|+2)=0$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 2^{-2|x-m|+1}.\log_2\left[(x^2-2x+1)+2\right]=2^{-(x^2-2x+1)+1}.\log_2(2|x-m|+2)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1}.\log_2\left[(x^2-2x+1)+2\right]=2^{2|x-m|}.\log_2(2|x-m|+2)$ (2)

Xét hàm số: $f(t)=2^t\log_2(t+2), t\ge 0$.

Ta có: $f'(t)=2^t.\ln 2.\log_2(t+2)+2^t.\dfrac{1}{(t+2)\ln 2}>0\ \forall t\ge 0$.

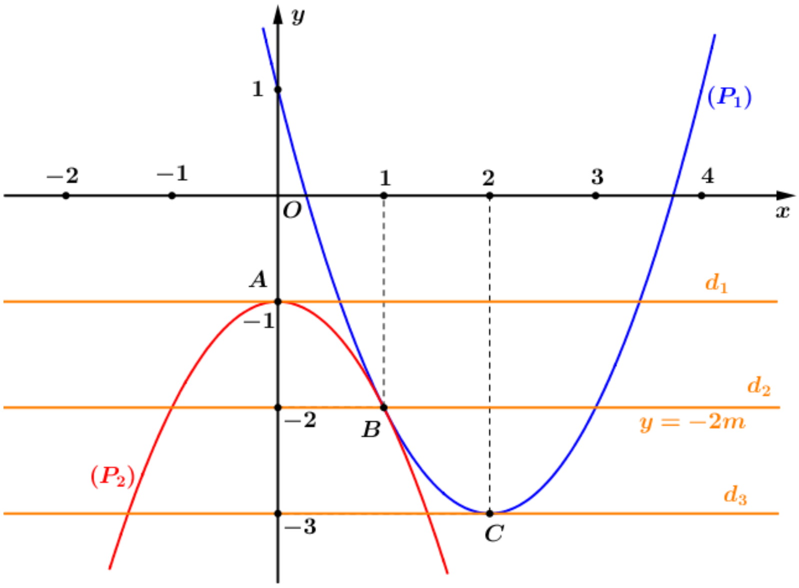
Mà $f(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Phương trình (2) có dạng $f\left(x^2-2x+1\right)=f\left(2|x-m|\right)$

và $x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$; $2|x-m|\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow x^2-2x+1=2|x-m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=2(x-m)\\x^2-2x+1=2(m-x)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^2-4x+1=-2m & (*)\\-x^2-1=-2m & (**)\end{array}\right.$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt.
Dựng các Parabol: $y=x^2-4x+1\ (P_1)$ và $y=-x^2-1\ (P_2)$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ (xem hình vẽ).



Số lượng nghiệm của (*) và (**) bằng số giao điểm của đường thẳng $d: y=-2m$ lần lượt với các đồ thị (P_1) và (P_2). Dựa vào đồ thị có thể thấy phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm phân biệt thì d phải nằm ở các vị trí của d_1, d_2, d_3.

Tương ứng khi đó ta có: $-2m=-1\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$;

$-2m=-2\Leftrightarrow m=1$;

$-2m=-3\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Do đó có ba giá trị của m thỏa mãn yêu cầu: $m=\dfrac{1}{2}$; $m=1$; $m=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$ suy ra tổng các phần tử của S bằng 3.

Cách 2.

$$x^2-2x+1=2|x-m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2x+1=2(x-m) \\ x^2-2x+1=2(m-x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2-4x+1+2m=0 & (a) \\ x^2+1-2m=0 & (b) \end{array}\right..$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 3 nghiệm thực phân biệt.

Xảy ra 3 khả năng:

KN1: Phương trình (a) có nghiệm kép, phương trình (b) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm kép của phương trình (a).

Phương trình (a) có nghiệm kép $\Leftrightarrow 3-2m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Với $m=\dfrac{3}{2}$, phương trình (a) có nghiệm kép $x=2$.

phương trình (b) thành $x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$ (Thỏa mãn $x \neq 2$).

KN2: Phương trình (b) có nghiệm kép, phương trình (a) có hai nghiệm phân biệt khác nghiệm kép của phương trình (b).

Phương trình (b) có nghiệm kép $\Leftrightarrow 1-2m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Với $m=\dfrac{1}{2}$, phương trình (b) có nghiệm kép $x=0$.

phương trình (a) thành $x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2} \end{array}\right.$ (Thỏa mãn $x \neq 0$).

KN3: Phương trình (a) và phương trình (b) đều có hai nghiệm phân biệt và chúng có đúng 1 nghiệm chung.

Gọi x_0 là nghiệm chung của phương trình (a) và phương trình (b).

Khi đó: $\begin{cases} x_0^2-4x_0+1+2m=0 \\ x_0^2+1-2m=0 \end{cases} \Rightarrow x_0^2-4x_0+1=-x_0^2-1 \Leftrightarrow 2x_0^2-4x_0+2=0 \Leftrightarrow x_0=1$.

$x_0=1$ là nghiệm chung của (a) và $(b) \Rightarrow 2m=2 \Leftrightarrow m=1$.

Với $m=1$

Phương trình (a): $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Phương trình (b): $x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt $x=-1$; $x=1$; $x=3$.

Từ đó suy ra có ba giá trị của thỏa mãn yêu cầu: $m=\dfrac{1}{2}$; $m=1$; $m=\dfrac{3}{2}$.

Vậy $S=\left\{\dfrac{1}{2};1;\dfrac{3}{2}\right\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 3.

47.3 ***(Phát triển Tương tự câu 47 đề thi tham khảo)*** Có bao nhiêu số nguyên của m để phương trình $\log_2(2x+m)-2\log_2 x = x^2-4x-2m-1$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x>-\dfrac{m}{2} \end{cases}$

$\log_2(2x+m)-2\log_2 x = x^2-4x-2m-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)-2\log_2 x = x^2-2(x+2m)-1$

$\Leftrightarrow \log_2(2x+m)+2(x+2m)+1 = \log_2 x^2 + x^2$

$\Leftrightarrow \log_2 2(2x+m)+2(x+2m) = \log_2 x^2 + x^2$

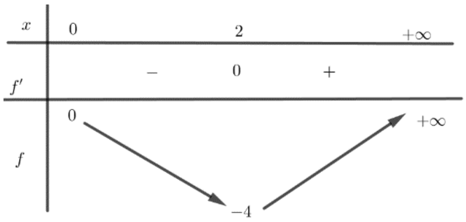
$\Leftrightarrow f(u)=f(v)$

Xét $f(u)=\log_2 u+u,(u>0)$

$f'(u)=\dfrac{1}{u\ln 2}+1>0$

Suy ra $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow 2(2x+m)=x^2 \Leftrightarrow x^2-4x=2m$

Xét hàm số $f(x)=x^2-2x,(x>0)$



Phương trình có 2 nghiệm dương khi $-4<2m<0 \Leftrightarrow -2<m<0$ suy ra có 1 giá trị nguyên.

47.4 ***(Phát triển Tương tự câu 47 đề thi tham khảo)*** Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=13$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=14$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0, x\neq\dfrac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(4x^2-4x+1\right)+4x^2-4x+1=\log_7(2x)+2x$.

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0 \quad \forall t>0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó ta có $4x^2-4x+1=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Khi đó

$$x_1+2x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{4}+2\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right) \text{ hoặc } x_1+2x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}+2\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9-\sqrt{5}\right).$$

Vậy $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4};x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. Do đó $a=9;b=5$ và $a+b=9+5=14$.

47.5 ***(Phát triển Tương tự câu 47 đề thi tham khảo)*** Biết phương trình $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x=a+b\sqrt{2}$ trong đó a,b là các số nguyên. Tính $2a+b$.

A. 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Leftrightarrow\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)\quad 1$.

ĐKXĐ: $x>1$.

$$1\ \Leftrightarrow\log_5\ 2\sqrt{x}+1\ +2\log_3 2\sqrt{x}=\log_5 x+2\log_3\ x-1\qquad (*)$$

Xét hàm số $f\ t\ =\log_5 t+2\log_3\ t-1$, với $t>1$.

$f'\ t\ =\frac{1}{t.\ln 5}+\frac{2}{t-1\ \ln 3}>0$ với mọi $t>1$, suy ra $f\ t$ đồng biến trên khoảng $1;+\infty$.

Từ (*) ta có $f\ 2\sqrt{x}+1\ =f\ x$ nên suy ra $2\sqrt{x}+1=x\Leftrightarrow\ \sqrt{x}\ ^2-2\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x}=1+\sqrt{2}$ (do $x>1$).

Suy ra $x=3+2\sqrt{2}\Rightarrow a=3;b=2\Rightarrow 2a+b=8$.

Nhận xét:

Câu này dùng Casio với chức năng SOLVE, ta tìm được nghiệm và STO A.

Tức là $A=a+b\sqrt{2}\Rightarrow a=A-b\sqrt{2}$

Dùng chức năng TABLE với $f\ x\ =A-x\sqrt{2}$, start -10, end 10, step 1. Ta tìm được a,b như cách giải tự luận.

Câu 48 :Nguyễn Minh Nhiên phát triển – VanTri Tran phản biện

1. **Lời giải và phân tích**

Câu 48: [ĐỀ THI THAM KHẢO] Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Khi đó $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\dfrac{17}{20}$. **B.** $-\dfrac{13}{4}$. **C.** $\dfrac{17}{4}$. **D.** -1.

Lời giải 1:

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Với $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có

$$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x$$

$$\Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2 \quad (*)$$

$$\Rightarrow \int x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int (-x^{11} + x^7 - 2x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int f(x^3)\mathrm{d}(x^3) - \frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{x^{12}}{12} + \frac{x^8}{8} - \frac{2x^3}{3} + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}F(x^3) - \frac{1}{2}F(1-x^2) = -\frac{x^{12}}{12} + \frac{x^8}{8} - \frac{2x^3}{3} + C.$$

Thay $x=0$ ta được $\dfrac{1}{3}F(0) - \dfrac{1}{2}F(1) = C \quad (1)$.

Thay $x=1$ ta được $\dfrac{1}{3}F(1) - \dfrac{1}{2}F(0) = -\dfrac{5}{8} + C \quad (2)$.

Thay $x=-1$ ta được $\dfrac{1}{3}F(-1) - \dfrac{1}{2}F(0) = \dfrac{17}{24} + C \quad (3)$.

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{5}{6}\left[F(1) - F(0)\right] = -\dfrac{5}{8} \Rightarrow F(1) - F(0) = -\dfrac{3}{4}$.

Từ (2), (3) suy ra $\dfrac{1}{3}\left[F(1) - F(-1)\right] = -\dfrac{32}{24} \Rightarrow F(1) - F(-1) = -4$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(0) - F(-1) = -4 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{-13}{4}$.

Lời giải 2:

Từ $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x \Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2 = -x^{11} + x^7, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra, hàm số $x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2$ là hàm lẻ. Ta có $\int\limits_{0}^{1} (-x^{11} + x^7)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{24}$

Do đó

$$\int\limits_{-1}^{0}\left[x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2\right]\mathrm{d}x = -\int\limits_{0}^{1}\left[x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) + 2x^2\right] = \frac{-1}{24}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\ x^3\ \mathrm{d}\ x^3\ -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} f\ 1-x^2\ \mathrm{d}\ 1-x^2\ +\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}\int_{0}^{1} f\ x^3\ \mathrm{d}\ x^3\ +\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\ 1-x^2\ \mathrm{d}\ 1-x^2\ -\frac{2}{3}=\frac{-1}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} f\ x\ \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x+\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}\int_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x=\frac{15}{24}$$

$$\Rightarrow 2\int_{-1}^{0} f\ x\ \mathrm{d}x-3\int_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x+8=-5\int_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x=\frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} f\ x\ \mathrm{d}x=-4-\int_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x=-\frac{13}{4}$$

Lời giải 3:

Ta có $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x,\forall x\in\mathbb{R}\quad 1$

Thay x bởi $-x$ ta được $-xf(-x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6+2x,\forall x\in\mathbb{R}\quad 2$

Từ 1 , 2 suy ra $xf\ x^3\ +xf\ x^3\ =-4x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f\ x^3\ +f\ -x^3\ =-4,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thay x^3 bởi x ta được $f\ x\ +f\ -x\ =-4$.

Do đó,

$$\int_{-1}^{0}\left[f\ x\ +f\ -x\ \right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0} f\ x\ \mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\ -4\ \mathrm{d}x=-4\Rightarrow\int_{-1}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x=-4$$

Từ $1\ \Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=\int_{0}^{1}\ -x^{11}+x^7-2x^2\ \mathrm{d}x=-\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\Rightarrow\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$$

Do đó, $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x=-4+\frac{3}{4}=-\frac{13}{4}$.

Lời giải 4:

Với $\forall x\in\mathbb{R}$ ta có $xf(x^3)+f(1-x^2)=-x^{10}+x^6-2x$

$$\Rightarrow x^2f(x^3)+xf(1-x^2)=-x^{11}+x^7-2x^2\qquad (*)$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{1} x^2f(x^3)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} xf(1-x^2)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\ -x^{11}+x^7-2x^2\ \mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x^3)\mathrm{d}(x^3)-\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2)=-\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{8}\Leftrightarrow\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=-\frac{3}{4}$$

Mặt khác $(*) \Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} x^2 f(x^3)\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} xf(1-x^2)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} \left(-x^{11}+x^7-2x^2\right)\mathrm{d}x$

$(*) \Rightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f(x^3)\mathrm{d}\left(x^3\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} f(1-x^2)\mathrm{d}\left(1-x^2\right) = -\frac{17}{24}$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -\frac{17}{24} \Rightarrow \int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = 3\left(\frac{1}{2}.\frac{-3}{4} - \frac{17}{24}\right) = -\frac{13}{4}$.

Lời giải 5: Đi tìm hàm $f\left(x\right)$

Ban đầu ta sẽ nghĩ đến có $f\left(x^3\right), f\left(1-x^2\right)$ thì bên vế phải có thể đưa liên quan gì đến $x^3, 1-x^2$ không?

Ta có $xf\left(x^3\right) + x^{10} + 2x = x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right]$

Vậy thì nghĩ thêm việc cũng tạo tiếp cái $\left(1-x^2\right)^3 + 2 = 3 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$

Hay $f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2 = 3 - 3x^2 + 3x^4 - x^6$.

Như thế ta sẽ có

$x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right] + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2\right] = 3 - 3x^2 + 3x^4 - x^6 + x^6$

$\Leftrightarrow x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right] + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2\right] = 3 - 3x^2 + 3x^4$

$\Leftrightarrow x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 + 2\right] - 3x^4 + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 + 2\right] - 3\left(1-x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow x\left[f\left(x^3\right) + \left(x^3\right)^3 - 3x^3 + 2\right] + \left[f\left(1-x^2\right) + \left(1-x^2\right)^3 - 3\left(1-x^2\right) + 2\right] = 0$

Đặt $g\left(x\right) = f\left(x\right) + x^3 - 3x + 2$ ta được $xg\left(x^3\right) + g\left(1-x^2\right) = 0$.

Thay $-x$ bởi x ta được

$-xg\left(-x^3\right) + g\left(1-x^2\right) = 0$ hay $xg\left(x^3\right) = -xg\left(-x^3\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó $g\left(x\right)$ là hàm lẻ.

Như vậy $xg\left(x^3\right) + g\left(1-x^2\right) = 0 \Leftrightarrow xg\left(x^3\right) = g\left(x^2-1\right), \forall x \in \mathbb{R}$.

Từ giả thiết ta có $g\left(0\right) = g\left(-1\right) = 0$.

Vì $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-1;0\right]$ nên $\left|g\left(x\right)\right|$ liên tục trên $\left[-1;0\right]$.

Đặt $M = \max\limits_{\left[-1;0\right]}\left|g\left(x\right)\right| \geq 0, \forall x \in \left[-1;0\right]$.

Giả sử $M > 0$ khi đó $\exists a \in \left(-1;0\right): \left|g\left(a\right)\right| = M$.

Chọn $x = b = -\sqrt{1+a} \in \left(-1;0\right)$

Ta được

$bg\ b^3\ = g\ a\ \Rightarrow \left|g\ b^3\ \right| = \dfrac{\left|g\ a\ \right|}{\left|b\right|} = \dfrac{M}{\left|b\right|} > M$ do $\left|b\right| \in\ 0;1\ .$

Điều này mẫu thuẫn do $M = \max\limits_{\left[-1;0\right]}\left|g\ x\ \right|$.

Do vậy $\max\limits_{\left[-1;0\right]}\left|g\ x\ \right| = 0, \forall x \in \left[-1;0\right]$.

Hay $g\ x\ = 0, \forall x \in \left[-1;0\right] \Leftrightarrow f\ x\ = -x^3 + 3x - 2, \forall x \in \left[-1;0\right]$.

Vậy $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} (-x^3 + 3x - 2)\mathrm{d}x = -\dfrac{13}{4}$.

Nhận xét chung:

Ở 5 cách trên, khi giải quyết bài toán dạng này ta thường hướng tới:

- Biến đổi giả thiết đi đến tính chất $\int u'f\ u\ \mathrm{d}x = \int f\ u\ \mathrm{d}u$.
- Dựa theo tính chất hàm chẵn, hàm lẻ.
- Sử dụng các phép thế xác định hàm số $f\ x\ $.

*** Với lời giải 1, 2, 3, 4:** Ta đều sử dụng đến tính chất

$$\int u'f\ u\ \mathrm{d}x = \int f\ u\ \mathrm{d}u \text{ hay } \int\limits_{a}^{b} u'\ x\ f\ u\ x\ \ \mathrm{d}x = \int\limits_{u\ a}^{u\ b} f\ x\ \mathrm{d}x$$

Vì thế ta mới nghĩ đến việc tạo ra đạo hàm của $x^3; 1 - x^2$ bằng việc nhân hai vế của giả thiết với x để tạo ra

$\int\limits_{-1}^{0} x^2 f\ x^3\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{0} f\ x\ \mathrm{d}x$; $\int\limits_{0}^{1} x^2 f\ x^3\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x$;

$\int\limits_{-1}^{0} xf\ 1 - x^2\ \mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x$ và $\int\limits_{0}^{1} xf\ 1 - x^2\ \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x$.

Trong các đổi biến này xuất hiện $\int\limits_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x$ buộc ta phải đi tính thêm $\int\limits_{0}^{1} f\ x\ \mathrm{d}x$. Ở đây, nếu cận không phải là $-1;0;1$ thì các cách làm này sẽ bị phá sản, ví dụ yêu cầu tính $\int\limits_{0}^{3} f\ x\ \mathrm{d}x$, lúc này chắc chỉ còn cách đi tìm $f\ x\ $. Vì thế, các cận $-1;0;1$ phải được liên hệ mật thiết với $x^3, 1 - x^2$.

Ngoài ra, với hai tính chất:

- Hàm số $x^2 f(x^3) + xf(1 - x^2) + 2x^2$ là hàm lẻ;
- Hàm số $f\ x\ + f\ -x\ = -4$ là hàm chẵn

cũng hữu ích cho việc tính toán nhanh hơn.

*** Lỗi sai có thể** mắc dẫn đến các phương án nhiễu $-\dfrac{17}{20}, \dfrac{17}{4}$ đều sai dấu khi tính

$$\int_{-1}^{0} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ và } \int_{0}^{1} xf\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*** Với lời giải 5:** Việc tìm $f(x)$ khá khó khăn, không nói là mò. Nếu $f(x)$ là những hàm quen thuộc thì rất có thể đoán bằng việc thử các giá trị và cân bằng hệ số.

Khi đó, mục đích khai thác tính chất $\int u'f(u)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$ coi như phá sản.

2. Các bài toán tương tự

Dựa theo những phân tích trên ta có một số bài toán tương tự như sau:

Hướng 1: Dựa theo tính chất $\int u'f(u)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u$

Câu 48.1 (*Phát triển Tương tự câu 48 đề thi tham khảo*) : Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ thỏa mãn $xf\left(x^2\right) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - 2, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Giá trị $\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ nằm trong khoảng nào?

A. $(5;6)$. **B.** $(3;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $xf\left(x^2\right) - f(2x) = x^3 - \frac{1}{2x} - 2, \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\Rightarrow \int_{1}^{2}\left[xf\left(x^2\right) - f(2x)\right]\mathrm{d}x = \int_{1}^{2}\left(x^3 - \frac{1}{2x} - 2\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{1}^{2} f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right) - \frac{1}{2}\int_{1}^{2} f(2x)\,\mathrm{d}(2x) = \left.\left(\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\ln|x| - 2x\right)\right|_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2} - \ln 2 \in (2;3)$$

Câu 48.2 (*Phát triển Tương tự câu 48 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;4]$ và thỏa mãn điều kiện

$$4xf\left(x^2\right) + 6f(2x) = \sqrt{4-x^2}, \forall x \in [0;2].$$

Giá trị $\int_{0}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{20}$. **D.** $\frac{\pi}{10}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4xf\left(x^2\right) + 6f(2x) = \sqrt{4-x^2}$.

$$\Rightarrow \int\limits_0^2 \left[4xf(x^2)+6f(2x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^2 f(x^2)\,\mathrm{d}(x^2)+3\int\limits_0^2 f(2x)\,\mathrm{d}(2x)=\pi$$

$$\Rightarrow 2\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x+3\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\pi \Rightarrow \int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}$$

Hướng 2: Dựa theo hướng đi tìm $f(x)$ bằng biến đổi.

Câu 48.3 (*Phát triển Tương tự câu 48 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $5f(x)-7f(1-x)=3(x^2-2x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Biết rằng $\int\limits_0^1 x.f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $8a-3b$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 16. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Từ $5f(x)-7f(1-x)=3(x^2-2x)$ thay x bởi $1-x$ ta được $5f(1-x)-7f(x)=3(x^2-1)$.

Do đó ta có hệ $\begin{cases}5f(x)-7f(1-x)=3(x^2-2x)\\-7f(x)+5f(1-x)=3(x^2-1)\end{cases}$

Suy ra $25f(x)-49f(x)=15(x^2-2x)+21(x^2-1)\Leftrightarrow -24f(x)=36x^2-30x-21$

Hay $f(x)=-\frac{1}{8}(12x^2-10x-7)\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}(12x-5)$

Do đó $-\frac{a}{b}=\int\limits_0^1 x.f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int\limits_0^1 x(12x-5)\,\mathrm{d}x=-\frac{3}{8}\Rightarrow \begin{cases}a=3\\b=8\end{cases}$

Vậy $8a-3b=0$

Câu 48.4 (*Phát triển Tương tự câu 48 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{2}{3};1\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+3f\left(\frac{2}{3x}\right)=5x\ \forall x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$. Tích phân $\int\limits_{\frac{2}{3}}^1 \ln x f'(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{5}{3}\ln\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Từ $2f(x)+3f\left(\frac{2}{3x}\right)=5x$ thay x bởi $\frac{2}{3x}$ ta được $2f\left(\frac{2}{3x}\right)+3f(x)=\frac{10}{3x}$.

Do đó $4f(x)-9f(x)=10x-\frac{10}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{2}{x}-2x\Rightarrow f'(x)=-\frac{2}{x^2}-2$

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1} \ln x f'\ x\ dx = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left(-\frac{2}{x^2} - 2\right) \ln x dx = -\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$$

Cách 2:

Ta có $\int_{\frac{2}{3}}^{1} \ln x f'\ x\ dx = f\ x\ \ln x\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} - \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{f\ x\ dx}{x}$.

Từ $2f(x) + 3f\left(\frac{2}{3x}\right) = 5x, \forall x \in \left[\frac{2}{3};1\right]$.

Thay $x = 1$ và $x = \frac{2}{3}$ vào (1) ta được hệ $\begin{cases} 2f(1) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) = 5 \\ 2f\left(\frac{2}{3}\right) + 3f(1) = \frac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} \end{cases}$.

Xét $I = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{f\ x}{x} dx$

Đặt $x = \frac{2}{3t} \Rightarrow dx = -\frac{2}{3t^2} dt$,, đổi cận $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Khi đó $I = -\frac{2}{3} \int_{1}^{\frac{2}{3}} \frac{f\left(\frac{2}{3t}\right) . \frac{1}{t^2} dt}{\frac{2}{3t}} = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{f\left(\frac{2}{3t}\right) dt}{t} = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{f\left(\frac{2}{3x}\right) dx}{x}$.

Ta có $2I + 3I = 2\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{f\ x\ dx}{x} + 3\int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{f\left(\frac{2}{3x}\right) dx}{x} \Rightarrow 5I = \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{2f(x) + 3f\left(\frac{2}{3x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{2}{3}}^{1} 5dx = \frac{5}{3} \Rightarrow I = \frac{1}{3}$

Vậy $\int_{\frac{2}{3}}^{1} \ln x f'\ x\ dx = f\ x\ \ln x\Big|_{\frac{2}{3}}^{1} - \int_{\frac{2}{3}}^{1} \frac{f\ x\ dx}{x} = \ln 1 . f\ 1\ - \ln\left(\frac{2}{3}\right) f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} \ln \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$.

Hướng 3: Kết hợp với tính chẵn, lẻ, đối xứng của hàm số.

Câu 48.5 (*Phát triển Tương tự câu 48 đề thi tham khảo*) Cho hàm $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn

$$f\ x\ + f\ 1 - x\ = 2x^2 - 2x + 1, \forall x \in \left[0;1\right].$$

Giá trị của $\int_{0}^{1} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{4}{3}$ **B.** $\frac{2}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)+f(1-x)=2x^2-2x+1$

$$\Rightarrow I+\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1(2x^2-2x+1)dx \Rightarrow I+\int_0^1 f(1-x)dx=\left.\left(\frac{2}{3}x^3-x^2+x\right)\right|_0^1$$

$$\Rightarrow I+\int_0^1 f(1-x)dx=\frac{2}{3}\quad(1)$$

Xét $\int_0^1 f(1-x)dx$, đặt $t=1-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=0$

Ta có $\int_0^1 f(1-x)dx=\int_1^0 f(t)(-dt)=\int_0^1 f(t)dt=I\quad(2)$

Từ $(1);(2)\Rightarrow 2\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$.

Câu 48.6 (*Phát triển Tương tự câu 48 đề thi tham khảo*) Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$$f(x^3+x-1)+f(-x^3-x-1)=-6x^6-12x^4-6x^2-2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Giá trị của $\int_{-3}^1 f(x)dx$ bằng

A. 32. **B.** 4. **C.** -36. **D.** -20.

Lời giải

Chọn D

Đặt $a=x^3+x-1$, khi đó ta có $f(a)+f(-a-2)=-6(a+1)^2-2\quad(1)$. Hàm số $f(a)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$.

Lúc đó ycbt trở thành tính giá trị của tích phân $\int_{-3}^1 f(a)da$.

Lấy tích phân hai vế của (1), ta được $\int_{-3}^1 f(a)da+\int_{-3}^1 f(-a-2)da=\int_{-3}^1\left(-6(a+1)^2-2\right)da=-40\quad(2)$.

Từ tích phân $\int_{-3}^1 f(-a-2)da$ ta đặt $t=-a-2\Rightarrow dt=-da$.

Khi $a=-3\Rightarrow t=1$; $a=1\Rightarrow t=-3$.

Tích phân trên chuyển thành $\int_{-3}^1 f(t)dt$, kết hợp với (2) ta suy ra

$$2\int_{-3}^1 f(a)da=-40\Leftrightarrow \int_{-3}^1 f(a)da=-20.$$

Câu 49 :Ngô Thị Châu Dung (FB: Dung Bắp) phát triển – Nguyễn Thị Hồng Gấm phản biện

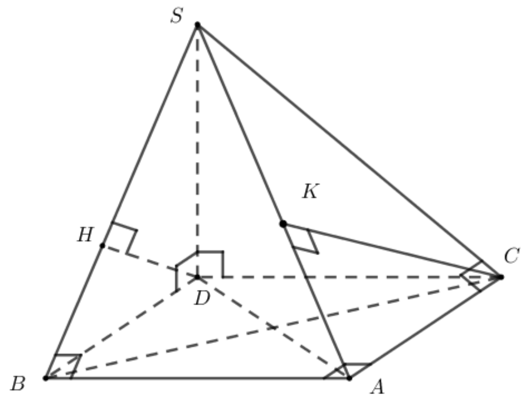
Câu 49: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $A, AB = a, SBA = SCA = 90°$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) bằng $60°$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$. **C.** $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2}{2}$.

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\begin{cases} AB \perp SB \\ AB \perp SD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBD) \Rightarrow AB \perp BD$.

Tương tự, ta có $AC \perp CD$

$\Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a.

Đặt $SD = x, x > 0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên $SB \Rightarrow DH = \frac{DB.DS}{\sqrt{DB^2 + DS^2}} = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ta có $\begin{cases} DH \perp SB \\ DH \perp AB \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB) \Rightarrow d(D,(SAB)) = DH = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Lại có $CD // AB \Rightarrow CD // (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = d(D,(SAB)) = DH$.

ΔSCA vuông tại C, có $AC = a, SC = \sqrt{x^2 + a^2}$.

Kẻ $CK \perp SA \Rightarrow CK = \frac{CA.CS}{\sqrt{CA^2 + CS^2}} = \frac{a.\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + 2a^2}}$.

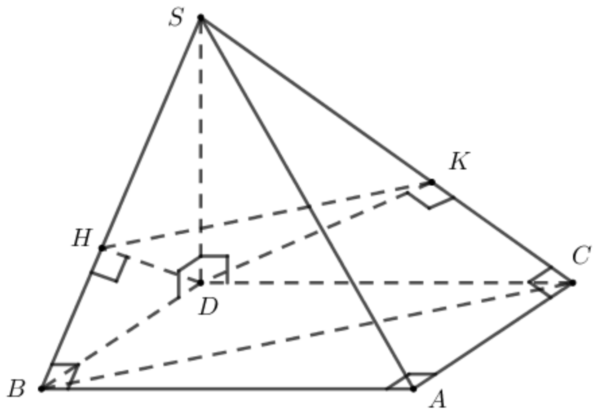
Vì $(SAB) \cap (SAC) = SA \Rightarrow \sin((SAB),(SAC)) = \frac{d(C,(SAB))}{d(C,SA)} = \frac{DH}{CK}$

$$\Leftrightarrow \sin 60° = \frac{\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}}{\dfrac{a\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+2a^2}}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{x^2+2a^2}}{x^2+a^2} \Leftrightarrow 3\left(x^2+a^2\right)^2 = 4x^2\left(x^2+2a^2\right) \Rightarrow x = a.$$

$\Rightarrow DH = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{a^3}{6}$.

***<u>Cách 2</u>*:**



Dựng hình vuông $ABDC \Rightarrow SD \perp (ABCD)$.

Đặt $SD = x, x > 0$.

Kẻ $DH \perp SB, (H \in SB) \Rightarrow DH \perp (SAB)$ và $DH = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Kẻ $DK \perp SC, (K \in SC) \Rightarrow DK \perp (SAC)$ và $DK = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Ta có $\dfrac{SH}{SB} = \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{SD^2}{SB^2} = \dfrac{x^2}{x^2+a^2} \Rightarrow HK // BD \Rightarrow HK = \dfrac{x^2}{x^2+a^2}BD = \dfrac{x^2}{x^2+a^2}.a\sqrt{2}$.

Ta có $\cos\left(SAB , SAC \right) = \left|\cos HDK\right| = \left|\dfrac{DH^2+DK^2-HK^2}{2DH.DK}\right|$

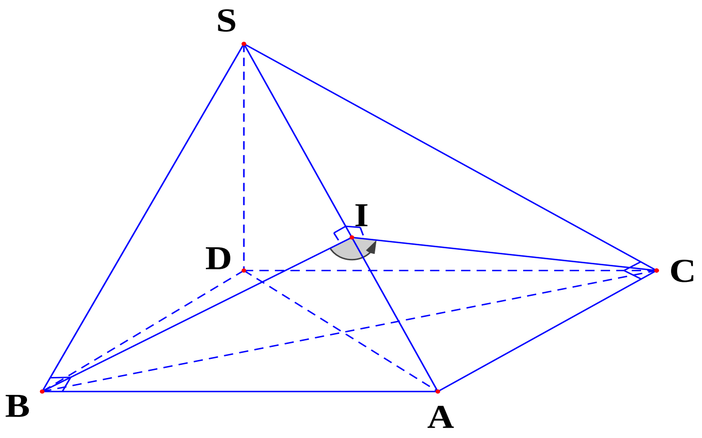
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left|\frac{\dfrac{2x^2a^2}{x^2+a^2} - \dfrac{2a^2x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}}{\dfrac{2x^2a^2}{x^2+a^2}}\right| \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \left|\frac{a^2}{x^2+a^2}\right| \Leftrightarrow x = a.$$

$\Rightarrow SD = a.$

Lại có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2}{2}$.

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD = \dfrac{a^3}{6}$.

***<u>Cách 3</u>*:**



Ta có hai tam giác vuông SAB và SAC bằng nhau và chung cạnh huyền SA.

Kẻ $BI\perp(SA)\Rightarrow CI\perp(SA)$ và góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) là góc giữa hai đường thẳng BI và $CI\Rightarrow(BI;CI)=60°$.

Có $BC=a\sqrt{2}$, ΔBIC cân tại *I*. Do $BI=CI<AC=a<a\sqrt{2}=BC$ nên ΔBIC không đều

$\Rightarrow BIC=120°\Rightarrow BI=CI=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Từ đó $AI=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$; $AB^2=AI.SA\Rightarrow SA=a\sqrt{3}.$

Dựng hình vuông $ABDC\Rightarrow SD\perp(ABDC)$.

Có : $SD=\sqrt{SA^2-AD^2}=a;S_{\Delta ABC}=a^2\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD=\dfrac{a^3}{6}.$

Cách 4: Sau khi đã tính được SA ta có thể tính

$V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta IBC}.(SI+AI)=\dfrac{1}{3}S_{\Delta IBC}.SA$.

Với $S_{\Delta IBC}=\dfrac{1}{2}.IB.IC.sin120°=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}.a\sqrt{3}=\dfrac{a^3}{6}.$

Cách 4 trắc nghiệm:

CÔNG THỨC TÍNH NHANH :(Sẽ được chứng minh sau trong phần phát triển)

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\begin{cases}AB\perp SB\\AB\perp SD\end{cases}\Rightarrow AB\perp(SBD)\Rightarrow AB\perp BD$.

Tương tự, ta có $AC\perp CD\Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a.

Đặt $SD=h,h>0$. $\cos\alpha=\dfrac{a^2}{h^2+a^2}\Leftrightarrow\dfrac{a^2}{h^2+a^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow h=a\Rightarrow SD=a$

Từ đây tiếp tục tính thể tích $\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD=\dfrac{a^3}{6}$

PHÂN TÍCH Ý TƯỞNG CÂU 49

Bài toán góc giữa hai mặt phẳng luôn là bài toán khó nhất trong các bài toán hình học không gian. Ở câu 49 này Bộ đã đưa ra hai vấn đề khó thường gặp :

⊕ *Khó thứ nhất là* cái khó chung của bài toán hình học không gian, là hình trong bài không có đường cao cho trước.

⊕ *Khó thứ hai* là cái khó riêng của bài toán góc giữa hai mặt phẳng. Ở đây câu 49 này còn kết hợp hết cái khó của bài toán góc: Cho góc giữa hai mặt bên vào giả thiết. Muốn giải quyết được bài toán này phải khai thác được giả thiết góc.

⊕ *Tuy nhiên đây đã là bài toán quen , ý tưởng không có gì mới*. Nên chúng ta chỉ cần lần lượt giải quyết hai vấn đề trên.

Giải quyết vấn đề 1:

Tìm đường cao của hình : học sinh phải tìm đường cao bằng cách suy ra từ các quan hệ vuông góc giữa đường với đường để chứng minh được đường vuông góc với mặt, hay phục dựng hình ẩn để xác định đường cao.

Giải quyết vấn đề 2:

- Để *khai thác được giả thiết góc* ta thường làm :

  + Xác định được góc. Trong quá trình xác định góc phải tránh bẫy khi đưa về góc giữa hai đường thẳng cắt nhau nó là góc không tù.

  + Cần chọn ẩn (Là chiều cao hay cạnh đáy nếu giả thiết chưa có) sau đó sử dụng giả thiết góc để tìm ẩn.

- Và có thể sử dụng nhiều phương pháp khác ngoài hai cách truyền thống để tính góc giữa hai mặt bên

Phương pháp khoảng cách : giả sử φ là góc giữa hai mặt bên α và β

$$\sin\varphi = \frac{d\ M,\ \alpha}{d\ M,d} \text{ ở đây } d = \alpha \cap \beta\ , M \in \beta$$

Phương pháp diện tích hai mặt bên : giả sử φ là góc giữa hai mặt bên ABC và ABD

$$V_{ABCD} = \frac{2S_{\triangle ABC}.S_{\triangle ABD}}{3AB}.\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{3.V_{ABCD}.AB}{2S_{\triangle ABC}.S_{\triangle ABD}}$$

Công thức đa giác chiếu : $\cos\varphi = \dfrac{S'}{S}$

- ***Ta đi chứng minh công thức tính nhanh cho bài toán này*** : Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp\ ABCD$,đáy $ABCD$ là hình chữ nhật , biết $SA = h, AB = a, AD = b$.

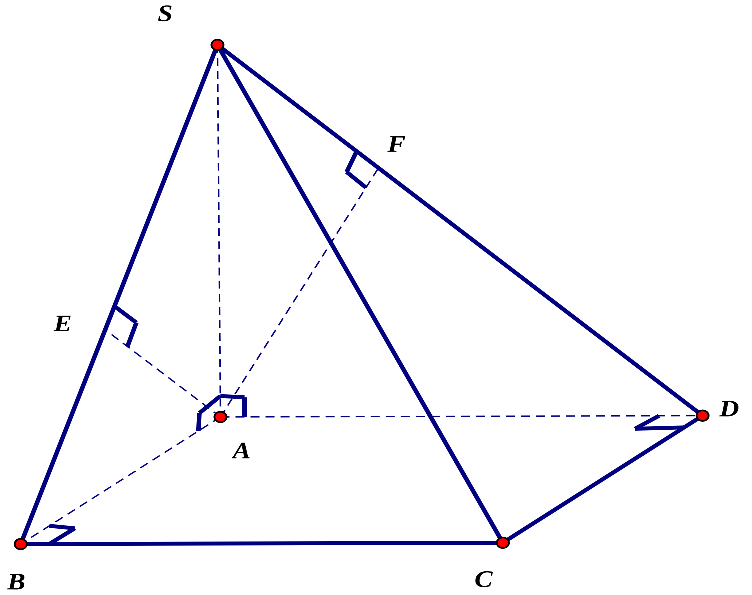
Gọi $SBC\ ,\ SDC\ = \alpha$.

Khi đó : $\cos\alpha = \dfrac{AB}{SB}.\dfrac{AD}{SD} = \dfrac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}.\dfrac{b}{\sqrt{h^2+b^2}}$ 1

Đặc biệt khi $ABCD$ là hình vuông thì $\cos\alpha = \dfrac{a^2}{h^2+a^2}$ 2 .

Thật vậy :

Cách c/m 1:



Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD, khi đó ta có $AE \perp (SBC)$ và $AF \perp (SDC)$, do đó $((SBC),(SDC)) = (AE, AF) = \alpha$.

Khi đó $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF}\right|}{AE.AF}$ (3).

Ta có $AE = \dfrac{AB.SA}{SB}$ $(*)$ và $SE = \dfrac{SA^2}{SB}$ suy ra $\overrightarrow{SE} = \dfrac{SA^2}{SB^2}\overrightarrow{SB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \dfrac{SA^2}{SB^2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{AB^2}{SB^2}\overrightarrow{AS}$

Tương tự , $AF = \dfrac{AD.SA}{SD}$ $(**)$, $SF = \dfrac{SA^2}{SD}$

suy ra $\overrightarrow{SF} = \dfrac{SA^2}{SD^2}\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \dfrac{SA^2}{SD^2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{AD^2}{SD^2}\overrightarrow{AS}$

Do đó $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \dfrac{AB^2.AD^2}{SB^2.SD^2}.AS^2$ $(***)$.

Thay $(*),(**),(***)$ vào (3) ta được công thức (1). Cho $a = b$ ta được (2).

Cách c/m 2:

Gọi K là hình chiếu của D lên SC, khi đó

$$\sin\alpha = \frac{d(D,(SBC))}{DK} = \frac{d(A,(SBC))}{DK} = \frac{AE}{DK} = \frac{AS.AB}{SB}\cdot\frac{SC}{SD.DC} = \frac{AS.SC}{SB.SD}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{AS^2.SC^2}{SB^2.SD^2}} = \sqrt{\frac{SB^2.SD^2 - SA^2\left(SA^2 + AB^2 + AD^2\right)}{SB^2.SD^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{\left(SA^2 + AB^2\right).\left(SA^2 + AD^2\right) - SA^2\left(SA^2 + AB^2 + AD^2\right)}{SB^2.SD^2}} = \frac{AD.AB}{SD.SB}$$

Cách c/m 3: PP Toạ độ hoá

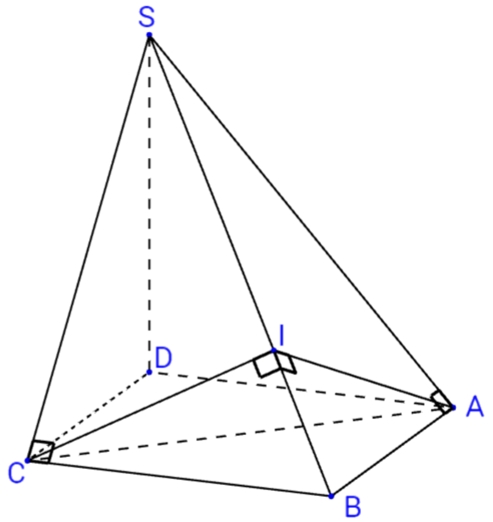
CÁC CÂU TƯƠNG TỰ VÀ PHÁT TRIỂN CÂU 49.

Câu 1: **49.1** ***(Tương tự câu 49 – Đề thi tham khảo)*** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B với $BA=BC=5a$; $SAB=SCB=90°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và SBA bằng α với $\cos\alpha=\frac{9}{16}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{50a^3}{3}$. **B.** $\frac{125\sqrt{7}a^3}{9}$. **C.** $\frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$. **D.** $\frac{50a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có hai tam giác vuông SAB và SBC bằng nhau và chung cạnh huyền SB.

Kẻ $AI\perp SB \Rightarrow CI\perp SB$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) là góc giữa hai đường thẳng AI và $CI \Rightarrow (AI;CI)=\alpha$.

Do $CBA=90^\circ \Rightarrow 180^\circ > AIC > 90^\circ \Rightarrow AIC=180^\circ-\alpha \Rightarrow \cos AIC=-\frac{9}{16}$

Có $AC=5\sqrt{2}a$, $\triangle AIC$ cân tại *I*, nên có :

$$\frac{2AI^2-AC^2}{2AI^2}=\cos AIC \Leftrightarrow \frac{2AI^2-AC^2}{2AI^2}=-\frac{9}{16} \Leftrightarrow AI^2=16a^2 \Rightarrow AI=4a$$

$$\Rightarrow BI=3a \Rightarrow SI=\frac{AI^2}{IB}=\frac{16}{3}a \Rightarrow SB=\frac{25a}{3}.$$

<u>Cách 1</u> :

Dựng $SD\perp(ABC)$ tại D. Ta có: $\begin{cases} BA\perp SA \\ BA\perp SD \end{cases} \Rightarrow BA\perp AD$. Tương tự $BC\perp CD$

Nên tứ giác $ABCD$ là vuông cạnh $5a$ $\Rightarrow BD=5\sqrt{2}a \Rightarrow SD=\sqrt{SB^2-BD^2}=\frac{5\sqrt{7}}{3}a$

Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{3}SD.\frac{1}{2}BA^2=\frac{1}{3}.\frac{5\sqrt{7}}{3}.\frac{1}{2}.25a^3=\frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$.

<u>Cách 2</u> : $V_{S.ABC}=V_{S.ACI}+V_{B.ACI}=\frac{1}{3}SI.S_{ACI}+\frac{1}{3}BI.S_{ACI}=\frac{1}{3}SB.S_{ACI}$

$\triangle AIC$ cân tại *I*, nên $S_{ACI}=\frac{1}{2}AI^2\sin\alpha=\frac{1}{2}.16a^2.\frac{5\sqrt{7}}{16}=\frac{5\sqrt{7}a^2}{2}$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.\frac{25a}{3}.\frac{5\sqrt{7}a^2}{2}=\frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$

ÁP DỤNG CT TÍNH NHANH KHI GIẢI TN :

Gọi D là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

Ta có $\begin{cases} AB\perp SB \\ AB\perp SD \end{cases}\Rightarrow AB\perp(SBD)\Rightarrow AB\perp BD$.

Tương tự, ta có $AC\perp CD\Rightarrow ABDC$ là hình vuông cạnh a.

Đặt $SD=h, h>0$. $\cos\alpha=\frac{5a^{2}}{h^2+5a^{2}}\Leftrightarrow\frac{25a^2}{h^2+25a^2}=\frac{9}{16}\Rightarrow h=\frac{5\sqrt{7}a}{3}=SD$

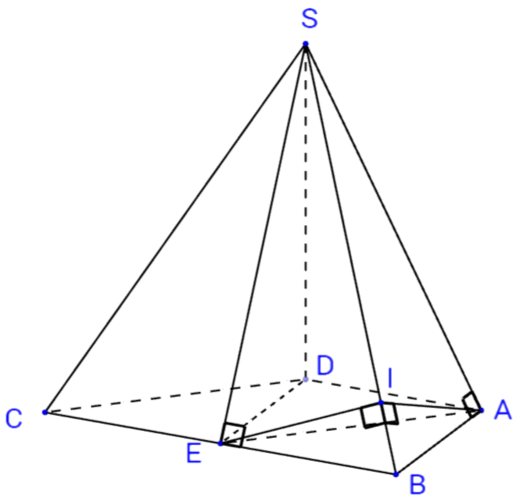
Từ đây tiếp tục tính thể tích $\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SD=\frac{125\sqrt{7}a^3}{18}$

Câu 2: **49.2** ***(Phát triển câu 49 – Đề thi tham khảo)*** Cho hình chóp $S.ABC$ có $BC=2BA=4a$, $ABC=BAS=90°$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và SBA bằng 60° và $SC=SB$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng:

A. $\frac{32a^3}{3}$. **B.** $\frac{8a^3}{3}$. **C.** $\frac{16a^3}{3}$. **D.** $\frac{16a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Tam giác SBC cân cạnh đáy $BC=4a$. Gọi E là trung điểm BC thì ta có $\triangle SEB$ vuông tại $E, BE=2a=BA$. Đưa về bài toán gốc với chóp $S.ABE$.

Ta có hai tam giác vuông SAB và SEB bằng nhau và chung cạnh huyền SB.

Kẻ $AI\perp SB\Rightarrow EI\perp SB$ và góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBC) góc giữa hai mặt phẳng (SBA) và (SBE) là góc giữa hai đường thẳng AI và $EI\Rightarrow(AI;EI)=60°$.

Do $CBA=90^\circ\Rightarrow 180^\circ>AIE>90^\circ\Rightarrow AIE=120^\circ\Rightarrow\cos AIE=-\frac{1}{2}$

Có $AE=2\sqrt{2}a$, $\triangle AIE$ cân tại *I*, nên có :

$\frac{2AI^2-AE^2}{2AI^2}=\cos AIC\Leftrightarrow\frac{2AI^2-AE^2}{2AI^2}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow AI^2=\frac{8a^2}{3}\Rightarrow AI=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$.

$\Rightarrow BI=\frac{2a}{\sqrt{3}}\Rightarrow SI=\frac{AI^2}{IB}=\frac{4a}{\sqrt{3}}\Rightarrow SB=\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Cách 1 :

Dựng $SD \perp (ABC)$ tại D. Ta có: $\begin{cases} BA \perp SA \\ BA \perp SD \end{cases} \Rightarrow BA \perp AD$. Tương tự $BE \perp ED$

Nên tứ giác $ABED$ là hình vuông cạnh $2a$.

$\Rightarrow BD = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = 2a$.

Thể tích $V_{SABC} = \frac{1}{3}SD.\frac{1}{2}BC.BA = \frac{1}{3}.2a.4a^2 = \frac{8a^3}{3}$.

Cách 2 : $V_{SABC} = \frac{1}{3}SB.2S_{AEI}$

$S_{ACI} = \frac{1}{2}AI^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}.\frac{8a^2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}a^2}{3}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{6a}{\sqrt{3}}.\frac{4\sqrt{3}a^2}{3} = \frac{8a^3}{3}$

Cách tính nhanh : $\cos\alpha = \frac{4a^2}{h^2+4a^2} \Rightarrow \frac{4a^2}{h^2+4a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a^2 = h^2 \Rightarrow h = 2a = SD$

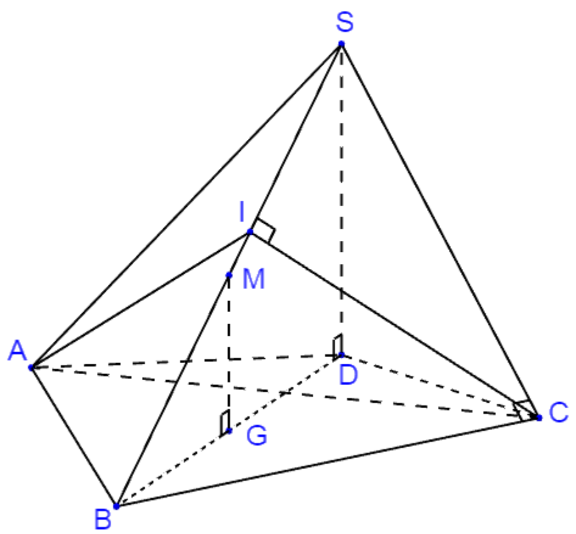
Thể tích $V_{SABC} = \frac{1}{3}SD.\frac{1}{2}BC.BA = \frac{1}{3}.2a.4a^2 = \frac{8a^3}{3}$.

Câu 3: **49.3** ***(Phát triển câu 49 – Đề thi tham khảo)*** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SAB = SCB = 90^\circ$ góc giữa hai mặt phẳng SAB và SCB bằng 60°. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{24}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{24}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{8}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M là trung điểm của SB, Và G là trọng tâm tam giác đều ABC .

Theo giả thiết $SAB = SCB = 90^\circ \Rightarrow MS = MB = MA = MC \Rightarrow M$ thuộc trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC \Rightarrow MG \perp ABC$.

Gọi D là điểm đối xứng với G qua cạnh AC thì $\Rightarrow SD \perp ABC$.

Từ giả thiết suy ra hai tam giác vuông bằng nhau SAB và SCB .
Do đó từ A kẻ $AI \perp SB, I \in SB$ thì $CI \perp SB$

Nên góc giữa hai mặt phẳng SAB và SCB bằng góc $AI, CI = 60^\circ$.

Do $ABC = 60^\circ \Rightarrow AIC = 120^\circ \Rightarrow \frac{2AI^2 - AC^2}{2AI^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow AI = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BI = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}} \Rightarrow SB = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

Ta có $BD = \frac{4}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow SD = \sqrt{SB^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{4a^2}{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Thể tích $V_{SABC} = \frac{1}{3}SD.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{6}}.\frac{\sqrt{3}}{4}a^3 = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}$.

Cách tính khác : $V_{SABC} = \frac{1}{3}SB.2S_{AEI}$

$S_{ACI} = \frac{1}{2}AI^2 \sin\alpha = \frac{1}{2}.\frac{a^2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{12}$

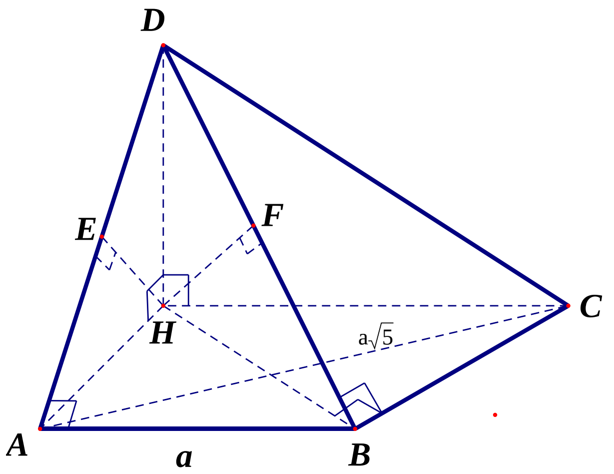
$V_{SABC} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{3}a^2}{12} = \frac{\sqrt{2}a^3}{24}$

Câu 4: **49.4** ***(Phát triển câu 49 – Đề thi tham khảo*- Sở Bắc Ninh lần 2-2018-2019)** Cho tứ diện $ABCD$ có $DAB = CBD = 90^o; AB = a; AC = a\sqrt{5}; ABC = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABD),(BCD)$ bằng 30°. Thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $DH \perp (ABC)$.

Ta có $\begin{cases} BA \perp DA \\ BA \perp DH \end{cases} \Rightarrow BA \perp AH$. Tương tự $\begin{cases} BC \perp DB \\ BC \perp DH \end{cases} \Rightarrow BC \perp BH$.

Tam giác AHB có $AB = a$, $ABH = 45^o \Rightarrow \Delta HAB$ vuông cân tại $A \Rightarrow AH = AB = a$.

Áp dụng định lý cosin, ta có $BC = a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin CBA=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases}HE\perp DA\\ HF\perp DB\end{cases}\Rightarrow HE\perp(DAB)$ và $HF\perp(DBC)$.

Suy ra DBA , DBC $=$ HE,HF $=EHF$ và tam giác HEF vuông tại E.

Đặt $DH=x$, khi đó $HE=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$, $HF=\frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$.

Suy ra $\cos EHF=\frac{HE}{HF}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}}\Rightarrow x=a$.

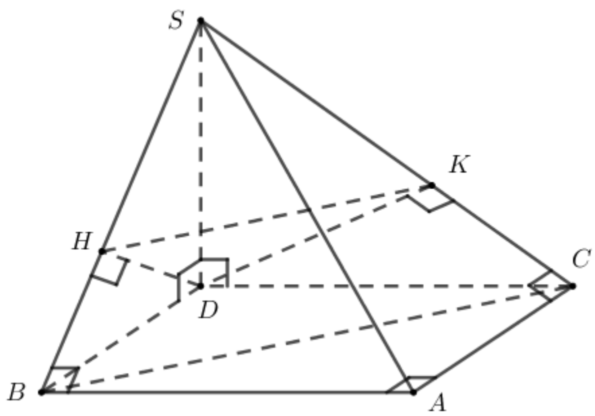
Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot DH\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{a^3}{6}$.

Câu 5: **49.5** ***(Phát triển câu 49 – Đề thi tham khảo)*** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=\sqrt{2}a, AC=a, BC=\sqrt{3}a, SBA=SCA=90^\circ$. Và hai mặt phẳng SAB và SAC tạo với nhau một góc α sao cho $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết : $AB=\sqrt{2}a, AC=a, BC=\sqrt{3}a\Rightarrow BC^2=3a^2=2a^2+a^2=AB^2+AC^2$

$\Rightarrow\triangle ABC$ vuông tại A

Dựng $SD\perp$ ABC $\Rightarrow ABDC$ hình chữa nhật .

$DB=AC=a, DC=AB=\sqrt{2}a$. Gọi $SD=h$.Áp dụng công thức tính nhanh :

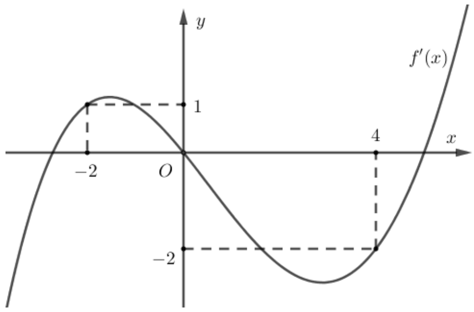
Ta có $\frac{DB}{SB}.\frac{DC}{SC}=\cos\alpha$. Coi $a=1$ để tiện tính toán ta có :

$\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow h^4+3h^2-4=0\Rightarrow h^2=1\Rightarrow h=1\Rightarrow h=a=SD$.

$V_{SABC}=\frac{1}{3}.SD.\frac{1}{2}AB.AC=\frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

CÂU 50 : *GV thực hiện : Trần Thu Hương – GV phản biện : Lê Anh Dũng*

Câu 50: **[ĐỀ THI THAM KHẢO]** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

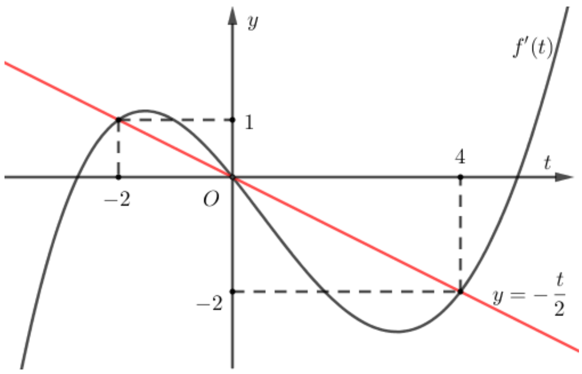
Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x)+2x-1<0 \Leftrightarrow f'(1-2x)>\frac{2x-1}{2}$ (*).

Đặt $t=1-2x$, ta có đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=-\frac{t}{2}$ như hình vẽ sau :

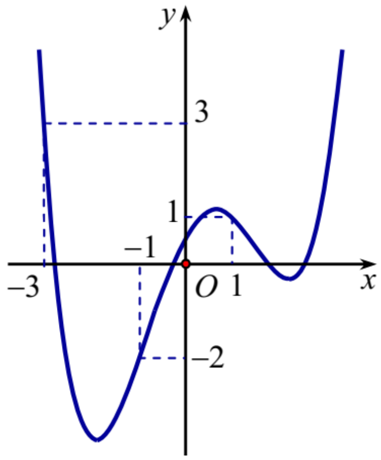


Trên đoạn $[-2;4]$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t)>-\frac{t}{2} \Rightarrow -2<t<0 \Leftrightarrow -2<1-2x<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

$\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Đối chiếu với các phương án suy ra chọn đáp án A vì $\left(1;\frac{3}{2}\right)\subset\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Câu 50.1 (*Tương tự Câu 50*): Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Hàm số $g(x)=3f(1-2x)+8x^3-21x^2+6x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(-3;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn A

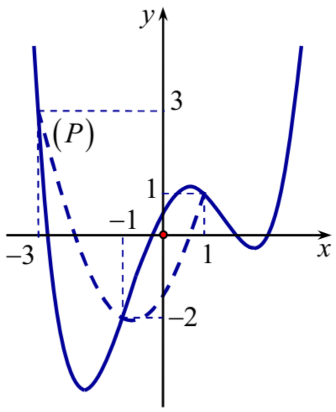
Ta có $g'(x)=-6f'(1-2x)+24x^2-42x+6$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-2x)<4x^2-7x+1$ (*)

Đặt $1-2x=t \Leftrightarrow x=\dfrac{1-t}{2}$

Ta có (*) trở thành $f'(t)<4.\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2-7.\dfrac{1-t}{2}+1 \Leftrightarrow f'(t)<t^2+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{3}{2}$.

Ta vẽ parapol $(P): y=x^2+\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau (đường nét đứt), ta thấy (P) có đỉnh $I(-\dfrac{3}{4};-\dfrac{33}{16})$ và đi qua các điểm $(-3;3),(-1;-2),(1;1)$.

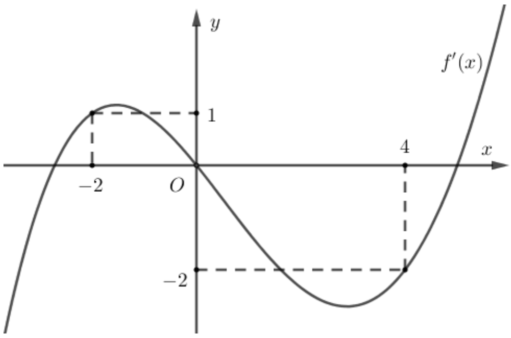


Từ đồ thị hàm số ta thấy trên khoảng $(-3;1)$ ta có $f'(t)<t^2+\dfrac{3}{2}t-\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -3<t<-1$

$\Leftrightarrow -3<1-2x<-1 \Leftrightarrow 1<x<2$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 50.2 (Phát triển Câu 50). Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=4f(x-m)+x^2-2mx+2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

***Ý tưởng :* Phát triển thành bài toán chứa tham số.**

Lời giải

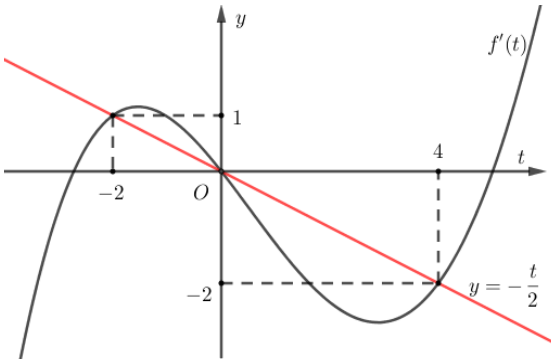
Chọn A

Ta có $g'(x)=4f'(x-m)+2x-2m$

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-m)\ge -\dfrac{x-m}{2}$ (*)

Đặt $t=x-m$ thì (*) $\Leftrightarrow f'(t)\ge -\dfrac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Từ đồ thị ta có $f'(t)\ge -\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le t\le 0 \\ t\ge 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2\le x\le m \\ x\ge m+4 \end{array}\right.$

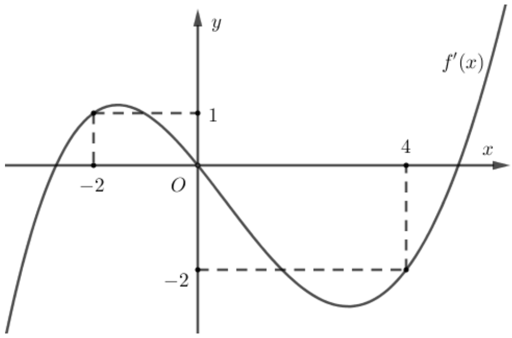
Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x)\ge 0\ \ \forall x\in(1;2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2\le 1<2\le m \\ m+4\le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le m\le 3 \\ m\le -3 \end{array}\right.$

Vì m nguyên dương nên $m\in\{2;3\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 50.3 (Phát triển Câu 50). Cho hàm số đa thức $f(x)$ có đạo hàm tràm trên R. Biết $f(0)=0$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình sau.



Hàm số $g(x)=\left|4f(x)+x^2\right|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(0;4)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Ý tưởng : **Phát triển thành bài toán tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối.**

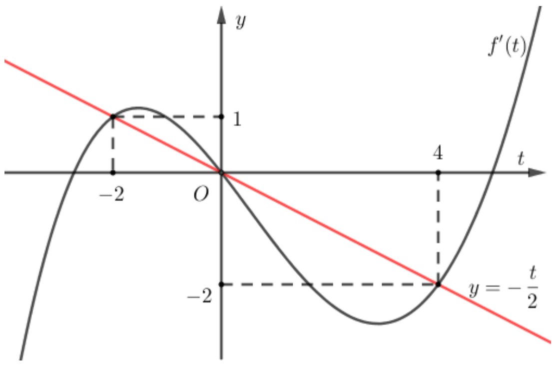
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x)=4f(x)+x^2$, $x\in R$

Có $h'(x)=4f'(x)+2x \Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-\dfrac{x}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\dfrac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ sau



Từ đồ thị ta có BBT của $h(x)$ như sau :

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(-2)$	↗	0	↘	$h(4)$	↗	$+\infty$

Chú ý ở đây $h(0)=4f(0)=0$

Từ đó ta có BBT của như sau :

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$		$-h(-2)$		0		$-h(4)$		$+\infty$

Từ BBT ta suy ra $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$.

Câu 50.4 (Phát triển Câu 50). Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-3		0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Biết rằng $1<f(x)<5, \forall x\in R$. Hàm số $g(x)=f(f(x)-1)+x^3+3x^2+2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(0;5)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(-2;5)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

**** Ý tưởng :*** **Phát triển thành bài toán tìm khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số** $y=f(u)+g(x)$

Lời giải

Chọn B.

Ta có $g'(x)=f'(x).f'(f(x)-1)+3x^2+6x$

Vì $1<f(x)<5, \forall x\in R \Rightarrow 0<f(x)-1<4$

Từ bảng xét dấu của $f'(x)\Rightarrow f'(f(x)-1)<0$

Từ đó ta có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		-3		-2		0		5		$+\infty$
$f'(x).f'(f(x)-1)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$3x^2+6x$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

Do đó hàm $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.