PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

PHƯƠNG PHÁP

Phương trình một ẩn chứa tham số có dạng : $f\left(x,m\right)=0\ \left(1\right)$, với m là tham số.

- **Phương pháp biện luận số nghiệm bằng bảng biến thiên (cô lập tham số):**
  - **Bước 1 : Chúng ta tiến hành cô lập tham số m, nghĩa là chúng ta biến đổi phương trình $\left(1\right)$ về dạng phương trình $h\left(m\right)=g\left(x\right)\ \left(2\right)$, trong đó $h\left(m\right)$ là biểu thức chỉ có tham số m và $g\left(x\right)$ là biểu thức chỉ có biến x.**
  - **Bước 2 : Lập bảng biến thiên hàm g.**
  - **Bước 3 : Biện luận số nghiệm phương trình và kết luận.**

- **Phương pháp biện luận số nghiệm bằng tam thức bậc hai**
  - **Bước 1 : Biến đổi phương trình $\left(1\right)$ về phương trình bậc hai $a.t^2+b.t+c=0\ \left(2\right)$.**
  - **Bước 2 : Dựa vào định lý so sánh nghiệm với một số**
  - **Bước 3 : Kết luận**

- **Kiến thức bổ trợ :**

Định lý so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với một số

Xét $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có hai nghiệm x_1,x_2, khi đó :

① $x_1<\alpha<x_2 \Leftrightarrow a.f\left(\alpha\right)<0$.

② $\alpha<x_1<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f\left(\alpha\right)>0 \\ S>2\alpha \\ \Delta>0 \end{cases}$.

③ $x_1<x_2<\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} a.f\left(\alpha\right)>0 \\ S<2\alpha \\ \Delta>0 \end{cases}$.

Hệ quả (so sánh nghiệm của phương trình bậc hai với hai số)

Xét $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$ có hai nghiệm x_1,x_2, khi đó :

④ $\alpha<x_1<x_2<\beta \Leftrightarrow \begin{cases} a.f\left(\alpha\right)>0 \\ a.f\left(\beta\right)>0 \\ 2\alpha<S<2\beta \\ \Delta>0 \end{cases}$

⑤ $\alpha<x_1<\beta<x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a.f\left(\alpha\right)>0 \\ a.f\left(\beta\right)<0 \end{cases}$

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}}-\left(m+2\right).2^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

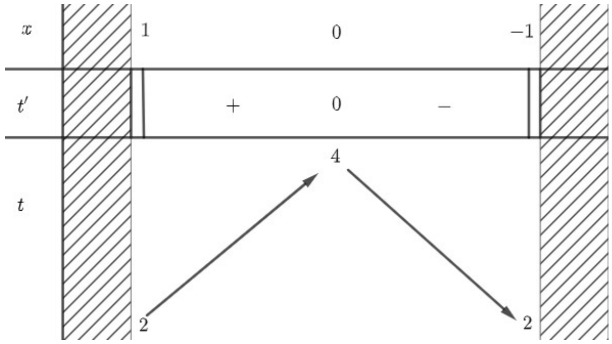
Lời giải

Chọn A

Phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}}-\left(m+2\right).2^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0 \qquad (1)$

Điều kiện: $1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Đặt $t=2^{1+\sqrt{1-x^2}}$, $2\le t\le 4$.

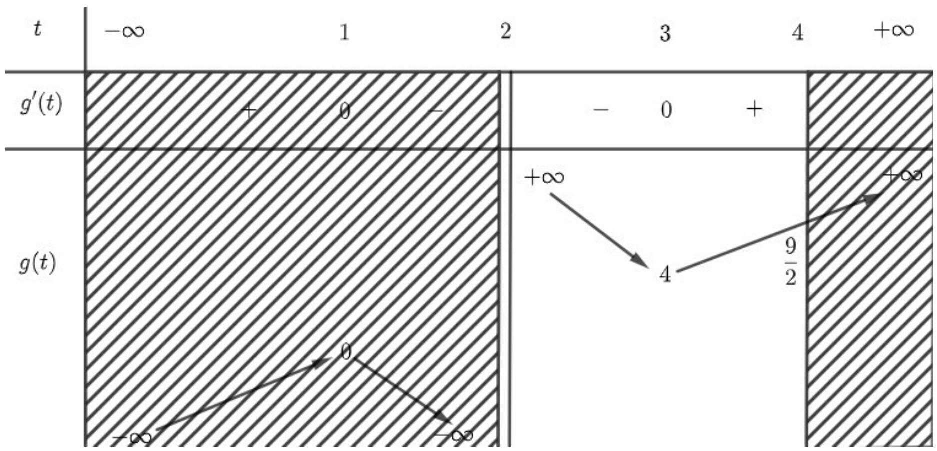


Phương trình (1) trở thành:

$t^2-(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow m(t-2)=t^2-2t+1$

Ta thấy, $t=2$ không thỏa mãn phương trình, suy ra $t\neq 2$ nên ta có $m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$ $\quad(2)$

Đặt $g(t)=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$.



Để phương trình (1) có bốn nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4 phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm t_1,t_2 sao cho $2<t_1<t_2<4$. Do đó, dựa vào bảng biến thiên chúng ta được $4<m<\dfrac{9}{2}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ không có giá trị của m thỏa mãn.

Câu 2. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $(m-1).16^x-2(2m+1).4^x+6m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

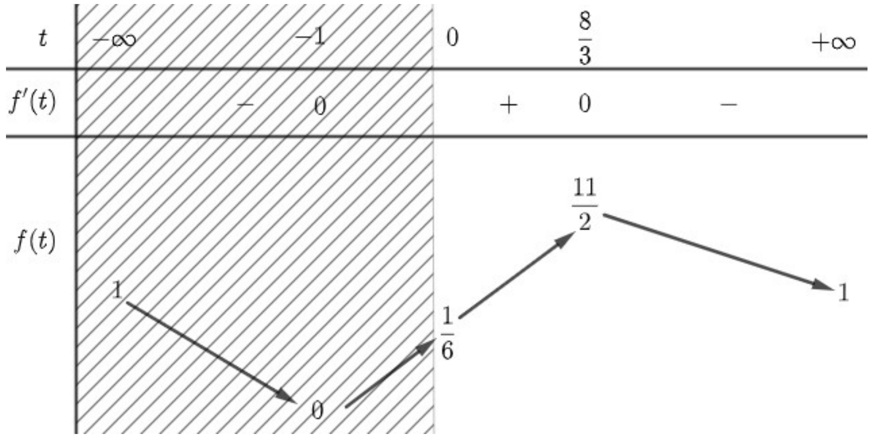
Chọn D

Phương trình: $(m-1).16^x-2(2m+1).4^x+6m-1=0$ $\quad(1)$.

Đặt $t=4^x$, $t>0$.

Phương trình (1) trở thành: $(m-1).t^2-2(2m+1).t+6m-1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-4t+6}$ $\quad(2)$.

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2+2t+1}{t^2-4t+6}$.



Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm t_1, t_2 sao cho $0 < t_1 < t_2$. Do đó, dựa vào bảng biến thiên, chúng ta được $1 < m < \frac{11}{2}$.

Vậy $m \in \{2;3;4;5\}$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $27^{|x|} - 2m.18^{|x|} + (m^2 + m - 1).12^{|x|} + (m - m^2).8^{|x|} = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Biến đổi phương trình như sau:

$$27^{|x|} - 2m.18^{|x|} + (m^2 + m - 1).12^{|x|} + (m - m^2).8^{|x|} = 0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow 3^{3|x|} - 2m.3^{2|x|}.2^{|x|} + (m^2 + m - 1).3^{|x|}.2^{2|x|} + (m - m^2).2^{3|x|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{3|x|} - 2m.\left(\frac{3}{2}\right)^{2|x|} + (m^2 + m - 1).\left(\frac{3}{2}\right)^{|x|} + (m - m^2) = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{|x|}$, điều kiện $t \geq 1$.

Khi đó phương trình trở thành

$$t^3 - 2mt^2 + (m^2 + m - 1)t + m - m^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = m \\ t = m - 1 \end{array}\right. .$$

Với $t = 1$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^{|x|} = 1 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Suy ra phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm $x = 0$.

Để phương trình (1) có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 phân biệt thì $\begin{cases} m - 1 \leq 1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq 2$.

Vậy $m = 2$.

Câu 4. Cho phương trình $(m-5).3^x + (2m-2).2^x.\sqrt{3^x} + (1-m).4^x = 0$, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tính $S = a + b$.

A. $S = 4$. **B.** $S = 5$. **C.** $S = 6$. **D.** $S = 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(m-5).3^x+(2m-2).2^x.\sqrt{3^x}+(1-m).4^x=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (m-5).\left(\frac{3}{4}\right)^x+(2m-2).\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x+1-m=0$.

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, điều kiện $t>0$.

Khi đó phương trình trở thành: $(m-5)t^2+(2m-2)t+1-m=0 \quad (2)$.

Do đó để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 5 \\ 2\left(m^2-4m+3\right)>0 \\ \frac{2-2m}{m-5}>0 \\ \frac{1-m}{m-5}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 5 \\ \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right. \\ 1<m<5 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m<5 \Leftrightarrow m\in(3;5)$.

Vậy $a=3$, $b=5$ nên $S=a+b=8$.

Câu 5. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m sao cho phương trình $(m-2).3^{2x^2+2x+\frac{5}{2}}-2(m+1).3^{x^2+x+\frac{5}{4}}+2m-6=0$ có nghiệm. Tổng các phần tử của S bằng

A. 18. **B.** 12. **C.** 20. **D.** 14.

Lời giải

Chọn A

$(m-2).3^{2x^2+2x+\frac{5}{2}}-2(m+1).3^{x^2+x+\frac{5}{4}}+2m-6=0 \ (1)$.

Đặt $t=3^{x^2+x+\frac{5}{4}}=3^{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}\geq 3$.

Phương trình (1) trở thành $(m-2)t^2-2(m+1)t+2m-6=0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2-2t+2\right)=2t^2+2t+6 \Leftrightarrow m=\frac{2t^2+2t+6}{t^2-2t+2} \ (2)$ (vì $t^2-2t+2\neq 0,\forall t$).

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm $t\geq 3$ $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $f(t)=\frac{2t^2+2t+6}{t^2-2t+2}$ tại điểm có hoành độ $t\geq 3$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{2t^2+2t+6}{t^2-2t+2}$ với $t\in[3;+\infty)$ có: $f'(t)=\frac{-6t^2-4t+16}{\left(t^2-2t+2\right)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{4}{3}\ (L) \\ t=-2\ (L) \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên:

t	3	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	6 $\searrow$	2

Từ bảng biến thiên suy ra (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 2 < m \le 6 \Rightarrow S = \{3;4;5;6\}$.

Tổng các phần tử của S bằng $3+4+5+6=18$.

Câu 6. Cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của m thuộc khoảng

A. $(9;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2(2m+1)t + 3(4m-1) = 0$ (1)

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 4 > 0 \\ 2(2m+1) > 0 \\ 3(4m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m > -\dfrac{1}{2} \\ m > \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ne 1 \\ m > \dfrac{1}{4} \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là $t = 4m-1$ và $t=3$.

Với $t=4m-1$ thì $3^{x_1} = 4m-1 \Leftrightarrow x_1 = \log_3(4m-1)$.

Với $t=3$ thì $3^{x_2}=3 \Leftrightarrow x_2 = 1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=12 \Leftrightarrow x_1 = 2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1)=2 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy $m=\dfrac{5}{2}$ là giá trị cần tìm nên m thuộc khoảng $(1;3)$.

Câu 7. Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + (1-2a)\left(2-\sqrt{3}\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó a thuộc khoảng

A. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, $t>0$

Phương trình trở thành $t + \dfrac{1-2a}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 - 2a = 0$ (1)

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1-x_2} = 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1}}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2}} = 3 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1} = 3\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_2}$. Khi đó $t_1 = 3t_2$.

YCBT$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1 = 3t_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 > 0;\ t_2 > 0 \\ t_1 + t_2 = 4 \\ t_1.t_2 = 1 - 2a \\ t_1 = 3t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2a > 0 \\ t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \\ t_1 t_2 = 1 - 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -\dfrac{3}{2} \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

Câu 8. Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2} = 2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2} = 2.3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = 6\ \ (1)$$

Đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t \ge 1 \Rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{t}$. Khi đó (1) trở thành

$$t + m.\frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0\ \ (2)$$

(1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

$(2) \Leftrightarrow m = -t^2 + 6t$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 6t$ trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có:

$f'(t) = -2t + 6;\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Bảng biến thiên:

t	1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m < 5$ hoặc $m = 9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m \in (-10;10)$ nên $m = \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;9\}$.

Suy ra có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 9. Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình: $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là

A. 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 4^x, t > 0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5 = 0$ (*).

Đặt $f(x) = (m+1)t^2 - 2(2m-3)t + 6m + 5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn: $0 < t_1 < 1 < t_2$.

Điều đó xảy ra khi: $\begin{cases}(m+1)f(1)<0\\(m+1)f(0)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+1)(3m+12)<0\\(m+1)(6m+5)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4<m<-1\\ \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>-\dfrac{5}{6}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow -4<m<-1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m=-3$ và $m=-2$.

Câu 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $8^x+3x.4^x+(3x^2+1).2^x=(m^3-1)x^3+(m-1)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;10)$ **A.** 101. **B.** 100. **C.** 102. **D.** 103.

Lời giải

Chọn A

$8^x+3x.4^x+(3x^2+1).2^x=(m^3-1)x^3+(m-1)x \quad (1)$

$\Leftrightarrow (2^x+x)^3+(2^x+x)=(mx)^3+mx \qquad (2)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$

Ta có $t=2^x+x$ mà $0<x<10 \Rightarrow \begin{cases}1<2^x<1024\\0<x<10\end{cases} \Rightarrow 1<2^x+x<1034 \Rightarrow 1<t<1034$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t, t\in(1;1034)$.

$f'(t)=3t^2+1>0, \forall t\in(1;1034)$ hay $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $(1;1034)$

Suy ra $(2) \Leftrightarrow 2^x+x=mx \Leftrightarrow \dfrac{2^x+x}{x}=m$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{2^x}{x}+1, x\in(0;10). \Rightarrow g'(x)=\dfrac{x.2^x\ln 2-2^x}{x^2}=\dfrac{2^x(x.\ln 2-1)}{x^2}$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 2}=\log_2 e$

BBT

x	0		$\log_2 e$		10
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e.\ln 2+1$	$\nearrow$	$103,4$

$ycbt \Leftrightarrow e.\ln 2+1<m<103,4$ mà $m\in Z$ nên $m=\overline{3;103}$.

Có tất cả 101 số nguyên m thoả mãn.

Câu 11. Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-5;5]$ để phương trình $9^x-2.3^{x+1}+2m-1=0$ có duy nhất một nghiệm.

A. -10. **B.** -15. **C.** 0. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$9^x-2.3^{x+1}+2m-1=0 \Leftrightarrow 9^x-6.3^x+2m-1=0 \, (1)$

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình trở thành $t^2-6t-1=-2m$.

Xét hàm số $g(t)=t^2-6t-1$, $g'(t)=2t-6$ $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=3$

Bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	-10	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi

$$\left[\begin{array}{l} -2m=-10 \\ -2m\geq -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m\leq \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Mà $m\in[-5;5]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1;0;5\}$

Vậy tổng các giá trị của m là $-5-4-3-2-1+0+5=-10$.

Câu 12. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m sao cho hai phương trình $2x^2+1=3^m$ và $m=3^x-2x^2+x-1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của S.

A. 6. **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} 2x^2+1=3^m \\ m=3^x-2x^2+x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\log_3\left(2x^2+1\right) \\ m=3^x-2x^2+x-1 \end{cases} \Rightarrow \log_3\left(2x^2+1\right)=3^x-2x^2+x-1$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(2x^2+1\right)+2x^2+1=3^x+x \Leftrightarrow 3^{\log_3\left(2x^2+1\right)}+\log_3\left(2x^2+1\right)=3^x+x.$$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$ xác định trên $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f'(t)=3^t.\ln 3+1>0$ suy ra hàm $f(t)=3^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $\log_3\left(2x^2+1\right)=x \Leftrightarrow 2x^2+1=3^x$.

Xét hàm số $g(x)=2x^2+1-3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=4x-3^x\ln 3 \Rightarrow g''(x)=4-3^x\ln^2 3 \Rightarrow g'''(x)=-3^x\ln^3 3<0$. Suy ra hàm số $g''(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g(x)=0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm.

Ta lại có $g(0)=g(1)=g(2)=0$. Suy ra phương trình $2x^2+1=3^x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Vậy $S=3$.

Câu 13. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $(m-1)2^x+3m-4=0$ có nghiệm?

A. $1<m<\dfrac{4}{3}$. **B.** $m>\dfrac{4}{3}$. **C.** $1\leq m\leq\dfrac{4}{3}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>\dfrac{4}{3} \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(m-1)2^x=4-3m$.

Trường hợp 1: $m-1=0 \Rightarrow m=1$. Phương trình thành $0.2^x=1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2: $m-1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 1$. Ta có $2^x=\dfrac{4-3m}{m-1}$.

Phương trình có nghiệm khi $\dfrac{4-3m}{m-1}>0 \Leftrightarrow 1<m<\dfrac{4}{3}$

Câu 14. Tìm tất cả giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để phương trình $9^x+(4-3m)3^x+2m^2-5m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 20. **B.** 21. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3^x, t>0$. Khi đó ta có phương trình $t^2+(4-3m)t+2m^2-5m+3=0\quad (*)$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ pt $(*)$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+4>0 \\ 3m-4>0 \\ 2m^2-5m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m>\dfrac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy $\begin{cases} m\neq 2 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Nhận xét: phương trình $t^2+(4-3m)t+2m^2-5m+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=2m-3 \end{array}\right.$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1\neq 2m-3 \\ m-1>0 \\ 2m-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m>1 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 2 \\ m>\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và m thuộc $[-10;10]$ nên $m\in\{3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Câu 15. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $6^x+(m-3)3^x-9.2^x-9m+27=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$?

A. $1<m<3$. **B.** $-1<m<2$. **C.** $\forall m\in\mathbb{R}$. **D.** $3<m<7$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $6^x+(m-3)3^x-9.2^x-9m+27=0 \Leftrightarrow (3^x-9)(2^x+m-3)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x-9=0 \\ 2^x+m-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 2^x=3-m \end{array}\right..$$

Ta có $0<x<2 \Leftrightarrow 1<2^x<4$.

Để phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;2)$ thì $1<3-m<4 \Leftrightarrow -1<m<2$

Câu 16. Cho phương trình $10^{3m}+10^{m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm.

A. $\left(0;\frac{1}{2}\log 2\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2}\log 2;+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{10}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\log 2\right]$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\in[-1;1]$

Ta có $10^{3m}+10^{m}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(2+2x\sqrt{1-x^2}\right)$

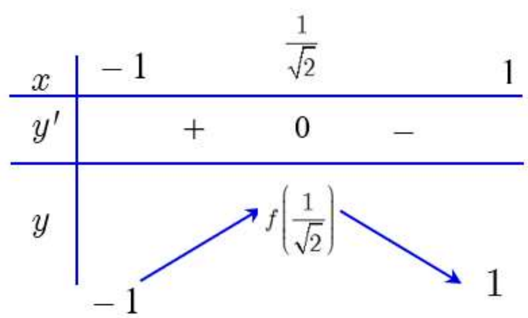
$\Leftrightarrow 10^{3m}+10^{m}=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left[\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2+1\right]$

$\Leftrightarrow 10^{3m}+10^{m}=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^3+\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)(*)$

Xét hàm $h(t)=t^3+t\rightarrow h'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên từ phương trình (*) ta được:

$h\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)=h\left(10^m\right)\rightarrow x+\sqrt{1-x^2}=10^m$ (**)

Xét $f(x)=x+\sqrt{1-x^2},x\in[-1;1]$ ta có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}};f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\in[-1;1]$.



Phương trình đã cho có nghiệm khi phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow 0<10^m\le f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\log\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log 2$.

Câu 17. Cho phương trình $e^{x^3+x^2-2x+m}-e^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập tất cả các giá trị thực của m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $e^{x^3+x^2-2x+m}-e^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$

$\Leftrightarrow e^{x^3+x^2-2x+m}-e^{x^2+x}+x^3-3x+m=0\Leftrightarrow e^{x^3+x^2-2x+m}+\left(x^3+x^2-2x+m\right)=e^{x^2+x}+\left(x^2+x\right)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=e^t+1>0\,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f\left(x^3+x^2-2x+m\right)=f\left(x^2+x\right)$

Suy ra $x^3+x^2-2x+m=x^2+x\Leftrightarrow m=-x^3+3x$ (2)

Bài toán trở thành tìm tập các giá trị của m để phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)=-x^3+3x$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\in(-2;2)$ hay $a=-2;b=2$. Vậy $a+2b=2$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^{\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}}-16.2^{\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}}+8=m$ có nghiệm.

A. 65. **B.** 64. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-3\le x\le 5$

Đặt $t=\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}$ trên $[-3;5]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}; f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $[-3;5]$:

x	-3		1		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

Từ đó suy ra $t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$.

Khi đó ta có phương trình: $4^t-16.2^t+8=m$.

Đặt $a=2^t$, do $t\in\left[2\sqrt{2};4\right]$ nên $a\in\left[4^{\sqrt{2}};16\right]$. Ta có phương trình $a^2-16a+8=m$.

Xét hàm số $g(a)=a^2-16a+8$ với $a\in\left[4^{\sqrt{2}};16\right]$.

$g'(a)=2a-16; g'(a)=0\Leftrightarrow a=8$

Bảng biến thiên của hàm số $g(a)$ với $a\in\left[4^{\sqrt{2}};16\right]$.

a	$4^{\sqrt{2}}$		8		16
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$	$4^{2\sqrt{2}}-16.4^{\sqrt{2}}+8$	$\searrow$	-56	$\nearrow$	8

Từ bảng biến thiên ta thấy để phương trình có nghiệm thì thì $-56\le m\le 8$.

Do m nguyên nên nên có 65 giá trị.

Câu 19. Điều kiện của tham số m để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}}+(m+2)2^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm là đoạn $[a;b]$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. $\frac{23}{12}$. **B.** $-\frac{23}{12}$. **C.** $\frac{35}{12}$. **D.** $-\frac{35}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-1\le x\le 1$

Đặt $t=2^{1+\sqrt{1-x^2}}$, khi $x\in[-1;1]$ ta có $1+\sqrt{1-x^2}\in[1;2]$.

Khi đó $t\in[2;4]$.

Bài toán trở thành: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình

$t^2+(m+2)t+2m+1=0$ có nghiệm trên $[2;4]$

$\Leftrightarrow m(t+2)=-t^2-2t-1$ có nghiệm trên $[2;4]$

$m=f(t)=\dfrac{-t^2-2t-1}{t+2}$ có nghiệm trên $[2;4]$ (do $t+2>0\forall t\in[2;4]$).

Ta có $f'(t)=\dfrac{-t^2-4t-3}{(t+2)^2}<0\forall t\in[2;4]$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$f(4)\le m\le f(2)\Leftrightarrow -\dfrac{25}{6}\le m\le -\dfrac{9}{4}$.

Câu 20. Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình

$3^{\log_2 x^2}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1x_2>4$.

A. $m>\sqrt{6}$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<-\sqrt{6} \\ m>\sqrt{6}\end{array}\right.$. **C.** $m<-\sqrt{6}$. **D.** $m>-1$.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $x>0$.

- Ta có: $3^{\log_2 x^2}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0\Leftrightarrow 3^{2\log_2 x}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0$ (1).

- Đặt $t=3^{\log_2 x}$, $t>0$. Ta được bất phương trình: $t^2-2(m+3)t+m^2+3=0$ (2).

Nhận thấy: (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ t_1+t_2=2(m+3)>0\\ t_1t_2=m^2+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+3)^2-(m^2+3)>0\\ m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6m+6>0\\ m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ m>-3\end{cases}\Leftrightarrow m>-1\ (*)$$

Khi đó: (2) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn:

$t_1.t_2=m^2+3\Leftrightarrow 3^{\log_2 x_1}.3^{\log_2 x_2}=m^2+3\Leftrightarrow 3^{\log_2 x_1+\log_2 x_2}=m^2+3\Leftrightarrow 3^{\log_2(x_1x_2)}=m^2+3$.

Từ $x_1x_2>4\Rightarrow \log_2(x_1x_2)>2\Rightarrow 3^{\log_2(x_1x_2)}>3^2\Rightarrow m^2+3>9\Leftrightarrow m^2>6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m<-\sqrt{6} \\ m>\sqrt{6}\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện (*) ta được: $m>\sqrt{6}$.

Câu 21. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2019^{\sin^2 x}+2020^{\cos^2 x}=2021^{\cos^2 x}.\log_2 m$ có nghiệm là

A. $2\le m\le 2^{2020}$. **B.** $1\le m\le 2^{2021}$. **C.** $0<m\le 2^{2021}$. **D.** $2\le m\le 2^{2019}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2019^{\sin^2 x}+2020^{\cos^2 x}=2021^{\cos^2 x}.\log_2 m$

$\Leftrightarrow \log_2 m=\dfrac{2019^{1-\cos^2 x}}{2021^{\cos^2 x}}+\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \log_2 m=2019.\left(\dfrac{1}{4080399}\right)^{\cos^2 x}+\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^{\cos^2 x}\quad (1).$

Đặt $t=\cos^2 x$, với $0\le t\le 1$

ta có $f(t)=2019.\left(\dfrac{1}{4080399}\right)^{t}+\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^{t}$ nghịch biến trên đoạn $[0;1]$

nên $f(1)\le f(t)\le f(0)$, $\forall t\in[0;1]$

$\Leftrightarrow\ 1\le f(t)\le 2020$, $\forall t\in[0;1]$.

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le \log_2 m\le 2020 \Leftrightarrow 2\le m\le 2^{2020}$.

Câu 22. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2x\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{m-x}+m\right]=2x^2-1$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2<3$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x\neq 0$.

$2x\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{m-x}+m\right]=2x^2-1\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}}-3^{x-m}+m=x-\dfrac{1}{2x}\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}}+\dfrac{1}{2x}=3^{x-m}+x-m(1)$

Xét hàm số $f(t)=3^t+t\,(t\neq 0)$. Ta có $f'(t)=3^t.\ln 3+1>0\ \forall t$

Suy ra hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

Do đó $f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=f(x-m)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2x}=x-m\Leftrightarrow 2x^2-2mx-1=0(2)$

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2+x_2^2<3$ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và thỏa mãn điều kiện đã cho.

Khi đó $\begin{cases}\Delta'>0\\ 2.0^2-2m.0-1\neq 0\\ (x_1+x_2)^2-2x_1.x_2<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+2>0\\ m^2-2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)<3\end{cases}\Leftrightarrow m^2-2<0\Leftrightarrow -\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$

Do m nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$

Câu 23. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m nhỏ hơn 2021 để phương trình $m+\sqrt{m+2^x}=4^x$ có nghiệm thực?

A. 2018.   **B.** 2019.   **C.** 2020.   **D.** 2021.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $m+\sqrt{m+2^x}=4^x \Leftrightarrow m+2^x+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}+2^x$

Ta thấy $\sqrt{m+2^x}\ge 0, 2^x>0$.

Xét hàm $f(t)=t^2+t$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=2t+1>0, \forall t\in[0;+\infty)$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$.

Do đó $f\left(\sqrt{m+2^x}\right)=f\left(2^x\right)\Leftrightarrow \sqrt{m+2^x}=2^x \Leftrightarrow m=2^{2x}-2^x\ (2)$

Đặt $a=2^x, a>0$. Khi đó (2) có dạng $m=a^2-a$

Bảng biến thiên hàm $g(a)=a^2-a$

a	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g(a)$	0	↘	$\frac{-1}{4}$	↗	$+\infty$

Phương trình đã cho có nghiệm khi $m\ge -\frac{1}{4}$, mà m nguyên dương nhỏ hơn 2021 nên $m\in\{1;2;3;.....,2020\}$.

Vậy có 2020 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 24. Cho phương trình $3^{x^2+2mx+4m-3}-2=\left|\frac{m-2}{x+m}\right|$. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-6;0]$?

A. 0.   **B.** 1.   **C.** 2.   **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x\ne -m$

Với điều kiện trên $3^{x^2+2mx+4m-3}-2=\left|\frac{m-2}{x+m}\right| \Leftrightarrow 3^{(x+m)^2-(m-2)^2+1}-2=\left|\frac{m-2}{x+m}\right|$.

Đặt $t=|x+m|, t>0$ ta được: $3^{t^2-(m-2)^2+1}-2=\frac{|m-2|}{t}$ $(*)$.

Nhận thấy: Hàm số $f(t)=3^{t^2-(m-2)^2+1}-2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hàm số $g(t)=\frac{|m-2|}{t}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Và $f(|m-2|)=g(|m-2|)$. Vậy $(*)$ có nghiệm duy nhất $t=|m-2|$.

Khi đó $|x+m|=|m-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2-2m \end{array}\right.$.

Để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-6;0\right]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6\le 2-2m\le 0 \\ 2-2m\ne -2 \\ -m\ne -2 \\ 2-2m\ne -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le m\le 4 \\ m\ne 2 \end{cases}.$$

Do m nguyên nên $m\in\left\{1;3;4\right\}$.

Câu 25. Tổng tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$ có 3 nghiệm phân biệt là

A. 27. **B.** 34. **C.** 38. **D.** 45.

Lời giải

Chọn A

$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left[\left(x-3\right)^3+27+m-3x\right].3^{x-3}=3^x+1$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x-3\right)^3+m-3x+27=3^3+3^{3-x}\ (1)$

$a=3-x;\ b=\sqrt[3]{m-3x}$

$(1)\Leftrightarrow 3^b+27+b^3-a^3=27+3^a\Leftrightarrow 3^b+b^3=3^a+a^3.$

Xét $f\left(t\right)=3^t+t^3\Rightarrow f'\left(t\right)=3^t.\ln 3+3t^2\ge 0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f\left(a\right)=f\left(b\right)\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow 3-x=\sqrt[3]{m-3x}\Leftrightarrow m=\left(3-x\right)^3+3x\Leftrightarrow m=-x^3+9x^2-24x+27.$

Xét hàm số $f\left(x\right)=-x^3+9x^2-24x+27$ có

$f'\left(x\right)=-3x^2+18x-24\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=2\vee x=4.$

Bảng biến thiên hàm số $f\left(x\right)=-x^3+9x^2-24x+27$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	11	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào BBT suy ra $7<m<11\Rightarrow m=\left\{8;9;10\right\}$. Vậy tổng các giá trị của m bằng 27

Câu 26. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[-40;40\right]$ của tham số m để phương trình $2^{x^2-2mx+2}+2x^4-4mx^3+x^2-2mx-4=0$ có hai nghiệm phân biệt không âm. Số phần tử của tập S là:

A. 25. **B.** 40. **C.** 60. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2-2mx+2}+2x^4-4mx^3+x^2-2mx-4=0$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-2mx+2}+2x^2\left(x^2-2mx+2\right)+\left(x^2-2mx+2\right)-4x^2-6=0$.

Đặt $t=x^2-2mx+2$

PT $\Leftrightarrow 2^t+2x^2t+t-4x^2-6=0\Leftrightarrow 2^t+t\left(2x^2+1\right)-2\left(2x^2+1\right)-4=0$

$\Leftrightarrow 2^t - 4 + (t-2)(2x^2+1) = 0 \quad (*)$.

TH1: Nếu $t = 2$ thì $(*)$ luôn đúng.

TH2: Nếu $t > 2 \Rightarrow 2^t - 4 > 0; (t-2)(2x^2+1) > 0 \Rightarrow VT(*) > VP(*)$.

TH3: Nếu $t < 2 \Rightarrow 2^t - 4 < 0; (t-2)(2x^2+1) < 0 \Rightarrow VT(*) < VP(*)$.

Vậy $(*) \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow x^2 - 2mx + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2m \end{array}\right.$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt không âm thì $2m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vì $m \in [-40; 40], m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ có 40 giá trị của m thỏa mãn.

_______________ TOANMATH.com _______________