CHỦ ĐỀ 8: BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ

1. Bài toán 1. Tìm tham số *m* để $f(x;m)=0$ có nghiệm (hoặc có *k* nghiệm) trên miền *D*.

- Bước 1. Tách *m* ra khỏi biến số *x* và đưa về dạng $f(x)=P(m)$.

- Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên *D*.

- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $P(m)$ để đường thẳng $y=P(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Một số kiến thức quan trọng để giải quyết bài toán 1

• Hàm số $y=f(x)$ có giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất trên *D* thì giá trị $P(m)$ cần tìm để phương trình có nghiệm thỏa mãn $\min\limits_{x\in D} f(x)\le P(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$

• Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có *k* nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=P(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại *k* điểm phân biệt.

• Nếu đổi biến, nói cách khác là đặt ẩn phụ thì ta cần tìm điều kiện cho biến mới và biện luận mối tương quan số nghiệm giữa biến cũ và biến mới.

• Nếu đề bài yêu cầu tìm tham số *m* để phương trình bậc hai theo mũ hoặc lôgarit có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=a$ hoặc $x_1x_2=b$, ta có thể sử dụng định lý Vi-ét sau khi lấy mũ hoặc lôgarit hai vế hợp lí.

2. Bài toán 2. Tìm tham số *m* để $f(x;m)\ge 0$ hoặc $f(x;m)\le 0$ có nghiệm trên *D*.

- Bước 1. Tách *m* ra khỏi biến số *x* và đưa về dạng $f(x)\ge P(m)$ hoặc $f(x)\le P(m)$

- Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên *D*.

- Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $P(m)$ để bất phương trình có nghiệm:

• $P(m)\le f(x)$ có nghiệm trên *D* $\Leftrightarrow P(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.

• $P(m)\ge f(x)$ có nghiệm trên *D* $\Leftrightarrow P(m)\ge \min\limits_{x\in D} f(x)$.

Một số kiến thức quan trọng để giải quyết bài toán 2

• Bất phương trình $P(m)\le f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow P(m)\le \min\limits_{x\in D} f(x)$.

• Bất phương trình $P(m)\ge f(x)$ nghiệm đúng $\forall x\in D \Leftrightarrow P(m)\ge \max\limits_{x\in D} f(x)$.

• Nếu $f(x;m)\ge 0;\forall x\in \mathbb{R}$ hoặc $f(x;m)\le 0;\forall x\in \mathbb{R}$ với $f(x;m)$ là tam thức bậc hai, ta sẽ sử dụng dấu của tam thức bậc hai.

3. Một số phương pháp áp dụng trong bài toán

a) Phương pháp đặt ẩn phụ: Đặt $t=a^{u(x)}$ hoặc $t=\log_a u(x)$, *tùy theo điều kiện của x ta sẽ tìm được miền xác định của biến t.*

b) Phương pháp hàm số: *Đưa phương trình (bất phương trình) về dạng* $f(u)=f(v)$ *với* $f(t)$ *là hàm số đơn điệu và đại diện cho hai vế của phương trình. Khi đó* $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

c) Dấu của tam thức bậc hai: *Xét hàm số* $f(x)=ax^2+bx+c$ *có hai nghiệm phân biệt* x_1,x_2

• Ta có $\Delta=b^2-4ac$ và định lý Vi-ét: $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$.

• Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1x_2>0 \end{cases}$.

• Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac<0$.

• Bất phương trình $f(x)>0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.

• Bất phương trình $f(x)<0;\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.

Ví dụ 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $2^{x^2-2x}=m^2-m+1$ có nghiệm thuộc đoạn $[0;2]$?

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Xét $u(x)=x^2-2x$ trên $[0;2]$, có $u'(x)=2x-2;u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Tính $u(0)=0;u(1)=-1;u(2)=0\longrightarrow -1\le u(x)\le 0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le 2^{x^2-2x}\le 1$.

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\le m^2-m+1\le 1\Leftrightarrow 0\le m\le 1$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}\longrightarrow$ có 2 giá trị nguyên *m* cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* thuộc $[-10;10]$ để phương trình $4^{x+1}-2^{x+2}+m=0$ có nghiệm?

A. 3 **B.** 12 **C.** 7 **D.** 15

Lời giải

Ta có $4^{x+1}-2^{x+2}+m=0 \Leftrightarrow \left(2^{x+1}\right)^2-2.2^{x+1}+m=0$ (1)

Đặt $t=2^{x+1}>0$. Phương trình (1) trở thành $t^2-2t+m=0 \Leftrightarrow t^2-2t=-m$ (2)

Để phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t>0$.

Cách 1. Xét hàm $f\left(t\right)=t^2-2t$ với $t>0$.

Đạo hàm và lập bảng biến thiên, ta kết luận được $-m\ge -1 \Leftrightarrow m\le 1$. **Chọn C.**

Cách 2. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa mãn $\left[\begin{array}{l} 0<t_1\le t_2 \\ t_1\le 0<t_2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \\ P\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m\le 1 \\ m\le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\le 1$. Kết hợp $m\in\left[-10;10\right]\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}}$ có 12 số nguyên m cần tìm.

Chọn B.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x+2^x+4=3^m\left(2^x+1\right)$ có hai nghiệm phân biệt.

A. $\log_4 3\le m<1$ **B.** $\log_4 3<m<1$ **C.** $1<m\le \log_3 4$ **D.** $1<m<\log_3 4$

Lời giải

Đặt $t=2^x>0 \Leftrightarrow 4^x=\left(2^x\right)^2=t^2$ và $a=3^m$ nên phương trình đã cho trở thành:

$$t^2+t+4=a\left(t+1\right) \Leftrightarrow t^2-\left(a-1\right)t+4-a=0 \quad (*).$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1,t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ S=t_1+t_2>0 \\ P=t_1t_2>0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(a-1\right)^2-4\left(4-a\right)>0 \\ a-1>0;4-a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+2a-15>0 \\ 1<a<4 \end{cases} \Leftrightarrow 3<a<4 \Leftrightarrow 3<3^m<4 \Leftrightarrow 1<m<\log_3 4$.

Chọn D.

Ví dụ 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 7 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Ta có $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2-5m.5^x+7m^2-7=0$

Đặt $t=5^x>0$ nên phương trình trở thành: $t^2-5mt+7m^2-7=0$ (*).

Với mỗi nghiệm $t>0$ của phương trình (*) sẽ tương ứng với một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

Khi đó $\begin{cases}\Delta > 0\\ S > 0\\ P > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}25m^2 - 4\left(7m^2 - 7\right) > 0\\ 5m > 0; 7m^2 - 7 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}28 - 3m^2 > 0\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{\dfrac{28}{3}}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = \{2;3\}$ là hai giá trị nguyên cần tìm. **Chọn C.**

Ví dụ 5: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số *m* để phương trình $4^x - 2m.2^x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

A. 2 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 1

Lời giải

Đặt $t = 2^x > 0$ nên phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2mt + 2m = 0$ (*).

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt t_1, t_2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta > 0\\ S = t_1 + t_2 > 0\\ P = t_1 t_2 > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2 - 8m > 0\\ 2m > 0\\ 2m > 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m > 2\\ m < 0\end{array}\right.\\ m > 0\end{cases} \Leftrightarrow m > 2.$$

Ta có $t_1 t_2 = 2^{x_1}.2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2} = 2^3 = 8 = 2m$ suy ra $m = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $m = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 6: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực *m* để phương trình $6^x + (3 - m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$ **B.** $[2;4]$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(3;4)$

Lời giải

Ta có $6^x + (3 - m)2^x - m = 0 \Leftrightarrow 6^x + 3.2^x = \left(2^x + 1\right).m \Leftrightarrow m = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1} = \dfrac{3^x + 3}{2^{-x} + 1}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{3^x + 3}{2^{-x} + 1}$ trên $(0;1)$, có $f'(x) = \dfrac{3^x.\ln 3\left(2^{-x} + 1\right) + \left(3^x + 3\right).2^{-x}\ln 2}{\left(2^{-x} + 1\right)^2} > 0$

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$.

Vậy để phương trình $m = f(x)$ có nghiệm khi và chỉ khi $2 < m < 4$. **Chọn C.**

Ví dụ 7: Cho phương trình $3^{2x^2 - 3x + m} + 9 = 3^{x^2 - x + 2} + 3^{x^2 - 2x + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* thuộc $[-10;10]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 12 **B.** 8 **C.** 3 **D.** 17

Lời giải

Ta có $3^{2x^2 - 3x + m} + 9 = 3^{x^2 - x + 2} + 3^{x^2 - 2x + m} \Leftrightarrow \left(3^{2x^2 - 3x + m} - 3^{x^2 - 2x + m}\right) + \left(9 - 3^{x^2 - 2x + m}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3^{x^2-x}.\left(3^{x^2-2x+m}-9\right)-\left(3^{x^2-2x+m}-9\right)=0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2-x}-1\right)\left(3^{x^2-2x+m}-9\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2-x}=1 \\ 3^{x^2-2x+m}=9 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x=0 \\ x^2-2x+m=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; x=1 \\ g(x)=x^2-2x+m-2=0 \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow g(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0, 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ g(0) \neq 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2-(m-2)>0 \\ m-2 \neq 0 \\ m-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ m \neq 2 \end{cases}.$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10] \longrightarrow$ có 12 giá trị nguyên của m cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 8: Có bao nhiêu giá của tham số thực m để phương trình $9^{x^2}-2.3^{x^2+1}+3m-1=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt?

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Ta có $9^{x^2}-2.3^{x^2+1}+3m-1=0 \Leftrightarrow \left(3^{x^2}\right)^2-6.3^{x^2}+3m-1=0$ (*)

Vì $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 3^{x^2} \geq 3^0=1$. Đặt $t=3^{x^2} \geq 1$ nên phương trình (*) $\Leftrightarrow f(t)=t^2-6t+3m-1=0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(t)=0$ có nghiệm bằng 1; nghiệm còn lại khác 1.

$\Leftrightarrow f(1)=0 \Leftrightarrow 1^2-6.1+3m-1=0 \Leftrightarrow 3m-6=0 \Leftrightarrow m=2$. **Chọn B.**

Ví dụ 9: Cho phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ với m là tham số thực. Số nguyên dương m bé nhất để phương trình có nghiệm là

A. $m=2$ **B.** $m=8$ **C.** $m=4$ **D.** $m=6$

Lời giải

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$.

Xét $u(x)=1+\sqrt{1-x^2}$, có $u'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}; u'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \longrightarrow \begin{cases} \max\limits_{[-1;1]} u(x)=2 \\ \min\limits_{[-1;1]} u(x)=1 \end{cases}.$

Đặt $t=5^{1+\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow t \in [5;25]$ nên phương trình $\Leftrightarrow t^2-(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$.

Do đó phương trình đã có nghiệm $\Leftrightarrow \min\limits_{[5;25]} f(t) \leq m \leq \max\limits_{[5;25]} f(t) \longleftrightarrow \dfrac{16}{3} \leq m \leq \dfrac{576}{23}$.

Suy ra số nguyên dương m lớn nhất là $m=6$. **Chọn D.**

Cách CASIO. Cô lập m ta được $m=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$.

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{25^{1+\sqrt{1-x^2}}-2.5^{1+\sqrt{1-x^2}}+1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}}-2}$. Khi đó phương trình $\Leftrightarrow f\left(x\right)=m$.

Sử dụng MODE7 khảo sát hàm $f\left(x\right)$ với thiết lập Start -1, End 1, Step 0, 2.

Quan sát bảng giá trị ta thấy $f\left(x\right)\geq f\left(5\right)=\dfrac{16}{3}$ hay $m\geq f\left(5\right)=\dfrac{16}{3}$.

Vậy m nguyên dương bé nhất là 6.

Ví dụ 10: Cho phương trình $\left(m+1\right)16^x-2\left(2m-3\right)4^x+6m+5=0$ với m là tham số thực. Tập tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm trái dấu có dạng $\left(a;b\right)$. Tính $P=ab$.

A. $P=4$ **B.** $P=-4$ **C.** $P=-\dfrac{3}{2}$ **D.** $P=\dfrac{5}{6}$

Lời giải

Đặt $t=4^x>0$. Phương trình trở thành $\underbrace{\left(m+1\right)t^2-2\left(2m-3\right)t+6m+5}_{f(t)}=0$ (*).

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<0<x_2 4^{x_1}<4^0<4^{x_2}\longrightarrow t_1<1<t_2$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm t_1,t_2 thỏa $0<t_1<1<t_2\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq 0\\ \left(m+1\right)f\left(1\right)<0\\ \left(m+1\right)f\left(0\right)>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\neq 0\\ \left(m+1\right)\left(3m+12\right)<0\\ \left(m+1\right)\left(6m+5\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow -4<m<-1\longrightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=-1\end{cases}\to P=4$. **Chọn A.**

Ví dụ 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in\left[-10;10\right]$ để phương trình $2^{x^2+mx}-2^{2x^2+2mx+m}=x^2+mx+m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 9 **B.** 6 **C.** 16 **D.** 13

Lời giải

Ta có $2^{x^2+mx}-2^{2x^2+2mx+m}=x^2+mx+m\Leftrightarrow 2^{x^2+mx}-2^{2x^2+2mx+m}=2x^2+2mx+m-\left(x^2+mx\right)$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+mx}+x^2+mx=2^{2x^2+2mx+m}+2x^2+2mx+m\Leftrightarrow f\left(x^2+mx\right)=f\left(2x^2+2mx+m\right)$ (*).

Xét hàm số $f\left(t\right)=2^t+t$ trên $\left(-\infty;+\infty\right)$, có $f'\left(t\right)=2^t.\ln 2+1>0;\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$ nên (*) $\Leftrightarrow x^2+mx=2x^2+2mx+m$

$\Leftrightarrow x^2+mx+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2-4m>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<0 \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10] \longrightarrow$ có 16 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn C.**

Ví dụ 12: Cho phương trình $e^{m.\sin x-\cos x}-e^{2(1-\cos x)}=2-\cos x-m.\sin x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9 **B.** 18 **C.** 11 **D.** 15

Lời giải

PT $\Leftrightarrow e^{m.\sin x-\cos x}+m.\sin x-\cos x=e^{2-2\cos x}+2-2\cos x \Leftrightarrow f(m.\sin x-\cos x)=f(2-2\cos x)$

Với $f(t)=e^t+t$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ nên ta được $m.\sin x-\cos x=2-2\cos x$

$\Leftrightarrow m.\sin x+\cos x=2$ có nghiệm khi $m^2+1^2\ge 2^2 \Leftrightarrow m^2\ge 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge\sqrt{3} \\ m\le-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10] \longrightarrow$ có 9 + 9 = 18 giá trị nguyên cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m nhỏ hơn 10 sao cho phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ có nghiệm thực?

A. 4 **B.** 6 **C.** 8 **D.** 10

Lời giải

Ta có $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x \Leftrightarrow m+\sqrt{m+e^x}=\left(e^x\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{m+e^x}\right)^2+\sqrt{m+e^x}=\left(e^x\right)^2+e^x$ (*).

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $(0;+\infty)$, có $f'(t)=2t+1>0;\forall t>0$

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên (*) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+e^x}\right)=f\left(e^x\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{m+e^x}=e^x \Leftrightarrow m+e^x=\left(e^x\right)^2 \Leftrightarrow m=\left(e^x\right)^2-e^x \xrightarrow{a=e^x>0} m=g(a)=a^2-a$.

Xét hàm số $g(a)=a^2-a$ trên $(0;+\infty)$, có $g'(a)=2a-1; g'(a)=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Dựa vào BBT, ta thấy $m=g(a)$ có nghiệm thực dương $\Leftrightarrow m\ge g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và $m<10 \longrightarrow$ có 10 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 14: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m+e^{\frac{x}{2}}=\sqrt[4]{e^{2x}+1}$ có nghiệm?

A. $0<m<1$ **B.** $0<m\le\frac{2}{e}$ **C.** $\frac{1}{e}\le m<1$ **D.** $-1<m<0$

Lời giải

Đặt $t=\sqrt[4]{e^{2x}+1}$, vì $e^{2x}>0 \longrightarrow t>1$. Suy ra $t^4=e^{2x}+1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^4=t^4-1 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}=\sqrt[4]{t^4-1}$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $m+\sqrt[4]{t^4-1}=t \Leftrightarrow m=t-\sqrt[4]{t^4-1}$ (*)

Xét hàm số $f(t)=t-\sqrt[4]{t^4-1}$ trên $(1;+\infty)$, có $f'(t)=1-\dfrac{t^3}{\sqrt[4]{\left(t^4-1\right)^3}}<0;\forall t>1$

Suy ra hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

t		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	
$f(t)$		1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $0<m<1$. **Chọn A.**

Ví dụ 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để bất phương trình $\left(\dfrac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\dfrac{e}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 8 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Ta có $\left(\dfrac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\dfrac{e}{2}\right)^{2x-3m} \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{e}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\dfrac{2}{e}\right)^{3m-2x} \Leftrightarrow x^2+2mx+1\ge 3m-2x$

$\Leftrightarrow x^2+2(m+1)x-3m+1\ge 0;\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 \\ \Delta'=(m+1)^2-(1-3m)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -5\le m\le 0$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z} \longrightarrow$ có 6 giá trị nguyên *m* cần tìm. **Chọn C.**

Ví dụ 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để bất phương trình $9^x-m.3^x-m+3>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 12 **B.** 20 **C.** 8 **D.** 4

Lời giải

Đặt $t=3^x>0$ thì bất phương trình trở thành: $t^2-mt-m+3>0,\forall t>0$

$\Leftrightarrow m(t+1)<t^2+3 \Leftrightarrow m<\dfrac{t^2+3}{t+1}=f(t),\forall t\in(0;+\infty) \Leftrightarrow m<\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}; f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t>0 \\ t^2+2t-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=1.$

t	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$f'(t)$			0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(t)$					3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT, suy ra $m < \min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = 2$. Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-10;10] \end{cases} \Rightarrow$ có 12 giá trị nguyên m. **Chọn A.**

Ví dụ 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10;10]$ để bất phương trình $3^{2x+1} - (m+3).3^x - 2(m+3) > 0$ có nghiệm?

A. 10 **B.** 5 **C.** 19 **D.** 13

Lời giải

Đặt $t = 3^x > 0$ thì bất phương trình trở thành: $3t^2 - (m+3)t - 2m - 6 < 0$

$\Leftrightarrow 3t^2 - 3t - 6 < m(t+2) \Leftrightarrow m > \dfrac{3t^2 - 3t - 6}{t+2} = f(t)$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{3t^2 - 3t - 6}{t+2}$ trên $(0;+\infty)$, có $f'(t) = \dfrac{3t^2 + 12t}{(t+2)^2} > 0; \forall t > 0$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow \min f(t) = -3$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > \min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = -3$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10] \longrightarrow$ có 13 giá trị nguyên cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 18: Cho bất phương trình $m.3^{x+1} + (3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x + \left(4+\sqrt{7}\right)^x > 0$, với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x < 0$?

A. $m > \dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m > \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $m \ge \dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $m > -\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3m + (3m+2).\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x + \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x > 0$ (*).

Ta có $\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}.\dfrac{4+\sqrt{7}}{3} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^{-x}$ nên đặt $t = \left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x \Rightarrow \left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x = \dfrac{1}{t}$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow 3m+\dfrac{3m+2}{t}+t>0,\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow 3m>-\dfrac{t^2+2}{t+1},\forall t\in(0;1)$

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{t^2+2}{t+1}$ trên $(0;1)$, suy ra $\max\limits_{(0;1)} f(t)=f\left(\sqrt{3}-1\right)=2-2\sqrt{3}$.

Do đó $3m>f(t);\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow 3m>2-2\sqrt{3}\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **Chọn B.**

Ví dụ 19: Gọi m là số thực sao cho phương trình $\log_3^2 x-(m+2)\log_3 x+3m-2=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1x_2=9$. Khẳng định nào dưới đaya đúng?

A. $1<m<3$ **B.** $-3<m<-1$ **C.** $-1<m<1$ **D.** $2<m<4$

Lời giải

Đặt $t=\log_3 x$ thì phương trình trở thành: $t^2-(m+2)t+3m-2=0$ (*)

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta=(m+2)^2-4(3m-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2-8m+12>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>6 \\ m<2 \end{array}\right..$$

Ta có $x_1x_2=9\Leftrightarrow \log_3(x_1x_2)=2\Leftrightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=2\Leftrightarrow t_1+t_2=2\Leftrightarrow m=0$ (thỏa mãn).

Vậy $-1<m<1$. **Chọn C.**

Ví dụ 20: Cho phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(m+6x)+\log_2\left(3-2x-x^2\right)=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 17 **B.** 23 **C.** 9 **D.** 15

Lời giải

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(m+6x)+\log_2\left(3-2x-x^2\right)=0\Leftrightarrow \log_2\left(3-2x-x^2\right)=\log_2(m+6x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2>0 \\ 3-2x-x^2=m+6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<1 \\ m=-x^2-8x+3 \longrightarrow f(x)=-x^2-8x+3 \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(x)=-x^2-8x+3$ trên $(-3;1)$, có $f'(x)=-2x-8<0;\forall x\in(-3;1)$

Dựa vào BBT, để $m=f(x)$ có nghiệm thuộc $(-3;1)\Leftrightarrow f(-3)<m<f(1)\Leftrightarrow -6<m<18$.

Kết hợp với m nguyên dương $\longrightarrow$ có 17 giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 11 **B.** 7 **C.** 16 **D.** 3

Lời giải

Điều kiện: $x>-1$

Phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow mx=(x+1)^2\Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x}=x+\dfrac{1}{x}+2$.

Xét hàm $f(x)=x+\dfrac{1}{x}+2$ trên $(-1;+\infty)$, có $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}; f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=1\end{array}\right.$.

x	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4\\ m<0\end{array}\right.$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]\longrightarrow$ có 11 giá trị m nguyên. **Chọn A.**

Ví dụ 22: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số m để $\log_2\left(x^2-2x+5\right)-m.\log_{x^2-2x+5}2=5$ có hai nhiệm phân biệt là nghiệm của bất phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)>\log_3 4$?

A. $\left(-\dfrac{25}{4};-6\right]$ **B.** $\left(-\dfrac{25}{4};-6\right)$ **C.** $\left(-\dfrac{25}{4};+\infty\right)$ **D.** $\left[-\dfrac{25}{4};-6\right]$

Lời giải

BPT $\Leftrightarrow\begin{cases} x+1>0; x-1>0\\ \log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+1}{x-1}>\log_{\sqrt{3}}2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>1\\ \dfrac{x+1}{x-1}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>1\\ x<\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3$.

Phương trình đã cho được viết lại thành: $\log_2\left(x^2-2x+5\right)-\dfrac{m}{\log_2\left(x^2-2x+5\right)}=5$

Đặt $t=\log_2\left(x^2-2x+5\right)$, ta được $t-\dfrac{m}{t}=5\Leftrightarrow m=f(t)=t^2-5t$.

Với $1<x<3\Rightarrow 4<x^2-2x+5<8\Leftrightarrow \log_2 4<\log_2\left(x^2-2x+5\right)<\log_2 8\Rightarrow 2<t<3$.

Xét hàm số $f(t)$ trên khoảng $(2;3)$, để $m=f(t)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\dfrac{25}{4}<m<-6$. **Chọn B.**

Ví dụ 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-10;10]$ để phương trình $x-\dfrac{2}{\log_3(x+1)}=m$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 5 **B.** 18 **C.** 11 **D.** 9

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x > -1 \\ \log_3(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x+1 \neq 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$.

Xét hàm số $f(x) = x - \dfrac{2}{\log_3(x+1)}$ trên khoảng $D = (-1;+\infty) \setminus \{0\}$.

Ta có $f'(x) = 1 - \dfrac{2.\left[\log_3(x+1)\right]'}{\log_3^2(x+1)} = 1 + \dfrac{2}{\ln 3.(x+1).\log_3^2(x+1)} > 0, \forall x \in D$.

Do đó, hàm số đa cho đồng biến trên mỗi khoảng $(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
y'	||	$+$	||	$+$	
y	|| -1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra phương trình $f(x) = m$ có 2 nghiệm $\Leftrightarrow m > -1$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10] \longrightarrow$ có 11 giá trị m nguyên. **Chọn C.**

Ví dụ 24: Phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $m \in (a;b)$. Tính $P = a - 2b$.

A. -5 **B.** 0 **C.** -10 **D.** -20

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 > 0 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{14} < x < 2 \\ m = 6x^2 - 14x + 29 - \dfrac{2}{x} (*) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có ba nghiệm phân biệt $x \in \left(\dfrac{1}{14};2\right)$.

Xét hàm số $f(x) = 6x^2 - 14x + 29 - \dfrac{2}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{14};2\right)$.

Ta có $f'(x)=12x-14+\frac{2}{x^2}=\frac{12x^3-14x^2+2}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ (do $\frac{1}{14}<x<2$).

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình (*) có ba nghiệm phân biệt khi $19<m<\frac{39}{2}$.

Vậy $m\in\left(19;\frac{39}{2}\right)\longrightarrow\begin{cases} a=19 \\ b=\frac{39}{2}\end{cases}\longrightarrow P=a-2b=19-2.\frac{39}{2}=-20$. **Chọn D.**

Ví dụ 25: Cho phương trình $\log_3\frac{2x^2-x+m}{x^2+1}=x^2+x+4-m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để phương trình có hai nghiệm trái dấu?

A. 2022 **B.** 2021 **C.** 2016 **D.** 2015

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \log_3\frac{2x^2-x+m}{x^2+1}=3(x^2+1)-(2x^2-x+m)+1$

$\Leftrightarrow \log_3(2x^2-x+m)-\log_3(x^2+1)=3(x^2+1)-(2x^2-x+m)+1$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+m+\log_3(2x^2-x+m)=3x^2+3+\log_3(3x^2+3)$ (*).

Xét hàm số $f(t)=t+\log_3 t$ trên $(0;+\infty)$, có $f'(t)=1+\frac{1}{t.\ln 3}>0;\forall t>0$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên (*) $\Leftrightarrow f(2x^2-x+m)=f(3x^2+3)$

$\Leftrightarrow 2x^2-x+m=3x^2+3\Leftrightarrow x^2+x-m+3=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 1.(3-m)<0\Leftrightarrow m>3$.

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-2018;2018]\longrightarrow$ có 2015 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 26: Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $\log_4(2^{2x}+2^{x+2}+2^2)=\log_2|m-2|$ vô nghiệm. Giá trị của S bằng

A. $S=8$ **B.** $S=10$ **C.** $S=12$ **D.** $S=6$

Lời giải

Điều kiện: $m\neq 2$. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_4\left[(2^x+2)^2\right]=\log_2|m-2|$

$\Leftrightarrow \log_2(2^x+2)=\log_2|m-2|\Leftrightarrow 2^x+2=|m-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x+2=m-2 \\ 2^x+2=2-m\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x=m-4 \\ 2^x=-m\end{array}\right.$

Để phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases} m-4\le 0 \\ -m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\le 4 \\ m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 4$

Kết hợp với $m\in\mathbb{Z}\longrightarrow m=\{0;1;2;3;4\}$. Vậy $S=\sum m=10$. **Chọn B.**

Ví dụ 27: Tìm giá trị thực của tham số *m* để phương trình $\log_{\sqrt{3}}^2 x - m\log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1?

A. $m = 2$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = \sqrt{2}$ **D.** $m = 0$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$. Vì phương trình có nghiệm nhỏ hơn 1 nên suy ra $0 < x < 1$.

Đặt $\log_{\sqrt{3}} x = t$, với $0 < x < 1 \longrightarrow t < 0$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - mt + 1 = 0 \Leftrightarrow m = f(t) = t + \frac{1}{t}$

Xét hàm số $f(t) = t + \frac{1}{t}$ trên $(-\infty;0)$, có $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Dựa vào BBT, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m = f(t)$ có nghiệm duy nhất $t < 0 \Leftrightarrow m = -2$. **Chọn B.**

Ví dụ 28: Gọi m_0 là giá trị thực nhỏ nhất của tham số *m* sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2 (x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}} (x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(2;4)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m \in \left(-5;-\frac{5}{2}\right)$ **B.** $m \in \left(-1;\frac{4}{3}\right)$ **C.** $m \in \left(2;\frac{10}{3}\right)$ **D.** Không tồn tại *m*.

Lời giải

Đặt $t = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, do $2 < x < 4 \Leftrightarrow 0 < x - 2 < 2 \longrightarrow t > -1$.

Phương trình đã cho trở thành: $(m-1)t^2 - (m-5)t + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 5t + 1}{t^2 - t + 1}$ trên $(-1;+\infty)$, có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

t	-1		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{7}{3}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1

Dựa vào BBT, ta thấy phương trình có nghiệm $-3 \le m < \frac{7}{3} \Rightarrow m_0 = -3$. **Chọn A.**

Ví dụ 29: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $\log_2 \frac{4^x - 1}{4^x + 1} - m = 0$ có nghiệm?

A. $m < 0$ **B.** $-1 < m < 1$ **C.** $m \le -1$ **D.** $-1 < m < 0$

Lời giải

Điều kiện: $4^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = 4^x$, với $x > 0 \longrightarrow t > 1$. Phương trình đã cho trở thành: $m = \log_2 \dfrac{t-1}{t+1}$ (*).

Xét hàm số $f(t) = \log_2 \dfrac{t-1}{t+1}$ trên $(1;+\infty)$, có $f'(t) = \dfrac{2}{(t^2-1)\ln 2} > 0, \forall t > 1$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

t		1		$+\infty$
$f'(t)$			$+$	
$f(t)$		$-\infty$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m < 0$. **Chọn A.**

Ví dụ 30: Xét các số nguyên dương *a, b* sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S = 2a + 3b$.

A. $S_{\min} = 30$ **B.** $S_{\min} = 25$ **C.** $S_{\min} = 33$ **D.** $S_{\min} = 17$

Lời giải

Phương trình $\begin{cases} a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0 \\ 5\log^2 x + b\log x + a = 0 \end{cases}$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = b^2 - 20a > 0$.

Theo hệ thức Vi-ét, ta có $\begin{cases} \ln x_1 + \ln x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ \log x_3 + \log x_4 = -\dfrac{b}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x_1x_2) = -\dfrac{b}{a} \\ \log(x_3x_4) = -\dfrac{b}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = e^{-\frac{b}{a}} \\ x_3x_4 = 10^{-\frac{b}{5}} \end{cases}$.

Mặt khác $x_1x_2 > x_3x_4 \Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}} > 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow \ln e^{-\frac{b}{a}} > \ln 10^{-\frac{b}{5}} \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a} > -\dfrac{b}{5}.\ln 10 \Leftrightarrow \text{a} > \dfrac{5}{\ln 10}$.

Vì *a, b* là hai số nguyên dương suy ra $a \geq 3 \Rightarrow a_{\min} = 3$ và $b^2 > 20a > 60 \Rightarrow b_{\min} = 8$.

Vậy $S_{\min} = 2a_{\min} + 3b_{\min} = 2.3 + 3.8 = 30$. **Chọn A.**

Ví dụ 31: Cho phương trình $5^x + m = \log_5(x - m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20 **B.** 19 **C.** 9 **D.** 21

Lời giải

Điều kiện: $x > m$. Phương trình $\Leftrightarrow 5^x + x = x - m + \log_5(x-m)$

$\Leftrightarrow 5^x + x = 5^{\log_5(x-m)} + \log_5(x-m) \Leftrightarrow f(x) = f\left[\log_5(x-m)\right]$

$\Leftrightarrow x = \log_5(x-m) \Leftrightarrow 5^x = x - m \Leftrightarrow m = x - 5^x = g(x)$.

Xét hàm số $g(x) = x - 5^x$ trên $(-\infty;+\infty)$, có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\log_5(\ln 5)$

x	$-\infty$		$-\log_5 \ln 5$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm khi $m \le g(-\log_5 \ln 5) \approx -0,92$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-20;20) \longrightarrow$ có 19 giá trị nguyên m cần tìm. **Chọn B.**

Ví dụ 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để bất phương trình $4\log_2^2 \sqrt{x} + \log_2 x + m \ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in (1;64)$?

A. 11 **B.** 3 **C.** 8 **D.** 16

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow 4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 + \log_2 x + m \ge 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 + \log_2 x + m \ge 0$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$ với $x \in (1;64) \longrightarrow t \in (0;6)$, khi đó (*) $\Leftrightarrow m \ge f(t) = -t^2 - t; \forall t \in (0;6)$.

Xét hàm số $f(t) = -t^2 - t$ trên $(0;6)$, có $f'(t) = -2t - 1 < 0; \forall t \in (0;6)$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $(0;6) \longrightarrow \max\limits_{(0;6)} f(t) = f(0) = 0$.

Do đó $m \ge f(t); \forall\, t \in (0;6) \Leftrightarrow m \ge 0$. Kết hợp $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ -10 \le m \le 10 \end{cases} \longrightarrow$ có 11 giá trị nguyên cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 33: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10;10]$ để bất phương trình $\log_2^2(2x) - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$?

A. Vô số **B.** 17 **C.** 3 **D.** 10

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow (1 + \log_2 x)^2 - 2(m+1)\log_2 x - 2 < 0$ (*)

Đặt $t = \log_2 x$. Vì $x > \sqrt{2}$ nên $\log_2 x > \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow t > \frac{1}{2}$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow (1+t)^2 - 2(m+1)t - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 2mt - 1 < 0$

$\Leftrightarrow m > f(t) = \dfrac{t^2-1}{2t}; \forall t \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow m > \min\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2-1}{2t}$ trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$, có $f'(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2t^2} > 0$;

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ nên $m > \min\limits_{\left(\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-10;10] \longrightarrow$ có 10 giá trị nguyên *m* cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 34: Có bao nhiêu giá trị nguyên của *a* để bất phương trình $\ln(2x^2+3) > \ln(x^2+ax+1)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1>0 \\ 2x^2+3 > x^2+ax+1 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2+ax+1>0 \\ g(x) = x^2-ax+2>0 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{f(x)} < 0 \\ \Delta_{g(x)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4<0 \\ a^2-8<0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2-4<0 \Leftrightarrow (a-2)(a+2)<0 \Leftrightarrow -2<a<2$.

Kết hợp với $a \in \mathbb{Z} \longrightarrow a = \{-1;0;1\}$ là các giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Ví dụ 35: Cho bất phương trình $1+\log_5(x^2+1) \ge \log_5(mx^2+4x+m)$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để bất phương trình luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Ta có $1+\log_5(x^2+1) \ge \log_5(mx^2+4x+m) \Leftrightarrow \log_5(5x^2+5) \ge \log_5(mx^2+4x+m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ 5x^2+5 \ge mx^2+4x+m \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = mx^2+4x+m > 0; \forall x \in \mathbb{R} (1) \\ g(x) = (m-5)x^2+4x+m-5 \le 0; \forall z \in \mathbb{R} (2) \end{cases}$

Giải (1), ta có $f(x) > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m > 0 \\ \Delta' = 2^2 - m^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Giải (2), ta có $g(x) \le 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = m-5 < 0 \\ \Delta' = 4-(m-5)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 3$.

Khi đó $2 < m \le 3$ là giá trị cần tìm, kết hợp $m \in \mathbb{Z} \longrightarrow m = 3$. **Chọn C.**

Ví dụ 36: Tìm tất cả giá trị thực của tham số *m* để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực?

A. $m < 1$ **B.** $m \le 1$ **C.** $m < \frac{2}{3}$ **D.** $m < 0$

Lời giải

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_2 x$, với $x > 0$ suy ra $t \in (-\infty; +\infty)$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2t + 3m - 2 < 0 \Leftrightarrow 3m < -t^2 + 2t + 2$ (*).

Để bất phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 3m < M = \max\limits_{(-\infty;+\infty)} \left\{-t^2 + 2t + 2\right\}$ (1)

Ta có $-t^2 + 2t + 2 = 3 - (t-1)^2 \le 3, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra $M = 3$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $3m < 3 \Leftrightarrow m < 1$ là giá trị cần tìm. **Chọn A.**

Ví dụ 37: Tìm tập hợp các giá trị thực của tham số *m* sao cho bất phương trình $\log_2 x + m \ge \frac{1}{2}x^2$ có nghiệm $x \in [1;3]$?

A. $\left[\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}; +\infty\right)$ **B.** $\left[\frac{9}{2} - \log_2 3; +\infty\right)$

C. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ **D.** $\left[\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(\ln 2); +\infty\right)$.

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}x^2 - \log_2 x = f(x) \Rightarrow m \ge \min\limits_{[1;3]} f(x)$

Ta có $f'(x) = x - \frac{1}{x\ln 2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x\ln 2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}$.

Tính $\begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}\right) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(\ln 2) \Rightarrow \min\limits_{[1;3]} f(x) = f\left(\frac{1}{\sqrt{\ln 2}}\right) = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(\ln 2) \\ f(3) = \frac{9}{2} - \log_2 3 \end{cases}$

Suy ra $m \ge \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(\ln 2) \Leftrightarrow m \in \left[\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(\ln 2); +\infty\right)$. **Chọn D.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để phương trình $3^x = m$ có nghiệm thực

A. $m \ge 1$ **B.** $m \ge 0$ **C.** $m > 0$ **D.** $m \ne 0$

Câu 2: Tìm *m* để $4^x - 2(m-1).2^x + 3m - 4 = 0$ có 2 nghiệm x_1 và x_2 thỏa $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m = 3$ **B.** $m = 4$ **C.** $m = 1$ **D.** $m = 2$

Câu 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để phương trình $9^x - 2m.3^x + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $x_1 + x_2 = 3$.

A. $m = -\dfrac{3}{2}$ **B.** $m = \dfrac{27}{2}$ **C.** $m = 3\sqrt{3}$ **D.** $m = \dfrac{9}{2}$

Câu 4: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $9^x - 2.3^{x+1} + m = 0$. Tìm giá trị của tham số *m* để $x_1 + x_2 = 1$

A. $m = 6$ **B.** $m = -3$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 1$

Câu 5: Tìm *m* để $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 2 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn $x_1.x_2 = 9$.

A. $m \in (4;6)$ **B.** $m \in (-1;1)$ **C.** $m \in (3;4)$ **D.** $m \in (1;3)$

Câu 6: Tìm tham số *m* để phương trình $4^x + (1-3m)2^x + 2m^2 - m = 0$ có nghiệm.

A. $(-\infty;+\infty)$ **B.** $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(1;+\infty)$

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* để $\log_2^2 x - \log_2 x^3 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;8]$.

A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 8: Tìm *m* để phương trình $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{0,5} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $-1 \le m \le \dfrac{1}{4}$ **B.** $m < \dfrac{1}{4}$ **C.** $0 < m \le \dfrac{1}{4}$ **D.** $m \le \dfrac{1}{4}$

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* để $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1.x_2 = 27$.

A. $m = 1$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = 25$ **D.** $m = 4$

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* để $\log_2^2 x + 4\log_2 x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $(-4;+\infty)$ **B.** $[-4;+\infty)$ **C.** $[-4;0)$ **D.** $[-2;0]$

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực *m* để $\log_2(5^{-x}+1).\log_2(2.5^{-x}+2) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

A. $(-\infty;2)$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(0;2)$

Câu 12: Tìm *m* để $\log_2^2 x - m\log_2 x + 2m - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1x_2 = 16$.

A. $m = -4$ **B.** $m = 11$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = 5$

Câu 13: Tìm *m* để phương trình $9^x - m.3^x + 6 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $|m| > 2\sqrt{6}$ **B.** $|m| > \sqrt{6}$ **C.** $m > \sqrt{6}$ **D.** $m > 2\sqrt{6}$

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của *m* để $16^x + (m-2)9^x = 2.12^x$ có nghiệm dương.

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 15: Có mấy số nguyên *m* để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$.

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Câu 16: Tìm *m* để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $m \in (-\infty; 2)$ **B.** $m \in (1; +\infty)$ **C.** $m \in (1; 2)$ **D.** $m \in (0; 2)$

Câu 17: Phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x + \left(3-2\sqrt{2}\right)^x = m$ có nghiệm khi

A. $m \in (-\infty; 5)$ **B.** $m \in (2; +\infty)$ **C.** $m \in (-\infty; 5]$ **D.** $m \in [2; +\infty)$

Câu 18: Tìm *m* để phương trình $4^{|x|} - (m+1).2^{|x|} + m = 0$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. $m \geq 1$ **B.** $m > 1$ **C.** $1 \neq m > 0$ **D.** $m > 0$

Câu 19: Gọi *S* là tập hợp tất cả các giá trị nguyên không dương của *m* để phương trình
$\log_3(3-x) = \log_3(x+m)$ có nghiệm. Tập *S* có bao nhiêu tập con?

A. 4 **B.** 8 **C.** 2 **D.** 7

Câu 20: Tìm tất cả các giá trị của *m* để phương trình $81^{2x-\sqrt{x}} = m$ có nghiệm.

A. $m \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $m \geq 0$ **C.** $m \geq 1$ **D.** $m \geq -\dfrac{1}{8}$

Câu 21: Có mấy giá trị nguyên của *m* để $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** Vô số

Câu 22: Tìm *m* để phương trình $\log_{\sqrt{2018}}(x-2) = \log_{2018}(mx)$ có nghiệm thực duy nhất.

A. $1 < m < 2$ **B.** $m > 1$ **C.** $m > 0$ **D.** $m < 2$

Câu 23: Tìm các giá trị của tham số *m* để phương trình $4^x - 2(m-1).2^x + m^2 - 4m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m \geq 3$ **B.** $m > 3$ **C.** $m > 1$ **D.** $m \geq 1$

Câu 24: Biết $m=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì $m.25^x-2(m+1).5^x+m+3=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=2$. Giá trị của a^3+b bằng

A. 35 **B.** 8 **C.** 9 **D.** 27

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của *m* để phương trình $5.16^x-2.81^x=m^2.36^x$ có nghiệm dương?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** Vô số

Câu 26: Tìm giá trị thực của tham số *m* để phương trình $\log_3^2 x-m\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $x_1.x_2=81$.

A. $m=-4$ **B.** $m=4$ **C.** $m=81$ **D.** $m=44$

Câu 27: Giá trị thực của tham số *m* để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=71$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;3)$ **B.** $(-6;-3)$ **C.** $(3;6)$ **D.** $(-3;0)$

Câu 28: Giá trị thực của tham số *m* để phương trình $9^x-2(2m+1).3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(3;9)$ **B.** $(9;+\infty)$ **C.** $\left(\frac{1}{4};3\right)$ **D.** $\left(-\frac{1}{2};2\right)$

Câu 29: Tìm tập hợp tham số *m* để $4^x-m.2^x+2m-5=0$ có hai nghiệm trái dấu.

A. $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$ **B.** $\left(0;\frac{5}{2}\right)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $\left(\frac{5}{2};4\right)$

Câu 30: Tập hợp các giá trị thực của *m* để phương trình $\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt là $T=(a;b)$, trong đó *a, b* là các số nguyên hoặc phân số tối giản. Giá trị của $M=a+b$ bằng

A. $\frac{33}{6}$ **B.** $\frac{17}{3}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{41}{4}$

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* để phương trình $9^x+3^{x+1}-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. 11 **B.** 12 **C.** 13 **D.** 14

Câu 32: Có bao nhiêu giá trị nguyên của *m* để $\sqrt[3]{m+3\sqrt[3]{m+3\sin x}}=\sin x$ có nghiệm?

A. 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 2

Câu 33: Tìm giá trị lớn nhất của tham số *m* để phương trình $\ln\left[m+\ln(m+\cos x)\right]=\cos x$ có nghiệm thực?

A. $\frac{e+1}{2}$ **B.** $e-1$ **C.** e **D.** 1

Câu 34: Tìm *m* để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ thỏa mãn với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $-1<m\le 0$ **B.** $-1<m<0$ **C.** $2<m\le 3$ **D.** $2<m<3$

Câu 35: Tìm các giá trị của *m* để phương trình $4^{x-1}-m\left(2^x+1\right)>0$ có nghiệm với $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in(-\infty;0]$ **B.** $m\in(0;+\infty)$ **C.** $m\in(0;1)$ **D.** $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

Câu 36: Tìm *m* để bất phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3-2m\le 0$ có nghiệm thực

A. $m\ge 2$ **B.** $m\le 3$ **C.** $m\le 5$ **D.** $m\ge 1$

Câu 37: Bất phương trình $\ln\left(2x^2+3\right)>\ln\left(x^2+ax+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực *x* khi

A. $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$ **B.** $0<a<2\sqrt{2}$ **C.** $0<a<2$ **D.** $-2<a<2$

Câu 38: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi *x* thuộc $\mathbb{R}:1+\log_6\left(x^2+1\right)\ge\log_6\left(mx^2+2x+m\right)$

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Câu 39: Có mấy giá trị nguyên dương *m* để $4\log_2^2\sqrt{x}-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** Vô số

Câu 40: Tìm *m* để bất phương trình $4\log_2^2\sqrt{x}+\log_2 x+m\ge 0$ nghiệm đúng $\forall x\in(1;64)$

A. $m\le 0$ **B.** $m\ge 0$ **C.** $m<0$ **D.** $m>0$

Câu 41: Biết rằng trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2+2\right)\le 2+\log_2\left(x+y-1\right)$, chỉ có duy nhất một cặp $(x;y)$ thỏa mãn $3x+4y-m=0$. Khi đó hãy tính tổng tất cả các giá trị *m* tìm được?

A. 20 **B.** 46 **C.** 28 **D.** 14

Câu 42: Biết rằng phương trình $\log_{\sqrt{3}}^2 x-m\log_{\sqrt{3}} x+1=0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1. Hỏi *m* thuộc đoạn nào dưới đây?

A. $[1;2]$ **B.** $[-2;0]$ **C.** $[3;5]$ **D.** $(1;2]$

Câu 43: Có bao nhiêu số nguyên dương *m* để $9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 6 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 1

Câu 44: Tìm tham số *m* sao cho bất phương trình $m.4^x+(m-1)2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\le 3$ **B.** $m\le 1$ **C.** $-1\le m\le 4$ **D.** $m\ge 0$

Câu 45: Tìm tham số *m* sao cho bất phương trình $\log_2\left(5^x-1\right).\log_2\left(2.5^x-2\right)\ge m$ có nghiệm $\forall x\ge 1$.

A. $m\ge 6$ **B.** $m>6$ **C.** $m\le 6$ **D.** $m<6$

Câu 46: Gọi *S* là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số thực *m* để bất phương trình

$\log_2\left(7x^2+7\right) \geq \log_2\left(mx^2+4x+m\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử S là

A. 10 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;10]$ để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_{0,5} x^2 - 7} < m\left(\log_4 x^2 - 7\right)$ chứa khoảng $(256;+\infty)$.

A. 7 **B.** 10 **C.** 8 **D.** 9

Câu 48: Tìm tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \geq 1$ và $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

A. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$

B. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ và $\sqrt{10}+\sqrt{2}$

C. $\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$ và $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$

D. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-9;9)$ để bất phương trình $3\log x \leq 2\log\left[m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right]$ có nghiệm thực?

A. 6 **B.** 7 **C.** 10 **D.** 11

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Phương trình có nghiệm thực $\Leftrightarrow m>0$. **Chọn C.**

Câu 2: PT $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2(m-1).2^x+3m-4=0$

$$\longrightarrow \begin{cases}\Delta'=(m-1)^2-(3m-4)\geq 0\\ 2^{x_1}+2^{x_2}=2(m-1)>0\\ 2^{x_1}.2^{x_2}=3m-4>0\\ 2^{x_1}.2^{x_2}=3m-4=2^{x_1+x_2}=2^3\end{cases}\Leftrightarrow m=4.$$ **Chọn B.**

Câu 3: PT $\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-2m.3^x+2m=0\longrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-2m>0\\ 3^{x_1}+3^{x_2}=2m>0\\ 3^{x_1}.3^{x_2}=2m>0\\ 3^{x_1}.3^{x_2}=2m=3^{x_1+x_2}=3^3\end{cases}\Rightarrow m=\dfrac{27}{2}$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 4: PT $\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-6.3^x+m=0\longrightarrow \begin{cases}\Delta'=9-m\geq 0\\ 3^{x_1}+3^{x_2}=6>0\\ 3^{x_1}.3^{x_2}=m>0\\ 3^{x_1}.3^{x_2}=m=3^{x_1+x_2}=3\end{cases}\Rightarrow m=3$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 5: Ta giải hệ $\begin{cases}\Delta=(m+2)^2-4(3m-2)\geq 0\\ \log_3 x_1+\log_3 x_2=m+2=\log_3\left(x_1x_2\right)=\log_3 9=2\end{cases}\Rightarrow m=0$ thỏa mãn. **Chọn B.**

Câu 6: PT $\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-(3m-1).2^x+2m^2-m\longrightarrow \begin{cases}\Delta=(3m-1)^2-4\left(2m^2-m\right)\geq 0\\ 2^{x_1}+2^{x_2}=3m-1>0\\ 2^{x_1}.2^{x_2}=2m^2-m>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}m^2-2m+1\geq 0\\ m>\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}m>\dfrac{1}{2}\\ m<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}.$$ **Chọn D.**

Câu 7: PT $\Leftrightarrow \log_2^2 x-3\log_2 x+3=m$.

Đặt $t=\log_2 x\xrightarrow{x\in[1;8]} t\in[0;3]\Rightarrow m=t^2-3t+3=f(t)\Rightarrow f'(t)=2t-3=0\Leftrightarrow t=\dfrac{3}{2}$.

Tính $f(0)=3; f(3)=3; f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\longrightarrow \dfrac{3}{4}\leq m\leq 3\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$. **Chọn D.**

Câu 8: PT $\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 - \log_{2^{-1}} x + m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$.

Đặt $t = \log_2 x < 0 \Rightarrow -m = t^2 + t = f(t) \Rightarrow f'(t) = 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Tính $f(0) = 0; f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \longrightarrow -\frac{1}{4} \le -m \le 0 \Leftrightarrow 0 < m \le \frac{1}{4}$. **Chọn C.**

Câu 9: Ta giải hệ $\begin{cases} \Delta = (m+2)^2 - 4(3m-1) \ge 0 \\ \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = m + 2 = \log_3(x_1x_2) = \log_3 27 = 3 \end{cases} \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn. **Chọn A.**

Câu 10: Đặt $t = \log_2 x < 0 \Rightarrow m = t^2 + 4t = f(t) \Rightarrow f'(t) = 2t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -2$.

Tính $f(0) = 0; f(-2) = -4 \longrightarrow -4 \le m < 0$. **Chọn C.**

Câu 11: Đặt $t = \log_2(5^{-x} + 1) \Rightarrow \log_2(2.5^{-x} + 2) = \log_2\left[2.(5^{-x} + 1)\right] = 1 + t \Rightarrow m = t^2 + t = f(t)$.

Ta có $5^{-x} + 1 > 1 \Rightarrow t > 0$ và với $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow 5^{-x} + 1 < 2 \Rightarrow t < 1 \Rightarrow t \in (0;1)$.

Lại có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in (0;1) \longrightarrow$ Tính $f(0) = 0; f(1) = 2 \longrightarrow 0 < m < 2$. **Chọn D.**

Câu 12: Ta giải hệ $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4(2m-6) \ge 0 \\ \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = m = \log_2(x_1x_2) = \log_2 16 = 4 \end{cases} \Rightarrow m = 4$ thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 13: PT $\Leftrightarrow (3^x)^2 - m.3^x + 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 24 > 0 \\ 3^{x_1} + 3^{x_2} = m > 0 \Leftrightarrow m > \sqrt{24} \Leftrightarrow m < 2\sqrt{6} \\ 3^{x_1}.3^{x_2} = 6 > 0 \end{cases}$. **Chọn D.**

Câu 14: $16^x + (m-2)9^x = 2.12^x \Leftrightarrow \left(\frac{16}{9}\right)^x - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x + m - 2 = 0$

Để phương trình có nghiệm dương thì $\begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - m \ge 0 \\ 2 > 0 \\ m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 3 \Rightarrow m = 3$. **Chọn A.**

Câu 15: $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2m.2^x + 2m = 0$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$

Ta có $2^{x_1}.2^{x_2} = 2m \Leftrightarrow 2^{x_1 + x_2} = 2m \Leftrightarrow 2^3 = 2m \Leftrightarrow m = 4$. **Chọn C.**

Câu 16: $4^x - m.2^{x+1} + 3m - 3 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2m.2^x + 3m - 3 = 0$

Phương trình có 2 nghiệm khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ 2m > 0 \\ 3m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 3 > 0 \\ m > 0 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$

Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi $(t_1-1)(t_2-1)<0 \Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$

$\Leftrightarrow 3m-3-2m+1<0 \Leftrightarrow m<2 \Rightarrow m\in(1;2)$. **Chọn C.**

Câu 17: Ta có $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=m \Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\dfrac{1}{\left(3+2\sqrt{2}\right)^x}=m$

$\Leftrightarrow \left(3+2\sqrt{2}\right)^{2x}-m\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+1=0$

Phương trình có nghiệm khi $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-4\ge 0\\ m>0\\ 1>0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 2$. **Chọn D.**

Câu 18: Ta có $4^{|x|}-(m+1).2^{|x|}+m=0 \Leftrightarrow \left(2^{|x|}-m\right)\left(2^{|x|}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{|x|}=m\\ 2^{|x|}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^{|x|}=m\\ x=0\end{array}\right.$

Để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m>0$ và $m\ne 1$. **Chọn C.**

Câu 19: Điều kiện: $x<3$.

Ta có $\log_3(3-x)=\log_3(x+m) \Leftrightarrow 3-x=x+m \Leftrightarrow x=\dfrac{3-m}{2}$

Ta có $\dfrac{3-m}{2}<3 \Leftrightarrow 3-m<6 \Leftrightarrow m>-3 \Rightarrow m\in\{-2;-1;0\} \Rightarrow$ có $2^3=8$ tập con. **Chọn B.**

Câu 20: Ta có $2x-\sqrt{x}=2\left(x-\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\right)=2\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}\ge -\dfrac{1}{8} \Rightarrow m\ge 8^{-\frac{1}{8}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **Chọn A.**

Câu 21: Điều kiện: $x>1$.

Ta có $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8) \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2=\log_2(mx-8)$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=mx-8 \Leftrightarrow x^2-(m+2)x+9=0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi

$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1-1>0\\ x_2-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m+2)^2-36>0\\ (x_1-1)(x_2-1)>0\\ (x_1-1)+(x_2-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>4 \vee m<-8\\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0\\ x_1+x_2>2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m>4 \vee m<-8\\ 9-(m+2)+1\ge 0\\ m+2>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>4 \vee m<-8\\ m<8\\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow 4<m<8 \Rightarrow m\in\{5;6;7\}$. **Chọn A.**

Câu 22: Điều kiện: $x>2$.

Ta có $\log_{\sqrt{2018}}(x-2)=\log_{2018}(mx) \Leftrightarrow \log_{2018}(x-2)^2=\log_{2018}(mx)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2=mx \Leftrightarrow x^2-4x+4=mx \Leftrightarrow x^2-(m+4)x+4=0$

• Trường hợp 1. Có nghiệm kép $\Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow (m+4)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-8 \end{array}\right.$ (không thỏa mãn)

• Trường hợp 2. $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 - 2 > 0 \\ x_2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+4)^2 - 16 > 0 \\ (x_1-2)(x_2-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-8 \end{array}\right. \\ x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-8 \end{array}\right. \\ 4 - 2(m+4) + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-8 \end{array}\right. \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$. **Chọn C.**

Câu 23: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ 2(m-1) > 0 \\ m^2 - 4m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$. **Chọn B.**

Câu 24: Ta có $5^{x_1}.5^{x_2} = \dfrac{m+3}{m} \Leftrightarrow 5^{x_1+x_2} = \dfrac{m+3}{m} \Leftrightarrow 5^2 = \dfrac{m+3}{m} \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{8} \Rightarrow a = 1, b = 8 \Rightarrow a^3 + b = 9$. **Chọn C.**

Câu 25: PT $\Leftrightarrow 5.\left(\dfrac{16}{36}\right)^x - 2.\left(\dfrac{81}{36}\right)^x = m^2 \Leftrightarrow 5.\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - 2.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x} = m^2$

Đặt $t = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}$, với $x \in (0;+\infty) \Rightarrow t \in (0;1)$

Khi đó PT trở thành: $f(t) = 5t - \dfrac{2}{t} = m^2$

Xét hàm số $f(t) = 5t - \dfrac{2}{t}$ với $t \in (0;1)$ ta có: $f'(t) = 5 + \dfrac{2}{t^2} > 0\left(\forall t \in (0;1)\right)$ do đó $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Mặt khác $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = -\infty; \lim\limits_{t\to 1} f(t) = 3 \Rightarrow f(t) \in (-\infty;3)$ suy ra phương trình đã cho có nghiệm dương khi $m^2 < 3 - \sqrt{3} < m < \sqrt{3}$.

Kết hợp $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m = \{1\}$. **Chọn A.**

Câu 26: Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log_3 x$ với $x > 0 \to t \in (-\infty;+\infty)$.

Khi đó, phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + 2m - 7 = 0$ (*)

Để phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - (2m-7) = (m-1)^2 + 6 > 0, \forall m$.

Với $m \in \mathbb{R}$, phương trình (*) có hai nghiệm $\begin{cases} t_1 = \log_3 x_1 \\ t_2 = \log_3 x_2 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2$

$\Leftrightarrow t_1 + t_2 = \log_3(x_1x_2)$ mà $x_1x_2 = 81$ và $t_1 + t_2 = m$ (hệ thức Vi-ét).

Suy ra $m = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$. **Chọn B.**

Câu 27: ĐK: $x>0$. Đặt $t=\log_3 x$ ta có: $t^2-3t+2m-7=0$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1,x_2 khi $\Delta=9-4\left(2m-7\right)>0\Leftrightarrow 37-8m>0$ (*)

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} t_1+t_2=\log_3 x_1+\log_3 x_2=3 \\ t_1t_2=\log_3 x_1.\log_3 x_2=2m-7 \end{cases}$

Suy ra $\log_3\left(x_1x_2\right)=3\Leftrightarrow x_1x_2=27$

Kết hợp $\left(x_1+3\right)\left(x_2+3\right)=71\Rightarrow\begin{cases} x_1x_2=27 \\ x_1x_2+3\left(x_1+x_2\right)=62 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1x_2=27 \\ x_1+x_2=\dfrac{35}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow\left(x_1x_2\right)=\left\{\dfrac{35+\sqrt{253}}{6};\dfrac{35-\sqrt{253}}{6}\right\}\Rightarrow m=\dfrac{\log_3 x_1.\log_3 x_2+7}{2}\approx 4,5$ (thỏa mãn (*)). **Chọn C.**

Câu 28: Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$ ta có: $t^2-2\left(2m+1\right)t+3\left(4m-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(t-3\right)\left[t-\left(4m-1\right)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=4m-1 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 3^x=3 \\ 3^x=4m-1 \end{array}\right.$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm khi $\begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ 4m-1\neq 3 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ m\neq 1 \end{cases}$

Khi đó $x_1=1;x_2=\log_3\left(4m-1\right)$

Mặt khác $\left(x_1+2\right)\left(x_2+2\right)=12\Leftrightarrow 3\left[\log_3\left(4m-1\right)+2\right]=12\Leftrightarrow\log_3\left(4m-1\right)=2\Leftrightarrow m=\dfrac{5}{2}\left(t/\mathrm{m}\right)$.

Vậy $m=\dfrac{5}{2}$. **Chọn C.**

Câu 29: Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$ khi đó phương trình trở thành: $t^2-mt+2m-5=0$

Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt khi $\begin{cases} \Delta'=m^2-4\left(2m-5\right)>0 \\ S=m>0 \\ P=2m-5>0 \end{cases}\Leftrightarrow m>\dfrac{5}{2}$ (*)

Khi đó PT có 2 nghiệm $t_1<t_2\Rightarrow\begin{cases} t_1=2^{x_1} \\ t_2=2^{x_2} \end{cases}\Rightarrow x_1=\log_2 t_1;x_2=\log_2 t_2$

Giả thiết thỏa mãn khi $\log_2 t_1<0<\log_2 t_2\Leftrightarrow t_1<1<t_2\Leftrightarrow\left(t_1-1\right)\left(t_2-1\right)<0$

$\Leftrightarrow t_1t_2-\left(t_1+t_2\right)+1<0\Leftrightarrow 2m-5-m+1<0\Leftrightarrow m<4$.

Kết hợp (*) suy ra $\dfrac{5}{2}<m<4$. **Chọn D.**

Câu 30: $\log_3\left(1-x^2\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+m-4\right)=0\Leftrightarrow\log_3\left(1-x^2\right)=-\log_{\frac{1}{3}}\left(x+m-4\right)=\log_3\left(x+m-4\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2>0 \\ 1-x^2=x+m-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5-x^2-x=g(x) \\ x\in(-1;1) \end{cases}$

Xét hàm số $g(x)=5-x^2-x$ với $x\in(-1;1)$ ta có: $g'(x)=-2x-1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Lại có: $\lim\limits_{x\to(-1)} g(x)=5; \lim\limits_{x\to 1} g(x)=3; g\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}$

Lập BBT suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm thực thì $m\in\left(5;\frac{21}{4}\right) \Rightarrow a+b=5+\frac{21}{4}=\frac{41}{4}$. **Chọn D.**

Câu 31: Đặt $t=3^x\ (t>0)$, với $x\in(0;1)\Rightarrow t\in(1;3)$.

Khi đó PT trở thành $f(t)=t^2+3t=m$

Xét hàm số $f(t)=t^2+3t$ với $t\in(1;3)$ ta có: $f'(t)=2t+3>0\left(\forall t\in(1;3)\right)\Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Lại có: $\lim\limits_{t\to 1} f(t)=4; \lim\limits_{t\to 3} f(t)=18 \Rightarrow f(t)\in(4;18)$.

Để PT đã cho có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)\Leftrightarrow 4<m<18$.

Kết hợp $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 13 giá trị của tham số *m*. **Chọn C.**

Câu 32: Đặt $\sqrt[3]{m+3\sin x}=a; \sin x=b$ ta có: $\begin{cases} \sqrt[3]{m+3a}=b \\ \sqrt[3]{m+3b}=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+3a=b^3 \\ m+3b=a^3 \end{cases}$

$\Rightarrow 3(a-b)=b^3-a^3=(b-a)\left(b^2+ba+a^2\right)\Leftrightarrow (b-a)\left(b^2+ba+a^2+3\right)=0$

Do $b^2+ba+a^2+3>0\Rightarrow a=b\Rightarrow m+3\sin x=\sin^3 x\Leftrightarrow m=\sin^3 x-3\sin x=b^3-3b=f(b)$

Xét $f(b)=b^3-3b\left(b\in[-1;1]\right)$, ta có: $f'(b)=3b^2-3\le 0\left(\forall b\in[-1;1]\right)$

Do đó hàm số $f(b)$ nghịch biến trên $[-1;1]$

Vậy $f(b)\in\left[f(1);f(-1)\right]=[-2;2]$. Do đó PT đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m\in[-2;2]$

Kết hợp $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ có 5 giá trị nguyên của *m* thỏa mãn. **Chọn C.**

Câu 33: Đặt $\begin{cases} a=\cos x \\ b=\ln(m+\cos x) \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} \ln(m+b)=a \\ b=\ln(m+a) \end{cases} \Rightarrow a+\ln(m+a)=b+\ln(m+b)$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t+\ln(m+t)$ (với $m+t>0$)

Ta có: $f'(t)=1+\frac{1}{m+t}>0\left(\forall m+t>0\right)$ nên $f(t)$ là hàm đồng biến.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b\Rightarrow a=\ln(m+a)$ (Do $a=\cos x\Rightarrow a=[-1;1]$)

$\Rightarrow m=e^a-a=f(a)$

Xét $g\left(a\right)=e^{a}-a$ với $a\in\left[-1;1\right]$ ta có: $g'\left(a\right)=e^{a}-1=0\Leftrightarrow a=0$

Mặt khác $g\left(-1\right)=\dfrac{1}{e}+1;g\left(O\right)=1;g\left(1\right)=e-1$

Để phương trình có nghiệm thì $m\in\left[1;e-1\right]$

Do đó giá trị lớn nhất của *m* để phương trình đã cho có nghiệm là $e-1$. **Chọn B.**

Câu 34: Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_5\left[5\left(x^2+1\right)\right]\ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$$\Leftrightarrow 5\left(x^2+1\right)\ge mx^2+4x+m>0\Leftrightarrow \begin{cases}\left(5-m\right)x^2-4x-m+5\ge 0\\ mx^2+4x+m>0\end{cases} \quad (*),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

TH1. $m=0$ hoặc $m=5$: (*) không thỏa mãn.

TH2. $m\ne 0$ và $m\ne 5$: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases}a_1=5-m>0\\ \Delta'_{(1)}=4-\left(5-m\right)^2\le 0\\ a_2=m>0\\ \Delta'_{(2)}=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 3.$

Vậy $m\in\left(2;3\right]$ là giá trị cần tìm. **Chọn C.**

Câu 35: Bất phương trình $\Leftrightarrow 4^{x-1}>m\left(2^x+1\right)\Leftrightarrow m<\dfrac{4^{x-1}}{2^x+1}=\dfrac{1}{4}\dfrac{4^x}{2^x+1}$

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$ suy ra: $m<\dfrac{t^2}{4\left(t+1\right)}=g\left(t\right)$

Bất phương trình đã cho có nghiệm với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m<g\left(t\right)\left(\forall t\in\left(0;+\infty\right)\right)$ (*)

Lại có: $g'\left(t\right)=\dfrac{1}{4}.\dfrac{2t\left(t+1\right)-t^2}{\left(t+1\right)^2}=\dfrac{1}{4}\dfrac{t^2+2t}{\left(t+1\right)^2}>0\left(\forall t\in\left(0;+\infty\right)\right)$

Mặt khác $\lim\limits_{t\to 0}f\left(t\right)=0;\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(t\right)=+\infty\Rightarrow f\left(t\right)\in\left(0;+\infty\right)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow m\le 0$. **Chọn A.**

Câu 36: Bất phương trình $\Leftrightarrow 4^x-2m.2^x+3-2m\le 0\Leftrightarrow 4^x+3\le 2m\left(2^x+1\right)\Leftrightarrow 2m\ge\dfrac{4^x+3}{2^x+1}$

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$ bất phương trình trở thành: $2m\ge\dfrac{t^2+3}{t+1}=g\left(t\right)$

Bất phương trình có nghiệm thực khi $2m\ge \underset{t\in\left(0;+\infty\right)}{Min}\,g\left(t\right)$ (*)

Lại có: $g'\left(t\right)=\dfrac{2t\left(t+1\right)-t^2-3}{\left(t+1\right)^2}=\dfrac{t^2+2t-3}{\left(t+1\right)^2}=0\xrightarrow{t>0}t=1.$

Mặt khác $\lim\limits_{t\to 0}g\left(t\right)=3;g\left(1\right)=2;\lim\limits_{x\to+\infty}g\left(t\right)=+\infty$

Do đó (*) $\Leftrightarrow 2m \ge 2 \Leftrightarrow m \ge 1$. **Chọn D.**

Câu 37: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1>0 \\ 2x^2+3>x^2+ax+1 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1>0 \\ x^2-ax+2>0 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R}$

• Với $x^2+ax+1>0; \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \Delta = a^2-4<0 \Leftrightarrow -2<a<2$

• Với $x^2-ax+2>0; \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \Delta = a^2-8<0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$.

Vậy $a \in (-2;2)$ là giá trị cần tìm. **Chọn D.**

Câu 38: Ta có $1+\log_6(x^2+1) \ge \log_6(mx^2+2x+m) \Leftrightarrow \log_6(6x^2+6) \ge \log_6(mx^2+2x+m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+2x+m>0 \\ 6x^2+6 \ge mx^2+2x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+2x+m>0 \\ (6-m)x^2-2x+6-m \ge 0 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R}$

• Với $mx^2+2x+m>0; \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} a=m>0 \\ \Delta'=1-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$.

• Với $(6-m)x^2-2x+6-m \ge 0; \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} a=6-m>0 \\ \Delta'=1-(6-m)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 5$.

Do đó $1<m\le 5$ là giá trị cần tìm. Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên *m* cần tìm. **Chọn C.**

Câu 39: Ta có $4\log_2^2\sqrt{x}-2\log_2 x+3m-2<0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2-2\log_2 x-2<-3m$ (*)

Đặt $t=\log_2 x$, khi đó (*) $\Leftrightarrow t^2-2t-2<-3m \Leftrightarrow -3m>\min\{t^2-2t-2\}$

Lại có $t^2-2t-2=(t-1)^2-3 \ge -3 \Rightarrow \min\{t^2-2t-2\}=-3$

Do đó $-3m>-3 \Leftrightarrow m<1$. Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow$ không có giá trị nào của tham số *m*. **Chọn C.**

Câu 40: Ta có $4\log_2^2\sqrt{x}+\log_2 x+m \ge 0 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2+\log_x x+m \ge 0$ (*)

Đặt $t=\log_2 x$, với $1<x<64 \longrightarrow 0<t<6$, khi đó (*) $\Leftrightarrow -m \le f(t)=t^2+t$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -m \le \min\limits_{(0;6)} f(t)$ (**)

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $(0;6)$, có $f'(t)=2t+1>0; \forall t \in (0;6)$.

Suy ra $\min\limits_{(0;6)} f(t)=f(0)=0$. Do đó (**) $\Leftrightarrow -m \le 0 \Leftrightarrow m \ge 0$. **Chọn B.**

Câu 41: Ta có $\log_2(x^2+y^2+2) \le 2+\log_2(x+y-1) \Leftrightarrow x^2+y^2+2 \le 4(x+y-1)$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+6 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \le 2$

Do đó các cặp $(x;\mathrm{y})$ thuộc hình tròn tâm $I(2;2)$, bán kính $R=\sqrt{2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|14-m|}{5}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=14-5\sqrt{2} \\ m=14+5\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả giá trị tham số m cần tìm là $\sum m = 28$. **Chọn C.**

Câu 42: Phương trình $\Leftrightarrow (2\log_3 x)^2 - 2m\log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4(\log_3 x)^2 - 2m\log_3 x + 1 = 0 \quad (*)$

Đặt $t = \log_3 x$, với $0 < x < 1 \Rightarrow t < 0$, khi đó (*) $4t^2 - 2mt + 1 = 0 \Leftrightarrow 2m = 4t + \frac{1}{t}$.

Xét hàm số $f(t) = 4t + \frac{1}{t}$ trên $(-\infty; 0)$, có $f'(t) = 4 - \frac{1}{t^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$.

Dựa vào BBT, để $2m = f(t)$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 2m = -4 \Leftrightarrow m = -2$. **Chọn B.**

Câu 43: Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(3^{\sqrt{x^2-3x+m}}\right)^2 + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}}.3^{x-2} < 3.\left(3^{x-2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x+2}\right)^2 + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x+2} - 3 < 0 \Leftrightarrow 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x+2} < 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} - x + 2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 3x + m < (x-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 3x + m < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ m < 4 - x \end{cases} \Leftrightarrow m < 2$ thì bất phương trình có nghiệm.

Kết hợp với $m \in \mathbb{Z}^+ \longrightarrow m = 1$ là giá trị duy nhất cần tìm. **Chọn D.**

Câu 44: Bất phương trình $\Leftrightarrow m.(2^x)^2 + 4(m-1).2^x + m - 1 > 0 \quad (*)$

Đặt $t = 2^x > 0$, khi đó (*) $\Leftrightarrow mt^2 + 4mt - 4t + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{4t+1}{t^2+4t+1} = f(t)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) \quad (**)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{4t+1}{t^2+4t+1}$ trên $(0; +\infty) \longrightarrow \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = 1$.

Do đó (**) $\Leftrightarrow m > 1$. Với $m = 1$ thỏa mãn bài toán. Vậy $m \ge 1$. **Chọn B.**

Câu 45: Bất phương trình $\Leftrightarrow \log_2(5^x - 1).\left[1 + \log_2(5^x - 1)\right] \ge m \quad (*)$

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$, với $x \ge 1 \Leftrightarrow 5^x - 1 \ge 4 \Rightarrow t \ge \log_2 4 = 2$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow t(1+t) \ge m \Leftrightarrow m \le f(t) = t^2 + t$. Ycbt $\Leftrightarrow m \le \min\limits_{[2;+\infty)} f(t) \quad (**)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[2; +\infty)$, có $f'(t) = 2t + 1 > 0$

Suy ra $\min\limits_{[2;+\infty)} f(t) = f(2) = 6$. Do đó (**) $\Leftrightarrow m \le 6$. **Chọn C.**

Câu 46: Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 7x^2 + 7 \ge mx^2 + 4x + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ (7-m)x^2 - 4x + 7 - m \ge 0 \end{cases}; \forall x \in \mathbb{R}$

• Với $mx^2+4x+m>0;\forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow\Delta=4-m^2<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.$.

• Với $(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0;\forall x\in\mathbb{R}\longrightarrow\begin{cases}a=7-m>0\\\Delta=4-(7-m)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le 5$.

Vậy $2<m\le 5$ là giá trị cần tìm. Kết hợp $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{3;4;5\}$. **Chọn C.**

Câu 47: Bất phương trình $\Leftrightarrow\sqrt{(\log_2 x)^2-6\log_2 x-7}<m(\log_2 x-7)$ (*)

Đặt $t=\log_2 x$, với $x>256\Rightarrow t>\log_2 256=8$, khi đó (*) $\Leftrightarrow\sqrt{t^2-6t-7}<m(t-7)$

$$\Leftrightarrow t^2-6t-7<m^2(t-7)^2\Leftrightarrow m^2>\frac{t^2-6t-7}{(t-7)^2}=\frac{t+1}{t-7}=f(t)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m^2>\max\limits_{(8;+\infty)}f(t)=f(8)=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>3\\m<-3\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\0\le m\le 10\end{cases}\longrightarrow m=\{4;5;6;...;10\}$. **Chọn A.**

Câu 48: Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1\Leftrightarrow x^2+y^2+2\le 4x+4y-4\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-2)^2\le 10$.

Lại có $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=m>0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Hai đường tròn tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2\\m=\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 49: Điều kiện: $0<x<1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow\log\left(x\sqrt{x}\right)\le\log\left[m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right]$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x}\le m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\Leftrightarrow m\ge\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{1-x}\right)^3}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x}}\qquad (*)$$

Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$, với $0<x<1\longrightarrow 1<t<\sqrt{2}$.

Ta có $t^2=1+2\sqrt{x}.\sqrt{1-x}\Leftrightarrow\sqrt{x}.\sqrt{1-x}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Và $\left(\sqrt{x}\right)^3+\left(\sqrt{1-x}\right)^3=\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\left(1-\sqrt{x}.\sqrt{1-x}\right)=t.\left(1-\dfrac{t^2-1}{2}\right)=\dfrac{3t-t^3}{2}$

Do đó (*) $\Leftrightarrow m\ge f(t)=\dfrac{3t-t^3}{t^2-1}$. Xét $f(t)=\dfrac{3t-t^3}{t^2-1}$ trên $\left(1;\sqrt{2}\right)\Rightarrow\min f(t)=\sqrt{2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\ge\min\limits_{\left(1;\sqrt{2}\right)}f(t)=\sqrt{2}$. Kết hợp $\begin{cases}m\in\mathbb{Z}\\-9<m<9\end{cases}\Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên *m*. **Chọn B.**