NGUYỄN THANH TRIỀU

★ ★ ★ ★ ★

SỔ TAY ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

10 - 11 - 12

Tháng 07 - 2013

Để biết thêm về các tài liệu toán học, độc giả có thể truy cập vào trang web cá nhân của tác giả:

http://nttrieu.wordpress.com

Tôi sưu tầm tài liệu này trên web, nguồn là tệp TeX tôi chỉ định dạng và phông chữ lại cho dễ dùng. Lúc lấy tài liệu quên ghi lại địa chỉ, cám ơn bạn đã soạn ra tài liệu này.

Hà Nội, 23/01/2017
Nguyễn Hữu Điển

Mục lục

Chương 1

MỆNH ĐỀ VÀ TẬP HỢP

1.1. Mệnh đề

1. Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.
2. Với mỗi giá trị của biến thuộc một tập hợp nào đó, mệnh đề chứa biến trở thành mệnh đề.
3. Mệnh đề phủ định của mệnh đề P ký hiệu là $\overline{P}$, $\overline{P}$ đúng khi P sai và ngược lại.
4. Mệnh đề kéo theo $P \Longrightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.
5. Ký hiệu $\forall$ (chữ A đảo ngược) đọc là "với mọi" hay "tất cả" xuất phát từ tiếng anh là "All".
6. Ký hiệu $\exists$ (chữ E đảo ngược) đọc là "tồn tại" hay "có một" xuất phát từ tiếng anh là "Exists".

1.2. Tập hợp

1.2.1. Các tập hợp số

1. Tập hợp các số thực ký hiệu là $\mathbb{R}$, viết tắt của từ "Real" có nghĩa là "thực".
2. Tập hợp các số hữu tỉ ký hiệu là $\mathbb{Q}$, viết tắt của từ "Quotient" trong tiếng Đức có nghĩa là "hữu tỉ" .
3. Tập hợp các số nguyên ký hiệu là $\mathbb{Z}$, viết tắt của từ "Zahlen" trong tiếng Đức có nghĩa là "số nguyên".
4. Tập hợp các số tự nhiên ký hiệu là $\mathbb{N}$, viết tắt của từ "Natural" có nghĩa là "tự nhiên".
5. Ký hiệu "$\subset$" đọc là "chứa trong" hay "tập con". Khi đó $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1.2.2. Phần tử của tập hợp

1. a là một phần tử của tập hợp A viết là $a \in A$, b không là phần tử của tập hợp A viết là $b \notin A$.
2. Tập hợp có thể có hữu hạn hoặc vô hạn phần tử. Tập hợp không có phần tử nào là tập hợp rỗng, ký hiệu là $\varnothing$.

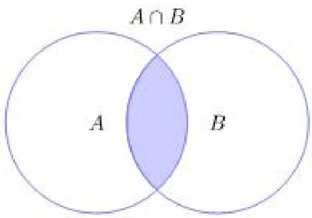
1.2.3. Các tập hợp con của $\mathbb{R}$

1. Các khoảng:
   (a) $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
   (b) $(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < +\infty\}$
   (c) $(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$
2. Đoạn: $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
3. Các nửa khoảng:
   (a) $[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$
   (b) $(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
   (c) $[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < +\infty\}$
   (d) $(-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leqslant b\}$

1.2.4. Các phép toán với tập hợp

1. Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B, ký hiệu $A \bigcap B$. Như vậy

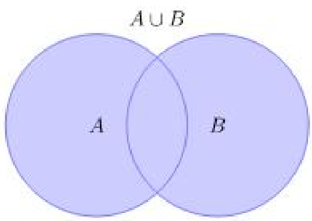
$$\boxed{A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}}$$



Ví dụ 1.2.1. $A = \{0,1,2\}$ và $B = \{1,2,3\}$, khi đó $A \bigcap B = \{1,2\}$.
Ví dụ 1.2.2. $A = (-1;1)$ và $B = [0;2)$, khi đó $A \bigcap B = [0;1)$.

2. Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử hoặc thuộc A hoặc thuộc B, ký hiệu $A \bigcup B$. Như vậy

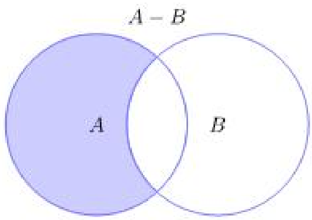
$$\boxed{A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}}$$



Ví dụ 1.2.3. $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{1, 2, 3\}$, khi đó $A \bigcup B = \{0, 1, 2, 3\}$.
Ví dụ 1.2.4. $A = (-1; 1)$ và $B = [0; 2)$, khi đó $A \bigcup B = (-1; 2)$.

3. Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm các phần tử thuộc A và không thuộc B, ký hiệu $A \backslash B$. Như vậy

$$\boxed{A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}}$$



Ví dụ 1.2.5. $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{1, 2, 3\}$, khi đó $A \backslash B = \{0\}$.
Ví dụ 1.2.6. $A = (-1; 1)$ và $B = [0; 2)$, khi đó $A \backslash B = (-1; 0)$.

4. Khi $A \subset B$ thì $A \backslash B$ gọi là phần bù của B trong A.
5. Quan hệ giữa $\bigcap$ và $\bigcup$
   (a) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$.
   (b) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$.
6. Công thức De - Morgan[1] $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$, và ngược lại $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$

1.3. Số gần đúng - Sai số

Cho a là số gần đúng của số chính xác $\overline{a}$, khi đó

1. $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.
2. Nếu $\Delta_a \leqslant d$ thì d được gọi là độ chính xác của số gần đúng a và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.
3. Cách viết quy tròn số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước: Cho số gần đúng a với độ chính xác d (tức là $\overline{a} = a \pm d$), khi được yêu cầu quy tròn số a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì

[1] Augustus De Morgan (1806-1871) là nhà toán học và lôgic học người Anh sinh trưởng tại Ấn Độ. Định lý De Morgan là tiền đề cơ bản cho sự phát triển của ngành máy tính vì chỉ cần có hai cổng điện toán - cổng đảo dấu (NOT gate) và cổng và (AND gate) chẳng hạn - thì người ta có thể thiết lập nên bất kì một phép toán lô gic nào bằng tổ hợp của hai cổng điện toán trên.

ta quy tròn a đến hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó.

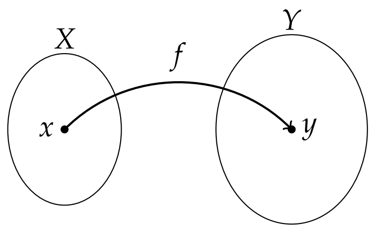
Chương 2
HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

2.1. Khái niệm cơ bản về hàm số

2.1.1. Ánh xạ

1. **Ánh xạ.** Cho X và Y là các tập hợp khác rỗng. Một ánh xạ từ X đến Y (ký hiệu là f) là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử y của Y.

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) = y \end{aligned}$$



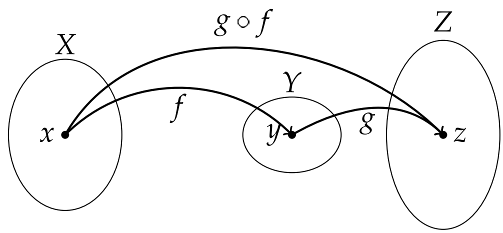
- $y = f(x)$ gọi là ảnh của phần tử x qua ánh xạ f.
- X gọi là tập nguồn.
- Y gọi là tập đích.

2. **Ánh xạ tích.** Cho X, Y, Z là ba tập hợp khác rỗng. Xét hai ánh xạ

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) = y \in Y \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g\colon Y &\longrightarrow Z \\ y &\longmapsto g(y) = z \in Z \end{aligned}$$

Khi đó, ánh xạ biến $x \in X$ thành $z \in Z$ gọi là *ánh xạ tích* từ X đến Z qua f và g, ký hiệu là $g \circ f$, như vậy

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y) = z \in Z \end{aligned}$$



Ví dụ 2.1.1. $f(x) = x^2 + x$; $g(y) = 3y$ thì $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2 + x) = 3(x^2 + x) = 3x^2 + 3x$.

2.1.2. Khái niệm hàm số

1. Một hàm số là một ánh xạ từ $X \subset \mathbb{R}$ đến $Y \subset \mathbb{R}$. Xét hàm số f như sau

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) = y \in Y \end{aligned}$$

trong đó
   - x gọi là biến số hay đối số của hàm f.
   - $y = f(x)$ gọi là giá trị của hàm số f tại giá trị x của biến số.
   - X gọi là tập xác định của hàm f.
   - Y gọi là tập giá trị của hàm f.
2. Một hàm số có thể được cho bằng: Bảng; biểu đồ; công thức hay đồ thị.
3. Khi hàm số được cho bằng công thức mà không chỉ rõ tập xác định thì ta quy ước tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các ố thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Ví dụ 2.1.2. Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ là $D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2.1.3. Đồ thị của hàm số

Trong hệ trục Oxy, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp những điểm $M(a;b)$, trong đó a thuộc tập xác định của hàm số và $b = f(a)$.

2.1.4. Các tính chất cơ bản của hàm số

1. Tính đơn điệu

(a) Hàm số $y = f(x)$ gọi là **đồng biến** (hay tăng) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) \text{ sao cho } x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) < f(x_2)$$

(b) Hàm số $y = f(x)$ gọi là **nghịch biến** (hay giảm) trên khoảng $(a; b)$ nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) \text{ sao cho } x_1 < x_2 \text{ thì } f(x_1) > f(x_2)$$

2. Tính chẳn lẻ
   (a) Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D (viết tắt của từ "domain" nghĩa là "xác định") gọi là hàm số chẵn nếu

   $$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = f(x)$$

   Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

   (b) Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu

   $$\forall x \in D \text{ thì } -x \in D \text{ và } f(-x) = -f(x)$$

   Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

▸ Chú ý: Có những hàm số không chẵn mà cũng không lẻ, ví dụ hàm $y = x + 1$.

2.2. Hàm số bậc nhất

2.2.1. Hàm số bậc nhất

1. Hàm số bậc nhất có dạng $y = ax + b$ với $a \neq 0$.
2. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
3. Bảng biến thiên

$a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4. Đồ thị là một đường thẳng không song song và không trùng với các trục tọa độ.
5. Để vẽ đường thẳng $y = ax + b$ chỉ cần xác định hai điểm khác nhau thuộc đường thẳng đó.

2.2.2. Hàm số hằng $y = b$ với $b \in \mathbb{R}$

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
2. Hàm số hằng là hàm số chẵn.
3. Đồ thị là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; b)$.

2.2.3. Hàm số $y = |x|$

1. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
2. Hàm số $y = |x|$ là hàm số chẵn.
3. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

2.3. Hàm số bậc hai

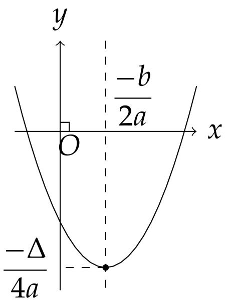
2.3.1. Cơ bản về hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

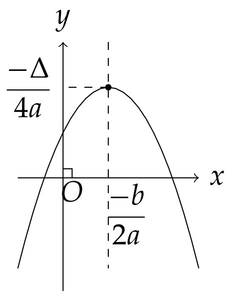
2.3.2. Đồ thị

Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là một đường parabol có

1. Đỉnh là điểm $I\left(\dfrac{-b}{2a}; \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$.
2. Trục đối xứng là đường thẳng $x = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$ (hình 2.1), quay bề lõm xuống dưới nếu $a < 0$ (hình 2.2).



Hình 2.1: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$.



Hình 2.2: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$.

2.3.3. Bảng biến thiên

$a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ $\nearrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$ $-\infty$

$a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$ $+\infty$

2.3.4. Cách vẽ đồ thị

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ta thực hiện các bước sau

1. Xác định tọa độ đỉnh là điểm $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.
2. Vẽ trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$.
3. Xác định giao điểm của parabol với các trục tọa độ (nếu có). Xác định thêm một số điểm thuộc đồ thị. Lập bảng giá trị rồi vẽ parabol.

Chương 3
PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

3.1. Đại cương về phương trình

3.1.1. Các khái niệm cơ bản

1. Phương trình ẩn x là một mệnh đề chứa biến có dạng $f(x) = g(x)$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức của x.
2. Điều kiện xác định của phương trình là các điều kiện của biến x sao cho các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.
3. Nghiệm của phương trình là giá trị x_0 của biến số (hay ẩn số) sao cho đẳng thức $f(x_0) = g(x_0)$ đúng.
4. Giải một phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.
5. Giải và biện luận phương trình là xét xem với giá trị nào của tham số (số không được xác định cụ thể) thì phương trình có nghiệm và có bao nhiêu nghiệm.

Ví dụ 3.1.1. Xét phương trình $3x^2 - (m-1)x + 4 = mx - 2$ thì

- x là ẩn số.
- m là tham số.

3.1.2. Phương trình tương đương và phương trình hệ quả

1. Hai phương trình $f(x) = g(x)$ và $f_1(x) = g_1(x)$ gọi là tương đương nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng), ký hiệu

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow f_1(x) = g_1(x)$$

.

2. Nếu mỗi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ cũng là nghiệm của phương trình $h(x) = k(x)$ thì ta nói phương trình $h(x) = k(x)$ là phương trình hệ quả của phương trình $f(x) = g(x)$, ký hiệu

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow h(x) = k(x)$$

chẳng hạn, với số nguyên dương n tùy ý ta có $f(x) = g(x) \Longrightarrow [f(x)]^n = [g(x)]^n$. Phương trình hệ quả có thể có nghiệm ngoại lai, không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Muốn loại nghiệm ngoại lai ta phải thử lại vào phương trình ban đầu.

3. Ngoài các phương trình một ẩn còn có các phương trình nhiều ẩn. Nghiệm của một phương trình 2 ẩn x, y là một cặp số thực x_0, y_0 thỏa mãn phương trình đó, còn nghiệm của một phương trình 3 ẩn x, y, z là một bộ 3 số thực x_0, y_0, z_0 thỏa mãn phương trình đó, ...

3.1.3. Biến đổi tương đương các phương trình

Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình mới tương đương:

1. Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow f(x) + A = g(x) + A$$

2. Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

$$f(x) = g(x) \Longleftrightarrow f(x).A = g(x).A \text{ (với } A \neq 0)$$

3.2. Phương trình qui về bậc nhất, bậc hai

3.2.1. Giải và biện luận phương trình bậc nhất

$$ax + b = 0 \tag{3.1}$$

1. Nếu $a \neq 0$ thì phương trình (3.1) gọi là phương trình bậc nhất và nó có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.
2. Nếu $a = 0$ ta xét 2 trường hợp
   (a) Với $b \neq 0$ thì phương trình (3.1) vô nghiệm.
   (b) Với $b = 0$ thì phương trình (3.1) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

3.2.2. Giải và biện luận phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0, \ (a \neq 0) \tag{3.2}$$

Biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	Phương trình (3.2) có 2 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	Phương trình (3.2) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	Phương trình (3.2) vô nghiệm

3.2.3. Định lý về tổng và tích hai nghiệm của phương trình bậc hai

Gọi tắt là định lý Viét [1], phát biểu như sau:
Nếu phương trình (3.2) có 2 nghiệm x_1, x_2 thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Ngược lại, nếu 2 số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

3.2.4. Phương trình trùng phương

Có dạng $ax^4 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, giải bằng cách đặt $t = x^2$, $(t \geqslant 0)$ để đưa về phương trình bậc hai.

3.2.5. Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Khử dấu giá trị tuyệt đối bằng định nghĩa

$$|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geqslant 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$$

[1] François Viète (1540 - 1603), là một nhà toán học, luật sư, chính trị gia người Pháp, về toán học ông hoạt động trong lĩnh lực đại số. Ông nổi tiếng với đề ra cách giải thống nhất các phương trình bậc 2, 3 và 4. Ông là người sáng tạo nên cách dùng các chữ cái để thể hiện cho các ẩn số của một phương trình. Ông cũng khám phá ra mối quan hệ giữa các nghiệm của một đa thức với các hệ số của đa thức đó, ngày nay được gọi là định lý Viète.

2. $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x)$ hoặc $f(x) = -g(x)$
3. $|f(x)| = g(x) \overset{\text{Cách 1}}{\iff} \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$
4. $|f(x)| = g(x) \overset{\text{Cách 2}}{\iff} \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$

3.2.6. Phương trình chứa dấu căn thức

1. Phương pháp chung là bình phương 2 vế để khử dấu căn thức, chú ý phải xét điều kiện cả hai vế đều phải không âm.
2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \iff \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
3. $\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = [g(x)]^2 \end{cases}$
4. Phương pháp đổi biến số:
   (a) Có thể biến đổi như chia cả hai vế cho cùng một biểu thức khác 0 rồi mới đổi biến số.
   Ví dụ 3.2.1. Giải phương trình $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$.
   Hướng dẫn.
   Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4x + 1 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 + \sqrt{3} \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 - \sqrt{3} \end{cases}$.
   Nếu $x = 0$ thì thay vào ta thấy không là nghiệm.
   Nếu $x > 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x}$ ta được
$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 1}{x}} = 3$$
   hay
$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 4} = 3$$
   Từ đó ta đặt $t = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ với $t \geqslant 2$, suy ra $t^2 = x + \dfrac{1}{x} + 2$ hay $x + \dfrac{1}{x} = t^2 - 2$. Thay vào phương trình đã cho rồi giải tìm t, sau đó tìm x.
   (b) Có thể dùng cả hai biến số mới

Ví dụ 3.2.2. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6x-5}-8=0$.
Hướng dẫn.
Điều kiện: $x \geqslant \frac{3}{2}$.
Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{3x-2} \\ v=\sqrt{6x-5} \end{cases}$ ta được $\begin{cases} u^3=3x-2 \\ v^2=6x-5 \end{cases}$
hay $\begin{cases} 2u^3=6x-4 \\ v^2=6x-5 \end{cases}$, trừ từng vế ta được $2u^3-v^2=1$. Kết hợp với phương trình đã cho sau khi thay bằng các biến mới ta được hệ

$$\begin{cases} 2u+3v-8=0 \\ 2u^3-v^2=1 \end{cases}$$

Giải tìm được u, v rồi tìm x.

5. Phương pháp nhẩm nghiệm và chứng minh nghiệm duy nhất
Ví dụ 3.2.3. Giải phương trình $\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$.
Hướng dẫn.
Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 6$. Nhận thấy $x=5$ là nghiêm của phương trình nên ta biến đổi làm xuất hiện nhân tử $x-5$ như sau

$$(\sqrt{3x+1}-4)+(1-\sqrt{6-x})+3x^2-15x+x-5=0$$

hay

$$\frac{(\sqrt{3x+1}-4)(\sqrt{3x+1}+4)}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{(1-\sqrt{6-x})(1+\sqrt{6-x})}{1+\sqrt{6-x}} +(x-5)(3x+1)=0$$

tức là

$$\frac{3x-15}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}}+(x-5)(3x+1)=0$$

Rút nhân tử chung và giải tiếp...

3.3. Phương trình, hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

3.3.1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Có dạng $ax + by = c$, trong đó a, b, c là các số thực, a, b không đồng thời bằng 0, x, y là 2 ẩn.

3.3.2. Hệ hai phương trình bậc nhất 2 ẩn

có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

trong đó cả hai phương trình đều là phương trình bậc nhất 2 ẩn.
Có 2 cách giải

1. Phương pháp thế: Từ một phương trình của hệ biểu thị một ẩn qua ẩn kia rồi thế vào phương trình còn lại.
2. Phương pháp cộng: Biến đổi cho hệ số của một trong hai phương trình là hai số đối nhau rồi cộng từng vế hai phương trình lại.

3.3.3. Dạng tam giác của hệ 3 phương trình bậc nhất ba ẩn

$$\begin{cases} a_1x & = d_1 \\ a_2x + b_2y & = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = d_3 \end{cases} \tag{3.3}$$

Cách giải: Từ phương trình đầu của hệ (3.3) tính được x, thay vào phương trình thứ hai tính được y rồi thay vào phương trình thứ ba tính được z.

3.3.4. Hệ ba phương trình bậc nhất 3 ẩn

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z & = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = d_3 \end{cases}$$

Cách giải: Dùng phương pháp Gauss[2] khử dần ẩn số bằng cách nhân đại số để đưa về hệ phương trình dạng tam giác.

3.3.5. Một số hệ phương trình khác

1. Hệ phương trình hai ẩn đối xứng dạng 1:

   Ví dụ 3.3.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$

   Cách giải: Biến đổi xuất hiện tổng $S = x + y$ và tích $P = xy$ đưa về hệ theo S và P để giải.
2. Hệ phương trình hai ẩn đối xứng dạng 2:

   Ví dụ 3.3.2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$

   Cách giải: Trừ từng vế hai phương trình để đưa về phương trình tích.
3. Hệ phương trình hai ẩn đẳng cấp bậc hai:

   Ví dụ 3.3.3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases}$

   Cách giải: Nếu $y = 0$ thì thử trực tiếp. Nếu $y \neq 0$ thì đặt $y = kx$ rồi thay vào hệ.

---

[2]Carl Friedrich Gauss (1777-1855) là một nhà toán học và nhà khoa học người Đức tài năng, người đã có nhiều đóng góp lớn cho các lĩnh vực khoa học, như lý thuyết số, giải tích, hình học vi phân, khoa trắc địa, từ học, thiên văn học và quang học. Ông được mệnh danh là "hoàng tử của các nhà toán học". Với ảnh hưởng sâu sắc cho sự phát triển của toán học và khoa học, Gauss được xếp ngang hàng cùng Leonhard Euler, Isaac Newton và Archimedes như là những nhà toán học vĩ đại nhất của lịch sử.

Chương 4
BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

4.1. Bất đẳng thức

4.1.1. Định nghĩa

$$A \leqslant B \Longleftrightarrow A - B \leqslant 0$$

$$A < B \Longleftrightarrow A - B < 0$$

4.1.2. Các tính chất bất đẳng thức cơ bản

1. Bắc cầu: Nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.
2. Cộng hai vế bất đẳng thức với một số: $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c$
3. Nhân hai vế bất đẳng thức với một số:
   - Nếu $c > 0$ thì $a < b \Longleftrightarrow ac < bc$.
   - Nếu $c < 0$ thì $a < b \Longleftrightarrow ac > bc$.
4. Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều: Nếu $a < b$ và $c < d$ thì $a + c < b + d$.
5. Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều: Nếu $0 < a < b$ và $0 < c < d$ thì $a.c < b.d$.
6. Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa: Nếu n nguyên dương thì
   $a < b \Longleftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$
   $0 < a < b \Longrightarrow a^{2n} < b^{2n}$
7. Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
   $0 < a < b \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
   $0 < a < b \Longleftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

4.1.3. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. $|x| \geqslant 0,\ |x| \geqslant x,\ |x| \geqslant -x$.
2. Với $a > 0$ thì
   $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

$|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \leqslant -a$ hoặc $x \geqslant a$.

3. $|a| - |b| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$.

4.1.4. Bất đẳng thức Cauchy

Bất đẳng thức Cauchy[1]phát biểu như sau

1. Cho 2 số không âm:
   Với 2 số thực $a, b \geqslant 0$ thì trung bình cộng luôn lớn hơn hoặc bằng trung bình nhân, tức là $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, có dấu "=" khi $a = b$.
2. Cho 3 số không âm:
   Với $a, b, c \geqslant 0$ thì $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$, có dấu "=" khi $a = b = c$.
3. Bất đẳng thức Cauchy có thể mở rộng cho n số thực không âm.

4.1.5. Bất đẳng thức Bunhiacopski

Bất đẳng thức Bunhiacopski[2] còn gọi là bất đẳng thức Cauchy - Schwartz[3], phát biểu như sau:

1. Cho 2 cặp số:
   Với 2 cặp số thực (x_1, y_1) và (x_2, y_2) thì
   $$(x_1y_1 + x_2y_2)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$$
   dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2}$ với quy ước $x_1 = 0$ thì $y_1 = 0$, $x_2 = 0$ thì $y_2 = 0$.
2. Cho n cặp số:
   Với n cặp số thực (x_1, y_1), (x_2, y_2) và (x_n, y_n) thì
   $$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

[1]Augustin Louis Cauchy (đôi khi tên họ được viết là Cô-si) là một nhà toán học người Pháp sinh ngày 21 tháng 8 năm 1789 tại Paris và mất ngày 23 tháng 5 năm 1857 cũng tại Paris. Công trình lớn nhất của ông là lý thuyết hàm số với ẩn số tạp. Ông cũng đóng góp rất nhiều trong lĩnh vực toán tích phân và toán vi phân. Ông đã đặt ra những tiêu chuẩn Cauchy để nghiên cứu về sự hội tụ của các dãy trong toán học.

[2]Victor Yakovlevich Bunyakovsky (1804-1889) là nhà toán học người Nga. Tác phẩm to lớn của ông là "Cơ sở của lý thuyết xác suất" (1846) trong đó có nhiều phần độc đáo, nhất là phần lịch sử phát sinh và phát triển môn xác suất, phần ứng dụng quan trọng của xác suất trong vấn đề bảo hiểm và dân số.

[3]Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) là một nhà toán học người Đức, nổi tiếng với công trình về giải tích phức.

dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \ldots = \dfrac{x_n}{y_n}$ với quy ước $x_1 = 0$ thì $y_1 = 0$, $x_2 = 0$ thì $y_2 = 0$,..., $x_n = 0$ thì $y_n = 0$.

4.1.6. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của một hàm số

Xét hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D, ta định nghĩa:

1. $M = \max\limits_{x \in D} f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$
2. $m = \min\limits_{x \in D} f(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$

4.2. Bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn

4.2.1. Điều kiện của một bất phương trình

- Là điều kiện mà ẩn số phải thỏa mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa.

4.2.2. Hai bất phương trình (hệ bất phương trình) tương đương

- Hai bất phương trình (hệ bất phương trình) được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

4.2.3. Các phép biến đổi bất phương trình

Kí hiệu D là tập các số thực thỏa mãn điều kiện của bất phương trình $P(x) < Q(x)$

1. Phép cộng
   Nếu $f(x)$ xác định trên D thì
$$P(x) < Q(x) \Longleftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x)$$
2. Phép nhân
   - Nếu $f(x) > 0, \forall x \in D$ thì
$$P(x) < Q(x) \Longleftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x)$$
   - Nếu $f(x) < 0, \forall x \in D$ thì
$$P(x) < Q(x) \Longleftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x)$$

3. Phép bình phương
- Nếu $P(x) \geqslant 0$ và $Q(x) \geqslant 0, \forall x \in D$ thì

$$P(x) < Q(x) \Longleftrightarrow [P(x)]^2 > [Q(x)]^2$$

4.2.4. Chú ý

Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình, điều kiện của bất phương trình thường bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình đã cho ta phải tìm các giá trị của ẩn đồng thời thỏa mãn bất phương trình mới và điều kiện của bất phương trình đã cho.

4.3. Dấu của nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất ẩn x có dạng $f(x) = ax + b$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Dấu của nhị thức bậc nhất như sau

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

4.4. Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

4.4.1. Bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

1. Có dạng

$$ax + by \leqslant c \tag{4.1}$$

2. Biểu diễn tập nghiệm như sau:
   (a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, vẽ đường thẳng $(\Delta) : ax + by = c$.
   (b) Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0) \notin (\Delta)$ (ta thường lấy gốc tọa độ O)
   (c) Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c.
   (d) Kết luận:
   - Nếu $ax_0 + by_0 < c$ thì nửa mặt phẳng bờ (Δ) chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leqslant c$.
   - Nếu $ax_0 + by_0 > c$ thì nửa mặt phẳng bờ (Δ) không chứa M_0 là miền nghiệm của $ax_0 + by_0 \leqslant c$.

3. Bỏ bờ miền nghiệm của bất phương trình (4.1) ta được miền nghiệm của bất phương trình $ax + by < c$. Miền nghiệm của các bất phương trình $ax + by \geqslant c$ và $ax + by > c$ được xác định tương tự.

4.4.2. Hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

1. Có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y & \leqslant c_1 \\ a_2x + b_2y & \leqslant c_2 \end{cases}$$

2. Biểu diễn hình học như sau:
   (a) Vẽ các đường thẳng $(\Delta_1) : a_1x + b_1y = c_1$ và $(\Delta_2) : a_2x + b_2y = c_2$.
   (b) Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình và tìm giao của chúng.

4.4.3. Bài toán tối ưu trong kinh tế

1. Là bài toán tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) của các biểu thức có dạng $F = ax + by$, trong đó x, y nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn cho trước.

2. Cách giải:
   (a) Vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.
   (b) Miền nghiệm nhận được thường là một miền đa giác. Tính giá trị của F ứng với (x_0, y_0) là tọa độ các đỉnh của miền đa giác này rồi so sánh các kết quả từ đó suy ra giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

4.5. Dấu của tam thức bậc hai

4.5.1. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$, đặt $\Delta = b^2 - 4ac$, khi đó

1. Nếu $\Delta < 0$ thì dấu của tam thức như sau

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$ax^2 + bx + c$	cùng dấu với a

2. Nếu $\Delta = 0$ thì dấu của tam thức như sau

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		cùng dấu với a	0	cùng dấu với a	

3. Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 < x_2$, khi đó dấu của tam thức như sau

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		cùng dấu với a	0	trái dấu với a	0	cùng dấu với a	

4.5.2. Một số điều kiện tương đương

Nếu $ax^2 + bx + c$ là một tam thức bậc hai ($a \neq 0$) thì

1. $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm $\iff \Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$.
2. $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm trái dấu $\iff \dfrac{c}{a} < 0$.
3. $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm đều dương $\iff \begin{cases} \Delta & \leqslant 0 \\ \dfrac{c}{a} & > 0 \\ -\dfrac{b}{a} & > 0 \end{cases}$
4. $ax^2 + bx + c = 0$ có các nghiệm đều âm $\iff \begin{cases} \Delta & \leqslant 0 \\ \dfrac{c}{a} & > 0 \\ -\dfrac{b}{a} & < 0 \end{cases}$
5. $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \iff \begin{cases} a & > 0 \\ \Delta & < 0 \end{cases}$
6. $ax^2 + bx + c \geqslant 0, \forall x \iff \begin{cases} a & > 0 \\ \Delta & \leqslant 0 \end{cases}$
7. $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \iff \begin{cases} a & < 0 \\ \Delta & < 0 \end{cases}$
8. $ax^2 + bx + c \leqslant 0, \forall x \iff \begin{cases} a & > 0 \\ \Delta & \leqslant 0 \end{cases}$

Chương 5

THỐNG KÊ

5.1. Bảng phân bố tần số và tần suất

5.1.1. Tần số và tần suất của một giá trị

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho có k giá trị khác nhau ($k \leqq n$). Gọi x_i là một giá trị bất kỳ trong k giá trị đó, ta có

1. Số lần xuất hiện giá trị x_i trong dãy số liệu đã cho được gọi là tần số của giá trị đó, ký hiệu là n_i.
2. Số $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ được gọi là tần suất của giá trị x_i.

5.1.2. Tần số và tần suất của một lớp

Giả sử dãy n số liệu thống kê đã cho được phân vào k lớp ($k < n$). Xét lớp thứ $i (i = 1, 2, \ldots, k)$ trong k lớp đó, ta có

1. Số n_i các số liệu thống kê thuộc lớp thứ i được gọi là tần số của lớp đó.
2. Số $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ được gọi là tần suất của lớp thứ i.

▸ Chú ý: Trong các bảng phân bố tần suất thì tần suất được tính ở dạng tỷ số phần trăm.

5.2. Số trung bình cộng

5.2.1. Số trung bình cộng

1. Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \\ &= \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k) \\ &= f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k,\end{aligned}$$

trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i; n là số các số liệu thống kê ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).

2. Trường hợp bảng phân bố tần số và tần suất ghép lớp

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i,$$

trong đó c_i, n_i, f_i lần lượt là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i; n là số các số liệu thống kê ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$).

5.2.2. Số trung vị

Số trung vị M_e của một dãy gồm n số liệu thống kê được sắp thứ tự không giảm (hoặc không tăng) là

- Số đứng giữa dãy (số hạng thứ $\dfrac{n+1}{2}$) nếu n lẻ;
- Trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy (trung bình cộng của số hạng thứ $\dfrac{n}{2}$ và số hạng thứ $\dfrac{n}{2} + 1$ nếu n chẵn.

5.2.3. Mốt

Mốt M_0 là giá trị có **tần số lớn nhất** trong bảng phân bố tần số. Nếu trong bảng phân bố tần số có hai giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì ta có hai giá trị đó là hai mốt.

5.2.4. Chọn đại diện cho các số liệu thống kê

1. Trường hợp tính được cả ba số: trung bình, trung vị, mốt, và các số liệu thống kê là cùng loại đồng thời số lượng các số liệu đủ lớn ($n \geqq 30$) thì ta ưu tiên chọn số trung bình làm đại diện cho các số liệu thống kê. Khi đó số trung vị hoặc mốt được sử dụng để bổ sung thêm những thông tin cần thiết.
2. Trường hợp không tính được số trung bình thì người ta chọn số trung vị hoặc mốt làm đại diện cho các số liệu thống kê.
3. Những trường hợp sau đây, không nên dùng số trung bình để đại diện cho các số liệu thống kê (có thể dùng số trung vị hoặc mốt):
   (a) Số các số liệu thống kê quá ít (nhỏ hơn hoặc bằng 10).
   (b) Giữa các số liệu thống kê có sự chênh lệch nhau quá lớn.
   (c) Đường gấp khúc tần suất không đối xứng và nhiều trường hợp khác.

5.3. Phương sai và độ lệch chuẩn

5.3.1. Công thức tính phương sai

1. Cách 1: Tính theo tần số
   (a) Đối với bảng phân bố tần số

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2$$

   (b) Đối với bảng phân bố tần số ghép lớp

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(c_i - \overline{x})^2$$

2. Cách 2: Tính theo tần suất
   (a) Đối với bảng phân bố tần suất

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2$$

   (b) Đối với bảng phân bố tần suất ghép lớp

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(c_i - \overline{x})^2$$

   Trong đó n_i, f_i lần lượt là tần số, tần suất của giá trị x_i trong bảng phân bố tần số, tần suất (hay là tần số, tần suất của lớp thứ i trong bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp); n là số các số liệu thống kê ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$); $\overline{x}$ là số trung bình cộng của các số liệu thống kê; c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i.
3. Cách 3: Sử dụng công thức $s_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$.

5.3.2. Ý nghĩa và cách sử dụng phương sai

Phương sai được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình). Khi hai số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình bằng nhau hoặc xấp xỉ nhau, dãy có phương sai càng nhỏ thì mức độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu thống kê càng ít.

5.3.3. Độ lệch chuẩn

Độ lệch chuẩn s_x là căn bậc hai của phương sai s_x^2

$$s_x = \sqrt{s_x^2}$$

Độ lệch chuẩn cũng được sử dụng để đánh giá mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình).
Cách sử dụng độ lệch chuẩn hoàn toàn giống như cách sử dụng phương sai. Khi cần chú ý đến đơn vị đo ta dùng độ lệch chuẩn s_x (vì s_x có cùng đơn vị đo với dấu hiệu X được nghiên cứu).

Chương 6
CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

6.1. Cung và góc lượng giác

6.1.1. Quan hệ giữa độ và radian

$$180^\circ = \pi \text{ rad}; \ 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}; \ 1 \text{ rad } = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Với $\pi \approx 3,14$ thì $1^\circ = 0,0175$ rad và 1 rad $= 57^\circ 17' 45''$.

6.1.2. Độ dài của cung tròn

Cho một cung tròn có số đo α rad và bán kính R, khi đó độ dài l của cung tròn đó xác định bởi

$$l = R\alpha$$

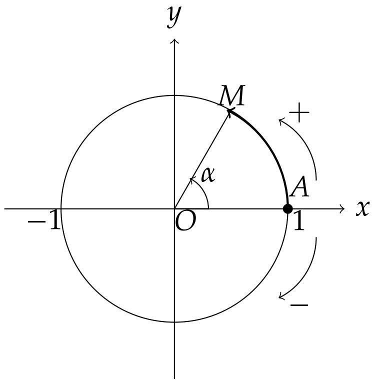
6.1.3. Số đo của cung lượng giác

Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu A, điểm cuối B là

$$\text{sđ } \overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

6.1.4. Biểu diễn cung lượng giác

1. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, ta chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung, chiều dương là ngược chiều kim đồng hồ, vì vậy ta chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

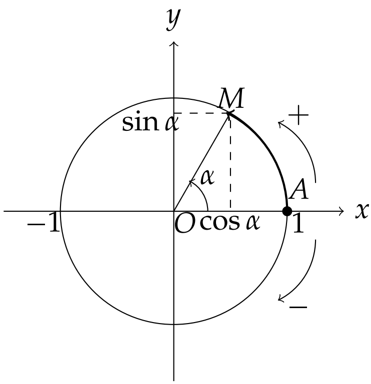


2. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{CD}$ ứng với một góc lượng giác (OC, OD) và ngược lại. Số đo của cung lượng giác và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau.

6.2. Giá trị lượng giác của một cung

6.2.1. Các kiến thức cơ bản

Trên đường tròn lượng giác gốc A, cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$. Khi đó



- Tung độ của điểm M là $\sin\alpha$.
- Hoành độ của điểm M là $\cos\alpha$.
- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ với $\cos\alpha \neq 0$.
- $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ với $\sin\alpha \neq 0$.

- $\tan\alpha$ xác định khi và chỉ khi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos\alpha$ xác định khi và chỉ khi $\alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos\alpha \geqslant 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và thứ IV; $\cos\alpha \leqslant 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ II và thứ III.
- $\sin\alpha \geqslant 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và thứ II; $\sin\alpha \leqslant 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ III và thứ IV.
- Từ dấu của $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ ta sẽ suy ra được dấu của $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.

▸ Chú ý: Các biểu thức có mặt ở hai vế của các đẳng thức trong các mục dưới đây đều quy ước là có nghĩa.

6.2.2. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
- $\tan\alpha.\cot\alpha = 1$
- $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
- $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

6.2.3. Giá trị lượng giác của các cung đối nhau

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

6.2.4. Giá trị lượng giác của các cung bù nhau

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

6.2.5. Giá trị lượng giác của các cung phụ nhau

- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
- $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

6.2.6. Giá trị lượng giác của các cung hơn kém π

- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
- $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
- $\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

6.3. Công thức lượng giác

6.3.1. Công thức cộng

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

6.3.2. Công thức nhân đôi

- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
- $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.

6.3.3. Công thức nhân ba

- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.
- $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

6.3.4. Công thức hạ bậc

- $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$
- $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

6.3.5. Công thức tính theo $t = \tan \frac{x}{2}$

- $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

6.3.6. Công thức tổng thành tích

- $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.
- $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.
- $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.
- $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

6.3.7. Công thức tích thành tổng

- $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$.
- $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$.
- $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]$.

6.3.8. Một số công thức khác

- $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
- $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{3\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.
- $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$.
- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{\sin^2 2x}{2}$.
- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3\sin^2 2x}{4}$.

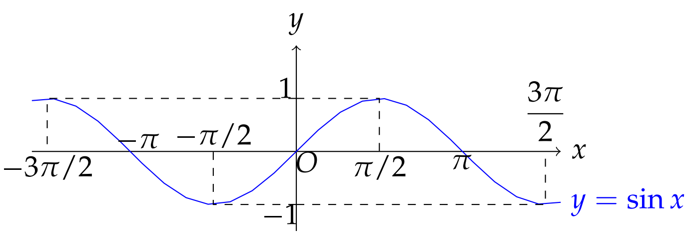
Chương 7

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

7.1. Hàm số lượng giác

7.1.1. Hàm số sin

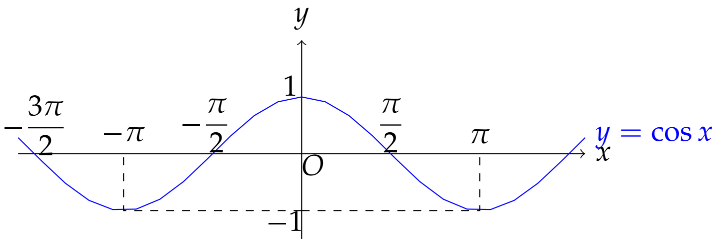
1. Hàm số $y = \sin x$ có các tính chất sau
   (a) $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và
   $$-1 \leqq \sin x \leqq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$
   (b) $y = \sin x$ là hàm số lẻ;
   (c) $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.
2. Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt như sau
   - $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ như sau:



7.1.2. Hàm số cos

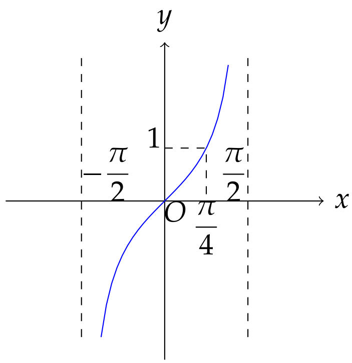
1. Hàm số $y = \cos x$ có các tính chất sau
   (a) $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và
   $$-1 \leqq \cos x \leqq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$
   (b) $y = \cos x$ là hàm số chẵn;
   (c) $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π.

2. Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt như sau
   - $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. Đồ thị của hàm số $y = \cos x$ như sau:



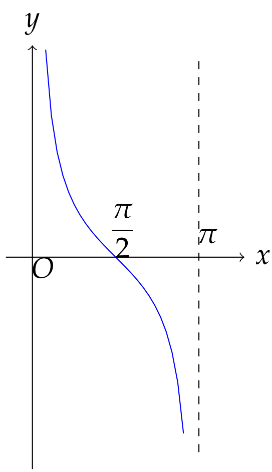
7.1.3. Hàm số tang

1. Hàm số $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ có các tính chất sau
   (a) $y = \tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
   (b) $y = \tan x$ là hàm số lẻ;
   (c) $y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π.
2. Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt như sau
   - $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. Đồ thị của hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} \right)$ như sau:



7.1.4. Hàm số cotang

1. Hàm số $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ có các tính chất sau
   (a) $y = \cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
   (b) $y = \cot x$ là hàm số lẻ;
   (c) $y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π.
2. Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt như sau
   - $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   - $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
3. Đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên khoảng $(0; \pi)$ như sau:



7.2. Phương trình lượng giác cơ bản

7.2.1. Phương trình cơ bản theo sin

Xét phương trình lượng giác cơ bản theo sin

$$\sin x = a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (7.1) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \leqq 1$, gọi φ là cung (có số đo bằng rad) thỏa mãn $\sin\varphi = a$. Khi đó phương trình (7.1) trở thành

$$\boxed{\sin x = \sin\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccll} x & = & \varphi & + k2\pi \\ x & = & \pi - \varphi & + k2\pi \end{array}\right.} (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu φ thỏa mãn điều kiện $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ và $\sin\varphi = a$ thì ta viết $\varphi = \arcsin a$, khi đó

$$\boxed{\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccll} x & = & \arcsin a & + k2\pi \\ x & = & \pi - \arcsin a & + k2\pi \end{array}\right.} (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu dùng đơn vị là độ thì ta có

$$\boxed{\sin x = \sin\beta^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccll} x & = & \beta^\circ & + k360^\circ \\ x & = & 180^\circ - \beta^\circ & + k360^\circ \end{array}\right.} (k \in \mathbb{Z}).$$

▸ Chú ý: Trong một công thức nghiệm, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

7.2.2. Phương trình cơ bản theo cos

Xét phương trình lượng giác cơ bản theo cos

$$\cos x = a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \tag{7.2}$$

- Nếu $|a| > 1$ thì phương trình (7.2) vô nghiệm.
- Nếu $|a| \leqq 1$, gọi φ là cung (có số đo bằng rad) thỏa mãn $\cos\varphi = a$. Khi đó phương trình (7.2) trở thành

$$\boxed{\cos x = \cos\varphi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccll} x & = & \varphi & + k2\pi \\ x & = & -\varphi & + k2\pi \end{array}\right.} (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu φ thỏa mãn điều kiện $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ và $\cos\varphi = a$ thì ta viết $\varphi = \arccos a$, khi đó

$$\boxed{\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcll} x & = & \arccos a & + k2\pi \\ x & = & -\arccos a & + k2\pi \end{array}\right.} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu dùng đơn vị là độ thì ta có

$$\boxed{\cos x = \cos\beta^\circ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{lcll} x & = & \beta^\circ & + k360^\circ \\ x & = & -\beta^\circ & + k360^\circ \end{array}\right.} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

7.2.3. Phương trình cơ bản theo tan

Xét phương trình lượng giác cơ bản theo tan

$$\tan x = a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \tag{7.3}$$

Điều kiện của phương trình (7.3) là $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Nếu φ là cung (có số đo bằng rad) thỏa mãn $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{\pi}{2}$ và $\tan\varphi = a$ thì ta viết $\varphi = \arctan a$. Khi đó phương trình (7.3) trở thành

$$\boxed{\tan x = \tan\varphi \Leftrightarrow x = \varphi + k\pi} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

hay

$$\boxed{\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

- Nếu dùng đơn vị độ thì ta có

$$\boxed{\tan x = \tan\beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ} \ (k \in \mathbb{Z}).$$

7.2.4. Phương trình cơ bản theo cot

Xét phương trình lượng giác cơ bản theo cot

$$\cot x = a, \text{ với } a \in \mathbb{R} \tag{7.4}$$

Điều kiện của phương trình (7.4) là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- Nếu φ là cung (có số đo bằng rad) thỏa mãn $0 < \varphi < \pi$ và $\cot\varphi = a$ thì ta viết $\varphi = \operatorname{arccot} a$. Khi đó phương trình (7.4) trở thành
$$\boxed{\cot x = \cot\varphi \Leftrightarrow x = \varphi + k\pi}\ (k \in \mathbb{Z}).$$
hay
$$\boxed{\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \text{a} + k\pi}\ (k \in \mathbb{Z}).$$
- Nếu dùng đơn vị độ thì ta có
$$\boxed{\cot x = \cot\beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

7.3. Phương trình lượng giác thường gặp

7.3.1. Phương trình lượng giác đưa về dạng đại số

Ví dụ: các phương trình $2\sin x - 1 = 0, \cos^2 x + 2\cos x - 3 = 0, \tan x - 3 = 0, \ldots$ có thể đưa về dạng phương trình đại số bằng cách đổi biến số.

7.3.2. Phương trình bậc nhất đối với sin và cos

Xét phương trình
$$a\sin x + b\cos x = c$$
với $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$. Chia hai vế của phương trình này cho $\sqrt{a^2+b^2}$ ta được
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại φ sao cho $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ và $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, khi đó ta có
$$\sin x\cos\varphi + \sin\varphi\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
hay
$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
Đây là phương trình cơ bản theo sin nên giải được.

7.3.3. Phương trình chứa tổng (hay hiệu) và tích của sin và cos

1. Xét phương trình

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$$

với $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$. Đặt $t = \sin x + \cos x$, khi đó $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$. Từ đó tính được $\sin x \cos x$ theo t. Sau đó thay vào phương trình ban đầu ta được phương trình bậc hai theo t nên giải được.

2. Với phương trình dạng $a(\sin x - \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$. ta cũng giải như trên bằng cách đặt $t = \sin x - \cos x$.

7.3.4. Phương trình đẳng cấp đối với sin va cos

Xét phương trình

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Cách giải như sau

- Nếu $\cos x = 0$ thì thử trực tiếp.
- Nếu $\cos x \neq 0$ thì chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta đưa về phương trình bậc hai theo $\tan x$ nên giải được.

Chương 8
TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

8.1. Quy tắc đếm

8.1.1. Quy tắc cộng

Giả sử đối tượng X có m cách chọn khác nhau, đối tượng Y có n cách chọn khác nhau và không có cách chọn đối tượng X nào trùng với mỗi cách chọn đối tượng Y. Khi đó có $m+n$ cách chọn một trong hai đối tượng ấy.
Giả sử A và B là các tập hữu hạn, không giao nhau. Khi đó

$$\boxed{n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)} \tag{8.1}$$

Trong đó: $n(A)$ là ký hiệu cho số phần tử của tập A.
▸ Chú ý: Công thức (8.1) có thể mở rộng theo hai hướng

- Nếu A và B là hai tập hữu hạn bất kỳ thì

$$\boxed{n(A\bigcup B)=n(A)+n(B)-n(A\bigcap B)}$$

- Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập hữu hạn tùy ý, đôi một không giao nhau thì

$$\boxed{n(A_1\bigcup A_2\bigcup\ldots\bigcup A_m)=n(A_1)+n(A_2)+\ldots+n(A_m)}$$

8.1.2. Quy tắc nhân

Giả sử A, B là hai tập hữu hạn. Kí hiệu $A\times B$ là tập hợp tất cả các cặp có thứ tự (a,b), trong đó $a\in A, b\in B$. Ta có quy tắc

$$\boxed{n(A\times B)=n(A).n(B)}$$

Quy tắc trên có thể phát biểu như sau:
Giả sử có hai hành động được thực hiện liên tiếp. Hành động thứ nhất có m kết quả. Ứng với mỗi kết quả của hành động thứ nhất, hành động thứ hai có n kết quả. Khi đó có $m\times n$ kết quả của hai hành động liên tiếp đó.
▸ Chú ý: Quy tắc nhân ở trên có thể mở rộng ra nhiều hành động liên tiếp.

8.2. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geqq 1$).

8.2.1. Hoán vị

Kết quả của sự sắp xếp n phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một hoán vị của tập A.
Số các hoán vị của tập A được kí hiệu là P_n, khi đó

$$\boxed{P_n = n.(n-1)\ldots 2.1 = n!}$$

8.2.2. Chỉnh hợp

Kết quả của việc lấy k phần tử của A ($1 \leqq k \leqq n$) và xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.
Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là A_n^k, khi đó

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Quy ước: $0! = 1$.

8.2.3. Tổ hợp

Một tập con gồm k phần tử của A ($1 \leqq k \leqq n$) được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.
Số các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là C_n^k, khi đó

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

8.3. Nhị thức Newton

8.3.1. Công thức nhị thức Newton

Khi khai triển nhị thức Newton[1] $(a+b)^n$, ta nhận được công thức

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \tag{8.2}$$

[1]Isaac Newton (1642-1727) là một nhà vật lý, nhà thiên văn học, nhà triết học, nhà toán học, nhà thần học và nhà giả kim người Anh, được nhiều người cho rằng là nhà khoa học vĩ đại và có tầm ảnh hưởng lớn nhất.

8.3.2. Các tính chất

Trong khai triển công thức (8.2) ta có

1. Số các hạng tử là $n+1$.
2. Số hạng (hay hạng tử) thứ $k+1$ là $C_n^k a^{n-k} b^k,\ k = 0, 1, \ldots, n$ (quy ước $a^0 = 1$ với $a \neq 0$).
3. Số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.
4. Các hạng tử cách đều hạng tử đầu và hạng tử cuối có hệ số bằng nhau.

8.4. Lý thuyết cơ bản về xác suất

8.4.1. Phép thử và biến cố

- Tập hợp mọi kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là *không gian mẫu* của phép thử và được kí hiệu là Ω. Ta chỉ xét các phép thử với không gian mẫu Ω là tập hữu hạn.
- Mỗi tập con A của Ω được gọi là một *biến cố*. Tập $\varnothing$ được gọi là *biến cố không thể*, tập Ω được gọi là *biến cố chắc chắn*.
- Nếu khi phép thử được tiến hành mà kết quả của nó là một phần tử của A thì ta nói rằng A xảy ra, hay phép thử thuận lợi cho A.
- Biến cố $\overline{A} = \Omega \backslash A$ được gọi là biến cố đối của A. Như vậy A và B là hai biến cố đối nhau $\Leftrightarrow A = \overline{B}$; $\overline{A}$ xảy ra $\Leftrightarrow A$ không xảy ra.
- Biến cố $A \bigcup B$ xảy ra $\Leftrightarrow A$ hoặc B xảy ra.
- Biến cố $A \bigcap B$ xảy ra $\Leftrightarrow A$ và B cùng xảy ra.
- Nếu $A \bigcap B = \varnothing$ thì A và B được gọi là *hai biến cố xung khắc*.

8.4.2. Xác suất của biến cố

1. Nếu A là biến cố liên quan đến phép thử chỉ có một số hữu hạn các kết quả đồng khả năng xuất hiện thì tỉ số $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ được gọi là xác suất của biến cố A, trong đó kí hiệu $n(A)$ là số phần tử của A.
2. Xác suất có các tính chất sau:
   (a) $P(A) \geqslant 0, \forall A$.
   (b) $P(\Omega) = 1$.
   (c) Nếu A và B là hai biến cố xung khắc cùng liên quan đến phép thử thì

$$\boxed{P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)}$$

(Công thức cộng xác suất).

Mở rộng: Với hai biến cố A và B bất kỳ cùng liên quan đến phép thử thì

$$\boxed{P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)}$$

3. Hai biến cố A và B được gọi là *độc lập*, nếu sự xảy ra của một trong hai biến cố không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia. Người ta chứng minh được rằng, hai biến cố A và B độc lập khi và chỉ khi $P(A \bigcap B) = P(A).P(B)$. Ngoài ra, A và B độc lập $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ và B độc lập $\Leftrightarrow$ A và $\overline{B}$ độc lập $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ và $\overline{B}$ độc lập.

Chương 9

DÃY SỐ

9.1. Phương pháp quy nạp toán học

1. Để chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta tiến hành hai bước:
   (a) Bước 1: Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.
   (b) Giả sử mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n = k$ $(k \geqslant 1)$ và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.
2. Trong trường hợp phải chứng minh một mệnh đề đúng với mọi số tự nhiên $n \geqslant p$ (p là số tự nhiên) thì:
   (a) Ở bước 1: ta kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
   (b) Ở bước 2: ta giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kỳ $n = k$ $(k \geqslant p)$ và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.
3. Phép thử với một số hữu hạn số tự nhiên, tuy không phải là chứng minh, nhưng cho phép ta dự đoán được kết quả. Kết quả này chỉ là giả thiết, và để chứng minh ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học.

Ví dụ 9.1.1. Chứng minh rằng

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \tag{9.1}$$

Giải.

Đặt vế trái của hệ thức (9.1) bằng C_n.
Khi $n = 1$ thì hệ thức (9.1) đúng.
Giả sử hệ thức (9.1) đúng với $n = k \geqq 1$, tức là

$$C_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}$$

Ta phải chứng minh

$$C_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \sqrt{2 + C_k} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}} \\ &= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \text{ (vì } \cos\frac{\pi}{2^{k+2}} > 0) \end{aligned}$$

Vậy hệ thức (9.1) đã được chứng minh.

9.2. Dãy số

9.2.1. Cơ bản về dãy số

Định nghĩa 9.1. *Mỗi hàm số u xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ được gọi là dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

Trong đó ta gọi $u(n) = u_n$ là số hạng tổng quát của dãy số (u_n).
Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, \ldots, m\}$, với $m \in \mathbb{N}^*$, được gọi là dãy số hữu hạn.

9.2.2. Cách cho một dãy số

1. *Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát*
   Khi đó $u_n = f(n)$ với f là một hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$. Đây là cách khá thông dụng (giống như hàm số) và nếu biết giá trị của n (hay cũng chính là số thứ tự của số hạng) thì ta có thể tính ngay được u_n.
2. *Dãy số cho bằng phương pháp mô tả*
   Người ta cho một mệnh đề mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số. Tuy nhiên, không thể tìm ngay được u_n với n tùy ý.
3. *Dãy số cho bằng công thức truy hồi (hay quy nạp)*
   (a) Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc vài số hạng đầu).
   (b) Với $n \geqslant 2$, cho một công thức tính u_n nếu biết u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó). Các công thức có thể là

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ với } n \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\text{hoặc}\begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}) \text{ với } n \geqslant 3 \end{cases}$$

9.2.3. Dãy số tăng, dãy số giảm

1. Dãy số (u_n) được gọi là *tăng* nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Dãy số (u_n) được gọi là *giảm* nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Phương pháp khảo sát tính đơn điệu.
   (a) Phương pháp 1: Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n$.
      i. Nếu $H > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số tăng.
      ii. Nếu $H < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số giảm.
   (b) Phương pháp 2: Nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì lập tỷ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, rồi so sánh với 1
      i. Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số tăng.
      ii. Nếu $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số giảm.

9.2.4. Dãy số bị chặn

1. Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số thực M sao cho

$$u_n \leqq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

2. Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số thực m sao cho

$$u_n \geqq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

3. Dãy số được gọi là *bị chặn*, nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số m, M sao cho

$$m \leqq u_n \leqq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

▸ Chú ý: Các dấu "=" không nhất thiết phải xảy ra.

9.3. Cấp số cộng

9.3.1. Cơ bản về cấp số cộng

Định nghĩa 9.2. *Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó d là một hằng số và được gọi là công sai.*

Như vậy, công sai của một cấp số cộng (u_n) xác định bởi:

$$d = u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} = \dots$$

9.3.2. Số hạng tổng quát

Số hạng tổng quát của cấp số cộng (u_n) xác định bởi

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geqq 2$$

Suy ra $d = \dfrac{u_n - u_1}{n-1}$.

9.3.3. Tính chất

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad \text{với } k \geqq 2$$

hay $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$.

9.3.4. Tổng n số hạng đầu

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \quad \text{với } n \in \mathbb{N}^*$$

hay $S_n = \dfrac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$.

‣ Chú ý: Khi giải các bài toán về cấp số cộng (u_n), ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là u_1, d, u_n, n, S_n. Cần phải biết ít nhất 3 trong 5 đại lượng đó thì sẽ tính được các đại lượng còn lại.

9.4. Cấp số nhân

9.4.1. Cơ bản về cấp số nhân

Định nghĩa 9.3. *Dãy số (v_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n.q$ với $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó q là một hằng số và được gọi là công bội.*

Như vậy, công bội của một cấp số nhân (v_n) xác định bởi:

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n}{v_{n-1}} \dots$$

9.4.2. Số hạng tổng quát

Số hạng tổng quát của cấp số nhân (v_n) xác định bởi

$$v_n = v_1.q^{n-1} \text{ với } n \geqq 2$$

9.4.3. Tính chất

$$\begin{aligned} (v_k)^2 &= v_{k-1}.v_{k+1} \quad (k \geqq 2) \\ \text{hay } |v_k| &= \sqrt{v_{k-1}.v_{k+1}} \end{aligned}$$

9.4.4. Tổng n số hạng đầu

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} v_i = \frac{v_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{với } q \neq 1$$

▸ Chú ý: Khi giải các bài toán về cấp số nhân (v_n), ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là v_1, q, v_n, n, S_n. Cần phải biết ít nhất 3 trong 5 đại lượng đó thì sẽ tính được các đại lượng còn lại.

Chương 10
GIỚI HẠN

10.1. Giới hạn của dãy số

10.1.1. Giới hạn hữu hạn

Cho các dãy số $(u_n), (v_n)$, khi đó

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow |u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$ với $a \in \mathbb{R}$.

10.1.2. Giới hạn vô cực

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow u_n$ có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(-u_n) = +\infty$.

▸ Chú ý: Thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ta có thể viết tắt $\lim u_n = a, \lim u_n = \pm\infty$.

10.1.3. Các giới hạn đặc biệt

1. $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$; $\lim n^k = +\infty$, với k nguyên dương.
2. $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$; $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.
3. $\lim c = c$ với $c \in \mathbb{R}$.

10.1.4. Định lý về giới hạn hữu hạn

1. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$, thì:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim u_n.v_n = ab$
- $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{a}{b}$ (với $b \neq 0$).

2. Nếu $u_n \geqq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$ thì $a \geqq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

10.1.5. Liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và vô cực

1. Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
2. Nếu $\lim u_n = a > 0$ và $\lim v_n = 0$ với $v_n > 0, \forall n$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.
3. Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

10.1.6. Cấp số nhân lùi vô hạn

1. Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân vô hạn có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$.
2. Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$$

10.2. Giới hạn của hàm số

10.2.1. Giới hạn hữu hạn

1. Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \backslash \{x_0\}$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in K \backslash \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.
2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow$ với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.
3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow$ với dãy số (x_n) bất kỳ, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.
4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = L$.
5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$. Khi đó $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

10.2.2. Giới hạn vô cực

Sau đây là hai trong số nhiều loại giới hạn vô cực khác nhau

1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. Khi đó $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = -\infty$.
2. Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \backslash \{x_0\}$. Khi đó $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ với dãy số (x_n) bất kỳ, $x_n \in K \backslash \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = +\infty$.

‣ Chú ý: $f(x)$ có giới hạn $+\infty \Leftrightarrow -f(x)$ có giới hạn $-\infty$.

10.2.3. Các giới hạn đặc biệt

1. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ với $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ với c là hằng số.
3. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$ với c là hằng số.
4. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ với c là hằng số.
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ với k là số lẻ.
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ với k là số chẵn.
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

10.2.4. Các định lý về giới hạn hữu hạn

Định lý 10.1. *Ta chứng minh được các định lý sau*

1. *Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \beta$ *với* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *thì*
   (a) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta$.
   (b) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \alpha - \beta$.
   (c) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \alpha.\beta$.
   (d) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ *với* $\beta \neq 0$.
2. *Nếu* $f(x) \geqslant 0$ *và Nếu* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ *thì* $\alpha > 0$ *và* $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\alpha}$.

‣ Chú ý: Định lý (10.1) vẫn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Định lý 10.2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \alpha.$

10.2.5. Các quy tắc về giới hạn vô cực

1. Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$\alpha > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$\alpha < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

2. Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
α	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$\alpha > 0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$\alpha < 0$	0	$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$).

10.3. Hàm số liên tục

10.3.1. Hàm số liên tục

1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Khi đó, hàm số $y = f(x)$ *liên tục* tại x_0 khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

3. Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

▸ Nhận xét: Đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

10.3.2. Các định lý

Định lý 10.3. *Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức hữu tỷ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.*

Định lý 10.4. *Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó*

1. *Các hàm số $f(x) + g(x), f(x) - g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại điểm x_0.*
2. *Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.*

Định lý 10.5. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.*

Hệ quả 10.6. *Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a;b)$.*

Chương 11

ĐẠO HÀM

11.1. Các lý thuyết về đạo hàm

11.1.1. Định nghĩa

Định nghĩa 11.1. *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên khoảng* (a, b), $x_0 \in (a, b)$, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$, *nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

được gọi là đạo hàm của $f(x)$ *tại* x_0, *kí hiệu là* $f'(x_0)$ *hay* $y'(x_0)$, *khi đó*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

11.1.2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Bước 1: Với Δx là số gia của đối số tại x_0, tính

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

2. Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

▸ Chú ý: Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a; b)$.

11.1.3. Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm

$f(x)$ có đạo hàm tại x_0	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	$f(x)$ liên tục tại x_0

11.1.4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu tồn tại, $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M(x_0; f(x_0))$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}\text{, với } y_0 = f(x_0)$$

11.1.5. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

$v(t) = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t.

11.2. Các qui tắc tính đạo hàm

11.2.1. Các công thức

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.
2. $[f(x).g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. $[kf(x]' = kf'(x)$ với $k \in \mathbb{R}$.
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ với $g(x) \neq 0$.
5. Đạo hàm của hàm hợp

$$y'_x = y'_u.u'_x \text{ với } y = y(u),\ u = u(x).$$

11.2.2. Bảng các đạo hàm cơ bản

Đạo hàm của hàm sơ cấp	Đạo hàm của hàm hợp $u = u(x)$
• $(c)' = 0$ với $c \in \mathbb{R}$	
• $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	• $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}u'$
• $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	• $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
• $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	• $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

• $(e^x)' = e^x$	• $(e^u)' = e^u.u'$
• $(a^x)' = a^x \ln a$	• $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$
• $(\sin x)' = \cos x$	• $(\sin u)' = u'.\cos u$
• $(\cos x)' = -\sin x$	• $(\cos u)' = -u'.\sin u$
• $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	• $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
• $(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	• $(\cot u)' = -u'.\dfrac{1}{\sin^2 u}$

11.3. Vi phân

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên (a, b) và có đạo hàm tại $x \in (a, b)$. Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in (a, b)$. Tích $f'(x)\Delta x$ được gọi là vi phân của hàm số $f(x)$ tại x, ứng với số gia Δx, ký hiệu là $\mathrm{d}f(x)$ hay $\mathrm{d}y$. Như vậy $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$.

Chương 12

KHẢO SÁT HÀM SỐ

12.1. Tính đồng biến - nghịch biến của hàm số

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$, khi đó:

1. $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên khoảng (a,b).
2. $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a,b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên khoảng (a,b).
3. $f(x)$ đồng biến trên khoảng (a,b) thì $f'(x) \geqslant 0$, $\forall x \in (a,b)$.
4. $f(x)$ nghịch biến trên khoảng (a,b) thì $f'(x) \leqslant 0$, $\forall x \in (a,b)$.

12.2. Cực trị của hàm số

Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$

1. Nếu $\begin{cases} f'(x) > 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) < 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của $f(x)$.
2. Nếu $\begin{cases} f'(x) < 0, \forall x \in (x_0 - h; x_0) \\ f'(x) > 0, \forall x \in (x_0; x_0 + h) \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của $f(x)$.
3. Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực đại của $f(x)$.
4. Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì x_0 là điểm cực tiểu của $f(x)$.

12.3. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

12.3.1. Cách tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên một đoạn

Định lý 12.1. *Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì tồn tại $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ và $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.*

▸ Cách tìm:

- Tìm $x_i \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ là các điểm tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- Tính $f(a), f(b), f(x_i)$, với $i = 1, 2, \ldots, n$.

- So sánh để suy ra

$$
\begin{aligned}
\text{GTLN } &= \max\{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b)\}\\
\text{GTNN } &= \min\{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b)\}
\end{aligned}
$$

12.3.2. Cách tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên một khoảng

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$, khi đó xét hai trường hợp

x	a		x_0		b
y'		$-$		$+$	
y		$\searrow$	GTNN	$\nearrow$	

x	a		x_0		b
y'		$+$		$-$	
y		$\nearrow$	GTLN	$\searrow$	

Trong đó $f'(x_0)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định tại x_0.

12.4. Đường tiệm cận

Kí hiệu $(\mathcal{C})$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

12.4.1. Đường tiệm cận đứng

Nếu một trong các điều kiện sau xảy ra

$$
\left[
\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty\\
\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\\
\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\\
\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty
\end{array}
\right.
$$

thì đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của $(\mathcal{C})$.

12.4.2. Đường tiệm cận ngang

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$ thì đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của $(\mathcal{C})$.

12.5. Các bước khảo sát hàm số

12.5.1. Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Sự biến thiên
   (a) Chiều biến thiên
      i. Tính y'.
      ii. Tìm các nghiệm của phương trình $y' = 0$ và các điểm tại đó y' không xác định.
      iii. Xét dấu y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.
   (b) Tìm các điểm cực trị (nếu có).
   (c) Tìm các giới hạn vô cực, các giới hạn tại $+\infty, -\infty$ và tại các điểm mà hàm số không xác định. Suy ra các đường tiệm cận đứng và ngang (nếu có).
   (d) Lập bảng biến thiên.
3. Vẽ đồ thị: Tính thêm tọa độ một số điểm đặc biệt, lập bảng giá trị và dựa vào bảng biến thiên để vẽ đồ thị.

▸ Chú ý:

- Nếu hàm số tuần hoàn với chu kỳ T thì ta chỉ cần vẽ đồ thị trên một chu kỳ rồi tịnh tiến đồ thị song song với Ox.
- Để vẽ đồ thị thêm chính xác ta cần
  ✓ Tìm thêm tọa độ một số điểm, đặc biệt nên tính các giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ.
  ✓ Lưu ý tính chất đối xứng (qua trục, qua tâm,...) của đồ thị.

12.5.2. Tương giao của hai đồ thị

1. **Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị.** Giả sử $(\mathcal{C}_1)$ là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $(\mathcal{C}_2)$ là đồ thị của hàm số $y = g(x)$. Khi đó số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ tương ứng với số giao điểm của $(\mathcal{C}_1)$ và $(\mathcal{C}_2)$.
2. **Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số.**
   (a) **Dạng 1.**
   Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$:
      i. Tại một điểm $(x_0; y_0)$ trên đồ thị.
      ii. Tại điểm có hoành độ x_0 trên đồ thị.
      iii. Tại điểm có tung độ y_0 trên đồ thị.

iv. Tại giao điểm của đồ thị với trục tung.
v. Tại giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Phương pháp giải: Tìm đủ các giá trị $x_0; y_0 = f(x_0)$ và $f'(x_0)$. Khi đó, phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $(x_0; y_0)$ là

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)}$$

(b) **Dạng 2.**

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ biết tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$. Phương pháp giải như sau

i. Tính $y' = f'(x)$.
ii. Nếu tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax + b$ thì hệ số góc của tiếp tuyến bằng a, tức là giải phương trình $f'(x) = a$ để tìm x_0. Nếu tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ thì hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{a}$, tức là giải phương trình $f'(x) = -\frac{1}{a}$ để tìm x_0.
iii. Tính $y_0 = f(x_0)$.
iv. Thay vào phương trình tiếp tuyến $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

(c) **Dạng 3.**

Viết phương trình tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước đến đồ thị hàm số $y = f(x)$. Phương pháp sử dụng điều kiện tiếp xúc: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g(x)$ tiếp xúc tại điểm có hoành độ x_0 khi x_0 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$$

Chương 13
LŨY THỪA VÀ LOGARIT

13.1. Lũy thừa

13.1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên

1. Lũy thừa với số mũ nguyên dương
   Với $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\boxed{a^n = \underbrace{a.a\dots a}_{n \text{ thừa số}}}$$

2. Lũy thừa với số mũ nguyên âm và số mũ 0
   (a) Với $a \neq 0, n \in \mathbb{N}$ ta có

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

   (b) Với $a \neq 0$ ta có $a^0 = 1$.
   (c) Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

13.1.2. Căn bậc n

Cho số thực b và số nguyên dương $n \geqq 2$. Khi đó

1. Số a được gọi là căn bậc n của b nếu $a^n = b$, ký hiệu $a = \sqrt[n]{b}$.
2. Khi n lẻ thì tồn tại duy nhất $\sqrt[n]{b}$ với mọi $b \in \mathbb{R}$.
3. Khi n chẵn thì
   (a) Nếu $b < 0$ thì không tồn tại căn bậc n của b.
   (b) Nếu $b = 0$ thì có một căn $\sqrt[n]{0} = 0$.
   (c) Nếu $b > 0$ thì có hai căn $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

13.1.3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Với $a > 0, m, n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 2$, ta có

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

13.1.4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Cho $a > 0$, α là một số vô tỉ và (r_n) là một dãy số hữu tỉ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = a$, khi đó

$$\boxed{a^\alpha = \lim_{n\to+\infty} a^{r_n}}$$

13.1.5. Các tính chất lũy thừa

Cho $a > 0, b > 0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, khi đó

1. $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$.
2. $(ab)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$.
3. $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.
4. Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Longleftrightarrow \alpha > \beta$.
5. Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Longleftrightarrow \alpha < \beta$.

13.2. Hàm số lũy thừa

13.2.1. Cơ bản về hàm số lũy thừa

Định nghĩa 13.1. *Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.*

13.2.2. Tập xác định

Tập xác định của hàm số $y = x^\alpha$ là:

- $\mathbb{R}$ với α nguyên dương;
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ với α nguyên âm hoặc bằng 0;
- $(0; +\infty)$ với α không nguyên.

13.2.3. Đạo hàm

Hàm số $y = x^\alpha$ với $\alpha \in \mathbb{R}$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

13.2.4. Tính chất

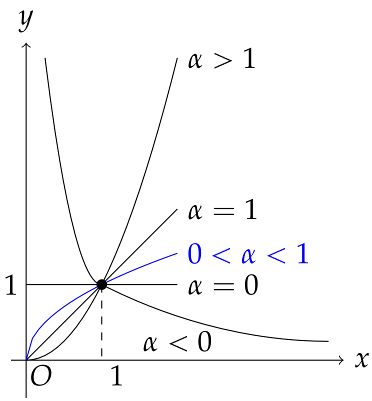
Xét hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$, khi đó

1. Đồ thị luôn đi qua điểm $(1; 1)$.
2. Khi $\alpha > 0$ hàm số luôn đồng biến, khi $\alpha < 0$ hàm số luôn nghịch biến.

3. Đồ thị của hàm số không có tiệm cận khi $\alpha > 0$. Khi $\alpha < 0$, đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox, tiêm cận đứng là trục Oy.

13.2.5. Đồ thị

Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ trên khoảng $(0; +\infty)$ ứng với các giá trị khác nhau của α.



13.3. Logarit

13.3.1. Cơ bản về logarit

Định nghĩa 13.2. *Cho $a > 0, b > 0, a \neq 1$, số α thỏa đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và ký hiệu là $\log_a b$, như vậy*

$$\boxed{\alpha = \log_a b \Longleftrightarrow a^\alpha = b}$$

13.3.2. Các tính chất

$$\log_a 1 = 0;\ \log_a a = 1;\ a^{\log_a b} = b;\ \log_a a^\alpha = \alpha$$

13.3.3. Các quy tắc tính

1. Với các số $a, b_1, b_2 > 0, a \neq 1$, ta có

$$\log_a(b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$
$$\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

2. Với các số $a, b > 0, a \neq 1, \alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b;\ \boxed{\log_a b^\alpha = \alpha\log_a b};\ \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b.$$

3. Với các số $a, b, c > 0, a \neq 1, c \neq 1, \alpha \neq 0$ ta có

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}(b \neq 1);\ \boxed{\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b}$$

13.3.4. Logarit thập phân và logarit tự nhiên

Với $x > 0$ ta viết gọn

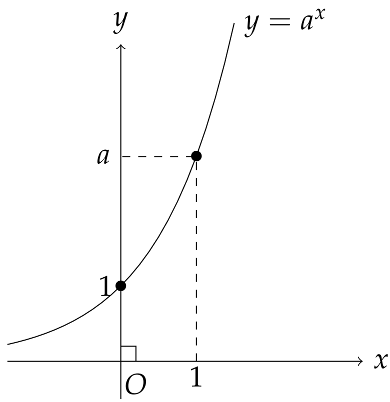
$$\log_{10} x = \lg x \text{ hoặc } \log_{10} x = \log x;\ \log_e x = \ln x$$

13.4. Hàm số mũ và hàm số logarit

13.4.1. Hàm số mũ

1. Hàm số $y = a^x$ với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.
2. Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi x và $(a^x)' = a^x \ln a$. Đặc biệt $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.
3. Các tính chất
   (a) Tập xác định của hàm số mũ là $\mathbb{R}$.
   (b) Khi $a > 1$ hàm số mũ luôn đồng biến. Khi $0 < a < 1$ hàm số mũ luôn nghịch biến.
   (c) Đồ thị của hàm số mũ

Đồ thị của hàm số mũ có tiệm cận ngang là trục Ox và luôn đi qua các điểm $(0;1), (1;a)$ và nằm phía trên trục hoành.

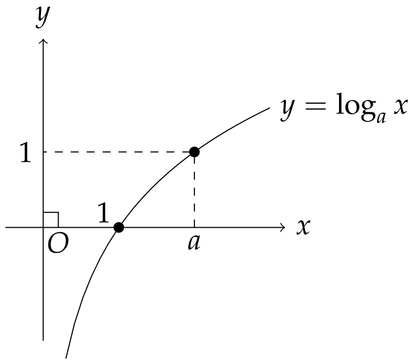


13.4.2. Hàm số logarit

1. Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 0, a \neq 1$ được gọi là hàm số logarit cơ số a.

2. Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.
   Đặc biệt $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.
3. Các tính chất
   (a) Tập xác định của hàm số logarit là $(0; +\infty)$.
   (b) Khi $a > 1$ hàm số logarit luôn đồng biến. Khi $0 < a < 1$ hàm số logarit luôn nghịch biến.
   (c) Đồ thị của hàm số logarit

   Đồ thị của hàm số logarit có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1; 0), (a; 1)$ và nằm phía bên phải trục tung.



13.5. Phương trình mũ và phương trình logarit

13.5.1. Phương trình mũ

1. Phương trình mũ dạng cơ bản

$$a^x = b \ (a > 0, a \neq 1)$$

   (a) Nếu $b \leqslant 0$ thì phương trình vô nghiệm.
   (b) Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
2. Phương trình mũ đơn giản: Giải bằng các phương pháp sau
   (a) Đưa về cùng một cơ số.
   (b) Đặt ẩn phụ.
   (c) Lấy logarit hai vế (logarit hóa).
   (d) Phương pháp đồ thị.
   (e) Áp dụng các tính chất của hàm số mũ ...

13.5.2. Phương trình logarit

1. Phương trình logarit dạng cơ bản

$$\log_a x = b \ (a > 0, a \neq 1)$$

Phương trình logarit cơ bản luôn có nghiệm duy nhất

$$x = a^b$$

2. Phương trình logarit đơn giản: Giải bằng các phương pháp sau
   (a) Đưa về cùng một cơ số.
   (b) Đặt ẩn phụ.
   (c) Mũ hóa hai vế
   (d) Phương pháp đồ thị.
   (e) Áp dụng các tính chất của hàm số logarit ...

13.6. Bất phương trình mũ và logarit

13.6.1. Bất phương trình mũ

1. Bất phương trình mũ cơ bản
   (a) Dạng 1: $\boxed{a^x > b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $b \leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
      ii. Nếu $b > 0$ và
         - $a > 1$, tập nghiệm là $(\log_a b; +\infty)$.
         - $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b)$.
   (b) Dạng 2: $\boxed{a^x \geqslant b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $b \leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$.
      ii. Nếu $b > 0$ và
         - $a > 1$, tập nghiệm là $[\log_a b; +\infty)$.
         - $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b]$.
   (c) Dạng 3: $\boxed{a^x < b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $b \leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\varnothing$.
      ii. Nếu $b > 0$ và
         - $a > 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b)$.
         - $0 < a < 1$, tập nghiệm là $(\log_a b; +\infty)$.
   (d) Dạng 4: $\boxed{a^x \leqslant b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $b \leqslant 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\varnothing$.
      ii. Nếu $b > 0$ và
         - $a > 1$, tập nghiệm là $(-\infty; \log_a b]$.
         - $0 < a < 1$, tập nghiệm là $[\log_a b; +\infty)$.
2. Bất phương trình mũ dạng đơn giản: Để giải ta cần biến đổi đưa về bất phương trình mũ cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

13.6.2. Bất phương trình logarit

1. Bất phương trình logarit cơ bản
   (a) Dạng 1: $\boxed{\log_a x > b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $a > 1$ thì tập nghiệm là $\left(a^b; +\infty\right)$.
      ii. Nếu $0 < a < 1$ thì tập nghiệm là $\left(0; a^b\right)$.
   (b) Dạng 2: $\boxed{\log_a x \geqslant b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $a > 1$ thì tập nghiệm là $\left[a^b; +\infty\right)$.
      ii. Nếu $0 < a < 1$ thì tập nghiệm là $\left(0; a^b\right]$.
   (c) Dạng 3: $\boxed{\log_a x < b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $a > 1$ thì tập nghiệm là $\left(0; a^b\right)$.
      ii. Nếu $0 < a < 1$ thì tập nghiệm là $\left(a^b; +\infty\right)$.
   (d) Dạng 3: $\boxed{\log_a x \leqslant b}$ với $a > 0, a \neq 1$.
      i. Nếu $a > 1$ thì tập nghiệm là $\left(0; a^b\right]$.
      ii. Nếu $0 < a < 1$ thì tập nghiệm là $\left[a^b; +\infty\right)$.
2. Bất phương trình logarit dạng đơn giản: Để giải ta cần biến đổi đưa về bất phương trình logarit cơ bản hoặc bất phương trình đại số.

Chương 14
NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

14.1. Nguyên hàm

14.1.1. Nguyên hàm và các tính chất

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $K \subseteq \mathbb{R}$. Hàm số $F(x)$ gọi là nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên khoảng K nếu
$$F'(x) = f(x), \forall x \in K.$$
2. Mọi hàm số liên tục trên khoảng $K \subseteq \mathbb{R}$ đều có nguyên hàm trên đoạn đó.
3. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $K \subseteq \mathbb{R}$ thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x) = F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Ngược lại, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$ với C là một hằng số. Kí hiệu họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\int f(x)\, dx$, đọc là tích phân bất định của $f(x)$. Khi đó $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ với $C \in \mathbb{R}$.
4. **Các tính chất cơ bản**
   (a) $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$ với C là hằng số thực.
   (b) $\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$ với k là hằng số thực.
   (c) $\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$.

14.1.2. Phương pháp tính nguyên hàm

1. **Phương pháp đổi biến số.** Nếu $\int f(u)\, du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì $\int f(u(x))u'(x)\, du = F(u(x)) + C$.
2. **Phương pháp tích phân từng phần.** Nếu hai hàm số $u = u(x)$

và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì $\int u(x)v'(x)\ \mathrm{d}u = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}u$.

14.1.3. Bảng các nguyên hàm cơ bản

Nguyên hàm của hàm sơ cấp	Nguyên hàm của hàm hợp $u = u(x)$
• $\int 0\ \mathrm{d}x = C$	• $\int 0\ \mathrm{d}u = C$
• $\int 1\ \mathrm{d}x = x + C$	• $\int 1\ \mathrm{d}u = u + C$
• $\int x^\alpha\ \mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	• $\int u^\alpha\ \mathrm{d}u = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
• $\int \dfrac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln\|x\| + C$	• $\int \dfrac{1}{u}\ \mathrm{d}u = \ln\|u\| + C$
• $\int e^x\ \mathrm{d}x = e^x + C$	• $\int e^u\ \mathrm{d}u = e^u + C$
• $\int a^x\ \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	• $\int a^u\ \mathrm{d}u = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$
• $\int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + C$	• $\int \cos u\ \mathrm{d}u = \sin u + C$
• $\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + C$	• $\int \sin u\ \mathrm{d}u = -\cos u + C$
• $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \tan x + C$	• $\int \dfrac{1}{\cos^2 u}\ \mathrm{d}u = \tan u + C$
• $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\ \mathrm{d}x = -\cot x + C$	• $\int \dfrac{1}{\sin^2 u}\ \mathrm{d}u = -\cot u + C$

14.2. Tích phân

14.2.1. Tích phân và các tính chất

1. **Định nghĩa.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b]$. Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$. Hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân từ a đến b (hay tích phân xác định trên $[a,b]$) của hàm số $f(x)$. Ký hiệu là $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)}$$

Trường hợp $a=b$ ta định nghĩa $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Trường hợp $a>b$ ta định nghĩa $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. **Các tính chất của tích phân.**

(a) $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với k là hằng số.

(b) $\int\limits_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $a<c<b$.

(d) Tích phân không phụ thuộc vào chữ dùng làm biến số trong dấu tích phân, tức là

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \cdots$$

14.2.2. Phương pháp tính tích phân

1. **Phương pháp đổi biến số**

   (a) Giả sử hàm số $x = \varphi(t)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ sao cho $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ và $a \leqslant \varphi(t) \leqslant b, \forall t \in [\alpha, \beta]$. Khi đó

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

   .

   (b) Giả sử hàm số $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ sao cho $\alpha \leqslant u(x) \leqslant \beta, \forall x \in [a, b]$. Nếu $f(x) = g(u(x))u'(x), \forall x \in [a, b]$, trong đó $g(u)$ liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ thì

   $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,\mathrm{d}u$$

   .

2. **Phương pháp tích phân từng phần**. Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì

   $$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

   hoặc

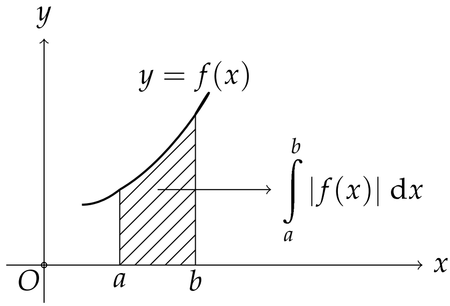
   $$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u}.$$

14.2.3. Ứng dụng của tích phân

1. **Tính diện tích của hình phẳng**

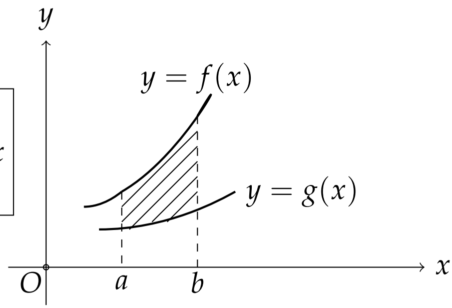
   (a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$, hai đường thẳng $x = a, x = b$ và trục Ox là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x}$$



(b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x}$$



2. **Tính thể tích của vật thể tròn xoay**

(a) Giả sử hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0$ (trục Ox), $x = a, x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, \mathrm{d}x}$$

(b) Xét đường cong có phương trình $x = g(y)$ liên tục với mọi $y \in [a; b]$. Nếu hình giới hạn bởi các đường $x = g(y), x = 0$ (trục Oy), $y = a, y = b$ quay quanh trục Oy thì thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành xác định bởi

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [g(y)]^2\, \mathrm{d}y}$$

Chương 15
SỐ PHỨC

15.1. Cơ bản về số phức

1. Số phức có dạng
$$z = a + bi$$
trong đó
   (a) a là phần thực, b là phần ảo, $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) i là đơn vị ảo và $i^2 = -1$.
2. Hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo tương ứng bằng nhau, tức là
$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$
3. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Khi đó, độ dài của $\overrightarrow{OM}$ gọi là mô đun của số phức z đó, tức là
$$|\overrightarrow{z}| = \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
4. Số phức liên hợp của $z = a + bi$ là $\overline{z} = a - bi$.

15.2. Các phép toán với số phức

1. Phép cộng: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.
2. Phép trừ: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.
3. Phép nhân:
$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + adi + cbi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$
4. Phép chia:
$$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)}$$

$$= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c^2+d^2)}.$$

15.3. Phương trình bậc hai với hệ số thực

1. Số thực $a < 0$ vẫn có các căn bậc hai là $i\sqrt{|a|}$ và $-i\sqrt{|a|}$.
2. Xét phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c = 0$$

trong đó $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$

(a) Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép (thực) $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(b) Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm thực $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

(c) Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phức $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

3. Cách tìm căn bậc hai của một số phức $a + bi$ với a, b đã biết trước

(a) Giả sử ta cần tìm c, d sao cho

$$\begin{aligned} a + bi &= (c + di)^2 \\ &= c^2 - d^2 + 2cdi \end{aligned}$$

Khi đó, do tính chất bằng nhau của hai số phức ta có

$$\begin{cases} c^2 - d^2 = a \\ 2cd = b \end{cases}$$

.

(b) Giải hệ phương trình này ta sẽ tìm được c, d. Suy ra căn bậc hai của số phức $a + bi$.

15.4. Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng

1. Số phức dưới dạng lượng giác

(a) Acgument của số phức: Cho số phức $z \neq 0$, M là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng Oxy. Khi đó, Acgument của z là số đo (radian) của góc lượng giác (Ox, OM).

(b) Dạng lương giác của số phức $z = a + bi \neq 0$ là

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

với $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ và φ là Acgument của z ($\varphi \in \mathbb{R}$ thỏa $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \sin\varphi = \dfrac{b}{r}$).

2. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác: Cho 2 số phức $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ và $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ với $r_1, r_2 \geqq 0$, khi đó
   (a) $z_1.z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$.
   (b) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)], r_2 > 0$.
3. Công thức Moivre[1] và ứng dụng
   (a) Công thức Moivre: Với mọi n nguyên dương ta có

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

   (b) Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác: Từ công thức Moivre suy ra số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ có hai căn bậc hai là

$$\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) \text{ và } -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

[1] Abraham de Moivre (1667 - 1754) là một nhà toán học người Pháp. Ông nổi tiếng với công thức liên kết số phức với lượng giác. Ông cũng được biết đến với những đóng góp về phân phối chuẩn trong lý thuyết xác suất.

Tài liệu tham khảo

[1] Vũ Tuấn, Doãn Minh Cường, Trần Văn Hạo, Đỗ Mạnh Hùng, Phạm Phu, Nguyễn Tiến Tài, *Bài tập Giải tích 10*, Nhà xuất bản Giáo Dục 2008.

[2] Vũ Tuấn, Trần Văn Hạo, Đào Ngọc Nam, Lê Văn Tiến, Vũ Viết Yên *Bài tập Giải tích 11*, Nhà xuất bản Giáo Dục 2008.

[3] Vũ Tuấn, Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Thu Nga, Phạm Phu, Nguyễn Tiến Tài, Cấn Văn Tuất, *Bài tập Giải tích 12*, Nhà xuất bản Giáo Dục 2008.

[4] Phan Thanh Quang, *Sổ tay toán 10 - 11 - 12*, Nhà xuất bản Đại Học Sư Phạm 2010.