Sử dụng 'yếu tố' $\mathbb{Z}^+$ trong việc giải phương trình hàm trên $\mathbb{R}^+$

Lê Phúc Lữ
(GV Đại học Khoa học tự nhiên TPHCM)

Ngày 1 tháng 1 năm 2024

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết nhỏ này, tác giả muốn nhắc lại một số tình huống có thể dùng các tính toán trên tập số nguyên dương để hỗ trợ cho việc giải phương trình hàm trên tập hợp số thực dương. Cụ thể hơn là về: việc dùng chu kỳ tuần hoàn, phương trình hàm cộng tính và các đánh giá bất đẳng thức khác. [1]

1) Giới thiệu

Phương trình hàm trên $\mathbb{R}^+$ là một lớp hàm đặc thù và đòi hỏi các kỹ thuật biến đổi, đánh giá ở mức độ nhất định. Hiện tại các đề bài thi trong và ngoài nước có khai thác các dạng này khá nhiều, có các bài toán khó, thử thách. Trong bài viết này, ta sẽ xét một số cách tiếp cận có liên quan đến yếu tố số nguyên dương như sau:

- Phương trình hàm cộng tính $f(x) + f(y) = f(x + y)$ trên $\mathbb{R}^+$ thì có thể giải được ra nghiệm $f(x) = ax$ vì lý do trên $\mathbb{R}^+$ thì hàm cộng tính cũng sẽ đồng biến. Tuy nhiên, nếu như ta không có điều kiện mạnh như cộng tính mà chỉ có điều kiện yếu hơn là $f(nx) = nf(x)$ với $x \in \mathbb{R}^+$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ thì sao? Câu trả lời là vẫn sẽ giải được, nhưng cần kết hợp với tính đồng biến. Điều này sẽ được mô tả rõ hơn thông qua các ví dụ bên dưới.

- Các phương trình hàm có dùng đến kỹ thuật chu kỳ tuần hoàn để chứng minh hàm hằng hoặc tính đơn ánh thì việc xuất hiện của các yếu tố nguyên dương của chu kỳ là tất yếu. Đôi khi ta cần khai thác điều đó khéo léo thì mới xử lý triệt để được bài toán.

- Ngoài ra, yếu tố nguyên dương cũng xuất hiện khá bất ngờ và lại có thể dùng trong các bài toán đánh giá các bất đẳng thức trung gian để giải phương trình hàm rất hiệu quả. Với tâm lý cho rằng việc chỉ chứng minh được $f(n) = n$ với $n \in \mathbb{Z}^+$ thì khó có thể đi đến $f(x) = x$ với $x \in \mathbb{R}^+$ có khi lại làm mất đi cơ hội giải quyết được bài toán.

[1] Bài viết được trích từ Kỷ yếu của hội thảo Các chuyên đề chuyên sâu Toán THPT 2023, tổ chức tại Vĩnh Long.

2) Sử dụng tính chất tuần hoàn

Trước hết, ta xét một số bài toán có sử dụng đến hàm tuần hoàn, trong đó có dùng đến tính chất số nguyên lần của chu kỳ. Ta có bổ đề quen thuộc sau đây:

Bổ đề 1. Xét hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ và giả sử tồn tại các số thực $a, b, c > 0$ sao cho

$$f(x) \geq cx, \forall x > 0 \text{ và } f(x+a) = f(x+b), \forall x > 0.$$

Khi đó, ta phải có $a = b$.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử có $a > b$ thì $f(x) = f(x + a - b)$ với mọi $x > b$. Khi đó, hàm số f tuần hoàn với chu kỳ $T = a - b > 0$. Ta có

$$f(x) = f(x+T) = f(x+2T) = \cdots = f(x+nT)$$

với $n \in \mathbb{Z}^+$. Cố định số x, ta áp dụng đánh giá đề cho thì

$$f(x) = f(x+nT) \geq c(x+nT) \implies n \leq \frac{f(x) - cx}{cT}.$$

Vì x cố định nên vế phải là hằng số, trong khi n có thể lớn tùy ý nên điều trên không thể xảy ra. Tương tự nếu có $b > a$, vì thế nên $a = b$. $\square$

Chú ý rằng các điều kiện trên không nhất thiết phải đúng với mọi $x > 0$ mà chỉ cần đúng với $x > 0$ đủ lớn. Bổ đề này thường ứng dụng để chứng minh tính đơn ánh của hàm số. Ta thử áp dụng vào giải quyết bài toán sau đây:

Bài toán 1. (*Đề APMO 2023*)

Với $c > 0$, tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện

$$f((c+1)x + f(y)) = f(x+2y) + 2cx$$

với mọi $x, y > 0$.

Lời giải. (theo bạn Đặng Đình Trung, THPT Gia Định TPHCM) Nếu tồn tại $y_0 > 0$ để $2y_0 - f(y_0) < 0$, chọn x_0 để $cx_0 = 2y_0 - f(y_0)$, thì thay vào đề bài là có vô lý. Suy ra $f(y) \geq 2y$ với mọi $y > 0$.

Giả sử có $f(a) = f(b)$ thay y lần lượt bởi a, b, ta được

$$f((c+1)x + f(a)) = f(x+2a) + 2cx,$$

$$f((c+1)x + f(b)) = f(x+2b) + 2cx.$$

Do đó, so sánh hai đẳng thức, ta được $f(x+2a) = f(x+2b)$ nên áp dụng Bổ đề 1 đã nêu với chú ý $f(x) \geq 2x$ thì có ngay $a = b$ hay f đơn ánh.

Tiếp theo, ta dùng phương pháp thêm biến, thay y bởi $(c+1)y + f(z)$ thì

$$f((c+1)x + f((c+1)y + f(z))) = f(x + 2(c+1)y + 2f(z)) + 2cx$$

Ta biến đổi vế trái như sau

$$\begin{aligned} f((c+1)x+f(y+2z)+2cy) &= f((c+1)\left(x+\frac{2cy}{c+1}\right)+f(y+2z)) \\ &= f(x+\frac{2cy}{c+1}+2y+4z)+2c\left(x+\frac{2cy}{c+1}\right) \\ &= f(x+2y+4z+\frac{2cy}{c+1})+2cx+2c\cdot\frac{2cy}{c+1}. \end{aligned}$$

So sánh với vế phải, ta được

$$f(x+2y+4z+\frac{2cy}{c+1})+2c\cdot\frac{2cy}{c+1}=f(x+2(c+1)y+2f(z)).$$

Do đó

$$f((c+1)\frac{2cy}{c+1}+f(\frac{x}{2}+y+2z))=f(x+2(c+1)y+2f(z)),$$

vì tính đơn ánh nên có

$$2cy+f(\frac{x}{2}+y+2z)=x+2(c+1)y+2f(z)$$

hay

$$f(\frac{x}{2}+y+2z)=x+2y+2f(z).$$

Đặt $\frac{x}{2}+y=2t>0$ thì có $f(2t+2z)=4t+2f(z)$. Đổi vai trò t,z và so sánh hai vế phải, ta được

$$4t+2f(z)=4z+2f(t),\ \forall t,z>0$$

từ đây dễ dàng suy ra $f(x)-2x=d\geq 0$ là hằng số. Thay vào đề bài, ta tìm được $d=0$ nên $f(x)=2x$, $\forall x>0$ là tất cả hàm số cần tìm. □

Nhận xét. *Đoạn xử lý thêm biến khá rắc rối nhưng lại là các kỹ thuật quen thuộc ở Việt Nam. Nếu bạn đọc tham khảo đáp án chính thức của đề thi hoặc các thảo luận trên diễn đàn aops thì sẽ thấy các lời giải khó hơn nhiều. Vấn đề mấu chốt là bước đầu có chứng minh được tính đơn ánh để làm cơ sở.*

Cách khác. (theo bạn Nguyễn Trần Trung, THPT Chuyên Lào Cai) Tiếp tục ý tưởng như trên khi đã chứng minh được $f(x)\geq 2x$, $\forall x>0$, ta có

$$f((c+1)x+f(y))\geq 2(c+1)x+2f(y).$$

Vì thế nên $f(x+2y)+2cx\geq 2(c+1)x+2f(y)$ hay $f(x+2y)\geq 2x+2f(y)$. Với $y>0$, xét $x>2y$ thì thay $x\to x-2y$ thì có

$$f(x)\geq 2(x-2y)+2f(y)\implies f(x)-2x\geq 2(f(y)-2y).$$

Đánh giá trên đúng với mọi $x>2y>0$. Để ý rằng $(c+1)x+f(y)>2y$ nên áp dụng đánh giá trên khi thay $x\to(c+1)x+2y$, ta có

$$f((c+1)x+f(y))-((c+1)x+f(y))\geq 2(f(y)-2y)$$

hay

$$f(x+2y)+2cx-((c+1)x+f(y)) \geq 2(f(y)-2y).$$

Rút gọn được $f(x+2y) \geq 2x+4f(y)-4y$ với mọi $x>2y$. Từ đó, tiếp tục thay $x \to x-2y$ thì

$$f(x) \geq 2(x-2y)+4f(y)-4y.$$

Như thế thì $f(x)-2x \geq 4(f(y)-2y)$ với mọi $x>2y>0$. Từ đây, dễ dàng quy nạp được

$$f(x)-2x \geq 2^n(f(y)-2y)),\ \forall n \in \mathbb{Z}^+, x>2y>0.$$

Như thế, nếu tồn tại y_0 sao cho $f(y_0)-2y_0=M>0$ thì xét $x>2y_0$, theo đánh giá trên thì

$$f(x)-2x \geq 2^n \cdot M,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Dễ thấy đây là điều vô lý, vì thế nên phải có $f(x)=2x$ với mọi $x>0$. □

Bài toán 2. (*Trường Đông miền Nam 2019*)

Tìm tất cả hàm $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy,\ \text{với mọi } x,y>0.$$

Lời giải. Đặt $a=f(1)$. Trong phương trình đề cho, thay $x=1$, ta được

$$f(f(y)+a) = 2a+y,\ \text{với mọi } y>0.$$

Điều này chứng tỏ f toàn ánh trên $(2a,+\infty)$. Tiếp tục thay y bởi $f(y)+a$ vào phương trình trên, ta suy ra

$$f(f(f(y)+a)+a) = 2a+f(y)+a,$$

hay

$$f(y+3a) = y+3a,\ \text{với mọi } y>0.$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$f(y+3na) = y+3na,\ \text{với mọi } y>0, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Trong phương trình đề cho, thay y bởi $y+3a$ và kết hợp với phương trình đó, ta có

$$f(xf(y)+f(x)+3ax) = 2f(x)+xy+3ax,\ \text{với mọi } x,y>0.$$

Với mỗi $x,z>0$, tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ đủ lớn và $y>0$ thỏa $xf(y)+f(x)=z+3na$, ta suy ra

$$f(z+x) = f(z)+x = f(x)+z,\ \text{với mọi } x,z>0.$$

Do đó $f(x)=x+c$. Thử lại ta suy ra $f(x)=x+1$ là nghiệm duy nhất. □

Nhận xét. *Cách thêm biến cho bài này có thể là cách tốt nhất để tiếp cận, vì hầu như không thể lập luận với chỉ hai biến ban đầu. Ý tưởng mấu chốt là xây dựng được hai giá trị có tỉ lệ có thể lớn tùy ý mà f tại chúng bằng nhau, từ đó cố định một số và đưa số còn lại ra vô cực. Cách làm trên còn gọi là kỹ thuật "nửa tuần hoàn".*

Tiếp theo, ta phát biểu bổ đề rất mạnh sau đây:

BỔ ĐỀ 2. Xét các hàm số $f, g, h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(g(x) + y) = h(x) + f(y),\ \forall x, y > 0.$$

Khi đó, $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ là hằng số.

Chứng minh. Thật vậy, thay y bởi $y - g(x)$ trong giả thiết thì

$$f(y - g(x)) = f(y) - h(x)$$

với mọi $x > 0, y > g(x)$. Với $x, y > 0$ và p, q nguyên dương mà $p \cdot g(x) - q \cdot g(y) > 0$ thì

$$f(z + p \cdot g(x) - q \cdot g(y)) = f(z) + p \cdot h(x) - q \cdot h(y),\ \forall z > 0.$$

Suy ra với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$ thì cũng có

$$f(z + k(p \cdot g(x) - q \cdot g(y))) = f(z) + k(p \cdot h(x) - q \cdot h(y)).$$

Do đó nếu $p \cdot h(x) - q \cdot h(y) < 0$ thì chọn k đủ lớn, ta có vế phải âm, vô lý. Vì thế nên phải có $p \cdot h(x) \geq q \cdot h(y)$. Vì thế nên

$$\frac{g(x)}{g(y)} > \frac{q}{p} \implies \frac{h(x)}{h(y)} \geq \frac{q}{p}.$$

Giả sử rằng có $x, y > 0$ để $\dfrac{g(x)}{g(y)} > \dfrac{h(x)}{h(y)}$ thì có thể chọn được các số $p, q \in \mathbb{Z}^+$ để

$$\frac{g(x)}{g(y)} > \frac{q}{p} > \frac{h(x)}{h(y)},$$

mâu thuẫn với nhận xét ở trên. Vì vậy ta luôn có

$$\frac{g(x)}{g(y)} \leq \frac{h(x)}{h(y)} \text{ hay } \frac{g(x)}{h(x)} \leq \frac{g(y)}{h(y)}$$

với mọi $x, y > 0$. Đổi vai trò x, y, ta thấy tỷ số $\dfrac{g(x)}{h(x)}$ phải là hằng số. □

Khi áp dụng bổ đề này, ta có thể giải nhanh chóng bài toán sau đây:

Bài toán 3. *(Đề thi HSG quốc gia 2022)*

Tìm tất cả hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{f(x)}{x} + y\right) = 1 + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Lời giải. Bài toán này chỉ là trường hợp đặc biệt của Bổ đề 2 khi chọn $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ và $h(x) = 1$. Trong phần lời giải này, ta dùng một cách khác nhẹ nhàng hơn không sử dụng Bổ đề 2, tuy nhiên có khai thác các yếu tố tuần hoàn và các số nguyên dương cũng tham gia rất hiệu quả.

Ta sẽ chỉ ra rằng $\dfrac{f(x)}{x}$ là hằng số hay tồn tại $c > 0$ để $f(x) = cx$ với mọi $x > 0$. Thay vào đề bài bài có ngay $c = 1$ hay $f(x) = x$ với mọi $x > 0$.

Giả sử phản chứng rằng tồn tại $a, b \in \mathbb{R}^+$ sao cho $\dfrac{f(a)}{a} \neq \dfrac{f(b)}{b}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $\dfrac{f(a)}{a} < \dfrac{f(b)}{b}$. Lần lượt thay $x = a$ và $x = b$ vào đề bài và so sánh, ta được

$$f\left(y + \frac{f(a)}{a}\right) = 1 + f(y) = f\left(y + \frac{f(b)}{b}\right), \ \forall y \in \mathbb{R}^+.$$

Do đó, nếu đặt $T = \dfrac{f(b)}{b} - \dfrac{f(a)}{a}$ thì $f(x + T) = f(x)$, $\forall x > \dfrac{f(a)}{a}$. Do đó, dãy số tuần hoàn với chu kỳ T. Ngoài ra, ta có

$$f\left(y + n \cdot \frac{f(a)}{a}\right) = f\left(y + (n-1) \cdot \frac{f(a)}{a}\right) + 1 = \cdots = f(y) + n > n,$$

suy ra $f(x) > n$, $\forall x > n \cdot \dfrac{f(a)}{a}$.

Với số thực dương x, chọn $n = \lfloor f(x) \rfloor + 2 > f(x)$ và số nguyên dương m thỏa mãn $x + mT > n \cdot \frac{f(a)}{a}$, như thế ta có

$$f(x) = f(x + mT) > n > f(x),$$

điều này mâu thuẫn và bài toán được giải quyết. $\square$

Tiếp theo, ta xét một bài toán khó và có sử dụng Bổ đề 2 nêu trên.

Bài toán 4. *(International FE Olympiad 2021)*

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(f(x)f(f(x)) + y) = xf(x) + f(y), \ \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Trước hết, theo Bổ đề 2 thì tồn tại $c > 0$ sao cho $f(f(x)) = cx$, $\forall x > 0$ nên thay vào có

$$f(cxf(x) + y) = xf(x) + f(y).$$

Thay x bởi $f(x)$ vào đề bài thì được

$$f(cx \cdot cf(x) + y) = cxf(x) + f(y), \forall x, y > 0.$$

Tính f hai vế thì được

$$f(cxf(x) + f(y)) = f(f(cx \cdot cf(x) + y)) = c^3.xf(x) + cy.$$

Thay y bởi $f(y)$ vào đề bài thì có $f(cxf(x)+f(y)) = xf(x)+cy$, so sánh hai vế phải của hai đẳng thức này, ta thu được

$$c^3 \cdot xf(x) + cy = xf(x) + cy$$

nên $c = 1$ và $f(f(x)) = x$ với mọi $x > 0$. Do đó, ta viết lại đề bài thành

$$f(xf(x) + y) = xf(x) + f(y) \tag{†}$$

và từ giả thiết, ta suy ra

$$f(xf(x) + f(y)) = xf(x) + y.$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$f(y) + xf(x) \geq y, \forall x, y > 0.$$

Giả sử có x_0, y_0 để $y_0 > f(y_0) + x_0 \cdot f(x_0)$, viết lại thành

$$\frac{y_0}{x_0 f(x_0)} > \frac{f(y_0)}{x_0 f(x_0)} + 1.$$

Đặt $n = \left\lceil \dfrac{f(y_0)}{x_0 f(x_0)} \right\rceil$ thì ta có

$$\frac{y_0}{x_0 f(x_0)} > \frac{f(y_0)}{x_0 f(x_0)} + 1 > n \geq \frac{f(y_0)}{x_0 f(x_0)}$$

nên

$$y_0 > nx_0 f(x_0) \geq f(y_0).$$

Từ (†), ta thực hiện phép thế liên tiếp thì được

$$f(n \cdot x_0 f(x_0) + y_0) = n \cdot x_0 f(x_0) + f(y_0).$$

Thay y_0 bởi $y0 - n \cdot x_0 f(x_0) > 0$ vào thì được

$$f(y_0) = n \cdot x_0 f(x_0) + f(y_0 - n \cdot x_0 f(x_0)) > nx_0 f(x_0),$$

đây là mâu thuẫn. Do đó

$$f(y)+xf(x)\geq y,\ \forall x,y>0.$$

Ta thay y bởi$f(y)$ vào đánh giá trên và chú ý $f(f(y))=y$ thì có

$$y+xf(x)\geq f(y)\implies y^2+xyf(x)\geq yf(y).$$

Cho $y\to 0^+$ thì $\lim(yf(y))=0^+$ nên trong bất đẳng thức $f(y)+xf(x)\geq y$, ta cho $x\to 0^+$ thì có $f(y)\geq y$. Mà $y+xf(x)\geq f(y)$ nên lại cho $x\to 0^+$ nên cũng có $y\geq f(y)$ vì thế nên $f(y)=y$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy nên tất cả hàm số cần tìm là $f(x)=x,\ \forall x>0.$ □

Để kết thúc phần này, ta xét một bài toán khá thử thách sau đây. Đây là một bài mà tác giả phát triển từ bài toán trong đề Balkan MO Shortlist cũ. Tác giả rất mong nhận được cách giải gọn gàng hơn cho bài toán này từ bạn đọc.

Bài toán 5. *(Phát triển BMO Shortlist)*

Tìm tất cả số thực m sao cho tồn tại hàm $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(x+2022f\left(y\right)\right)=xf\left(x\right)+f\left(2023y\right)+mx,\ \forall x,y>0.$$

Lời giải. (theo bạn Mai Trung Nguyên, cựu HS THPT Chuyên Bảo Lộc) Nếu $m<0$ thì ta có thể chọn $f\left(x\right)\equiv -m$ với mọi $x>0$ thì thỏa mãn đề bài. Ta sẽ chỉ ra rằng với $m\geq 0$ thì không tồn tại hàm số nào thỏa mãn.

Thật vậy, xét $m\geq 0$, nếu $\exists y_0$ để $f\left(y_0\right)<\dfrac{2023}{2022}y_0$ thì thay $x=2023y_0-2022f(y_0)$ và $y=y_0$, ta sẽ có mâu thuẫn. Vì thế nên

$$f\left(y\right)\geq\frac{2023}{2022}y,\ \forall y>0.$$

Giả sử tồn tại $a>b>0$ sao cho $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ thì thay $x=a,x=b$, giữ nguyên y và so sánh, ta được

$$\begin{cases}f(a+2022f(y))=af(a)+f(2023y)+ma\\ f(b+2022f(y))=bf(b)+f(2023y)+mb\end{cases}.$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên, ta có

$$f(a+2022f(y))-f(b+2022f(y))=(a-b)f(a)+m(a-b)$$

hay

$$f(a+2022f(y))=f(b+2022f(y))+c$$

với $c=(a-b)(f(a)+m)>0.$

Thay $y = a + 2022f(y)$ vào đề, để cho gọn, đặt $u = 2022 \cdot 2023$, ta được

$$f\left(x + 2022f\left(b + 2022f\left(y\right)\right) + 2022c\right) = xf\left(x\right) + f\left(2023a + uf\left(y\right)\right) + mx.$$

Thay x bởi $x + 2022c$ và y bởi $b + 2022f(y)$, ta được

$$\begin{aligned} & f\left(x + 2022f\left(b + 2022f\left(y\right)\right) + 2022c\right) \\ & = \left(x + 2022c\right) f\left(x + 2022c\right) + f\left(2023b + uf\left(y\right)\right) + m\left(x + 2022c\right). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} xf\left(x\right) = & \left(x + 2022c\right) f\left(x + 2022c\right) + 2022mc \\ & + f\left(2023b + uf\left(y\right)\right) - f\left(2023a + uf\left(y\right)\right). \end{aligned}$$

Cố định $x, y > 0$, đặt $d = 2022mc + f\left(2023b + uf\left(y\right)\right) - f\left(2023a + uf\left(y\right)\right)$ là một số thực cố định. Từ đó ta được

$$\begin{aligned} xf\left(x\right) & = \left(x + 2022c\right) f\left(x + 2022c\right) + d \\ & = \left(x + 2022nc\right) f\left(x + 2022nc\right) + nd \\ & \geq \left(x + 2022nc\right)^2 + nd, \end{aligned}$$

với n là một số nguyên dương bất kì.

Từ đây, cho $n \to +\infty$ thì vế phải của biểu thức trên sẽ tiến tới vô cực, điều này vô lý. Vì thế nên nếu có $f(a) = f(b)$ thì phải có $a = b$ nên f đơn ánh.

Trong đề bài, thay $y \to \dfrac{y + 202f(z)}{2023}$ thì được

$$f\left(x + 2022f\left(\frac{y + 2022f\left(z\right)}{2023}\right)\right) = x\left(f\left(x\right) + m\right) + y\left(f\left(y\right) + m\right) + f\left(2023z\right).$$

Đổi vai trò x, y, cho $z = 1$ và chú ý $f\left(x\right)$ đơn ánh, ta được

$$x + 2022f\left(\frac{y + 2022f\left(1\right)}{2023}\right) = y + 2022f\left(\frac{x + 2022f\left(1\right)}{2023}\right)$$

Từ đó suy ra

$$f\left(x\right) = \frac{2023}{2022}x - q, \forall x > q = \frac{2022f\left(1\right)}{2023}$$

Trong đề bài, cho $x > y > \dfrac{2022f\left(1\right)}{2023}$ thì được

$$x + 2023y - 2023q = \frac{2023}{2022}x^2 - qx + \frac{2023y^2}{2022} - q + mx$$

(mẫu thuẫn khi x đủ lớn). Vì thế nên không tồn tại hàm số khi $m \geq 0$. $\square$

3) Khai thác tính đơn điệu

Tiếp theo, ta xét một số bài toán quy về cộng tính hoặc gần cộng tính thông qua một số biến đổi trên tập số nguyên, từ việc vận dụng tính đơn điệu có thể giải quyết dứt điểm bài toán. Ta bắt đầu bằng bài toán khá kinh điển như sau.

Bài toán 6. *(Đề IMC 1999)*

Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn

$$f(x)^2 \geq f(x+y)[f(x)+y] \quad \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f như đề bài. Ta viết lại thành

$$[f(x)+y][f(x)-f(x+y)] \geq yf(x), \, \forall x, y > 0.$$

Từ đây, ta có

$$f(x) - f(x+y) \geq \frac{y \cdot f(x)}{f(x)+y} > 0, \, \forall x, y > 0.$$

Từ đó suy ra f là một hàm giảm thực sự trên $\mathbb{R}^+$. Bây giờ, cố định $x > 0$ và chọn số nguyên dương n sao cho $nf(x+1) \geq 1$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{k}{n}\right) - f\left(x+\frac{k+1}{n}\right) &\geq \frac{f(x+\frac{k}{n}) \cdot \frac{1}{n}}{f(x+\frac{k}{n}) + \frac{1}{n}} \\ &> \frac{f(x+1) \cdot \frac{1}{n}}{f(x+1)+\frac{1}{n}} \geq \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

với mọi $k = 0, 1, ..., n-1$. Cộng tất cả các bất đẳng thức thu được lại, vế theo vế, ta có với $x > 0$ thì

$$f(x) - f(x+1) > \frac{1}{2} \implies f(x+1) < f(x) - \frac{1}{2}.$$

Cố định số $x > 0$ nào đó và thực hiện đánh giá trên $2m$ lần với $m \in \mathbb{Z}^+$ thì

$$f(x+2m) \leq f(x) - m,$$

cho $m \to +\infty$ thì dễ có vế phải âm nên có điều vô lý vì $f(x) > 0$. Vậy không tồn tại hàm f thoả mãn. $\square$

Cũng trong đề IMC 1999, có một bài toán theo cấu trúc tương tự là hàm đơn điệu trên $\mathbb{R}^+$ thú vị không kém như sau:

Bài toán 7. *(Đề IMC 1999)*

Tìm tất cả các hàm số đơn điệu ngặt $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x,\ \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Lời giải. Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ thì $f\left(\dfrac{x}{g(x)}\right) = x$ và $g\left(\dfrac{x}{g(x)}\right) = g(x)$ thì thay $x \to \dfrac{x}{g(x)}$ thì có

$$g\left(\frac{x/g(x)}{g(x/g(x))}\right) = g(x/g(x)) \implies g\left(\frac{x}{g(x)^2}\right) = g(x).$$

Rõ ràng bằng quy nạp theo n nguyên dương, ta có ngay

$$g\left(\frac{x}{g(x)^n}\right) = g(x),\ \forall x > 0.$$

Do đó với mọi n nguyên dương thì

$$f\left(\frac{x}{g(x)^n}\right) = \frac{x}{g(x)^n} g\left(\frac{x}{g(x)^n}\right) = \frac{x}{g(x)^n} g(x) = \frac{x}{g(x)^{n-1}},\ \forall x > 0. \qquad (\dagger)$$

Trong đề, thay $x \to f(x)$ và dùng tính đơn điệu ngặt thì

$$f\left(\frac{f(x)^2}{f(f(x))}\right) = f(x) \implies \frac{f(x)^2}{f(f(x))} = x,\ \forall x > 0.$$

Do đó $\dfrac{f(f(x))}{f(x)} = \dfrac{f(x)}{x}$ nên $g(f(x)) = g(x)$ nên $g(xg(x)) = g(x)$ với mọi $x > 0$. Bây giờ đặt $t = xg(x)$ thì $g(t) = g(x)$ nên

$$g(xg(x)^2) = g(g(x) \cdot xg(x)) = g(tg(t)) = g(t) = g(x).$$

Từ đó bằng quy nạp, ta chứng minh được rằng với mọi n nguyên dương thì

$$g(xg(x)^n) = g(x),\ \forall x > 0.$$

Do đó

$$f(xg(x)^n) = xg(x)^n g(xg(x)^n) = xg(x)^n \cdot g(x) = xg(x)^{n+1},\ \forall x > 0.$$

Suy ra

$$f(xg(x)^{n-1}) = xg(x)^n,\ \forall x > 0, n \in \mathbb{Z}^+. \qquad (\dagger\dagger)$$

Ta sẽ chứng minh rằng $g(x)$ là hàm hằng, ta sẽ giải cho trường hợp f đơn điệu tăng, trường hợp f giảm thì thực hiện tương tự. Giả sử phản chứng rằng có $x_1 < x_2$ mà

$g(x_1) \neq g(x_2)$. Chú ý do f tăng ngặt nên $f(x_1) < f(x_2)$ và $x_1 g(x_1) < x_2 g(x_2)$. Bằng quy nạp, ta chỉ ra được rằng

$$x_1 g(x_1)^n < x_2 g(x_2)^n.$$

Thật vậy, giả sử có khẳng định đúng với n thì áp dụng (††) có

$$f(x_1 g(x_1)^n) < f(x_2 g(x_2)^n) \implies x_1 g(x_1)^{n+1} < x_2 g(x_2)^{n+1}.$$

Vì thế nên $1 < \dfrac{x_1}{x_2} < \left(\dfrac{g(x_2)}{g(x_1)}\right)^n$ với mọi n nguyên dương nên nếu như $g(x_2) < g(x_1)$ thì sẽ kéo theo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\right)^n = 0,$$

điều này vô lý. Do đó, ta phải có $g(x_1) < g(x_2)$. Lúc đó ta có

$$x_1 = f\left(\frac{x_1}{g(x_1)}\right) < f\left(\frac{x_2}{g(x_2)}\right) = x_2.$$

Do tính tăng nên có $\dfrac{x_1}{g(x_1)} < \dfrac{x_2}{g(x_2)}$ $(*)$. Do $0 < \dfrac{g(x_1)}{g(x_2)} < 1$ nên tồn tại số nguyên dương n đủ lớn để

$$\left(\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right)^n < \frac{x_1}{x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1}{g(x_1)^n} > \frac{x_2}{g(x_2)^n},$$

ta chọn n là số nhỏ nhất như thế.

- Nếu $n = 1$ thì $\dfrac{g(x_1)}{g(x_2)} < \dfrac{x_1}{x_2}$ nên $\dfrac{x_1}{g(x_1)} > \dfrac{x_2}{g(x_2)}$, mâu thuẫn với $(*)$.
- Nếu $n > 1$ thì dùng (†), ta có

  $$\frac{x_1}{g(x_1)^{n-1}} = f\left(\frac{x_1}{g(x_1)^n}\right) > f\left(\frac{x_2}{g(x_2)^n}\right) = \frac{x_2}{g(x_2)^{n-1}}.$$

  Như thế $\left(\dfrac{g(x_1)}{g(x_2)}\right)^{n-1} < \dfrac{x_1}{x_2}$ tức là $n-1$ cũng thỏa mãn, điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất đã nêu ở trên.

Do đó, trong mọi trường hợp ta đều có điều vô lý nên $g(x)$ phải là hàm hằng, suy ra với mọi $x > 0$ thì $f(x) = cx$ với $c > 0$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn, vậy nên $f(x) = cx,\ \forall x > 0$.

$\square$

Nhận xét. *Một điều thú vị là đáp án chính thức của bài này có đoạn bị sai, và nhiều tài liệu, lời giải khác cũng có tham khảo theo và sai tương tự:* ***https://www.imc-math.org.uk/imc1999/prob_sol1.pdf***

Tiếp theo, ta xét một số bài toán có thể quy về dạng gần cộng tính và có dùng đến tính đơn điệu để xây dựng trên $\mathbb{R}^+$. Ta có sử dụng một bổ đề sau đây:

BỔ ĐỀ 3. Xét hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm đồng biến (tương tự với nghịch biến), ngoài ra $f(x) = cx$ mọi $x \in \mathbb{Q}^+$ (trong đó $a > 0$) thì có $f(x) = cx$ với mọi $x \in \mathbb{R}^+$.

Chứng minh. Với mọi số thực $x_0 > 0$, chọn hai dãy số hữu tỷ $(a_n), (b_n)$ sao cho

$$a_n < x_0 < b_n \text{ và } \lim a_n = \lim b_n = x_0.$$

Vì tính trù mật của tập số hữu tỷ trong tập số thực nên luôn chọn được các dãy số như thế. Rõ ràng

$$f(a_n) < f(x_0) < f(b_n) \implies c \cdot a_n < f(x_0) < c \cdot b_n,$$

nên cho $n \to +\infty$, ta có $f(x_0) = cx_0$. Do đó, với mọi số thực $x > 0$ thì $f(x) = cx$. $\square$

Bài toán 8. *(Đề chọn đội tuyển PTNK 2018)*

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện sau với mọi $0 < x < y$:

i) $xf(y^2) < yf(x^2)$.

ii) $f(xf(y^2) - yf(x^2)) = (y - x)f(xy)$.

Lời giải. Theo giả thiết thì với mọi $y > x > 0$, ta đều có

$$xf(y^2) - yf(x^2) > 0 \implies \frac{f(y^2)}{f(x^2)} > \frac{y}{x} > 1.$$

Do đó,

$$y^2 > x^2 \Leftrightarrow y > x \Leftrightarrow f(y^2) > f(x^2)$$

nên hàm f đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}^+$. Trong đề bài, thay $y = x + 1$, ta có

$$f\left(xf((x+1)^2) - (x+1)f(x^2)\right) = f(x(x+1))$$

hay

$$xf((x+1)^2) - (x+1)f(x^2) = x(x+1).$$

Từ đó ta biến đổi được

$$\frac{f((x+1)^2)}{x+1} = \frac{f(x^2)}{x} + 1, \forall x > 0.$$

Thực hiện thao tác này nhiều lần, ta có

$$\frac{f((x+n)^2)}{x+n} = \frac{f(x^2)}{x} + n,\ \forall x > 0, n \in \mathbb{Z}^+$$

hay

$$xf((x+n)^2)-(x+n)f(x^2)=nx(x+n).$$

Trong đề bài, thay $y=x+n$, ta có

$$f\left(xf((x+n)^2)-(x+n)f(x^2)\right)=nf(x(x+n))$$

hay

$$f(nx(x+n))=nf(x(x+n)).$$

Với mọi $n\in\mathbb{Z}^+, y>0$, ta luôn chọn được $x>0$ để $x(x+n)=y$ nên ta có

$$f(ny)=nf(y),\ \forall n\in\mathbb{Z}^+, y\in\mathbb{R}^+.$$

Đặt $f(1)=a>0$, với mọi $n\in\mathbb{Z}^+$, cho $y=\frac{1}{n}$, suy ra

$$f(1)=nf\left(\frac{1}{n}\right)\implies f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a}{n}.$$

Do đó,

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}a, \forall m,n\in\mathbb{Z}^+$$

hay $f(x)=ax$, $\forall x\in\mathbb{Q}^+$. Thay vào biểu thức đã cho, ta có

$$\begin{cases} f\left(xf(y^2)-yf(x^2)\right)=a^2(xy^2-x^2y)=a^2(y-x)xy \\ (y-x)f(xy)=a(y-x)xy \end{cases}$$

nên $a=1$. Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=x$, $\forall x>0$. □

Bài toán 9. *(Đề chọn đội tuyển TPHCM 2021)*

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ khác hằng thỏa mãn điều kiện

$$f(ab+bc+ca)=f(a)f(b)+f(b)f(c)+f(c)f(a),\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}^+.$$

Lời giải. (theo bạn Phan Huỳnh Tuấn Kiệt, cựu HS THPT Chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM) Thay $c=1$ vào phương trình đã cho thì ta có

$$f(ab+a+b)=f(a)f(b)+f(a)f(1)+f(b)f(1);\quad \forall a,b\in\mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Thay $b=3$ vào đẳng thức (1),ta có

$$f(4a+3)=f(a)f(3)+f(a)f(1)+f(3)f(1);\quad \forall a\in\mathbb{R}^+.$$

Lại thay $b=1$ vào đẳng thức (1), ta có $f(2a+1)=2f(a)f(1)+f(1)^2;\quad \forall a\in\mathbb{R}^+$. Như thế thì

$$f(4a+3)=2f(2a+1)f(1)+f(1)^2=4f(1)^2f(a)+2f(1)^3+f(1)^2;\quad \forall a\in\mathbb{R}^+.$$

Từ đó ta suy ra

$$[f(3)+f(1)]\,f(a)+f(3)f(1)=4f(1)^2f(a)+2f(1)^3+f(1)^2;\ \forall a\in\mathbb{R}^+.$$

Nếu $f(3)+f(1)\neq 4f(1)^2$ thì rõ ràng f là hàm hằng, không thỏa mãn. Vì thế $f(3)+f(1)=4f(1)^2$ nên từ đẳng thức trên, đồng nhất hệ số, ta suy ra

$$f(3)+f(1)=4f(1)^2 \text{ và } f(3)f(1)=2f(1)^3+f(1)^2.$$

Từ đây suy ra $f(3), f(1)$ là nghiệm của phương trình

$$t^2-2f(1)t+2f(1)^3+f(1)^2=0$$

nên

$$f(1)^2-4f(1)^2+2f(1)^3+f(1)^2=0 \Leftrightarrow f(1)^2(f(1)-1)=0.$$

Từ đó ta có ngay $f(1)=1$. Tiếp theo, từ $f(3)+f(1)=4f(1)^2$, ta có ngay $f(3)=3$ và thay vào (1), ta có

$$f(ab+a+b)=f(a)f(b)+f(a)+f(b);\quad \forall a,b\in\mathbb{R}^+ \tag{2}$$

Ngoài ra $f(4a+3)=4f(a)+3$ và $f(2a+1)=2f(a)+1$. Từ (2), xét $x>b$ thì chọn $a=\dfrac{x-b}{b+1}$, ta có ngay $ab+a+b=x$ nên

$$f(x)=f(a)f(b)+f(a)+f(b)>f(b),$$

điều này chứng tỏ f là hàm đồng biến. Thay $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ vào đề bài,

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=3f\left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ nên } f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Thay $a=2$ và $b=\frac{1}{3}$ vào (2) thì

$$f(3)=f(2)f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(2),$$

nghĩa là $f(2)=2$. Thay $b=c=2$ vào đề bài,

$$f(4a+4)=4f(a)+4;\quad \forall a\in\mathbb{R}^+$$

nên

$$4f(a)+4=f(4a+4)=f\left(4\left(a+\frac{1}{4}\right)+3\right)=4f\left(a+\frac{1}{4}\right)+3.$$

Từ đây suy ra $f\left(a+\dfrac{1}{4}\right)=f(a)+\dfrac{1}{4}$, nghĩa là

$$f(a+1)=f\left(a+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{4}=\cdots=f(a)+1$$

với mọi a dương. Từ đây bằng quy nạp, ta suy ra được rằng $f(x+n)=f(x)+n$ với mọi số nguyên dương n và số thực dương x nên $f(n)=n$ với mọi số nguyên dương n. Thay $b\to n$ và $a\to \frac{m}{n+1}$ với $m,n\in\mathbb{Z}^+$ vào (2) thì

$$f(m+n)=f(n)f\left(\frac{m}{n+1}\right)+f\left(\frac{m}{n+1}\right)+f(n)\quad\text{hay}\quad f\left(\frac{m}{n+1}\right)=\frac{m}{n+1}.$$

Do đó $f(x)=x$ với mọi $x\in\mathbb{Q}^+$, mà f là một hàm tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$ nên dùng Bổ đề 3, ta có ngay $f(x)=x$ với mọi số thực dương x. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy $f(x)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ là tất cả hàm số cần tìm. □

Bài toán 10. (*Chọn đội tuyển KHTN 2011*)

Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+2y)-f(x-y)=3\left(f(y)+2\sqrt{f(x)f(y)}\right)$$

với mọi $x>y>0$.

Lời giải. Ta có $f(x+2y)>f(x-y)$ với mọi $x>y$, mà với mọi $a>b$ thì luôn tồn tại $x>y$ để $a=x+2y$ và $b=x-y$ nên có

$$f(a)=f(x+2y)>f(x-y)=f(b),$$

từ đó có ngay f tăng ngặt trên $\mathbb{R}^+$. Trong phương trình hàm đã cho, thay x bởi $z+y$ ta được

$$f(z+3y)-f(z)=3\left[f(y)+2\sqrt{f(z+y)f(y)}\right],\ \forall z,y>0. \tag{†}$$

Từ $f(z+y)>f(y)$, ta thấy $f(y)+2\sqrt{f(z+y)f(y)}>3f(y)$ nên luôn có

$$f(z+3y)-f(z)>9f(y).$$

Như thế, thay $z\to z+3(n-1)y$ với $n\in\mathbb{Z}^+$ thì ta có

$$f(z+3ny)-f(z+3(n-1)y)>9f(y).$$

Thực hiện các đánh giá tương tự cho $3,6,9,...,3n$ rồi cộng lại, ta có

$$f(z+3ny)-f(z)>9nf(y).$$

Do đó $f(z+3ny)>9nf(y)$ với mọi $z,y>0$ và $n\in\mathbb{Z}^+$. Cho $y=\dfrac{1}{3n}$ thì

$$f\left(\frac{1}{3n}\right)<\frac{f(z+1)}{9n},\ \forall z>0.$$

Cố định z, cho $n \to +\infty$ thì có ngay $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Mặt khác, trong (†) cho $y \to 0^+$ ta suy ra $\lim_{y\to 0^+} f(z+3y) = f(z)$. Do đó f liên tục phải tại z với mọi $z > 0$. Trong phương trình (†), cho $z \to 0^+$ ta được

$$f(3y) = 9f(y), \forall y > 0.$$

Lần lượt thay $z = y$ và $z = 3y$ vào phương trình (†) và tận dụng kết quả trên, ta có

$$f(4y) = 4f(y) + 6\sqrt{f(2y)f(y)},\ \forall y > 0$$

và

$$3f(2y) = 4f(y) + 2\sqrt{f(4y)f(y)},\ \forall y > 0.$$

Dễ dàng suy ra $f(2y) = 4f(y), \forall y > 0$. Đến đây, bằng quy nạp ta chứng minh được

$$f(ny) = n^2 f(y),\ \forall y > 0, n \in \mathbb{Z}^*.$$

Dẫn đến $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}f(1)$ và

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = m^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m^2}{n^2}f(1), \forall m, n \in \mathbb{Z}^*.$$

Như vậy, $f(x) = cx^2$, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$ (trong đó $c = f(1) > 0$). Vì f đồng biến trên $(0, +\infty)$ nên sử dụng Bổ đề 3, ta suy ra $f(x) = cx^2$, $\forall x > 0$.

Vậy nên ta tìm được $f(x) = cx^2, \forall x > 0$ (c là hằng số dương tùy ý). □

Nhận xét. *Chú ý rằng trong phương trình ban đầu, nếu ta cho $y \to 0^+$ ta được $\lim_{y\to 0^+} f(x-y) = f(x)$ thì cũng suy ra f liên tục trái tại $x > 0$ tùy ý nên f liên tục trên $(0, +\infty)$. Do đó, có thể dùng tính liên tục để chuyển từ $\mathbb{Q}^+$ sang $\mathbb{R}^+$ mà không cần dùng Bổ đề 3.*

Bài toán trên có thể được phát triển từ bài toán gốc sau đây (với kỹ thuật giải hoàn toàn tương tự): Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn đẳng thức

$$f(x+y) - f(x-y) = 4\sqrt{f(x)f(y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+, x > y.$$

Bài toán 11. (*Đề thi Arab Saudi 2017*)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sao cho với mọi $x, y > 0$ thì

i) $f(x) + f(y) \le \frac{f(x+y)}{2}$.

ii) $(x+y)\left[yf(x) + xf(y)\right] \ge xyf(x+y)$.

Lời giải. Từ ii), ta có

$$\frac{f(x)}{x}+\frac{f(y)}{y}\ge\frac{f(x+y)}{x+y},\ \forall x,y>0.$$

Thay $x=y$ vào các điều kiện i) và ii) đã cho, ta có với mọi $x>0$ thì

$$2f(x)\le\frac{f(2x)}{2}\text{ và }4x^2f(x)\ge x^2f(2x).$$

Do đó $f(2x)=4f(x)$ với mọi $x>0$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(nx)=n^2f(x).\tag{$\dagger$}$$

Với $n=1$ thì hiển nhiên khẳng định đúng. Giả sử khẳng định đúng đến n, ta xét với $n+1$ thì

- Nếu $n+1$ là chẵn thì ($\dagger$) đúng vì ta có thể đặt $n+1=2m$ và có

$$f(2m)=4f(m)=4m^2f(x).$$

- Nếu $n+1$ lẻ thì $n+2$ là số chẵn, ta có

$$\frac{f(x)}{x}+\frac{f((n+1)x)}{(n+1)x}\le\frac{f((n+2)x)}{(n+2)x}\text{ và }\frac{f(x)}{x}+\frac{f(nx)}{nx}\le\frac{f((n+1)x)}{(n+1)x}.$$

  Từ đó suy ra

$$\frac{f(x)}{x}+\frac{f((n+1)x)}{(n+1)x}\le(n+2)\frac{f(x)}{x}\text{ và }\frac{f(x)}{x}+n\frac{f(x)}{x}\le\frac{f((n+1)x)}{(n+1)x}.$$

  Đến đây kẹp lại thì có

$$f((n+1)x)=(n+1)^2f(x).$$

Đặt $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ thì $g(nx)=ng(x)$ và thay vào i) ta được

$$2(xg(x)+yg(y))\le(x+y)g(x+y)\le(x+y)(g(x)+g(y)).$$

nên

$$(x-y)(g(x)-g(y))\le0,$$

thì có $g(x)$ nghịch biến. Đến đây áp dụng Bổ đề 3 thì có ngay $g(x)$ là tuyến tính. Suy ra $f(x)=ax^2$ với $a\le0$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Vậy nên tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=ax^2$ với $a\le0$. □

Để khép lại phần này, ta xét một bài có kỹ thuật khá lạ như sau:

Bài toán 12. *(Đề thi Balkan MO 2022)*

Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f\left(y\right) + f\left(x\right), \forall x, y > 0.$$

Lời giải. Đặt $y = \dfrac{t}{f(x)^3}$ thì ta có

$$f(x+t) = x^3 f\left(\frac{t}{f(x)^3}\right) + f(x) \quad (\dagger)$$

với mọi $x, t > 0$. Từ đó, ta thấy f là hàm tăng ngặt.

Đặt $c = f(1)$. Nếu $c < 1$ thì thay $x = 1, y = \dfrac{1}{1-c^3}$ vào $(\dagger)$, chú ý rằng

$$y - yc^3 = 1 \Leftrightarrow yf(1)^3 + 1 = y$$

thì ta có

$$f(yf(1)^3 + 1) = f(y) = 1^3 f(y).$$

Do đó $f\left(1\right) = 0$, mâu thuẫn, vì thế nên $c > 1$. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng

$$f(1 + c^3 + \cdots + c^{3n}) = (n+1)c$$

với mỗi $n \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp.

Với $n = 0$ thì khẳng định hiển nhiên đúng. Giả sử khẳng định đúng đến n, trong $(\dagger)$ thay $x = 1$ và $t = c^3 + c^6 + \cdots + c^{3(k+1)}$ thì có

$$f(1 + c^3 + c^6 + \cdots + c^{3(k+1)}) = f\left(1 + c^3 + \cdots + c^{3k}\right) + f(1) = nc + c = (n+1)c.$$

Trong $(\dagger)$, thay $x = 1 + c^3 + \cdots + c^{3n-3}, t = c^{3n}$ thì được

$$(n+1)\,c = f(1 + c^3 + \cdots + c^{3n}) = (1 + c^3 + \cdots + c^{3n-3}) f\left(\frac{c^{3n}}{(n+1)^3}\right) + nc$$

hay

$$f\left(\frac{c^{3n}}{(n+1)^3}\right) = \frac{c}{(1 + c^3 + \cdots + c^{3n})^3} < c = f(1) \implies \frac{c^{3n}}{(n+1)^3} < 1.$$

Tuy nhiên điều này là vô lý với số nguyên dương n đủ lớn. Do đó $c = 1$. Trong $(\dagger)$, thay $x = 1$ thì được $f(y+1) = f(y) + 1$ nên quy nạp được$f(n) = n$ với mọi n nguyên dương. Với $m, n \in \mathbb{Z}^+$, đặt $x = n, y = q = \frac{m}{n}$ thì

$$mn^2 + n = f\left(qn^3 + n\right) = f\left(yf(x)^3 + x\right) = x^3 f\left(y\right) + f\left(x\right) = n^3 f\left(q\right) + n.$$

Suy ra $mn^2 = n^3 f(q)$ hay $f(q) = \frac{m}{n} = q$. Vì f tăng ngặt mà $f(q) = q$ với mọi $\mathbb{Q}^+$ nên theo Bổ đề 3 đã nêu, ta có ngay $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Dễ thấy hàm số này thỏa mãn đề bài. $\square$

4) Các dạng khác

Trong phần cuối này, ta xét một số bài toán vẫn dùng các yếu tố nguyên dương nhưng theo các cách khá đặc biệt.

Bài toán 13.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời

i) $f(x) + f(y) \leq \dfrac{f(x+y)}{4}$ với mọi $x, y > 0$;

ii) $\dfrac{f(x)}{y} + \dfrac{f(y)}{x} \geq \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) \dfrac{f(x+y)}{8}$ với mọi $x, y > 0$.

Lời giải. Kết hợp hai điều kiện đã cho, ta có

$$8\frac{xf(x) + yf(y)}{x+y} \geq f(x+y) \geq 4f(x) + 4f(y).$$

Thay $x = y$ thì được

$$\frac{8xf(x)}{x} \geq f(2x) \geq 8f(x)$$

nên đẳng thức phải xảy ra, tức là $f(2x) = 8f(x)$ với $x > 0$. Từ đánh giá trên, ta cũng có

$$8\frac{xf(x) + yf(y)}{x+y} \geq 4f(x) + 4f(y)$$

với mọi $x, y > 0$, ta biến đổi được thành $(x - y)(f(x) - f(y)) \geq 0$ với mọi $x, y > 0$. Vì thế nên $f(x) \geq f(y)$ với mọi $x \geq y$. Do đó, f là hàm không giảm. Vì $8f(x) = f(2x) \geq f(x)$ nên $f(x) \geq 0$ với mọi $x > 0$. Do đó

$$f(x+y) \geq 4f(x) + 4f(y) \geq 4f(x).$$

Đến đây, ta quy nạp được

$$f(x + ny) \geq 4^n f(x), \forall n \in \mathbb{Z}^+.$$

Từ đó, thay $y = \frac{1}{n}$ thì có $f(x+1) \geq 4^n f(x)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Nhưng nếu tồn tại $x_0 > 0$ để $f(x_0) > 0$ thì ta có

$$\frac{f(x_0 + 1)}{f(x_0)} \geq 4^n,$$

vô lý vì 4^n có thể nhận giá trị lớn tùy ý. Do đó $f(x) \equiv 0$ với mọi $x > 0$. Dễ thấy hàm số này thỏa mãn đề bài. $\square$

Bài toán 14. *(Đề kiểm tra trường Đông Vinh 2023)*

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn

$$f(x+f(y)) = f(x) + \frac{2x^3 f(y)}{f(x)} + f(y^2)$$

với $x, y > 0$.

Lời giải. Trước hết, giả sử tồn tại y_0 để $f(y_0) < y_0^2$ thì đặt $x = y_0^2 - f(y_0)$ hay $x + f(y_0) = y_0^2$. Thay vào đề bài, ta có ngay

$$f(x) + \frac{2x^3 f(y_0)}{f(x)} = 0,$$

vô lý. Vì thế $f(y) \geq y^2$ với mọi $y > 0$. Thay $x = y = 1$ vào đề và đặt $a = f(1) \geq 1$, ta có

$$f(1+a) = 2a + 2.$$

Từ đó suy ra

$$2a + 2 \geq (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2$$

nên $1 \geq a^2$, do đó phải có $a = 1$ nên $f(1) = 1$. Ta sẽ chứng minh $f(n) = n^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng quy nạp.

Thật vậy, với $n = 1$ thì khẳng định đúng.

Giả sử đã có $f(n) = n^2$, thay $x = n, y = 1$ vào đề, ta có

$$f(n+1) = f(n) + \frac{2n^3 f(1)}{f(n)} + f(1) = n^2 + \frac{2n^3}{n^2} + 1 = (n+1)^2.$$

Do đó, khẳng định đúng với $n + 1$. Theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định được chứng minh.

Trong đề bài, thay $y = n \in \mathbb{Z}^+$ thì $f(x+n^2) = f(x) + \frac{2x^3n^2}{f(x)} + n^4$ nên

$$f(x+n^2) - (x+n^2)^2 = f(x) - x^2 + \frac{2x^3n^2}{f(x)} - 2xn^2$$

với mọi $x > 0, n \in \mathbb{Z}^+$. Ta có

$$f(x) - x^2 + \frac{2x^3n^2}{f(x)} - 2xn^2 = f(x) - x^2 + 2xn^2\left(\frac{x^2}{f(x)} - 1\right) = (f(x) - x^2)\left(1 - \frac{2xn^2}{f(x)}\right).$$

Vì $f(x+n^2) - (x+n^2)^2 \geq 0$ nên ta cần có

$$(f(x) - x^2)\left(1 - \frac{2xn^2}{f(x)}\right) \geq 0$$

với $x > 0, n \in \mathbb{Z}^+$. Bây giờ giả sử tồn tại x_0 để $f(x_0) - x_0^2 > 0$ thì ta phải có $1 - \dfrac{2x_0n^2}{f(x_0)} > 0$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra

$$1 \geq \frac{2x_0n^2}{f(x_0)} \text{ hay } n^2 \leq \frac{f(x_0)}{2x_0},$$

tuy nhiên điều này không thể đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ và x_0 cố định được nên điều giả sử là sai. Do đó, ta luôn có $f(x) = x^2$ với mọi $x > 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy $f(x) = x^2$ là tất cả hàm số cần tìm. □

Nhận xét. *Ý tưởng gốc của bài toán này xuất phát từ một bài toán cũ dùng kỹ thuật $f(u) - f(v)$ toàn ánh là:*

$$f(x + f(y)) = f(x) + \frac{x}{2}f(2y) + f(f(y))$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Tuy nhiên, việc chuyển từ tập $\mathbb{R}$ sang tập $\mathbb{R}^+$ thì bài toán thử thách hơn nhiều, và có lẽ ở dạng gốc là không giải được, vì thế nên mới được điều chỉnh thành dạng như trên. Bài toán 14 cũng chính là cảm hứng để tác giả viết chuyên đề này. Ngoài ra, ta có thể phát triển ở dạng khó hơn, mời bạn đọc thử sức trong phần bài tập tự luyện.

Bài toán 15. (*Balkan MO 2023*)

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sao cho

$$f(x^{2023} + f(x)f(y)) = x^{2023} + yf(x)$$

với mọi $x, y > 0$.

Lời giải. Trước hết, ta chỉ ra được f song ánh trên $\mathbb{R}^+$. Thật vậy, giả sử có $y_1, y_2 > 0$ để $f(y_1) = f(y_2)$. Trong đề bài, thay y lần lượt bởi y_1, y_2 và so sánh hai vế phải, ta có ngay

$$x^{2023} + y_1f(x) = x^{2023} + y_2f(x)$$

nên $y_1 = y_2$. Vì thế nên f đơn ánh. Bây giờ xét số thực $s > 0$ tùy ý, xét $x > 0$ sao cho $x^{2023} < s$ thì đặt $y = \dfrac{s - x^{2023}}{f(x)}$, ta sẽ có ngay $f(x^{2023} + f(x)f(y)) = s$ nên có f toàn ánh.

Đặt $g(x) = \left(f^{-1}(x)\right)^{2023}$ và thay $x \to f^{-1}(t)$ và $y \to f^{-1}(x)$ vào đề thì có

$$f(g(t) + tx) = g(t) + tf^{-1}(x).$$

Tiếp tục thay $x \to f(x)$ và tính f^{-1} hai vế, ta có

$$f^{-1}(g(t) + tx) = g(t) + tf(x)$$

và thêm biến được

$$f(t_1t_2x + t_1g(t_2) + g(t_1)) = t_1f^{-1}(t_2x + g(t_2)) + g(t_1) = t_1t_2f(x) + t_1g(t_2) + g(t_1)$$

với $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Cho $t_1 = t_2 = 1$ vào đẳng thức trên, ta có

$$f(x + 2g(1)) = f(x) + 2g(1) \tag{1}$$

Lần lượt cho $(t_1, t_2) = (t, 1)$ và $(t_1, t_2) = (1, t)$ vào đẳng thức ở trên và so sánh, ta có

$$\begin{cases} f(tx + tg(1) + g(t)) = tf(x) + tg(1) + g(t) \\ f(tx + g(1) + g(t)) = tf(x) + g(1) + g(t) \end{cases} \tag{2}$$

Xét y đủ lớn và thay $x = \dfrac{y - (g(1) + g(t))}{t}$ vào (2) có

$$f(y + (t-1)g(1)) - f(y) = (t-1)g(1).$$

Với x, z tùy ỳ, chọn t để $z = (t-1)g(1)$ và $y = x + 2n \cdot g(1)$ với n nguyên dương đủ lớn thì

$$f(x + 2n \cdot g(1) + z) - f(x + 2n \cdot g(1)) = z$$

và sử dụng kết quả (1) nhiều lần thì có

$$f(x+z) - f(x) = z \implies f(x+z) - (x+z) = f(x) - x.$$

Đến đây dễ dàng thu được $f(x) - x = c$ là hàm hằng, mà f là song ánh trên $\mathbb{R}^+$ nên có ngay $f(x) = x$ với mọi $x > 0$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. $\square$

5) Bài tập tự luyện

Bài 1. *(Iran 2011) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(f(x) + 2y) = f(2x + y) + 2y, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Bài 2. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f\left(\sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Bài 3. *Tìm tất cả các hàm toàn ánh $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y)$$

với mọi $x, y > 0$.

Bài 4. *Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn*

$$f(x + f(x) + y) = f(2x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^+.$$

Bài 5. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f(x+2f(y))=f(x+y)+2y+2f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}^+.$$

Bài 6. *Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f(x+f(x)+y)=2f(x)+f(y),\ \forall x,y>0.$$

Bài 7. *Tìm tất cả các hàm số* $f:[1;+\infty)\to[1;+\infty)$ *sao cho*

i) $f(x)\geq x,\ \forall x\geq 1.$

ii) $f\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=x^2,\ \forall x\geq 1.$

Bài 8. *(Phát triển từ đề thi Con đường tơ lụa) Tìm tất cả các hàm số tăng ngặt* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn đồng thời các điều kiện*

i) $f(2x)\geq 2f(x)$ *với mọi* $x>0$;

ii) $f(f(x)f(y)+x)=f(xf(y))+f(x)$ *với mọi* $x,y>0$.

Bài 9. *Tìm số thực dương m nhỏ nhất để tồn tại duy nhất hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f(x+f(y))=f(x)+\frac{mx^5f(y)}{f(x)^2}+f(y^2)$$

với $x,y>0$.

Bài 10. *(Indian TST 2023) Tìm tất cả các hàm số* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *thỏa mãn*

$$f(x+y^2f(x^2))=f(xy)^2+f(x)$$

với mọi $x,y>0$.

Tài liệu tham khảo.

1. Lê Anh Vinh (chủ biên), Định hướng bồi dưỡng học sinh năng khiếu Toán, tập: Đại số, 2021.
2. Đoàn Quang Đăng, Hai bổ đề trong bài toán phương trình hàm trên tập các số thực dương, 2021.
3. Lê Phúc Lữ (chủ biên), Các bộ đề thi cấp khu vực và một số chuyên đề chọn lọc, 2020.
4. Amir Hossein Parvardi, Functional Equations in Mathematical Olympiad, 2018.
5. Nguyễn Trọng Tuấn, Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olimpic, 2004.
6. Đề thi trường Đông hướng tới kỳ thi VMO các năm.