FB Duong Hung Word Xinh

love

TOÁN CỰC XINH

THPT

10 11 12

TÁCH PHÂN DẠNG TOÁN ĐỀ TN BGD 2017-2023

TẬP 1 GIẢI TÍCH

Zalo 0774860155

Ghi Chú!

MỤC LỤC

- ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM 3

§1- SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ 3

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 3

Ⓑ Dạng toán cơ bản 3

➽Dạng ①: Tính đơn điệu của f(x), g(u) biết công thức f(x) không GTTĐ ..3

➽Dạng ②: Tính đơn điệu của f(x), g(u),... biết các đồ thị không tham số..8

➽Dạng ③: Tính đơn điệu của f(x), g(u),...biết các BBT, BXD 11

➽Dạng ④: Tính đơn điệu f(x), g(u),... liên quan biểu thức đạo hàm 24

➽Dạng ⑤: Tính đơn điệu của hàm liến kết h(x) = f(u)+g(x) biết các BBT, BXD 25

➽Dạng ⑥: Tính đơn điệu của hàm g(x) khi biết đồ thị, BBT của f(u). 29

➽Dạng ⑦: Tìm tham số để hàm b1 trên b1 đơn điệu 30

➽Dạng ⑧: Tính đơn điệu của hs chứa dấu GTTĐ có tham số biết đồ thị, BBT 38

§2- CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 40

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 40

Ⓑ Dạng toán cơ bản 41

➽Dạng ①: Cực trị của một hàm số cho bởi một công thức và các câu hỏi liên quan 41

➽Dạng ②: Cực trị f(x), f(u),... biết các đồ thị không tham số 43

➽Dạng ③: Cực trị f(x), f(u),... biết các BBT,BXD không tham số 51

➽Dạng ④: Cực trị f(x),f(u),...liên quan biểu thức đạo hàm không tham số 69

➽Dạng ⑤: Cực trị của hs chứa dấu GTTĐ, hs cho bởi nhiều công thức khi biết đồ thị, BBT 78

➽Dạng ⑥: Tìm tham số để f(x) đạt cực trị tại 1 điểm x0 cho trước 84

➽Dạng ⑦: Tìm tham số liên quan đến cực trị của hàm đa thức bậc 3 thỏa mãn ĐK 87

➽Dạng ⑧: Tìm tham số liên quan đến cực trị của hàm đa thức bậc 4 trùng phương thỏa mãn ĐK (Không GTTĐ) 92

➽Dạng ⑨: Cực trị hàm hợp f(u), g(f(x)),hàm liên kết...có tham số 94

➽Dạng ⑩: Cực trị hàm hợp f(u), g(f(x)),hàm liên kết...có tham số 95

§3- GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT 103

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 103

Ⓑ Dạng toán cơ bản 103

➽Dạng ①: GTLN, GTNN của f(x) trên đoạn biết biểu thức f(x) 104

➽Dạng ②: GTLN, GTNN của f(x) trên khoảng biết biểu thức f(x) 115

➽Dạng ③: GTLN, GTNN của hàm số g(x) biết các BBT, đồ thị 116

➽Dạng ④: Bài toán ứng dụng, tối ưu, thực tế 118

Ghi Chú!

➽Dạng ⑤: GTLN, GTNN liên quan hàm số hợp g(f(x)),f(u(x)),... khi biết các đồ thị, BBT 121

➽Dạng ⑥: Tìm m để hs f(x) có GTLN, GTNN thỏa mãn đk cho trước 123

➽Dạng ⑦: Tìm tham số để hs chứa dấu GTTĐ, hàm hợp,hàm liên kết có GTLN, GTNN thỏa mãn đk cho trước 125

§4- ĐƯỜNG TIỆM CẬN 128

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 128

Ⓑ Dạng toán cơ bản 128

➽Dạng ①: Câu hỏi lý thuyết về tiệm cận, không chứa tham số 129

➽Dạng ②: Tiệm cận của đồ thị hàm số không chứa căn thức, không tham số 129

➽Dạng ③: Tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn, không chứa tham số 136

➽Dạng ④: Tiệm cận đồ thị hàm số f(x) dựa vào BBT không tham số 139

➽Dạng ⑤: Tiệm cận đồ thị hàm số f(x) dựa vào đồ thị không tham số 143

§5- KHẢO SÁT HÀM SỐ 144

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 144

Ⓑ Dạng toán cơ bản 146

➽Dạng ①: Nhận dạng hàm số - đồ thị 146

➽Dạng ②: Nhận dạng hàm số - BBT 164

➽Dạng ③: Tính chất đồ thị - hàm số - đạo hàm 168

➽Dạng ④: Liên quan giao điểm từ 2 đồ thị không chứa tham số 170

➽Dạng ⑤: Bài toán đưa về tìm số nghiệm của phương trình f(u)=0 (không tham số) 177

➽Dạng ⑥: Ứng dụng KSHS vào giải PT-BPT-BĐT-HỆ không tham số 198

➽Dạng ⑦: Dạng toán đưa về tìm tham số để PT, BPT, hệ có nghiệm, có k nghiệm khi biết các đồ thị, BBT 203

➽Dạng ⑧: Tìm tham số để BPT, hệ,. nghiệm đúng với mọi x thuộc D 209

➽Dạng ⑨: Tham số liên quan đến tương giao của các đồ thị thỏa mãn đk về độ dài, góc,diện tích,... 213

➽Dạng ⑩: Điểm đặc biệt, tính chất đặc biệt liên quan đồ thị hàm số 218

➽Dạng ⓫: Các bài toán liên quan đến phương trình của hàm ẩn. 221

Ghi Chú!

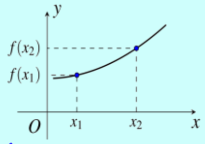
CHƯƠNG 1 - ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM

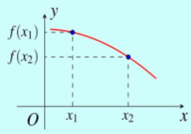
§1- SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. Tính đơn điệu của hàm số

- **Định nghĩa:** Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là hàm số đơn điệu trên K.
- **Hình dáng đồ thị:**
  - •Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị đi lên từ trái sang phải.
  - •Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị đi xuống từ trái sang phải.





2. Tính đơn điệu và dấu của đạo hàm

①. Định lí: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.

- •Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K.
- •Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K.

Chú ý: Mở rộng định lí:

- •Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.
- •Nếu $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\le 0$) với mọi x thuộc K và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên K.

②. Quy tắc xét tính đơn điệu của hàm số:

- •Bước 1: Tìm tập xác định
- •Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i $(i=1,2,..,n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- •Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- •Bước 4: Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Tính đơn điệu của f(x), g(u) biết công thức f(x) không GTTĐ

Câu 1: **(ĐTN 2017-Câu 4)** Cho hàm số $y=x^3-2x^2+x+1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};1\right)$.

Ghi Chú!

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

Câu 2: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 3)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y = \dfrac{x+1}{x+3}$. **B.** $y = x^3 + x$. **C.** $y = \dfrac{x-1}{x-2}$. **D.** $y = -x^3 - 3x$.

Lời giải

Chọn B

Vì $y = x^3 + x \Rightarrow y' = 3x^2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3: **(ĐMH 2017-Câu 3)** Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

$y = 2x^4 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 8x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra $y(0) = 1$

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ghi Chú!

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Câu 4: **(ĐTK 2017-Câu 6)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-1\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;+\infty\right)$

Lời giải

Chon B

Ta có $y'=\dfrac{3}{\left(x+1\right)^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{-1\right\}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$ và $\left(-1;+\infty\right)$.

Câu 5: **(ĐTK 2017-Câu 14)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. $y=3x^3+3x-2$. **B.** $y=2x^3-5x+1$.

C. $y=x^4+3x^2$. **D.** $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

Lời giải

Chon A

Hàm số $y=3x^3+3x-2$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$y'=9x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

Câu 6: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 8)** Cho hàm số $y=x^3+3x+2$. Mệnh đề nào dưới đây là **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chon C

Ta có:

+) TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

+) $y'=3x^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$, do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 7: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 13)** Hàm số $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $(-\infty;0)$

Lời giải

Chon A

Ghi Chú!

Ta có $y' = \dfrac{-4x}{\left(x^2+1\right)^2} < 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Câu 8: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 11)** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$; $y' < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x \in (0;2)$.

Câu 9: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 30)** Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Câu 10: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 21)** Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn B

Ta có $D=\mathbb{R}$, $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 11: **(ĐTK 2021-Câu 30)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{x+1}{x-2}$. **B.** $y=x^2+2x$.

C. $y=x^3-x^2+x$. **D.** $y=x^4-3x^2+2$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=x^3-x^2+x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $y'=3x^2-2x+1>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y=x^3-x^2+x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: **(TN BGD 2022-MD101)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4-x^2$. **B.** $y=x^3-x$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=x^3+x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y=x^3+x\Rightarrow y'=3x^2+1>0\,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 13: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=x^4-x^2$. **B.** $y=x^3+x$. **C.** $y=\dfrac{x-1}{x+2}$. **D.** $y=x^3-x$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=x^3+x\Rightarrow y'=3x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 14: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 36]** Hàm số $y=x^4-2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=4x^3-4x$

Cho $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$

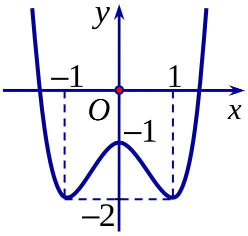
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

➽Dạng ②: Tính đơn điệu của f(x), g(u),... biết các đồ thị không tham số.

Câu 15: **(ĐTK 2019-Câu 4)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

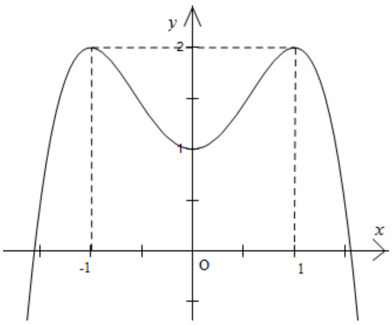
Chọn D

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị đi lên trong khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Quan sát đáp án chọn **D**

Câu 16: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 3)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;0)$.

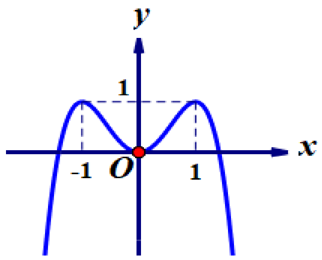
Lời giải

Chọn C

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 17: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 23)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

Ghi Chú!



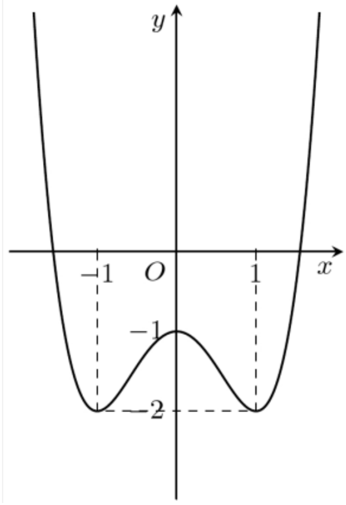
A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $(-1;0)$ đồ thị hàm số đi xuống theo hướng từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

Câu 18: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây



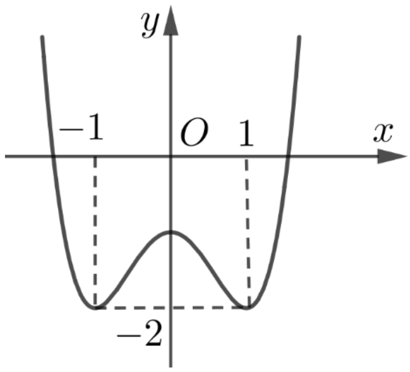
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn B

Trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên hàm số đã cho nghịch biến trên $(0;1)$.

Câu 19: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 14)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



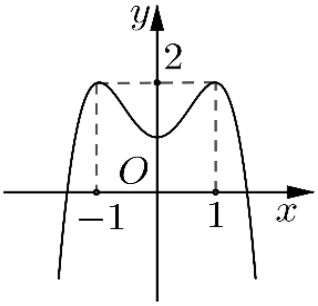
A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A.

Câu 20: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 8)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



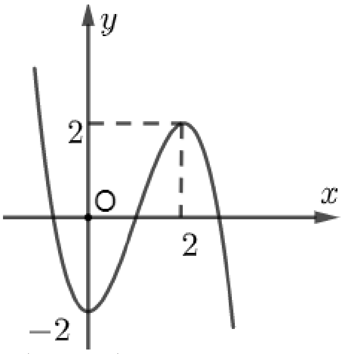
A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(-\infty;0\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

Câu 21: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 15)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

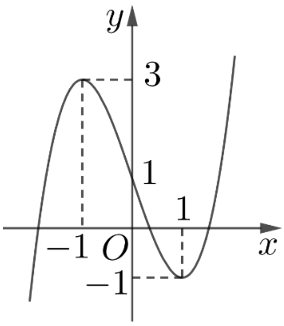
A. $(-\infty;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra hàm số đã cho đồng biến trong khoảng $(0;2)$.

Câu 22: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 24)** Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-1;1\right)$. **B.** $\left(1;+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;1\right)$. **D.** $\left(0;3\right)$.

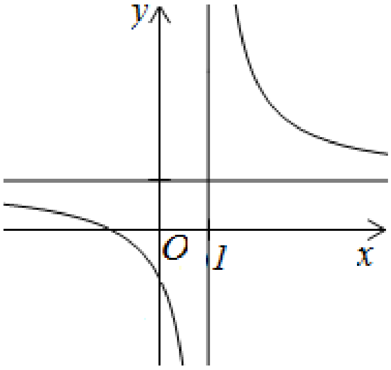
Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Quan sát đồ thị ta thầy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 23: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 28)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a,b,c,d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y'>0,\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $y'<0,\forall x\in\mathbb{R}$.
C. $y'>0,\forall x\neq 1$. **D.** $y'<0,\forall x\neq 1$

Lời giải

Chọn D

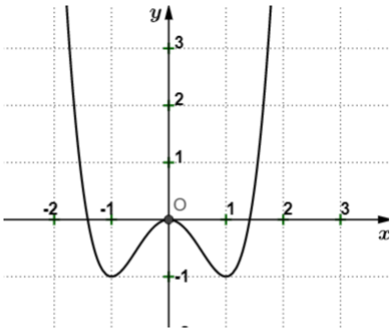
Dựa vào hình dáng của đồ thị ta được:

+ Điều kiện $x\neq 1$

+ Đây là đồ thị của hàm nghịch biến

Từ đó ta được $y'<0,\forall x\neq 1$..

Câu 24: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 19)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây



A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$ hàm số có đồ thị là đường đi lên. Do đó hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng này.

Dạng ③: Tính đơn điệu của f(x), g(u),...biết các BBT, BXD

Câu 25: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-2		0		2		$-\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Theo bảng xét dấu thì $y'<0$ khi $x\in(0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 26: **(ĐTK 2018-Câu 5)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$

Lời giải

Chọn A.

Câu 27: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 28: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 12)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 29: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 7)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 30: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 7)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 31: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 3)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)<0 \Leftrightarrow \forall x\in(0;2) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 32: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 14)** Cho hàm số $f\ \ x$ có bảng biến thiên như sau:.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	3	↘	1	↗	$+\infty$

.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $0;+\infty$. **B.** $0;2$. **C.** $-2;0$. **D.** $-\infty;-2$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên, suy ra trên khoảng $-2;0$ hàm số đồng biến.

Câu 33: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 15)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(-1;+\infty)$.. **C.** $(-\infty;-1)$.. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1;0)$..

Câu 34: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 10)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Vì trên $(0;1)$ hàm số có đạo hàm mang dấu âm.

Ghi Chú!

Câu 35: **(ĐTK 2020-L1-Câu 4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 36: **(ĐTK 2020-L2-Câu 10)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-1;0)$.

Câu 37: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 4)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 38: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 17)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	1	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 39: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 17)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	2	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT suy ra:HSĐB trên: $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$

HSNB trên: $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên: $(0;2)$.

Câu 40: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 16)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-3;0)$. **B.** $(-3;3)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(-\infty;-3)$

Lời giải

Chọn A

Từ BBT ta có hàm số $f(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-3;0)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 41: **(ĐTK 2021-Câu 3)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-1	↗	1	↘	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Nhận xét: $f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;2)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 42: **(TN BGD 2022-MD101)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$.. **B.** $(0;1)$.. **C.** $(-1;0)$.. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B.

Câu 43: **(TN BGD 2022-MD101)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

A. $y=x^4-2x^2$. **B.** $y=-x^3+3x$.

C. $y=-x^4+2x^2$. **D.** $y=x^3-3x$.

Lời giải

Chọn D

Từ BBT ta nhận thấy hàm số có hai điểm cực trị và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Do đó hàm số là hàm đa thức bậc ba có hệ số $a>0$..

Câu 44: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y=-x^3+3x$. **B.** $y=x^3-3x$.
C. $y=-x^4+2x^2$. **D.** $y=x^4-2x^2$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta có đây là đồ thị hàm số bậc 3 với hệ số $a>0$.

Câu 45: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D.

Câu 46: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=x^2-2x$. **D.** $y=-x^2+2x$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận thấy:

□Đây là hàm $y=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$.

□ $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty \Rightarrow a<0$.

Do đó hàm số thỏa mãn là $y=-x^3+3x$.

Câu 47: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C.

Câu 48: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=x^3-3x$. **B.** $y=x^2-2x$. **C.** $y=-x^3+3x$. **D.** $y=-x^2+2x$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên trên, ta nhận thấy đây là hàm số bậc ba có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d$ với $a\neq 0$.

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax^3+bx^2+cx+d\right)=-\infty \Rightarrow a<0$.

Do đó có duy nhất hàm số $y=-x^3+3x$ thoả mãn.

Câu 49: Hàm số $F(x)=\cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$?

A. $f_2(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $f_1(x)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $f_3(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $f_4(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\displaystyle\int -\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\cot x+C$.

Câu 50: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có đồ thị tăng trên khoảng $(-1;0)$, nên đó là đáp án đúng.

Câu 51: (DE MH BGD 2023 – Câu 16) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x\in(1;3)$ thì $f'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

Chọn D.

Câu 52: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 12] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 53: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 24] Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x+2}{x}$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

C. $y=x^4-3x^2$. **D.** $y=-2x^2+1$

Lời giải

Chọn B

Ta có : $y=-x^3+3x+1$ có $y'=-3x^2+3=0$ $\Leftrightarrow x=\pm1$. Vậy $x=\pm1$ là các điểm cực trị của hàm số.

Câu 54: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 12] Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 55: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 24] Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=\dfrac{x+2}{x}$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

C. $y=x^4-3x^2$. **D.** $y=-2x^2+1$

Lời giải

Chọn B

Ta có : $y=-x^3+3x+1$ có $y'=-3x^2+3=0$ $\Leftrightarrow x=\pm1$. Vậy $x=\pm1$ là các điểm cực trị của hàm số.

Câu 56: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 10] Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^3=0\Leftrightarrow x=0$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ suy ra hàm $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 57: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 28] Cho hàm số $y=(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Nhận thấy $f'(x)>0$ với $\forall x\in(2;+\infty)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 58: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 35) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$y'=-2f'(3-2x)<0\Leftrightarrow f'(3-2x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3<3-2x<-1\\3-2x>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3>x>2\\x<1\end{array}\right..$$

Vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên nghịch biến trên $(-2;1)$.

Câu 59: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 35) Cho hàm số $f(x)$ có bảng dấu $f'(x)$ như sau:.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

.

Hàm số $y=f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $2;3$. **B.** $0;2$. **C.** $3;5$. **D.** $5;+\infty$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ suy ra hàm số $y=f(5-2x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=f(5-2x)$ có $y'=-2.f'(5-2x),\forall x\in\mathbb{R}$.

$$y'\le 0\Leftrightarrow f'(5-2x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-3\le 5-2x\le -1\\5-2x\ge 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3\le x\le 4\\x\le 2\end{array}\right..$$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $-\infty;2$; $3;4$. Do đó B phương án chọn.

Ghi Chú!

Câu 60: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 33)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-2.f'(3-2x)$.

$y'>0 \Leftrightarrow f'(3-2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3-2x<-3\\-1<3-2x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\1<x<2\end{array}\right.$.

Suy ra hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.

Do đó hàm số $y=f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

Câu 61: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 34)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-3)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=f'(5-2x)=-2f'(5-2x)$.

$y'=0 \Leftrightarrow -2f'(5-2x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x=-3\\5-2x=-1\\5-2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=3\\x=2\end{array}\right.$.

$f'(5-2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x<-3\\-1<5-2x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<3\end{array}\right.$; $f'(5-2x)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x>1\\-3<5-2x<-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<2\\3<x<4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ghi Chú!

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng $(4;5)$.

➽Dạng ④: Tính đơn điệu f(x), g(u),... liên quan biểu thức đạo hàm

Câu 62: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 3)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 63: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Bảng (DE TN BGD 2022-MD 103)ét dấu:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 64: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x+1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x)<0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 65: **(DE MH BGD 2023 – Câu 32)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-2)^2(1-x)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

Ghi Chú!

A. $(1;2)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)>0\Leftrightarrow (x-2)^2(1-x)>0\Leftrightarrow \begin{cases}1-x>0\\(x-2)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow x<1$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Dạng ⑤: Tính đơn điệu của hàm liên kết h(x) = f(u)+g(x) biết các BBT, BXD

Câu 66: **(ĐTK 2019-Câu 48)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Ta có $y'=3f'(x+2)-3x^2+3$, $y'=0\Leftrightarrow f'(x+2)-x^2+1=0$ (1)

Đặt $t=x+2$, khi đó $(1)\Leftrightarrow f'(t)+\left(-t^2+4t-3\right)=0$

Để hàm số đồng biến trên khoảng K thì $y'\geq 0$, $\forall x\in K$ và $y'=0$ tại hữu hạn điểm

□Nếu $-t^2+4t-3<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<1\\t>3\end{array}\right.$. Khi đó điều kiện cần là $f'(t)>0$. Nên ta chọn $t>4$

$\Leftrightarrow x+2>4\Leftrightarrow x>2$ (Không có phương án nào).

□Nếu $-t^2+4t-3>0\Leftrightarrow 1<t<3$. Ta thấy trên khoảng $(1;3)$ thì $f'(t)\geq 0$.

Nên ta chọn $1<t<3\Leftrightarrow 1<x+2<3\Leftrightarrow -1<x<1$. Có đáp án C phù hợp.

Cách 2: Dựa vào cách 1, ta có thể làm nhanh như sau: Ý chính là chọn t sao cho $f'(t)$ và $g(t)=-t^2+4t-3$ đều dương. Ta thử các đáp án:

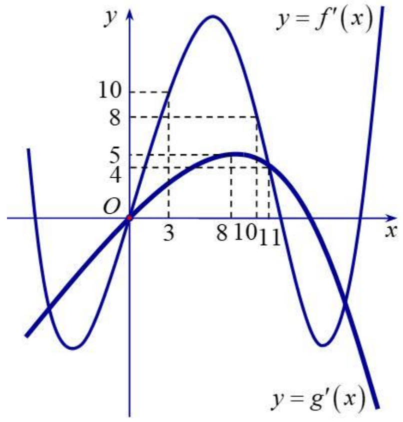
Với phương án A, chọn $x=2$. Suy ra $t=4$. Khi đó $f'(4)=0$, $g(4)=-3<0$ nên loại.

Với phương án B, chọn $x=-2$. Suy ra $t=0$. Khi đó, $f'(0)<0$, $g(0)=-3<0$ nên loại.

Ghi Chú!

Với phương án C, chọn $x=-\dfrac{1}{2}$. Suy ra: $t=\dfrac{3}{2}$. Khi đó, $f'\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$, $g\left(\dfrac{3}{2}\right)>0$ nên nhận.

Câu 67: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 50)** Cho hai hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$. Hai hàm số $y=f'\left(x\right)$ và $y=g'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y=g'\left(x\right)$.



Hàm số $h(x)=f\left(x+4\right)-g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5;\dfrac{31}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{9}{4};3\right)$. **C.** $\left(\dfrac{31}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(6;\dfrac{25}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ tại $A\left(a;10\right)$, $a\in\left(8;10\right)$. Khi đó ta có

$$\begin{cases} f\left(x+4\right)>10,\text{khi } 3<x+4<a \\ g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)\le 5,\text{khi } 0\le 2x-\dfrac{3}{2}<11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(x+4\right)>10,\text{khi } -1<x<4 \\ g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)\le 5,\text{khi } \dfrac{3}{4}\le x\le \dfrac{25}{4} \end{cases}.$$

Do đó $h'\left(x\right)=f'\left(x+4\right)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>0$ khi $\dfrac{3}{4}\le x<4$.

Kiểu đánh giá khác:

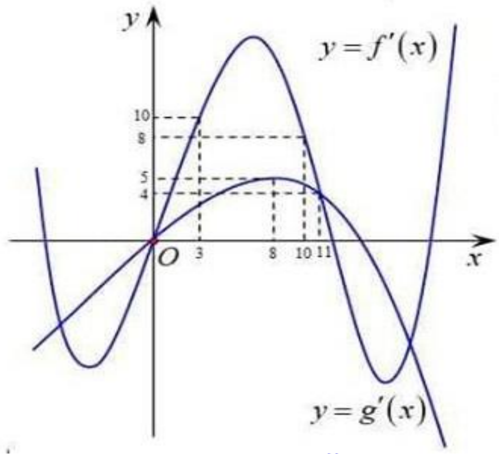
Ta có $h'\left(x\right)=f'\left(x+4\right)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)$.

Dựa vào đồ thị, $\forall x\in\left(\dfrac{9}{4};3\right)$, ta có $\dfrac{25}{4}<x+4<7$, $f\left(x+4\right)>f\left(3\right)=10$;

$3<2x-\dfrac{3}{2}<\dfrac{9}{2}$, do đó $g\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)<f\left(8\right)=5$.

Suy ra $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>0, \forall x\in\left(\dfrac{9}{4};3\right)$. Do đó hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{9}{4};3\right)$.

Câu 68: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 47)** Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó đường cong **đậm hơn** là đồ thị hàm số $y=g'(x)$. Hàm số $h(x)=f(x+7)-g\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(2;\dfrac{16}{5}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$. **C.** $\left(\dfrac{16}{5};+\infty\right)$. **D.** $\left(3;\dfrac{13}{4}\right)$.

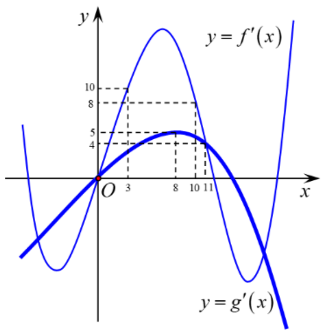
Lời giải

Chọn B

Kẻ đường thẳng $y=10$ cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại $A(a;10)$, $a\in(8;10)$. Khi đó ta có $\begin{cases} f(x+7)>10, \text{khi } 3<x+7<a \\ g\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)\le 5, \text{khi } 0\le 2x+\dfrac{9}{2}\le 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x+4)>10, \text{khi} -4<x<1 \\ g\left(2x+\dfrac{9}{2}\right)\le 5, \text{khi} -\dfrac{9}{4}\le x\le \dfrac{13}{4} \end{cases}$.

Do đó $h'(x)=f'(x+4)-2g'\left(2x-\dfrac{3}{2}\right)>0$ khi $-\dfrac{9}{4}\le x<1$.

Câu 69: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 44)** Cho hai hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$. Hai hàm số $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+3) - g\left(2x - \frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

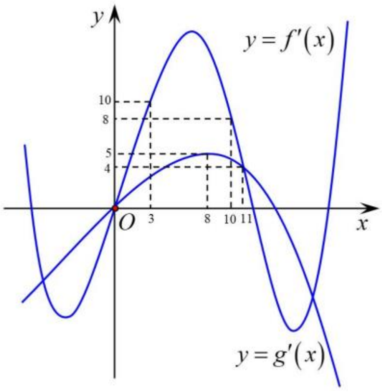
A. $\left(\frac{13}{4};4\right)$. **B.** $\left(7;\frac{29}{4}\right)$. **C.** $\left(6;\frac{36}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{36}{5};+\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x \in \left(\frac{13}{4};4\right) \Rightarrow \begin{cases} x+7 \in \left(\frac{25}{4};7\right) \Rightarrow f'(x+7) > 10 \\ 2x - \frac{7}{2} \in \left(3;\frac{9}{2}\right) \Rightarrow g'\left(2x - \frac{7}{2}\right) < 5 \end{cases} \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{13}{4};4\right)$.

Câu 70: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 46)** Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+6) - g\left(2x + \frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{21}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};1\right)$. **C.** $\left(3;\frac{21}{5}\right)$. **D.** $\left(4;\frac{17}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = f'(x+6) - 2g'\left(2x + \frac{5}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3;8)$ thì $g'(x) < 5$ và $f'(x) > 10$. Do đó $f'(x) > 2g'(x)$.

Như vậy: $g'\left(2x + \frac{5}{2}\right) < 5$ nếu $3 < 2x + \frac{5}{2} < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}$.

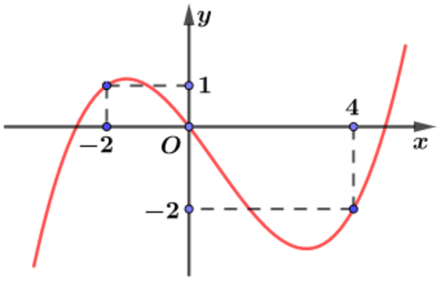
$f'(x+6) > 10$ nếu $3 < x+6 < 8 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Suy ra trên khoảng $\left(\frac{1}{4};2\right)$ thì $g'\left(2x + \frac{5}{2}\right) < 5$ và $f'(x+7) > 10$ hay $h'(x) > 0$.

Tức là trên khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

Ghi Chú!

Câu 71: **(ĐTK 2020-L1-Câu 50)** Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

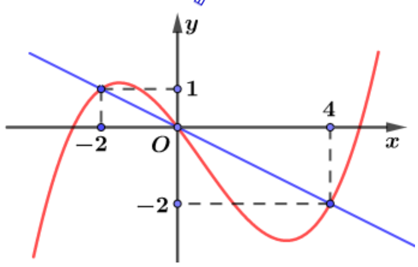
Chọn A

Ta có : $g(x)=f(1-2x)+x^2-x \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

Do đó : $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x)+2x-1\le 0 \Leftrightarrow f'(1-2x)\ge \frac{2x-1}{2}$

Đặt $t=1-2x$.

Vẽ đường thẳng $y=-\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0 \Rightarrow f'(t)\ge -\frac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le t\le 0 \\ t\ge 4 \end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\ge \frac{1-2x}{-2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le 1-2x\le 0 \\ 4\le 1-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1/2\le x\le 3/2 \\ x\le -3/2 \end{array}\right.$.

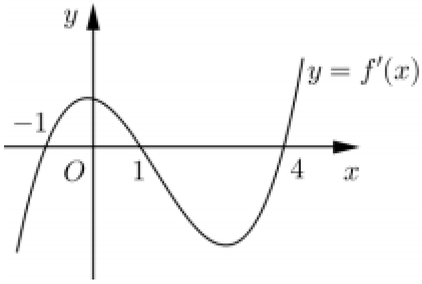
Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\frac{3}{2}\right)\subset\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Dạng ⑥: Tính đơn điệu của hàm g(x) khi biết đồ thị, BBT của f(u).

Ghi Chú!

Câu 72: **(ĐTK 2018-Câu 39)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(1;3)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(-\infty;-2)$

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Tính chất: $f(x)$ và $f(-x)$ có đồ thị đối xứng với nhau qua Oy nên $f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ thì $f(-x)$ sẽ đồng biến trên $(-b;-a)$.

Ta thấy $f'(x) < 0$ với $\left[\begin{array}{l} x \in (1;4) \\ x < -1 \end{array}\right.$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(1;4)$ và $(-\infty;-1)$ suy ra $g(x) = f(-x)$ đồng biến trên $(-4;-1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó $f(2-x)$ đồng biến biến trên khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{array}\right.$.

Ta có $\left(f(2-x)\right)' = (2-x)'.f'(2-x) = -f'(2-x)$.

Để hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến thì $\left(f(2-x)\right)' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{array}\right.$.

➧Dạng ⑦: Tìm tham số để hàm b1 trên b1 đơn điệu.

Câu 73: **(ĐTK 2020-L1-Câu 39)** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Ghi Chú!

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x)>0\,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\ m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\le 0.$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-1;0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 74: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 31)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì
$y'\ge 0\Leftrightarrow -m^2+2m+3\ge 0\Leftrightarrow m\in[-1;3]$

Xét tại $m=-1;m=3$ thấy không thỏa mãn. Vậy $m=0;m=1;m=2$..

Câu 75: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 41)** Cho hàm số $y=\dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 4. **C.** Vô số. **D.** 3

Lời giải

Chọn D

$D=\mathbb{R}\backslash\{-m\}$; $y'=\dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y'<0,\forall x\in D$
$\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow 0<m<4$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 76: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 35)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

+) Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-5m\}$.

+) $y'=\dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$.

+) Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-10) \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2>0 \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{5} \\ m \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < m \leq 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2\}$.

Câu 77: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 30)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10;+\infty)$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-5m\}$. Ta có $y'=\dfrac{5m-6}{(x+5m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(10;+\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y'<0, \forall x \in D \\ -5m \notin (10;+\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6<0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1\}$.

Câu 78: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 31)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 0. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\backslash\{-3m\}$; $y'=\dfrac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6;+\infty)$ khi và chỉ khi:

$\begin{cases} y'<0 \\ (6;+\infty) \subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1<0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \dfrac{1}{3}$. Vì $m \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow m \in \{-2;-1;0\}$.

Câu 79: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 26)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$.

A. 2. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=(-\infty;-3m)\cup(-3m;+\infty)$. Ta có $y'=\dfrac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)\Leftrightarrow\begin{cases}3m-2>0\\-6\le -3m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>\dfrac{2}{3}\\m\le 2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}<m\le 2$.

Mà m nguyên nên $m=\{1;2\}$.

Câu 80: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 40)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)$ là

A. $[4;7)$. **B.** $(4;7]$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

$y'=\dfrac{m-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-7)\Leftrightarrow\begin{cases}y'>0\\-m\notin(-\infty;-7)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-4>0\\-m\ge -7\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m>4\\m\le 7\end{cases}\Leftrightarrow 4<m\le 7$.

Vậy $m\in(4;7]$.

Câu 81: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 39)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2},\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{m-5}{(x+m)^2}>0\\-m\notin(-\infty;-8)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>5\\-m\ge -8\end{cases}\Leftrightarrow 5<m\le 8$..

Câu 82: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 41)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5)$ là

A. $(2;5]$. **B.** $[2;5)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-5) \Leftrightarrow y'>0,\ \forall x\in(-\infty;-5)$

$$\Leftrightarrow \frac{m-2}{(x+m)^2}>0,\ \forall x\in(-\infty;-5) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ -m\notin(-\infty;-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ -m\geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\leq 5.$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m cần tìm là $(2;5]$.

Câu 83: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 42)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6)$ là

A. $(3;6]$. **B.** $(3;6)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;6)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\ -m$.

Ta có $y'=\dfrac{m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-6) \Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in\ -\infty;-6$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3>0 \\ -m\notin\ -\infty;-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ -m\geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>3 \\ m\leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3<m\leq 6.$$

Câu 84: **(ĐTK 2020-L2-Câu 41)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 5.. **B.** 4.. **C.** 3.. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho đồng biến trên
$\mathbb{R} \Leftrightarrow b^2-3ac\leq 0 \Leftrightarrow m^2-4\leq 0 \Leftrightarrow -2\leq m\leq 2 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-2;-1;0;1;2\}$..

Câu 85: **(ĐTK 2017-Câu 41)** Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3

Lời giải

Chọn A

TH1: $m=1$. Ta có: $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.
TH2: $m=-1$. Ta có: $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.
TH3: $m\neq\pm1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow y'\leq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dấu “=” chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ \left(m-1\right)^2+3\left(m^2-1\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-1<0 \\ \left(m-1\right)\left(4m+2\right)\le 0 \end{cases}$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<1 \\ -\dfrac{1}{2}\le m\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m<1$

$m=0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 86: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 38)** Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+\left(4m+9\right)x+5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$

A. 7. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5

Lời giải

Chọn A

Ta có:

+) TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$ khi $y'\le 0,\forall x\in\left(-\infty;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3<0 \\ \Delta'=m^2+3\left(4m+9\right)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in\left[-9;-3\right] \Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 87: **(ĐTK 2018-Câu 30)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=x^3+mx-\dfrac{1}{5x^5}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$

A. 5. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 4

Lời giải

Chọn D

$y'=3x^2+m+\dfrac{1}{x^6}$

Hàm số đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ khi và chỉ khi

$y'=3x^2+m+\dfrac{1}{x^6}\ge 0,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$

$\Leftrightarrow -3x^2-\dfrac{1}{x^6}\le m,\forall x\in\left(0;+\infty\right)$. Xét hàm số $g(x)=-3x^2-\dfrac{1}{x^6}\le m$, $x\in\left(0;+\infty\right)$

$g'(x)=-6x+\dfrac{6}{x^7}=\dfrac{-6(x^8-1)}{x^7}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1(\text{loai}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào BBT ta có $m \geq -4$, suy ra các giá trị nguyên âm của tham số m là $-4;-3;-2;-1$.

Câu 88: **(ĐTK 2019-Câu 36)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $(-\infty;0]$. **B.** $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$. **D.** $[0;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Theo đề $y'=-3x^2-12x+4m-9 \leq 0, \forall x \in (-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m \leq 3x^2+12x+9,\ \forall x \in (-\infty;-1)$

Đặt $g(x)=3x^2+12x+9 \Rightarrow g'(x)=6x+12$

x	$-\infty$		-2		-1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	6

Vậy $4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\dfrac{3}{4}$.

Câu 89: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 40)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(-\infty;4]$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6x+4-m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq 3x^2-6x+4, \forall x \in (2;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=3x^2-6x+4$ trên khoảng $(2;+\infty)$.

Ta có: $g'(x)=6x-6$; $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	
$g(x)$				$4 \nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m \le g(x), \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \le 4$.

Vậy $m \le 4$ thoả yêu cầu bài toán.

Câu 90: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 42)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(-\infty;5]$. **D.** $(-\infty;2]$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$

Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì $y' \ge 0 \, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \ge 0 \, \forall x \in [2;+\infty)$ (do hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ nên xác định tại) $x = 2$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 \ge m \; \forall x \in [2;+\infty) \Leftrightarrow f(x) \ge m \; \forall x \in [2;+\infty) \Leftrightarrow \min\limits_{[2;+\infty)} f(x) \ge m$

Xét $f(x) = 3x^2 - 6x + 5 \quad x \in [2;+\infty)$

$f'(x) = 6x - 6 > 0 \; \forall x \in [2;+\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ đồng biến trên nữa khoảng $[2;+\infty) \Rightarrow \min\limits_{[2;+\infty)} f(x) = f(2) = 5 \Rightarrow m \le 5$.

Câu 91: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 42)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-\infty;-2]$. **D.** $(-\infty;1]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 1 - m$.

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ nên $y' \ge 0 \forall x \in (2;+\infty)$

Suy ra: $3x^2 - 6x + 1 \ge m \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow \underset{x \in (2;+\infty)}{Min} (3x^2 - 6x + 1) \ge m \Leftrightarrow 1 \ge m$.

Ghi Chú!

Câu 92: **(ĐMH 2017-Câu 11)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$. **B.** $m\le 0$.
C. $1\le m<2$. **D.** $m\ge 2$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\tan x$, vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t-2}{t-m}\ \forall t\in(0;1)$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có $f'(t)=\frac{2-m}{(t-m)^2}$.

Để hàm số y đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi:

$f'(t)>0\ \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2}>0\ \forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0]\cup[1;2)$$

CASIO: Đạo hàm của hàm số ta được

$$y'=\frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x-m)-(\tan x-2)\frac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x-m)^2}$$

Ta nhập vào máy tính thằng y' \ CALC\Calc $x=\frac{\pi}{8}$ (Chọn giá trị này thuộc $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$)

$m=?$ 1 giá trị bất kỳ trong 4 đáp án.

Đáp án D $m\ge 2$. Ta chọn $m=3$. Khi đó $y'=-0,17<0$ (Loại)

Đáp án C $1\le m<2$ Ta chọn $m=1,5$. Khi đó $y'=0,49>0$ (nhận)

Đáp án B $m\ge 0$ Ta chọn $m=0$. Khi đó $y'=13,6>0$ (nhận)

Vậy đáp án B và C đều đúng nên chọn đáp án A

Dạng ⑧: Tính đơn điệu của hs chứa dấu GTTĐ có tham số biết đồ thị, BBT.

Ghi Chú!

Câu 93: (DE MH BGD 2023 – Câu 50)Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10;+\infty)$ để hàm số $y = \left|x^3 + (a+2)x + 9 - a^2\right|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$?

A. 12. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Xét $f(x) = x^3 + (a+2)x + 9 - a^2$

$f'(x) = 3x^2 + a + 2$

Để $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

TH1: $\begin{cases} f'(x) \ge 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \ge 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge \underset{(0;1)}{Max}\left(-3x^2 - 2\right) \\ 9 - a^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -2 \\ -3 \le a \le 3 \end{cases} \Rightarrow a \in [-2;3]$

$a = \{-2;-1;0;1;2;3;\} \to 6$ giá trị

TH2: $\begin{cases} f'(x) \le, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \le 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le \underset{(0;1)}{Min}\left(-3x^2 - 2\right) \\ 9 - a^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -5 \\ \left[\begin{array}{l} a \ge 3 \\ a \le -3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow a \le -5$

Kết hợp với điều kiện bài toán $a = \{-9;-8;-7;-6;-5\} \to 5$ giá trị

Vậy có 11 giá trị thoả mãn.

§2- CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Ghi Chú!

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. Khái niệm cực trị của hàm số

- Cho $f:D\to\mathbb{R}$ và $x_0\in D$.

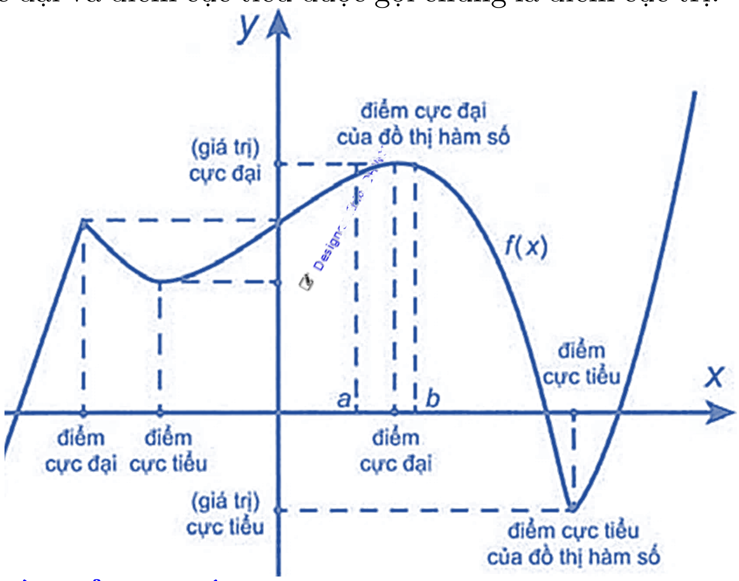
- x_0 được gọi là một điểm cực đại của f nếu tồn tại khoảng $(a;b)$ sao cho

$$\begin{cases} x_0\in(a;b)\subset D \\ f(x)<f(x_0)\ \forall x\in(a;b)\setminus\{x_0\}. \end{cases}$$

- x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của f nếu tồn tại khoảng $(a;b)$ sao cho

$$\begin{cases} x_0\in(a;b)\subset D \\ f(x)>f(x_0)\ \forall x\in(a;b)\setminus\{x_0\}. \end{cases}$$

- Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị.



2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

- Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0)=0$.

3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

a) Quy tắc ①

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực đại tại x_0;
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua x_0 thì $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0.

Ghi Chú!

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	+		−
$f(x)$	↗	CĐ	↘

x	x_0-h	x_0	x_0+h
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	↘	CT	↗

b) Quy tắc ②:

- $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases} \Rightarrow f$ đạt cực tiểu tại x_0.
- $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases} \Rightarrow f(x)$ đạt cực đại tại x_0.

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Cực trị của một hàm số cho bởi một công thức và các câu hỏi liên quan

Câu 1: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 7)** Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chon B

Có $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}>0, \forall x\neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 2: **(ĐMH 2017-Câu 5)** Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y_{CĐ}=4$ **B.** $y_{CĐ}=1$ **C.** $y_{CĐ}=0$ **D.** $y_{CĐ}=-1$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y(1)=0 \\ x=-1 \Rightarrow y(-1)=4 \end{array}\right.$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+2)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}(x^3-3x+2)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=+\infty$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4.

Ghi Chú!

Câu 3: **(ĐTN 2017-Câu 6)** Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Ta có: $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Cách 2.

Ta có $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=1\end{array}\right.$

$y''=\dfrac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$; $y''(-3)=-\dfrac{1}{2}<0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 4: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 40)** Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $P(1;0)$ **B.** $M(0;-1)$ **C.** $N(1;-10)$ **D.** $Q(-1;10)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=3x^2-6x-9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y=-8x-2$.

Như thế điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Câu 5: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 37)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\dfrac{3}{2}$. **B.** $m=\dfrac{3}{4}$. **C.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $m=\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1),B(2;-3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y=-2x+1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y=(2m-1)x+3+m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2)=-1\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{4}$.

Ghi Chú!

Câu 6: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 39)** Đồ thị của hàm số $y=-x^3+3x^2+5$ có hai điểm cực trị A và B. Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S=9$. **B.** $S=\frac{10}{3}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y'=-3x^2+6x$, $y'=0\Leftrightarrow -3x^2+6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

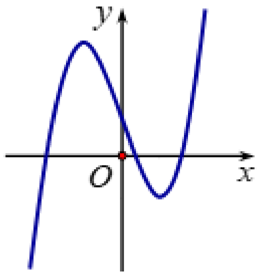
Nên $A(0;5), B(2;9)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2;4)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}$.

Phương trình đường thẳng AB: $y=2x+5$.

Diện tích tam giác OAB là: $S=5$.

Dạng ②: Cực trị f(x), f(u),... biết các đồ thị không tham số

Câu 7: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 3)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

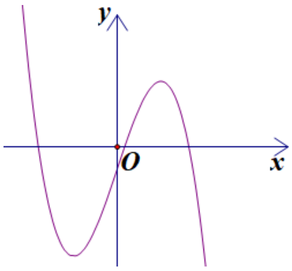
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị ta khẳng định hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 8: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 5)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

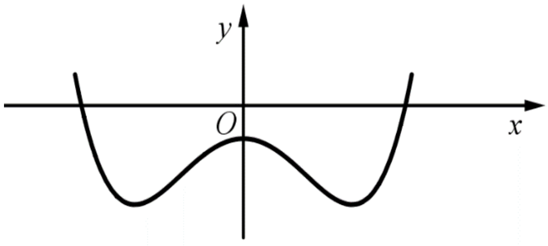
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số đã cho có hai cực trị.

Ghi Chú!

Câu 9: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, $c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên



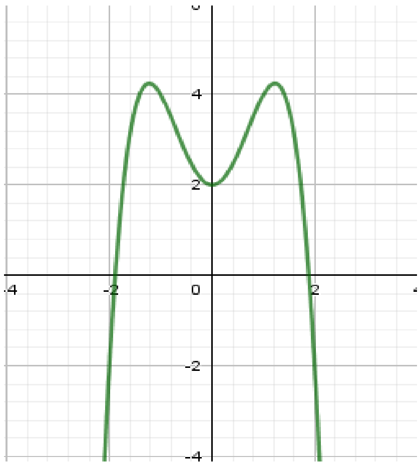
Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Câu 10: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 3) Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



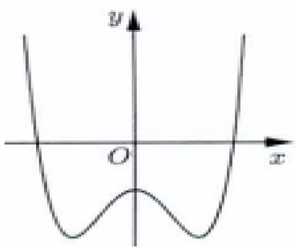
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 11: (DE TN BGD 2022 - MD 102)Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

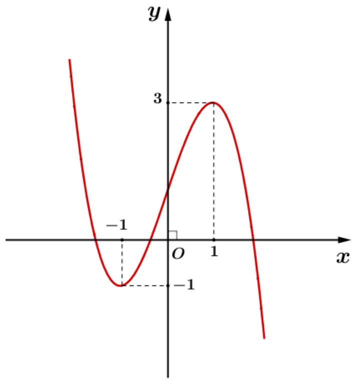
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Ghi Chú!

Câu 12: **(DE TN BGD 2022-MD 103)**Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên.



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ

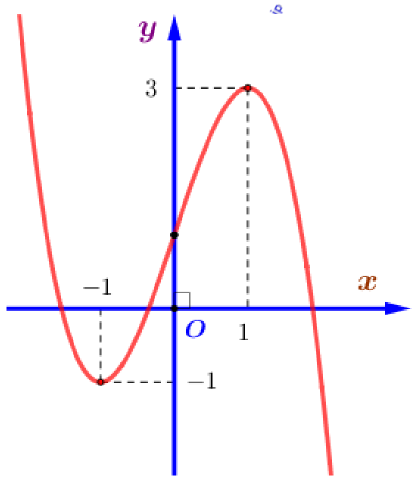
A. $(1;-1)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-1;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là $(-1;-1)$

Câu 13: **(DE TN BGD 2022-MD 104)**Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là

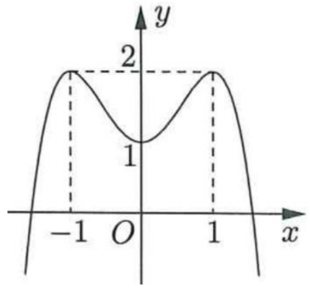
A. $(1;3)$. **B.** $(3;1)$. **C.** $(-1;-1)$. **D.** $(1;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$, ta có điểm cực tiểu của đồ thị hàm số có tọa độ là $(-1;-1)$.

Câu 14: **(DE MH BGD 2023 - Câu 19)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



A. $(-1;2)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(1;0)$.

Lời giải

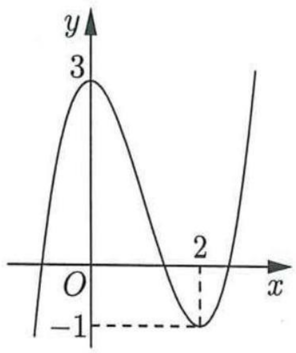
Chọn B

Từ đồ thị, ta có bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có điểm cực tiểu là $(0;1)$.

Câu 15: **(DE MH BGD 2023 - Câu 27)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho là:

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

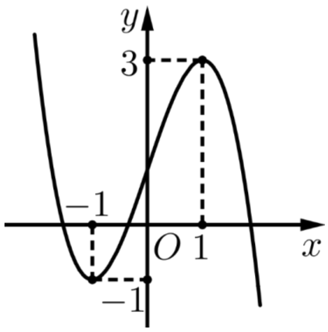
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có giá trị cực đại của hàm số là 3.

Câu 16: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 26]** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:

Ghi Chú!



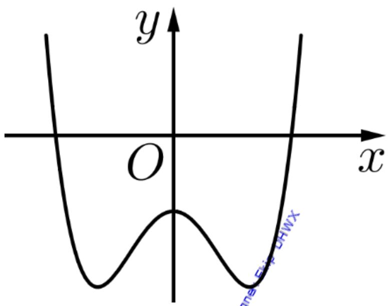
A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Giá trị cực đại của hàm số là 3.

Câu 17: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 28] Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



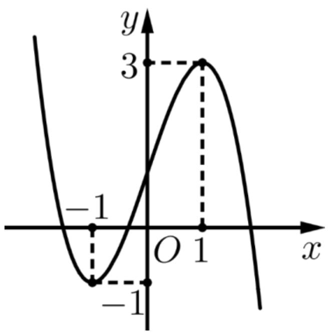
A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

Câu 18: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 26] Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:



A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

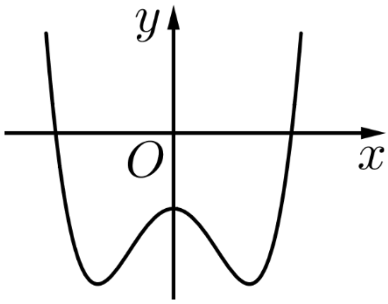
Lời giải

Chọn C

Giá trị cực đại của hàm số là 3.

Ghi Chú!

Câu 19: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 28]Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

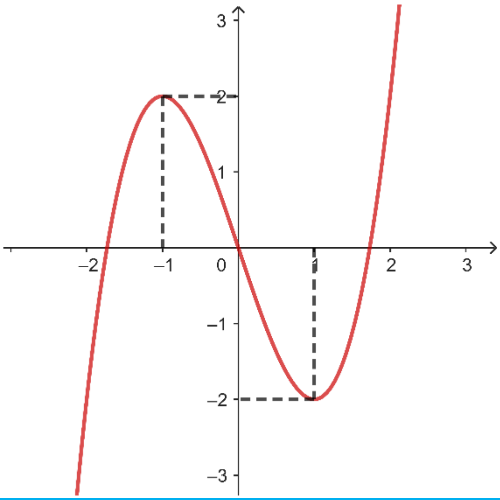
Lời giải

Chọn D

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

Câu 20: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 3] Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=1$. **B.** -2. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

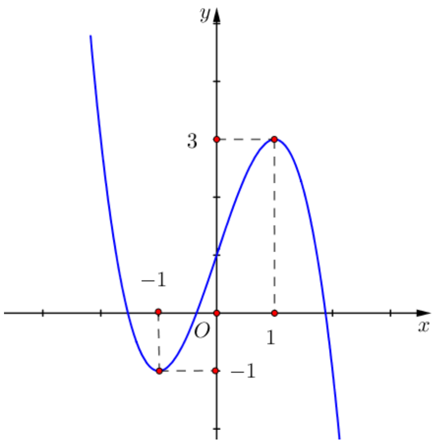


Lời giải

Chọn A

Câu 21: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 9]Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ a,b,c,d\in\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Ghi Chú!



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

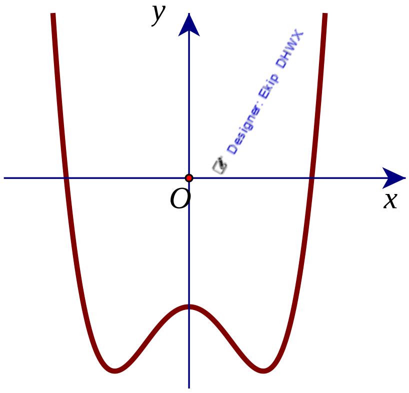
A. 3. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị, giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Câu 22: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 23] Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



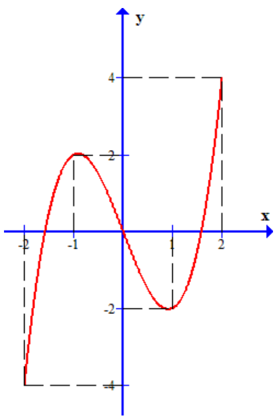
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Số cực tiểu là 2.

Câu 23: (ĐTN 2017-Câu 3) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



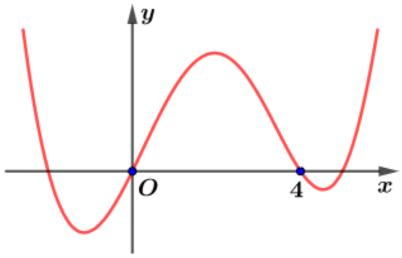
A. $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 24: **(ĐTK 2020-L1-Câu 46)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Ta có $g\left(x\right)=f\left(x^3+3x^2\right) \Rightarrow g'\left(x\right)=\left(3x^2+6x\right).f'\left(x^3+3x^2\right)$

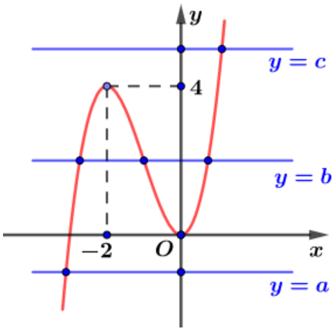
Cho $g'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x^2+6x=0\\ f'\left(x^3+3x^2\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\\ x^3+3x^2=a;\ a<0\\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4\\ x^3+3x^2=c;\ c>4\end{array}\right.$

Xét hàm số $h\left(x\right)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'\left(x\right)=3x^2+6x$. Cho $h'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h\left(x\right)=x^3+3x^2$ như sau:



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y=c$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ có 7 cực trị.

➽Dạng ③: Cực trị f(x), f(u),… biết các BBT,BXD không tham số

Câu 25: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 1)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=-2$ **B.** $y_{CĐ}=2$ và $y_{CT}=0$

C. $y_{CĐ}=-2$ và $y_{CT}=2$ **D.** $y_{CĐ}=3$ và $y_{CT}=0$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CĐ}=3$ và

Câu 26: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 5)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	↗	4	↘	-5	↗	2

Ghi Chú!

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có bốn điểm cực trị. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$.

C. Hàm số không có cực đại. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ thấy mệnh đề hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ đúng.

Câu 27: **(ĐTK 2018-Câu 7)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x=1$ **B.** $x=0$ **C.** $x=5$ **D.** $x=2$

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ tại $x=2$.

Nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

Câu 28: **(ĐTK 2019-Câu 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	5	$\searrow$	

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Câu 29: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 14)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Câu 30: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 15)** Cho hàm số $f\;\;x$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn C

Câu 31: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 9)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại:

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)$ xác định tại $x=1$, $f'(1)=0$ và đạo hàm đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ khi đi qua $x=1$.

Câu 32: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 14)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x=3$.

Câu 33: **(ĐTK 2020-L1-Câu 8)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.

Câu 34: (ĐTK 2020-L2-Câu 13) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=4$. B. $x=3$. C. $x=1$. D. $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 35: **(ĐTK 2020-L2-Câu 27)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ ta có bảng biến thiên của hàm số như hình sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

Suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 36: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 3)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-5	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số bằng -5.

Câu 37: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 18)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và giá trị cực đại là $y=2$.

Câu 38: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 8)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

Ghi Chú!

A. 2. **B.** -2. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là: $y=-1$.

Câu 39: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 17)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực đại của hàm số $f\left(x\right)$ bằng 2.

Câu 40: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 15)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=3$.

Câu 41: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 20)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn C

Từ BBT của hàm số $f(x)$ suy ra điểm cực đại của hàm số $f(x)$ là $x=1$.

Câu 42: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 8)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=-2$.

Câu 43: **(ĐTK 2021-Câu 4)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=-3$. **B.** $x=1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn D

Ghi Chú!

Nhận xét: $f'(x)$ đổi dấu "+" sang "–" khi qua $x=-2 \Rightarrow$ Điểm cực đại của hàm số là $x=-2$.

Câu 44: **(ĐTK 2021-Câu 5)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chon A

Nhìn bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu qua 4 điểm $\Rightarrow$Hàm số $f(x)$ có 4 điểm cực trị.

Câu 45: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 5)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chon D

Ta thấy $f'(x)=0$ có 4 nghiệm là $x=-2; x=-1; x=1; x=4$ và $f'(x)$ đổi dấu khi qua các nghiệm đó nên hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 46: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 13)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. -1. **B.** 5. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

Chon C

Dựa vào BBT ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -3.

Câu 47: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 5)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3 tại $x=-1$.

Câu 48: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 21)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-2		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta thấy đạo hàm đổi dấu qua các điểm $-3,-2,3,5$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 49: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 10)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Xét $f'\left(x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $f(x)$ có 4 cực trị.

Câu 50: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 22)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Quan sát bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại của hàm số là 3.

Câu 51: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 14)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 1.

Câu 52: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 22)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		-1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm ta thấy đạo hàm đổi dấu qua các điểm $-2,-1,2,4$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 53: **(TN BGD 2022-MD101)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta suy ra: điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x=1$.

Câu 54: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên suy ra điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x=1$.

Câu 55: **(ĐMH 2017-Câu 4)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

Ghi Chú!

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số có đúng một cực trị.

B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Chọn D

Đáp án A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

Đáp án B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y=-1$ khi $x=0$.

Đáp án C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Đáp án D đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 56: **(ĐTK 2017-Câu 7)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

A. $y_{CĐ}=5$ **B.** $y_{CT}=0$ **C.** $\min\limits_{\mathbb{R}} y=4$ **D.** $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$

Lời giải

Chọn A

Từ BBT suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=1$, giá trị cực đại $y_{CĐ}=y\left(1\right)=5$.

Câu 57: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 4)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

A. Hàm số có ba điểm cực trị. **B.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 3.

C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0. **D.** Hàm số có hai điểm cực tiểu.

Lời giải

Chọn C

Câu 58: **(ĐTK 2020-L1-Câu 18)** Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi x qua nghiệm -1 và nghiệm 1; không đổi dấu khi x qua nghiệm 0 nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 59: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 33)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Nhìn bảng xét dấu ta thấy $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi qua $x=-1$, $x=1$; hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đã cho có hai điểm cực đại.

Câu 60: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 28)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	

Ghi Chú!

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 61: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 36)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$, ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 62: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 34)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng xét dấu $f'(x)$ ta có: $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$ khi đi qua các điểm $x=\pm 2$.

Do hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số có 2 điểm cực đại.

Câu 63: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 11)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn D

Điểm cực đại của hàm số đã cho là $x=-1$.

Câu 64: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 45)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)=a\left(x^2-1\right)x=ax^3-ax \Rightarrow f(x)=\dfrac{ax^4}{4}-\dfrac{ax^2}{2}+c$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;-1)$ nên $c=-1$, điểm $(1;3)$ thuộc đồ thị nên có $\dfrac{a}{4}-\dfrac{a}{2}-1=3 \Rightarrow a=-16$. Ta có hàm số $f(x)=-4x^4+8x^2-1$, $f'(x)=-16x\left(x^2-1\right)$

Đặt $t=x-1 \Rightarrow x=t+1$ ta có hàm số $g(t+1)=(t+1)^2\left[f(t)\right]^4$

$g'(t+1)=2(t+1)\left[f(t)\right]^4+4(t+1)^2\left[f(t)\right]^3 f'(t)=$

$2(t+1)\left[f(t)\right]^3\left[f(t)+2(t+1)f'(t)\right]$

$$g'(t+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ f(t)=0 \\ f(t)+2(t+1)f'(t)=0 \end{array}\right.$$

+) Phương trình $f(t)+2(t+1)f'(t)=0 \Leftrightarrow -4t^4+8t^2-1+2(t+1)(-16)t(t^2-1)=0$

$\Leftrightarrow -36t^4-32t^3+40t^2+32t-1=0$

Xét vế trái: $h(t)=-36t^4-32t^3+40t^2+32t-1$;

$h'(t)=-144t^3-96t^2+80t+32=-144(t+1)\left(t+\dfrac{1}{3}\right)\left(t-\dfrac{2}{3}\right)$

t	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$h'(t)$		+	0	−	0	+	0	−	
$h(t)$	$-\infty$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$\frac{581}{27}$	↘	$-\infty$

Từ đây suy ra phương trình $h(t)=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

+) phương trình $f(t)=0$ có 4 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình $g'(t+1)=0$ có 9 nghiệm phân biệt nên hàm số $g(x)=x^2\left[f(x-1)\right]^4$ có 9 điểm cực trị.

Câu 65: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 44)** Cho hàm bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-2	↗	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm $g(x)=x^4\left[f(x+1)\right]^2$ là

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Vì $f(x)$ là hàm bậc bốn nên $f'(x)$ là hàm bậc ba có hệ số bậc ba đồng thời nhận các giá trị -1; 0; 1 làm nghiệm. Do đó

$f'(x)=ax(x-1)(x+1)=a(x^3-x)\Rightarrow f(x)=a\left(\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^2}{2}\right)+b$.

Vì $f(0)=3$ và $f(1)=-2$ nên suy ra $a=20$; $b=3$.

Ghi Chú!

Vậy $f(x)=5x^4-10x^2+3=5\left(x^2-1\right)^2-2$, suy ra $f(x+1)=5\left(x^2+2x\right)^2-2$.

Ta có $g(x)=\left[x^2.f(x+1)\right]^2=\left[5x^2\left(x^2+2x\right)^2-2x^2\right]^2$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x^2\left(x^2+2x\right)^2=2x^2\quad(1)\\10x\left(x^2+2x\right)^2+10x^2\left(x^2+2x\right)(2x+2)=4x\quad(2)\end{array}\right..$$

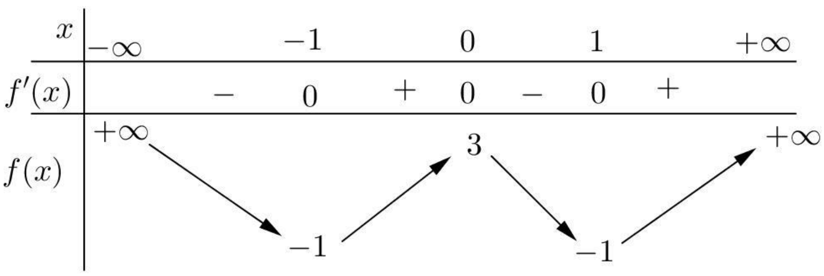
Phương trình $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{kép})\\x^2+2x=\sqrt{\dfrac{2}{5}}\\x^2+2x=-\sqrt{\dfrac{2}{5}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x\approx 0,277676\\x\approx -2,277676\\x\approx -0,393746\\x\approx -1,606254\end{array}\right..$

Phương trình $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\15x^4+50x^3+40x^2-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x\approx -2,0448\\x\approx -1,21842\\x\approx -0,26902\\x\approx 0,19893\end{array}\right..$

So sánh các nghiệm giải bằng máy tính cầm tay ta có 9 nghiệm không trùng nhau, trong đó 8 nghiệm đơn và nghiệm $x=0$ là nghiệm bội 3 nên $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Vậy $g(x)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 66: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 44)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^4\left[f(x-1)\right]^2$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $f(x)=4x^4-8x^2+3\Rightarrow f'(x)=16x(x^2-1)$

Ta có $g'(x)=2x^3.f(x-1).[2f(x-1)+x.f'(x-1)]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3=0 & (1) \\ f(x-1)=0 & (2) \\ 2f(x-1)+x.f'(x-1)=0 & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có $x=0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x)=0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình :

$2f(x)+(x+1).f'(x)=0 \Leftrightarrow 2(4x^4-8x^2+3)+16x(x+1)(x^2-1)=0$

$\Leftrightarrow 24x^4+16x^3-32x^2-16x+6=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Dễ thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x)=0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 67: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 46)** Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x^2\left[f(x+1)\right]^4$ là

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

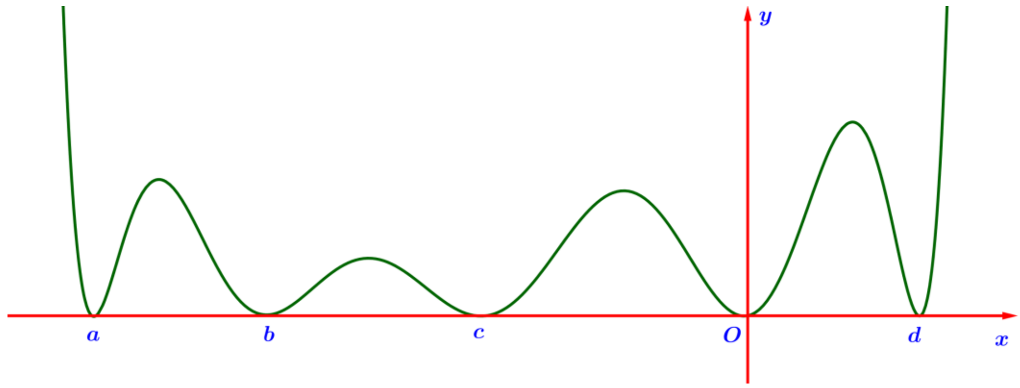
Chọn C

Nhận xét $\begin{cases} g(x)\ge 0, \forall x \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=+\infty \end{cases}$,

Cho $g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ \left[f(x+1)\right]^4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x+1)=0 \end{array}\right.$

Nhận thấy: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ sang trái 1 đơn vị ta thu được đồ thị của $f(x+1)$

Do đó $f(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a,\ a<-2 \\ x=b,\ -2<b<-1 \\ x=c,\ -1<c<0 \\ x=d,\ d>0 \end{array}\right.$



Vì thế $g(x)=0$ có 5 nghiệm phân biệt

Hay đồ thị $g(x)$ có 5 điểm tiếp xúc với trục hoành

Vậy hàm số $g(x)$ có 9 cực trị.

Dạng ④: Cực trị f(x),f(u),...liên quan biểu thức đạo hàm không tham số

Câu 68: (ĐTK 2019-Câu 17) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi đi qua các điểm nên hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 69: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 23) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Xét $f'(x)=x(x+2)^2$. Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow x(x+2)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm suy ra hàm số có một cực trị.

Câu 70: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 19)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x=0$.

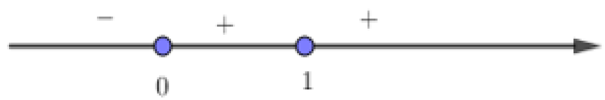
Câu 71: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 20)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)^2$, $\forall x\in R$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét dấu của đạo hàm:



Ta thấy đạo hàm đổi dấu đúng 1 lần nên hàm số đã cho có đúng 1 điểm cực trị

Câu 72: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 30)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x(x+1)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\(x+1)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Ghi Chú!

Vì nghiệm $x=0$ là nghiệm bội lẻ và $x=-1$ là nghiệm bội chẵn nên số điểm cực trị của hàm số là 1.

Câu 73: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 32)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $f(x)$ có một điểm cực đại.

Câu 74: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 26)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+4)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-4\end{array}\right.$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ suy ra hàm số đã cho có 2 điểm cực tiểu.

Câu 75: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 33)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)(x-4)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=4\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	CT	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số $f\left(x\right)$ có 1 điểm cực đại.

Câu 76: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 32)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x+1\right)\left(x-4\right)^3,\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Nhận xét: Vì 3 nghiệm của $f'\left(x\right)$ đều là nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 77: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 21]** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(x-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

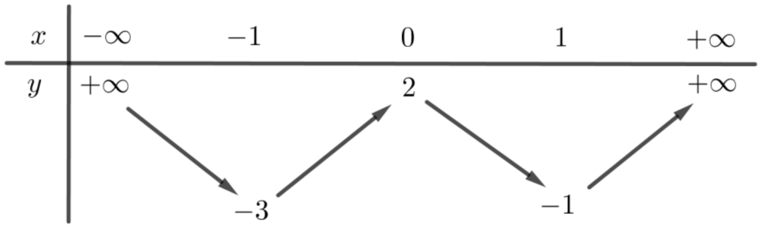
Do $f'\left(x\right)=\left(x+2\right)\left(x-1\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
Ta lập được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Ghi Chú!

Câu 78: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 46)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau



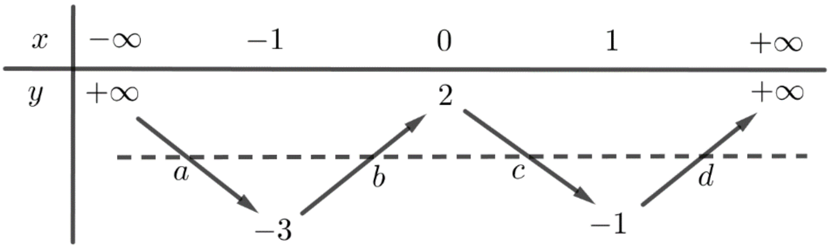
Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Cách 1



Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x) = 0$ có các nghiệm tương ứng là $\left[\begin{array}{l} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{array}\right.$.

Xét hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right) \Rightarrow y' = 2(x-1) f'\left(x^2 - 2x\right)$.

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) f'\left(x^2 - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ f'\left(x^2 - 2x\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ x^2 - 2x = a & (1) \\ x^2 - 2x = b & (2) \\ x^2 - 2x = c & (3) \\ x^2 - 2x = d & (4) \end{array}\right.$.

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x$ ta có $h(x) = x^2 - 2x = -1 + (x-1)^2 \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ do đó

Phương trình $x^2 - 2x = a, (a < -1)$ vô nghiệm.

Phương trình $x^2 - 2x = b, (-1 < b < 0)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ không trùng với nghiệm của phương trình (1).

Phương trình $x^2 - 2x = c, (0 < c < 1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_3; x_4$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2).

Phương trình $x^2-2x=d,(d>1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_5;x_6$ không trùng với nghiệm của phương trình (1) và phương trình (2) và phương trình (3).

Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

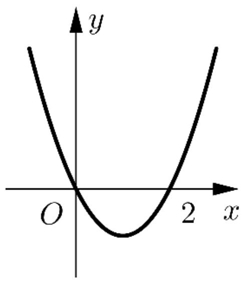
Cách 2

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f'(x)=0$ có các nghiệm tương ứng là $\left[\begin{array}{l} x=a,a\in(-\infty;-1) \\ x=b,b\in(-1;0) \\ x=c,c\in(0;1) \\ x=d,d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)\Rightarrow y'=2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)$.

$$y'=0\Leftrightarrow 2(x-1)f'\left(x^2-2x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ f'\left(x^2-2x\right)=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=1 & \\ x^2-2x=a & (1) \\ x^2-2x=b & (2) \\ x^2-2x=c & (3) \\ x^2-2x=d & (4) \end{array}\right..$$

Vẽ đồ thị hàm số $h(x)=x^2-2x$



Dựa vào đồ thị ta thấy: phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình $(2);(3);(4)$ mỗi phương trình có 2 nghiệm. Các nghiệm đều phân biệt nhau.

Vậy phương trình $y'=0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 79: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 48)** Cho hàm số $f\ \ x$, bảng biến thiên của hàm số $f'\ \ x$ như sau.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

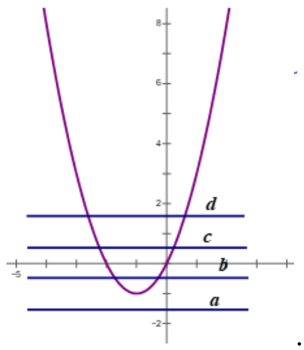
Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ là

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải.

Chon D

Ta có $y'=\left(2x+2\right)f'\left(x^2+2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=0 \\ x^2+2x=a, a<-1 \\ x^2+2x=b, -1<b<0 \\ x^2+2x=c, 0<c<1 \\ x^2+2x=d, d>1 \end{array}\right.$.



Dựa vào đồ thị ta được $y'=0$ có 7 nghiệm đơn nên nó có 7 cực trị.

Câu 80: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 48)** Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng biến thiên của hàm số $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$	$+\infty$	↘	-3	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

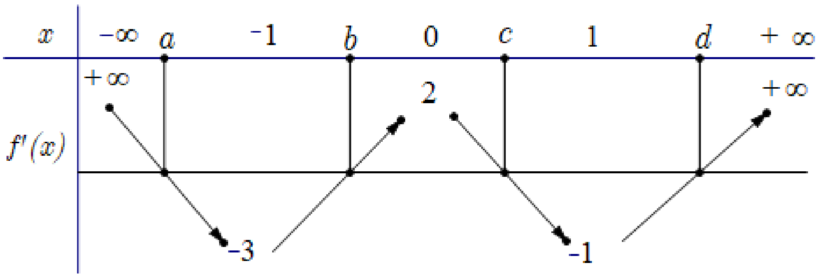
Số cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ là

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chon C

Từ bảng biến thiên



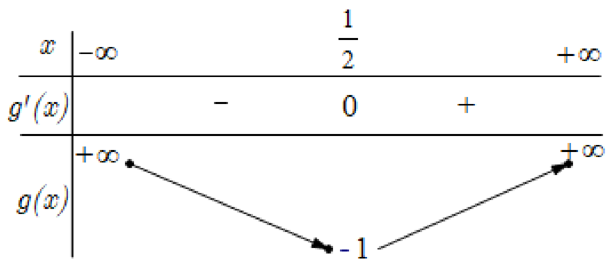
Ta thấy $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-\infty;-1) \\ x=b\in(-1;0) \\ x=c\in(0;1) \\ x=d\in(1;+\infty) \end{array}\right.$

Với $y=f\left(4x^2-4x\right)$, ta có $y'=(8x-4)f'\left(4x^2-4x\right)$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x-4=0 \\ f'\left(4x^2-4x\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ 4x^2-4x=a\in(-\infty;-1)\ (1) \\ 4x^2-4x=b\in(-1;0)\ (2) \\ 4x^2-4x=c\in(0;1)\ (3) \\ 4x^2-4x=d\in(1;+\infty)\ (4) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=4x^2-4x$, ta có $g'(x)=8x-4=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có:

□Vì $a\in(-\infty;-1)$ nên (1) vô nghiệm.

□Vì $b\in(-1;0)$ nên (2) có 2 nghiệm phân biệt.

□Vì $c\in(0;1)$ nên (3) có 2 nghiệm phân biệt.

□Vì $d\in(1;+\infty)$ nên (4) có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2-4x\right)$ có 7 điểm cực trị

Cách khác:

Ta có: $y'=(8x-4).f'\left(4x^2-4x\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow(8x-4).f'\left(4x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8x-4=0\\ f'\left(4x^2-4x\right)=0\end{array}\right.$

+ $8x-4=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

+ $f'\left(4x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4x^2-4x=a\,(a<-1)\ (1)\\ 4x^2-4x=b\,(-1<b<0)\ (2)\\ 4x^2-4x=c\,(0<c<1)\ (3)\\ 4x^2-4x=d\,(d>1)\ (4)\end{array}\right.$

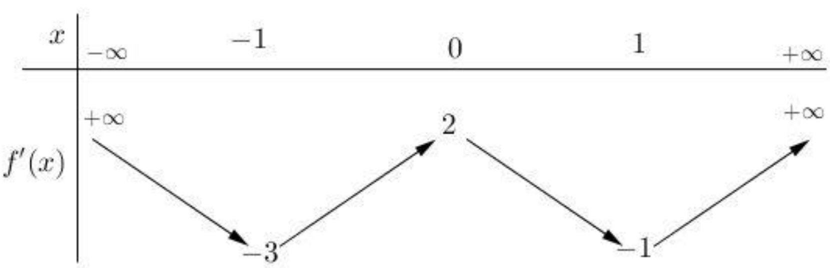
+ Phương trình $4x^2-4x=m\Leftrightarrow 4x^2-4x-m=0$ có nghiệm khi $\Delta'=4-4m\geq 0$ hay $m\leq 1$.

Từ đó, ta có phương trình (1); (2); (3) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Phương trình (4) vô nghiệm.

Do đó, hàm số đã cho có 7 cực trị.

Câu 81: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 50)** Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ là

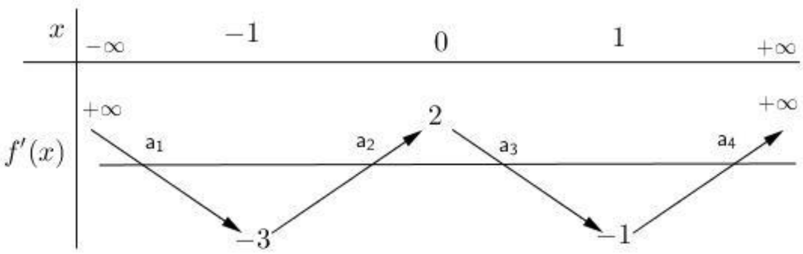
A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Có $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)'=(8x+4)\,f'\left(4x^2+4x\right)$,

$\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ f'\left(4x^2+4x\right)=0\end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên trên ta có

$$f'\left(4x^2+4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1) \\ 4x^2+4x=a_2\in(-1;0) \\ 4x^2+4x=a_3\in(0;1) \\ 4x^2+4x=a_4\in(1;+\infty) \end{array}\right. .\ (1)$$

Xét $g(x)=4x^2+4x$, $g'(x)=8x+4$, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2+4x=a_1\in(-\infty;-1)$ vô nghiệm.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x=a_2\in(1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y=f\left(4x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

➽Dạng ⑤: Cực trị của hs chứa dấu GTTĐ, hs cho bởi nhiều công thức khi biết đồ thị, BBT

Câu 82: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 42)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

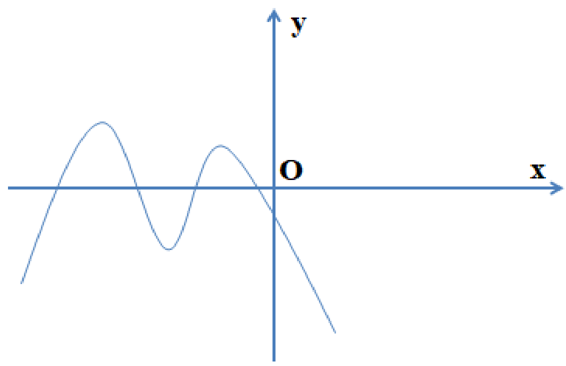
Lời giải

Chọn C

Ghi Chú!

Do đồ thị $y=f(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị $y=|f(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 83: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 45) Cho hàm số $y=f(x)$ với $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là một hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong như hình dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f(x^4)+x^2\right|$ là

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $h(x)=f(x^4)+x^2 \Rightarrow h'(x)=2x\left(2x^2.f'(x^4)+1\right)$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2x^2 f'(x^4)+1=0\,(1) \end{array}\right.$$

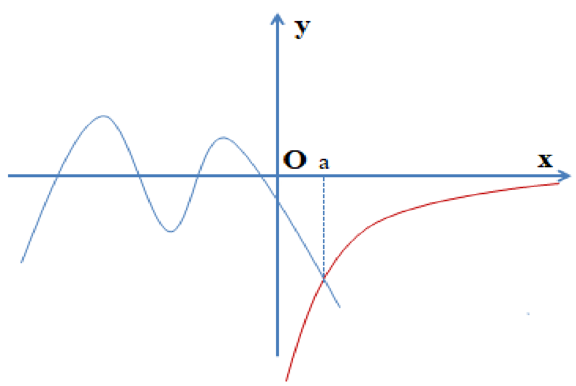
Giải phương trình (1)

Đặt $x^4=t\,(t\ge 0)$, ta có phương trình $2\sqrt{t}f'(t)+1=0 \Leftrightarrow f'(t)=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,(2)$

(Vì $t=0$ không thỏa mãn)

Số nghiệm của phương trình (2) chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và đồ thị hàm số $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

Ta có các đồ thị như sau



Căn cứ đồ thị, suy ra phương trình (2) có nghiệm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x^4 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{a}$

Căn cứ đồ thị hàm số

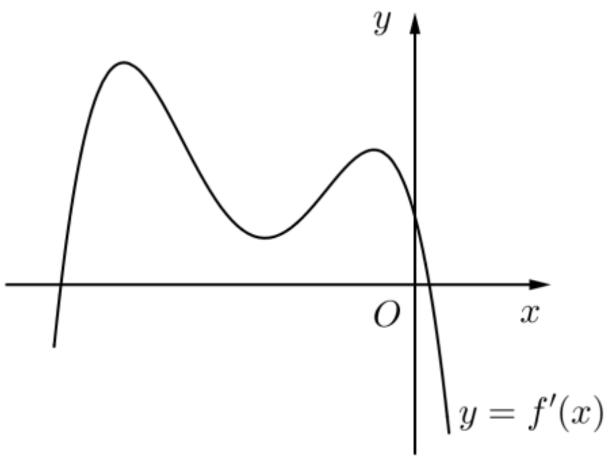
$y = f'(t) \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\left(f'(t)\right) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty}\left(2\sqrt{t}f'(t)+1\right) = -\infty$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ và $y = g(x)$ như sau

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0 $-\infty$				0				$-\infty$
$g(x)$	$+\infty$ $-\infty$	0			0			0	$+\infty$

Câu 84: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 48)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết

$y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình dưới.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = \left|f(x^3) + x\right|$ là

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Đặt $h(x) = f(x^3) + x$

Ta có: $h'(x) = 3x^2 f'(x^3) + 1$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = -\dfrac{1}{3x^2}$.

Đặt $t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$ thế vào phương trình trên ta được $f'(t) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$

Xét hàm số $k(t) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$, ta có: $k'(t) = \dfrac{2}{9\sqrt[3]{t^5}}$

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(t)$		$-$	||	$+$	
$k(t)$	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	0

Từ bảng biến thiên, ta suy ra phương trình $f'(t) = -\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$ có hai nghiệm trái dấu t_1 và t_2, giả sử $t_1 < 0$ và $t_2 > 0$. Khi đó phương trình $h'(x) = 0$ có hai nghiệm trái dấu là $x_1 = \sqrt[3]{t_1} < 0,\ x_2 = \sqrt[3]{t_2} > 0$.

Với $x = 0 \Rightarrow h(0) = f(0) + 0 = 0$

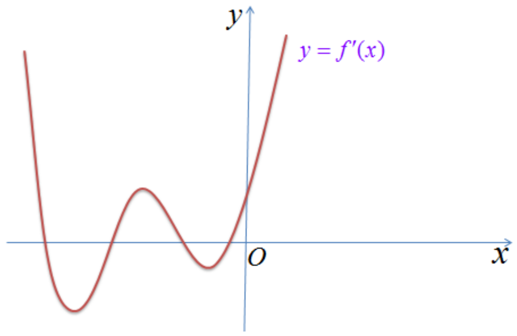
Như vậy, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$+\infty$	↘		↗	0	↗		↘	
$g(x) = \lvert h(x) \rvert$	$+\infty$	↘ 0 ↗		↘	0	↗		↘ 0 ↗	$+\infty$

Vậy $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 85: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 45)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$. Biết $y = f'(x)$ là hàm số bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Ghi Chú!



Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^4\right)-x^2\right|$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^4\right)-x^2$. Ta có: $h'(x)=4x^3f'(x^4)-2x$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow 2x\left[2x^2f'(x^4)-1\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ f'(x^4)=\dfrac{1}{2x^2}\end{array}\right..$$

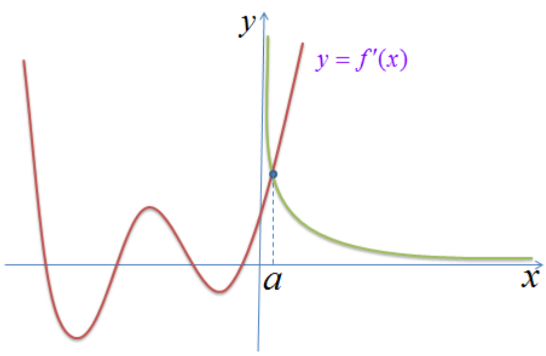
Đặt $x^4=t,\ (t>0)\Rightarrow x^2=\sqrt{t}$. Phương trình $f'(x^4)=\dfrac{1}{2x^2}$ trở thành $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

Xét hàm số $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, $t>0$. $y'=-\dfrac{1}{4\sqrt{t^3}}<0$, $\forall t>0$.

Hàm số $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$, đồ thị nhận trục hoành làm tiệm cận ngang

và nhận trục tung làm tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ nằm ở góc phần tư thứ nhất như hình vẽ.



Dựa vào đồ thị ta có đồ thị $f'(t)$ cắt đồ thị $y=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ tại một điểm có hoành độ dương $t=a$.

Vậy phương trình $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$ có nghiệm duy nhất $t=a>0$.

Ghi Chú!

$$f'(x^4)=\frac{1}{2x^2}\Leftrightarrow x^4=a\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{a}$$

BBT:

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{a}$		0		$\sqrt[4]{a}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$h(-\sqrt[4]{a})$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$h(\sqrt[4]{a})$	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị $h(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm trong đó có một điểm nằm trên trục hoành.

Vậy hàm số $g(x)=|h(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 86: **(ĐTK 2021-Câu 46)** Cho $f(x)$ là hàm bậc bốn thỏa mãn $f(0)=0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{61}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số $g(x)=\left|f(x^3)-3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $f'(x)$ là hàm bậc ba, đạt cực trị tại các điểm $x=-3$ và $x=-1$ nên ta có:

$$f''(x)=a(x+3)(x+1)=a(x^2+4x+3)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\int f''(x)dx=a\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)+C_1$$

Từ BBT, ta có: $f'(-3)=-1\Rightarrow C_1=-1$;

$$f'(-1)=-\frac{61}{3}\Rightarrow a\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)-1=-\frac{61}{3}$$

$$\Rightarrow a=\frac{29}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{29}{2}\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+3x\right)-1=\frac{29}{6}x(x+3)^2-1$$

Ghi Chú!

Xét hàm số: $h(x)=f(x^3)-3x$, ta có:

$h'(x)=3x^2f'(x^3)-3=\frac{29}{2}(x^3+3)^2.x^5-3(x^2+1)$

+) Nếu $x\le 0$ thì $h'(x)<0$

+) Nếu $x>0$ thì $h'(x)=0\Leftrightarrow\frac{29}{6}(x^3+3)^2-\frac{x^2+1}{x^5}=0$ (1)

Dễ thấy, $u(x)=\frac{29}{6}(x^3+3)^2-\frac{x^2+1}{x^5}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to0^+}u(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ nên (1) có nghiệm duy nhất thuộc $(0;+\infty)\Rightarrow h(x)$ có 1 điểm cực trị và $h(0)=f(0)-0=0$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$		0		x_0		$+\infty$
$h'(x)$			$-$		0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy đồ thị $y=h(x)$ có đúng một điểm cực trị và cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $g(x)=|h(x)|=|f(x^3)-3x|$ có đúng 3 điểm cực trị.

➤Dạng ⑥: Tìm tham số để f(x) đạt cực trị tại 1 điểm x0 cho trước

Câu 87: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 36)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y'=8x^7+5(m-2)x^4-4(m^2-4)x^3=x^3\left[\underbrace{8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)}_{g'(x)}\right].$$

Ta xét các trường hợp sau

* Nếu $m^2-4=0\Rightarrow m=\pm2$.

Khi $m=2\Rightarrow y'=8x^7\Rightarrow x=0$ là điểm cực tiểu.

Khi $m=-2\Rightarrow y'=x^4(8x^4-20)\Rightarrow x=0$ không là điểm cực tiểu.

* Nếu $m^2-4\ne0\Rightarrow m\ne\pm2$. Khi đó ta có

$$y' = x^2\left[8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x\right]$$

Số cực trị của hàm $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ bằng số cực trị của hàm $g'(x)$

$$\begin{cases} g'(x) = 8x^5 + 5(m-2)x^2 - 4(m^2-4)x \\ g''(x) = 40x^4 + 100(m-2)x - 4(m^2-4) \end{cases}$$

Nếu $x=0$ là điểm cực tiểu thì $g''(0) > 0$. Khi đó

$$-4(m^2-4) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < m < 2 \Rightarrow m = \{-1;0;1\}$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của *m*.

Câu 88: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 38)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3. **B.** 2. **C.** Vô số. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1$

$= x^3\left(8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)\right)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

* Nếu $m=1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

* Nếu $m=-1$ thì $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x = \sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \end{array}\right.$, nhưng $x=0$ là nghiệm bội chẵn nên không phải cực trị.

* Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x=0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Để $x=0$ là điểm cực tiểu thì $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m=0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ là $m=0$ và $m=1$.

Câu 89: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 47)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

A. 8. **B.** Vô số. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

Ta có $y'=8x^7+5(m-5)x^4-4(m^2-16)x^3$

$=x^3\left[8x^4+5(m-4)x-4(m^2-16)\right]=x^3.g(x)$

Với $g(x)=8x^4+5(m-5)x-4(m^2-16)$.

● Trường hợp 1: $g(0)=0\Leftrightarrow m=\pm4$.

Với $m=4\Rightarrow y'=8x^7$. Suy ra $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m=-4\Rightarrow y'=8x^4(x^3-5)$. Suy ra $x=0$ không là điểm cực trị của hàm số.

● Trường hợp 2: $g(0)\neq0\Leftrightarrow m\neq\pm4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ thì qua giá trị $x=0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0)>0\Leftrightarrow -4<m<4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4<m\le4$. Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 90: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 42)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^8+(m-3)x^5-(m^2-9)x^4+1$

$\Rightarrow y'=8x^7+5(m-3)x^4-4(m^2-9)x^3$.

$y'=0\Leftrightarrow x^3\left(8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)=0\end{array}\right.$$

Xét hàm số $g(x)=8x^4+5(m-3)x-4(m^2-9)$ có $g'(x)=32x^3+5(m-3)$.

Ta thấy $g'(x)=0$ có một nghiệm nên $g(x)=0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0$ $\Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

Với $m=-3$ thì $g(x)=8x^4-30x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0)\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0)>0$ $\Leftrightarrow m^2-9<0 \Leftrightarrow -3<m<3$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

➽Dạng ⑦: Tìm tham số liên quan đến cực trị của hàm đa thức bậc 3 thỏa mãn ĐK

Câu 91: **(ĐTN 2017-Câu 10)** Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

A. $y(-2)=2$. **B.** $y(-2)=22$. **C.** $y(-2)=6$. **D.** $y(-2)=-18$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Vì $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 12a+4b+c=0 \end{cases} (1)\ ; \begin{cases} y(0)=2 \\ y(2)=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=2 \\ 8a+4b+2c+d=-2 \end{cases} (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x^2+2 \Rightarrow y(-2)=-18$.

Câu 92: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 32)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$.

A. $m=1$ **B.** $m=-1$ **C.** $m=5$ **D.** $m=-7$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-4)$; $y''=2x-2m$.

Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-4)x+3$ đạt cực đại tại $x=3$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y'(3)=0 \\ y''(3)<0 \end{cases}$$

Ghi Chú!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-6m+m^2-4=0 \\ 6-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-6m+5=0 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1(L) \\ m=5(TM) \end{array}\right. \\ m>3 \end{cases}.$$

Vậy $m=5$ là giá trị cần tìm.

Câu 93: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 45)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};m=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ **B.** $m=-1;m=1$

C. $m=1$ **D.** $m\neq 0$

Lời giải

Chọn B

$y'=3x^2-6mx$

$$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=4m^3 \\ x=2m \Rightarrow y=0 \end{array}\right. (m\neq 0)$$

Đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị $A(0;4m^3)$ và $B(2m;0)$, $(m\neq 0)$

$$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\left|4m^3.2m\right|=4 \Leftrightarrow 4m^4=4 \Leftrightarrow m=\pm 1.$$

Câu 94: **[MĐ 101-TN BGD 2023 - CÂU 41]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=-x^3+3x^2-3mx+\frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2;5)$?

A. 16. **B.** 6. **C.** 17. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

$y'=-3x^2+6x-3m$

hàm số $y=-x^3+3x^2-3mx+\frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2;5)$ khi và chỉ khi

$y'=0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(-2;5) \Leftrightarrow x^2-2x+m=0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(-2;5)$

$\Leftrightarrow x^2-2x=-m$

$g(x)=x^2-2x \Rightarrow g'(x)=2x-2$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1$

x	-2		1		5
y'		$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	15

Để hàm số có 1 cực trị $\Rightarrow 8 \le -m < 15 \Leftrightarrow -15 < m \le -8 \Rightarrow m \in \{-14;-13;-12;-11;-10;-9;-8\}$

Câu 95: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 41]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \dfrac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2;5)$?

A. 16. **B.** 6. **C.** 17. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

$y' = -3x^2 + 6x - 3m$

hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \dfrac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2;5)$ khi và chỉ khi

$y' = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(-2;5) \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(-2;5)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x = -m$

$g(x) = x^2 - 2x \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	-2		1		5
y'		$-$	0	$+$	
y	8	$\searrow$	-1	$\nearrow$	15

Để hàm số có 1 cực trị $\Rightarrow 8 \le -m < 15 \Leftrightarrow -15 < m \le -8 \Rightarrow m \in \{-14;-13;-12;-11;-10;-9;-8\}$

Câu 96: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 39]** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \dfrac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;8)$?

Ghi Chú!

A. 26. **B.** 36. **C.** 35. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

$y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx-\frac{4}{3}\Rightarrow y'=-x^2+4x+m$.

$y'=0\Leftrightarrow m=x^2-4x$.

Xét hàm số $g(x)=x^2-4x\Rightarrow g'(x)=2x-4$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	-1		2		8
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	32

Hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+2x^2+mx-\frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;8)$ khi và chỉ khi $y'=0$ có đúng một nghiệm bội lẻ thuộc khoảng $(-1;8)$.

Suy ra $5\le m<32$.

Câu 97: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 41] Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+\frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;5)$?

A. 17. **B.** 12. **C.** 16. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: $y'=3x^2-6x+3m$

$\Delta'=9-9m$

$y'=3x^2-6x+3m=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2(x_1<x_2)$

$\Leftrightarrow 9-9m>0\Leftrightarrow m<1$

$m<1\Rightarrow x_1=\frac{3-\sqrt{9-9m}}{3}=1-\sqrt{1-m},x_2=\frac{3+\sqrt{9-9m}}{3}=1+\sqrt{1-m}$

Hàm số $y=x^3-3x^2+3mx+\frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1;5)$ khi và chỉ khi

TH1.

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ -1<x_1<5\le x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<1\\ -1<1-\sqrt{1-m}<5\\ 5\le 1+\sqrt{1-m}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ -2<-\sqrt{1-m}<4 \\ \sqrt{1-m}\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 2>\sqrt{1-m}>-4 \\ \sqrt{1-m}\ge 4 \end{cases} \text{ Loại.}$$

TH2.

$$\begin{cases} \Delta'>0 \\ x_1\le -1<x_2<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ -1<1+\sqrt{1-m}<5 \\ 1-\sqrt{1-m}\le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ -2<\sqrt{1-m}<4 \\ \sqrt{1-m}\ge 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 2\le \sqrt{1-m}<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ 4\le 1-m<16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<1 \\ -3\ge m>-15 \end{cases} \Leftrightarrow -15<m\le -3$$

$$\Rightarrow m\in\{-14;-13;-12;-11;-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$$

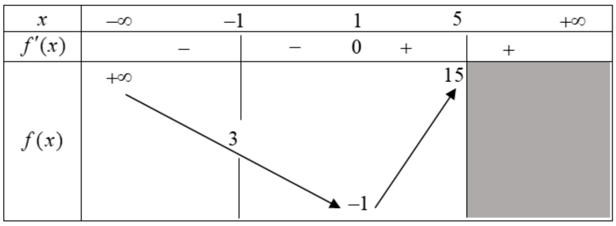
Cách 2:

$y'=3x^2-6x+3m$

YCBT $\Leftrightarrow$ PT $3x^2-6x+3m=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1;5)$.

Xét $3x^2-6x+3m=0 \Leftrightarrow f(x)=x^2-2x=-m$.

Hàm số $f(x)=x^2-2x$ có $f'(x)=2x-2$. Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$. Ta có bảng biến thiên



Từ BBT suy ra điều kiện $3\le -m<15 \Leftrightarrow -15<m\le -3 \Rightarrow m\in\{-14;-13;...;-3\}$. Vậy có 12 giá trị thỏa mãn.

Câu 98: **(ĐTK 2017-Câu 46)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 0 **B.** 6 **C.** -6 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $y'=x^2-2mx+(m^2-1)$

$$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \end{array}\right. \Rightarrow A\left(m-1;\frac{m^3-3m+2}{3}\right) \text{ và } B\left(m+1;\frac{m^3-3m-2}{3}\right)$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB: y=-\frac{2}{3}x+\frac{m\left(m^2-1\right)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A,B$ cách đều đường thẳng $d: y=5x-9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m;\frac{m^3-3m}{3}\right)\in d \Rightarrow \frac{m^3-3m}{3}=5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Với $m=3 \Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d. Tổng các phần tử của S bằng 0.

Dạng ⑧: Tìm tham số liên quan đến cực trị của hàm đa thức bậc 4 trùng phương thỏa mãn ĐK (Không GTTĐ)

Câu 99: **(ĐMH 2017-Câu 8)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có:

$$y'=4x^3+4mx; y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+4mx=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m\ (*) \end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1); B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right); C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-m};-m^2\right); \overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-m};-m^2\right)$

Vì ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2}+m^2.m^2=0 \Leftrightarrow -|m|+m^4=0 \Leftrightarrow m+m^4=0$

$\Leftrightarrow m=-1$ (vì $m<0$)

Vậy với $m=-1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Ghi Chú!

Ghi Chú!

Câu 100: **(ĐTK 2017-Câu 31)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4-2(m-3)x^2+1$ không có cực đại?

A. $1\le m\le 3$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $1<m\le 3$

Lời giải

Chọn A

TH1: Nếu $m=1\Rightarrow y=4x^2+1$ nên đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(0;1)$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m>1$

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m-3)\ge 0\Leftrightarrow m\le 3$. Suy ra $1<m\le 3$

Vậy $1\le m\le 3$.

Câu 101: **(DE MH BGD 2023 – Câu 41)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=-x^4+6x^2+mx$ có ba điểm cực trị?

A. 17. **B.** 15. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-4x^3+12x+m$. Xét phương trình
$y'=0\Leftrightarrow -4x^3+12x+m=0 \quad (1)$.

Để hàm số có ba điểm cực trị thì phương trình (1) phải có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow m=4x^3-12x$.

Xét hàm số $g(x)=4x^3-12x$ có $g'(x)=12x^2-12$. Cho
$g'(x)=0\Leftrightarrow 12x^2-12=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi $-8<m<8$.
Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-7,-6,-5,...,5,6,7\}$.
Vậy có 15 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu đề bài.

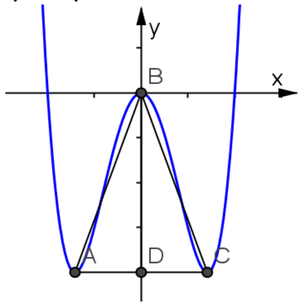
Câu 102: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 45)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $m>0$. **B.** $m<1$. **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$. **D.** $0<m<1$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện để hàm số có 3 cực trị là $m>0$.



$$y' = 4x^3 - 4mx\,;\, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{m} \\ x_3 = \sqrt{m} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = -m^2 \\ y_3 = -m^2 \end{array}\right.$$

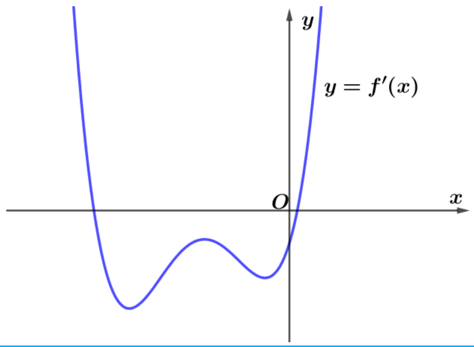
Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân có đáy bằng $2\sqrt{m}$, đường cao bằng m^2. (như hình minh họa)

Ta được $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC.BD = \sqrt{m}.m^2$. Để tam giác có diện tích nhỏ hơn 1 thì $\sqrt{m}.m^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Dạng ⑨: Cực trị hàm hợp f(u), g(f(x)),hàm liên kết…có tham số

Câu 103: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 48)** Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$. Biết $y=f'(x)$ là hàm bậc bốn và có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.



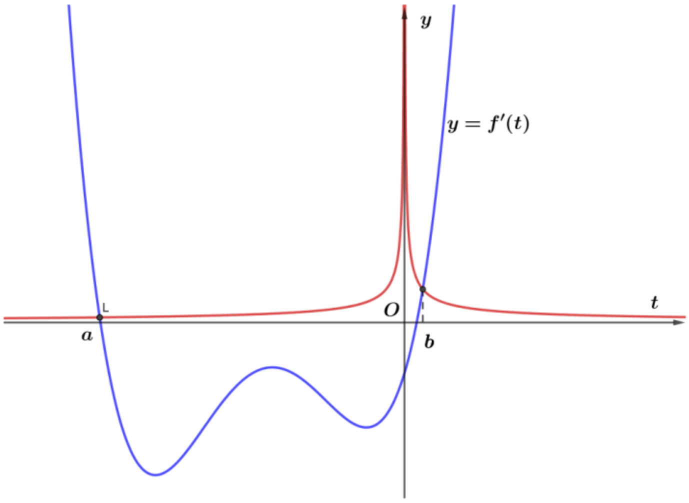
Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $h(x)=f\left(x^3\right)-x$. Ta có: $h'(x)=3x^2 f'\left(x^3\right)-1$.

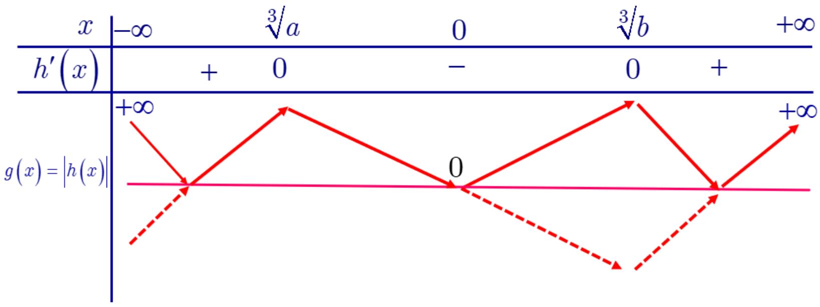
Với $x\neq 0$ thì $h'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2 f'\left(x^3\right)-1=0 \Leftrightarrow f'\left(x^3\right)=\dfrac{1}{3x^2}$ $(*)$.

Ghi Chú!



Đặt $t=x^3$. Khi đó phương trình $(*)$

trở thành: $f'(t)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=a\,(a<0) \\ t=b\,(b>0) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[3]{a}\,(a<0) \\ x=\sqrt[3]{b}\,(b>0) \end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3\right)-x\right|$ có 5 cực trị.

Chú ý: Do $y=f'(x)$ là hàm bậc bốn và có hệ số x^4 dương nên $y=f(x)$ là hàm số bậc năm có hệ số của x^5 dương suy ra $y=f\left(x^3\right)$ là hàm số bậc 15 và có hệ số x^{15} dương. Do đó $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

Dạng ⑩: Cực trị hàm hợp f(u), g(f(x)),hàm liên kết…có tham số

Câu 104: **(ĐTK 2018-Câu 43)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

$y=\left|f(x)\right|=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m\right|$

Ta có: $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$.; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=-1$ hoặc $x=2$.

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-5$	$\nearrow$	m	$\searrow$	$m-32$	$\nearrow$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y=|f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi $\begin{cases} m>0 \\ m-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<5$. Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là $m=1; m=2; m=3; m=4$.

Câu 105: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 50)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-7)(x^2-9), \forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có BBT của hàm $y=|h(x)|=\left|x^3+5x\right|$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\|h(x)\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'(x)=\left|x^3+5x\right|'.f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)$. Rõ ràng $x=0$ là điểm cực trị của hàm số $y=|h(x)|$.

Ta có: $f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+5x\right|+m=7 \\ \left|x^3+5x\right|+m=3 \\ \left|x^3+5x\right|+m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x^3+5x\right|=7-m \\ \left|x^3+5x\right|=3-m \\ \left|x^3+5x\right|=-3-m \end{array}\right.$.

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $7-m>0 \Leftrightarrow m<7 \Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6\}$.

Vậy có 6 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 106: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 49)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-8)(x^2-9)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $f(|x^3+6x|+m)$ có ít nhất 3 cực trị?

A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f(x)$ có $f'(x)=0$ tại $x=8, x=\pm 3$.

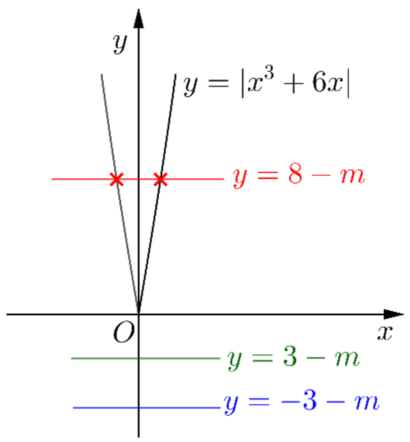
Đặt $g(x)=f(|x^3+6x|+m)$

Ta có: $g'(x)=\left[f(|x^3+6x|+m)\right]'=\dfrac{(3x^2+6)(x^3+6x)}{|x^3+6x|}.f'(|x^3+6x|+m)$ $(x\neq 0)$.

Với $x=0$ là 1 cực trị của $g(x)$

Để $g(x)$ có ít nhất 3 cực trị thì $g'(x)$ phải có ít nhất 3 nghiệm bội lẻ hay $f'(|x^3+6x|+m)=0$ có ít nhất 2 nghiệm.

$f'(|x^3+6x|+m)=0 \to \left[\begin{array}{l}|x^3+6x|+m=-3\\|x^3+6x|+m=3\\|x^3+6x|+m=8\end{array}\right.$. Ta có đồ thị $u(x)=|x^3+6x|$ (với) $m>0$:



Để $f'(|x^3+6x|+m)=0$ có ít nhất 2 nghiệm thì: $8-m>0\to m<8\to m\in[1;7]$.

Vậy có 7 giá trị m.

Câu 107: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 50)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-10)(x^2-25), \forall x\in\mathbb{R}$.. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^3+8x|+m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị

A. 9. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có BBT của hàm $y=\left|h(x)\right|=\left|x^3+8x\right|$ như sau

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\left\|h(x)\right\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g'(x)=\left|x^3+8x\right|'.f'\left(\left|x^3+8x\right|+m\right)$. Rõ ràng $x=0$ là điểm cực trị của hàm $y=\left|h(x)\right|$

Ta có: $f'\left(\left|x^3+8x\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+8x\right|+m=10\\ \left|x^3+8x\right|+m=5\\ \left|x^3+8x\right|+m=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+8x\right|=10-m\\ \left|x^3+8x\right|=5-m\\ \left|x^3+8x\right|=-5-m\end{array}\right.$.

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $10-m>0\Leftrightarrow m<10\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Với f,h là các hàm liên tục trên tập số thực, thì nếu c là điểm cực trị của $f(h(x))$ thì c phải là điểm cực trị của g hoặc là $h(c)$ là điểm đạt cực trị của f. Bây giờ $m\geq 10$ và với hàm $h(x)=\left|x^3+8x\right|+m$, ta có f chỉ có các điểm đạt cực trị là $10,\pm 5$. Trong khi chỉ có duy nhất điểm đạt cực trị của h là 0 cùng với $h(x)\geq m\geq 10$ với mọi x, và thêm nữa thì phương trình $h(x)=10$ có không quá một nghiệm là $x=0$. Bởi vậy, $m\geq 10$ không thỏa mãn yêu cầu.

Khi $m\leq 9$ và $m\neq 5$, thì trên từng khoảng mở bên trái và phải số 0 ta có

$$g'(x)=\frac{\left(3x^2+8\right)\left(h(x)-9\right)\left(h(x)^2-25\right)|x|}{x}.$$

Cho thấy $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua 0 và vì thế nó đạt cực trị tại $x=0$. Kết hợp thêm việc đa thức $h(x)-9$ có đúng hai nghiệm phân biệt khác 0, và $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua các nghiệm đó. Cho thấy $m\leq 9$ và $m\neq 5$ thỏa yêu cầu.

Nếu $m=5$ lúc đó $g'(x)=x\left(3x^2+8\right)^2\left(h(x)-9\right)\left(h(x)^2-25\right)$. Ta cũng thấy $g'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua 0 và hai nghiệm phân biệt khác 0 của $h(x)-9$, cho thấy là cũng thỏa mãn.

Vậy m là các số nguyên dương nhỏ hơn 10.

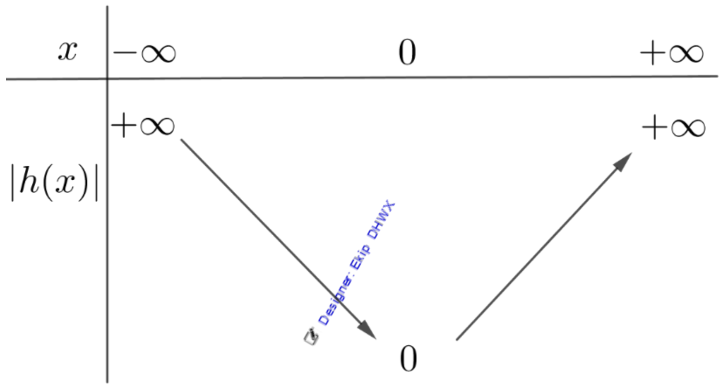
Câu 108: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 50)** Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-9)\left(x^2-16\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x)=f\left(\left|x^3+7x\right|+m\right)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16. **B.** 9. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có BBT của hàm $y=\left|h(x)\right|=\left|x^3+7x\right|$ như sau:



Ta có $g'(x)=\left|x^3+7x\right|'.f'\left(\left|x^3+7x\right|+m\right)$. Rõ ràng $x=0$ là điểm cực trị của hàm $y=\left|h(x)\right|$.

Ta có: $f'\left(\left|x^3+5x\right|+m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+7x\right|+m=9\\\left|x^3+7x\right|+m=4\\\left|x^3+7x\right|+m=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x^3+7x\right|=9-m\\\left|x^3+7x\right|=4-m\\\left|x^3+7x\right|=-4-m\end{array}\right.$.

Để hàm số $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì phương trình $g'(x)=0$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt khác 0 và $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua ít nhất 2 trong số các nghiệm đó.

Từ BBT ta có $9-m>0\Leftrightarrow m<9\Rightarrow m\in\{1;2;3;4;5;6,7,8\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 109: **(TN BGD 2022-MD101)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\left|x^4-2mx^2+64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị

A. 5. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 11.

Lời giải

Chọn A

Xéthàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx + 64$. $(*)$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 - 2mx^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^3 - 2mx + 64 = 0 & (1) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) luôn có một nghiệm $x \neq 0$ nên đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$ cắt Ox ít nhất hai điểm và $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x^4 - 2mx^2 + 64x\right) = +\infty$.

Suy ra để hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 64x\right|$ có 3 điểm cực trị thì hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 64x$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm đơn

$m = x^2 + \dfrac{16}{x}$ có đúng một nghiệm đơn.

Xéthàm số: $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$, $f'(x) = 2x - \dfrac{16}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq 12$.

Suy ra: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z}_+^* \\ m \leq 12 \end{cases} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; ...; 11; 12\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left|x^4 - 2mx^2 + 64x\right|$ có đúng ba điểm cực trị.

------------ *Hết* -------------

Câu 110: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = \left|x^4 + 2ax^2 + 8x\right|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 2. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chon D

(DE TN BGD 2022 - MD 102)ét hàm số $f(x) = x^4 + 2ax^2 + 8x$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3 + 4ax + 8$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4ax + 8 = 0 \Leftrightarrow a = -x^2 - \dfrac{2}{x}$ (Do $x = 0$ không thỏa mãn nên $x \neq 0$).

(DE TN BGD 2022 - MD 102)ét hàm số $g(x)=-x^2-\frac{2}{x}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$g'(x)=-2x+\frac{2}{x^2}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+\frac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

Dễ thấy phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt, trong đó có ít nhất một nghiệm đơn $x=0$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $a=g(x)$ có một nghiệm đơn duy nhất $\Leftrightarrow a\ge -3$.

Do a nguyên âm nên $a\in\{-3;-2;-1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm của tham số a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 111: (DE TN BGD 2022-MD 103)Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y=\left|x^4+ax^2-8x\right|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 11. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Xét $g(x)=x^4+ax^2-8x$

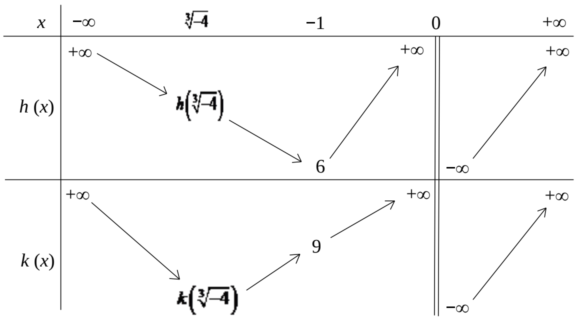
$g'(x)=4x^3+2ax-8$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3+2ax-8=0 \Leftrightarrow -a=\frac{2x^3-4}{x}=2x^2-\frac{4}{x}=h(x)$ (do $x=0$ không là nghiệm)

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3+ax-8=0 \Leftrightarrow -a=\frac{x^3-8}{x}=x^2-\frac{8}{x}=k(x) \end{array}\right.$$

$h'(x)=4x+\frac{4}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=-1$.

$k'(x)=2x+\frac{8}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{-4}$.



Để hàm số $y=|g(x)|$ có đúng 3 cực trị $\Leftrightarrow -a\le 6 \Leftrightarrow a\ge -6$.

Mà a là số nguyên âm nên $a\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 112: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Có bao nhiêu số nguyên dương của tham số m để hàm số $y=|x^4-mx^2-64x|$ có đúng 3 điểm cực trị?

A. 23. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x)=x^4-mx^2-64x$; $g'(x)=4x^3-2mx-64$; có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

$$g(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^3-mx-64=0\end{array}\right.\Rightarrow g(x)=0$$ có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

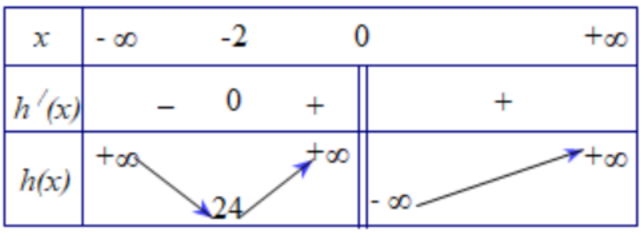
Do đó hàm số $y=|g(x)|$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $y=g(x)$ có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow$ $g'(x)$ đổi dấu đúng 1 lần (*).

Nhận xét nếu $x=0\Rightarrow g'(0)=-64<0$ $\Rightarrow g(x)$ không có cực trị (hay $x=0$ không thỏa mãn).

Nên $g'(x)=0\Leftrightarrow m=2x^2-\dfrac{32}{x}$. Đặt $h(x)=2x^2-\dfrac{32}{x}$.

Có $h'(x)=4x+\dfrac{32}{x^2}=\dfrac{4(x^3+8)}{x^2}$; $h'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra $(*)\Leftrightarrow m\le 24$.

Kết hợp với điều kiện m nguyên dương suy ra $m\in\{1;2;3;...;24\}$.

§3- GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

Ghi Chú!

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. Định nghĩa: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên tập D.

- Số M gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu:

$$\begin{cases} f(x)\le M, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=M \end{cases}$$

- Kí hiệu: $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$.

- Số m gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên D nếu:

$$\begin{cases} f(x)\ge m, \forall x\in D \\ \exists x_0\in D, f(x_0)=m \end{cases}$$

- Kí hiệu: $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$.

2. Phương pháp chung: Để tìm GTLN, GTNN của hàm số $y=f(x)$ trên D.

- Ta tính y'
- Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm triệt tiêu hoặc không tồn tại
- Lập bảng biến thiên.
- Từ bảng biến thiên ta suy ra GTLN, GTNN.

- Nếu $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(a\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f\left(x\right)=f\left(b\right) \end{cases}$.

- Nếu $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left[a;b\right]$ thì $\begin{cases} \min\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(b\right) \\ \max\limits_{[a;b]} f(x)=f\left(a\right) \end{cases}$.

3. Phương pháp tìm GTLN, GTNN của hàm số trên đoạn $\left[a;b\right]$

- Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thì luôn có GTLN, GTNN trên đoạn đó và để tìm GTLN, GTNN ta làm như sau:
- Tính y' và tìm các điểm $x_1, x_2,...,x_n$ mà tại đó y' triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm.
- Tính các giá trị $f(x_1), f(x_2),..., f(x_n), f(a), f(b)$. Khi đó

- $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)=\max\{f(x_1),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$
- $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)=\min\{f(x_1),...,f(x_n),f(a),f(b)\}$

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Ghi Chú!

Dạng ①: GTLN, GTNN của f(x) trên đoạn biết biểu thức f(x)

Câu 1: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 32)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-2$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -2. **B.** -11. **C.** -26. **D.** -27.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)=x^4-10x^2-2$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;9]$.

Ta có

$f'(x)=4x^3-20x$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-20x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in[0;9]\\x=\sqrt{5}\in[0;9]\\x=-\sqrt{5}\notin[0;9]\end{array}\right.$$

$f(0)=-2;\quad f\left(\sqrt{5}\right)=-27;\quad f(9)=5749$.

So sánh 3 giá trị trên và kết luận $\min\limits_{x\in[0;9]}f(x)=-27$.

Câu 2: **(ĐMH 2017-Câu 6)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

A. $\min\limits_{[2;4]}y=6$ **B.** $\min\limits_{[2;4]}y=-2$ **C.** $\min\limits_{[2;4]}y=-3$ **D.** $\min\limits_{[2;4]}y=\dfrac{19}{3}$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;4]$

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2};y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-1$ (loại)

Suy ra $y(2)=7;y(3)=6;y(4)=\dfrac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]}y=6$ tại $x=3$.

Câu 3: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 23)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^3-7x^2+11x-2$ trên đoạn $[0\ ;2]$.

A. $m=11$ **B.** $m=0$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=3$

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số trên đoạn $[0\ ;2]$. Ta có $y'=3x^2-14x+11$ suy ra

$y'=0\Leftrightarrow x=1$

Tính $f(0)=-2; f(1)=3, f(2)=0$. Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(0)=-2=m$.

Câu 4: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 24)** Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$.

A. $M=9$ **B.** $M=8\sqrt{3}$ **C.** $M=1$ **D.** $M=6$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=4x^3-4x=4x\left(x^2-1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1(l)\end{array}\right.$$

Với $x=0\Rightarrow y(0)=3$; với $x=1\Rightarrow y(1)=2$; với $x=\sqrt{3}\Rightarrow y\left(\sqrt{3}\right)=6$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{3}\right]$ là $M=6$.

Câu 5: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 15)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^4-x^2+13$ trên đoạn $[-2;3]$.

A. $m=\dfrac{51}{4}$. **B.** $m=\dfrac{49}{4}$. **C.** $m=13$. **D.** $m=\dfrac{51}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=4x^3-2x$.

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.;\ y(0)=13,\ y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{51}{4},\ y(-2)=25,\ y(3)=85.$$

Vậy: $m=\dfrac{51}{4}$.

Câu 6: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 20)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Ghi Chú!

A. $m=\dfrac{17}{4}$ **B.** $m=10$ **C.** $m=5$ **D.** $m=3$

Lời giải

Chọn D

Đặt $y=f\left(x\right)=x^2+\dfrac{2}{x}$

Ta có $y'=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$, $y'=0\Rightarrow x=1\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Khi đó $f\left(1\right)=3, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17}{4}, f\left(2\right)=5$

Vậy $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f\left(x\right)=f\left(1\right)=3$.

Câu 7: **(ĐTK 2018-Câu 18)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^4-4x^2+5$ trêm đoạn $\left[-2;3\right]$ bằng

A. 50 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 122

Lời giải

Chọn A

$f'(x)=4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\in\left[-2;3\right]$;

$f\left(0\right)=5; f\left(\pm\sqrt{2}\right)=1; f\left(-2\right)=5; f\left(3\right)=50$

Vậy $\underset{\left[-2;3\right]}{Max}\, y=50$.

Câu 8: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 23)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $\left[-2;3\right]$ bằng:

A. 201. **B.** 2. **C.** 9. **D.** 54.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $\left[-2;3\right]$.

Ta có: $y'=4x^3-8x$. $y'=0\Leftrightarrow 4x^3-8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\in\left[-2;3\right]\\x=\pm\sqrt{2}\in\left[-2;3\right]\end{array}\right.$.

Ta có: $f\left(-2\right)=9$, $f\left(3\right)=54$, $f\left(0\right)=9$, $f\left(-\sqrt{2}\right)=5$, $f\left(\sqrt{2}\right)=5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;3\right]$ bằng $f\left(3\right)=54$.

Ghi Chú!

Câu 9: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 18)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 2x^2 - 7x$ trên đoạn $0;4$ bằng

A. -259. **B.** 68. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

$TXD \quad D = [0;4]$. $y' = 3x^2 + 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 (n) \\ x = -\dfrac{7}{3} (l) \end{array}\right.$

$y(0) = 0;\ y(1) = -4;\quad y(4) = 68$. $\min\limits_{x\in[0;4]} y = y(1) = -4$

Câu 10: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 21)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2$ trên đoạn $[-4;-1]$ bằng

A. -4. **B.** -16. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \notin [-4;-1] \\ x = -2 & \in [-4;-1] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-4) = -16$; $y(-2) = 4$; $y(-1) = 2$. Nên $\min\limits_{[-4;-1]} y = -16$.

Câu 11: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 22)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 25. **B.** $\dfrac{51}{4}$. **C.** 13. **D.** 85.

Lời giải

Chọn A

$y = f(x) = x^4 - x^2 + 13$; $y' = 4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;2] \\ x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;2] \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \in [-1;2] \end{array}\right.$

$f(-1) = 13;\ f(2) = 25;\ f(0) = 13;\ f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{51}{4};\ f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{51}{4}$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - x^2 + 13$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 25.

Câu 12: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 20)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x+2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. -16. **B.** 20. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f\left(x\right)=x^3-3x+2 \Rightarrow f'\left(x\right)=3x^2-3$

Có: $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Mặt khác: $f\left(-3\right)=-16, f\left(-1\right)=4, f\left(1\right)=0, f\left(3\right)=20$.

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} f\left(x\right)=20$.

Câu 13: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 17)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+2$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ bằng

A. 20. **B.** 4. **C.** 0. **D.** -16.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Mode 7 $f\left(x\right)=x^3-3x+2$.

Start -3.

end3step 1.

$\Rightarrow$ **Chọn D**

Cách 2: $f'\left(x\right)=3x^2-3$. $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \in \left[-3;3\right]$.

$f\left(-3\right)=-16$; $f\left(-1\right)=4$; $f\left(1\right)=0$; $f\left(3\right)=20$.

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất là -16.

Câu 14: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 19)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng

A. 18. **B.** 2. **C.** -18. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$f\left(-3\right)=-18;\ f\left(-1\right)=2;\ f\left(1\right)=-2;\ f\left(3\right)=18$.

Câu 15: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 21)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ bằng

A. 18. **B.** -18. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn B

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Mà $f(-3) = -18;\ f(-1) = 2;\ f(1) = -2;\ f(3) = 18.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng $-18.$

Câu 16: **(ĐTK 2020-L1-Câu 19)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

$f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ liên tục trên $[-1;2]$ và

$f'(x) = -4x^3 + 24x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x = \sqrt{6} & (L) \\ x = -\sqrt{6} & (L) \end{array}\right.$

Ta có:

$f(-1) = 12;\ f(2) = 33;\ f(0) = 1$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng 33 tại $x = 2$.

Câu 17: **(ĐTK 2020-L2-Câu 28)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 10x^2 + 2$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 2. **B.** -23. **C.** -22. **D.** -7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 20x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{array}\right.$.

Chỉ có $x = 0 \in (-1;2)$.

Ta có $f(-1) = -7$, $f(2) = -22$, $f(0) = 2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $f(x) = \dfrac{ax+1}{bx+c}(a, b, c \in \mathbb{R})$ bằng -22.

Ghi Chú!

Câu 18: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 36)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. $32\sqrt{2}$. **B.** -40. **C.** $-32\sqrt{2}$. **D.** -45.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=3x^2-24=3(x^2-8)$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} x=2\sqrt{2} & (\text{nhận}) \\ x=-2\sqrt{2} & (\text{loại}) \end{array}\right.$.

$f(2)=-40$, $f(19)=6403$, $f(2\sqrt{2})=-32\sqrt{2}$.

Do đó $\min\limits_{[2;19]} f(x)=-32\sqrt{2}$.

Câu 19: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 26)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-21x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -36. **B.** $-14\sqrt{7}$. **C.** $14\sqrt{7}$. **D.** -34.

Lời giải

Chọn B

Xét trên đoạn $[2;19]$ hàm số liên tục.

Ta có $f'(x)=3x^2-21$. Cho $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-21=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{7}\in[2;19] \\ x=-\sqrt{7}\notin[2;19] \end{array}\right.$.

Khi đó $f(2)=-34$, $f(\sqrt{7})=-14\sqrt{7}$, $f(19)=6460$

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f(\sqrt{7})=-14\sqrt{7}$.

Câu 20: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 35)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-30x$ trên đoạn $2;19$ bằng

A. $20\sqrt{10}$. **B.** -63. **C.** $-20\sqrt{10}$. **D.** -52.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[2;19]$

Ta có $f'(x)=3x^2-30$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{10}\in[2;19] \\ x=-\sqrt{10}\notin[2;19] \end{array}\right.$

Mà $f(2)=-52;\ f\left(\sqrt{10}\right)=-20\sqrt{10}\approx-63,25;\ f(19)=6289$

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=-20\sqrt{10}$

Câu 21: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 29)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-33x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng

A. -72 . **B.** $-22\sqrt{11}$. **C.** -58 . **D.** $22\sqrt{11}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=3x^2-33$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2=11\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{11}$

Xét trên $[2;19]$ ta có $x=\sqrt{11}\in[2;19]$

Ta có $f(2)=-58;\ f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11};\ f(19)=6232$.

Vậy $\min\limits_{[2;19]} f(x)=f\left(\sqrt{11}\right)=-22\sqrt{11}$

Câu 22: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 31)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-10x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -4. **C.** -13. **D.** -29.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=4x^3-20x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\sqrt{5}\\ x=-\sqrt{5}\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		$\sqrt{5}$		9	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		-4	$\searrow$	-29	$\nearrow$	5747	

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;9]} f(x)=-29$ khi $x=\sqrt{5}$.

Câu 23: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 32)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-4$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

Ghi Chú!

A. -39. **B.** -40. **C.** -36. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

+) Ta có $f'(x)=4x^3-24x$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-24x=0\Leftrightarrow 4x\left(x^2-6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\sqrt{6}\notin(0;9)\\x=\sqrt{6}\in(0;9)\end{array}\right..$$

+) Ta có: $f(0)=-4$; $f\left(\sqrt{6}\right)=-40$; $f(9)=5585$.

Vậy $\min\limits_{[0;9]} f(x)=f\left(\sqrt{6}\right)=-40$.

Câu 24: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 31)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-12x^2-1$ trên đoạn $[0;9]$ bằng

A. -28. **B.** -1. **C.** -36. **D.** -37.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=4x^3-24x;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{6}\\x=-\sqrt{6}\notin[0;9]\end{array}\right.$$

$f(0)=-1$; $f\left(\sqrt{6}\right)=-37$; $f(9)=5588$

Vậy $\min\limits_{[0;9]} f(x)=-37$

Câu 25: **(ĐTK 2021-Câu 31)** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-2x^2+3$ trên đoạn $[0;2]$. Tổng $M+m$ bằng

A. 11. **B.** 14. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Xét: $f(x)=x^4-2x^2+3$

$$\Rightarrow f'(x)=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=0 & (\text{N})\\x=1 & (\text{N})\\x=-1 & (\text{L})\end{array}\right.$$

Ghi Chú!

Ta có: $\left.\begin{matrix} f(0)=3 \\ f(1)=2 \\ f(2)=11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} M=11 \\ m=2 \end{cases}$. Vậy $M+m=13.$

Câu 26: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 31)** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=0$. **B.** $x=3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=f(x)=-x^3+3x \Rightarrow f'(x)=-3x^2+3$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=1 \\ x=-1\notin[0;3] \end{matrix}\right.$.

Ta có $f(0)=0;\ f(1)=2;\ f(3)=-18$.

Vậy hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=1$.

Câu 27: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 35)** Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

A. $x=-2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=0 \\ x=2\notin[-2;1] \end{matrix}\right.$

Ta có $y(-2)=-21,\ y(0)=-1,\ y(1)=-3$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} y=-1$ tại $x=0$.

Câu 28: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 36)** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^2-3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x=1 \\ x=-1\notin[0;3] \end{matrix}\right.$.

Ta có: $y(0)=4, y(3)=22, y(1)=2$

Vậy hàm số $y=x^3-3x+4$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ tại điểm $x=1$.

Câu 29: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 37)** Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y=x^3+3x^2+1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm

A. $x=2$. **B.** $x=0$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn B

$y=x^3+3x^2+1$

$y'=3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$.

$y(-1)=3; y(0)=1; y(2)=21$.

Vậy GTNN trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số bằng 1 tại $x=0$.

Câu 30: **(TN BGD 2022-MD101)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. -12. **B.** 10. **C.** 15. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Xéthàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$

$\Rightarrow f'(x)=3x^2-6x-9$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & \in [-2;2] \\ x=3 & \notin [-2;2] \end{array}\right.$.

Ta có:

$f(-2)=8; f(-1)=15; f(2)=-12$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng 15.

Câu 31: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Giá trị trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng

A. 15. **B.** 10. **C.** -1. **D.** -12.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=3x^2-6x-9$.

Ghi Chú!

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \quad (\text{loại}) \end{array}\right.$$

Do đó $f(-2)=8$, $f(-1)=15$, $f(2)=-12$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x)=f(-1)=15$.

Câu 32: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 33)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $m<-1$ **B.** $3<m\le 4$ **C.** $m>4$ **D.** $1\le m<3$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=\dfrac{2+m}{1}=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại)

* TH 2. $-1-m<0 \Leftrightarrow m>-1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{4+m}{3}=3 \Leftrightarrow m=5$ suy ra $m>4$.

Dạng ②: GTLN, GTNN của f(x) trên khoảng biết biểu thức f(x)

Câu 33: **(ĐTK 2017-Câu 19)** Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$ **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$ **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$ **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức CauChy)

$$y=3x+\frac{4}{x^2}=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}.\frac{3x}{2}.\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9} \quad (\text{do } x>0)$$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{3x}{2}=\dfrac{4}{x^2} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$. Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Ghi Chú!

Xét hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$;Ta có

$y = 3x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow y' = 3 - \frac{8}{x^3}$

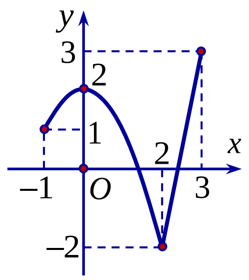
Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = 3 \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x	0		$\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\frac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$

Dạng ③: GTLN, GTNN của hàm số g(x) biết các BBT, đồ thị

Câu 34: **(ĐTK 2019-Câu 16)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ ta có:

$M = \max\limits_{[-1;3]} y = f(3) = 3$ và $m = \min\limits_{[-1;3]} y = f(2) = -2$

Khi đó $M - m = 5$.

Câu 35: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 33]** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(4) > f(0)$. **B.** $f(0) > f(2)$. **C.** $f(5) > f(6)$. **D.** $f(4) > f(2)$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = x(x-4)$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Khi đó lập bảng biến thiên, dựa vào bảng biến thiên ta được $f(0) > f(2)$.

Câu 36: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 33]Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(4) > f(0)$. **B.** $f(0) > f(2)$.

C. $f(5) > f(6)$. **D.** $f(4) > f(2)$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = x(x-4)$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.

Khi đó lập bảng biến thiên, dựa vào bảng biến thiên ta được $f(0) > f(2)$.

Câu 37: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 38]Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(5) > f(6)$. **B.** $f(0) > f(2)$.

C. $f(4) > f(0)$. **D.** $f(4) > f(2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta lập bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(0)$ là cực đại nên $f(0) > f(2)$

Ghi Chú!

Dạng ④: Bài toán ứng dụng, tối ưu, thực tế

Câu 38: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 34)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{3}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu ?

A. 144 (m/s) **B.** 36 (m/s) **C.** 243 (m/s) **D.** 27 (m/s)

Lời giải

Chọn B

Ta có : $v=s'=-t^2+12t$; $v'=-2t+12$, $v'=0\Leftrightarrow t=6$

BBT

t	0		6		9
v'		+	0	−	
v	↗		36		↘

Nhìn bbt ta thấy vận tốc đạt giá trị lớn nhất khi $t=6$.Giá trị lớn nhất là $v(6)=36m/s$.

Câu 39: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 41)** Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $24(m/s)$. **B.** $108(m/s)$. **C.** $18(m/s)$. **D.** $64(m/s)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $v(t)=s'(t)=-\frac{3t^2}{2}+12t$;

$v'(t)=-3t+12$; $v'(t)=0\Leftrightarrow t=4$.

$v(0)=0;v(4)=24;v(6)=18$. Suy ra vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong 6 giây đầu là $24(m/s)$.

Câu 40: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 31)** Ông A dự định sử dụng hết $6,5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể).

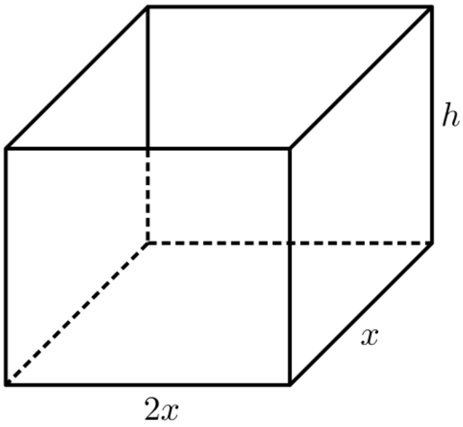
Ghi Chú!

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $2,26\,m^3$. **B.** $1,61\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,50\,m^3$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử bể cá có kích thước như hình vẽ.

Ta có: $2x^2+2xh+4xh=6,5 \Leftrightarrow h=\dfrac{6,5-2x^2}{6x}$.

Do $h>0$, $x>0$ nên $6,5-2x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Lại có $V=2x^2h=\dfrac{6,5x-2x^3}{3}=f(x)$, với $x\in\left(0;\dfrac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

$f'(x)=\dfrac{13}{6}-2x^2$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{39}}{6}$.

x	0		$\dfrac{\sqrt{39}}{6}$		$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\dfrac{13\sqrt{39}}{54}$	$\searrow$	

Vậy $V\le f\left(\dfrac{\sqrt{39}}{6}\right)=\dfrac{13\sqrt{39}}{54}\approx 1,50\,m^3$.

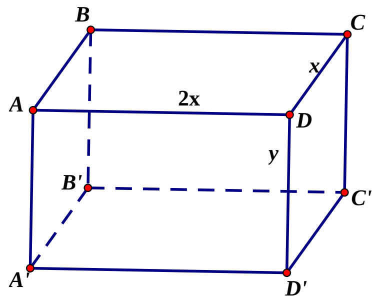
Câu 41: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 26)** Ông A dự định sử dụng hết $6,7\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,57\,m^3$. **B.** $1,11\,m^3$. **C.** $1,23\,m^3$. **D.** $2,48\,m^3$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn A



Gọi chiều rộng của hình hộp là x, chiều dài là $2x$, chiều rộng là y.

Tổng diện tích các mặt bên là: $S = 2x^2 + 2(xy + 2xy) = 6,7$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6xy = 6,7 \Leftrightarrow y = \dfrac{6,7 - 2x^2}{6x}$

Thể tích $V = 2x^2y = \dfrac{1}{3}(6,7x - 2x^3)$. Xét hàm $f(x) = \dfrac{1}{3}(6,7x - 2x^3)$ với

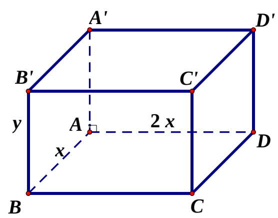
$x \in (0; \sqrt{\dfrac{6,7}{2}})$, giá trị lớn nhất của nó là $1,57$ đạt được tại $x = \sqrt{\dfrac{6,7}{6}}$.

Câu 42: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 30)** Ông A dự định sử dụng hết $5\,m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

A. $1,01\,m^3$. **B.** $0,96\,m^3$. **C.** $1,33\,m^3$. **D.** $1,51\,m^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có thể tích bể cá $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có: $2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{5 - 2x^2}{6x}$ (Điều kiện kiện $y > 0 \Leftrightarrow 5 - 2x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{\dfrac{5}{2}}$)

Ghi Chú!

$\Rightarrow V = 2x^2\dfrac{5-2x^2}{6x} = \dfrac{5x-2x^3}{3}$ $\Rightarrow V' = \dfrac{5-6x^2}{3}$ $\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow 5-6x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$

x	0		$\sqrt{\frac{5}{6}}$		$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	$\searrow$	0

$\Rightarrow V_{\max} = \dfrac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01\, m^3$.

Câu 43: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 32)** Ông A dự định sử dụng hết $5,5\ m^2$ kính để làm một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?:

A. $1,17\ m^3$. **B.** $1,01\ m^3$. **C.** $1,51\ m^3$. **D.** $1,40\ m^3$.

Lời giải

Chon A

Gọi $x, 2x, h$ lần lượt là chiều rộng, dài, cao của bể cá.

Ta có $2x^2 + 2\left(xh + 2xh\right) = 5,5 \Leftrightarrow h = \dfrac{5,5-2x^2}{6x}$ (Điều kiện $0 < x < \sqrt{\dfrac{5,5}{2}}$).

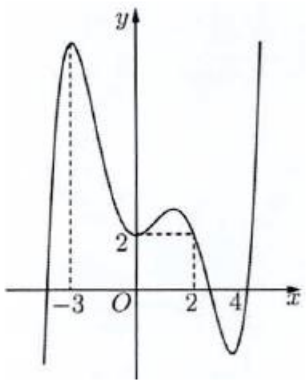
Thể tích bể cá $V = 2x^2.\dfrac{5,5-2x^2}{6x} = \dfrac{1}{3}(5,5x-2x^3)$. $V' = \dfrac{1}{3}(5,5-6x^2)$.

$V' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{5,5}{6}}$.

Lập BBT suy ra $V_{\max} = \dfrac{11\sqrt{33}}{54} \approx 1,17\ m^3$.

Dạng ⑤: GTLN, GTNN liên quan hàm số hợp g(f(x)),f(u(x)),... khi biết các đồ thị, BBT

Câu 44: **(ĐTK 2021-Câu 39)** Cho hàm số $f(x)$, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - 4x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{3}{2};2\right]$ bằng



A. $f\ \ 0\ .$ **B.** $f\ \ -3\ \ +6.$

C. $f\ \ 2\ \ -4.$ **D.** $f\ \ 4\ \ -8.$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có

$$g'(x)=2f'(2x)-4=0 \Leftrightarrow f'(2x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=a<-3\\2x=0\\2x=2\\2x=b>4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{a}{2}<-\dfrac{3}{2}\\x=0\\x=1\\x=\dfrac{b}{2}>2\end{array}\right.$$

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{b}{2}$	$-\frac{3}{2}$		0		1		2	$\frac{a}{2}$	$+\infty$
y'		0		$+$	0	$+$	0	$-$		0	
y											

Vậy $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};2\right]} g(x)==g(1)=f(2)-4$

Ghi Chú!

Dạng ⑥: Tìm m để hs f(x) có GTLN, GTNN thỏa mãn đk cho trước

Câu 45: **(TN BGD 2022-MD101)** Cho hàm số $f(x)=(m-1)x^4-2mx^2+1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. $-\dfrac{13}{3}$. **B.** 4. **C.** $-\dfrac{14}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$f'(x)=4(m-1)x^3-4mx=4x((m-1)x^2-m)$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{m}{m-1} \end{array}\right.$ ($m=1$ không thỏa yêu cầu bài toán)

Vì $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)\Rightarrow x=2$ là nghiệm của $f'(x)=0$

$\Rightarrow \dfrac{m}{m-1}=4\Rightarrow m=4m-4\Rightarrow m=\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-\dfrac{8}{3}x^2+1$

$f(0)=1,\ f(3)=\dfrac{81}{3}-\dfrac{72}{3}+\dfrac{3}{3}=\dfrac{12}{3}=4$

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x)=4$

Câu 46: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Cho hàm số $f(x)=mx^4+2(m-1)x^2$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. 2. **B.** -1. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=4mx^3+4(m-1)x$.

Do $f(x)$ là hàm đa thức và

$\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)\Rightarrow f'(1)=0\Leftrightarrow 4m+4(m-1)=0\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Thay $m=\dfrac{1}{2}$ vào hàm số ban đầu ta được

$y=\dfrac{1}{2}x^4+2\left(\dfrac{1}{2}-1\right)x^2=\dfrac{1}{2}x^4-x^2\Rightarrow y'=2x^3-2x=2x(x-1)(x+1)$.

Ta có BBT:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy với $m=\frac{1}{2}$, thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)(TM)$.

Dựa vào BBT ta có $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=4$.

Câu 47: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+2(a+4)x^2-1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng

A. -17 **B.** -16 **C.** -1 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $f'(1)=0$

$\Rightarrow 4a+4(a+4)=0 \Leftrightarrow a=-2$ và $f(x)=-2x^4+4x^2-1$

Ta có $f(0)=-1$, $f(1)=1$, $f(2)=-17$

Vậy $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=-17$

Câu 48: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng

A. -9. **B.** 4. **C.** 1. **D.** -8.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1 \Rightarrow f'(x)=4(a+3)x^3-4ax$.

Hàm số đạt GTLN tại $x=2$ và liên tục trên đoạn $[0;3]$.

$\Rightarrow f'(2)=0 \Leftrightarrow 32(a+3)-8a=0 \Leftrightarrow a=-4$.

Với $a=-4$ ta có $f(x)=-x^4+8x^2+1$ với $x\in[0;3]$.

$f'(x)=-4x^3+16x$.

Ghi Chú!

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ \ (TM) \\ x=2\ \ (TM) \\ x=-2\ \ (L) \end{array}\right.$.

Khi đó $f(0)=1$, $f(2)=17$, $f(3)=-8$.

Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)=17$ (thỏa mãn giả thiết).

Vậy $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=-8$.

Câu 49: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 35)** Cho hàm số $y=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thoả mãn $\mathop{Min}\limits_{[1;2]} y+\mathop{Max}\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\le 0$ **B.** $m>4$ **C.** $0<m\le 2$ **D.** $2<m\le 4$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

☑ Nếu $m=1 \Rightarrow y=1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m<1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$, suy ra

$\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m+2}{3}=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m=5$ (loại).

☑ Nếu $m>1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$,

Suy ra $\min\limits_{[1;2]} y+\max\limits_{[1;2]} y=y(2)+y(1) \Leftrightarrow \dfrac{2+m}{3}+\dfrac{1+m}{2}=\dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m=5$.

Dạng ⑦: Tìm tham số để hs chứa dấu GTTĐ, hàm hợp, hàm liên kết có GTLN, GTNN thỏa mãn đk cho trước

Câu 50: **(ĐTK 2020-L1-Câu 42)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^3-3x+m\right|$ trên đoạn $[0;3]$ bằng 16. Tổng tất cả các phần tử của S là:

A. -16. **B.** 16. **C.** -12. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Xét $u=x^3-3x+m$ trên đoạn $0;3$ có $u'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=1\in 0;3$.

Khi đó $\begin{cases} \max\limits_{0;3} u = \max\ \ u\ \ 0\ \ ,u\ \ 1\ \ ,u\ \ 3\ \ = \max\ \ m, m-2, m+18\ \ = m+18 \\ \min\limits_{0;3} u = \min\ \ u\ \ 0\ \ ,u\ \ 1\ \ ,u\ \ 3\ \ = \min\ \ m, m-2, m+18\ \ = m-2 \end{cases}$.

Suy ra

$$\underset{0;3}{M\text{ax}}\, f\ \ x\ = \max\ \ |m-2|,|m+18|\ \ = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |m+18| = 16 \\ |m+18| \ge |m-2| \end{cases} \\ \begin{cases} |m-2| = 16 \\ |m-2| \ge |m+18| \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=-14 \end{array}\right..$$

Do đó tổng tất cả các phần tử của S bằng -16.

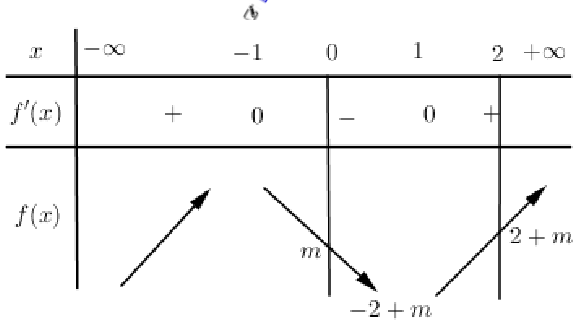
Câu 51: **(ĐTK 2018-Câu 36)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x+m|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3. Số phần tử của S là

A. 1 **B.** 2 **C.** 0 **D.** 6

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:



TH 1: $2+m<0 \Leftrightarrow m<-2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (loại).

TH 2: $\begin{cases} 2+m>0 \\ m<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<0$. Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

TH 3: $\begin{cases} m>0 \\ -2+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m<2$. Khi đó : $|m-2|=2-m<2<2+m$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

Ghi Chú!

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

TH 4: $-2+m>0 \Leftrightarrow m>2$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

Câu 52: **(ĐTK 2020-L2-Câu 48)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$. Số phần tử của S là

A. 6. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

Nếu $m=1$ thì $f(x)=\dfrac{x+1}{x+1}=1, \forall x\neq -1$. Khi đó $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$ (thỏa mãn).

Do đó $m=1$ thỏa mãn bài toán.

Nếu $m\neq 1$ thì hàm số $f(x)$ đơn điệu trên $[0;1]$.

TH1: $\left(\dfrac{m+1}{2}\right).m\leq 0$ thì $\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=0, \max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{\dfrac{|m+1|}{2};|m|\right\}$.

Do đó: $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2 \Leftrightarrow 0+\dfrac{\left|\dfrac{m+1}{2}+m\right|+\left|\dfrac{m+1}{2}-m\right|}{2}=2$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3m+1|+|m-1|}{4}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>1: m=2(l) \\ 1>m\geq -\dfrac{1}{3}: m=3(l) \\ m<-\dfrac{1}{3}: m=-2(l) \end{array}\right.$. (so với điều kiện TH1)

TH2: $\left(\dfrac{m+1}{2}\right).m>0$ thì

$\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=\min\left\{\dfrac{|m+1|}{2};|m|\right\}, \max\limits_{[0;1]}|f(x)|=\max\left\{\dfrac{|m+1|}{2};|m|\right\}$

Do đó $\max\limits_{[0;1]}|f(x)|+\min\limits_{[0;1]}|f(x)|=2$

$\Leftrightarrow \dfrac{\left|\left|\dfrac{m+1}{2}+m\right|-\left|\dfrac{m+1}{2}-m\right|\right|}{2}+\dfrac{\left|\dfrac{m+1}{2}+m\right|+\left|\dfrac{m+1}{2}-m\right|}{2}=2$

Ghi Chú!

$$\Leftrightarrow \frac{\left||3m+1|-|m-1|\right|}{4}+\frac{|3m+1|+|m-1|}{4}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{5}{3} \end{array}\right. (\text{t/m}).$$

Vậy $S=\left\{1;\frac{-5}{3}\right\}$.

§4- ĐƯỜNG TIỆM CẬN

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. Định nghĩa 1:

- Đường thẳng $y=y_0$ là ***đường tiệm cận ngang*** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=y_0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=y_0$.

2. Định nghĩa 2:

- Đường thẳng $x=x_0$ được gọi là ***đường tiệm cận đứng*** của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty; \ \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \ , \ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty.$$

3. Phương pháp chung tìm tiệm cận của đồ thị hàm số:

- Tìm tập xác định của hàm số $f(x)$
- Tìm các giới hạn của $f(x)$ khi x dần tới các biên của miền xác định và dựa vào định nghĩa của các đường tiệm cận để kết luận

Chú ý:

- *Đồ thị hàm số f chỉ có thể có tiệm cận ngang khi tập xác định của nó là một khoảng vô hạn hay một nửa khoảng vô hạn (nghĩa là biến x có thể tiến đến $+\infty$ hoặc $-\infty$)*
- *Đồ thị hàm số f chỉ có thể có tiệm cận đứng khi tập xác định của nó có một trong các dạng sau: $(a;b)$,$[a;b)$, $(a;b]$, $(a\,;+\infty)$; $(-\infty; a)$ hoặc là hợp của các tập hợp này và tập xác định không có một trong các dạng sau: R , $[c;+\infty)$, $(-\infty; c]$, $[c;d]$*

- ***Tiệm cận ngang đối với hàm phân thức:*** $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành độ
- Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đồ thị hàm có tiệm cận ngang là đường thẳng : $y=\dfrac{A}{B}$ trong đó A, B lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x)$ và $Q(x)$
- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Ghi Chú!

Dạng ①: Câu hỏi lý thuyết về tiệm cận, không chứa tham số

Câu 1: **(ĐMH 2017-Câu 2)** Cho hàm số $y=f(x)$ có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

D. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào định nghĩa đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chọn đáp án **C**

Dạng ②: Tiệm cận của đồ thị hàm số không chứa căn thức, không tham số

Câu 2: **(ĐTN 2017-Câu 1)** Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$?

A. $x=1$ **B.** $y=-1$ **C.** $y=2$ **D.** $x=-1$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ và $\lim\limits_{x\to-1^+} y=+\infty$ nên $x=-1$ là tiệm cận đứng.

Câu 3: (ĐTK 2020-L2-Câu 15) Tiệm cận ngang của đồ thi hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ là

A. $y=-2$. B. $y=1$. C. $x=-1$. D. $x=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1; \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$.

Câu 4: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 11)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-1}$ là

A. $y=\dfrac{1}{4}$. **B.** $y=4$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-1$.

Lời giải

Chọn B

Ghi Chú!

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x+1}{x-1}$ là $y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{4}{1}=4$.

Câu 5: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 9)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1}{x-1}$ là

A. $y=1$. **B.** $y=\dfrac{1}{5}$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $D=R\backslash\{1\}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=5$. Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=5$.

Câu 6: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 18)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là:

A. $y=\dfrac{1}{2}$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=2$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2}{1}=2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=\dfrac{2}{1}=2$.

Vậy: $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

Câu 7: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 6)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$.

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$

Do đó đường thẳng $y=3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 8: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 20)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Ghi Chú!

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+2}{x-1}=+\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 9: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 12)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-3}$ là

A. $x=-3$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x-1}{x-3}=-\infty;\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x-1}{x-3}=+\infty$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-3}$ là $x=3$.

Câu 10: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 9)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to -1^+}y=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{2x-2}{x+1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to -1^-}y=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{2x-2}{x+1}=+\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 11: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 3)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+3}$ là

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to(-3)^+}\dfrac{x+1}{x+3}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to(-3)^-}\dfrac{x+1}{x+3}=+\infty$ nên $x=-3$ là tiệm cận của đồ thị hàm số.

Câu 12: **(ĐTK 2021-Câu 6)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+4}{x-1}$ là đường thẳng:

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+4}{x-1}=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+4}{x-1}=-\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ghi Chú!

Câu 13: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 20)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1}{x-1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có tiệm cận đứng là $x=1$

.

Câu 14: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 23)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=-1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-}y=-\infty;\lim\limits_{x\to 2^+}y=+\infty$.

Vậy đường thẳng $x=2$ là TCĐ của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 15: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 24)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\dfrac{-1}{2}$. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty;\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty$

Vậy tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=1$.

Câu 16: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 4)** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình:

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-2$

.

Câu 17: **(TN BGD 2022-MD101)** Tiệm cận ngang của đồ thì hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình:

Ghi Chú!

A. $x=-2$. **B.** $x=1$. **C.** $y=1$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-1}{2x+4}=1$ suy ra tiệm cận ngang của đồ là đường thẳng $y=1$.

Câu 18: **(TN BGD 2022-MD101)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là

A. $(9;+\infty)$. **B.** $(25;+\infty)$.

C. $(31;+\infty)$. **D.** $(24;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Đk(TN BGD 2022-MD101)đ: $x>-1$

$\log_5(x+1)>2\Leftrightarrow\log_5(x+1)>\log_5 25\Leftrightarrow x+1>25\Leftrightarrow x>24$

Câu 19: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{2x+4}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=-2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{2x+4}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{2x+4}=1$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng có phương trình $y=1$.

Câu 20: **(DE MH BGD 2023 – Câu 20)** Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{3x-1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y=\dfrac{1}{3}$ **B.** $y=-\dfrac{2}{3}$ **C.** $y=-\dfrac{1}{3}$ **D.** $y=\dfrac{2}{3}$

Lời giải

Chọn D

Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{3x-1}$ có phương trình $y=\dfrac{2}{3}$.

Câu 21: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 8]** Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-1}{x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x-1}{x-2}=-\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là $x=2$.

Câu 22: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 8] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{3x-1}{x-2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x-1}{x-2}=-\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là $x=2$.

Câu 23: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 24] Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x-2}$ có phương trình là

A. $x=\dfrac{1}{2}$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Do $\lim\limits_{x\to 2^\pm}\dfrac{3x-1}{x-2}=\pm\infty$ nên ta có tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=2$.

Câu 24: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 12) Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}=\dfrac{x+1}{x+4}$ (với điều kiện xác định), do đó đồ thị hàm có 1 tiệm cận đứng.

Câu 25: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 15) Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1}$.

A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\neq\pm 1$.

Ghi Chú!

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1 \Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

Mặc khác:

$$\lim_{x\to1} y = \lim_{x\to1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x=1$ không là đường tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{(x-4)}{(x+1)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} y = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2-5x+4}{x^2-1} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-4)}{(x+1)} = +\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ là đường tiệm cận đứng.

Câu 26: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 16)** Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-4}$ có mấy tiệm cận.

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=\pm2$

$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\dfrac{1}{4}$ nên đường thẳng $x=2$ không phải là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-2^+}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{1}{x+2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{1}{x+2}=-\infty$, nên đường thẳng $x=-2$ là tiệm cân đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x-2}{x^2-4}\right)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy có đồ thị có hai đường tiệm cận.

Câu 27: **(ĐTK 2018-Câu 16)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ **B.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ **C.** $y=\sqrt{x^2-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x+1}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{x+1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{x+1}=-\infty$ nên đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ghi Chú!

Câu 28: **(ĐTK 2020-L1-Câu 27)** Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận ngang:

Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=5$$ nên

đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(5x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x+1}{x+1}=\dfrac{6}{2}=3$ nên

$x=1$ không là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to(-1)^+} y=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{5x^2-4x-1}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{1}{x+1}.\frac{5x^2-4x-1}{x-1}\right)=-\infty$$

vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x-1}=-4<0 \end{cases}$.

Khi đó, đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Dạng ③: Tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn, không chứa tham số

Câu 29: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 27)** Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. **B.** $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **C.** $y=\dfrac{1}{x^4+1}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ có tiệm cận đứng là $x=0$.

Đồ thị các hàm số ở các đáp án B,C,D đều không có tiệm cận đứng do mẫu vô nghiệm.

Câu 30: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 18)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=[-9;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

• $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\dfrac{1}{6}$.

Câu 31: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 22)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}$ là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus -1;0$. Ta có

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to-1^+}\left[\frac{1}{x+1}.\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right]=+\infty.$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to-1^-}\left[\frac{1}{x+1}.\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\right]=-\infty.$$

Do đó đường $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Ta có

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2+x\quad\sqrt{x+4}+x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1\quad\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

Do đó đường $x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có duy nhất một tiệm cận đứng là đường $x=-1$.

Câu 32: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 18)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+25}-5}{x^2+x}$ là

Ghi Chú!

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=[-25;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=\dfrac{1}{10}$.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+25}+5\right)}=+\infty$

vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\sqrt{x+25}+5\right)=\sqrt{24}+5>0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ và $x\to(-1)^+$ thì $x>-1\Rightarrow x+1>0$

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to -1^-} y=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 33: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 19)** Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+x}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định hàm số $D=[-16;+\infty)\setminus\{-1;0\}$.

Ta có

$\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=\dfrac{1}{8}$

.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{(x+1)x}=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=+\infty$.

vì $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(\sqrt{x+16}+4\right)=\sqrt{15}+4>0$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)=0$ và $x\to(-1)^+$ thì $x>-1\Rightarrow x+1>0$.

Tương tự $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+16}+4\right)}=-\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là $x=-1$.

Câu 34: **(ĐTN 2017-Câu 8)** Tìm tất cả các tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}$.

A. $x=-3$ và $x=-2$. **B.** $x=-3$.

C. $x=3$ và $x=2$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to2^+}\frac{(2x-1)^2-(x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{(2x-1)^2-(x^2+x+3)}{(x^2-5x+6)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to2^+}\frac{(3x+1)}{(x-3)\left(2x-1+\sqrt{x^2+x+3}\right)}=-\frac{7}{6}$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\frac{7}{6}$. Suy ra đường thẳng $x=2$ **không** là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

$\lim\limits_{x\to3^+}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=+\infty;\lim\limits_{x\to3^-}\frac{2x-1-\sqrt{x^2+x+3}}{x^2-5x+6}=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Dạng ④: Tiệm cận đồ thị hàm số f(x) dựa vào BBT không tham số

Câu 35: (DE TN BGD 2022-MD 103)Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình:

A. $x=-1$. **B.** $y=-1$. **C.** $y=-2$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Chọn D

Ta thấy: $\lim\limits_{x\to-2^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$.

Vậy tiệm cận đứng của hàm số đã cho là $x=-2$.

Câu 36: (DE TN BGD 2022-MD 104)Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-1

Tiệm cận đứng của đồ thị đã cho là đường thẳng có phương trình:

A. $y=-1$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} f(x)=+\infty$, suy ra đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=-2$.

Câu 37: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 19] Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	3	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	3

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho có phương trình là

A. $x=-1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình là $x=1$.

Câu 38: (ĐTK 2017-Câu 11) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hỏi đồ thị của hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$ $\quad -2$		0		$+\infty$
y'	(không xác định)	$+$	||		
y	(không xác định)	$-\infty$ ↗	$+\infty$ || 1	↘	0

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có :

$\lim\limits_{x\to -2^+} f\left(x\right)=-\infty$, suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=+\infty$, suy ra đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=0$, suy ra đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 39: **(ĐTK 2019-Câu 26)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y		$\nearrow$	$+\infty$ || 3	$\nearrow$	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=5 \Rightarrow$ đường thẳng $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)=2 \Rightarrow$ đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=+\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

KL: Đồ thị hàm số có tổng số ba đường tiệm cận.

Câu 40: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 28)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-4 || $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bản biến thiên ta có

$\lim\limits_{x\to 0^+} y=+\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -\infty} y=2 \Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là 2

Câu 41: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 24)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$		0		
y	0	$\searrow$	$-\infty \Vert 2$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên đã cho ta có:.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 42: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 28)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có báng biến thiên như sau:

x	-∞		0		3		+∞
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\infty \Vert 2$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Nhìn bảng biến thiên ta thấy x=0 hàm số không xác định nên x=0 là TCĐ của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)=3 \Rightarrow y=3$ là TCN của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ là TCN của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Câu 43: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 23)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	0	↘	-4 || $+\infty$	↘	-3	↗	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

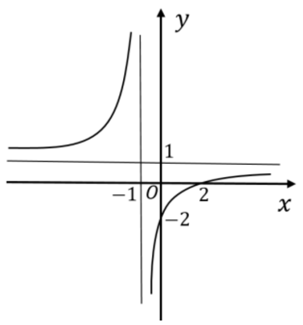
Chọn C

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng có phương trình $y=3$ và $y=0$.

Và $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ nên hàm số có 1 tiệm cận đứng là đường thẳng có phương trình $x=0$.

Dạng ⑤: Tiệm cận đồ thị hàm số f(x) dựa vào đồ thị không tham số

Câu 44: **(DE MH BGD 2023 - Câu 7)** Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và trục hoành là



A. $(0;-2)$. **B.** $(2;0)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị, ta dễ thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có tọa độ $(2;0)$.

Ghi Chú!

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

❶. Hàm số bậc ba $y=ax^3+bx^2+cx+d\left(a\neq 0\right)$.

•Tập xác định: $D=R.$

•Giới hạn:

- Với $a>0$ thì $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$.
- Với $a<0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$.

•Đạo hàm và cực trị: $y'=3ax^2+2bx+c$. Khi đó:

- Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{y'}>0$.
- Gọi $A\left(x_1;y_1\right)$ và $B\left(x_2;y_2\right)$ là hai tọa độ điểm cực trị thì theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a} \\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{3a} \end{cases}$.
- Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta'_{y'}\leq 0$.

Chú ý: Đối với hàm bậc 3 ta luôn có $y_{CD}>y_{CT}$ và:

- Nếu $a>0$ thì $x_{CD}<x_{CT}$.
- Nếu $a<0$ thì $x_{CD}>x_{CT}$.

•Bảng biến thiên

TH1. Hàm số có 2 điểm cực trị x_1,x_2.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$CĐ$	↘	CT	↗	$+\infty$

Hệ số $a>0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$CĐ$	↘	$-\infty$

Hệ số $a<0$

TH2. Hàm số không có cực trị

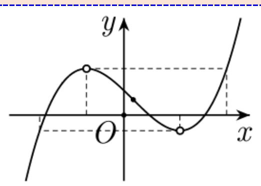
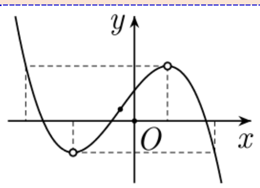
x	$-\infty$		$+\infty$
y'			
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Hệ số $a>0$

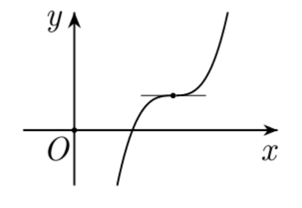
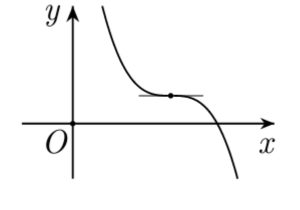
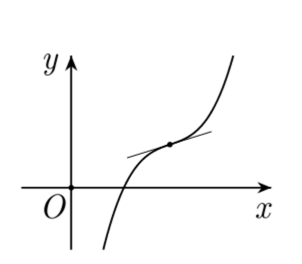
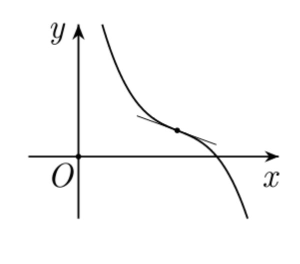
x	$-\infty$		$+\infty$
y'			
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

Hệ số $a<0$

•Đồ thị hàm số

$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$		$a>0$	$a<0$
❶	• $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt		

Ghi Chú!

❷	• $y'=0$ có nghiệm kép		
❸	• $y'=0$ vô nghiệm		

2. Hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c\left(a\neq 0\right)$

• **Tập xác định:** $D=R$.

• **Giới hạn:**

- Với $a>0$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=+\infty$.
- Với $a<0$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$.

• **Đạo hàm và cực trị:** $y'=4ax^2+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$ nên $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=-\dfrac{b}{2a}\end{array}\right.$.

- Với $ab\geq 0$: hàm số có một điểm cực trị $x=0$.
- Với $ab<0$: hàm số có ba điểm cực trị $x=0, x=\pm\sqrt{\dfrac{-b}{2a}}$.

• **Bảng biến thiên**

☑ **TH1:** Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt.

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$CĐ$	↘	CT	↗	$+\infty$

$a>0$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$CĐ$	↘	CT	↗	$CĐ$	↘	$-\infty$

$a<0$

☑ **TH2:** Phương trình $y'=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	CT	↗	$+\infty$

$a>0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	$CĐ$	↘	$-\infty$

$a<0$

• **Đồ thị hàm trùng phương** $y=ax^4+bx^2+c\left(a\neq 0\right)$:

3. Hàm số bậc nhất / bậc nhất $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$:

• **Tập xác định:** $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

• **Đạo hàm:** $y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}, \forall x\neq -\dfrac{d}{c}$.

- Nếu $ad-bc>0$: hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

- Nếu $ad-bc<0$: hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

◆Giới hạn, tiệm cận

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}$ suy ra $y=\dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}} y=\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}}\dfrac{ax+b}{cx+d}=\infty$ suy ra $x=-\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

◆Bảng biến thiên

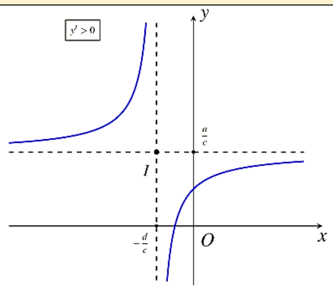
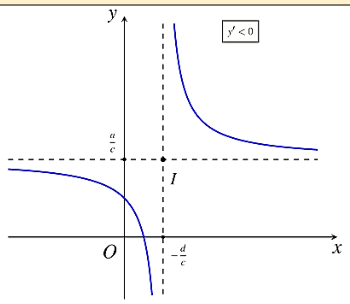
x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{a}{c}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\dfrac{a}{c}$

$ad-bc>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\dfrac{a}{c}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{a}{c}$

$ad-bc<0$

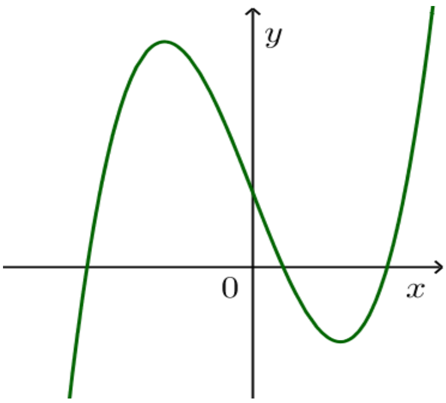
◆Đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq 0, ad-bc\neq 0\right)$

$ad-bc>0$	$ad-bc<0$
	

Ⓑ Dạng toán cơ bản

➽Dạng ①: Nhận dạng hàm số - đồ thị

Câu 1: **(ĐMH 2017-Câu 1)** Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=-x^2+x-1$ **B.** $y=-x^3+3x+1$

C. $y=x^4-x^2+1$ **D.** $y=x^3-3x+1$

Lời giải

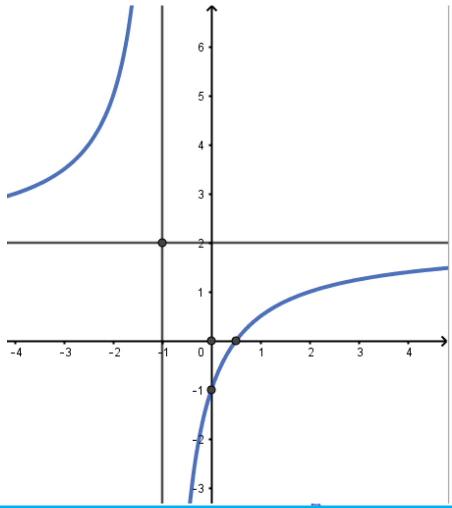
Ghi Chú!

Chọn D

Từ đồ thị : $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$ và đây là đồ thị hàm bậc ba nên ta chọn phương án $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 2: **(ĐTK 2017-Câu 23)** Cho đường cong hình vẽ bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

A. $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$ **B.** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ **C.** $y = \dfrac{2x-2}{x-1}$ **D.** $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$

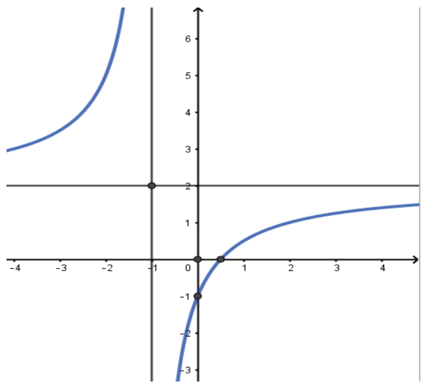


Lời giải

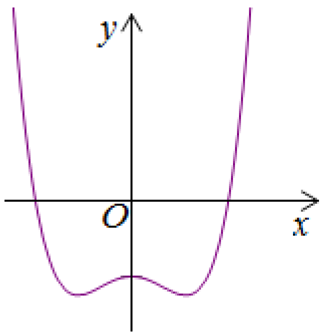
Chọn B

Dựa vào đồ thị suy ra tiệm cận đứng $x = -1$ loại C, D

Đồ thị hàm số giao với trục hoành có hoành độ dương suy ra chọn B



Câu 3: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 5)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = -x^3 + x^2 - 1$ **B.** $y = x^4 - x^2 - 1$

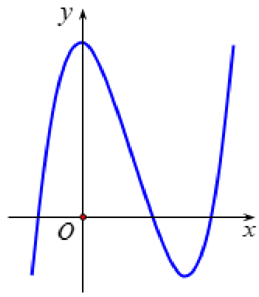
C. $y = x^3 - x^2 - 1$ **D.** $y = -x^4 + x^2 - 1$

Lời giải

Chọn B

Đây là hình dáng của đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a > 0$.

Câu 4: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 5)** Đường cong ở hình bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ **B.** $y = -x^4 + 2x^2 + 1$

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 3$

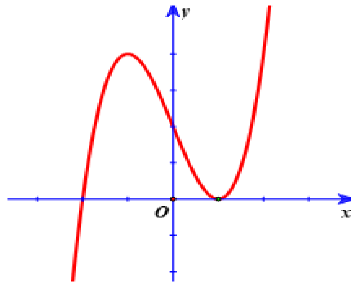
Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba nên loại đáp án B và

C. Mặt khác dựa vào đồ thị ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ nên hệ số của x^3 dương nên ta chọn đáp án $y = x^3 - 3x^2 + 3$.

Câu 5: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 6)** Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = x^3 - 3x + 2$ **B.** $y = x^4 - x^2 + 1$

C. $y = x^4 + x^2 + 1$ **D.** $y = -x^3 + 3x + 2$

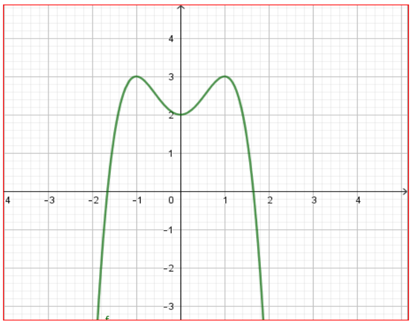
Lời giải

Chọn A

Đồ thị hình vẽ là đồ thị hàm số bậc ba có hệ số $a > 0$ nên chỉ có hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ thỏa mãn điều kiện trên

Câu 6: **(ĐTK 2018-Câu 11)** Đường cong trong hình bên là của đồ thị hàm số nào dưới đây?

Ghi Chú!



A. $y=-x^4+2x^2+2$ **B.** $y=x^4-2x^2+2$

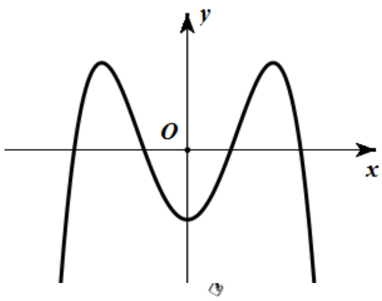
C. $y=x^3-3x^2+2$ **D.** $y=-x^3+3x^2+2$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số trên là đồ thị hàm trùng phương có 3 cực trị và có $a<0$.

Câu 7: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 11)** Đường cong trong hình vẽ bên là của hàm số nào dưới đây



A. $y=x^4-3x^2-1$. **B.** $y=x^3-3x^2-1$.

C. $y=-x^3+3x^2-1$. **D.** $y=-x^4+3x^2-1$.

Lời giải

Chọn D

Vì đồ thị có dạng hình chữ M nên đây là hàm trùng phương. Do đó loại B và

C.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=-\infty$ nên loại **A.**

Câu 8: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 8)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A. $y=x^4-2x^2-1$. **B.** $y=-x^4+2x^2-1$.

C. $y=x^3-x^2-1$. **D.** $y=-x^3+x^2-1$.

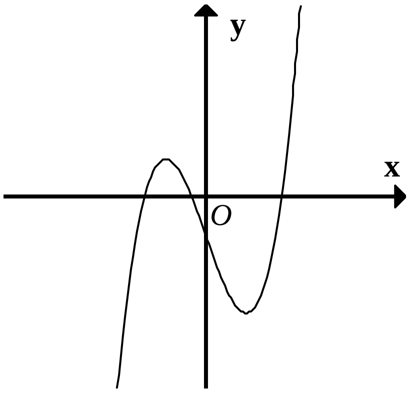
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị ta thấy hàm số đã cho là hàm số dạng $y=ax^4+bx^2+c$ với $a>0$ nên chọn đáp án A

Ghi Chú!

Câu 9: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 6)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=-x^4+x^2-1$. **B.** $y=x^4-3x^2-1$.

C. $y=-x^3-3x-1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

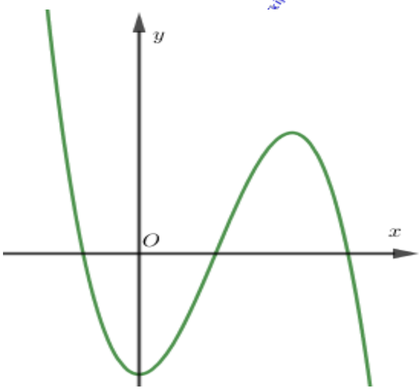
Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số là đồ thị của hàm số bậc ba nên loại A và **B.**

Đồ thi hàm số bậc ba có hệ số $a>0$ nên D đúng.

Câu 10: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 4)** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y=x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^4-x^2-2$.

C. $y=-x^4+x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x^2-2$.

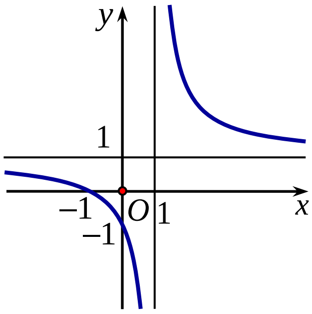
Lời giải

Chọn D

Dựa trên hình dáng đồ thị, ta loại các đáp án B và **D.** Mặt khác từ đồ thị, ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên loại đáp án **A**

Câu 11: **(ĐTK 2019-Câu 15)** Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

Ghi Chú!



A. $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$.   **B.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

C. $y=x^4+x^2+1$.   **D.** $y=x^3-3x-1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có: $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0$, $\forall x\neq 1$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

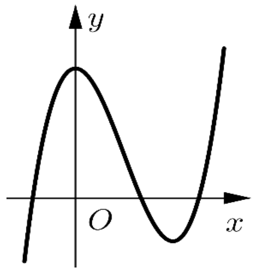
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1\Rightarrow y=1$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} y=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=-\infty$.

$\Rightarrow x=1$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị đã cho là của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Câu 12: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 6)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x^2+3$.   **B.** $y=-x^3+3x^2+3$.

C. $y=x^4-2x^2+3$.   **D.** $y=-x^4+2x^2+3$.

Lời giải

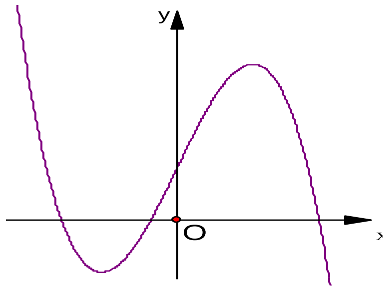
Chọn A

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nên loại C và

D.

Khi $x\to-\infty$ thì $y\to-\infty$ nên hệ số $a>0$. Vậy chọn **A.**

Câu 13: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 10)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên.



A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

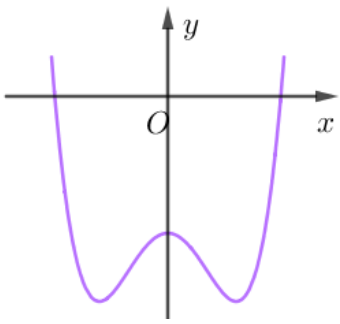
C. $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Lời giải

Chọn B

Trong bốn hàm số đã cho thì chỉ có hàm số $y=-x^3+3x+1$ (hàm số đa thức bậc ba với hệ số $a<0$) có dạng đồ thị như đường cong trong hình.

Câu 14: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 2)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=x^3-3x^2-2$. **B.** $y=x^4-2x^2-2$.

C. $y=-x^3+3x^2-2$. **D.** $y=-x^4+2x^2-2$.

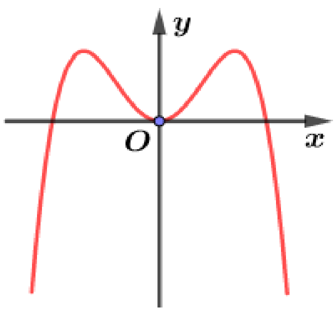
Lời giải

Chọn B

Quan sát đò thị ta thấy đây là đồ thị của hàm số $y=ax^4+bx^2+c\left(a>0\right)$.

Vậy chọn
B.

Câu 15: **(ĐTK 2020-L1-Câu 9)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong dưới đây?



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^4-2x^2$.

Ghi Chú!

C. $y=x^3-3x^2$. **D.** $y=-x^3+3x^2$.

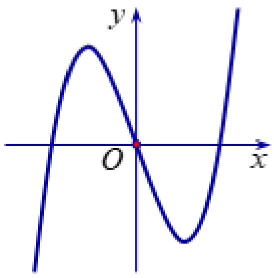
Lời giải

Chọn A

Từ hình dạng của đồ thị các phương án C và D loại.

Nhận thấy $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$ suy ra hệ số của x^4 âm nên phương án A được chọn.

Câu 16: (ĐTK 2020-L2-Câu 14) Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^3-3x$. B. $y=-x^3+3x$.

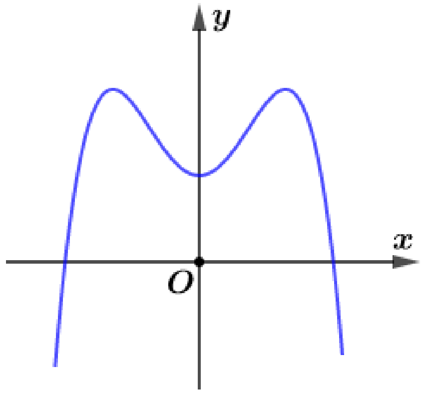
C. $y=x^4-2x^2$. D. $y=-x^4+2x^2$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào dáng điệu đồ thị, ta nhận thấy đây là đồ thị hàm số bậc 3 có hệ số $a>0$.

Câu 17: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 1)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong trong hình vẽ?



A. $y=x^3-3x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x^2+1$.

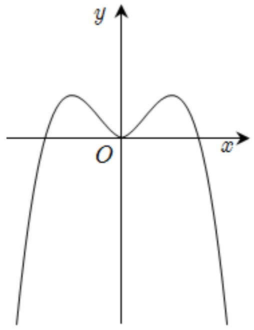
C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị trong hình vẽ của hàm bậc bốn, có hệ số $a<0$.

Câu 18: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 20)** Đồ thị hàm số nào có dạng như đường cong trong hình bên?



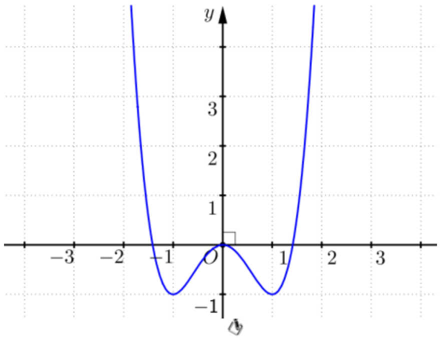
A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3+3x$. **C.** $y=x^4-2x^2$. **D.** $y=x^3-3x$.

Lời giải

Chọn A

Từ hình dáng đồ thị ta thấy đó là đồ thị hàm số bậc bốn trùng phương, có hệ số $a<0$.

Câu 19: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 19)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong như hình bên



A. $y=-x^4+2x^2$.

B. $y=x^3-3x^2$.

C. $y=x^4-2x^2$.

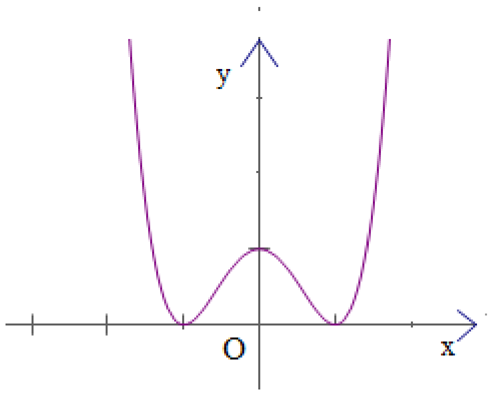
D. $y=-x^3+3x^2$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát đồ thị thị ta thấy đây là hàm trùng phương có $a>0$

Câu 20: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 10)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^4-2x^2+1$.

B. $y=-x^3+3x^2+1$.

C. $y=x^3-3x^2+1$.

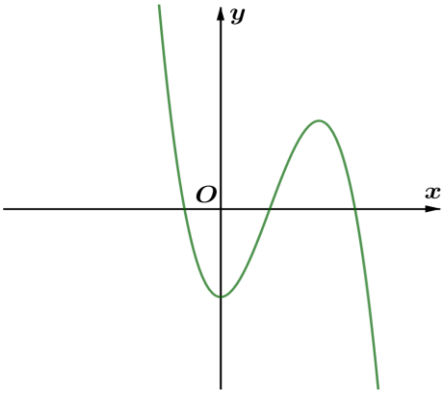
D. $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải

Chọn A

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số bậc 4 có hệ số $a > 0 \Rightarrow$ chọn A.

Câu 21: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 21)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có đường cong như trong hình vẽ



A. $y = x^4 - 2x^2 - 2$. **B.** $y = -x^3 + 3x^2 - 2$.

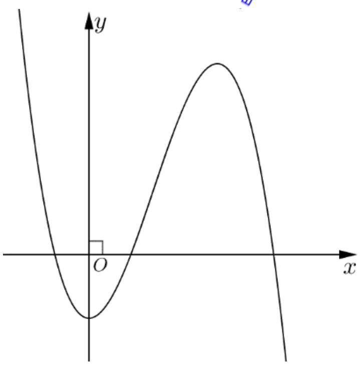
C. $y = x^3 - 3x^2 - 2$. **D.** $y = -x^4 + 2x^2 - 2$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dáng đồ thị hàm số ta nhận thấy đó là đồ thị hàm số bậc 3 và có hệ số $a < 0$.

Câu 22: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 4)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = x^3 - 3x^2 - 1$. **D.** $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

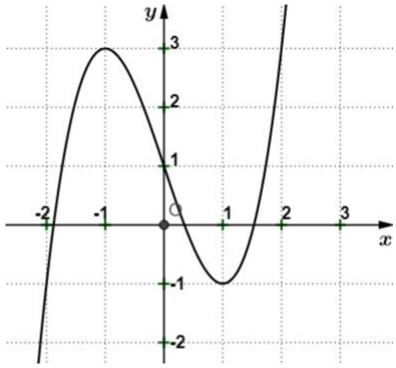
Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị hàm số ta có đây là đồ thị của hàm số bậc ba có hệ số $a < 0$ nên**Chọn D** được chọn.

Câu 23: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 20)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong vẽ bên

Ghi Chú!



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^4-2x^2+1$.

C. $y=-x^4+2x^2+1$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

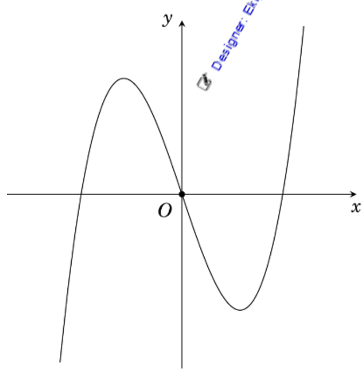
Chọn A

Đường cong đã cho là đồ thị của hàm số bậc 3 có dạng $y=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a\neq 0)$.

Suy ra **Chọn A** hoặc D được chọn.

Từ đồ thị ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow a>0 \Rightarrow$ **Chọn A** được chọn.

Câu 24: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 18)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^4+2x^2$. **B.** $y=-x^3-3x$.

C. $y=x^3-3x$. **D.** $y=-x^4+2x^2$.

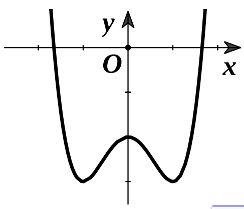
Lời giải

Chọn C

+) Đồ thị trên là đồ thị hàm số bậc 3 nên **Chọn C**, D bị loại.

+) Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nên loại **Chọn C** vì hàm số $y=-x^3-3x$ không có điểm cực trị.

Câu 25: **(ĐTK 2021-Câu 7)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



Ghi Chú!

A. $y=-x^4+2x^2-1$. **B.** $y=x^4-2x^2-1$.

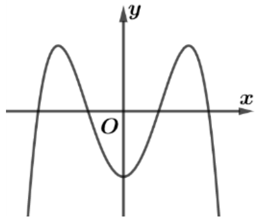
C. $y=x^3-3x^2-1$. **D.** $y=-x^3+3x^2-1$.

Lời giải

Chọn B

Hình vẽ bên là dạng của đồ thị hàm trùng phương có hệ số $a>0$ nên ta chọn $y=x^4-2x^2-1$.

Câu 26: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 6)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-2x^4+4x^2-1$. **B.** $y=-x^3+3x-1$.

C. $y=2x^4-4x^2-1$. **D.** $y=x^3-3x-1$.

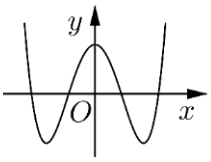
Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng nên loại Chọn A và D

Từ đồ thị hàm số ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$ nên loại Chọn A

Câu 27: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 15)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=-2x^4+4x^2+1$.

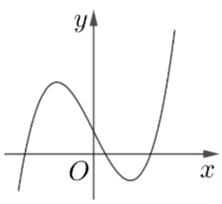
C. $y=-x^3+3x+1$. **D.** $y=2x^4-4x^2+1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị ta thấy đây là đồ thị hàm trùng phương và có hệ số $a>0$.

Câu 28: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 1)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^3-2x+\frac{1}{2}$. **B.** $y=x^3-2x+\frac{1}{2}$.

Ghi Chú!

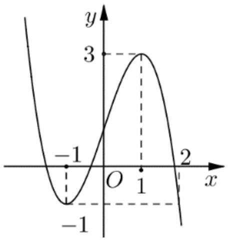
C. $y=-x^4+2x^2+\dfrac{1}{2}$. **D.** $y=x^4+2x^2+\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy đường cong có dạng đồ thị của hàm số bậc ba với hệ số a dương.

Câu 29: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 2)** Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?



A. $y=x^3-3x+1$. **B.** $y=x^4+4x^2+1$.
C. $y=-x^3+3x+1$. **D.** $y=-x^4+2x^2+1$.

Lời giải

Chọn C

Nhận dạng đồ thị: Đồ thị hàm số bậc 3 với:

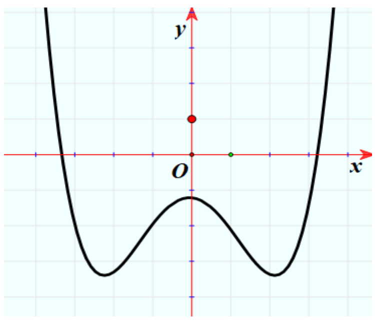
- Nhánh phải đồ thị đi xuống nên nhận xét hệ số $a<0$

- Hai điểm cực trị trái dấu nên: $a.c<0$ mà $a<0$ nên $c>0$

- Đồ thị hàm số cắt trục tung Oy tại điểm có tung độ dương nên $d>0$

Chỉ có **Chọn C** thỏa mãn.

Câu 30: **(TN BGD 2022-MD101)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

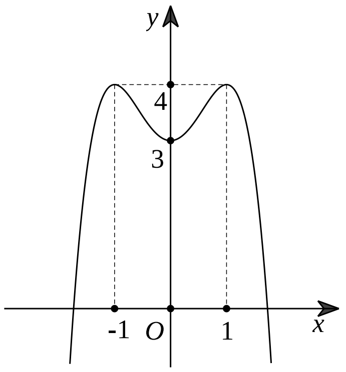
A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình dáng của đồ thị. Ta thấy hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 31: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



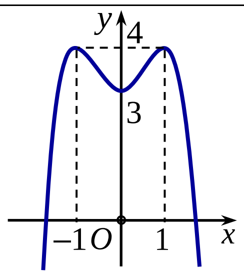
A. 1. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy giá trị cực tiểu bằng 3.

Câu 32: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



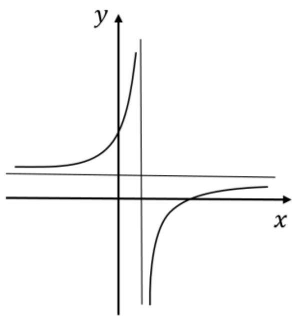
A. 3. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta dễ dàng thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 3.

Câu 33: **(DE MH BGD 2023 - Câu 9)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên



A. $y = x^4 - 3x^2 + 2$.

B. $y = \dfrac{x-3}{x-1}$.

C. $y = x^2 - 4x + 1$.

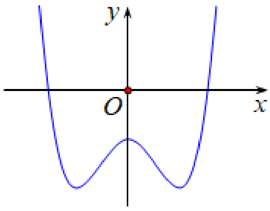
D. $y = x^3 - 3x - 5$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị đã cho thuộc dạng đồ thị hàm phân thức hữa tỷ bậc nhất nên dễ dàng loại 3 đáp án A, C, D (hàm đa thức).

Câu 34: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 14)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a,b,c là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. Phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

B. Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

C. Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm trên tập số thực.

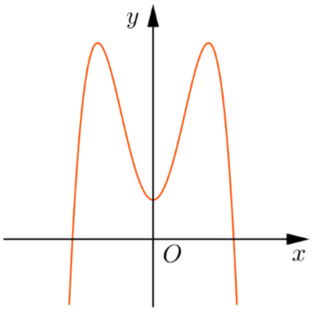
D. Phương trình $y' = 0$ có đúng một nghiệm thực.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào hình dáng của đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn trùng phương có 3 điểm cực trị nên phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 35: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 9)** Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y = 2x^3 - 3x + 1$.

B. $y = -2x^4 + 4x^2 + 1$.

C. $y = 2x^4 - 4x^2 + 1$.

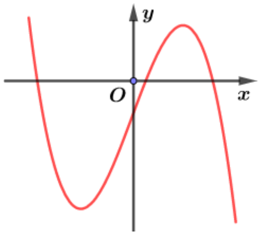
D. $y = -2x^3 + 3x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Dạng đồ thị hình bên là đồ thị hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a < 0$.
Do đó, chỉ có đồ thị ở đáp án B là thỏa mãn.

Câu 36: **(ĐTK 2020-L1-Câu 28)** Cho hàm số $y = ax^3 + 3x + d \ (a; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a>0, d>0$. **B.** $a<0, d>0$. **C.** $a>0, d<0$. **D.** $a<0, d<0$.

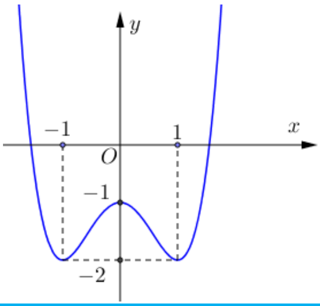
Lời giải

Chọn D

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty \Rightarrow$ đồ thị nhánh ngoài cùng của hàm số hướng đi xuống nên hệ số $a<0$.

Giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung $Oy: x=0$ là điểm nằm bên dưới trục hoành nên khi $x=0 \Rightarrow y=d<0$.

Câu 37: (DE TN BGD 2022-MD 103)Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2;5]$ của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?



A. 1. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 5.

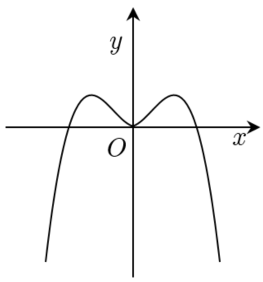
Lời giải

Chọn C

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình $f(x)=m$ có đúng hai nghiệm thực phân biệt khi $m=-2$

Hoặc $m>-1$. Vậy $m\in\{-2;0;1;2;3;4;5\}$. Vậy có 7 giá trị m thỉa mãn.

Câu 38: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 20] Hàm số nào dưới đây có đồ thị như đường cong trong hình bên?



A. $y=-x^4+2x^2$. **B.** $y=x^3-3x^2$.

C. $y=-x^3+3x^2+1$. **D.** $y=x^4-2x^2+1$.

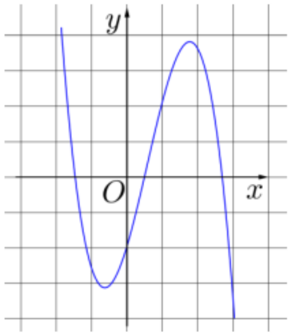
Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Hình vẽ là đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a < 0,\ b > 0,\ c = 0$.

Câu 39: **(ĐTN 2017-Câu 11)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0$ **B.** $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0$.

C. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0$ **D.** $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d < 0$.

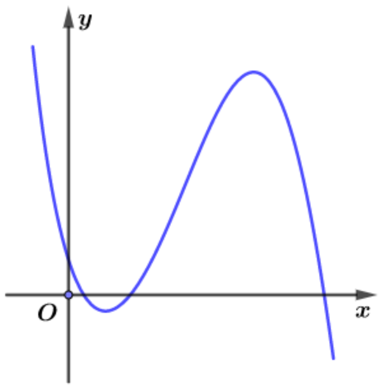
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị suy ra hệ số $a < 0 \Rightarrow$ loại phương án C

$y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 trái dấu (do hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm hai phía với Oy) $\Rightarrow 3a.c < 0 \Rightarrow c > 0 \Rightarrow$ loại phương án **D.** Do $(C) \cap Oy = D(0; d) \Rightarrow d < 0$.

Câu 40: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 45)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Hình dạng đồ thị cho thấy $a < 0$.

Đồ thị cắt trục tung tại một điểm nằm phía trên trục hoành nên $d > 0$.

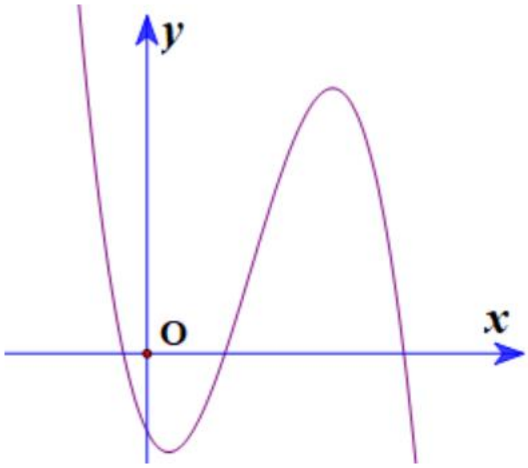
Ghi Chú!

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị cùng dương, khi đó $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương.

Do đó $\dfrac{c}{3a} > 0 \Rightarrow c < 0$ và $-\dfrac{2b}{3a} > 0 \Rightarrow b > 0$.

Vậy trong các số a, b, c, d có 2 số dương.

Câu 41: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 46)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

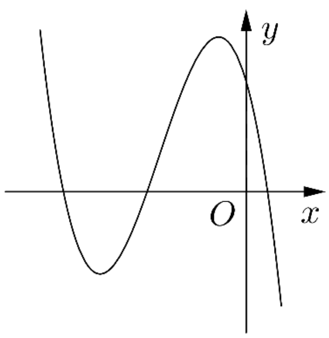
Lời giải

Chọn C

Hình dạng đồ thị cho thấy $a < 0$.
Đồ thị cắt trục tung tại một điểm nằm phía dưới trục hoành nên $d < 0$.
Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm bên phải trục tung nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị cùng dương, khi đó $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ có hai nghiệm phân biệt cùng dương $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{3a} > 0 \\ x_1x_2 = \dfrac{c}{3a} > 0 \end{cases}$ mà $a < 0$ nên $c < 0$; $b > 0$.

Vậy trong các số a, b, c, d có 1 số dương.

Câu 42: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 46)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các a,b,c,d?



Ghi Chú!

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

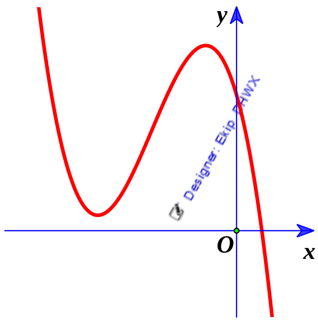
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$. Dựa vào đồ thị ta thấy $a<0$

Hàm số có 2 cực trị âm nên $\begin{cases}\Delta'_{y'}>0\\ S<0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-9ac>0\\ -\dfrac{2b}{3a}<0\\ \dfrac{c}{3a}>0\end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases}b<0\\ c<0\end{cases}$

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0;d)$ nên $d>0$.

Vậy có đúng một số dương trong các số a,b,c,d

Câu 43: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 48)** Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c,) $d\in\mathbb{R}$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?



A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương $\Rightarrow d>0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y<0 \Rightarrow a<0$.
- Ta có: $y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị nằm về bên trái trục tung nên phương trình $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1<x_2<0$.

Khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2b}{3a}<0\\ x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0\end{cases}$. Từ đó suy ra $b<0$ và $c<0$.

Vậy trong các số a, b, c, d có 1 số dương.

Dạng ②: Nhận dạng hàm số - BBT

Câu 44: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 12] Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau?

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

A. $y=-2x^2+1$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x}$. **C.** $y=x^4-3x^2$. **D.** $y=-x^3+3x+1$.

Lời giải

Chọn D

Bảng biến thiên trên là đặc trưng của hàm số bậc 3.

Câu 45: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 45)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a;b;c;d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a;b;c;d$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a;b;c;d\in\mathbb{R})$. Ta có: $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow a>0$.

+) $f(0)=3\Rightarrow d=3>0$.

+) $f'(x)=0$ có nghiệm $x=0\Rightarrow c=0$.

+) Tổng 2 nghiệm của phương trình $f'(x)=0$ là $4\Rightarrow -\dfrac{2b}{3a}>0\Rightarrow \dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{do\ a>0} b<0$.

Vậy trong các số $a;b;c;d$ có 2 số dương.

Câu 46: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 47)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a,\ b,\ c,\ d$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên hàm số, ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow a>0$.

Khi $x=0$ thì $y=d=1>0$.

Mặt khác $f'(x)=3ax^2+2bx+c$. Từ bảng biến thiên ta có

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Từ đó suy ra $f'(0)=0 \Rightarrow c=0$ và $\dfrac{-2b}{3a}=-2 \Rightarrow b=3a>0$.

Vậy có 3 số dương là $a,\ b,\ d$.

Câu 47: **(ĐTK 2020-L2-Câu 43)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}\,(a,b,c\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tiệm cận đứng: $x=2>0 \Rightarrow -\dfrac{c}{b}>0 \Rightarrow bc<0.$

Tiệm cận ngang: $y=1>0 \Rightarrow \dfrac{a}{b}>0 \Rightarrow ab>0.$

Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm

$x>2>0 \Rightarrow -\dfrac{1}{a}>0 \Rightarrow a<0 \Rightarrow b<0 \Rightarrow c>0.$

Câu 48: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 43)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c\in R)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu số dương trong các số a,b,c,d ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

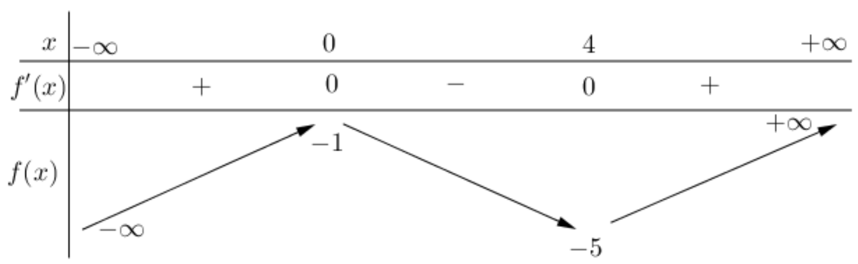
Đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(-2;1)$ suy ra $\begin{cases}12a-4b+c=0\\-8a+4b-2c+d=1\end{cases}$

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(0;-1)$ suy ra $\begin{cases}3a.0+2b.0+c=0\\a.0+b.0+c.0+d=-1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}c=0\\d=-1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}12a-4b=0\\-8a+4b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$. Do đó C được chọn.

Câu 49: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 48)** Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có bảng biến thiên như sau:

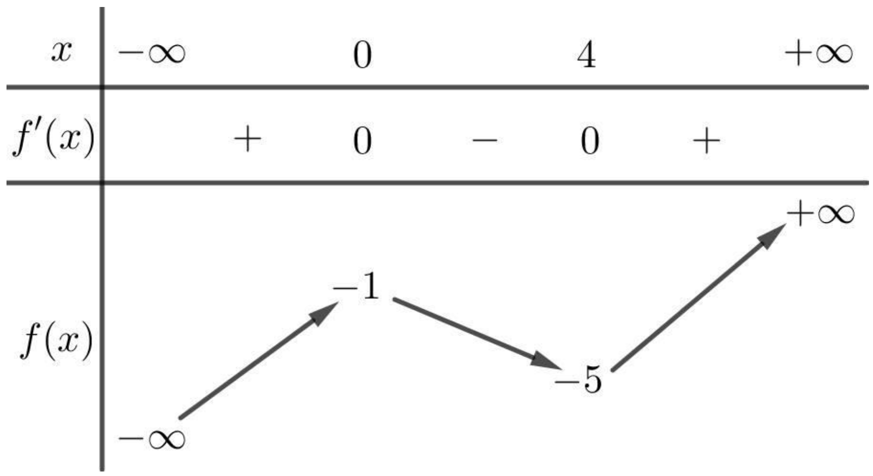


Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D



Từ bảng biến thiên ta thấy: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ nên $a>0$.

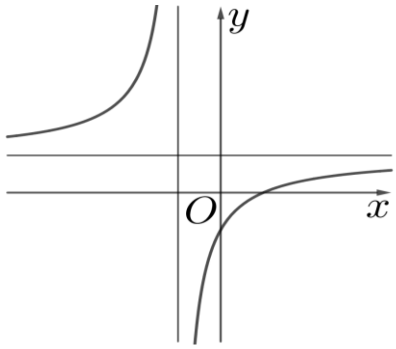
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$;

$f'(0)=0 \Rightarrow c=0$; $f'(4)=0 \Rightarrow \dfrac{-2b}{3a}=4 \Rightarrow ab<0 \Rightarrow b>0$

Lại có $f(0)=-1 \Rightarrow d<0$. Vậy trong các số a, b, c, d có đúng 1 số dương.

➽Dạng ③: Tính chất đồ thị - hàm số - đạo hàm

Câu 50: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 29)** Biết hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước,) $a \neq 1$ có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'<0, \forall x \neq -1$.
B. $y'>0, \forall x \neq -1$.
C. $y'<0, \forall x \in \mathbb{R}$.
D. $y'>0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

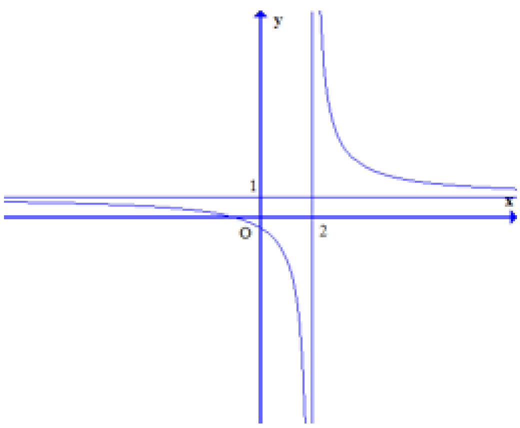
Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Dựa vào đồ thị, ta có: Hàm số $y=\dfrac{x+a}{x+1}$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

$\Rightarrow y'>0, \forall x \neq -1$.

Câu 51: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 24)** Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ghi Chú!

A. $y' < 0, \forall x \neq 2$. **B.** $y' < 0, \forall x \neq 1$.

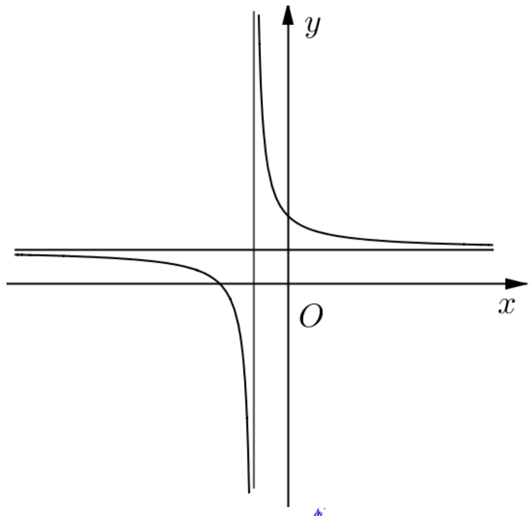
C. $y' > 0, \forall x \neq 2$. **D.** $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số giảm trên $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên $y' < 0, \forall x \neq 2$.

Câu 52: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 33)** Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước,) $a \neq 1$ có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq -1$.

C. $y' < 0, \forall x \neq -1$. **D.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

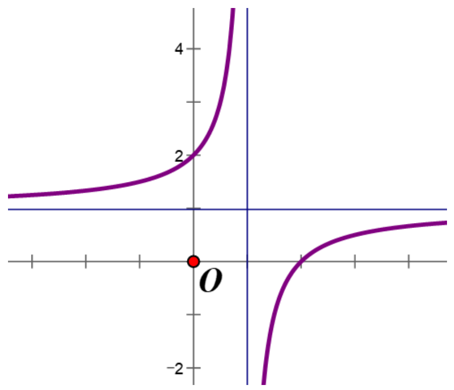
Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên loại **Chọn C** và D

Dạng đồ thị đi xuống thì $y' < 0$ nên loại **Chọn C**

Câu 53: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 38)** Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$, (a là số thực cho trước và) $a \neq -1$ có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $y' > 0, \forall x \neq 1$. **B.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $y' < 0, \forall x \neq 1$.

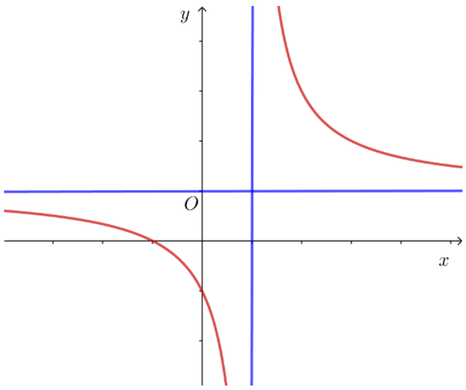
Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq 1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy theo thứ tự từ trái qua phải đồ thị đi lên nên $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Câu 54: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 33)** Biết hàm số $y = \dfrac{x+a}{x-1}$ (a là số thực cho trước và) $a \neq -1$ có đồ thị như trong hình bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

B. $y' < 0, \forall x \neq 1$.

C. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

D. $y' > 0, \forall x \neq 1$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Khi đó: $y' = \dfrac{-1-a}{(x-1)^2}$ $\forall x \neq 1$.

Hai nhánh của đồ thị có chiều đi xuống nên $y' < 0, \forall x \neq 1$.

Dạng ④: Liên quan giao điểm từ 2 đồ thị không chứa tham số

Câu 56: **(ĐTK 2017-Câu 1)** Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm số giao điểm của (C) và trục hoành.

A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục hoành: $x^3 - 3x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy số giao điểm của (C) và trục hoành là 3.

Ghi Chú!

Câu 57: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 1)** Cho hàm số $y=(x-2)(x^2+1)$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (C) cắt trục hoành tại hai điểm. **B.** (C) cắt trục hoành tại một điểm.

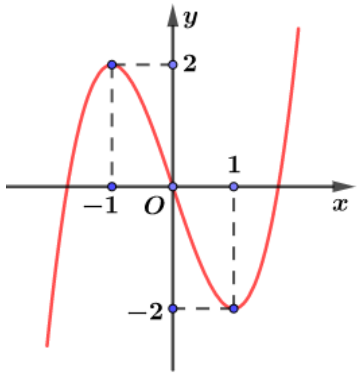
C. (C) không cắt trục hoành. **D.** (C) cắt trục hoành tại ba điểm.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy phương trình $(x-2)(x^2+1)=0$ có 1 nghiệm $x=2 \Rightarrow (C)$ cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 58: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 16)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Số nghiệm của phương trình $f(x)=-1$ bằng số giao điểm của đường cong $f(x)$ với đường thẳng $y=-1$. Nhìn vào hình ta thấy có 3 giao điểm nên có 3 nghiệm.

Câu 59: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 26)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

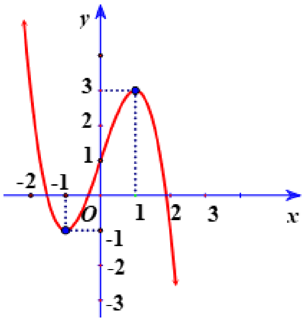
Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là $x^3+3x^2=3x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+3x^2$ và đồ thị hàm số $y=3x^2+3x$ là 3.

Câu 60: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 11)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 1$ là

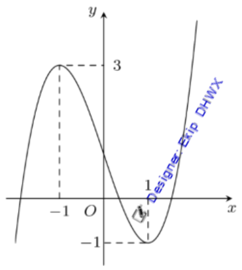
A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Vì đường thẳng $y = 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.

Câu 61: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 4)** Cho đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

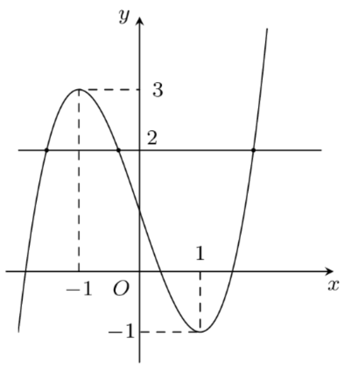


Số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 2$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x) = 2$ có 3 nghiệm thực.

Câu 62: **(ĐTK 2021-Câu 8)** Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn C

Với $x=0 \Rightarrow y=2$.

Vậy đồ thị của hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2.

Câu 63: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 7)** Đồ thị của hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x_M;y_M\right)$là giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^4+4x^2-3$ và trục Oy

Ta có $x_M=0 \Rightarrow y_M=-3$.

Câu 64: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 18)** Đồ thị của hàm số $y=-x^4-2x^2+3$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x=0 \Rightarrow y=3$

Vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

Câu 65: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 16)** Đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x=0 \Rightarrow y=-1$

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+2x^2-1$cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1.

Câu 66: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 26)** Đồ thị hàm số $y=-2x^3+3x^2-5$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng

A. -5. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ $y=-2.0^3+3.0^2-5=-5$.

Câu 67: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 25]** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành, ta có

$$x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ cắt trục hoành tại 2 điểm.

Câu 68: **(ĐMH 2017-Câu 7)** Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm y_0

A. $y_0=4$ **B.** $y_0=0$ **C.** $y_0=2$ **D.** $y_0=-1$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình hoành độ giao điểm:
$-2x+2=x^3+x+2 \Leftrightarrow x^3+3x=0 \Leftrightarrow x=0$

Với $x_0=0 \Rightarrow y_0=2$.

Câu 69: **(ĐTN 2017-Câu 2)** Đồ thị của hàm số $y=x^4-2x^2+2$ và đồ thị của hàm số $y=-x^2+4$ có tất cả bao nhiêu điểm chung?

A. 0 **B.** 4 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm:
$$x^4-2x^2+2=-x^2+4 \Leftrightarrow x^4-x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right..$$

Vậy hai đồ thị có tất cả 2 điểm chung.

Câu 70: **(ĐTK 2020-L2-Câu 30)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ và trục hoành là

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=3x^3-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Hàm số có hai cực trị.

Mặt khác $y(-1).y(1)=-3<0$ nên hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về phái phía của trục hoành. Nên đồ thị hàm số đã cho cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt.

Câu 71: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 33)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+5x$ là

Ghi Chú!

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x^3-x^2=-x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị là 3.

Câu 72: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 38)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của $y=x^3+x^2$ và $y=x^2+5x$ là

$$x^3+x^2=x^2+5x \Leftrightarrow x^3-5x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy đồ thị $y=x^3+x^2$ và đồ thị $y=x^2+5x$ có 3 giao điểm.

Câu 73: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 37)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3-x^2$ và đồ thị hàm số $y=-x^2+3x$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm thực phân biệt của phương trình hoành độ giao điểm sau:

$$x^3-x^2=-x^2+3x \Leftrightarrow x^3-3x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Vậy số giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 74: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 27)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ với trục hoành là nghiệm của phương trình: $-x^3+3x=0$ (1) $\Leftrightarrow -x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{array}\right..$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt, do đó đồ thị hàm số $y=-x^3+3x$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

Ghi Chú!

Câu 75: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 28)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục hoành là

$$-x^3+5x=0 \Leftrightarrow x\left(-x^2+5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{5} \\ x=-\sqrt{5} \end{array}\right. .$$

Vậy số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+5x$ với trục hoành là 3.

Câu 76: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 32]** Biết đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị x_1+x_2 bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$$x-1=\frac{-x+5}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ (x-1)(x-2)+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x^2-3x+2+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right. .$$

Suy ra $x_1+x_2=-1+3=2$.

Câu 77: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 32]** Biết đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị x_1+x_2 bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$$x-1=\frac{-x+5}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ (x-1)(x-2)+x-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x^2-3x+2+x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

Ghi Chú!

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Suy ra $x_1+x_2=-1+3=2$.

Câu 78: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 35] Biết đường thẳng $y=x-1$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+5}{x-2}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2. Giá trị x_1+x_2 bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -1. **D.** 1.

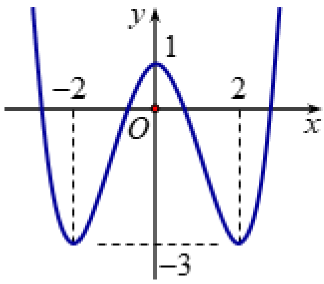
Lời giải

Chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\dfrac{-x+5}{x-2}=x-1 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. Vậy $x_1+x_2=2$.

Dạng ⑤: Bài toán đưa về tìm số nghiệm của phương trình f(u)=0 (không tham số)

Câu 79: (ĐTK 2020-L2-Câu 17) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x)=-1$ là

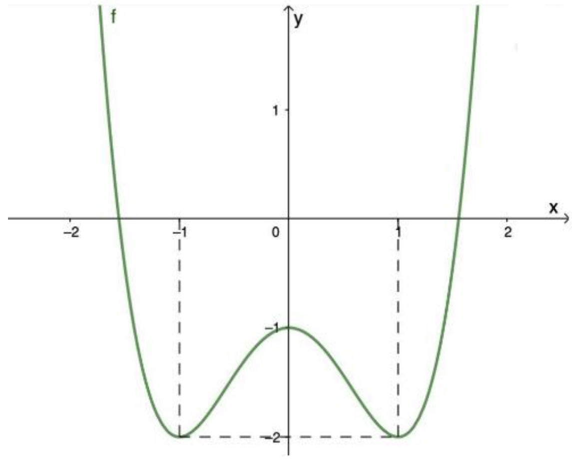
A. 3. B. 2. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình $f(x)=-1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $x=-1$. Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $x=-1$ tại bốn điểm phân biệt.

Câu 80: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 17) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-\dfrac{3}{2}$ là?



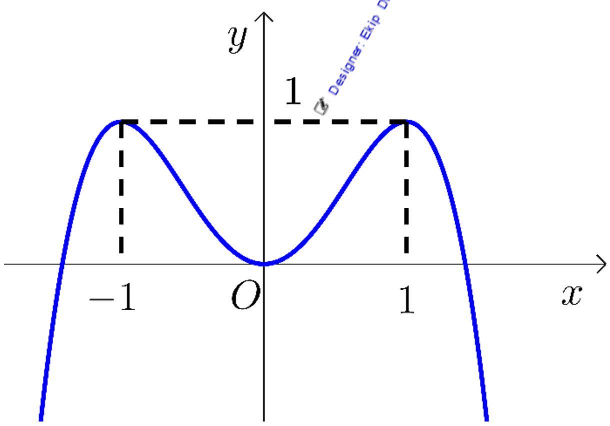
A. 4 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn A

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đồ thị hàm số $y=-\dfrac{3}{2}$ chính là số nghiệm của phương trình. $f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}$.

Câu 81: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 25)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên.

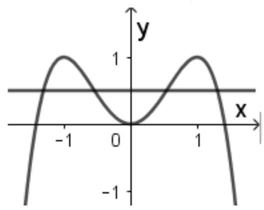


Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ là

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

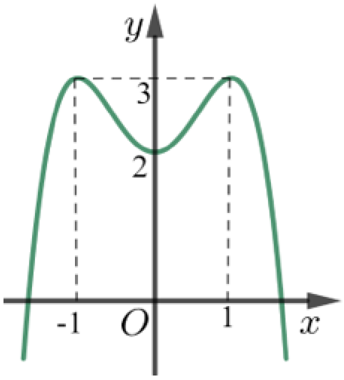
Chọn A



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ và có đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$.

Ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số tại 4 điểm nên phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ có 4 nghiệm.

Câu 82: **(TN BGD 2022-MD101)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



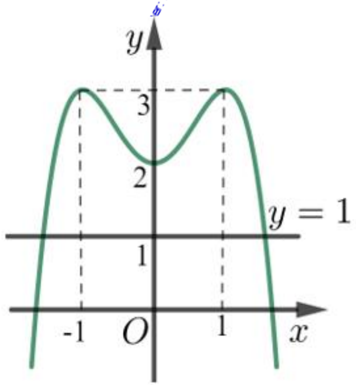
Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

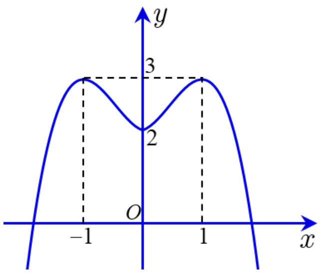
Chọn B

Đường thẳng $\left(d\right)$ có phương trình $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại 2 điểm phân biệt.



Suy ra phương trình $f\left(x\right)=1$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 83: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ sau

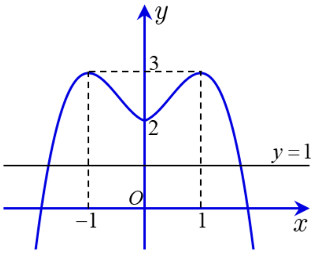


Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right)=1$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C



Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ bằng với số giao điểm của đường thẳng $(d): y=1$ và đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)$. Dựa vào hình vẽ, ta thấy (d) và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt nên phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu 84: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y=1$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

$y=1$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 điểm.

Câu 85: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho và đường thẳng $y=1$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn C

Ta vẽ đường thẳng $y=1$

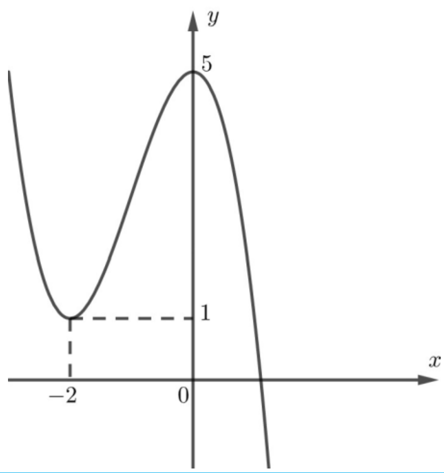
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		-1	↗	3	↘ $y=1$	$-\infty$

Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số tại 3 giao điểm.

Câu 86: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 7]Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.



Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị.

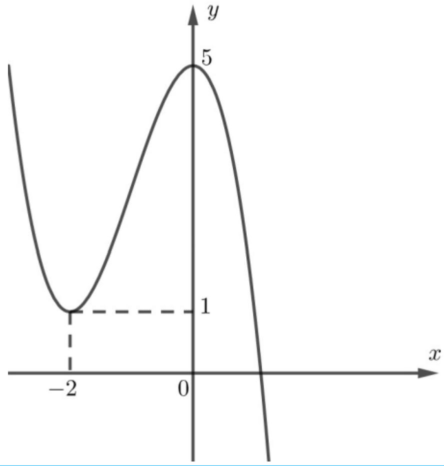
Do số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=2$ là 3 nên số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là 3.

Câu 87: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 7]Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=2$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Ghi Chú!



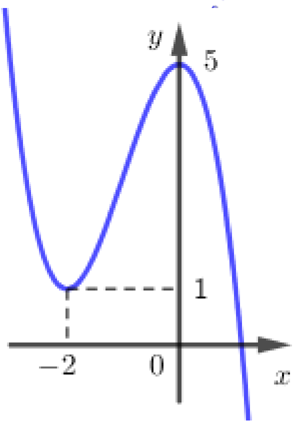
Lời giải

Chọn D

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của hai đồ thị.

Do số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ và đường thẳng $y = 2$ là 3 nên số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right) = 2$ là 3.

Câu 88: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 11] Cho hàm số bậc ba $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right) = 2$ là

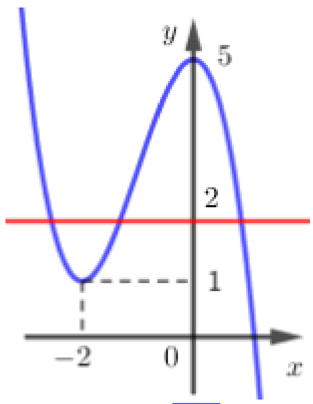


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x\right) = 2$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$ và đồ thị đường thẳng $y = 2$. Do đó phương trình có 3 nghiệm thực phân biệt.



Ghi Chú!

Câu 89: **(ĐTK 2018-Câu 17)** Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)-2=0$ là

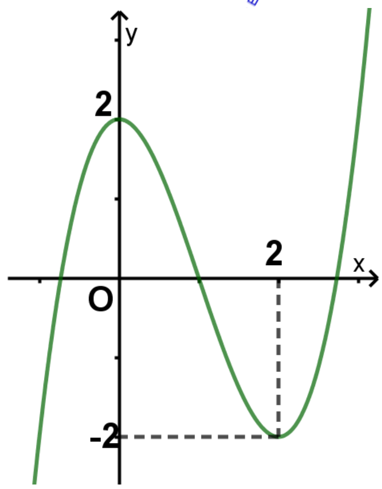
A. 0 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(x\right)-2=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=2\in\left(-2,4\right)$ nên phương trình $f\left(x\right)-2=0$ có ba nghiệm phân biệt.

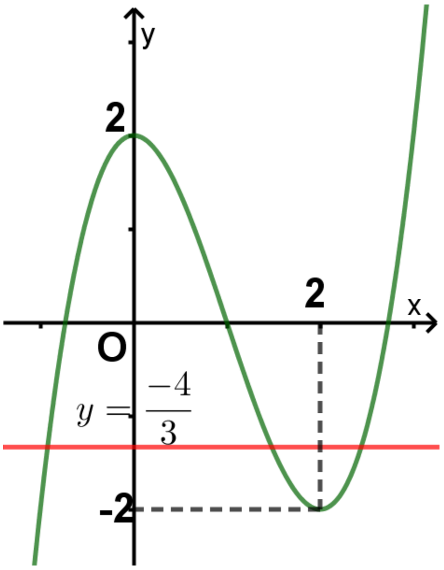
Câu 90: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 17)** Cho hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f\left(x\right)+4=0$ là



A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

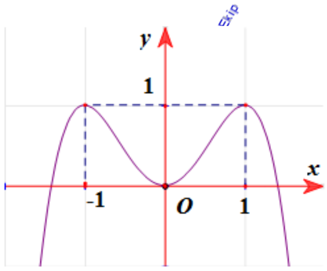
Chọn A



Ta có: $3f(x)+4=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{4}{3}$.

Dựa vào đồ thị đường thẳng $y=-\frac{4}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Câu 91: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 16)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c\left(a,b,c\in\mathbb{R}\right)$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên.



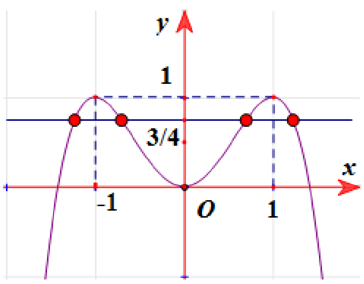
Số nghiệm của phương trình $4f(x)-3=0$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

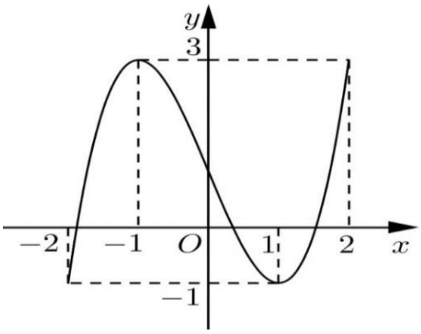
Chọn A

Ta có $4f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{3}{4}$.



Đường thẳng $y=\frac{3}{4}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 4 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 92: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 22)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là

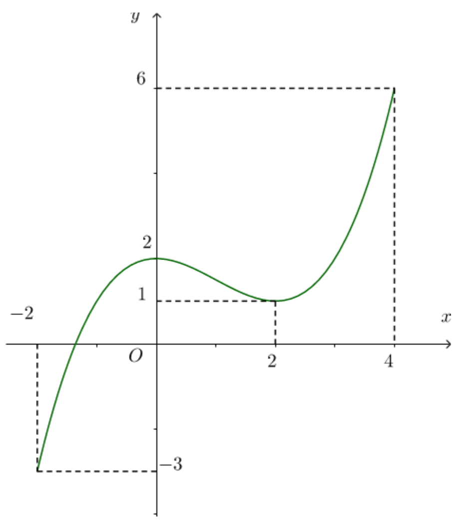
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{4}{3}$. Dựa vào đồ thị, ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{4}{3}$ cắt $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 93: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 24)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2;4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ trên đoạn $[-2;4]$ là



A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{5}{3}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt thuộc đoạn $[-2;4]$.

Do đó phương trình $3f(x)-5=0$ có ba nghiệm thực.

Câu 94: **(ĐTK 2019-Câu 29)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{3}{2}$.

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $y_{CT}=-2<-\dfrac{3}{2}<1=y_{CD}$.

Vậy phương trình $2f(x)+3=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 95: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 16)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

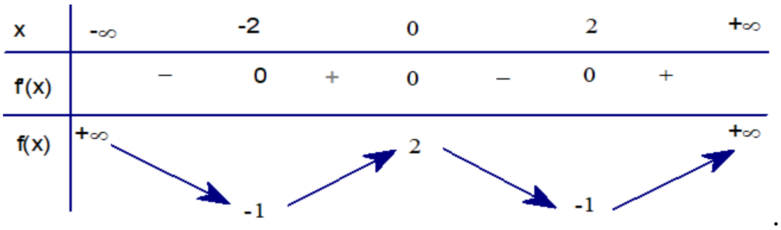
Chọn C

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ tại bốn điểm phân biệt. Do đó phương trình $2f(x)-3=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Ghi Chú!

Câu 96: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 23)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.



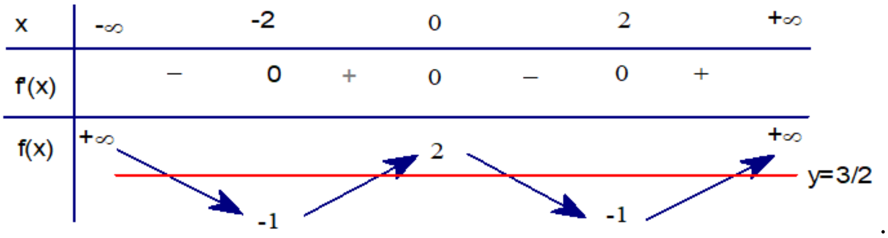
Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-5=0$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

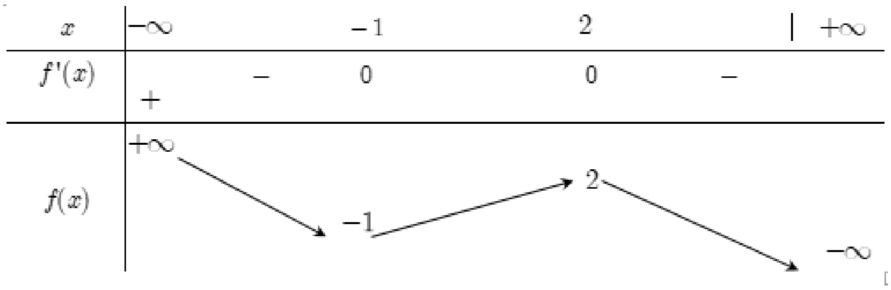
Bảng biến thiên.



Xét phương trình $3f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{5}{3}$.

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=\dfrac{3}{2}$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại bốn điểm phân biệt.

Câu 97: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 16)** Cho hàm số $f(x)$ bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)-3=0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$ (1).

Số nghiệm thực của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ với đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Từ bảng biến thiên đã cho của hàm số $f(x)$, ta thấy đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm thực phân biệt.

Câu 98: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 29)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

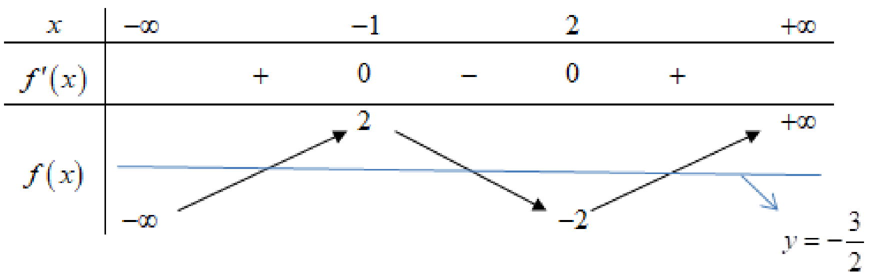
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thực của phương trình $2f(x)+3=0$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

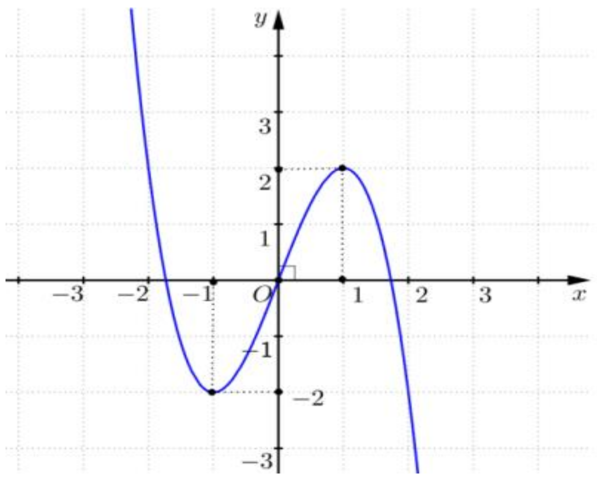
Chọn A



Ta có $2f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{2}$.

Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Câu 99: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 15)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=1$ là



A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

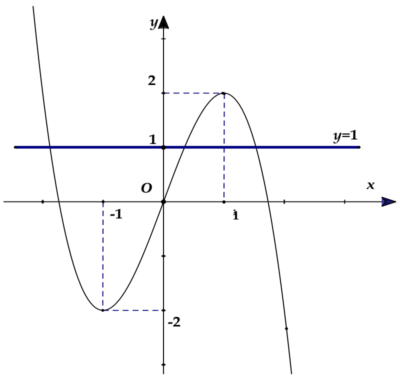
Lời giải

Ghi Chú!

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm $f\left(x\right)=1$

Từ đồ thị ta vẽ thêm đường thẳng $y=1$ ta có hình vẽ sau:



Vì đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=1$ có ba nghiệm phân biệt

Câu 100: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 26)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là:

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ với trục hoành là:

$$-x^3+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{6} \\ x=-\sqrt{6} \end{array}\right. .$$

Vậy đồ thị hàm số $y=-x^3+6x$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 101: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 35)** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

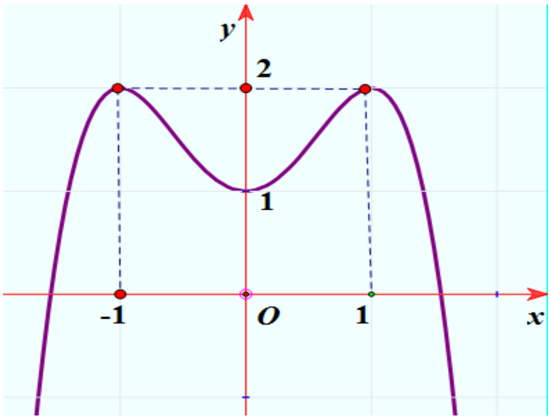
Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là nghiệm phương trình

$$-x^3+7x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\sqrt{7} \\ x=\sqrt{7} \end{array}\right. .$$

Khi đó giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành tại 3 điểm $A\ 0;0$, $B\ -\sqrt{7};0$, $C\ \sqrt{7};0$. Vậy nên có 3 giao điểm của đồ thị với trục hoành.

Ghi Chú!

Câu 102: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 25)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

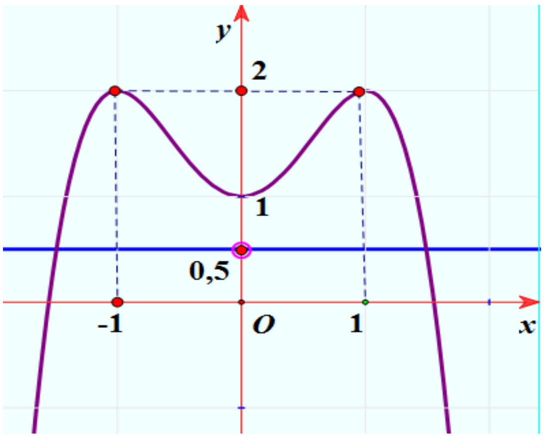


Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

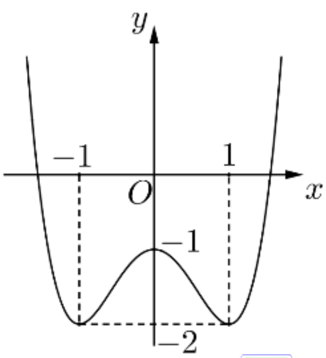
Lời giải

Chọn A



Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số đã cho với đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$. Căn cứ vào đồ thị ta thấy đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ cắt đồ thi hàm số đã cho tại 2 điểm phân biệt nên phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 103: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Cho hàm số $f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.



Ghi Chú!

Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2;5]$ của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 1.

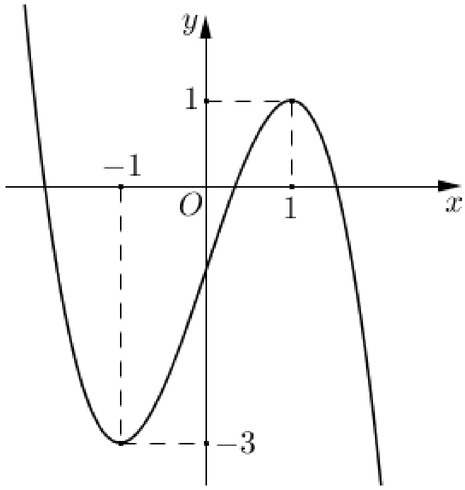
Lời giải

Chọn A

Ta có yêu cầu bài toán tương đương với $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m>-1 \end{array}\right.$.

Do $m\in[-2;5]$ và m nguyên nên có 7 giá trị m cần tìm là $-2,0,1,2,3,4,5$.

Câu 104: **(DE MH BGD 2023 – Câu 31)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?

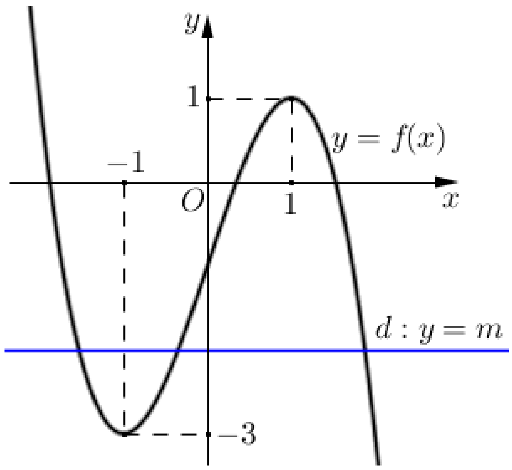


A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm của phương trình $f(x)=m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $d: y=m$.

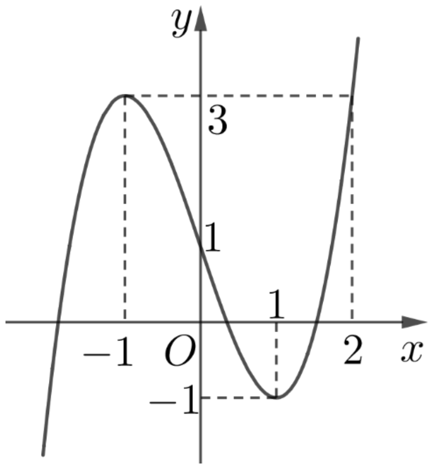


Dựa vào hình vẽ, ta có:

Ghi Chú!

Phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt khi đường thẳng $d: y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt, tức là $-3<m<1$. Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 105: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 41)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là

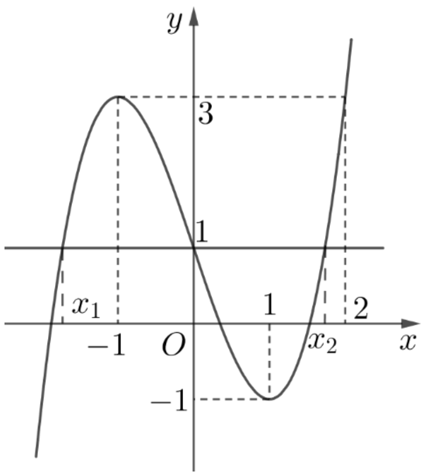


A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

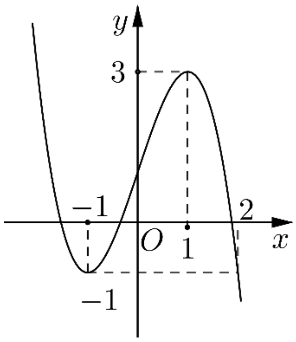
Từ đồ thị hàm số ta có



$$f(f(x))=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f(x)=x_1 \text{ và } x_1<-1 & (1)\\ f(x)=0 & (2)\\ f(x)=x_2 \text{ và } 1<x_2<2 & (3)\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, (1) có đúng 1 nghiệm, (2) và (3) mỗi phương trình có 3 nghiệm phân biệt và 7 nghiệm trên phân biệt nhau.

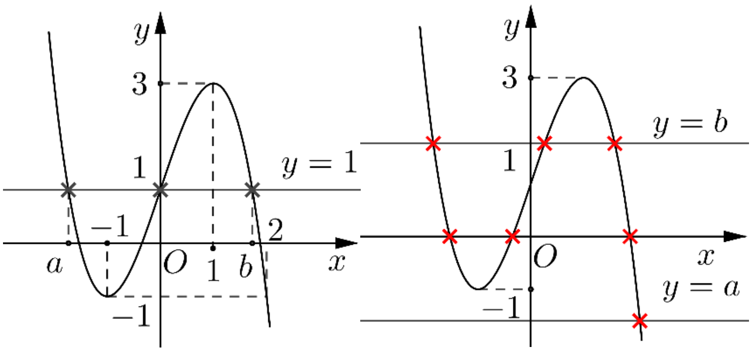
Câu 106: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 41)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình trên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f(f(x))=1$ là



A. 9. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chon B

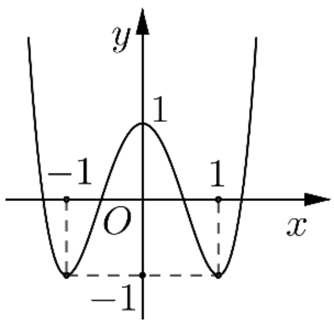


Từ $f\left(f\left(x\right)\right)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a,\ \left(a<-1\right) \\ f\left(x\right)=0 \\ f\left(x\right)=b,\ \left(1<b<2\right) \end{array}\right.$

- $f\left(x\right)=a$ với $a<-1$ phương trình có một nghiệm
- $f\left(x\right)=0$ phương trình có ba nghiệm phân biệt
- $f\left(x\right)=b$ với $1<b<2$ phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=1$ là 7.

Câu 107: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 41)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên dưới.

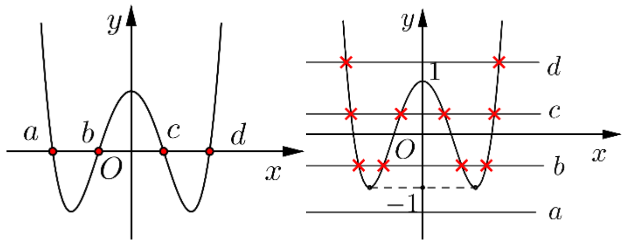


Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ là

A. 4. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chon B



Ta có: $f\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right)=a\ \left(a<-1\right) \\ f\left(x\right)=b\ \left(-1<b<0\right) \\ f\left(x\right)=c\ \left(0<c<1\right) \\ f\left(x\right)=d\ \left(d>1\right) \end{array}\right.$.

Phương trình $f\left(x\right)=a$ với $a<-1$ vô nghiệm.

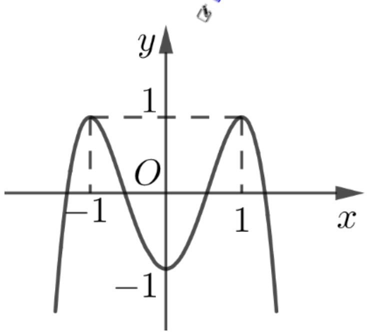
Phương trình $f\left(x\right)=b$ với $-1<b<0$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=c$ với $0<c<1$ có 4 nghiệm phân biệt.

Phương trình $f\left(x\right)=d$ với $d>1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có 10 nghiệm.

Câu 108: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 39)** Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ là

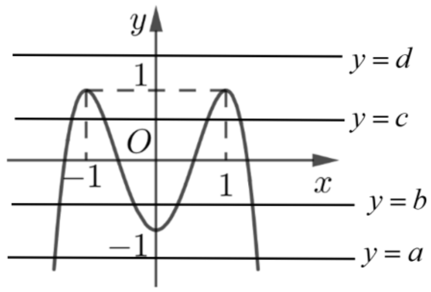


A. 12. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f\left(f\left(x\right)\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f\left(x\right)=a\left(a<-1\right) & (1) \\ f\left(x\right)=b\left(-1<b<0\right) & (2) \\ f\left(x\right)=c\left(0<c<1\right) & (3) \\ f\left(x\right)=d\left(d>1\right) & (4) \end{array}\right.$.



Từ đồ thị hàm số ta thấy:

Phương trình (1) có: 2 nghiệm

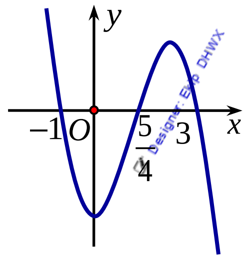
Phương trình (2) có: 4 nghiệm

Phương trình (3) có: 4 nghiệm

Phương trình (4) vô nghiệm

Vậy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=0$ có tất cả 10 nghiệm thực phân biệt.

Câu 109: **(ĐTK 2019-Câu 50)** Cho hàm số $f\left(x\right)=mx^4+nx^3+px^2+qx+r$, (với $m,n,p,q,r\in\mathbb{R}$). Hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Tập nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=r$ có số phần tử là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=4mx^3+3nx^2+2px+q$ (1)

Dựa vào đồ thị $y=f'\left(x\right)$ ta thấy phương trình $f'\left(x\right)=0$ có ba nghiệm đơn là -1, $\frac{5}{4}$, 3.

Do đó $f'\left(x\right)=m\left(x+1\right)\left(4x-5\right)\left(x-3\right)$ và $m\neq 0$. Hay $f'\left(x\right)=4mx^3-13mx^2-2mx+15m$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $n=-\frac{13}{3}m$, $p=-m$ và $q=15m$.

Khi đó phương trình $f\left(x\right)=r \Leftrightarrow mx^4+nx^3+px^2+qx=0 \Leftrightarrow$

$m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)=0$

$\Leftrightarrow 3x^4 - 13x^3 - 3x^2 + 45x = 0 \Leftrightarrow x(3x+5)(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee x = -\dfrac{5}{3} \vee x = 3$ (nghiệm kép).

Vậy tập nghiệm của phương trình $f(x) = r$ là $S = \left\{-\dfrac{5}{3}; 0; 3\right\}$ có ba phần tử.

Câu 110: **(ĐTK 2020-L2-Câu 46)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y			2				2		
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ của phương trình $f(\sin x) = 1$ là

A. 7. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$. Ta thấy phương trình $f(x) = 1$ có bốn nghiệm phân biệt lần lượt là $t_1 < -1 < t_2 < 0 < t_3 < 1 < t_4$.

Do đó $f(\sin x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = t_1\ (l) \\ \sin x = t_2\ (t/m) \\ \sin x = t_3\ (t/m) \\ \sin x = t_4\ (l) \end{array}\right.$

Xét hàm số $t = \sin x$ trên $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$. Khi đó: $t' = \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \\ x = \dfrac{5\pi}{2} \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		$5\pi/2$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t			1				1
	0	$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

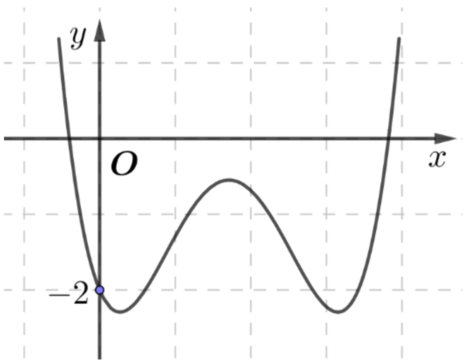
Từ bảng biến thiên của hàm số $t = \sin x$, ta thấy phương trình:

$+$ $\sin x = t_2 \in (-1; 0)$ có hai nghiệm phân biệt trên $\left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ghi Chú!

$+\ \sin x = t_1 \in (0;1)$ có ba nghiệm phân biệt trên $\left[0;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Câu 111: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 50)** Cho hàm số bậc bốn có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right) = 2$ là



A. 8. **B.** 12. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f(x)\right) = -2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 f(x) = a & (1) \\ x^2 f(x) = b & (2) \\ x^2 f(x) = c & (3) \\ x^2 f(x) = 0 & (4) \end{array}\right.$, với $a,b,c > 0$.

$+$ Với $m > 0$, xét phương trình $x^2 f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{m}{x^2}$ $(*)$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{m}{x^2}, m > 0$, ta có $g'(x) = \dfrac{-2m}{x^3}, \forall x \neq 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0; \lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$.

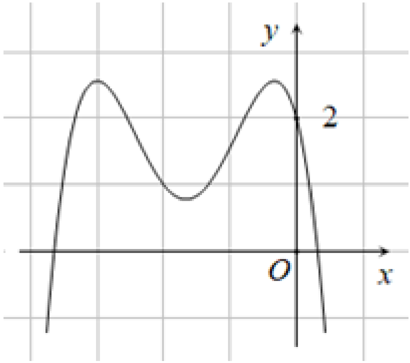
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên và hình vẽ, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và khoảng $(0;+\infty)$ phương trình $f(x) = g(x)$ có đúng một nghiệm. Do đó phương trình $(*)$ có đúng 2 nghiệm.

Câu 112: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 50)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Ghi Chú!



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)-2=0$ là

A. 6. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f\left(x^2 f(x)\right)-2=0 \Leftrightarrow f\left(x^2 f(x)\right)=2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 f(x)=0 \quad (1) \\ x^2 f(x)=a\,(-1<a<0) \quad (2) \\ x^2 f(x)=b\,(-3<b<-2) \quad (3) \\ x^2 f(x)=c\,(-4<c<-3) \quad (4) \end{array}\right..$$

Giải $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right.$ (có 3 nghiệm phân biệt).

Giải $(2) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{a}{x^2}$.

Vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{x^2}$ lên cùng hệ tọa độ Oxy. Ta thấy đồ thị hàm số $y=\dfrac{a}{x^2}$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 2 nghiệm phân biệt.

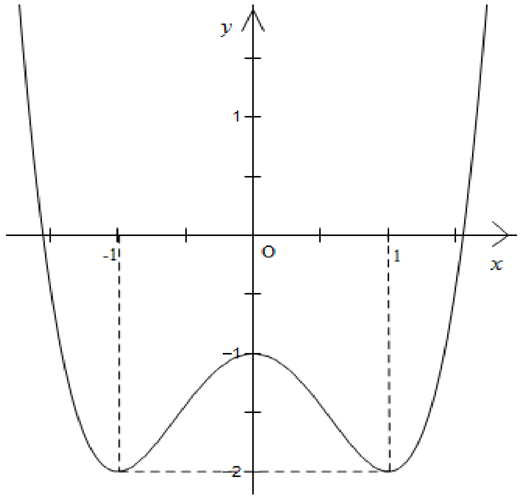
Tương tự với (3) và (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy có phương trình $f\left(x^2 f(x)\right)=2$ có 9 nghiệm phân biệt.

Dạng ⑥: Ứng dụng KSHS vào giải PT-BPT-BĐT-HỆ không tham số

Câu 113: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 1)** Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-\dfrac{1}{2}$ là

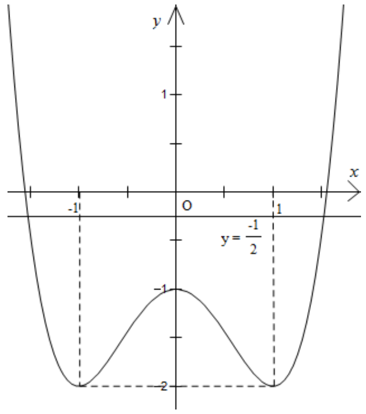
Ghi Chú!



A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C



Số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{2}$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và đường thẳng $y=-\dfrac{1}{2}$. Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm thực phân biệt.

Câu 114: **(ĐTK 2020-L1-Câu 23)** Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $3f(x)-2=0$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$

Ghi Chú!

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x)=\dfrac{2}{3}$

Căn cứ vào bảng biến thiên thì phương trinh

$3f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 115: **(ĐTK 2020-L1-Câu 45)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$ của phương trình $2f(\sin x)+3=0$ là

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sin x$. Do $x\in[-\pi;2\pi]$ nên $t\in[-1;1]$.

Khi đó ta có phương trình $2f(t)+3=0 \Leftrightarrow f(t)=-\dfrac{3}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(t)=-\dfrac{3}{2}$ có 2 nghiệm $t=a\in(-1;0)$ và $t=b\in(0;1)$.

Trường hợp 1: $t=a\in(-1;0)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(-1;0)$ thì phương trình có 4 nghiệm $-\pi<x_1<x_2<0<\pi<x_3<x_4<2\pi$.

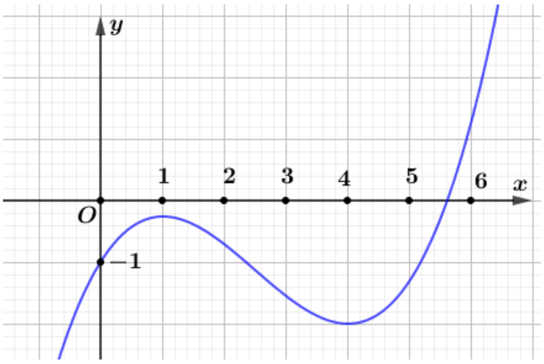
Trường hợp 2: $t=b\in(0;1)$

Ứng với mỗi giá trị $t\in(0;1)$ thì phương trình có 4 nghiệm $0<x_5<x_6<\pi$.

Hiển nhiên cả 6 nghiệm trong 2 trường hợp trên đều khác nhau.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm thuộc đoạn $[-\pi;2\pi]$

Câu 116: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 50)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

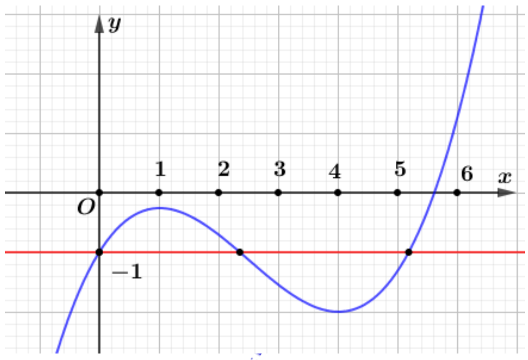


A. 8. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

$f\left(x^3 f(x)\right)+1=0 \Leftrightarrow f\left(x^3 f(x)\right)=-1\ (*)$



Dựa vào đồ thị

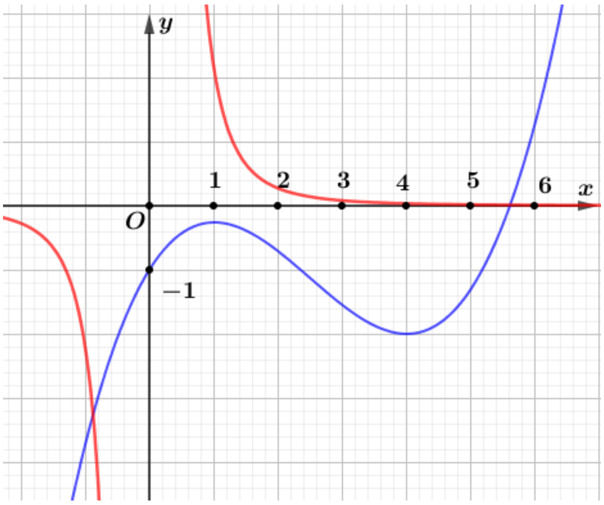
$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^3 f(x)=0 & (1) \\ x^3 f(x)=a & (2)\quad (2<a<3) \\ x^3 f(x)=b & (3)\quad (5<b<6) \end{array}\right..$$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=x_1\quad (5<x_1<6) \end{array}\right..$$

Xét (2): dễ thấy $x=0$ không là nghiệm. Với $x\neq 0$, $(2) \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{a}{x^3}$.

Vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{a}{x^3}$ $(2<a<3)$ và hàm số $y=f(x)$ trên cùng hệ trục tọa độ suy ra phương trình có 2 nghiệm.

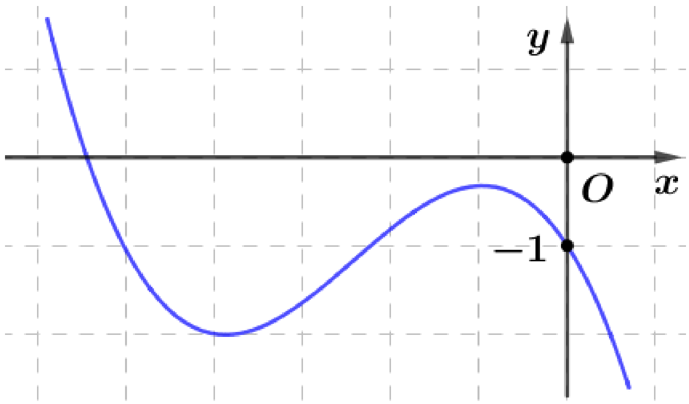
Ghi Chú!



Tương tự xét phương trình (3) phương trình có 2 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm.

Câu 117: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 50)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(x^3f(x)\right)+1=0$ là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 8.

Lời giải

Chon A

Ta có

$$f\left(x^3f(x)\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x^3f(x)\right)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x^3f(x)=a\ \ (-3<a<-1) & (1)\\ x^3f(x)=b\ \ (-5<b<-3) & (2)\\ x^3f(x)=0 & (3)\end{array}\right.,$$

với $a,b<0$.

+ Với $m<0$, xét phương trình $x^3f(x)=m\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{m}{x^3}$.

Đặt $g(x)=\dfrac{m}{x^3}$, $g'(x)=\dfrac{-3m}{x^4}>0,\forall x\neq 0$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	||	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài, suy ra trong mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$ phương trình $f(x)=g(x)$ có đúng một nghiệm.

Suy ra mỗi phương trình (1) và (2) có 2 nghiệm.

+ Xét phương trình $(3): x^3 f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=c<0 \end{array}\right.$, với c khác các nghiệm của (1) và (2).

Vậy phương trình $f\left(x^3 f(x)\right)+1=0$ có đúng 6 nghiệm.

Dạng ⑦: Dạng toán đưa về tìm tham số để PT, BPT, hệ có nghiệm, có k nghiệm khi biết các đồ thị, BBT

Câu 118: **(ĐTN 2017-Câu 5)** Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

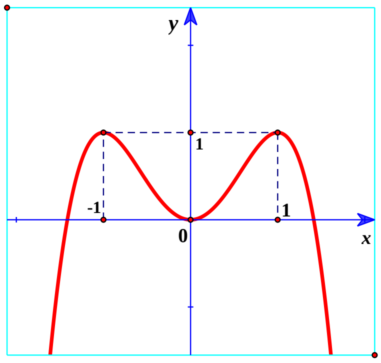
Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $[-1;2]$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-1;2]$. **D.** $(-\infty;2]$.

Lời giải

Chọn B

Câu 119: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 24)** Cho hàm số $y=-x^4+2x^2$ có đồ thị như hình bên. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $-x^4+2x^2=m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.



A. $m > 0$ **B.** $0 \le m \le 1$

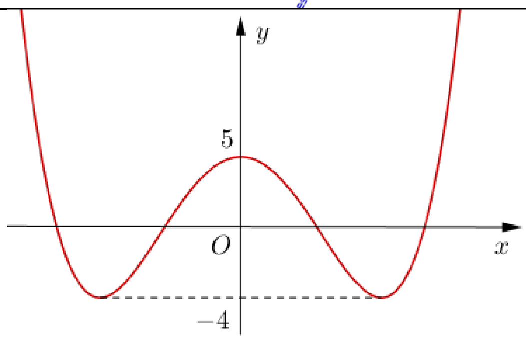
C. $0 < m < 1$ **D.** $m < 1$

Lời giải

Chọn C

Số nghiệm thực của phương trình $-x^4 + 2x^2 = m$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ và đường thẳng $y = m$. Dựa vào đồ thị suy ra $-x^4 + 2x^2 = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt khi $0 < m < 1$.

Câu 120: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 33] Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi giá trị của m, phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?



A. 4. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $2f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{m}{2}$.

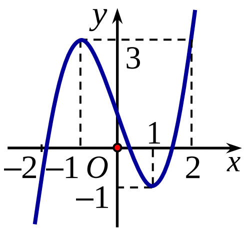
Phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$-4 < \dfrac{m}{2} < 5 \Leftrightarrow -8 < m < 10$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-7; -6; ...; 7; 8; 9\}$.

Vậy có 17 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2f(x) = m$ có 4 nghiệm thực phân biệt.

Câu 121: **(ĐTK 2019-Câu 43)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ là



A. $[-1;3)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $[-1;1)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin x$. Với $x \in (0;\pi)$ thì $t \in (0;1]$.

Do đó phương trình $f(\sin x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$ khi và chỉ khi phương trình $f(t) = m$ có nghiệm thuộc nửa khoảng $(0;1]$.

Quan sát đồ thị ta suy ra điều kiện của tham số m là $m \in [-1;1)$.

Câu 122: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 49)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

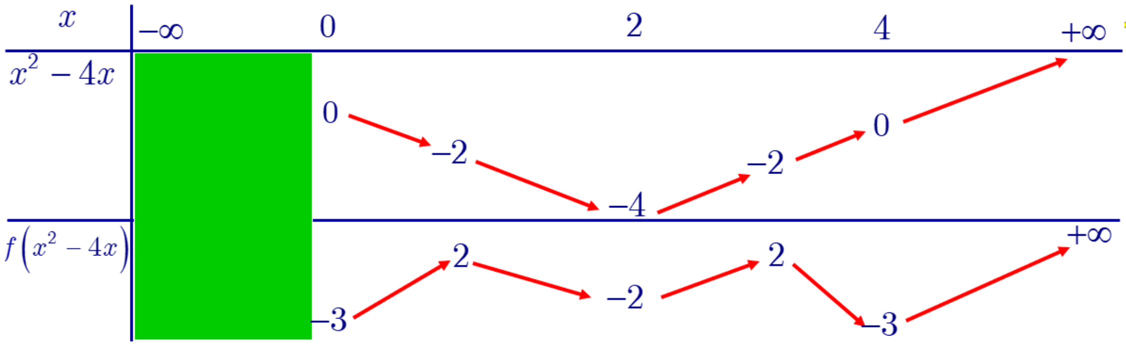
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $5f(x^2-4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 24. **B.** 21. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

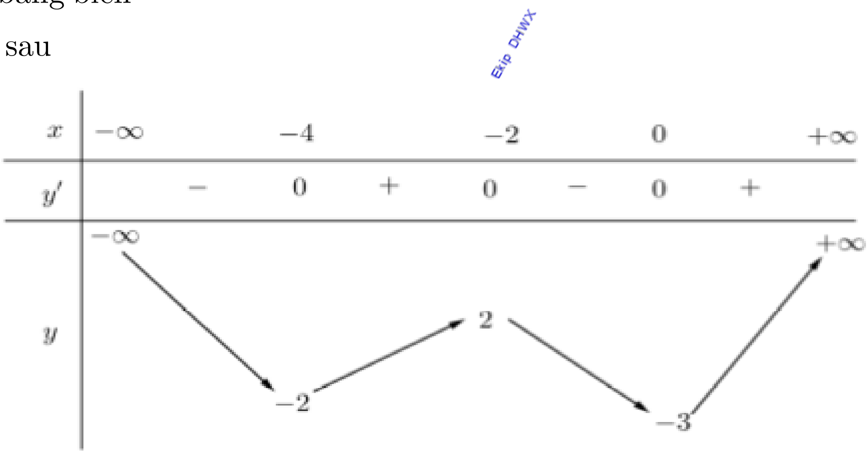
Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và sự biến thên của của hàm số $y = x^2 - 4x$ trên khoảng $(0;+\infty)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2-4x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$ như sau



Số nghiệm của phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ và đường thẳng $y=\dfrac{m}{5}$.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x^2-4x\right)$ ta có phương trình $5f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $-3<\dfrac{m}{5}\le 2\Leftrightarrow -15<m\le 10$, mặt khác $m\in\mathbb{Z}$ nên có 25 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 123: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 50)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f\left(x^2-4x\right)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 25. **B.** 30. **C.** 29. **D.** 24.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x)=f\left(x^2-4x\right)\Rightarrow g'(x)=(2x-4).f'\left(x^2-4x\right)$.

$$\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow (2x-4).f'\left(x^2-4x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ f'\left(x^2-4x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ x^2-4x=-4\\ x^2-4x=-2\\ x^2-4x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2+\sqrt{2}\\ x=2-\sqrt{2}\\ x=0\\ x=4\end{array}\right.$$

.

Ghi Chú!

Ta có bảng biến thiên:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow g(x)=\dfrac{m}{6}$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$ $\Leftrightarrow -3<\dfrac{m}{6}\le 2 \Leftrightarrow -18<m\le 12$ mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-17;-16;...;11;12\}$.

Vậy có 30 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 124: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 49)** Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f(x^2-4x)=m$ có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 15. **B.** 12. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Chọn A

Đặt: $y=g(x)=f(x^2-4x)\Rightarrow g'(x)=(2x-4)f'(x^2-4x)$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-4=0\\ f'(x^2-4x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ \left[\begin{array}{l}x^2-4x=-4\\ x^2-4x=-2\\ x^2-4x=0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\{2;2\pm\sqrt{2};0;4\}.$$

Ta có: $g(0)=f(0)=-3$; $g\left(2-\sqrt{2}\right)=g\left(2+\sqrt{2}\right)=f(-2)=2$;

$g(2)=f(-4)=-2$; $g(4)=f(0)=-3$.

Nhận thấy $g'(5)=6f'(5)>0$ và tất cả các nghiệm của phương trình $g'(x)=0$ đều là nghiệm bội lẻ, từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=g(x)$ như sau:

x	0		$2-\sqrt{2}$		2		$2+\sqrt{2}$		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-3	↗	2	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta được: yêu cầu bài toán tương đương $-3<\dfrac{m}{3}\le 2$

$\Leftrightarrow -9<m\le 6$.

Vậy có tất cả 15 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 125: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 50)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	-3	↗	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f(x^2-4x)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$?

A. 16. **B.** 19. **C.** 20. **D.** 17.

Lời giải

Chọn C

+ Đặt $t=x^2-4x$. Ta có bảng biến thiên sau:

Ghi Chú!

x	0		2		$+\infty$
t	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Khi $t\in(-4;0)$ có 2 giá trị $x\in(0;+\infty)$ thỏa mãn $t=x^2-4x$.

Khi $t\in[0;+\infty)\cup\{-4\}$ có 1 giá trị $x\in(0;+\infty)$ thỏa mãn $t=x^2-4x$.

+ Xét phương trình $4f(t)=m\Leftrightarrow f(t)=\dfrac{m}{4},(*)$

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	0	−	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

* Khi $\dfrac{m}{4}\in(-3;2]\Leftrightarrow m\in(-12;8]$, (*) có ít nhất 1 nghiệm $t\in(-4;0)$ và một nghiệm $t\in(0;+\infty)$. Suy ra $4f(x^2-4x)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

* Khi $\dfrac{m}{4}\in(2;+\infty)\cup\{-3\}\Leftrightarrow m\in(8;+\infty)\cup\{-12\}$, (*) có đúng 1 nghiệm $t\in[0;+\infty)$. Suy ra $4f(x^2-4x)=m$ có đúng 1 nghiệm thực thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

* Khi $\dfrac{m}{4}\in(-\infty;-3)\Leftrightarrow m\in(-\infty;-12)$, có (*) vô nghiệm. Suy ra $4f(x^2-4x)=m$ vô nghiệm.

Vậy có 20 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4f(x^2-4x)=m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Dạng ⑧: Tìm tham số để BPT, hệ,. nghiệm đúng với mọi x thuộc D

Câu 126: **(ĐTK 2019-Câu 39)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

Ghi Chú!

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Bất phương trình $f(x) < \mathrm{e}^x + m$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi

A. $m \ge f(1) - \mathrm{e}$. **B.** $m > f(-1) - \frac{1}{\mathrm{e}}$. **C.** $m \ge f(-1) - \frac{1}{\mathrm{e}}$. **D.** $m > f(1) - \mathrm{e}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) < \mathrm{e}^x + m \Leftrightarrow f(x) - \mathrm{e}^x < m$.

Xét $h(x) = f(x) - \mathrm{e}^x$, $x \in (-1;1)$. Ta có: $h'(x) = f'(x) - \mathrm{e}^x$

Vì $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-1;1)$ (dựa vào BBT) và $\mathrm{e}^x > 0, \forall x \in (-1;1)$ nên $h'(x) < 0$, $\forall x \in (-1;1)$

$\Rightarrow h(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. Suy ra: $h(x) < h(-1)$, $\forall x \in (-1;1)$.

Mà $h(x) < m$, $\forall x \in (-1;1)$ nên $m \ge h(-1) \Leftrightarrow m \ge f(-1) - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Câu 127: **(ĐTK 2019-Câu 49)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) \ge 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét bất phương trình $m^2(x^4 - 1) + m(x^2 - 1) - 6(x - 1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x+1) - 6\right] \ge 0$ (*)

Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình (*), với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Do đó, để bất phương trình (*) nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì điều kiện cần là $x = 1$ cũng là một nghiệm bội lẻ của $g(x) = m^2(x^3 + x^2 + x + 1) + m(x+1) - 6$.

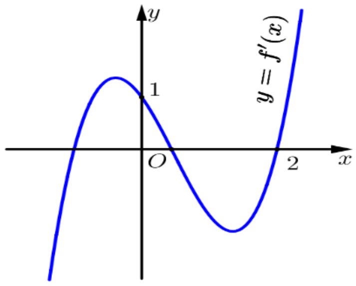
Suy ra $g(1) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = -\frac{3}{2}$.

Thử lại ta thấy $m = 1$ và $m = -\frac{3}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ghi Chú!

Vậy tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 128: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 36)** Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên.



Bất phương trình $f(x)<x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\ge f(2)-2$. **B.** $m\ge f(0)$. **C.** $m>f(2)-2$. **D.** $m>f(0)$.

Lời giải

Chọn B

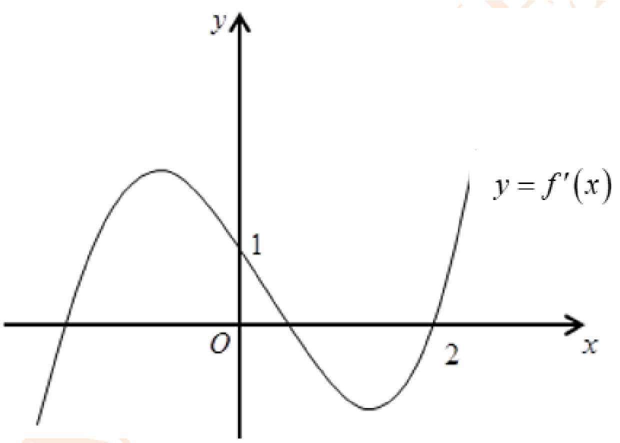
Ta có $f(x)<x+m,\forall x\in(0;2)\Leftrightarrow m>f(x)-x,\forall x\in(0;2)(*)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có với $x\in(0;2)$ thì $f'(x)<1$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-x$ trên khoảng $(0;2)$. Ta có:
$g'(x)=f'(x)-1<0,\forall x\in(0;2)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.Do đó
$(*)\Leftrightarrow m\ge g(0)=f(0)$.

Câu 129: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 38)** Cho hàm số $f(x)$, hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x)>x+m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;2)$ khi và chỉ khi

A. $m\le f(2)-2$. **B.** $m<f(2)-2$. **C.** $m\le f(0)$. **D.** $m<f(0)$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn A

Xét bất phương trình $f(x) > x + m \Leftrightarrow m < f(x) - x$.

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ với $x \in (0;2)$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1$. Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y = 1$ không cắt đồ thị $y = f'(x)$ tại bất kỳ điểm nào có hoành độ thuộc khoảng $(0;2)$ nên phương trình $f'(x) = 1$ vô nghiệm với $x \in (0;2)$. Ta có bảng biến thiên như sau:.

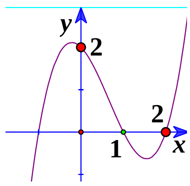
x	0		2
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\searrow$	$g(2)$

(do $f'(x) < 1$ với $x \in (0;2)$).

Từ bảng biến thiên ta thấy để $m < g(x)$ với $x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow m \le g(2) \Leftrightarrow m \le f(2) - 2$.

Câu 130: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 38)** Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Bất phương trình $f(x) < 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi



A. $m > f(0)$. **B.** $m > f(2) - 4$.

C. $m \ge f(0)$. **D.** $m \ge f(2) - 4$.

Lời giải

Chọn C

$f(x) < 2x + m \Leftrightarrow m > f(x) - 2x$ (1)

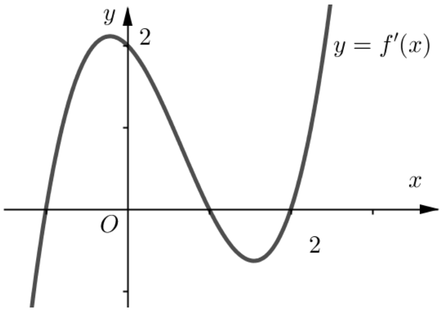
Đặt $g(x) = f(x) - 2x$, $x \in (0;2)$.

$\forall x \in (0;2), g'(x) = f'(x) - 2 < 0$, hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$

Do đó (1) đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $m \ge g(0) = f(0)$

Câu 131: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 37)** Cho hàm số $f(x)$, hàm số $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Ghi Chú!



Bất phương trình $f(x) > 2x + m$ (m là tham số thực) nghiệm đúng với mọi $x \in (0;\ 2)$ khi và chỉ khi

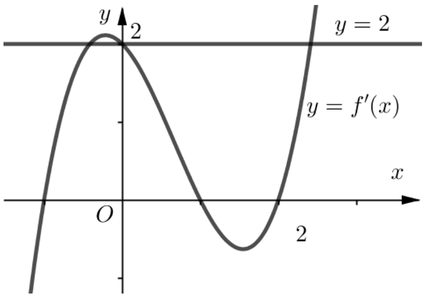
A. $m \le f(2) - 4$. **B.** $m \le f(0)$.

C. $m < f(0)$. **D.** $m < f(2) - 4$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $g(x) = f(x) - 2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;\ 2)$ vì $g'(x) = f'(x) - 2 < 0, \forall x \in (0;2)$ (quan sát trên khoảng $(0;\ 2)$, đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm dưới đường thẳng $y = 2$).



Suy ra $g(2) < g(x) < g(0), \forall x \in (0;2)$.

Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in (0;\ 2)$ khi và chỉ khi $m < g(x), \forall x \in (0;\ 2) \Leftrightarrow m \le g(2) \Leftrightarrow m \le f(2) - 4$.

➽Dạng ⑨: Tham số liên quan đến tương giao của các đồ thị thỏa mãn đk về độ dài, góc,diện tích,...

Câu 132: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 45)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -mx$ cắt đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - m + 2$ tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $m \in (-\infty; 3)$ **B.** $m \in (-\infty; -1)$

C. $m \in (-\infty : +\infty)$ **D.** $m \in (1 : +\infty)$

Lời giải

Chọn A

Hoành độ giao điểm là nghiệm của phương trình

Ghi Chú!

$x^3-3x^2-m+2=-mx \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+m-2)=0$

$\Leftrightarrow x=1; x^2-2x+m-2=0$

Đặt nghiệm $x_2=1$. Từ giải thiết bài toán trở thành tìm m để phương trình có 3 nghiệm lập thành cấp số cộng. Khi đó phương trình

$x^2-2x+m-2=0$ phải có 2 nghiệm phân biệt (vì theo Viet rõ ràng $x_1+x_3=2=2x_2$)

Vậy ta chỉ cần $\Delta'=1-(m-2)>0 \Leftrightarrow m<3$.

Câu 133: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 48)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=mx-m+1$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+x+2$ tại ba điểm A,B,C phân biệt sao $AB=BC$

A. $m\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$ **B.** $m\in\mathbb{R}$

C. $m\in\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ **D.** $m\in(-2;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^3-3x^2+x+2=mx-m+1 \Leftrightarrow x^3-3x^2+x-mx+m+1=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-m-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-2x-m-1=0 \end{array}\right.$. Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số tại ba điểm phân biệt thì phương trình $x^2-2x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1. Hay $\begin{cases} 1+m+1>0 \\ 1-2-m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m>-2$

. Với $m>-2$ thì phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là $1,x_1,x_2$ (x_1,x_2 là nghiệm của $x^2-2x-m-1=0$).

Ta có $y''=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow (1;1)$ là điểm uốn. Để $AB=BC$ thì đường thẳng $y=mx-m+1$ phải đi qua điểm $(1;1)$. Thay vào thấy luôn đúng. Vậy $m>-2$.

Câu 134: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 49)** Cho hai hàm số $y=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}$ và $y=|x+2|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại 4 điểm phân biệt là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2):

$$\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}=|x+2|-x+m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x-m=0 \ (1).$$

Đặt $f(x)=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}-|x+2|+x-m$.

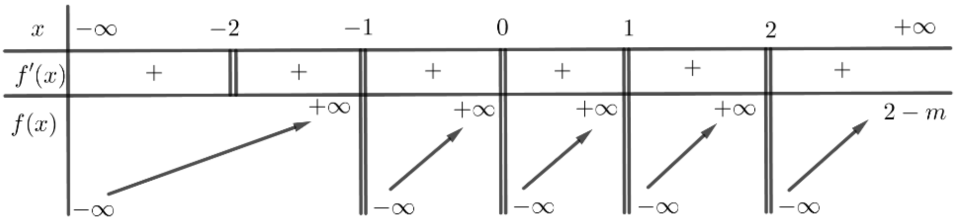
Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1;2\}$.

$$f'(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x+2}{|x+2|}+1$$

$$=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{|x+2|-(x+2)}{|x+2|}$$

$$\Rightarrow f'(x)>0, \forall x\in D, x\neq -2.$$

Bảng biến thiên



Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2-m\leq 0 \Leftrightarrow m\geq 2$.

Câu 135: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 50) Cho hai hàm số $y=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}$ và $y=|x+1|-x+m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là (C_1) và (C_2). Tập hợp tất cả các giá trị của m để (C_1) và (C_2) cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biệt là

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x\neq -1;\ x\neq -2;\ x\neq -3$ và $x\neq -4$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm.

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}+\frac{x+3}{x+4}=|x+1|-x+m.$$

$$\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{x+2}\right)+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\left(1-\frac{1}{x+4}\right)=|x-1|-x+m.$$

$$\Leftrightarrow x-|x+1|+4-\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\right)=m.$$

Đặt tập $D_1=(-1;+\infty)$ và $D_2=(-\infty;-4)\cup(-4;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;-1)$.

Ghi Chú!

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right)=m, \quad \text{khi } x\in D_1 \\ 2x+5-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right)=m, \text{ khi } x\in D_2 \end{array}\right. .$$

Đặt $f\left(x\right)=\begin{cases} 3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_1 \\ 2x+5-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+4}\right), & \text{khi } x\in D_2 \end{cases}.$

$$\Rightarrow f'\left(x\right)=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_1 \\ 2+\left(\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}+\dfrac{1}{(x+4)^2}\right)>0, & \text{khi } x\in D_2 \end{cases}.$$

Vậy hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=3$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-\infty$ nên ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-4		-3		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	‖	$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 3$	

.

Do đó để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $m\geq 3 \Rightarrow m\in\left[3;+\infty\right)$.

Câu 136: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 50)** Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}$ và $y=\left|x+2\right|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $\left[-2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-2\right)$. **C.** $\left(-2;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-2\right]$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}=\left|x+2\right|-x-m \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}-\left|x+2\right|+x=-m \ (1)$$

Xét $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-\left|x+2\right|+x, x\in D=\mathbb{R}\setminus\left\{-3;-2;-1;0\right\}$

Ta có $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}-2, x\in\left(-2;+\infty\right)\cap D=D_1\\ \dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}+2x+2, x\in\left(-\infty;-2\right)\cap D=D_2\end{cases}$

Có $f'\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x+3\right)^2}, \forall x\in D_1\\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\left(x+1\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x+2\right)^2}+\dfrac{1}{\left(x+3\right)^2}+2, \forall x\in D_2\end{cases}$

Dễ thấy $f'\left(x\right)>0, \forall x\in D_1\cup D_2$, ta có bảng biến thiên

x	-∞		-3		-2		1		0		+∞
f'(x)		+	||	+	||	+	||	+	||	+	
f(x)	-∞	↗	+∞ || -∞	↗	+∞ || -∞	↗	+∞ || -∞	↗	+∞ || -∞	↗	2

Hai đồ thị cắt nhau tại đúng 4 điểm phân biện khi và chỉ khi phương trình $\left(1\right)$ có đúng 4 nghiệm phân biệt, từ bảng biến thiên ta có: $-m\geq 2\Leftrightarrow m\leq -2$.

Câu 137: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 47) Cho hai hàm số $y=\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$ và $y=\left|x+1\right|-x-m$ (m là tham số thực) có đồ thị lần lượt là $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$. Tập hợp tất cả các giá trị của m để $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$ cắt nhau tại đúng bốn điểm phân biệt là

A. $\left(-3;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-3\right)$. **C.** $\left[-3;+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-3\right]$.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình hoành độ

$$\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}=\left|x+1\right|-x-m$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-\left|x+1\right|+x=-m\left(1\right)$$

Số nghiệm của (1) là số giao điểm của

$$F\left(x\right)=\frac{x-2}{x-1}+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}-\left|x+1\right|+x=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}-1 & ,x>-1\\ \dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+2x+1, & x<-1\end{cases}$$

Ghi Chú!

Ta có $F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}, x\in(-1;+\infty)\setminus\{0;1\}\\ \dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+2, x\in(-\infty;-1)\setminus\{-2\}\end{cases}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=3;\ \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+}F(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^+}F(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^-}F(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=+\infty;\lim\limits_{x\to1^+}F(x)=-\infty;\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \|\|\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \|\|\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \|\|\ -\infty$	$\nearrow$	$+\infty\ \|\|\ -\infty$	$\nearrow$	3

Để phương trình có 4 nghiệm thì $-m\ge3\Leftrightarrow m\le-3$.

➤Dạng ⑩: Điểm đặc biệt, tính chất đặc biệt liên quan đồ thị hàm số

Câu 138: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 40)** Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có: $y=\dfrac{x-2}{x+2}=1-\dfrac{4}{x+2}$.

Đồ thị (C) có hai đường tiệm cận là $x=-2$ và $y=1$. Suy ra $I(-2;1)$.

Gọi $A\left(a-2;1-\dfrac{4}{a}\right)$, $B=\left(b-2;1-\dfrac{4}{b}\right)$ với $a,b\ne0, a\ne b$. Tam giác IAB đều $\Leftrightarrow IA=IB=AB$.

Ta có: $IA=IB\Leftrightarrow a^2+\dfrac{16}{a^2}=b^2+\dfrac{16}{b^2}\Leftrightarrow(a^2-b^2)(a^2b^2-16)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}b=\pm a & (1)\\ a^2b^2=16 & (2)\end{array}\right.$ (do $a\ne b$).

(1) sẽ dẫn tới $A\equiv B$ hoặc I là trung điểm AB nên loại. Vậy $a^2b^2=16$.

Ghi Chú!

Lại có: $IA = AB \Rightarrow a^2 + \frac{16}{a^2} = (a-b)^2 + 16\frac{(a-b)^2}{a^2b^2}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2(a-b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4ab \Rightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 16 \end{cases}$

$\Rightarrow (a-b)^2 = 8 \Rightarrow AB^2 = 2(a-b)^2 = 16 \Rightarrow AB = 4$.

Câu 139: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 45)** Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

(C): $y = \frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$. $I(-2;1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận của (C).

Ta có: $A\left(a;1-\frac{3}{a+2}\right) \in (C)$, $B\left(b;1-\frac{3}{b+2}\right) \in (C)$. $\overrightarrow{IA} = \left(a+2;-\frac{3}{a+2}\right)$, $\overrightarrow{IB} = \left(b+2;-\frac{3}{b+2}\right)$.

Designer: Ekip DHWX

Đặt $a_1 = a+2$, $b_1 = b+2$ ($a_1 \ne 0$, $b_1 \ne 0$; $a_1 \ne b_1$). Tam giác ABI đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ \cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right) = \cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \frac{9}{a_1^2} = b_1^2 + \frac{9}{b_1^2} \\ \frac{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}{IA.IB} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \frac{9}{a_1^2} = b_1^2 + \frac{9}{b_1^2} & (1) \\ \frac{a_1b_1 + \frac{9}{a_1b_1}}{a_1^2 + \frac{9}{a_1^2}} = \frac{1}{2} & (2) \end{cases}.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 + 9\left(\frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{b_1^2}\right) = 0 \Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 - 9\left(\frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{a_1^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 - 9\left(\frac{a_1^2 - b_1^2}{a_1^2b_1^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a_1^2 - b_1^2\right)\left(1 - \frac{9}{a_1^2b_1^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1^2 = b_1^2 \\ a_1^2b_1^2 = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_1 = -b_1 \\ a_1b_1 = 3 \\ a_1b_1 = -3 \end{array}\right.$.

Trường hợp $a_1 = b_1$ loại vì $A \not\equiv B$; $a_1 = -b_1$, $a_1b_1 = -3$ (loại vì không thỏa (2)).

Do đó $a_1b_1 = 3$, thay vào (2) ta được $\dfrac{3+\dfrac{9}{3}}{a_1^2+\dfrac{9}{a_1^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a_1^2 + \dfrac{9}{a_1^2} = 12$.

Vậy $AB = IA = \sqrt{a_1^2 + \dfrac{9}{a_1^2}} = 2\sqrt{3}$.

Câu 140: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 48)** Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn AB có độ dài bằng:

A. 3. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

(C): $y = \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$. $I(-1;1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận của (C).

Ta có: $A\left(a;1-\dfrac{2}{a+1}\right) \in (C)$, $B\left(b;1-\dfrac{2}{b+1}\right) \in (C)$. $\overrightarrow{IA} = \left(a+1;-\dfrac{2}{a+1}\right)$, $\overrightarrow{IB} = \left(b+1;-\dfrac{2}{b+1}\right)$.

Đặt $a_1 = a+1$, $b_1 = b+1$ ($a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$; $a_1 \neq b_1$). Tam giác ABI đều khi và chỉ khi

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ \cos\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right) = \cos 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2} = b_1^2 + \dfrac{4}{b_1^2} \\ \dfrac{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}{IA.IB} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2} = b_1^2 + \dfrac{4}{b_1^2} & (1) \\ \dfrac{a_1b_1 + \dfrac{4}{a_1b_1}}{a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2}} = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}.$$

Ta có $(1) \Leftrightarrow a_1^2 - b_1^2 + 4\left(\dfrac{1}{a_1^2} - \dfrac{1}{b_1^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(a_1^2 - b_1^2\right)\left(1 - \dfrac{4}{a_1^2b_1^2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1^2 = b_1^2 \\ a_1^2b_1^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = b_1 \\ a_1 = -b_1 \\ a_1b_1 = 2 \\ a_1b_1 = -2 \end{array}\right..$$

Trường hợp $a_1 = b_1$ loại vì $A \neq B$; $a_1 = -b_1$, $a_1b_1 = -2$ (loại vì không thỏa (2)).

Ghi Chú!

Do đó $a_1b_1 = 2$, thay vào (2) được $\dfrac{2+\dfrac{4}{2}}{a_1^2+\dfrac{4}{a_1^2}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2} = 8$. Vậy

$AB = IA = \sqrt{a_1^2 + \dfrac{4}{a_1^2}} = 2\sqrt{2}$.

Câu 141: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 43)** Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{x+1}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A, B thuộc (C), đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Tịnh tiến hệ trục theo vecto $\overrightarrow{OI} = (-1;1) \to I(0;0)$ và $(C): Y = \dfrac{-3}{X}$.

Gọi $A\left(a; \dfrac{-3}{a}\right)$, $B\left(b; \dfrac{-3}{b}\right) \in (C)$, điều kiện: $(a \neq b)$.

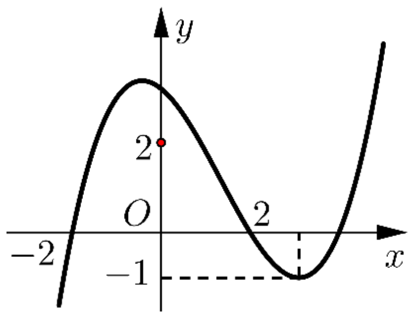
Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} IA = IB \\ \cos\left(\overrightarrow{IA}; \overrightarrow{IB}\right) = 60^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + \dfrac{9}{a^2} = b^2 + \dfrac{9}{b^2} & (1) \\ \dfrac{ab + \dfrac{9}{ab}}{AB^2} = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$

Từ $(2) \to ab > 0$, do đó: $(1) \leftrightarrow \left(a^2 - b^2\right)\left(a^2b^2 - 9\right) = 0 \xrightarrow{ab>0} ab = 3$.

Suy ra: $AB^2 = 2\left(3 + \dfrac{9}{3}\right) = 12 \longrightarrow AB = 2\sqrt{3}$.

Dạng 11: Các bài toán liên quan đến phương trình của hàm ẩn.

Câu 142: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 43)** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x\right)\right| = \dfrac{4}{3}$ là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình: $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ (1).

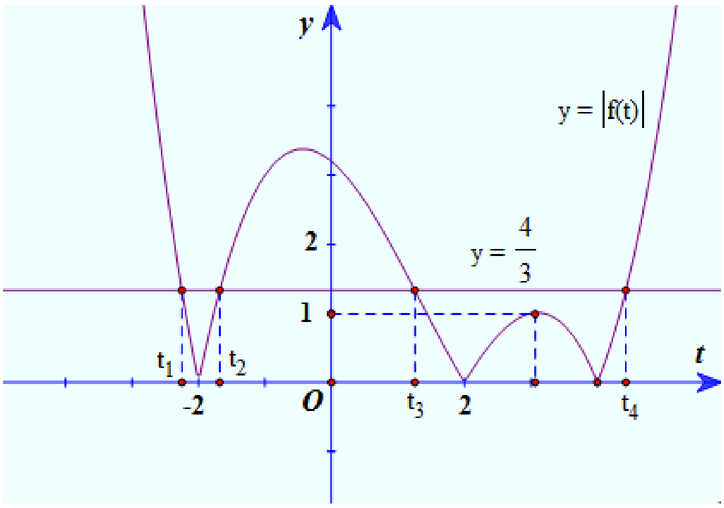
Đặt $t=x^3-3x$, ta có: $t'=3x^2-3$; $t'=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
t'		$+$	0	$-$	0	$+$	
t	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình (1) trở thành $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{4}{3}$ với $t\in\mathbb{R}$.

Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ban đầu, ta suy ra đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ như sau:



Suy ra phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{4}{3}$ có các nghiệm $t_1<-2<t_2<t_3<2<t_4$.

Từ bảng biến thiên ban đầu ta có:

+) $x^3-3x=t_1$ có 1 nghiệm x_1.

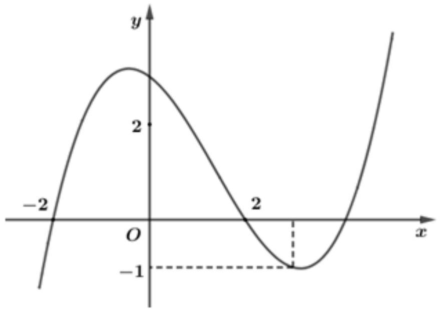
+) $x^3-3x=t_4$ có 1 nghiệm x_2.

+) $x^3-3x=t_2$ có 3 nghiệm x_3, x_3, x_5.

+) $x^3-3x=t_3$ có 3 nghiệm x_6, x_7, x_8.

Vậy phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{4}{3}$ có 8 nghiệm.

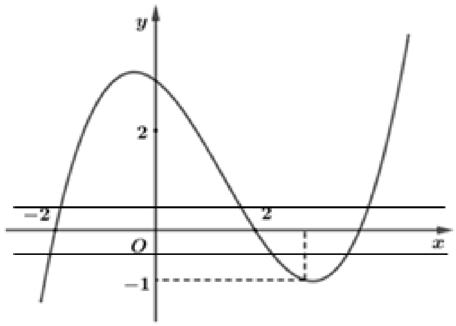
Câu 143: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 41)** Cho hàm số bậc ba $y=f\ \ x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\ \ x^3-3x\ \right|=\frac{1}{2}$.



A. 6. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\left|f\ \ x^3-3x\ \right|=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f\ \ x^3-3x\ =\dfrac{1}{2} & 1\\ f\ \ x^3-3x\ =-\dfrac{1}{2} & 2\end{array}\right.$.

+) $1\ \Leftrightarrow f\ \ x^3-3x\ =\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3-3x=\alpha_1\ \ -2<\alpha_1<0\\ x^3-3x=\alpha_2\ \ 0<\alpha_2<2\\ x^3-3x=\alpha_3\ \ \alpha_3>2\end{array}\right.$.

+) $2\ \Leftrightarrow f\ \ x^3-3x\ =-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x^3-3x=\alpha_4\ \ x_4<-2\\ x^3-3x=\alpha_5\ \ \alpha_5>2\\ x^3-3x=\alpha_6\ \ \alpha_6>2\end{array}\right.$.

Xét hàm số $y=x^3-3x,\ D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-3$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		2	↘	-2	↗	$+\infty$

.

Dựa vào bảng biến thiên ta có.

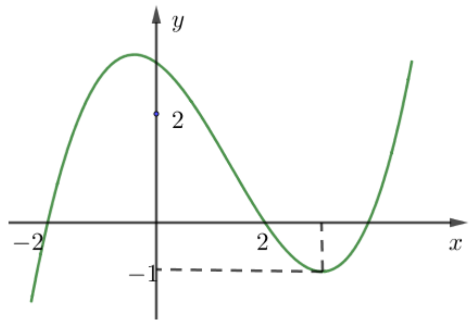
Phương trình: $x^3-3x=\alpha_1$ có 3 nghiệm.

Phương trình: $x^3-3x=\alpha_2$ có 3 nghiệm.

Mỗi phương trình $x^3\text{-}3x=\alpha_3$, $x^3\text{-}3x=\alpha_4$, $x^3\text{-}3x=\alpha_5$, $x^3\text{-}3x=\alpha_6$ đều có một nghiệm.

Từ đó suy ra phương trình $\left|f\ \ x^2-3x\right|=\frac{1}{2}$ có 10 nghiệm.

Câu 144: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 45)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\frac{3}{2}$ là

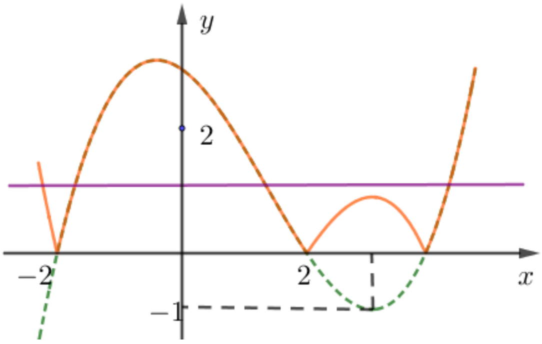


A. 8. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=x^3-3x$ ta có phương trình $\left|f\left(t\right)\right|=\frac{3}{2}$ $(*)$.



Từ đồ thị hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ và đường thẳng $y=\frac{3}{2}$ ta suy ra phương trình $(*)$ có 4 nghiệm $t_1<-2<t_2<0<t_3<2<t_4$

Xét hàm $t=x^3-3x$. Ta có $t'=3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
t'		+			-			+	
t	$-\infty$	↗	2	↘	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Với $t_1<-2$ phương trình: $t_1=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Với $-2<t_2<0$ phương trình: $t_2=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

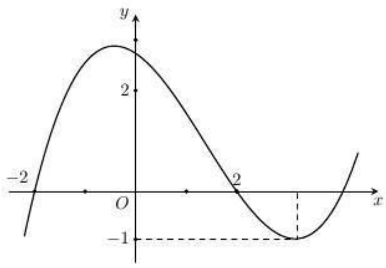
Với $0<t_3<2$ phương trình: $t_3=x^3-3x$ cho ta 3 nghiệm.

Với $2<t_4$ phương trình: $t_4=x^3-3x$ cho ta 1 nghiệm.

Ghi Chú!

Vậy phương trình đã cho có tất cả 8 nghiệm. **Chọn A**

Câu 145: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 42)** Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ là



A. 6. **B.** 10. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=g\left(x\right)=x^3-3x$ (1)

Ta có $g'\left(x\right)=3x^2-3=0 \Leftrightarrow x\pm1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có với $t\in\left(-2;2\right)$ cho ta 3 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in\left\{-2;2\right\}$ cho ta 2 giá trị x thỏa mãn (1)

$t\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ cho ta 1 giá trị x thỏa mãn (1).

Phương trình $\left|f\left(x^3-3x\right)\right|=\dfrac{2}{3}$ (2) trở thành

$$\left|f\left(t\right)\right|=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(t\right)=\dfrac{2}{3}\\ f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Phương trình $f\left(t\right)=\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $-2<t_1<t_2<2<t_3 \Rightarrow$ có 7 nghiệm của phương trình (2).

+ Phương trình $f\left(t\right)=-\dfrac{2}{3}$ có 3 nghiệm thỏa mãn $t_4<-2<2<t_5<t_6 \Rightarrow$ có 3 nghiệm của phương trình (2).

Vậy phương trình đã cho có 10 nghiệm.

Câu 146: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 50] Cho hàm số $f(x)=x^4-32x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;2)$ của phương trình $f(x^2+2x+3)=m$ bằng -4?

A. 145. **B.** 142. **C.** 144. **D.** 143.

Lời giải

Chọn D

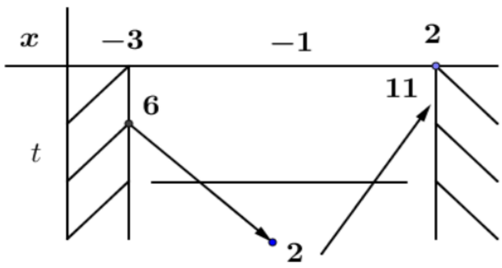
Phương trình $x^2+2x+3=a\ (a\in\mathbb{R})$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta có: $x_1+x_2=-2$

Phương trình $f(x^2+2x+3)=m(1)$ có tổng nghiệm bằng -4

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm xảy ra ở trường hợp: 4 nghiệm phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4\ (2)$

(**do khi đó:** $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=-2+(-2)=-4$)

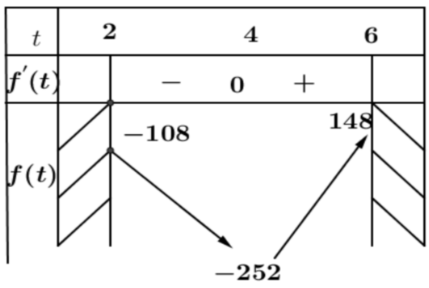
Đặt $x^2+2x+3=t$



Điều kiện (2) $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm $2<t<6\ (2)$

Xét $f(t)=t^4-32t^2+4$

$$\Rightarrow f'(t)=4t^3-64t\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\pm4\end{array}\right.$$



Yêu cầu bài GTán $\Leftrightarrow -252<m<-108\Rightarrow 143$ số.

Câu 147: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 50] Cho hàm số $f(x)=x^4-32x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;2)$ của phương trình $f(x^2+2x+3)=m$ bằng -4?

A. 145. **B.** 142. **C.** 144. **D.** 143.

Lời giải

Chọn D

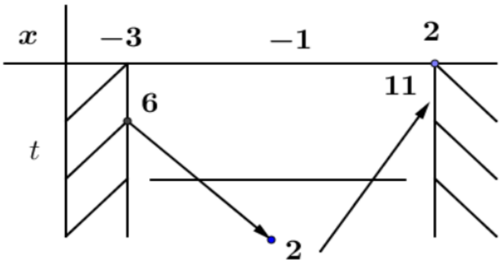
Phương trình $x^2+2x+3=a\left(a\in\mathbb{R}\right)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta có: $x_1+x_2=-2$

Phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m(1)$ có tổng nghiệm bằng -4

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm xảy ra ở trường hợp: 4 nghiệm phân biệt x_1,x_2,x_3,x_4 (2)

(**do khi đó:** $\left(x_1+x_2\right)+\left(x_3+x_4\right)=-2+(-2)=-4$)

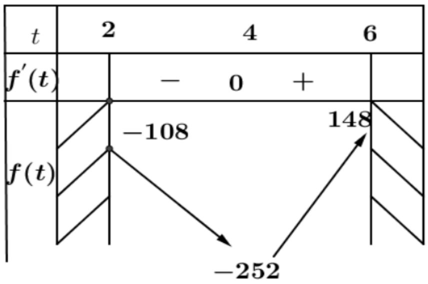
Đặt $x^2+2x+3=t$



Điều kiện (2) $\Leftrightarrow$ Tìm m để phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm $2<t<6$ (2)

Xét $f(t)=t^4-32t^2+4$

$\Rightarrow f'(t)=4t^3-64t\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=\pm4\end{array}\right.$



Yêu cầu bài GTán $\Leftrightarrow -252<m<-108$ $\Rightarrow$143 số.

Câu 148: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 49] Cho hàm số $f(x)=x^4-32x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-4;1)$ của phương trình $f\left(x^2+4x+5\right)=m$ bằng -8?

A. 81. **B.** 82. **C.** 80. **D.** 79.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2+4x+5$, với $x\in(-4;1)\Rightarrow x^2+4x+5-t=0$ $(*)$.

Ta có: $t'=2x+4$.

$t'=0\Leftrightarrow x=-2$.

Bảng biến thiên:

Ghi Chú!

x	-4		-2		1
t'		$-$	0	$+$	
t	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	10

Do đó, với $t<1$, phương trình $(*)$ vô nghiệm.

Với $t=1$ hoặc $5\le t<10$, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất.

Với $1<t<5$, phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt thoả mãn $x_1+x_2=-4$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f(t)=m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(1;5)$.

Xét hàm số $f(t)=t^4-32t^2+4$ với $t\in(1;5)$.

$f'(t)=4t^3-64t$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=4$ (Do $t\in(1;5)$).

Bảng biến thiên:

x	1		4		5
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-27	$\searrow$	-252	$\nearrow$	-171

Dựa vào bảng biến thiên, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -252<m<-171$.

Mà $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{-251;-250;...;-172\}$.

Vậy có 80 giá trị cần tìm.

Câu 149: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 50] Cho hàm số $f(x)=x^4-18x^2+4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m, tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;2)$ của phương trình $f(x^2+2x+3)=m$ bằng -4

A. 24. **B.** 23. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=x^4-18x^2+4$, TXĐ $D=\mathbb{R}$.

Ghi Chú!

$f'(x)=4x^3-36x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-36x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 3 \end{array}\right.$

Đặt $g(x)=f\left(x^2+2x+3\right)$, TXĐ $D=\mathbb{R}$.

$g'(x)=(2x+2)\,f'\left(x^2+2x+3\right)$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=0 \\ f'\left(x^2+2x+3\right)=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x+3=0 \\ x^2+2x+3=3 \\ x^2+2x+3=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	x_1	-2	x_2	-1	x_3	0	x_4	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	652		-77		-52		-77		12467	

$g(-1)=f(2)=-52$

$g(-2)=f(3)=-77;\ g(0)=f(3)=-77;\ g(-3)=f(6)=652;$

$g(2)=f(11)=12467$

Ta thấy hàm số $g(x)$ nhận đường thẳng $x=-1$ làm trục đối xứng.

Do đó tổng giá trị các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3;2)$ của phương trình $f\left(x^2+2x+3\right)=m$ bằng -4 khi nó có bốn nghiệm phân biệt.

Yêu cầu bài toán tương đương với $-77<m<-52$.

Kết luận: Vậy có 24 giá trị m nguyên thỏa mãn đề bài.

------------- **HẾT** -------------

Ghi Chú!

MỤC LỤC

- HÀM SỐ LŨY THỪA-HS MŨ-HS LOGARIT......... 232

§1, 2- LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA.. 232

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 232

Ⓑ Dạng toán cơ bản.. 234

Dạng ①: Kiểm tra quy tắc biến đổi lũy thừa, tính chất........................234

Dạng ②: Tính toán, rút gọn các biểu thức chỉ chứa các số cụ thể 234

Dạng ③: Tính toán, rút gọn các biểu thức có chứa biến(a,b,c,x,y,....) ..235

Dạng ④: So sánh các lũy thừa 236

Dạng ⑤: Tập xác định của hàm số chứa hàm lũy thừa 237

Dạng ⑥: Đạo hàm hàm số lũy thừa 237

§3- LOGARIT 239

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 239

Ⓑ Dạng toán cơ bản.. 240

Dạng ①: Câu hỏi lý thuyết, 1 quy tắc biến đổi và tính chất..................240

Dạng ②: Tính toán liên quan đến logarit dùng đẳng thức...................246

Dạng ③: So sánh các biểu thức lô-ga-rít 255

Dạng ④: Biểu diễn logrit qua logarit khác...255

§4- HÀM SỐ MŨ-HÀM SỐ LOGARIT.. 257

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 257

Ⓑ Dạng toán cơ bản.. 258

Dạng ①: Tập xác định liên quan hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít 258

Dạng ②: Đạo hàm liên quan hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít...................263

Dạng ③: Sự biến thiên có liên quan đến mũ, loga 269

Dạng ④: Min-Max liên quan hàm mũ, hàm lô-ga-rít(1 biến) 270

Dạng ⑤: Đồ thị liên quan hàm số mũ, Logarit 271

Dạng ⑥: Bài toán lãi suất 272

Dạng ⑦: Bài toán tăng trưởng...278

Dạng ⑧: Hàm số mũ,logarit chứa tham số 281

Dạng ⑨: Min-Max liên quan hàm mũ, hàm lô-ga-rít(nhiều biến) 283

§5- PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ........................... 297

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 297

Ⓑ Dạng toán cơ bản.. 298

Dạng ①: PT,BPT mũ cơ bản, gần cơ bản...298

Dạng ②: Phương pháp đưa về cùng cơ số (không tham số) 303

Dạng ③: Phương pháp đặt ẩn phụ (không tham số) 305

Dạng ④: Tính đơn điệu của f(x), g(u) biết công thức f(x) không GTTĐ 305

Dạng ⑤: Phương pháp hàm số, đánh giá (không tham số)..................309

Dạng ⑥: Phương trình mũ có chứa tham số..314

§6- PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT 318

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 318

Ⓑ Dạng toán cơ bản.. 318

Dạng ①: PT,BPT loga cơ bản, gần cơ bản(không tham số)..................318

Dạng ②: Phương pháp đưa về cùng cơ số (không tham số).................327

Dạng ③: Phương pháp đặt ẩn phụ (không tham số) 329

Dạng ④: Phương pháp mũ hóa (không tham số) 330

Dạng ⑤: PP phân tích thành nhân tử (không tham số)........................330

Dạng ⑥: Phương pháp hàm số, đánh giá (không tham số)....................332

Dạng ⑦: Phương trình loga có chứa tham số 342

Dạng ⑧: Bất phương trình loga chứa tham số.......................................347

Dạng ⑨: Hệ có chứa loga 347

Dạng ⑩: Phương trình,bất phương trình tổ hợp cả mũ và loga(không tham số)...348

Dạng ⑩: Phương trình,bất phương trình tổ hợp cả mũ và loga(không tham số)...351

Dạng ⓫: Phương trình,bất phương trình tổ hợp cả mũ và loga(có tham số)...352

Ghi Chú!

§1, 2- LŨY THỪA – HÀM SỐ LŨY THỪA

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

I. LŨY THỪA

1. *Lũy thừa số mũ nguyên dương:*

- Với mỗi số nguyên dương n, lũy thừa bậc n của số a (còn gọi là lũy thừa của a với số mũ n) là số a^n được xác định bởi:
- $a^n=\underbrace{a.a...a}_{n\text{ thua so}}$ với $n>1$,
- $a^1=a.$
- a được gọi là *cơ số*, n được gọi là *số mũ* của lũy thừa a^n.

2. *Lũy thừa với số mũ* 0 *và số mũ nguyên âm:*

- Với $a\neq 0$, $n=0$ hoặc n là một số nguyên âm, lũy thừa bậc n của a là số a^n xác định bởi :
- $a^0=1,\quad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}.$

Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

3. *Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ*

- Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r=\dfrac{m}{n}$, trong đó m $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}^*$.
- Luỹ thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi
- $\boxed{a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.}$

4. *Luỹ thừa với số mũ vô tỉ*

- Ta gọi giới hạn của dãy số a^{r_n} là luỹ thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.
- $a^\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}a^{r_n}$ và $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}r_n$.

Chú ý. Từ định nghĩa ta có $1^\alpha=1\ \alpha\in\mathbb{R}$.

5. *Tính chất của lũy thừa với số mũ thực*

- Cho a,b là những số thực dương; α,β là những số thực tuỳ ý. Khi đó, ta có:

$$*a^\alpha.a^\beta=a^{\alpha+\beta};\frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta};$$

$$*\ (a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta};\ (ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha;$$

$$*\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}.$$

- Nếu $a>1$ thì $a^\alpha>a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha>\beta$.
- Nếu $a<1$ thì $a^\alpha<a^\beta$ khi và chỉ khi $\alpha>\beta$.

II. HÀM SỐ LŨY THỪA

1- *Khái niệm hàm số lũy thừa.*

Ghi Chú!

- Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

☞**Chú ý:**

- Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ tuỳ thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:
- Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$;
- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\ 0\ $;
- Với α không nguyên, tập xác định là $\ 0;+\infty\ $.

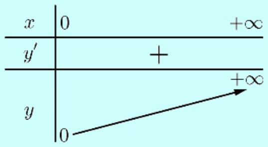
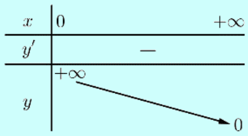
❷. *Đạo hàm của hàm số lũy thừa*

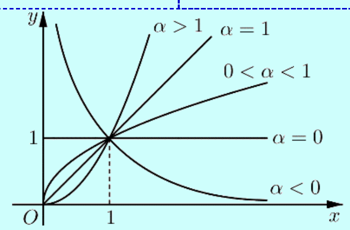
- Người ta chứng minh được hàm số luỹ thừa $y = x^{\alpha}$ $\ \alpha \in \mathbb{R}\ $ có đạo hàm với mọi $x > 0$
- Ta có: $\boxed{\ x^{\alpha}\ ' = \alpha . x^{\alpha - 1}.}$

❸. *Khảo sát hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$*

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $\ 0;+\infty\ $ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y = x^{\alpha}$ trên khoảng này (gọi là tập khảo sát).

$y = x^{\alpha}, \alpha > 0$	$y = x^{\alpha}, \alpha < 0$
①. Tập khảo sát: $\ 0;+\infty\ $. ②. Sự biến thiên • $y' = \alpha . x^{\alpha-1} > 0;\ \forall x > 0.$ • Giới hạn đặc biệt: • $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty.$ • Tiệm cận: Không có	①. Tập khảo sát: $\ 0;+\infty\ $. ②. Sự biến thiên • $y' = \alpha . x^{\alpha-1} < 0;\ \forall x > 0.$ • Giới hạn đặc biệt: • $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = +\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0.$ • Tiệm cận: • Ox là tiệm cận ngang, • Oy là tiệm cận đứng của đồ thị.
③. Bảng biến thiên  ④. Đồ thị (Như hình bên dưới với $\alpha > 0$).	③. Bảng biến thiên  ④. Đồ thị (Như hình bên dưới với $\alpha < 0$).



- Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $\ 1;1\ $.
- Trên hình là đồ thị của hàm số lũy thừa trên khoảng $\ 0;+\infty\ $ ứng với các giá trị khác nhau của α.

☞ *Chú ý*

- Khi khảo sát hàm lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó.

❑ ***Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ trên khoảng $\ 0;+\infty$***

Ghi Chú!

	$\alpha>0$	$\alpha<0$
• Đạo hàm	$y'=\alpha.x^{\alpha-1}$.	$y'=\alpha.x^{\alpha-1}$.
• Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến	Hàm số luôn nghịch biến
• Tiệm cận	Không có	Tiệm cận ngang là Ox, Tiệm cận đứng là Oy.
• Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm $1;1$	

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Kiểm tra quy tắc biến đổi lũy thừa, tính chất

Câu 1: **(ĐTK 2021-Câu 11)** Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt{a^3}$ bằng

A. a^6. **B.** $a^{\frac{3}{2}}$. **C.** $a^{\frac{2}{3}}$. **D.** $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\left(a>0;\,m,\,n\in\mathbb{R}\right)\Rightarrow\sqrt{a^3}=a^{\frac{3}{2}}$.

Câu 2: **[MĐ 103-TN BGD 2023-CÂU 7]** Với a là số thực dương tùy ý, biểu thức $a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{1}{3}}$ bằng

A. $a^{\frac{4}{3}}$. **B.** a^5. **C.** a^2. **D.** $a^{\frac{5}{9}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $a^{\frac{5}{3}}.a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}}=a^2$.

Câu 3: **[MĐ 104-TN BGD 2023-CÂU 16]** Cho hàm số $y=\left(2x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$. Giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x=2$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x=2$ bằng $y=\left(2.2^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$.

Dạng ②: Tính toán, rút gọn các biểu thức chỉ chứa các số cụ thể

Câu 4: **[MĐ 101-TN BGD 2023 - CÂU 17]** Cho hàm số $y=\left(2x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$. Giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x=2$ bằng

Ghi Chú!

A. 3. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Giá trị của hàm số $y=f\left(x\right)=\left(2x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$ tại điểm $x=2$ là:

$f\left(2\right)=\left(2.2^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$.

Câu 5: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 17] Cho hàm số $y=\left(2x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$. Giá trị của hàm số đã cho tại điểm $x=2$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Giá trị của hàm số $y=f\left(x\right)=\left(2x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$ tại điểm $x=2$ là:

$f\left(2\right)=\left(2.2^2-1\right)^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$.

Câu 6: (ĐTK 2017-Câu 12) Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}$

A. $P=1$ **B.** $P=7-4\sqrt{3}$

C. $P=7+4\sqrt{3}$ **D.** $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$

Lời giải

Chọn C

$P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}=\left(7+4\sqrt{3}\right).\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right)\right]^{2016}$

$=\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(-1\right)^{2016}=7+4\sqrt{3}.$

Dạng ③: Tính toán, rút gọn các biểu thức có chứa biến(a,b,c,x,y,....)

Câu 7: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 13) Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

A. $P=x^{\frac{1}{8}}$ **B.** $P=x^2$ **C.** $P=\sqrt{x}$ **D.** $P=x^{\frac{2}{9}}$

Lời giải

Chọn C

$P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Ghi Chú!

Câu 8: (ĐTN 2017-Câu 15) Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{1}{2}}$ **B.** $P=x^{\frac{13}{24}}$ **C.** $P=x^{\frac{1}{4}}$ **D.** $P=x^{\frac{2}{3}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có, với $x>0$:

$P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}}=\sqrt[4]{x.x^{\frac{7}{6}}}=\sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}}=x^{\frac{13}{24}}$.

Câu 9: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 29) Rút gọn biểu thức $Q=b^{\frac{5}{3}}:\sqrt[3]{b}$ với $b>0$

A. $Q=b^2$. **B.** $Q=b^{\frac{5}{9}}$. **C.** $Q=b^{-\frac{4}{3}}$. **D.** $Q=b^{\frac{4}{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $Q=b^{\frac{5}{3}}:\sqrt[3]{b}=b^{\frac{5}{3}}:b^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{4}{3}}$.

Dạng ④: So sánh các lũy thừa

Câu 10: (DE TN BGD 2022-MD 104)Cho $a=3^{\sqrt{5}}$, $b=3^2$ và $c=3^{\sqrt{6}}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<b<c$. **B.** $a<c<b$. **C.** $c<a<b$. **D.** $b<a<c$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2<\sqrt{5}<\sqrt{6}$ mà cơ số $3>1$ nên $3^2<3^{\sqrt{5}}<3^{\sqrt{6}}$ hay $b<a<c$.

Câu 11: (DE TN BGD 2022-MD 103) Cho $a=3^{\sqrt{5}},b=3^2$ và $c=3^{\sqrt{6}}$ mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a<c<b$. **B.** $a<b<c$.

C. $b<a<c$. **D.** $c<a<b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a=3^{\sqrt{5}},b=3^2=3^{\sqrt{4}},c=3^{\sqrt{6}}$ và $\begin{cases}\sqrt{4}<\sqrt{5}<\sqrt{6}\\3>1\end{cases}\Rightarrow b<a<c$.

Ghi Chú!

Dạng ⑤: Tập xác định của hàm số chứa hàm lũy thừa

Câu 12: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 24)** Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x-1\right)^{\frac{1}{3}}$.

A. $D=\left(-\infty;1\right)$ **B.** $D=\left(1;+\infty\right)$ **C.** $D=\mathbb{R}$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định khi $x-1>0\Leftrightarrow x>1$. Vậy $D=\left(1;+\infty\right)$.

Câu 13: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 11)** Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{-3}$.

A. $D=\mathbb{R}$ **B.** $D=\left(0;+\infty\right)$

C. $D=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;2\right\}$

Lời giải

Chọn D

Vì $-3\in\mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định khi $x^2-x-2\neq 0\Rightarrow x\neq -1; x\neq 2$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1;2\right\}$.

Dạng ⑥: Đạo hàm hàm số lũy thừa

Câu 14: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 1)** Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{4}}$ là

A. $y'=\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}}$. **B.** $y'=\frac{4}{5}x^{\frac{1}{4}}$. **C.** $y'=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$. **D.** $y'=\frac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}}$.

Lời giải

Chọn C

Công thức đạo hàm của hàm số lũy thừa là $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$.

Do đó $\left(x^{\frac{5}{4}}\right)'=\frac{5}{4}.x^{\frac{1}{4}}$.

Câu 15: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 8)** Trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{3}}$ là

Ghi Chú!

A. $y=\frac{3}{8}x^{\frac{5}{3}}$. **B.** $y=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$. **C.** $y=\frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$. **D.** $y=\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có trên khoảng $(0;+\infty)$ $y'=\left(x^{\frac{5}{3}}\right)'=\frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 16: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Đạo hàm của hàm số $y=x^{-3}$ là

A. $y'=-x^{-4}$. **B.** $y'=-3x^{-4}$. **C.** $y'=-\frac{1}{3}x^{-4}$. **D.** $y'=-\frac{1}{2}x^{-2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=-3x^{-4}$.

Câu 17: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 17)** Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{4}{3}}$ là

A. $y'=\frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. **B.** $y'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$. **C.** $y'=\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}$. **D.** $y'=\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $y'=\frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1}=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$.

Câu 18: **(TN BGD 2022-MD101)** Đạo hàm của hàm số $y=x^{-3}$ là

A. $y'=-x^{-4}$. **B.** $y'=-\frac{1}{2}x^{-2}$. **C.** $y'=-\frac{1}{3}x^{-4}$. **D.** $y'=-3x^{-4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}$.

Câu 19: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 10)** Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^{\frac{5}{2}}$ là

A. $y'=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. **B.** $y'=\frac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$. **C.** $y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y'=\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có trên khoảng $(0;+\infty)$ $y'=\left(x^{\frac{5}{2}}\right)'=\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$.

Ghi Chú!

Câu 20: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 42] Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right)$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(4)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(54;56)$. **B.** $(74;76)$. **C.** $(10;12)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right)\Rightarrow \ln f(x)=2x-x\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \ln f(x)+x\frac{f'(x)}{f(x)}=2x\Rightarrow \left(x\ln f(x)\right)'=2x$$

$$\Rightarrow x\ln f(x)=x^2+C$$

Từ $f(1)=f(4)$ ta có $\begin{cases}\ln f(1)=1+C\\ 4\ln f(4)=16+C\end{cases}\Rightarrow 4(1+C)=16+C\Rightarrow C=4$.

Do đó $x\ln f(x)=x^2+4\Rightarrow f(x)=e^{x+\frac{4}{x}}\Rightarrow f(2)=e^4\approx 54,598\in(54;56)$.

§3- LOGARIT

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

❶- *Khái niệm lôgarit*

- Cho hai số dương a,b với $a\neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b, và ký hiệu là $\log_a=b$.

❷- *Tính chất*

- Cho $a,b>0,a\neq 1$. Ta có:

$\log_a=0;$	$\log_a a=1$
$a^{\log_a b}=b;$	$\log_a\left(a^{\alpha}\right)=\alpha$

❸. *Quy tắc tính lôgarit*

O. Lôgarit của một tích

- Cho $a,b_1,b_2>0$ với $a\neq 1$, ta có:

$$\boxed{\log_a(b_1b_2)=\log_a b_1+\log_a b_2}$$

- **Chú ý:** Định lý trên có thể mở rộng cho tích của n số dương:

Ghi Chú!

$$\log_a(b_1...b_n) = \log_a b_1 + ... + \log_a b_n$$

- trong đó $a, b_1, b_2, ..., b_n > 0, a \neq 1$.

❍. Lôgarit của một thương

- Cho $a, b_1, b_2 > 0$ với $a \neq 1$, ta có:

$$\boxed{\log_a = \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2}$$

- Đặc biệt: $\boxed{\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b}$ $(a > 0, b > 0)$.

4. Lôgarit của một lũy thừa

- Cho hai số dương a, b, $a \neq 1$. Với mọi α, ta có: $\boxed{\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b}$
- Đặc biệt:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b}$$

❍. *Đổi cơ số*

- Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; c \neq 1$, ta có:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

- Đặc biệt: $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$ $(b \neq 1)$;
- $\boxed{\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b}$ $(\alpha \neq 0)$.

5. *Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên*

❍. Lôgarit thập phân

- Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Với $b > 0$, $\log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

❍. Lôgarit tự nhiên

- Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Với $b > 0$, $\log_e b$ được viết là $\ln b$.

B Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Câu hỏi lý thuyết, 1 quy tắc biến đổi và tính chất

Câu 1: (ĐTN 2017-Câu 12) Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

<u>A</u>. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln(ab) = \ln a . \ln b$.

Ghi Chú!

C. $\ln\frac{a}{b}=\frac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln\frac{a}{b}=\ln b-\ln a$.

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất của lôgarit: $\forall a>0,b>0:\ln(ab)=\ln a+\ln b$

Câu 2: (ĐTK 2020-L1-Câu 10) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

A. $2+\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{2}+\log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_2 a$.

Lời giải

Chọn C

Với $a>0$; $b>0$; $a\neq 1$. Với mọi α. Ta có công thức: $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$.

Vậy: $\log_2 a^2=2\log_2 a$.

Câu 3: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 3) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5(5a)$ bằng

A. $5+\log_5 a$. **B.** $5-\log_5 a$. **C.** $1+\log_5 a$. **D.** $1-\log_5 a$.

Lời giải

Chọn C

$\log_5(5a)=\log_5 5+\log_5 a=1+\log_5 a$.

Câu 4: (TN BGD 2022-MĐ101) Với a là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng

A. $-2\log a$. **B.** $2\log a$. **C.** $-4\log a$. **D.** $8\log a$.

Lời giải

Chọn B

Với $a>0$, ta có $4\log\sqrt{a}=4\log\left(a^{\frac{1}{2}}\right)=4.\frac{1}{2}\log a=2\log a$.

Câu 5: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 11) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

A. $3\log_3 a$. **B.** $3+\log_3 a$. **C.** $1+\log_3 a$. **D.** $1-\log_3 a$.

Lời giải

Chọn C

$\log_3(3a)=\log_3 3+\log_3 a=1+\log_3 a$.

Câu 6: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 6) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng

A. $3-\log_3 a$. **B.** $1-\log_3 a$. **C.** $3+\log_3 a$. **D.** $1+\log_3 a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3(3a)=\log_3 3+\log_3 a=1+\log_3 a$.

Câu 7: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 13] Với a là số thực dương tùy ý, $\log_7(7a)$ bằng

A. $1+a$. **B.** a. **C.** $1-\log_7 a$. **D.** $1+\log_7 a$.

Lời giải

Chọn D

$\log_7(7a)=\log_7 7+\log_7 a=1+\log_7 a$.

Câu 8: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 9) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng

A. $5\log_a b$. **B.** $\frac{1}{5}+\log_a b$. **C.** $5+\log_a b$. **D.** $\frac{1}{5}\log_a b$.

Lời giải

Chọn D

$\log_{a^5} b=\frac{1}{5}\log_a b$.

Câu 9: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 12) Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng

A. $\frac{1}{2}+\log_a b$. **B.** $\frac{1}{2}\log_a b$. **C.** $2+\log_a b$. **D.** $2\log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{a^2} b=\frac{1}{2}\log_a b$.

Câu 10: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 24) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

A. $3+\log_a b$. **B.** $3\log_a b$. **C.** $\frac{1}{3}+\log_a b$. **D.** $\frac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{a^3} b=\frac{1}{3}\log_a b$

Câu 11: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 6) Cho a là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương x, y.

A. $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ **B.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x+\log_a y$

C. $\log_a\frac{x}{y}=\log_a(x-y)$ **D.** $\log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}$

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất của logarit.

Câu 12: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 8) Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2 a = \log_a 2$. **B.** $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_2 a}$.

C. $\log_2 a = \dfrac{1}{\log_a 2}$. **D.** $\log_2 a = -\log_a 2$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức đổi cơ số.

Câu 13: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 1) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

A. $\dfrac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$. **C.** $\ln\dfrac{7}{3}$. **D.** $\ln(4a)$.

Lời giải

Chọn C

$\ln(7a) - \ln(3a) = \ln\left(\dfrac{7a}{3a}\right) = \ln\dfrac{7}{3}$.

Câu 14: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 11) Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$ thì $\log_{a^4} b$ bằng

A. $4 + \log_a b$. **B.** $\dfrac{1}{4}\log_a b$. **C.** $4\log_a b$. **D.** $\dfrac{1}{4} + \log_a b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{a^4} b = \dfrac{1}{4}\log_a b$

nên chọn đáp án B

Câu 15: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Với a là số thực dương tùy ý, $4\log\sqrt{a}$ bằng

A. $-4\log a$. **B.** $8\log a$. **C.** $2\log a$. **D.** $-2\log a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4\log\sqrt{a} = 4\log a^{\frac{1}{2}} = 2\log a$.

Câu 16: (ĐTK 2020-L2-Câu 11) **Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng**

A. $\dfrac{3}{2}\log_2 a$. B. $\dfrac{1}{3}\log_2 a$. C. $3 + \log_2 a$. D. $3\log_2 a$.

Ghi Chú!

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2(a^3) = 3\log_2 a$.

Câu 17: (TN BGD 2022-MD101) Tập xác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;4)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$.

Tập xác định: $D=(4;+\infty)$.

Câu 18: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 2) Với a là số thực dương tùy, $\log_5 a^2$ bằng

A. $2\log_5 a$. **B.** $2+\log_5 a$. **C.** $\frac{1}{2}+\log_5 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_5 a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_5 a^2 = 2\log_5 a$.

Câu 19: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 14) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

A. $3\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{3}\log_2 a$. **C.** $\frac{1}{3}+\log_2 a$. **D.** $3+\log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2 a^3 = 3\log_2 a$.

Câu 20: (ĐTK 2018-Câu 8) Với a là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(3a) = 3\log a$ **B.** $\log a^3 = \frac{1}{3}\log a$

C. $\log a^3 = 3\log a$ **D.** $\log(3a) = \frac{1}{3}\log a$

Lời giải

Chọn C

Câu 21: (ĐTK 2017-Câu 33) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

A. $P=-5+3\sqrt{3}$ **B.** $P=-1+\sqrt{3}$ **C.** $P=-1-\sqrt{3}$ **D.** $P=-5-3\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Phương pháp tự luận.

$$P = \frac{\log_a \sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a \frac{\sqrt{b}}{a}} = \frac{\frac{1}{2}(\log_a b - 1)}{\log_a \sqrt{b} - 1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}{\frac{1}{2}\log_a b - 1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2} = -1-\sqrt{3}.$$

Ghi Chú!

Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm.

Chọn $a=2$, $b=2^{\sqrt{3}}$. Bấm máy tính ta được $P=-1-\sqrt{3}$.

Câu 22: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 32] Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a\neq 1$ và $\log_a b=2$, giá trị của $\log_{a^2}\left(ab^2\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\log_{a^2}\left(ab^2\right)=\log_{a^2}(a)+\log_{a^2}\left(b^2\right)=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}.$$

Câu 23: (DE TN BGD 2022-MD 104) Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b^3}$ bằng

A. $\log_a b$. **B.** $-3\log_a b$. **C.** $\frac{1}{3}\log_a b$. **D.** $3\log_a b$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b^3}=\log_{a^{-1}}b^{-3}=3\log_a b$.

Câu 24: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 43) Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$. **B.** $\log(a+b)=1+\log a+\log b$.

C. $\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$. **D.** $\log(a+b)=\frac{1}{2}+\log a+\log b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^2+b^2=8ab\Leftrightarrow(a+b)^2=10ab$;

$\Leftrightarrow\log(a+b)^2=\log(10ab)\Leftrightarrow 2\log(a+b)=\log 10+\log a+\log b$

$\Leftrightarrow\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$.

Câu 25: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 27) Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a-2\log_9 b=2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=9b^4$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=6b$. **D.** $a=9b^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\log_3 a-2\log_9 b=2\Leftrightarrow\log_3 a-\log_3 b=2\Leftrightarrow\log_3\frac{a}{b}=2\Leftrightarrow\frac{a}{b}=9\Leftrightarrow a=9b.$$

Ghi Chú!

Câu 26: (DE TN BGD 2022-MD 104) Với a là số thực dương tuỳ ý, $\log(100a)$ bằng

A. $2-\log a$. **B.** $2+\log a$.
C. $1-\log a$. **D.** $1+\log a$.

Lời giải

Chon B

Với $a>0$, ta có

$\log(100a)=\log 100+\log a=\log 10^2+\log a=2+\log a$.

Dạng ②: Tính toán liên quan đến logarit dùng đẳng thức

Câu 27: (ĐTK 2017-Câu 13) Cho a là số thực dương $a\neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=3$ **B.** $P=1$ **C.** $P=9$ **D.** $P=\frac{1}{3}$

Lời giải

Chon C

$\log_{\sqrt[3]{a}} a^3=\log_{a^{\frac{1}{3}}} a^3=9$.

Câu 28: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 17) Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

A. -3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{1}{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chon B

$\log_a \sqrt[3]{a}=\log_a a^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

Câu 29: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 15) Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=9\log_a b$ **B.** $P=27\log_a b$ **C.** $P=15\log_a b$ **D.** $P=6\log_a b$

Lời giải

Chon D

$P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6=3\log_a b+\frac{6}{2}\log_a b=6\log_a b$.

Câu 30: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 23) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_4(4a)$ bằng

A. $1+\log_4 a$. **B.** $4-\log_4 a$. **C.** $4+\log_4 a$. **D.** $1-\log_4 a$.

Lời giải

Chon A

Ghi Chú!

Ta có $\log_4(4a)=\log_4 4+\log_4 a=1+\log_4 a$.

Câu 31: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 10) Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=2$. **C.** $I=-\frac{1}{2}$. **D.** $I=-2$.

Lời giải

Chọn B

$$I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2=2\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)=2.$$

Câu 32: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 1) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2(2a)$ bằng

A. $1+\log_2 a$. **B.** $1-\log_2 a$. **C.** $2-\log_2 a$. **D.** $2-\log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2(2a)=\log_2 2+\log_2 a=1+\log_2 a$.

Câu 33: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 5) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng:

A. $1-\log_3 a$. **B.** $3-\log_3 a$. **C.** $\frac{1}{\log_3 a}$. **D.** $1+\log_3 a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)=\log_3 3-\log_3 a=1-\log_3 a$.

Câu 34: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 12) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

A. $2\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{2}+\log_2 a$. **C.** $\frac{1}{2}\log_2 a$. **D.** $2+\log_2 a$.

Lời giải

Chọn A

Vì a là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2=2\log_2 a$.

Câu 35: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 6) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln 5a-\ln 3a$ bằng

A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. **B.** $\ln(2a)$. **C.** $\ln\frac{5}{3}$. **D.** $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn C

Ta có $\ln 5a - \ln 3a = \ln\dfrac{5a}{3a} = \ln\dfrac{5}{3}$.

Câu 36: (ĐTK 2019-Câu 5) Với a và b là hai số thực dương tùy ý, $\log\left(ab^2\right)$ bằng

A. $2\log a + \log b$. **B.** $\log a + 2\log b$.

C. $2\left(\log a + \log b\right)$. **D.** $\log a + \dfrac{1}{2}\log b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log\left(ab^2\right) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log|b| == \log a + 2\log b$ (vì b dương).

Câu 37: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 21) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $-\dfrac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Do $a > 0$ và $a \neq 1$ nên $\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}\log_a a = \dfrac{1}{4}$.

Câu 38: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 29] Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a \neq 1$ và $\log_a b = 2$, giá trị của $\log_{a^2}\left(ab^2\right)$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_{a^2}\left(ab^2\right) = \log_{a^2} a + \log_{a^2} b^2 = \log_{a^2} a + \log_a b = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$.

Câu 39: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 5) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}\log_5 a$. **B.** $\dfrac{1}{3} + \log_5 a$. **C.** $3 + \log_5 a$. **D.** $3\log_5 a$.

Lời giải

Chọn D

$\log_5 a^3 = 3\log_5 a$.

Câu 40: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 19) Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[5]{a}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** $-\dfrac{1}{5}$. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

Ta có: $\log_a \sqrt[5]{a} = \log_a a^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\log_a a = \frac{1}{5}$.

Câu 41: (ĐTK 2021-Câu 9) Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3(9a)$ bằng

A. $\frac{1}{2}+\log_3 a$. **B.** $2\log_3 a$. **C.** $(\log_3 a)^2$. **D.** $2+\log_3 a$.

Lời giải

Chon D

Ta có $\log_3(9a) = \log_3 9 + \log_3 a = 2 + \log_3 a$.

Câu 42: (DE TN BGD 2022-MD 103) Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $1-\log a$. **B.** $2+\log a$. **C.** $2-\log a$. **D.** $1+\log a$.

Lời giải

Chon B

$\log(100a) = \log(100) + \log a = 2 + \log a$

Câu 43: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 29] Với a, b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $a \neq 1$ và $\log_a b = 2$, giá trị của $\log_{a^2}(ab^2)$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_{a^2}(ab^2) = \log_{a^2} a + \log_{a^2} b^2 = \log_{a^2} a + \log_a b = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$.

Câu 44: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 18) Cho $a>0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt{a}$ bằng

A. 2. **B.** -2. **C.** $\frac{-1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chon D

Với $a>0$ và $a \neq 1$, ta có $\log_a \sqrt{a} = \log_a a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a a = \frac{1}{2}$.

Câu 45: (ĐMH 2017-Câu 17) Cho các số thực dương a,b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$ **B.** $\log_{a^2}(ab) = 2+2\log_a b$

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$ **D.** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$

Lời giải

Chon D

Ghi Chú!

Ta có: $\log_{a^2}(ab)=\log_{a^2}a+\log_{a^2}b=\frac{1}{2}.\log_a a+\frac{1}{2}.\log_a b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\log_a b$

Câu 46: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 33) Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a-2\log_4 b=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $a=8b^2$. **B.** $a=8b$. **C.** $a=6b$. **D.** $a=8b^4$.

Lời giải

Chon B

Ta có $\log_2 a-2\log_4 b=3\Leftrightarrow\log_2 a-2\log_{2^2}b=3\Leftrightarrow\log_2 a-\log_2 b=3$

$\Leftrightarrow\log_2\frac{a}{b}=3\Leftrightarrow\frac{a}{b}=8\Leftrightarrow a=8b$.

Câu 47: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 21) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3=16$. Giá trị của $2\log_2 a+3\log_2 b$ bằng

A. 8. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chon C

Ta có $2\log_2 a+3\log_2 b=\log_2\left(a^2b^3\right)=\log_2 16=4$

Câu 48: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 29) Với mọi a, b, x là các số thực dương thoả mãn $\log_2 x=5\log_2 a+3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x=3a+5b$ **B.** $x=5a+3b$ **C.** $x=a^5+b^3$ **D.** $x=a^5b^3$

Lời giải

Chon D

Có $\log_2 x=5\log_2 a+3\log_2 b=\log_2 a^5+\log_2 b^3=\log_2 a^5b^3\Leftrightarrow x=a^5b^3$.

Câu 49: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 38) Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a-2\log_9 b=3$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a=27b$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=27b^4$. **D.** $a=27b^2$.

Lời giải

Chon A

Ta có: $\log_3 a-2\log_9 b=3\Leftrightarrow\log_3 a-\log_3 b=3\Leftrightarrow\log_3\frac{a}{b}=3\Leftrightarrow a=27b$.

Câu 50: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 24) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị của $4\log_2 a+\log_2 b$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 16. **D.** 8.

Lời giải

Chon A

Ta có $4\log_2 a+\log_2 b=\log_2 a^4+\log_2 b=\log_2 a^4b=\log_2 16=4$.

Câu 51: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 27) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(a^2b)}=4a^3$. Giá trị của ab^2 bằng

Ghi Chú!

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^{\log_3(a^2b)}=4a^3 \Leftrightarrow 3^{2\log_3(a^2b)}=4a^3 \Leftrightarrow 3^{\log_3(a^2b)^2}=4a^3 \Leftrightarrow \left(a^2b\right)^2=4a^3$

$\Leftrightarrow a^4b^2=4a^3 \Leftrightarrow ab^2=4.$

Câu 52: (ĐTK 2020-L2-Câu 29) Xét các số thực a và b thỏa mãn $\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=2$. **B.** $4a+2b=1$. **C.** $4ab=1$. **D.** $2a+4b=1$.

Lời giải

Chọn D

$\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3 \Leftrightarrow \log_3\left(3^a.3^{2b}\right)=\frac{1}{2}\log_3 3 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{a+2b}\right)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow a+2b=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+4b=1$

Câu 53: (DE TN BGD 2022-MD 103) Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b^3}$ bằng

A. $3\log_a b$. **B.** $\log_a b$.

C. $-3\log_a b$. **D.** $\frac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải

Chọn A

$$\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b^3}=-\log_a b^{-3}=3\log_a b$$

Câu 54: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 29) Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right)$.

A. $P=31$ **B.** $P=13$ **C.** $P=30$ **D.** $P=108$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_a\left(b^2c^3\right)=2\log_a b+3\log_a c=2.2+3.3=13$.

Câu 55: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 25) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Giá trị của $3\log_2 a+2\log_2 b$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** 32. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2 a^3b^2=\log_2 32 \Leftrightarrow 3\log_2 a+2\log_2 b=5$.

Câu 56: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 30) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)}=4a$. Giá trị của ab^2 bằng

Ghi Chú!

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $9^{\log_3(ab)}=4a\Leftrightarrow(ab)^2=4a\Leftrightarrow ab^2=4$.

Câu 57: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 34) Với mọi a,b thỏa mãn $\log_2 a^3+\log_2 b=7$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3+b=49$. **B.** $a^3b=128$. **C.** $a^3+b=128$. **D.** $a^3b=49$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2 a^3+\log_2 b=7\Leftrightarrow\log_2\left(a^3b\right)=7\Leftrightarrow a^3b=2^7=128.$

Câu 58: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 29) Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a-2\log_4 b=4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=16b^2$. **B.** $a=8b$. **C.** $a=16b$. **D.** $a=16b^4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\log_2 a-2\log_4 b=4\Leftrightarrow\log_2 a-\log_2 b=4\Leftrightarrow\log_2\frac{a}{b}=\log_2 16\Leftrightarrow\frac{a}{b}=16\Leftrightarrow a=16b$

.

Câu 59: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 35) Với a,b là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a-2\log_9 b=3$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a=27b$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=27b^4$. **D.** $a=27b^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_3 a-2\log_9 b=3\Leftrightarrow\log_3 a-\log_3 b=3\Leftrightarrow\log_3\frac{a}{b}=3\Leftrightarrow a=27b$.

Câu 60: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 38) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2 a^2b}=3a^3$. Giá trị của biểu thức ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$4^{\log_2 a^2b}=3a^3\Leftrightarrow 2^{2\log_2 a^2b}=3a^3\Leftrightarrow\left(2^{\log_2 a^2b}\right)^2=a^3\Leftrightarrow\left(a^2b\right)^2=3a^3$.

$\Leftrightarrow a^4b^2=3a^3\Leftrightarrow ab^2=3$

Câu 61: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 28) Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3=8$. Giá trị của $\log_2 a+3\log_2 b$ bằng

A. 8. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ghi Chú!

Chon D

Ta có $\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^3 = \log_2 (ab^3) = \log_2 8 = 3$.

Câu 62: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 37) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b = 64$. **B.** $a^3b = 36$. **C.** $a^3 + b = 64$. **D.** $a^3 + b = 64$.

Lời giải

Chon A

Ta có: $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6 \Leftrightarrow \log_2 (a^3b) = 6 \Leftrightarrow a^3b = 2^6 \Leftrightarrow a^3b = 64$.

Câu 63: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 38) Với moi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8$, khẳng đinh nào dưới đây đúng?

A. $a^3 + b = 64$. **B.** $a^3b = 256$. **C.** $a^3b = 64$. **D.** $a^3 + b = 256$.

Lời giải

Chon B

Ta có $\log_2 a^3 + \log_2 b = 8 \Leftrightarrow \log_2 a^3b = 8 \Leftrightarrow a^3b = 256$.

Câu 64: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 30) Cho a và b là hai số thực dương thoả mãn $4^{\log_2(ab)} = 3a$. Giá trị của ab^2 bằng

A. 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

Lời giải

Chon A

Ta có $4^{\log_2(ab)} = \left[2^{\log_2(ab)}\right]^2 = (ab)^2$ nên $4^{\log_2(ab)} = 3a \Leftrightarrow (ab)^2 = 3a \Leftrightarrow ab^2 = 3$.

Câu 65: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 36) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 5$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a^3b = 32$. **B.** $a^3b = 25$. **C.** $a^3 + b = 25$. **D.** $a^3 + b = 32$.

Lời giải

Chon A

$\log_2 a^3 + \log_2 b = 5 \Leftrightarrow \log_2 a^3b = 5 \Leftrightarrow a^3b = 2^5 \Leftrightarrow a^3b = 32$.

Câu 66: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 6) Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I = \frac{1}{2}$ **B.** $I = 0$ **C.** $I = -2$. **D.** $I = 2$

Lời giải

Chon D

Với a là số thực dương khác 1 ta được: $I = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_a a = 2$

Câu 67: (ĐTN 2017-Câu 16) Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ghi Chú!

A. $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a-\log_2 b$. **B.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$.

C. $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a+\log_2 b$. **D.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=\log_2\left(2a^3\right)-\log_2(b)=\log_2 2+\log_2 a^3-\log_2 b=1+3\log_2 a-\log\ b$.

Câu 68: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 28) Cho $\log_3 a=2$ và $\log_2 b=\dfrac{1}{2}$. Tính $I=2\log_3\left[\log_3(3a)\right]+\log_{\frac{1}{4}} b^2$.

A. $I=\dfrac{5}{4}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=0$. **D.** $I=\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_3 a=2\Rightarrow a=3^2=9$ và $\log_2 b=\dfrac{1}{2}\Rightarrow b=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$.

$\Rightarrow I=2\log_3\left[\log_3(3.9)\right]+\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{2}\right)^2=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 69: (ĐTK 2020-L1-Câu 20) Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_2 a=\log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a=b^2$. **B.** $a^3=b$. **C.** $a=b$. **D.** $a^2=b$.

Lời giải

Chọn D

Theo đề ta có:

$$\log_2 a=\log_8(ab)\Leftrightarrow \log_2 a=\frac{1}{3}\log_2(ab)\Leftrightarrow 3\log_2 a=\log_2(ab)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a^3=\log_2(ab)\Leftrightarrow a^3=ab\Leftrightarrow a^2=b$$

Câu 70: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 42) Cho $\log_a x=3, \log_b x=4$ với a,b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P=\log_{ab} x$.

A. $P=\dfrac{7}{12}$ **B.** $P=\dfrac{1}{12}$ **C.** $P=12$ **D.** $P=\dfrac{12}{7}$

Lời giải

Chọn D

$$P=\log_{ab} x=\frac{1}{\log_x ab}=\frac{1}{\log_x a+\log_x b}=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{7}.$$

Ghi Chú!

Câu 71: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 37) Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2+9y^2=6xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M=\dfrac{1}{4}$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\dfrac{1}{2}$. **D.** $M=\dfrac{1}{3}$

Lời giải

Chon B

Ta có $x^2+9y^2=6xy \Leftrightarrow (x-3y)^2=0 \Leftrightarrow x=3y$.

Khi đó $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}=\dfrac{\log_{12}12xy}{\log_{12}(x+3y)^2}=\dfrac{\log_{12}36y^2}{\log_{12}36y^2}=1$.

Dạng ③: So sánh các biểu thức lô-ga-rít

Câu 72: (ĐMH 2017-Câu 20) Cho hai số thực a và b, với $1<a<b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a b<1<\log_b a$ **B.** $1<\log_a b<\log_b a$

C. $\log_b a<\log_a b<1$ **D.** $\log_b a<1<\log_a b$

Lời giải

Chon D

Cách 1- Tự luận: Vì $b>a>1 \Rightarrow \begin{cases}\log_a b>\log_a a\\ \log_b b>\log_b a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_a b>1\\ 1>\log_b a\end{cases} \Rightarrow \log_b a<1<\log_a b$

Cách 2- Casio: Chọn $a=2;b=3 \Rightarrow \log_3 2<1<\log_2 3 \Rightarrow$ **Đáp án D**

Dạng ④: Biểu diễn logrit qua logarit khác

Câu 73: (DE MH BGD 2023 - Câu 28) Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(3a)-\ln(2a)$ bằng:

A. $\ln a$. **B.** $\ln\dfrac{2}{3}$. **C.** $\ln(6a^2)$. **D.** $\ln\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chon D

Ta có $\ln(3a)-\ln(2a)=\ln\dfrac{3a}{2a}=\ln\dfrac{3}{2}$.

Câu 74: (ĐTK 2019-Câu 20) Đặt $a=\log_3 2$, khi đó $\log_{16}27$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$. **B.** $\dfrac{3}{4a}$. **C.** $\dfrac{4}{3a}$. **D.** $\dfrac{4a}{3}$.

Lời giải

Chon B

Ghi Chú!

Ta có: $\log_{16}27=\frac{3}{4}\log_2 3=\frac{3}{4}.\frac{1}{\log_3 2}=\frac{3}{4a}$.

Câu 75: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 43) Với các số thực dương x, y tùy ý, đặt $\log_3 x=\alpha$, $\log_3 y=\beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$ **B.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}+\beta$

C. $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$ **D.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}-\beta$

Lời giải

Chọn D

$$\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{3}{2}\log_{27}x-3\log_{27}y=\frac{1}{2}\log_3 x-\log_3 y=\frac{\alpha}{2}-\beta.$$

Câu 76: (ĐMH 2017-Câu 19) Đặt $a=\log_2 3, b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

A. $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$

C. $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Lời giải

Chọn C

$$\log_6 45=\frac{\log_2(3^2.5)}{\log_2(2.3)}=\frac{2\log_2 3+\log_2 5}{1+\log_2 3}=\frac{2a+\log_2 3.\log_3 5}{1+a}$$

$$=\frac{2a+\frac{\log_2 3}{\log_5 3}}{1+a}=\frac{2a+\frac{a}{b}}{1+a}=\frac{a+2ab}{ab+b}$$

CASIO: Sto\Gán $A=\log_2 3, B=\log_5 3$ bằng cách: Nhập $\log_2 3$ \shift\Sto\ A tương tự B

Thử từng đáp án **A**: $\frac{A+2AB}{AB}-\log_6 45\approx 1,34$ (Loại)

Thử đáp án **C**: $\frac{A+2AB}{AB}-\log_6 45=0$ (chọn)

Ghi Chú!

§4- HÀM SỐ MŨ-HÀM SỐ LOGARIT

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. *Hàm số mũ:* $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$.

①. ***Tập xác định:*** $D = \mathbb{R}$

②. ***Tập giá trị:*** $T = (0, +\infty)$, nghĩa là khi giải phương trình mũ mà đặt $t = a^{f(x)}$ thì $t > 0$.

③. ***Tính đơn điệu:***

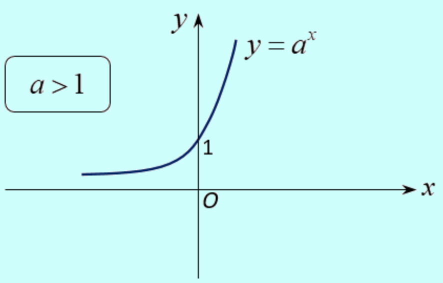
Khi $a > 1$ thì hàm số $y = a^x$ đồng biến, khi đó ta luôn có: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

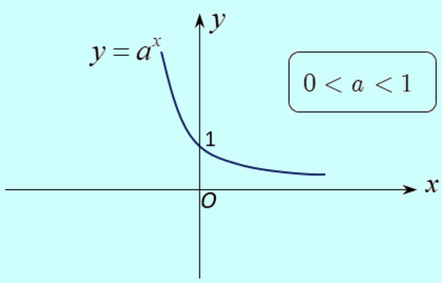
Khi $0 < a < 1$ thì hàm số $y = a^x$ nghịch biến, khi đó ta luôn có: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

④. ***Đạo hàm:***

- $(a^x)' = a^x.\ln a \Rightarrow (a^u)' = u'.a^u.\ln a$
- $(e^x)' = e^x \Rightarrow (e^u)' = e^u.u'$
- $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{u'}{n.\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

⑤. ***Đồ thị:*** Nhận trục hoành làm đường tiệm cận ngang





2. *Hàm số* logarit: $y = \log_a x$, $(a > 0,\ a \neq 1)$

①. ***Tập xác định:*** $D = (0, +\infty)$.

②. ***Tập giá trị:*** $T = \mathbb{R}$, nghĩa là khi giải phương trình logarit mà đặt $t = \log_a x$ thì t không có điều kiện.

③. ***Tính đơn điệu:***

- Khi $a > 1$ thì $y = \log_a x$ đồng biến trên D, khi đó nếu:
  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.
- Khi $0 < a < 1$ thì $y = \log_a x$ nghịch biến trên D, khi đó nếu
  $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x)$; $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

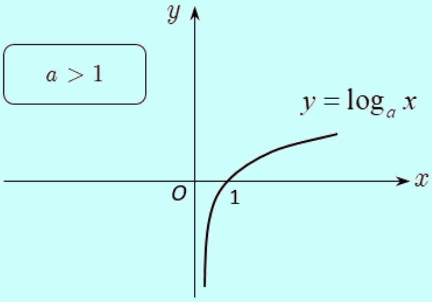
④. ***Đạo hàm:***

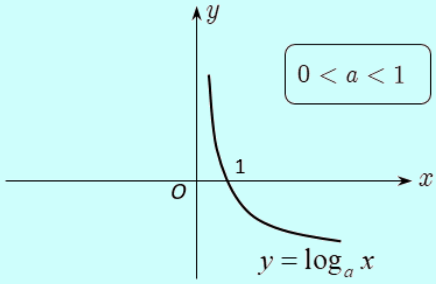
Ghi Chú!

- $\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x.\ln a} \Rightarrow \left(\log_a |u|\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ (x>0) \Rightarrow (\ln|u|)' = \dfrac{u'}{u}$

$\Rightarrow (\ln^n |u|)' = n\cdot\dfrac{u'}{u}\cdot \ln^{n-1}|u|$

⑤. ***Đồ thị:*** Nhận trục tung làm đường tiệm cận đứng.





Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Tập xác định liên quan hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít

Câu 1: **(ĐMH 2017-Câu 15)** Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$

A. $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$ **B.** $D=[-1;3]$

C. $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(-1;3)$

Lời giải

Chọn C

$y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$. Hàm số xác định khi $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow x<-1$ hoặc $x>3$

Vậy tập xác định: $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

Câu 2: (ĐTK 2020-L2-Câu 5) **Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là**

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. D. $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định khi $x>0$. Tập xác định $D=(0;+\infty)$.

Câu 3: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 25)** Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$.

Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là $D=(0;+\infty)$.

Ghi Chú!

Câu 4: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 25)** Tập xác định của hàm số $y=\log_6 x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x>0$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

Câu 5: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 22)** Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$y=\log_3 x$

Điều kiện: $x>0$. Vậy TXĐ: $D=(0;+\infty)$

Câu 6: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 1)** Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là

A. $(-\infty;0)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số $\log_4 x$ là $(0;+\infty)$.

Câu 7: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 2)** Tập xác định của hàm số $y=4^x$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y=4^x$ là $\mathbb{R}$.

Câu 8: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 2)** Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 10)** Tập xác định của hàm số $y=2^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số mũ $y=2^x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Câu 10: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 20)** Tập xác định của hàm số $y=3^x$ là

A. $[0;\ +\infty)$. **B.** $(0;\ +\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = 3^x$ là $\mathbb{R}$.

Câu 11: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 18)** Tập xác định của hàm số $y = 9^x$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số mũ $y = a^x$, với a dương và khác 1 luôn có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 12: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 4)** Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số mũ $y = a^x, 0 < a \neq 1$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 13: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 11)** Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là: $D = \mathbb{R}$.

Câu 14: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 18)** Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = 8^x$ xác định $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là $D = \mathbb{R}$.

Câu 15: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)**Tập (DE TN BGD 2022 - MD 102)ác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là.

A. $(-\infty;4)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

ĐK(DE TN BGD 2022 - MD 102)Đ $x-4>0 \Leftrightarrow x>4$.

Vậy tập (DE TN BGD 2022 - MD 102)ác định của hàm số $y = \log_3(x-4)$ là $(4;+\infty)$.

Câu 16: **(DE TN BGD 2022-MD 103)**Tập (DE TN BGD 2022-MD 103)ác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn C

Hàm số (DE TN BGD 2022-MD 103)ác định khi $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Tập (DE TN BGD 2022-MD 103)ác định của hàm số là $D=(1;+\infty)$.

Câu 17: **(DE TN BGD 2022-MD 104)**Tập xác định của hàm số $y=\log_2(x-1)$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=(1;+\infty)$.

Câu 18: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 16)** Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ **B.** $D=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$

C. $D=(-2;3)$ **D.** $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của là tập các số x để $\dfrac{x-3}{x+2}>0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-2 \end{array}\right.$

Suy ra $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

Câu 19: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 32)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log(x^2-2x-m+1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m<0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2-2x-m+1>0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m<0$.

Câu 20: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 26)** Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_3(x^2-4x+3)$

A. $D=\left(2-\sqrt{2};1\right)\cup\left(3;2+\sqrt{2}\right)$. **B.** $D=(1;3)$.

C. $D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $D=\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Ghi Chú!

Câu 21: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 40)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2-2x+m+1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m=0$ **B.** $0<m<3$

C. $m<-1$ hoặc $m>0$ **D.** $m>0$

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$x^2-2x+m+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0(ld)\\ \Delta'=1-(1+m)<0\Leftrightarrow m>0\end{cases}.$$

Câu 22: **(TN BGD 2022-MD101)** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc tập xácđịnh của hàm số $y=\log\left[(6-x)(x+2)\right]$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xácđịnh $(6-x)(x+2)>0\Leftrightarrow -x^2+4x+12>0\Leftrightarrow -2<x<6$.

Vậy có tất cả 7 giá trị nguyên thuộc tập xácđịnh của hàm số $y=\log\left[(6-x)(x+2)\right]$.

Câu 23: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập (DE TN BGD 2022 - MD 102)ác định của hàm số $y=\log\left[(6-x)(x+2)\right]$?

A. 7. **B.** 8. **C.** Vô số. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

ĐK(DE TN BGD 2022 - MD 102)Đ: $(6-x)(x+2)>0\Leftrightarrow -2<x<6$.

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-1;0;1;2;3;4;5\}$

Vậy có 7 số nguyên thuộc tập (DE TN BGD 2022 - MD 102)ác định của hàm số $y=\log\left[(6-x)(x+2)\right]$.

Câu 24: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 31]** Tập xác định của hàm số $f(x)=\log_5(30-x^2)$ chứa bao nhiêu số nguyên?

A. 10. **B.** 11. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định: $30-x^2>0\Leftrightarrow -\sqrt{30}<x<\sqrt{30}$.

Tập xác định: $D=\left(-\sqrt{30};\sqrt{30}\right)$.

Vậy D chứa 11 số nguyên: $0;\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm5$.

Dạng ②: Đạo hàm liên quan hàm số mũ, hàm số lô-ga-rít

Câu 25: **(ĐMH 2017-Câu 13)** Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$

A. $y'=x.13^{x-1}$ **B.** $y'=13^x\ln 13$ **C.** $y'=13^x$ **D.** $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=13^x\ln 13$.

Câu 26: **(ĐTK 2017-Câu 2)** Tìm đạo hàm của hàm số $y=\log x$.

A. $y'=\dfrac{1}{x}$ **B.** $y'=\dfrac{\ln 10}{x}$ **C.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{10\ln x}$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, ta được $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$.

Câu 27: **(ĐTK 2021-Câu 10)** Đạo hàm của hàm số $y=2^x$ là

A. $y'=2^x\ln 2$. **B.** $y'=2^x$. **C.** $y'=\dfrac{2^x}{\ln 2}$. **D.** $y'=x.2^{x-1}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=2^x\ln 2$.

Câu 28: **(DE MH BGD 2023 - Câu 2)** Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=\log_3 x$ là

A. $y'=\dfrac{1}{x}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$. **C.** $y'=\dfrac{\ln 3}{x}$. **D.** $y'=-\dfrac{1}{x\ln 3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=(\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$.

Câu 29: **(DE MH BGD 2023 - Câu 3)** Trên khoảng $(0;+\infty)$, đạo hàm của hàm số $y=x^\pi$ là

A. $y'=\pi x^{\pi-1}$. **B.** $y'=x^{\pi-1}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{\pi}x^{\pi-1}$. **D.** $y'=\pi x^\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=(x^\pi)'=\pi x^{\pi-1}$.

Câu 30: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 5]** Đạo hàm của hàm số $y=\log_2(x-1)$ là

A. $y' = \dfrac{x-1}{\ln 2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{\ln 2}$.

C. $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \log_2(x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{(x-1)'}{(x-1)\ln 2} = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Câu 31: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 5]** Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là

A. $y' = \dfrac{x-1}{\ln 2}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{\ln 2}$.

C. $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{x-1}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \log_2(x-1) \Rightarrow y' = \dfrac{(x-1)'}{(x-1)\ln 2} = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Câu 32: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 23]** Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x+1)$ là.

A. $y' = \dfrac{1}{(x+1).\ln 3}$. **B.** $y' = \dfrac{1}{x+1}$.

C. $y' = \dfrac{1}{\ln 3}$. **D.** $y' = \dfrac{x+1}{\ln 3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \dfrac{(x+1)'}{(x+1).\ln 3} = \dfrac{1}{(x+1)\ln 3}$

Câu 33: **[MD 104-TN BGD 2023-CÂU 18]** Đạo hàm của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là

A. $y' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$. **B.** $y' = \dfrac{x-1}{\ln 2}$.

C. $y' = \dfrac{1}{x-1}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{\ln 2}$.

Lời giải

Chọn A

$y' = \left[\log_2(x-1)\right]' = \dfrac{1}{(x-1)\ln 2}$

Câu 34: **(ĐMH 2017-Câu 18)** Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{4^x}$

Ghi Chú!

A. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

C. $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=\dfrac{(x+1)'.4^x-(x+1).(4^x)'}{(4^x)^2}=\dfrac{4^x-(x+1).4^x.\ln 4}{(4^x)^2}$

$=\dfrac{4^x.(1-x.\ln 4-\ln 4)}{(4^x)^2}=\dfrac{1-x.2\ln 2-2\ln 2}{4^x}=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

Câu 35: **(ĐTN 2017-Câu 18)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

A. $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

C. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ **D.** $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=\left(\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)'=\dfrac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Câu 36: **(ĐTK 2017-Câu 40)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$.

D. $2y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1. $y'=\dfrac{(\ln x)'.x-x'.\ln x}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$$y''=\dfrac{(1-\ln x)'.x^2-(x^2)'(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-\frac{1}{x}.x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}$$

$$=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=-\dfrac{1+2(1-\ln x)}{x^3}=-\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$$

Suy ra: $2y'+xy''=2.\dfrac{1-\ln x}{x^2}-x\dfrac{3-2\ln x}{x^3}=\dfrac{2-2\ln x-3+2\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

Cách 2. Ta có $xy=\ln x$, lấy đạo hàm hai vế, ta được $y+xy'=\dfrac{1}{x}$

Ghi Chú!

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế của biểu thức trên, ta được $y'+y'+xy''=-\frac{1}{x^2}$, hay

$$2y'+xy''=-\frac{1}{x^2}.$$

Câu 37: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 28)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2\left(2x+1\right)$

.

A. $y'=\frac{1}{\left(2x+1\right)\ln 2}$ **B.** $y'=\frac{2}{\left(2x+1\right)\ln 2}$ **C.** $y'=\frac{2}{2x+1}$

D. $y'=\frac{1}{2x+1}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=\left(\log_2\left(2x+1\right)\right)'=\frac{\left(2x+1\right)'}{\left(2x+1\right)\ln 2}=\frac{2}{\left(2x+1\right)\ln 2}$.

Câu 38: **(ĐTK 2019-Câu 28)** Hàm số $f\left(x\right)=\log_2\left(x^2-2x\right)$ có đạo hàm

A. $f'\left(x\right)=\frac{\ln 2}{x^2-2x}$. **B.** $f'\left(x\right)=\frac{1}{\left(x^2-2x\right)\ln 2}$.

C. $f'\left(x\right)=\frac{\left(2x-2\right)\ln 2}{x^2-2x}$. **D.** $f'\left(x\right)=\frac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\ln 2}$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng công thức $\left(\log_a u\left(x\right)\right)'=\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right).\ln a}$.

Vậy $f'\left(x\right)=\frac{\left(x^2-2x\right)'}{\left(x^2-2x\right)\ln 2}=\frac{2x-2}{\left(x^2-2x\right)\ln 2}$.

Câu 39: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 19)** Cho hàm số $y=2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x-3).2^{x^2-3x}.\ln 2$. **B.** $2^{x^2-3x}.\ln 2$.

C. $(2x-3).2^{x^2-3x}$. **D.** $(x^2-3x).2^{x^2-3x-1}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 40: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 26)** Hàm số $y=3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

A. $\left(2x-3\right).3^{x^2-3x}$. **B.** $3^{x^2-3x}.\ln 3$.

C. $\left(x^2-3x\right).3^{x^2-3x-1}$. **D.** $\left(2x-3\right).3^{x^2-3x}.\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=\left(3^{x^2-3x}\right)'=\left(2x-3\right).3^{x^2-3x}.\ln 3$.

Câu 41: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 18)** Hàm số $y=2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $(x^2-x).2^{x^2-x-1}$. **B.** $(2x-1).2^{x^2-x}$.

C. $2^{x^2-x}.\ln 2$. **D.** $(2x-1).2^{x^2-x}.\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=(x^2-x)'.2^{x^2-x}.\ln 2=(2x-1).2^{x^2-x}.\ln 2$.

Câu 42: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 25)** Hàm số $y=3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

A. $3^{x^2-x}.\ln 3$. **B.** $(2x-1).3^{x^2-x}$.

C. $(x^2-x).3^{x^2-x-1}$. **D.** $(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(a^u)'=u'.a^u.\ln a$ nên $\left(3^{x^2-x}\right)'=(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$.

Câu 43: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 42]** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right)$, $\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(12;14)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(6;8)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right)\Leftrightarrow \ln f(x)=x\left(1-\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\Leftrightarrow \ln f(x)=x\left(1-\left(\ln f(x)\right)'\right)$$

$$\Leftrightarrow (x)'\ln f(x)+x\left(\ln f(x)\right)'=x\Leftrightarrow \left(x\ln f(x)\right)'=x.$$

Từ đó $x\ln f(x)=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$.

Cho $x=1$ ta được $\ln f(1)=\frac{1}{2}+C$

Cho $x=3$ ta được $3\ln f(3)=\frac{9}{2}+C$

Theo bài ra thì $f(1)=f(3)$, từ đó suy ra $C=\frac{3}{2}$ nên $f(x)=e^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2x}}$.

Cho $x=2$ ta được $f(2)=e^{\frac{7}{4}}\simeq 5,75$

Ghi Chú!

Câu 44: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 42]** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$, có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right),\ \forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(12;14)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(6;8)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$f(x)\ln f(x)=x\left(f(x)-f'(x)\right)\Leftrightarrow \ln f(x)=x\left(1-\frac{f'(x)}{f(x)}\right)\Leftrightarrow \ln f(x)=x\left(1-\left(\ln f(x)\right)'\right)$$

$$\Leftrightarrow (x)'\ln f(x)+x\left(\ln f(x)\right)'=x\Leftrightarrow \left(x\ln f(x)\right)'=x.$$

Từ đó $x\ln f(x)=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+C$.

Cho $x=1$ ta được $\ln f(1)=\frac{1}{2}+C$

Cho $x=3$ ta được $3\ln f(3)=\frac{9}{2}+C$

Theo bài ra thì $f(1)=f(3)$, từ đó suy ra $C=\frac{3}{2}$ nên $f(x)=e^{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2x}}$.

Cho $x=2$ ta được $f(2)=e^{\frac{7}{4}}\simeq 5,75$

Câu 45: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 48]** Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên khoảng $(0;+\infty)$ có đạo hàm trên khoảng đó và thỏa mãn $f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right),\forall x\in(0;+\infty)$. Biết $f(1)=f(3)$, giá trị $f(2)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(40;42)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(32;34)$. **D.** $(1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\forall x\in(0;+\infty)$

$$f(x)\ln f(x)=x\left(2f(x)-f'(x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x)\ln f(x)=2xf(x)-xf'(x)$$

$$\Rightarrow f(x)\ln f(x)+xf'(x)=2xf(x)$$

Ghi Chú!

$$\Rightarrow \ln f(x)+\frac{xf'(x)}{f(x)}=2x$$

$$\Rightarrow (x\ln f(x))'=2x$$

$$\Rightarrow x\ln f(x)=x^2+C.$$

Có:

$$\begin{cases}1\ln f(1)=1+C\\ 3\ln f(3)=9+C\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\ln f(1)=3+3C\\ 3\ln f(3)=9+C\end{cases}\Rightarrow 0=-6+2C\Rightarrow C=3.$$

Vậy: $x\ln f(x)=x^2+3\Rightarrow \ln f(x)=x+\frac{3}{x}$

$$\Rightarrow f(x)=e^{x+\frac{3}{x}}$$

$$f(2)=e^{2+\frac{3}{2}}\approx 33{,}12.$$

Dạng ③: Sự biến thiên có liên quan đến mũ, loga

Câu 46: **(ĐMH 2017-Câu 16)** Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. $f(x)<1\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$
B. $f(x)<1\Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$
C. $f(x)<1\Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$
D. $f(x)<1\Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$

Lời giải

Chọn D

Đáp án A đúng vì

$$f(x)<1\Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$$

$\Leftrightarrow x+x^2.\log_2 7<0$

Đáp án B đúng vì $f(x)<1\Leftrightarrow \ln f(x)<\ln 1\Leftrightarrow \ln\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \ln 2^x+\ln 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x.\ln 2+x^2.\ln 7<0$

Đáp án C đúng vì

$$f(x)<1\Leftrightarrow \log_7 f(x)<\log_7 1\Leftrightarrow \log_7\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_7 2^x+\log_7 7^{x^2}<0$$

$\Leftrightarrow x.\log_7 2+x^2<0$

Vậy D sai vì $f(x)<1\Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0.$

Câu 47: **(ĐTN 2017-Câu 9)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. $(-\infty;-1]$ **B.** $(-\infty;-1)$ **C.** $[-1;1]$ **D.** $[1;+\infty)$

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

Ta có: $y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - m$.

Hàm số $y = \ln\left(x^2+1\right) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \ge m, \forall x \in (-\infty;+\infty)$. Ta có $g'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \ge m, \forall x \in (-\infty;+\infty) \Leftrightarrow m \le -1$

Dạng ④: Min-Max liên quan hàm mũ, hàm lô-ga-rít(1 biến)

Câu 48: **(ĐTN 2017-Câu 21)** Xét các số thực a, b thỏa mãn $a > b > 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min} = 19$ **B.** $P_{\min} = 13$ **C.** $P_{\min} = 14$ **D.** $P_{\min} = 15$

Lời giải

Chọn D

Với điều kiện đề bài, ta có

$$P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left[2\log_{\frac{a}{b}} a\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = 4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}.b\right)\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$= 4\left[1 + \log_{\frac{a}{b}} b\right]^2 + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

Đặt $t = \log_{\frac{a}{b}} b > 0$ (vì $a > b > 1$), ta có

$$P = 4(1+t)^2 + \frac{3}{t} = 4t^2 + 8t + \frac{3}{t} + 4 = f(t).$$

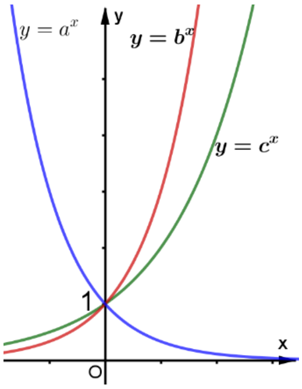
Ta có $f'(t) = 8t + 8 - \dfrac{3}{t^2} = \dfrac{8t^3 + 8t^2 - 3}{t^2} = \dfrac{(2t-1)\left(4t^2+6t+3\right)}{t^2}$

Vậy $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 15$.

Ghi Chú!

➽Dạng ⑤: Đồ thị liên quan hàm số mũ, Logarit

Câu 49: **(ĐTN 2017-Câu 19)** Cho ba số thực dương a,b,c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên



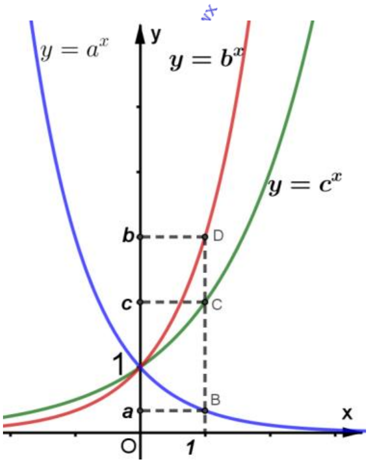
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a<b<c$ **B.** $a<c<b$ **C.** $b<c<a$ **D.** $c<a<b$

Lời giải

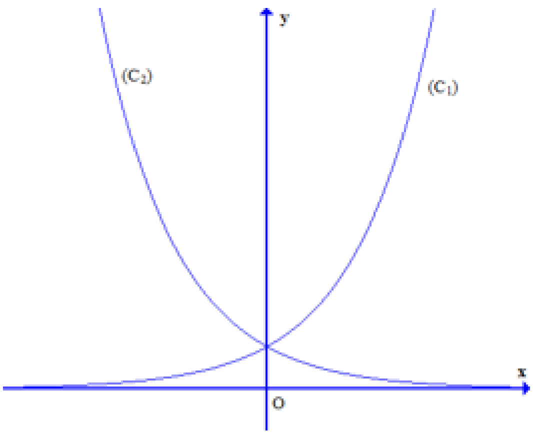
Chọn B

Đường thẳng $x=1$ đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=a, y=b, y=c$ như hình vẽ:



Từ đồ thị kết luận $a<c<b$

Câu 50: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 22)** Cho hai hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ với a, b là 2 số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là (C_1) và (C_2) như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ghi Chú!

A. $0<a<b<1$. **B.** $0<b<1<a$. **C.** $0<a<1<b$. **D.** $0<b<a<1$.

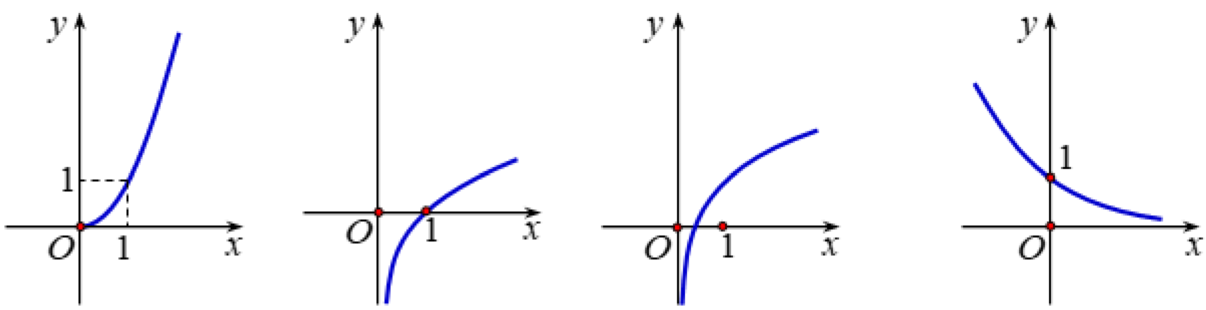
Lời giải

Chọn B

Vì hàm số $y=b^x$ nghịch biến nên $0<b<1$.

Vì hàm số $y=a^x$ đồng biến nên $a>1$.

Câu 51: **(ĐTK 2017-Câu 15)** Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Tìm đồ thị đó?



Hình 1 **Hình 2** **Hình 3** **Hình 4**

A. Hình 1 **B.** Hình 2 **C.** Hình 3 **D.** Hình 4

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=(0;+\infty)$;Ta có $f(x)=x\ln x \Rightarrow f'(x)=g(x)=\ln x+1$.

Ta có $g(1)=1$ nên đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$. Loại hai đáp án B và D

Và $\lim\limits_{x\to 0^+}(g(x))=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x)+1\right]$. Đặt $t=\dfrac{1}{x}$. Khi $x\to 0^+$ thì $t\to +\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}(g(x))=\lim\limits_{t\to +\infty}\left[\ln\left(\dfrac{1}{t}\right)+1\right]=-\lim\limits_{t\to +\infty}\left[\ln(t)\right]+1=-\infty$ nên loại đáp án A

(Có thể dùng máy tính để tính tiệm cận đứng của $y=\ln x+1$)

Dạng ⑥: Bài toán lãi suất

Câu 52: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 35)** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó sẽ nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi ? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

A. 13 năm **B.** 14 năm **C.** 12 năm **D.** 11 năm

Lời giải

Chọn C

Ta có $50.(1+0,06)^n \geq 100 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,06} 2 \Rightarrow n = 12$.

Câu 53: **(ĐTK 2018-Câu 22)** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. $102.424.000$ đồng **B.** $102.423.000$ đồng **C.** $102.16.000$ đồng **D.** $102.017.000$ đồng

Lời giải

Chọn A

Ta có $A_n = A_0(1+r)^n = 100.000.000\left(1+\dfrac{0,4}{100}\right)^6 = 102.424.128$.

Câu 54: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 16)** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $7,5\%$/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 11 năm. **B.** 9 năm. **C.** 10 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\dfrac{S_n}{A}\right)$

$\Rightarrow n = \log_{(1+7,5\%)}(2) \approx 9,6$.

Câu 55: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 41)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. $810\ 000\ 000$ đồng. **B.** $813\ 529\ 000$ đồng.

C. $797\ 258\ 000$ đồng. **D.** $830\ 131\ 000$ đồng.

Lời giải

Chọn B

Đặt $T = 900\ 000\ 000$ (đồng).

Giá bán loại xe X năm 2021 là: $T_1 = T.(1-2\%)$ đồng.

Giá bán loại xe X năm 2022 là: $T_2 = T_1.(1-2\%) = T.(1-2\%)^2$ đồng.

Giá bán loại xe X năm 2023 là: $T_3 = T_2(1-2\%) = T.(1-2\%)^3$ đồng.

Giá bán loại xe X năm 2024 là: $T_4 = T_3.(1-2\%) = T.(1-2\%)^4$ đồng.

Ghi Chú!

Giá bán loại xe X năm 2025 là: $T_5 = T_4.(1-2\%) = T.(1-2\%)^5$ đồng.

Vậy năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là: $900\ 000\ 000.(1-2\%)^5 \approx 813\ 529\ 000$ đồng.

Câu 56: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 39)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là $750.000.000$ và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 677.941.000 đồng. **B.** 675.000.000 đồng.
C. 664.382.000 đồng. **D.** 691.776.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi giá niêm yết đầu tiên là A đồng và mỗi năm giảm r giá bán so với giá bán của năm liền trước.

Sau 1 năm, giá bán là $A(1-r)$ đồng.

…

Sau n năm, giá bán là $A(1-r)^n$.

Vậy, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là $750.000.000(1-0,02)^5 = 677.940.5976$ đồng.

Câu 57: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 41)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 850.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. $768.333.000$ đồng. **B.** $765.000.000$ đồng.
C. $752.966.000$ đồng. **D.** $784.013.000$ đồng.

Lời giải

Chọn A

Theo đề bài, ta có

Giá niêm yết xe X năm 2021 là: $G_{2021} = 850000000\text{x}(1-2\%)$

Giá niêm yết xe X năm 2022 là: $G_{2022} = G_{2021}(1-2\%) = 850000000\text{x}(1-2\%)^2$

………….

Vậy giá niêm yết xe X năm 2025 là: $G_{2025} = 850000000\text{x}(1-2\%)^5 \approx 768333000$ đồng.

Câu 58: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 41)** Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả lương cho nhân

Ghi Chú!

viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả năm lớn hơn 2 tỷ đồng?
A. Năm 2023 **B.** Năm 2022 **C.** Năm 2021 **D.** Năm 2020

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $1.(1+r)^n > 2 \Leftrightarrow 1.(1+0,15)^n > 2 \Leftrightarrow n > 4,96$

Vậy từ năm thứ 5 sau khi thành lập công ty thì tổng tiền lương bắt đầu lớn hơn 2 tỷ đồng.
Suy ra năm cần tìm là $2016+5=2021$.

Câu 59: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 24)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 7,2%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi ít nhất sau bao nhiêu năm người đó thu được(cả tiền gửi ban đầu lãi) gấp đôi số tiền ban đầu,giả định trong suốt thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?
A. 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 9 năm. **D.** 10 năm.

Lời giải

Chọn D

Gọi A là số tiền người đó gửi ban đầu($A>0$), r là lãi suất, $r=7,2\%$ /năm.

Gọi T_n là số tiền người đó có được sau n năm, $n \in \mathbb{N}$. Khi đó ta có: $T_n = A(1+r)^n$

Giả sử sau ít nhất n thì số tiền người đó thu được gấp đôi số tiền gốc ban đầu.

$\Rightarrow T_n = 2A$ hay $A(1+r)^n = 2.A \Leftrightarrow 1,072^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,072} 2 \approx 9,9697$

$\Rightarrow$ Ít nhất sau 10 năm thì số tiền của người đó thu được gấp đôi số tiền gốc ban đầu.

Câu 60: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 25)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,6\%$/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi xuất không thay đổi và người đố không rút tiền ra?
A. 11 năm. **B.** 10 năm. **C.** 13 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền gửi ban đầu là a, lãi suất là $d\%$/ năm.
Số tiền có được sau 1 năm là: $T_1 = a + ad = a(1+d)$

Số tiền có được sau 2 năm là: $T_2 = a(1+d) + a(1+d)d = a(1+d)^2$

Số tiền có được sau 3 năm là: $T_2 = a(1+d)^2 + a(1+d)^2 d = a(1+d)^3$

Số tiền có được sau n năm là: $T_n = a(1+d)^n$

Theo giả thiết: $T_n = 2a \Leftrightarrow (1+d)^n = 2$

Ghi Chú!

Thay số ta được: $(1+0,066)^n=2 \Rightarrow n=\log_{1,066}2 \Rightarrow n\approx 10,85$

Vậy sau ít nhất 11 năm.

Câu 61: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 16)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

A. 13 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.

Lời giải

Chọn D

Gọi x số tiền gửi ban đầu.

Theo giả thiết $2x=x\left(1+\dfrac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow 2=\left(1+\dfrac{6,1}{100}\right)^N$

$\Leftrightarrow 2=\left(1+\dfrac{6,1}{100}\right)^N \Leftrightarrow N=\log_{(1,061)}2\approx 11,7$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được số tiền thỏa yêu cầu.

Câu 62: **(ĐTK 2019-Câu 44)** Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ôn ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $2,22$ triệu đồng. **B.** $3,03$ triệu đồng.
C. $2,25$ triệu đồng. **D.** 2,20 triệu đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền vay ban đầu là M, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là m, lãi suất một tháng là r.

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là $M+Mr=M(1+r)$.

Ngay sau đó ông A hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ hai là $M(1+r)-m$.

Do đó hết tháng thứ hai, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$[M(1+r)-m](1+r)=M(1+r)^2-m(1+r)$.

Ngay sau đó ông A lại hoàn nợ số tiền m nên số tiền để tính lãi cho tháng thứ ba là

$M(1+r)^2-m(1+r)-m$.

Do đó hết tháng thứ ba, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$\left[M(1+r)^2-m(1+r)-m\right](1+r)=M(1+r)^3-m(1+r)^2-m(1+r)-m.$$

Cứ tiếp tục lập luận như vậy ta thấy sau tháng thứ n, $n\geq 2$, số tiền cả vốn lẫn lãi ông A nợ ngân hàng là

$$M(1+r)^n-m(1+r)^{n-1}-m(1+r)^{n-2}-...-m(1+r)-m$$

$$=M(1+r)^n-\frac{m\left[(1+r)^{n-1}-1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ n trả hết nợ thì ta có

$$M(1+r)^n-\frac{m\left[(1+r)^{n-1}-1\right]}{r}=0\Leftrightarrow m=\frac{M(1+r)^n r}{(1+r)^n-1}.$$

Thay số với $M=100.000.000$, $r=1\%$, $n=5\times 12=60$ ta được $m\approx 2,22$ (triệu đồng).

Câu 63: **(ĐMH 2017-Câu 21)** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m=\dfrac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng) **B.** $m=\dfrac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng)

C. $m=\dfrac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng) **D.** $m=\dfrac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng)

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Công thức: Vay số tiền A lãi suất $r\%$ / tháng. Hỏi trả số tiền a là bao nhiêu để n tháng hết nợ $a=\dfrac{A.r.(1+r)^n}{(1+r)^n-1}=\dfrac{100.0,01.(1+0,01)^3}{(1+0,01)^3-1}$.

Cách 2: Theo đề ta có: ông A trả hết tiền sau 3 tháng vậy ông A hoàn nợ 3 lần

Với lãi suất 12%/năm suy ra lãi suất một tháng là 1%

Hoàn nợ lần 1:

-Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là : $100.0,01+100=100.1,01$ (triệu đồng)

- Số tiền dư : $100.1,01-m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 2:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là :

$(100.1,01-m).0,01+(100.1,01-m)=(100.1,01-m).1,01=100.(1,01)^2-1,01.m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^2-1,01.m-m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 3:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là :

$\left[100.(1,01)^2-1,01.m-m\right].1,01=100.(1,01)^3-(1,01)^2m-1,01m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^3-(1,01)^2m-1,01m-m$ (triệu đồng)

$$\Rightarrow 100.(1,01)^3-(1,01)^2m-1,01m-m=0 \Leftrightarrow m=\frac{100.(1,01)^3}{(1,01)^2+1,01+1}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{100.(1,01)^3.(1,01-1)}{\left[(1,01)^2+1,01+1\right].(1,01-1)}=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1} \text{ (triệu đồng)}$$

Dạng ⑦: Bài toán tăng trưởng

Câu 64: **(ĐTN 2017-Câu 14)** Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

A. 48 phút. **B.** 19 phút. **C.** 7 phút. **D.** 12 phút.

Lời giải

Chọn C

Sau 3 phút ta có: $s(3)=s(0).2^3 \Rightarrow s(0)=\dfrac{s(3)}{2^3}=78125.$

Tại thời điểm t số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con nên ta có:

$$s(t)=s(0).2^t \Leftrightarrow 2^t=\frac{s(t)}{s(0)} \Leftrightarrow 2^t=\frac{10.000.000}{78125} \Leftrightarrow 2^t=128 \Leftrightarrow t=7.$$

Câu 65: **(ĐTK 2020-L1-Câu 25)** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S=Ae^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

A. $109.256.100$. **B.** $108.374.700$. **C.** $107.500.500$. **D.** $108.311.100$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn B

Lấy năm 2017 làm mốc, ta có $A = 93.671.600; n = 2035 - 2017 = 18$

$\Rightarrow$ Dân số Việt Nam vào năm 2035 là $S = 93.671.600.e^{18.\frac{0,81}{100}} \approx 108.374.700$

Câu 66: **(ĐTK 2020-L2-Câu 42)** Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

A. 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.

Lời giải

Chọn B

Ta có $P(n) = \dfrac{1}{1+49e^{-0,015n}} \geq \dfrac{3}{10} \Leftrightarrow 1+49e^{-0,015n} \leq \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow 49e^{-0,015n} \leq \dfrac{7}{3}$

$\Leftrightarrow e^{-0,015n} \leq \dfrac{1}{21} \Leftrightarrow -0,015n \leq \ln\dfrac{1}{21} \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 21}{0,015} \approx 202,93$

Câu 67: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 41)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 600 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha?

A. Năm 2028.. **B.** Năm 2047.. **C.** Năm 2027.. **D.** Năm 2046.

Lời giải

Chọn A

Gọi P_0 là diện tích rừng trồng mới năm 2019.

Gọi P_n là diện tích rừng trồng mới sau n năm.

Gọi $r\%$ là phần trăm diện tích rừng trồng mới tăng mỗi năm.

Sau 1 năm, diện tích rừng trồng mới là $P_1 = P_0 + P_0 r = P_0(1+r)$.

Sau 2 năm, diện tích rừng trồng mới là $P_2 = P_1 + P_1 r = P_0(1+r)^2$.

…

Sau n năm, diện tích rừng trồng mới là $P_n = P_0(1+r)^n$.

Theo giả thiết: $P_0 = 600$, $r = 0,06$.

$600(1+0,06)^n > 1000 \Leftrightarrow (1,06)^n > \dfrac{10}{6} \Leftrightarrow n > \log_{1,06}\dfrac{10}{6} \approx 8,8$.

Ghi Chú!

Do đó $n=9$. Vậy sau 9 năm (tức năm 2028) thì tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha.

Câu 68: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 42)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

A. Năm 2043. **B.** Năm 2025. **C.** Năm 2024. **D.** Năm 2042.

Lời giải

Chọn B

Gọi S_n là diện tích rừng trồng mới của tỉnh A sau n năm.

r là phần trăm diện tích rừng trồng mới tăng thêm sau mỗi năm.

S là diện tích rừng trồng mới năm 2019.

Khi đó $S_n=S\left(1+r\right)^n$

Với $S=1000$ ha, $r=6\%=0,06$ suy ra $S_n=1000\left(1+0,06\right)^n=1000\left(1,06\right)^n$

Để $S_n\ge 1400\Leftrightarrow 1000\left(1,06\right)^n\ge 1400\Leftrightarrow n\ge \log_{1,06}\left(\frac{7}{5}\right)\approx 5.77$.

Vậy năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha là năm 2025.

Câu 69: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 39)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2051. **C.** Năm 2030. **D.** Năm 2050.

Lời giải

Chọn C

Bài toán trên giống bài toán lãi kép khi gửi tiền vào Ngân hàng:

Ta đặt $S_0=900$ ha là diện tích rừng trồng mới của tỉnh A năm 2019,

$S_N=1700$ là diện tích rừng trồng mới sau N năm (kể từ sau năm) 2019 của tỉnh A mà mỗi năm đều tăng $r\%=6\%=0.06$ so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước.

Sau một năm: $S_1=\left(1+0.06\right).S_0$

Sau hai năm: $S_2=S_1+S_1.0.06=1.06^2.S_0$

…

Sau N năm: $S_N=\left(1+r\%\right)^N.S_0$

$\Rightarrow 1700 < 1.06^N.900 \Leftrightarrow 1.06^N > \dfrac{17}{9} \Leftrightarrow N > \log_{1.06}\dfrac{17}{9} \approx 10.915$.

Vậy năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha là 2030.

Câu 70: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 40)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha?

A. Năm 2029. **B.** Năm 2028. **C.** Năm 2048. **D.** Năm 2049.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $S_n = 1400$ ha; $A = 800$ ha; $r = 6\%$.

Áp dụng công thức: $S_n = A(1+r)^n \Rightarrow A(1+r)^n > 1400$

$\Leftrightarrow n > \log_{1+r}\left(\dfrac{1400}{A}\right) \Leftrightarrow n > \log_{1,06}\left(\dfrac{1400}{800}\right) \Leftrightarrow n > 9,609 \Rightarrow n = 10$.

Vậy năm đầu tiên là năm 2029.

Câu 71: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 41)** Năm 2020 một hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 708.674.000 đồng. **B.** 737.895.000 đồng.

C. 723.137.000 đồng. **D.** 720.000.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Năm 2020 xe X có giá 800.000.000 đồng. Vì mỗi năm giá bán giảm 2% so với năm trước đó nên giá bán của xe X năm 2021 là: $800.10^6 - 800.10^6.2\% = 800.10^6(1-2\%)$.

Giá bán của xe X năm 2022 là: $800.10^6(1-2\%)^2$.

Giá bán của xe X năm 2023 là: $800.10^6(1-2\%)^3$.

Giá bán của xe X năm 2024 là: $800.10^6(1-2\%)^4$.

Giá bán của xe X năm 2025 là: $800.10^6(1-2\%)^5 = 723.137.000$ đồng.

Dạng ⑧: Hàm số mũ,logarit chứa tham số

Câu 72: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 50)** Xét hàm số $f(t) = \dfrac{9^t}{9^t + m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x) + f(y) = 1$ với mọi x, y thỏa mãn $e^{x+y} \le e(x+y)$. Tìm số phần tử của S.

A. 0. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có nhận xét: $\begin{cases} e^x \geq e.x \\ e^y \geq e.y \end{cases} \Rightarrow e^{x+y} \leq e(x+y) \Leftrightarrow x+y=1$.

(Dấu ‘’=’’ xảy ra khi $x+y=1$).

Do đó ta có: $f(x)+f(y)=1 \Leftrightarrow f(x)+f(1-x)=1$

$$\Leftrightarrow \frac{9^x}{9^x+m^2}+\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}+m^2}=1 \Leftrightarrow \frac{9+m^2.9^x+9+m^2.9^{1-x}}{9+m^2.9^x+m^2.9^{1-x}+m^4}=1$$

$$\Leftrightarrow 9+m^2.9^x+9+m^2.9^{1-x}=9+m^2.9^x+m^2.9^{1-x}+m^4 \Leftrightarrow m^4=9 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}.$$

Vậy có hai giá trị m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 73: **(ĐTK 2020-L2-Câu 50)** Có bao nhiêu số nguyên x để tồn tại số thực y thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)=t \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3^t \\ x^2+y^2=4^t \end{cases}$

Do đó $(x;y)$ là tọa độ giao điểm của đường thẳng $(d): x+y-3^t=0$ và đường tròn tâm O bán kính $R=2^t$.

Điều kiện tồn tại giao điểm này là $d(O,d) \leq R \Leftrightarrow \frac{3^t}{\sqrt{2}} \leq 2^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow t \leq \log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}$

Dễ thấy hoành độ giao điểm x luôn thỏa mãn $-R \leq x \leq R \Leftrightarrow -2^t \leq x \leq 2^t$. Mà $t \leq \log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}$ nên $0<2^t \leq 2^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}<2 \Rightarrow -2<x<2$.

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-1;0;1\}$.

Ta đi thử lại

-Với $x=-1$ ta có hệ $\begin{cases} y=1+3^t \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow 4^t-1=(1+3^t)^2 \Leftrightarrow 9^t+2.3^t+2-4^t=0$.

Xét $f(t)=9^t+2.3^t+2-4^t$. Nếu $t<0$ thì $2-4^t>0$, còn $t \geq 0$ thì $9^t \geq 4^t$. Do đó $f(t)=9^t+2.3^t+2-4^t>0\ \forall t$, hay phương trình vô nghiệm.

-Với $x=0$ ta có hệ $\begin{cases} y=3^t \\ y^2=4^t \end{cases} \Rightarrow 4^t=6^t \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow y=1(tm)$.

-Với $x=1$ ta có hệ $\begin{cases} y=3^t-1 \\ y^2=4^t-1 \end{cases} \Rightarrow t=0 \Rightarrow y=0$.

Vậy $x=0$ hoặc $x=1$.

Dạng ⑨: Min-Max liên quan hàm mũ, hàm lô-ga-rít(nhiều biến)

Câu 74: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 37)** Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}\left(25a^2+b^2+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** 6. **C.** 22. **D.** $\frac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $25a^2+b^2+1>0$, $10a+3b+1>0$, $10a+3b+1>1$, $10ab+1>1$.

Áp dụng Cô-si, ta có $25a^2+b^2+1\geq 2\sqrt{25a^2b^2}+1=10ab+1$. Khi đó,

$\log_{10a+3b+1}\left(25a^2+b^2+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)$

$\geq \log_{10a+3b+1}\left(10ab+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)$

≥ 2 (Áp dụng Cô-si).

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} 5a=b \\ \log_{10a+3b+1}\left(10ab+1\right)=\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)=1 \end{cases}$

Suy ra $\left\{ b=\frac{5}{2}; a=\frac{1}{2} \right. \Rightarrow a+2b=\frac{11}{2}$.

Câu 75: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 44)** Xét các số thực x, y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. 9. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\leq x^2+y^2-2x+2 \Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2}-\left[(x-1)^2+y^2\right]-1\leq 0$

Đặt $t=(x-1)^2+y^2 \Rightarrow 2^t-t-1\leq 0 \Leftrightarrow 2^t\leq t+1 \Leftrightarrow 0\leq t\leq 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2\leq 1$.

Do đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn (C) tâm $I(1;0)$, $R=1$
.

$P=\frac{8x+4}{2x-y+1}\Rightarrow(2P-8).x-P.y+(P-4)=0\ \ (d)$

Do d và (C) có điểm chung $\Leftrightarrow d(I,(d))\le R \Leftrightarrow \dfrac{|3P-12|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}}\le 1$

$\Leftrightarrow |3P-12|\le \sqrt{(2P-8)^2+P^2} \Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}.$

Câu 76: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 47)** Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$

C. $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$

Lời giải

Chọn D

Với x,y dương và kết hợp với điều kiện của biểu thức $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$ ta được $1-xy>0$

Biến đổi $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$

$\Leftrightarrow \log_3(1-xy)-\log_3(x+2y)=-3(1-xy)+(x+2y)-\log_3 3$

$\Leftrightarrow [\log_3(1-xy)+\log_3 3]+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y)$

$\Leftrightarrow \log_3[3(1-xy)]+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y)(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0$ với mọi $x\in D$ nên hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $D=(0;+\infty)$

Từ đó suy ra $(1)\Leftrightarrow 3(1-xy)=x+2y\Leftrightarrow 3-2y=x(1+3y)\Leftrightarrow x=\dfrac{3-2y}{1+3y}$ (do $y>0$)

Theo giả thiết ta có $x>0,y>0$ nên từ $x=\dfrac{3-2y}{1+3y}$ ta được $0<y<\dfrac{3}{2}$.

$P=x+y=\dfrac{3-2y}{1+3y}+y=\dfrac{3y^2-y+3}{3y+1}$.

Ghi Chú!

Xét hàm số $g(y)=\dfrac{3y^2-y+3}{3y+1}$ với $0<y<\dfrac{3}{2}$. $g'(y)=\dfrac{9y^2+6y-10}{(3y+1)^2}=0$ ta được $y=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}$.

Từ đó suy ra $\min P=g\left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Câu 77: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 46) Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+2b$.

A. $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $ab<1$.

Ta có

$\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3\Leftrightarrow \log_2\left[2(1-ab)\right]+2(1-ab)=\log_2(a+b)+(a+b)\,(*)$

.

Xét hàm số $y=f(t)=\log_2 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$ .Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó,

$(*)\Leftrightarrow f\left[2(1-ab)\right]=f(a+b)\Leftrightarrow 2(1-ab)=a+b\Leftrightarrow a(2b+1)=2-b\Leftrightarrow a=\dfrac{-b+2}{2b+1}$

.

$P=a+2b=\dfrac{-b+2}{2b+1}+2b=g(b)$.

$g'(b)=\dfrac{-5}{(2b+1)^2}+2=0\Leftrightarrow (2b+1)^2=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2b+1=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow b=\dfrac{\sqrt{10}-2}{4}$ (vì $b>0$).

Lập bảng biến thiên ta được $P_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{10}-2}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Câu 78: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 44) Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{3a+2b+1}(9a^2+b^2+1)+\log_{6ab+1}(3a+2b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

Ghi Chú!

A. 6. **B.** 9. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a>0$, $b>0$ nên $\begin{cases}3a+2b+1>1\\9a^2+b^2+1>1\\6ab+1>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)>0\\\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)>0\end{cases}$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta được

$$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)\geq 2\sqrt{\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)+\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)}$$

$$\Leftrightarrow 2\geq 2\sqrt{\log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)}\Leftrightarrow\log_{6ab+1}\left(9a^2+b^2+1\right)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow 9a^2+b^2+1\leq 6ab+1\Leftrightarrow\left(3a-b\right)^2\leq 0\Leftrightarrow 3a=b.$$

Vì dấu "=" đã xảy ra nên

$$\log_{3a+2b+1}\left(9a^2+b^2+1\right)=\log_{6ab+1}\left(3a+2b+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_{3b+1}\left(2b^2+1\right)=\log_{2b^2+1}\left(3b+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2b^2+1=3b+1\Leftrightarrow 2b^2-3b=0\Leftrightarrow b=\frac{3}{2}$$ (vì $b>0$). Suy ra $a=\dfrac{1}{2}$.

Vậy $a+2b=\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{7}{2}$.

Câu 79: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 37) Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 9. **B.** 6. **C.** $\dfrac{27}{4}$. **D.** $\dfrac{20}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)>0$ và $\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)>0$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$$\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)$$

$$\geq 2\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right).\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)$$

$$=2\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right).$$

Mặt khác $16a^2+b^2+1=\left(4a-b\right)^2+8ab+1\geq 8ab+1\left(\forall a,b>0\right)$, suy ra $2\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right)\geq 2$.

Khi đó $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{4a+5b+1}(8ab+1) = \log_{8ab+1}(4a+5b+1) \\ b = 4a \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{24a+1}(32a^2+1) = 1 \\ b = 4a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 32a^2 = 24a \\ b = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = 3 \end{cases}.$

Vậy $a + 2b = \dfrac{3}{4} + 6 = \dfrac{27}{4}$.

Câu 80: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 50)** Cho $a > 0$, $b > 0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}(4a^2+b^2+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1) = 2$. Giá trị của $a+2b$ bằng:

A. $\dfrac{15}{4}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $4a^2 + b^2 \geq 4ab$, với mọi $a, b > 0$. Dấu ‘=’ xảy ra khi $b = 2a$ (1).

Khi đó

$2 = \log_{2a+2b+1}(4a^2+b^2+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1)$

$\geq \log_{2a+2b+1}(4ab+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1)$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$\log_{2a+2b+1}(4ab+1) + \log_{4ab+1}(2a+2b+1) \geq 2$. Dấu ‘=’ xảy ra khi

$\log_{2a+2b+1}(4ab+1) = 1 \Leftrightarrow 4ab+1 = 2a+2b+1$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $8a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{3}{4}$. Suy ra $b = \dfrac{3}{2}$. Vậy $a + 2b = \dfrac{15}{4}$.

Câu 81: **(ĐTK 2020-L2-Câu 47)** Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1$, $b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$ **B.** $\left[2;\dfrac{5}{2}\right)$ **C.** $[3;4)$. **D.** $\left[\dfrac{5}{2};3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Theo bài ra ta có: $a^x = b^y = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^x = a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}} \\ b^y = a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x-\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} \\ b^{y-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\log_a b \\ y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.\log_b a \end{cases}$

Do đó: $P = x + 2y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b + 1 + \log_b a = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\log_a b + \log_b a$

Đặt $t=\log_a b$. Vì a, $b>1$ nên $\log_a b>\log_a 1=0$.

Khi đó $P=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{t}\geq\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{1}{2}t.\frac{1}{t}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$.

Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ khi $t=\sqrt{2}$ hay $b=a^{\sqrt{2}}$.

Câu 82: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 48)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

A. $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

Lời giải

Chọn B

$2x+y.4^{x+y-1}\geq 3\Leftrightarrow y.4^{x+y-1}\geq 3-2x\ (*)$

Theo giả thiết $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}$.

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Nếu $3-2x\leq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}$. Mà $y\geq 0$ nên $y^2+6y\geq 0$

$\Rightarrow P=x^2+y^2+4x+6y\geq x^2+4x$.

Khi đó $P=x^2+4x\ \left(x\geq\frac{3}{2}\right)$.

$P'=2x+4;\ P'=0\Leftrightarrow x=-2\notin\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

x	-2	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
P'	0		$+$	
P			$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+4x\ \left(x\geq\frac{3}{2}\right)$ đạt được tại $x=\frac{3}{2}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+4x=\left(\frac{3}{2}\right)^2+4.\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{33}{4}$.

Trường hợp 2: Nếu $3-2x>0\Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$. Mà $y.4^{x+y-1}\geq 3-2x>0\Rightarrow y>0$.

Ghi Chú!

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 4^{x+y-1} \ge \dfrac{3-2x}{y}$

$\Leftrightarrow x+y-1 \ge \log_4\left(\dfrac{3-2x}{y}\right) = \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{3-2x}{y}\right)$

$\Leftrightarrow 2x+2y-2 \ge \log_2(3-2x) - \log_2 y \Leftrightarrow 2y + \log_2(2y) \ge (3-2x) + \log_2(3-2x)$ $(**)$

Xét hàm số $f(t) = t + \log_2 t$ với $t > 0$.

Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t\ln 2} > 0$, $\forall t > 0$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến $\forall t > 0$.

$(**) \Leftrightarrow f(2y) \ge f(3-2x) \Leftrightarrow 2y \ge 3-2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6y \ge 9-6x \\ y^2 \ge \dfrac{9-12x+4x^2}{4} \end{cases}$.

Ta có $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y \ge x^2 + \dfrac{9-12x+4x^2}{4} + 4x + 9 - 6x$

$\Leftrightarrow P \ge \dfrac{8x^2-20x+45}{4}$.

Đặt $f(x) = \dfrac{8x^2-20x+45}{4}$ $\left(0 \le x < \dfrac{3}{2}\right)$.

$f'(x) = \dfrac{16x-20}{4}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$.

x	0		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{65}{8}$	$\nearrow$	

Khi đó giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \dfrac{8x^2-20x+45}{4}$ $\left(0 \le x < \dfrac{3}{2}\right)$ đạt được tại $x = \dfrac{5}{4}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P \ge \dfrac{8.\left(\frac{5}{4}\right)^2 - 20.\left(\frac{5}{4}\right) + 45}{4} = \dfrac{65}{8}$.

Ghi Chú!

Kết hợp hai trường hợp ta có giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y$ bằng $\frac{65}{8}$.

Cách khác:

Ta có: $2x + y.4^{x+y-1} \geq 3 \Leftrightarrow (2x+2y-3) + y\left(2^{2x+2y-2} - 2\right) \geq 0$ $(*)$

Nếu $2x + 2y - 3 < 0 \Rightarrow 2^{2x+2y-2} < 2$. Khi đó vế trái của bất phương trình $(*)$ nhỏ hơn 0

$\Rightarrow 2x + 2y - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x + y \geq \frac{3}{2}$.

Ta có: $P = x^2 + y^2 + 4x + 6y = (x+2)^2 + (y+3)^2 - 13$

Mà: $\left[(x+2)^2 + (y+3)^2\right]\left[1^2 + 1^2\right] \geq (x+y+5)^2 \geq \left(\frac{3}{2} + 5\right)^2$

$\Rightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 \geq \frac{169}{8} \Rightarrow P \geq \frac{169}{8} - 13 \Rightarrow P \geq \frac{65}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x + 2 = y + 3 \Leftrightarrow y = x - 1$

$\Rightarrow x + x - 1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$.

Cách khác:

$2x + y.4^{x+y} \geq 3 \Leftrightarrow 2\left(x + y - \frac{3}{2}\right) + 2y\left(4^{x+y-\frac{3}{2}} - 1\right) \geq 0$ $(*)$

□Nếu $x + y - \frac{3}{2} = 0$ thì vế trái $(*) = 0$

□Nếu $x + y - \frac{3}{2} > 0$ thì vế trái $(*) > 0$

□Nếu $x + y - \frac{3}{2} < 0$ thì vế trái $(*) < 0$

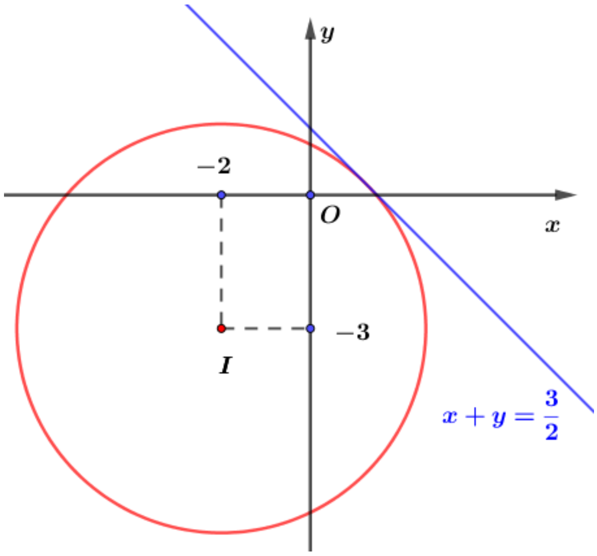
Vậy giả thiết có được là $\begin{cases} x + y - \frac{3}{2} \geq 0 \quad (1) \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

$P = x^2 + y^2 + 4x + 6y \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+3)^2 = P + 13$ (2)

□ $P < -13$ thì (2) không xảy ra

□ $P = -13$ thì $x = -2, y = -3$ không thỏa mãn (1)

□ $P > -13$ ta biểu diễn hình học cho (1) và (2)



Ta thấy $P_{\min}$ ứng với trường hợp đường tròn tâm $I(-2;-3)$ và $R=\sqrt{P+13}$

tiếp xúc với đường thẳng $x+y=\frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{\left|-2-3-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{P+13}\Leftrightarrow P=\frac{65}{8}$.

Câu 83: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 48)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng

A. $\frac{65}{8}$ **B.** $\frac{33}{4}$ **C.** $\frac{49}{8}$ **D.** $\frac{57}{8}$

Lời giải

Chọn A

$2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow y.2^{2x+2y-2}\ge 3-2x\Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge(3-2x).2^{3-2x}\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ trên $[0;+\infty)$ có $f'(t)=2^t+t.2^t\ln 2>0,\forall t\ge 0$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow 2y\ge 3-2x\Leftrightarrow x+y\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow(x+3)+(y+2)\ge\frac{13}{2}$.

Ta có: $P=(x+3)^2+(y+2)^2-13\Rightarrow(x+3)^2+(y+2)^2=P+13$

Ta lại có: $\frac{13}{2}\le(x+3)+(y+2)\le\sqrt{2\left[(x+3)^2+(y+2)^2\right]}=\sqrt{2(P+13)}$

$\Leftrightarrow\frac{169}{4}\le 2(P+13)\Leftrightarrow P\ge\frac{65}{8}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ y=\frac{5}{4}\end{cases}$.

Ghi Chú!

Vậy $P_{\min}=\dfrac{65}{8}$.

Câu 84: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 45)** Xét các số thực không âm x và y thoản mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+4y$ bằng

A. $\dfrac{33}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow (2x-3).4^{-x}+y.4^{y-1}\ge 0\Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge (3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH: $3-2x\le 0\Leftrightarrow x\ge \dfrac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x\ge \dfrac{3}{2} \\ y\ge 0 \end{cases}\Rightarrow P=x^2+y^2+2x+4y\ge \dfrac{21}{4}$ (2)

Xét TH: $3-2x>0\Leftrightarrow 0\le x<\dfrac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0$ với mọi $t\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y)\ge f(3-2x)\Leftrightarrow 2y\ge 3-2x\Leftrightarrow y\ge \dfrac{3}{2}-x$. Khi đó:

$$P=x^2+y^2+2x+4y\ge x^2+\left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2+2x+2(3-2x)=2x^2-5x+\dfrac{33}{4}$$

$$=2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{41}{8}\ge \dfrac{41}{8} \text{ (3)}$$

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của P là $\dfrac{41}{8}$ khi $x=\dfrac{5}{4}, y=\dfrac{1}{4}$.

Câu 85: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 47)** Xét các số thực không âm x và y thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+2y$ bằng

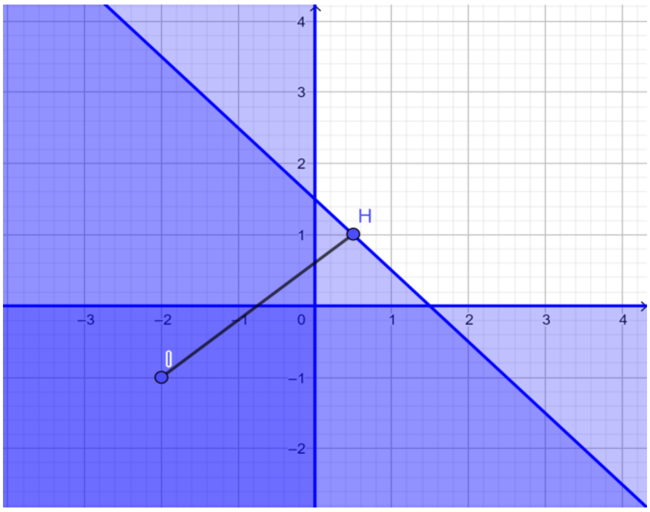
A. $\dfrac{33}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Nếu $x+y<\dfrac{3}{2}$ thì $2x+y.4^{x+y-1}<2x+y.4^{\frac{1}{2}}=2x+2y<3$ (loại). Vậy từ giả thiết suy ra $2x+2y\ge 3$.

Trên mặt phẳng tọa độ miền nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x+2y\ge 3 \\ x\ge 0; y\ge 0 \end{cases}$ là phần không bị gạch như hình vẽ



◆ Ta có $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 5 + P \quad (*)$.

Tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn $(*)$ là đường tròn tâm $I(-2;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5+P}$, $(P > -5)$. Để tồn tại cặp $(x;y)$ thì đường tròn phải có điểm chung với phần mặt phẳng không bị gạch ở hình trên. Điều đó xảy ra khi bán kính đường tròn không bé hơn khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng có phương trình $d: 2x + 2y - 3 = 0$. Bởi vì $d(I;d) = \dfrac{|-2.2 - 1.2 - 3|}{2\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{4}$

nên ta phải có $5 + P \geq \left(\dfrac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Leftrightarrow P \geq \dfrac{41}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi cặp $(x;y)$ là tọa độ của điểm H trên hình vẽ.

Câu 86: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 43) Xét các số thực x, y thỏa mãn: $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2 + y^2 - 2x + 2).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

A. -2. **B.** -3. **C.** -5. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{x^2+y^2+1} \leq (x^2+y^2-2x+2).4^x \Leftrightarrow \dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{4^x} \leq x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} - (x^2+y^2-2x+1) - 1 \leq 0 \ (*)$.

Đặt $t = x^2 + y^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow t = (x-1)^2 + y^2 \geq 0$. Khi đó $(*)$ trở thành $2^t - t - 1 \leq 0$.

Xét hàm số: $f(t) = 2^t - t - 1$ trên $[0;+\infty)$

$f'(t) = 2^t \ln 2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

Bảng biến thiên:

t		0		$\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$		1		$+\infty$
$f'(t)$			$-$	0	$+$			
$f(t)$		0	$\searrow$	$\dfrac{1}{\ln 2}-\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)-1$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(t)\le 0 \Leftrightarrow 0\le t\le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Khi đó $2x+y+1>0$ và $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$.

Các cặp $(x;y)$ thỏa mãn: $(x-1)^2+y^2\le 1$ là tọa độ các điểm $(x;y)$ thuộc hình tròn (C)

Tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Các cặp $(x;y)$ thỏa mãn: $2Px+(P-4)y+P=0$ là tọa độ các điểm $(x;y)$ thuộc đường thẳng

$(d): 2Px+(P-4)y+P=0$.

Do đó tồn tại giá trị nhỏ nhất của P khi đường thẳng (d) phải có điểm chung với hình tròn (C)

$\Leftrightarrow d_{(I;d)}\le R \Leftrightarrow \dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}}\le 1 \Leftrightarrow P^2+2P-4\le 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}$

.

Vậy $\min P=-1-\sqrt{5}\approx -3,24$.

Dấu bằng xảy ra khi $(x;y)$ là tọa độ tiếp điểm của đường thẳng (d) với hình tròn (C).

Câu 87: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 46)** Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le (x^2+y^2-2x+2).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x^2+y^2+1}\le (x^2+y^2-2x+2).4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le x^2+y^2-2x+2 \quad (*)$.

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1=(x-1)^2+y^2\ge 0$.

Khi đó (*) trở thành $2^t\le t+1$.

Xét hàm số $f(t)=2^t-t-1\ (t\geq 0)$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2-1$; $f'(t)=0\Leftrightarrow 2^t=\dfrac{1}{\ln 2}\Leftrightarrow t=\log_2\dfrac{1}{\ln 2}=t_0$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)=2^t-t-1\ (t\geq 0)$ như sau

t	0		t_0		1		$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+		+	
$f(t)$	0	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $2^t-t-1\leq 0\Leftrightarrow 0\leq t\leq 1$.

Do đó $0\leq (x-1)^2+y^2\leq 1$. Tập hợp các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính bằng 1 (kể cả biên). Nếu $2x-y+1=0\Leftrightarrow y=2x+1$ thì $(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+(2x+1)^2=4x^2+(x+1)^2+1>1$ mâu thuẫn với $0\leq (x-1)^2+y^2\leq 1$.

Với $2x-y+1\neq 0$ thì $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow (\Delta):(2P-8)x-Py+P-4=0$.

Với $(x;y)$ thỏa mãn giả thiết, P là một giá trị của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ khi và chỉ khi đường thẳng $(\Delta):(2P-8)x-Py+P-4=0$ và hình tròn là hình tròn tâm $I(1;0)$, bán kính bằng 1 (kể cả biên) có điểm chung. Điều này tương đương với

$$d(I,(\Delta))\leq 1\Leftrightarrow \frac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}}\leq 1\Leftrightarrow |3P-12|\leq\sqrt{(2P-8)^2+P^2}$$

$\Leftrightarrow P^2-10P+20\leq 0\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\leq P\leq 5+\sqrt{5}$. Suy ra miền giá trị của P là đoạn $\left[5-\sqrt{5};5+\sqrt{5}\right]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $5-\sqrt{5}$ $(\approx 2,76)$ đạt được khi $x=\dfrac{1}{3};y=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 88: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 47)** Xét các số thực x,y thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq (x^2+y^2-2x+2)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ gần nhất với số nào dưới đây?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

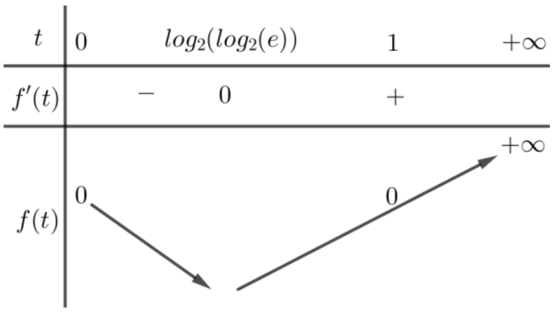
Ta có: $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2+y^2-2x+2$

Đặt $t = x^2+y^2-2x+1 = \left(x-1\right)^2+y^2 \ \left(t \ge 0\right)$, bất phương trình trở thành:

$2^t \le t+1 \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \le 0 \ (*)$

Xét $f\left(t\right) = 2^t - t - 1 \Rightarrow f'\left(t\right) = 2^t \ln 2 - 1 \Rightarrow f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow t = \log_2\left(\log_2 e\right)$.

Bảng biến thiên:



Suy ra:

$f\left(t\right) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Rightarrow \left(x-1\right)^2 + y^2 \le 1$

Ta có: $P = \dfrac{4y}{2x+y+1} \Rightarrow 2Px + Py + P = 4y \Rightarrow 2P\left(x-1\right) + \left(P-4\right)y = -3P$

Áp dụng bất đẳng thức

B.C. S, ta được:

$\left[2P\left(x-1\right)+\left(P-4\right)y\right]^2 \le \left[4P^2+\left(P-4\right)^2\right]\left[\left(x-1\right)^2+y^2\right]$

$\Rightarrow 9P^2 \le \left[4P^2+\left(P-4\right)^2\right]\left[\left(x-1\right)^2+y^2\right]$

Mà $\left(x-1\right)^2+y^2 \le 1$ nên $9P^2 \le \left[4P^2+\left(P-4\right)^2\right] \Leftrightarrow 4P^2+8P-16 \le 0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5} \le P \le -1+\sqrt{5}$

Suy ra: $P_{\max} = -1+\sqrt{5} \approx 1,24$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{y} = \dfrac{2P}{P-4} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \left(x-1\right)^2+y^2 = 1 \\ P = -1+\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$.

Vậy **Chọn A** được chọn.

Ghi Chú!

§5- PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. Phương trình mũ:

①. Phương trình mũ cơ bản: $a^x = b \ (a > 0,\ a \neq 1)$.

- Phương trình có một nghiệm duy nhất khi $b > 0$.

  $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b, \ (b > 0)$.

- Phương trình vô nghiệm khi $b \leq 0$.

②. Các phương pháp giải trình mũ:

1. *Biến đổi, quy về cùng cơ số:*

- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow a = 1$ hoặc $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

2. *Đặt ẩn phụ:*

☞ *Biến đổi quy về dạng:* $f\left[a^{g(x)}\right] = 0, \ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$
- $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}$, $t > 0$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

3. *Lôgarit hóa*

- Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.
- Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

  hoặc $\log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$.

2. Bất phương trình mũ:

↳①. ***Xét bất phương trình mũ cơ bản có dạng*** $a^x > b$.

- Nếu $b \leq 0$, tập nghiệm của bất phương trình là $\mathbb{R}$, vì $a^x > b, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.

  1. Với $a > 1$, $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$.
  2. Với $0 < a < 1$, $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$.

↳②. ***Xét bất phương trình mũ cùng cơ số:*** $a^{f(x)} > a^{g(x)}$.

1. Với $a > 1$, $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Ghi Chú!

❷. Với $0<a<1$, $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

Chú ý:

①. ***Khi giải bất phương trình mũ***, ta cần chú ý đến tính đơn điệu của hàm số mũ.

- $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$. ☞ ***Không** đổi dấu của BPT **khi a>0***
- $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$ ☞ ***Nhớ đổi** dấu của BPT **khi 0<a<1***
- *Tương tự cho các dạng BPT mũ chứa dấu $\le, \ge, <$ còn lại.*

②. Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì: $a^u>a^v \Leftrightarrow (a-1)(u-v)>0$.

③. Ta cũng thường sử dụng các phương pháp giải tương tự như đối với phương trình mũ:

- Đưa về cùng cơ số.
- Đặt ẩn phụ.
- Sử dụng tính đơn điệu:
  - $y=f(x)$ đồng biến trên D thì: $f(u)<f(v) \Rightarrow u<v$
  - $y=f(x)$ nghịch biến trên D thì: $f(u)<f(v) \Rightarrow u>v$

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: PT,BPT mũ cơ bản, gần cơ bản

Câu 1: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 15] Tập nghiệm của bất phương trình $2^x \ge 8$ là

A. $(-3;+\infty)$. **B.** $[-3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2^x \ge 8 \Leftrightarrow 2^x \ge 2^3 \Leftrightarrow x \ge 3$.

Vạy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[3;+\infty)$.

Câu 2: (DE MH BGD 2023 – Câu 4) Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}<4$ là

A. $(-\infty;1]$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chon D

Ta có $2^{x+1}<4 \Leftrightarrow 2^{x+1}<2^2 \Leftrightarrow x+1<2 \Leftrightarrow x<1$.

Vậy tập của bất phương trình là $(-\infty;1)$.

Câu 3: (DE TN BGD 2022-MD 103) Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1}=4$ là

Ghi Chú!

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$2^{x^2+1}=2^2 \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Câu 4: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 2)** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=9$ là

A. $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

Lời giải

Chọn B

$3^{x-1}=9 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$.

Câu 5: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 24)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-4}=2^x$ là

A. $x=16$. **B.** $x=-16$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=4$.

Lời giải

Chọn D

$2^{2x-4}=2^x \Leftrightarrow 2x-4=x \Leftrightarrow x=4$.

Câu 6: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 10)** Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

A. $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x+1}=9 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$.

Câu 7: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 20)** Tập nghiệm của phương trình $2^x>3$ là

A. $(\log_3 2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;\log_2 3)$. **C.** $(-\infty;\log_3 2)$. **D.** $(\log_2 3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$2^x>3 \Leftrightarrow x>\log_2 3$.

Câu 8: **(ĐTN 2017-Câu 13)** Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$

A. $x=9$ **B.** $x=3$ **C.** $x=4$ **D.** $x=10$

Lời giải

Chọn C

$3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

Câu 9: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 6]** Với b,c là hai số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_5 b \ge \log_5 c$, khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b\ge c$. **B.** $b\le c$. **C.** $b>c$. **D.** $b<c$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_5 b \geq \log_5 c \Leftrightarrow b \geq c$.

Câu 10: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 2$ là

A. $(-\infty;\log_3 2)$. **B.** $(\log_3 2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;\log_2 3)$. **D.** $(\log_2 3;+\infty)$.

Lời giải

Chon A

$3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$.

Câu 11: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 6]** Với b,c là hai số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_5 b \geq \log_5 c$, khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b \geq c$. **B.** $b \leq c$. **C.** $b > c$. **D.** $b < c$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_5 b \geq \log_5 c \Leftrightarrow b \geq c$.

Câu 12: **(TN BGD 2022-MD101)** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{2-x}$ là:

A. $x = \frac{1}{3}$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chon A

$3^{2x+1} = 3^{2-x} \Leftrightarrow 2x+1 = 2-x \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$.

Câu 13: **(THPTQG 2020-L2-MDD103-Câu 15)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 2^x$ là

A. $x = 2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chon C

Ta có: $2^{2x-1} = 2^x \Leftrightarrow 2x-1 = x \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 14: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 8)** Nghiệm của phương trình $3^{x+2} = 27$ là

A. $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chon D

Ta có: $3^{x+2} = 27 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^3 \Leftrightarrow x+2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 15: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 6)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 5$ là

A. $(-\infty;\log_2 5)$. **B.** $(\log_5 2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;\log_5 2)$. **D.** $(\log_2 5;+\infty)$.

Lời giải

Chon D

Ta có: $2^x > 5 \Leftrightarrow x > \log_2 5$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (\log_2 5;+\infty)$.

Ghi Chú!

Câu 16: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 17] Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 8$ là

A. $\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn B

$2^{2x} < 8 \Leftrightarrow 2^{2x} < 2^3 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$

Câu 17: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 5) Nghiệm của phương trình $2^{2x-1} = 8$ là

A. $x = \dfrac{3}{2}$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = \dfrac{5}{2}$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2^{2x-1} = 8 \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$.

Câu 18: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 13) Nghiệm của phương trình $3^{x-2} = 9$ là

A. $x = -3$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = -4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $3^{x-2} = 9 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 19: (DE TN BGD 2022-MD 104) Số nghiệm thực của phương trình $2^{x^2+1} = 4$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $2^{x^2+1} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Câu 20: (ĐTK 2021-Câu 12) Nghiệm của phương trình $5^{2x-4} = 25$ là

A. $x = 3$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $5^{2x-4} = 25 \Leftrightarrow 5^{2x-4} = 5^2 \Leftrightarrow 2x - 4 = 2 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$.

Câu 21: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 18) Nghiệm của phương trình $2^{2x-3} = 2^x$ là

A. 8. **B.** -8. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x-3} = 2^x \Leftrightarrow 2x - 3 = x \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$.

Câu 22: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 26) Tập nghiệm của bất phương trình $2^x < 5$ là

A. $(-\infty;\log_2 5)$. **B.** $(\log_2 5;+\infty;)$. **C.** $(-\infty;\log_5 2)$. **D.** $(\log_5 2;+\infty;)$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^x < 5 \Leftrightarrow x < \log_2 5 \Rightarrow S = (-\infty; \log_2 5)$.

Câu 23: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 3^{2-x}$ là

A. $x = \frac{1}{3}$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$\begin{aligned}&3^{2x+1} = 3^{2-x}\\ &\Leftrightarrow 2x+1 = 2-x\\ &\Leftrightarrow 3x = 1\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Câu 24: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 37)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23} < 9$ là

A. $(-5:5)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(0;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $3^{x^2-23} < 9 \Leftrightarrow x^2 - 23 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 25 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 5$

Câu 25: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 13)** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 27$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2x+1 = 3 \Rightarrow x = 1$.

Câu 26: **(ĐTK 2017-Câu 3)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $5^{x+1} - \frac{1}{5} > 0$.

A. $S = (1;+\infty)$. **B.** $S = (-1;+\infty)$. **C.** $S = (-2;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Bất phương trình tương đương $5^{x+1} > 5^{-1} \Leftrightarrow x+1 > -1 \Leftrightarrow x > -2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-2;+\infty)$.

Câu 27: **(ĐTK 2020-L1-Câu 21)** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$ là

A. $[-2;4]$. **B.** $[-4;2]$.

C. $(-\infty;-2] \cup [4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

$5^{x-1}\ge 5^{x^2-x-9}\Leftrightarrow x-1\ge x^2-x-9\Leftrightarrow x^2-2x-8\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 4$.

Vậy Tập nghiệm của bất phương trình là $[-2;4]$.

Câu 28: **(ĐTK 2021-Câu 32)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{4-x^2}\ge 27$ là

A. $[-1;1]$. **B.** $(-\infty;1]$. **C.** $[-\sqrt{7};\sqrt{7}]$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Chon A

Ta có: $3^{4-x^2}\ge 27\Leftrightarrow 4-x^2\ge 3\Leftrightarrow 1-x^2\ge 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Câu 29: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 14)** Phương trình $2^{2x+1}=32$ có nghiệm là

A. $x=\frac{5}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\frac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chon B

Ta có $2^{2x+1}=32\Leftrightarrow 2x+1=5\Leftrightarrow x=2$.

Câu 30: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 34)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13}<27$ là

A. $(4;+\infty)$. **B.** $(-4;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(0;4)$.

Lời giải

Chon B

$3^{x^2-13}<27\Leftrightarrow 3^{x^2-13}<3^3\Leftrightarrow x^2-13<3\Leftrightarrow x^2-16<0\Leftrightarrow -4<x<4$.

Câu 31: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 29)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7}<4$ là

A. $(-3;3)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chon A

Ta có $2^{x^2-7}<4\Leftrightarrow x^2-7<2\Leftrightarrow -3<x<3$.

Câu 32: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 14)** Phương trình $5^{2x+1}=125$ có nghiệm là

A. $x=\frac{3}{2}$. **B.** $x=\frac{5}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chon C

Ta có: $5^{2x+1}=125\Leftrightarrow 5^{2x+1}=5^3\Leftrightarrow 2x+1=3\Leftrightarrow x=1$.

Dạng ②: Phương pháp đưa về cùng cơ số (không tham số)

Câu 33: **(ĐTK 2020-L2-Câu 3)** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

Ghi Chú!

A. $x=4$. B. $x=3$. C. $x=2$. D. $x=1$.

Lời giải

Chon A

Ta có $3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

Câu 34: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 22)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-2}=2^x$ là

A. $x=-2$. B. $x=2$. C. $x=-4$. D. $x=4$.

Lời giải

Chon B

Ta có: $2^{2x-2}=2^x \Leftrightarrow 2x-2=x \Leftrightarrow x=2$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Câu 35: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 3)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=32$ là

A. $x=3$. B. $x=\dfrac{17}{2}$. C. $x=\dfrac{5}{2}$. D. $x=2$.

Lời giải

Chon A

$2^{2x-1}=32 \Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^5 \Leftrightarrow 2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$.

Câu 36: **(ĐTK 2018-Câu 13)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<2^{x+6}$ là:

A. $0;6$ B. $-\infty;6$ C. $0;64$ D. $6;+\infty$

Lời giải

Chon B

Đặt $t=2^x$, $t>0$

Bất phương trình trở thành: $t^2-64t<0 \Leftrightarrow 0<t<64$

$\Leftrightarrow 0<2^x<64 \Leftrightarrow x<6$.

Câu 37: **(ĐTK 2019-Câu 23)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

A. $(-\infty;-1)$. B. $(3;+\infty)$.

C. $(-1;3)$. D. $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Chon C

Bất phương trình tương đương với $3^{x^2-2x}<3^3 \Leftrightarrow x^2-2x<3$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow -1<x<3$.

Câu 38: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 4)** Nghiệm phương trình $3^{2x-1}=27$ là

A. $x=5$. B. $x=1$. C. $x=2$. D. $x=4$.

Lời giải

Chon C

Ta có $3^{2x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{2x-1}=3^3 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

Ghi Chú!

Dạng ③: Phương pháp đặt ẩn phụ (không tham số)

Câu 39: (ĐTK 2020-L2-Câu 31) Tập nghiệm của bất phương trình $9^x+2.3^x-3>0$ là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=3^x, t>0$.

Khi đó, ta có: $9^x+2.3^x-3>0 \Leftrightarrow t^2+2t-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>1 \\ t<-3 \end{array}\right.$.

Do $t>0$ nên ta có: $t>1 \Leftrightarrow 3^x>1 \Leftrightarrow x>0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(0;+\infty)$.

Câu 40: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 1) Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $2t^2-3=0$. **B.** $t^2+t-3=0$. **C.** $4t-3=0$. **D.** $t^2+2t-3=0$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x+2.2^x-3=0$

Dạng ④: Tính đơn điệu của f(x), g(u) biết công thức f(x) không GTTĐ

Câu 41: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $(5^b-1)(a.2^b-5)<0$?

A. 20. **B.** 21. **C.** 22. **D.** 19.

Lời giải

Chọn B

$$(5^b-1)(a.2^b-5)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^b-1=0 \\ a.2^b-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\log_2\frac{5}{a} \end{array}\right..$$

TH1: $\begin{cases} \log_2\frac{5}{a}<0 \\ a>0 \end{cases} \Leftrightarrow a>5$.

Vì hàm số $y=a^x$ $(a>1)$ là hàm đồng biến nên

$(5^b-1)(a.2^b-5)<0 \Leftrightarrow \log_2\frac{5}{a}<b<0$.

Ghi Chú!

Yêu cầu của bài toán suy ra

$$-3\le \log_2\frac{5}{a}<-2\Leftrightarrow \frac{1}{8}\le\frac{5}{a}<\frac{1}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}a\le 40\\ a>20\end{cases}\xrightarrow{a\in\mathbb{N}^*}a\in\{21,22,....40\}.$$

TH1: $\begin{cases}\log_2\frac{5}{a}>0\\ a>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<a<5$

Vì hàm số $y=a^x\ (a>1)$ là hàm đồng biến nên

$$\left(5^b-1\right)\left(a.2^b-5\right)<0\Leftrightarrow 0<b<\log_2\frac{5}{a}.$$

Yêu cầu của bài toán suy ra

$$2\le\log_2\frac{5}{a}<3\Leftrightarrow 4\le\frac{5}{a}<8\Leftrightarrow\begin{cases}a\le\frac{5}{4}\\ a>\frac{5}{8}\end{cases}\xrightarrow{a\in\mathbb{N}^*}a=1.$$

Vậy có 21 số nguyên a thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu 42: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $\left(4^b-1\right)\left(a.3^b-10\right)<0$?

A. 182. **B.** 179. **C.** 180. **D.** 181.

Lời giải

Chọn D

Theo đề bài $a\in\mathbb{Z};a\ge 1$ và $b\in\mathbb{Z}$.

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}4^b-1<0\\ a3^b-10>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b<0\\ b>\log_3\frac{10}{a}\end{cases}$$

Vì có đúng hai số nguyên b thỏa mãn nên $b\in\{-2;-1\}$.

Do đó $-2>\log_3\frac{10}{a}\ge -3\Leftrightarrow 270\ge a>90$ nên $a\in\{91;92;...;270\}$. Có 180 giá trị của a thoả mãn trường hợp 1.

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}4^b-1>0\\ a3^b-10<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b>0\\ b<\log_3\frac{10}{a}\end{cases}$$

Vì có đúng hai số nguyên b thỏa mãn nên $b\in\{1;2\}$.

Do đó $3\ge\log_3\frac{10}{a}>2\Leftrightarrow\frac{10}{9}>a\ge\frac{10}{27}$ nên $a=1$. Có 1 giá trị của a thoả mãn trường hợp 2.

Vậy có $180+1=181$ giá trị của a thoả mãn yêu cầu của bài toán.

Ghi Chú!

Câu 43: (TN BGD 2022-MD101) Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho ứng với mỗi a có đúng ba số nguyên b thỏa mãn $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-18\right)<0$?

A. 72 **B.** 73 **C.** 71 **D.** 74

Lời giải

Chon D

TH1: $\begin{cases}3^b-3>0\\ a.2^b-18<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^b>3\\ 2^b<\dfrac{18}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b>1\\ b<\log_2\left(\dfrac{18}{a}\right)\end{cases} \Leftrightarrow 1<b<\log_2\left(\dfrac{18}{a}\right)$

Để có đúng ba số nguyên b thì

$4<\log_2\left(\dfrac{18}{a}\right)\le 5 \Leftrightarrow 8<\dfrac{18}{a}\le 32 \Leftrightarrow \dfrac{9}{16}\le a<\dfrac{9}{4}$.

Trường hợp này không có giá trị a nguyên thỏa mãn.

TH2: $\begin{cases}3^b-3<0\\ a.2^b-18>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^b<3\\ 2^b>\dfrac{18}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b<1\\ b>\log_2\left(\dfrac{18}{a}\right)\end{cases} \Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{18}{a}\right)<b<1$

Để có đúng ba số nguyên b thì

$-3\le\log_2\left(\dfrac{18}{a}\right)<-2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{8}\le\dfrac{18}{a}<\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 72<a\le 144$.

Vậy số giá trị nguyên của a là: $144-72=72$.

Câu 44: (ĐTK 2021-Câu 40) Có bao nhiêu số nguyên dương y sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x+1}-\sqrt{2}\right)\left(2^x-y\right)<0$?

A. 1024. **B.** 2047. **C.** 1022. **D.** 1023.

Lời giải

Chon D

+) TH1: $2^{x+1}<\sqrt{2} \Leftrightarrow x+1<\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{2}$

thì bất phương trình $\Leftrightarrow 2^x-y>0 \Leftrightarrow x>\log_2 y>0,\ \forall y\in\mathbb{N}^*$ nên bất phương trình vô nghiệm

+) TH2: $2^{x+1}>\sqrt{2} \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình

$\Leftrightarrow 2^x-y<0 \Leftrightarrow x<\log_2 y$

Do đó $-\dfrac{1}{2}<x<\log_2 y$, nên để sao cho ứng với mỗi y có không quá 10 số nguyên x thì $\log_2 y<10 \Leftrightarrow y<2^{10}$

Mà $y\in\mathbb{N}^*$ nên có 1023 giá trị cần tìm

Ghi Chú!

Câu 45: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Có bao nhiêu số nguyên dương a sao cho với mỗi a có đúng hai số nguyên b thỏa mãn $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)<0$

A. 34. **B.** 32. **C.** 31. **D.** 33.

Lời giải

Chọn D

TH1: $a=1\Rightarrow\left(3^b-3\right)\left(2^b-16\right)<0$.

Nếu $b\le 1$ hoặc $b\ge 4$ không thỏa mãn bpt và $b\in\{2;3\}$ thỏa mãn.

Vậy $a=1$ thỏa mãn.

TH2: $a=2\Rightarrow\left(3^b-3\right)\left(2.2^b-16\right)<0\Leftrightarrow\left(3^b-3\right)\left(2^{b+1}-16\right)<0$.

Nếu $b\le 1$ hoặc $b\ge 3$ không thỏa mãn bpt và $b=2$ thỏa mãn.

Vậy $a=2$ không thỏa mãn.

TH3: $a=3\Rightarrow\left(3^b-3\right)\left(3.2^b-16\right)<0$.

Nếu $b\le 1$ hoặc $b\ge 3$ không thỏa mãn bpt và $b=2$ thỏa mãn.

Vậy $a=3$ không thỏa mãn.

TH4: $a>3$.

Ta cần tìm a để bpt $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)<0$ có 2 nghiệm b.

 Nếu $b\ge 3\Rightarrow\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)\ge 24.(3.8-16)>0$ không thỏa mãn bpt.

 Nếu $b=2\Rightarrow\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)\ge 6(4.4-16)\ge 0$ không thỏa mãn bpt.

 Nếu $b=1$ không thỏa mãn.

 Nếu $b<1\Rightarrow\left(3^b-3\right)<0$. BPT tương đương $a.2^b-16>0$.

Hay $a>\dfrac{16}{2^b}$ có hai nghiệm b suy ra $33\le a\le 64$.

Kết hợp lại suy ra có tất cả 33 số nguyên dương a thỏa mãn.

Cách 2:

Xét $\left(3^b-3\right)\left(a.2^b-16\right)=0$. Do $a\in\mathbb{N}^*$ nên $\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\log_2\dfrac{16}{a} \end{array}\right.$.

TH1: $\log_2\dfrac{16}{a}>1\Leftrightarrow a<8$.

BPT có đúng 2 nghiệm nguyên $b\Leftrightarrow 3<\log_2\dfrac{16}{a}\le 4\Leftrightarrow 1\le a<2\Rightarrow a=1$ (thỏa mãn).

TH2: $\log_2\dfrac{16}{a}<1\Leftrightarrow a>8$.

BPT có đúng 2 nghiệm nguyên $b \Leftrightarrow -2 \le \log_2 \dfrac{16}{a} < -14 \Leftrightarrow 32 < a \le 64 \Rightarrow$ có 32 giá trị a.

Vậy có 33 giá trị của a thỏa mãn.

Dạng ⑤: Phương pháp hàm số, đánh giá (không tham số)

Câu 46: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 44)** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x \in \left(\dfrac{1}{3};5\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{15x}$.

A. 17. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

• Khi $y \le 0,$ vì $xy > -1$ và $x > \dfrac{1}{3}$ nên ta có $y > -3.$

Với $y = 0$, phương trình thành: $27^{3x^2-15x} - 1 = 0$ vô nghiệm vì

$27^{3x^2-15x} - 1 < 27^0 - 1 = 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{3};5\right)$

Với $y = -1$, phương trình thành: $27^{3x^2-16x} - (1-x) = 0$ có nghiệm vì

$g_1(x) = 27^{3x^2-16x} - (1-x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};5\right]$ và $g_1\left(\dfrac{1}{3}\right).g_1(5) < 0$.

Với $y = -2$, phương trình thành: $27^{3x^2-17x} - (1-2x) = 0$ có nghiệm vì

$g_2(x) = 27^{3x^2-16x} - (1-2x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{3};5\right]$ và $g_2\left(\dfrac{1}{3}\right).g_2(5) < 0$.

• Khi $y \ge 1,$ xét trên $\left[\dfrac{1}{3};5\right]$, ta có

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{15x} \Leftrightarrow 3x^2 - 15x = \log_{27}(1+xy) - xy$$

$$\Leftrightarrow 3x - 15 - \frac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y = 0.$$

Xét hàm $g(x) = 3x - 15 - \dfrac{\log_{27}(1+xy)}{x} + y$ trên $\left[\dfrac{1}{3};5\right]$.

Ta có

$$g'(x) = 3 + \frac{\ln(1+xy)}{x^2 \ln 27} - \frac{y}{x(1+xy)\ln 27} > 3 - \frac{1}{3x^2 \ln 3} \ge 3 - \frac{3}{\ln 3} > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{3};5\right].$$

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{1}{3};5\right]$. Vì thế phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm trên $\left(\dfrac{1}{3};5\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\dfrac{1}{3}\right)g(5) < 0.$ Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u) < u$ với mọi $u > 0$, ta có

Ghi Chú!

$$g(5)=-\frac{\log_{27}(1+5y)}{5}+y>-\frac{5y}{5\ln 27}+y>0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right)<0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right)+y-14<0 \Leftrightarrow 1\le y\le 15$ (do y là số nguyên dương).

Vậy $y\in\{-2;-1;1;2;...;15\}$ hay có 17 giá trị y thỏa đề.

Câu 47: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 47)** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{9x}$.

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

□ **Khi** $y\le 0,$ vì $xy>-1$ và $x>\frac{1}{3}$ nên ta có $y>-3.$

Với $y=0$, phương trình thành: $27^{3x^2-9x}-1=0$ vô nghiệm vì

$27^{3x^2-9x}-1<27^0-1=0, \forall x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$

Với $y=-1$, phương trình thành: $27^{3x^2-10x}-(1-x)=0$, có nghiệm vì

$g_1(x)=27^{3x^2-10x}-(1-x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ và $g_1\left(\frac{1}{3}\right).g_1(3)<0$.

Với $y=-2$, phương trình thành: $27^{3x^2-11x}-(1-2x)=0$, có nghiệm vì

$g_2(x)=27^{3x^2-11x}-(1-2x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$ và $g_2\left(\frac{1}{3}\right).g_2(3)<0$.

□ Khi $y\ge 1,$ xét trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$, ta có

$27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{9x} \Leftrightarrow 3x^2-9x=\log_{27}(1+xy)-xy$

$$\Leftrightarrow 3x-9-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y=0.$$

Xét hàm $g(x)=3x-9-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y$ trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$.

Ta có

$$g'(x)=3+\frac{\ln(1+xy)}{x^2\ln 27}-\frac{y}{x(1+xy)\ln 27}>3-\frac{1}{3x^2\ln 3}\ge 3-\frac{3}{\ln 3}>0, \forall x\in\left[\frac{1}{3};3\right].$$

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3};3\right]$. Vì thế phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};3\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(3)<0.$ Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u)<u$ với mọi $u>0$, ta có

Ghi Chú!

$$g(3)=-\frac{\log_{27}(1+3y)}{3}+y>-\frac{3y}{3\ln 27}+y>0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right)<0\Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right)+y-8<0\Leftrightarrow 1\le y\le 9$ (do y là số nguyên dương).

Vậy $y\in\{-2;-1;1;2;...;9\}$ hay có 11 giá trị y thỏa đề.

Câu 48: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 44)** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{3};6\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{18x}$?

A. 19. **B.** 20. **C.** 18. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

• Khi $y\le 0,$ vì $xy>-1$ và $x>\frac{1}{3}$ nên ta có $y>-3.$

Với $y=0$, phương trình thành: $27^{3x^2-18x}-1=0$ vô nghiệm vì

$27^{3x^2-18x}-1<27^0-1=0, \forall x\in\left(\frac{1}{3};6\right)$

Với $y=-1$, phương trình thành: $27^{3x^2-19x}-(1-x)=0$, có nghiệm vì

$g_1(x)=27^{3x^2-19x}-(1-x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};6\right]$ và $g_1\left(\frac{1}{3}\right).g_1(6)<0$.

Với $y=-2$, phương trình thành: $27^{3x^2-20x}-(1-2x)=0$, có nghiệm vì

$g_2(x)=27^{3x^2-20x}-(1-2x)$ liên tục trên $\left[\frac{1}{3};6\right]$ và $g_2\left(\frac{1}{3}\right).g_2(6)<0$.

• Khi $y\ge 1,$ xét trên $\left[\frac{1}{3};6\right]$, ta có

$27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{18x}\Leftrightarrow 3x^2-18x=\log_{27}(1+xy)-xy$

$$\Leftrightarrow 3x-18-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y=0.$$

Xét hàm $g(x)=3x-18-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y$ trên $\left[\frac{1}{3};6\right]$.

Ta có

$$g'(x)=3+\frac{\ln(1+xy)}{x^2\ln 27}-\frac{y}{x(1+xy)\ln 27}>3-\frac{1}{3x^2\ln 3}\ge 3-\frac{3}{\ln 3}>0, \forall x\in\left[\frac{1}{3};6\right].$$

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3};6\right]$. Vì thế phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};6\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(6)<0.$ Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u)<u$ với mọi $u>0$, ta có

Ghi Chú!

$$g(6) = -\frac{\log_{27}(1+6y)}{6} + y > -\frac{6y}{6\ln 27} + y > 0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 17 < 0 \Leftrightarrow 1 \le y \le 18$ (do y là số nguyên dương).

Vậy $y \in \{-2;-1;1;2;...;18\}$ hay có 20 giá trị y thỏa đề.

Cách 2.

Giả sử y là một trong những số nguyên thỏa mãn yêu cầu, lúc đó ta xét phương trình

$$27^{3x^2+xy} = (1+xy)27^{18x}$$

trên $D = \left(\frac{1}{3};6\right) \cap \{x \in \mathbb{R} : xy > -1\}$, và trên D nó tương đương với $f(x) = 0$, trong đó

$$f(x) = 3x^2 + (y-18)x - \frac{1}{3}\log_3(1+xy).$$

Ta có vài tính toán sau

$$f'(x) = 6x + y - 18 - \frac{y}{3(1+xy)\ln 3},\ f''(x) = 6 + \frac{y^2}{(1+xy)^2 \ln 3}.$$

Nếu $y < 0$, khi ấy vì cần có nghiệm $x \in \left(\frac{1}{3};3\right)$ nên có ngay $y \ge -2$, lúc ấy $D = \left(\frac{1}{3};-\frac{1}{y}\right)$ trên D ta có

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1+\frac{1}{3}y\right) \le -6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1-\frac{2}{3}\right) < 0.$$

Kết hợp $\lim_{x\to-\frac{1}{y}^-} f(x) = +\infty$ và việc f liên tục trên D cho thấy f có điểm triệt tiêu trên D, nghĩa là trường hợp này cho ta $y \in \{-2,-1\}$ thỏa yêu cầu.

Nếu $y = 0$, ta có $f(x) = 3x^2 - 18x < 0$ với mọi $x \in D$, vì thế loại.

Nếu $y \ge 19$, lúc đó có

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f'(x) = y - 16 - \frac{y}{(3+y)\ln 3} > y - 17 > 0.$$

Kết hợp việc $f'(x)$ tăng ngặt trên D, cho ta f tăng ngặt trên D và trên D có

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1+\frac{1}{3}y\right)$$

Xét $g(y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}y - 6 - \frac{1}{3}\log_3\left(1+\frac{1}{3}y\right)$ trên $[10;+\infty)$, ta có

Ghi Chú!

$$g'(y)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(3+y)}>0, g(19)=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\log_3\left(1+\frac{19}{3}\right)>0$$

Vậy, $g(y)>0$ với mỗi $y\ge 19$, cho thấy là $f(x)>0$ với mọi $x\in D$.

Nếu $1\le y\le 18$, thế thì vì $g(18)=\frac{1-\log_3 7}{3}<0$ kết hợp tính tăng ngặt của g trên $[1;18]$ ta có $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x)=g(y)=\frac{1}{3}+y-9-\frac{1}{3}\log_3\left(1+\frac{1}{3}y\right)<0$.

Còn, theo bất đẳng thức số e, ta có

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=6y-\frac{1}{3}\log_3(1+6y)>6y-\ln(1+6y)>0.$$

Đến đây, theo tính liên tục của f, ta thấy nó triệt tiêu trên D.

Tóm lại $y\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ và $-2\le y\le 18$.

Câu 49: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 45)** Có bao nhiêu số nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{12x}$?

A. 14. **B.** 27. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Chon A

- **TH1**: $y\le 0$, vì $xy>-1$ và $x>\frac{1}{3}$ nên ta có $y>-3$.

Ta có thể kiểm tra trực tiếp để xem xét có nhận $y=-2, y=-1, y=0$ hay không.

+) Nếu $y=0\Rightarrow 27^{3x^2-12x}=1\Rightarrow 3x^2-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin\left(\frac{1}{3};4\right)\\ x=4\notin\left(\frac{1}{3};4\right)\end{array}\right.$ (trường hợp này loại).

+) Nếu $y=-1$ thỏa mãn.

+) Nếu $y=-2$ thỏa mãn.

- **TH2**: Khi $y\ge 1$, ta có:

$27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{12x}\Leftrightarrow 3x^2-12x=\log_{27}(1+xy)-xy$

$\Leftrightarrow 3x-12-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y=0.$

Xét hàm $g(x)=3x-12-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y$ trên $\left[\frac{1}{3};4\right]$.

Ta có

$$g'(x)=3+\frac{\ln(1+xy)}{x^2\ln 27}-\frac{y}{x(1+xy)\ln 27}>3-\frac{1}{3x^2\ln 3}\ge 3-\frac{3}{\ln 3}>0, \forall x\in\left[\frac{1}{3};4\right].$$

Ghi Chú!

Do đó, hàm $g(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{3};4\right]$. Vì thế phương trình $g(x)=0$ có nghiệm trên $\left(\frac{1}{3};4\right)$ khi và chỉ khi $g\left(\frac{1}{3}\right)g(4)<0$.

Áp dụng bất đẳng thức $\ln(1+u)<u$ với mọi $u>0$, ta có

$$g(4)=-\frac{\ln(1+4y)}{18\ln 3}+y>-\frac{y}{3\ln 3}+y>0.$$

Do đó $g\left(\frac{1}{3}\right)<0\Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right)+y-11<0\Leftrightarrow 1\le y\le 12$ (do y là số nguyên dương).

Vậy có 14 giá trị nguyên y sao cho tồn tại $x\in\left(\frac{1}{3};4\right)$ thỏa mãn $27^{3x^2+xy}=(1+xy).27^{12x}$.

Dạng ⑥: Phương trình mũ có chứa tham số

Câu 50: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 19)** Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực.

A. $m\ge 1$ **B.** $m\ge 0$ **C.** $m>0$ **D.** $m\ne 0$

Lời giải

Chon C

Để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực thì $m>0$.

Câu 51: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 31)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt

A. $m\in(-\infty;1)$ **B.** $m\in(0;+\infty)$ **C.** $m\in(0;1]$ **D.** $m\in(0;1)$

Lời giải

Chon D

Phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0\Leftrightarrow (2^x)^2-2.2^x+m=0$, (1).

Đặt $t=2^x>0$. Phương trình (1) trở thành: $t^2-2t+m=0$, (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt và lớn hơn 0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-m>0\\ -\frac{-2}{1}>0\\ \frac{m}{1}>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<1.$$

Câu 52: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 35)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 7 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Đặt $5^x = t\ (t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 - 5m.t + 7m^2 - 7 = 0\ (*)$.

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta = -3m^2 + 28 > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{28}{3}} < m < \sqrt{\dfrac{28}{3}} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \sqrt{\dfrac{28}{3}}$$. Có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 53: **(ĐTN 2017-Câu 20)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực m để phương trình $6^x + (3-m)2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

A. $[3;4]$ **B.** $[2;4]$ **C.** $(2;4)$ **D.** $(3;4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $6^x + (3-m)2^x - m = 0\ (1) \Leftrightarrow \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1} = m$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{6^x + 3.2^x}{2^x + 1}$ xác định trên $\mathbb{R}$, có

$f'(x) = \dfrac{12^x.\ln 3 + 6^x.\ln 6 + 3.2^x.\ln 2}{(2^x+1)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Suy ra $0 < x < 1 \Leftrightarrow f(0) < f(x) < f(1) \Leftrightarrow 2 < f(x) < 4$ vì $f(0) = 2,\ f(1) = 4.$

Vậy phương trình (1) có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi $m \in (2;4)$.

Câu 54: **(THPTQG 2018-MĐ104-Câu 28)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 8. **B.** 4. **C.** 19. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

$9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0(1) \Leftrightarrow (3^x)^2 - 3m.3^x + 3m^2 - 75 = 0$

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$. Phương trình trở thành: $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0(2)$

(1) có hai ngiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm dương phân biệt

Ghi Chú!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 300 - 3m^2 > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 10 \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 10$$

Do m nguyên nên $m = \{6;7;8;9\}$.

Câu 55: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 34)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?

A. 13. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 4^x$, $t > 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 4mt + 5m^2 - 45 = 0\ (*)$
.

Với mỗi nghiệm $t > 0$ của phương trình $(*)$ sẽ tương ứng với duy nhất một nghiệm x của phương trình ban đầu. Do đó, yêu cầu bài toán tương đương phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt. Khi đó

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 45 > 0 \\ 4m > 0 \\ 5m^2 - 45 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\sqrt{5} < m < 3\sqrt{5} \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 3\sqrt{5}$$. Do $m \in \mathbb{Z}$

nên $m \in \{4;5;6\}$.

Câu 56: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 33)** Gọi S là tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi S có bao nhiêu phần tử.

A. 3. **B.** 5. **C.** 2 **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m^2 - 5 = 0$ (1)

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình (1) thành: $t^2 - 2m.t + 2m^2 - 5 = 0$ (2)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}}\ hay\ m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}$$

Do m nguyên nên $m = 2$. Vậy S chỉ có một phần tử

Ghi Chú!

Câu 57: **(ĐTK 2018-Câu 34)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2.12^x + (m-2).9^x = 0$ có nghiệm dương?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Phương trình $16^x - 2.12^x + (m-2).9^x = 0$ có nghiệm $\forall x \in (0;+\infty)$

Phương trình tương đương $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2.\left(\frac{4}{3}\right)^x + (m-2) = 0$ có nghiệm $\forall x \in (0;+\infty)$

Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x, t \in (1;+\infty)$

$\Rightarrow t^2 - 2.t + (m-2) = 0, \forall t \in (1;+\infty)$

$\Leftrightarrow t^2 - 2.t = 2 - m, \forall t \in (1;+\infty)$

Xét $y = t^2 - 2.t$

t	1		$+\infty$
y'	0	$+$	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có nghiệm $\forall t \in (1;+\infty)$ khi $2 - m > -1 \Leftrightarrow m < 3$

Câu 58: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 31)** Tìm giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 2.3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

A. $m = 6$ **B.** $m = -3$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $9^x - 2.3^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 6.3^x + m = 0$.

Phương trình có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - m > 0 \\ 3^{x_1} + 3^{x_2} = 6 > 0 \Leftrightarrow m = 3. \\ 3^{x_1+x_2} = 3 = m \end{cases}$$

§6-PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Ghi Chú!

A. Tóm tắt lý thuyết cơ bản

1. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

①. ***Định nghĩa: Phương trình lôgarit*** là phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

②. ***Phương trình lôgarit cơ bản***: cho $a,\ b>0,\ a\ne 1$

- Phương trình lôgarit cơ bản có dạng: $\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b$

③. ***Phương pháp giải phương lôgarit***

- ***Đưa về cùng cơ số:***

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ f(x)=g(x)\end{cases},\ \text{với mọi } 0<a\ne 1$$

- ***Đặt ẩn phụ***
- ***Mũ hóa***
- ***Phương pháp hàm số và đánh giá***

2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

①. ***Định nghĩa***

- ***Bất phương trình lôgarit*** là bất phương trình có chứa ẩn số trong biểu thức dưới dấu lôgarit.

②. ***Bất phương trình lôgarit cơ bản:*** *cho* $a,\ b>0,\ a\ne 1$

- Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng:
  $\log_a f(x)>b;\ \log_a f(x)\ge b;\ \log_a f(x)<b;\ \log_a f(x)\le b$

③. ***Phương pháp giải phương trình và bất phương trình lôgarit***

- *Đưa về cùng cơ số*
  - ❖ Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ f(x)>g(x)\end{cases}$
  - ❖ Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$
- *Đặt ẩn phụ*
- *Mũ hóa*
- *Phương pháp hàm số và đánh giá*

B. Dạng toán cơ bản

Dạng ①: PT,BPT loga cơ bản, gần cơ bản(không tham số)

Câu 1: **(ĐMH 2017-Câu 14)** Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

A. $x>3$ **B.** $\frac{1}{3}<x<3$ **C.** $x<3$ **D.** $x>\frac{10}{3}$

Lời giải

Chọn A

Đkxđ: $3x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3$ (t/m đk).

Vậy bpt có nghiệm $x>3$.

Câu 2: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 9)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$.

A. $x=-4$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=3$. **D.** $x=5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_2(1-x)=2 \Leftrightarrow 1-x=4 \Leftrightarrow x=-3$.

Câu 3: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 4)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1)=\frac{1}{2}$

A. $x=-6$. **B.** $x=6$. **C.** $x=4$. **D.** $x=\frac{23}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-1$

Phương trình $\log_{25}(x+1)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x+1=5 \Leftrightarrow x=4$.

Câu 4: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 3)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1)=3$ là

A. $\{-3;3\}$. **B.** $\{-3\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_2(x^2-1)=3 \Leftrightarrow x^2-1=8 \Leftrightarrow x=\pm 3$.

Câu 5: **(ĐTK 2020-L1-Câu 6)** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=2$ là

A. $x=3$. **B.** $x=5$. **C.** $x=\frac{9}{2}$. **D.** $x=\frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Ta có $\log_3(2x-1)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ 2x-1=3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

Câu 6: (ĐTK 2020-L2-Câu 16) Tập nghiệm của bất phương trình $\log x \geq 1$ là

A. $(10;+\infty)$. B. $(0;+\infty)$. C. $[10;+\infty)$. D. $(-\infty;10)$.

Ghi Chú!

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$**. Ta có** $\log x\ge 1\Leftrightarrow \log x\ge \log 10\Leftrightarrow x\ge 10$**.**

Câu 7: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 3)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)=2$ là

A. $x=8$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định $x>1$.

$\log_3(x-1)=2\Leftrightarrow x-1=3^2\Leftrightarrow x-1=9\Leftrightarrow x=10$.

Câu 8: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 8)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>1$

Ta có: $\log_2(x-1)=3\Leftrightarrow \log_2(x-1)=\log_2 2^3=8\Leftrightarrow x-1=8\Leftrightarrow x=9$

Câu 9: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 22)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=2$ là

A. $x=11$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $x=8$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện : $x-2>0\Leftrightarrow x>2$

Ta có: $\log_3(x-2)=2\Leftrightarrow x-2=3^2\Leftrightarrow x=11$ (Thỏa mãn điều kiện) $x>2$.

Vậy phương trình $\log_3(x-2)=2$ có nghiệm là $x=11$.

Câu 10: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 10)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8)=5$ là

A. $x=17$. **B.** $x=24$. **C.** $x=2$. **D.** $x=40$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x+8)=5\Leftrightarrow x+8=32\Leftrightarrow x=24$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=24$.

Câu 11: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 1)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+9)=5$ là

A. $x=41$. **B.** $x=23$. **C.** $x=1$. **D.** $x=16$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x+9>0\Leftrightarrow x>-9$.

$\log_2(x+9)=5\Leftrightarrow x+9=32\Leftrightarrow x=23$ (thỏa điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm $x=23$.

Ghi Chú!

Câu 12: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 17)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6)=5$ là

A. $x=4$. **B.** $x=19$. **C.** $x=38$. **D.** $x=26$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$

Ta có: $\log_2(x+6)=5 \Leftrightarrow x+6=2^5 \Leftrightarrow x=26$ (thỏa mãn điều kiện)

Câu 13: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 36)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\ge 3$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$.

C. $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(36-x^2)\ge 3 \Leftrightarrow 36-x^2\ge 27 \Leftrightarrow 9-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-3;3]$.

Câu 14: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 39)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\ge 3$ là

A. $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$.

C. $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_3(36-x^2)\ge 3 \Leftrightarrow 36-x^2\ge 27 \Leftrightarrow 9-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[-3;3]$.

Câu 15: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 24)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7)=5$ là

A. $x=18$. **B.** $x=25$. **C.** $x=39$. **D.** $x=3$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2(x+7)=5 \Leftrightarrow x+7=2^5 \Leftrightarrow x=25.$

Câu 16: **(ĐTK 2021-Câu 13)** Nghiệm của phương trình $\log_2(3x)=3$

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\dfrac{8}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$\log_2(3x)=3 \Leftrightarrow 3x=2^3 \Leftrightarrow x=\dfrac{8}{3}$ (nhận)

Ghi Chú!

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{8}{3}$

Câu 17: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 15)** Nghiệm của phương trình $\log_3(5x)=2$ là

A. $x=\dfrac{8}{5}$. **B.** $x=9$. **C.** $x=\dfrac{9}{5}$. **D.** $x=8$.

Lời giải

Chọn C

$\log_3(5x)=2\Leftrightarrow 5x=3^2\Leftrightarrow x=\dfrac{9}{5}$.

Câu 18: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 27)** Nghiệm của phương trình $\log_5(3x)=2$ là

A. 25. **B.** $\dfrac{32}{3}$. **C.** 32. **D.** $\dfrac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_5(3x)=2\Leftrightarrow\begin{cases}3x>0\\3x=5^2\end{cases}\Leftrightarrow 3x=5^2\Leftrightarrow x=\dfrac{25}{3}$.

Câu 19: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 17)** Nghiệm của phương trình $\log_2(5x)=3$ là

A. $x=\dfrac{8}{5}$. **B.** $x=\dfrac{9}{5}$. **C.** $x=8$. **D.** $x=9$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_2(5x)=3\Leftrightarrow 5x=2^3\Leftrightarrow 5x=8\Leftrightarrow x=\dfrac{8}{5}$.

Câu 20: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x+1)>2$ là

A. $(24;+\infty)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $(25;+\infty)$. **D.** $(31;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\log_5(x+1)>2\Leftrightarrow x+1>5^2\Leftrightarrow x>24$.

Vậy tập hợp nghiệm của bất phương trình là $S=(24;+\infty)$.

Câu 21: **(DE TN BGD 2022-MD 103)** Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0$ là

A. $x=\dfrac{3}{4}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\dfrac{1}{2}$. **D.** $x=\dfrac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ghi Chú!

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0 \Leftrightarrow 2x-1=1 \Leftrightarrow x=1$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=1$.

Câu 22: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0$ là

A. $x=1$. **B.** $x=\frac{3}{4}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Có $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ 2x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy nghiệm phương trình đã cho là $x=1$.

Câu 23: **(DE MH BGD 2023 - Câu 21)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log(x-2)>0$ là

A. $(2;3)$ **B.** $(-\infty;3)$ **C.** $(3;+\infty)$ **D.** $(12;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log(x-2)>0 \Leftrightarrow x-2>10^0 \Leftrightarrow x>3$.

Câu 24: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 1]** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<8$ là

A. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^{2x}<8 \Leftrightarrow 2^{2x}<2^3 \Leftrightarrow 2x<3 \Leftrightarrow x<\frac{3}{2}$.

Câu 25: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 23]** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x)\ge\log_3 2$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện : $x>0$.

Ta có: $\log_3(2x)\ge\log_3 2 \Leftrightarrow 2x\ge 2 \Leftrightarrow x\ge 1$.

Câu 26: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 1]** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<8$ là

A. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

Ta có $2^{2x} < 8 \Leftrightarrow 2^{2x} < 2^3 \Leftrightarrow 2x < 3 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{2}$.

Câu 27: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 23]Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x) \geq \log_3 2$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện : $x > 0$.

Ta có: $\log_3(2x) \geq \log_3 2 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Câu 28: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 26] Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > \log_2 5$ là

A. $\left(\dfrac{3}{5};+\infty\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{5}{3}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{3}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\log_2(3x) > \log_2 5 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\dfrac{5}{3};+\infty\right)$.

Câu 29: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 3] Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(2x) \geq \log_3 2$ là

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $\log_3(2x) \geq \log_3 2 \Leftrightarrow 2x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 1$

Câu 30: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 14] Với b, c là hai số thực dương tuỳ ý thoả mãn $\log_5 b \geq \log_5 c$, khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b \geq c$. **B.** $b > c$. **C.** $b < c$. **D.** $b \leq c$.

Lời giải

Chọn A

$\log_5 b \geq \log_5 c \Leftrightarrow b \geq c$

Câu 31: (ĐMH 2017-Câu 12) Giải phương trình $\log_4(x-1) = 3$.

A. $x = 63$ **B.** $x = 65$ **C.** $x = 80$ **D.** $x = 82$

Lời giải

Chọn B

ĐK: $\Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Phương trình $\log_4(x-1) = 3 \Leftrightarrow x-1 = 4^3 \Leftrightarrow x = 65$.

Ghi Chú!

Câu 32: **(ĐTN 2017-Câu 17)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$

A. $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;2)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $S=(-1;2)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x>\frac{1}{2}$ $(*)$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\Leftrightarrow x+1>2x-1\Leftrightarrow x-2<0\Leftrightarrow x<2$

Kết hợp $(*)$ $\Rightarrow S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

Câu 33: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 5)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5)=4$.

A. $x=21$ **B.** $x=3$ **C.** $x=11$ **D.** $x=13$

Lời giải

Chọn A

ĐK: $x-5>0\Leftrightarrow x>5\Rightarrow\log_2(x-5)=4\Leftrightarrow x-5=16\Leftrightarrow x=21$

Câu 34: **(THPTQG 2018-MĐ103-Câu 13)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-7)=2$ là

A. $\{-\sqrt{15};\sqrt{15}\}$. **B.** $\{-4;4\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{-4\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x^2-7>0$

$\log_3(x^2-7)=2\Leftrightarrow x^2-7=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-4\end{array}\right.$. So với điều kiện ta nhận cả 2 nghiệm.

Câu 35: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 7)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2)=3$ là

A. $x=6$. **B.** $x=8$. **C.** $x=11$. **D.** $x=10$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Xét phương trình $\log_2(x-2)=3\Leftrightarrow x-2=2^3\Leftrightarrow x=10$.

Câu 36: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 30)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1}<8$ là

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ghi Chú!

Ta có $2^{x^2-1}<8 \Leftrightarrow 2^{x^2-1}<2^3 \Leftrightarrow x^2-1<3 \Leftrightarrow x^2-4<0 \Leftrightarrow -2<x<2$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;2)$.

Câu 37: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 38)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(18-x^2)\ge 2$ là

A. $(-\infty;3]$. **B.** $(0;3]$.
C. $[-3;3]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $18-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-3\sqrt{2};3\sqrt{2})$ (*).

Khi đó ta có: $\log_3(18-x^2)\ge 2 \Leftrightarrow 18-x^2\ge 9 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Kết hợp với điều kiện (*), ta được tập ngiệm của bất phương trình đã cho là $[-3;3]$.

Câu 38: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 36)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2$ là

A. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$.
C. $(0;2]$. **D.** $[-2;2]$.

Lời giải

Chọn D

$\log_3(13-x^2)\ge 2 \Leftrightarrow 13-x^2\ge 9 \Leftrightarrow x^2\le 4 \Leftrightarrow -2\le x\le 2$

Câu 39: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 36)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2)\ge 3$ là

A. $(-\infty;2]$. **B.** $[-2;2]$.
C. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;2]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_3(31-x^2)\ge 3 \Leftrightarrow \begin{cases}31-x^2>0\\31-x^2\ge 3^3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{31}<x<\sqrt{31}\\-2\le x\le 2\end{cases} \Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

Câu 40: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 26)** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x)=2$ là

A. $x=\dfrac{9}{2}$. **B.** $x=9$. **C.** $x=4$. **D.** $x=8$

Lời giải

Chọn A

$\log_3(2x)=2 \Leftrightarrow 2x=3^2 \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{2}$.

Ghi Chú!

Dạng ②: Phương pháp đưa về cùng cơ số (không tham số)

Câu 41: **(ĐTK 2017-Câu 22)** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$.

A. $S=\{-3;3\}$ **B.** $S=\{4\}$ **C.** $S=\{3\}$ **D.** $S=\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\}$

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>1$. Phương trình đã cho trở thành $\log_2(x^2-1)=3 \Leftrightarrow x^2-1=8$ $\Leftrightarrow x=\pm 3$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm duy nhất của phương trình là $x=3 \Rightarrow S=\{3\}$.

Câu 42: **(THPTQG 2017-MĐ102-Câu 30)** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

A. $S=\{2+\sqrt{5}\}$ **B.** $S=\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\}$

C. $S=\{3\}$ **D.** $S=\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Phương trình tương đương

$$\log_{\sqrt{2}}(x-1)-\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+1)=1 \Leftrightarrow 2\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_{\sqrt{2}}(x+1)+\log_{\sqrt{2}}2$$

$$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{2}}(x-1)^2=\log_{\sqrt{2}}2(x+1) \Leftrightarrow x^2-2x+1=2x+2$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{5}\,(L) \\ x=2+\sqrt{5} \end{array}\right..$$

Câu 43: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 11)** Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

A. $S=\{4\}$. **B.** $S=\{3\}$. **C.** $S=\{-2\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>1$.

$$\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1 \Leftrightarrow \log_3\frac{2x+1}{x-1}=1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1}=3 \Leftrightarrow x=4.$$

Ghi Chú!

Câu 44: (ĐTK 2018-Câu 27) Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x = \frac{2}{3}$ bằng

A. $\frac{82}{9}$. **B.** $\frac{80}{9}$. **C.** 9. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3 .\frac{1}{2}.\log_3 x.\frac{1}{3}\log_3 x.\frac{1}{4}\log_3 x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow (\log_3 x)^4 = 16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2\\ \log_3 x = -2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 9\\ x = \frac{1}{9}\end{array}\right.$$

.

Câu 45: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 26) Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn D

- $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$ (1)
- (1) $\Leftrightarrow \log_3\left[3.(x+1)\right]=\log_3(4x+1) \Leftrightarrow 3x+3=4x+1>0 \Leftrightarrow x=2$.
- Vậy (1) có một nghiệm $x=2$.

Câu 46: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 16) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$ là

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1\\ x>1\end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Phương trình đã cho tương đương với.

$\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$.

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)=\log_2 2.(x-1) \Leftrightarrow x+1=2x-2 \Leftrightarrow x=3$ (Thỏa mãn).

Câu 47: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 24) Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=1$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện phương trình: $x>\frac{1}{3}$.

$\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1) \Leftrightarrow \log_2\left[(x+1).2\right]=\log_2(3x-1) \Leftrightarrow 2(x+1)=3x-1 \Leftrightarrow x=3$

.

Ta có $x=3$ (Thỏa mãn điều kiện phương trình)

Vậy nghiệm phương trình là $x=3$.

Ghi Chú!

Câu 48: **(THPTQG 2019-MĐ104-Câu 27)** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$ là

A. $x=4$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}2x+1>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$

$\Leftrightarrow \log_3(2x+1)=\log_3\left[3\cdot(x-1)\right]$

$\Leftrightarrow 2x+1=3x-3$

$\Leftrightarrow x=4$ (nhận).

Câu 49: **(DE MH BGD 2023 - Câu 39)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\log_3\dfrac{x^2-16}{343}<\log_7\dfrac{x^2-16}{27}$?

A. 193. **B.** 92. **C.** 186. **D.** 184.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Ta có:

$$\log_3\frac{x^2-16}{343}<\log_7\frac{x^2-16}{27}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 7.\left[\log_7\left(x^2-16\right)-3\right]<\log_7\left(x^2-16\right)-3\log_7 3$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 7-1).\log_7\left(x^2-16\right)<3\log_3 7-3\log_7 3$$

$$\Leftrightarrow \log_7\left(x^2-16\right)<\frac{3\left(\log_3 7-\log_7 3\right)}{\log_3 7-1}$$

$$\Leftrightarrow \log_7\left(x^2-16\right)<3\left(1+\log_7 3\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_7\left(x^2-16\right)<\log_7 21^3$$

$$\Leftrightarrow x^2-16<21^3$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{9277}<x<\sqrt{9277}$$

Kết hợp điều kiện ta có $x\in\{-96;-95;...;-5;5;...;95;96\}$. Vậy có 184 số nguyên x thỏa mãn.

Dạng ③: Phương pháp đặt ẩn phụ (không tham số)

Câu 50: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 17)** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\geq 0$.

A. $(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$ **B.** $S=[2;16]$

C. $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$ **D.** $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>0$

Bpt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge 4\\ \log_2 x\le 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 16\\ x\le 2\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Câu 51: **(DE MH BGD 2023 - Câu 34)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\ln^2 x+2\ln x-3=0$ bằng

A. $\frac{1}{e^3}$. **B.** -2. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{e^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\ln^2 x+2\ln x-3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ (\ln x-1)(\ln x+3)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x=e\\ x=e^{-3}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=e\\ x=e^{-3}\end{array}\right.$

Vậy $x_1.x_2=\frac{1}{e^2}$.

Dạng ④: Phương pháp mũ hóa (không tham số)

Câu 52: **(ĐTK 2019-Câu 8)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-x+2)=1$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\log_2(x^2-x+2)=1 \Leftrightarrow x^2-x+2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\end{array}\right.$.

Dạng ⑤: PP phân tích thành nhân tử (không tham số)

Câu 53: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 39]** Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn điều kiện $(7^x-49)(\log_3^2 x-7\log_3 x+6)<0$?

A. 728. **B.** 726. **C.** 725. **D.** 729.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$

Ghi Chú!

$$\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7^x-49>0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6<0\end{cases}\\ \begin{cases}7^x-49<0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6>0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7^x>49\\ 1<\log_3 x<6\end{cases}\\ \begin{cases}7^x<49\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<1\\ \log_3 x>6\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\ 3<x<3^6\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ \left[\begin{array}{l}0<x<3\\ x>3^6\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2\\ 3<x<3^6\end{array}\right.$$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;4;5;...;728\}$

Vậy có 726 số thỏa mãn.

Câu 54: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 39] Có bao nhiêu số nguyên x thoả mãn điều kiện $\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0$?

A. 728. **B.** 726. **C.** 725. **D.** 729.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$

$$\left(7^x-49\right)\left(\log_3^2 x-7\log_3 x+6\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7^x-49>0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6<0\end{cases}\\ \begin{cases}7^x-49<0\\ \log_3^2 x-7\log_3 x+6>0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}7^x>49\\ 1<\log_3 x<6\end{cases}\\ \begin{cases}7^x<49\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<1\\ \log_3 x>6\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>2\\ 3<x<3^6\end{cases}\\ \begin{cases}x<2\\ \left[\begin{array}{l}0<x<3\\ x>3^6\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<2\\ 3<x<3^6\end{array}\right.$$

Mà $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{1;4;5;...;728\}$

Vậy có 726 số thỏa mãn.

Câu 55: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 41]Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^x-16\right)\left(\log_3^2 x-9\log_3 x+18\right)<0$?

A. 704. **B.** 701. **C.** 707. **D.** 728.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Điều kiện: $x>0$.

Ta có $\left(2^x-16\right)\left(\log_3^2 x-9\log_3 x+18\right)<0$.

Trường hợp 1.

$$\begin{cases}2^x-16>0\\ \log_3^2 x-9\log_3 x+18<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ 3<\log_3 x<6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ 27<x<729\end{cases}\Leftrightarrow 27<x<729$$

Vì x nguyên nên $x=28;29;...;728$, có 701 giá trị nguyên của x.

Trường hợp 2.

$$\begin{cases}2^x-16<0\\ \log_3^2 x-9\log_3 x+18>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<3\\ \log_3 x>6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<4\\ \left[\begin{array}{l}x<27\\ x>729\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x<4$$

Vì x nguyên nên $x=1;2;3$, có 3 giá trị nguyên của x.

Vậy có tất cả 704 giá trị nguyên của x.

Câu 56: **[MD 104-TN BGD 2023-CÂU 39]** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(5^x-125\right)\left(\log_3{}^2 x-8\log_3 x+15\right)<0$

A. 242. **B.** 217. **C.** 220. **D.** 215.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình

$\left(5^x-125\right)\left(\log_3{}^2 x-8\log_3 x+15\right)<0$

$Dk: x>0$

$$pt\Leftrightarrow\begin{cases}5^x-125<0\\ \log_3{}^2 x-8\log_3 x+15>0\end{cases} hay \begin{cases}5^x-125>0\\ \log_3{}^2 x-8\log_3 x+15<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5^x<5^3\\ \left[\begin{array}{l}\log_3 x<3\\ \log_3 x>5\end{array}\right.\end{cases} hay \begin{cases}5^x>5^3\\ 3<\log_3 x<5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x<3\\ \left[\begin{array}{l}x<27\\ x>243\end{array}\right.\end{cases} hay \begin{cases}x>3\\ 27<x<243\end{cases}\Leftrightarrow x<3\ hay\ 27<x<243$$

x nguyên $\Rightarrow x=1,2,28,29,...,242$ có 217 số.

Dạng ⑥: Phương pháp hàm số, đánh giá (không tham số)

Câu 57: **(ĐTK 2017-Câu 35)** Hỏi phương trình $3x^2-6x+\ln\left(x+1\right)^3+1=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>-1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2-6x+3\ln(x+1)+1=0$.

Xét hàm số $y=3x^2-6x+3\ln(x+1)+1$ liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

$y'=6(x-1)+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6x^2-3}{x+1}$. $y'=0\Leftrightarrow 2x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện).

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\searrow$	$f(\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Câu 58: **(ĐTK 2020-L1-Câu 47)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

A. 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$. (1)

Đặt $\log_3(x+1)=t\Rightarrow x+1=3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t+3^t=2y+3^{2y}$ (2)

Xét hàm số $f(u)=u+3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u)=1+3^u\ln 3>0,\forall u\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y$

$\Rightarrow\log_3(x+1)=2y\Leftrightarrow x+1=9^y\Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020\Rightarrow 0\le 9^y-1\le 2020\Leftrightarrow 1\le 9^y\le 2021\Leftrightarrow 0\le y\le\log_9 2021$

$(\log_9 2021\approx 3,464)$

Do $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của x

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

Cách 2:

Ghi Chú!

Ta có: $\log_3\ 3x+3\ +x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3\ x+1\ +x+1=2y+3^{2y}$

Xét hàm số $f\ x\ =\log_3\ x+1\ +x+1$ với $x\in\ 0;2020$.

Ta có $f'\ x\ =\dfrac{1}{x+1\ \ln 3}+1>0, \forall x\in x\in\ 0;2020\ \Rightarrow$ Hàm số $f\ x$ đồng biến trên đoạn $0;2020$.

Suy ra

$f\ 0\ \le f\ x\ =\log_3\ x+1\ +x+1\le f\ 2020\ \Leftrightarrow 1\le f\ x\ \le \log_2 2021+2021$

$\Rightarrow 1\le 2y+9^y\le \log_3 2021+2021<2028$

Nếu $y<0\Rightarrow 2y+9^y<9^y<9^0=1\Rightarrow y\ge 0$

Khi đó

$y\in\mathbb{N}\Rightarrow\ 2y+9^y\ \in\mathbb{N}\Rightarrow 2y+9^y\le 2027\Rightarrow 9^y\le 2027-2y\le 2027$

$\Rightarrow y\le\log_9 2027\approx 3,465\ \Rightarrow y\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$

$\Rightarrow y\in\ 0;1;2;3$. Do $f\ x$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của y chỉ cho 1 giá trị của x.

+) $y=0\Rightarrow\log_3\ x+1\ +x+1=1\Leftrightarrow x=0$

+) $y=1\Rightarrow\log_3\ x+1\ +x+1=11\Leftrightarrow\log_3\ x+1\ +x=10\Leftrightarrow x=8$

+) $y=2\Rightarrow\log_3\ x+1\ +x+1=85\Leftrightarrow\log_3\ x+1\ +x=84\Leftrightarrow x=80$

+) $y=3\Rightarrow\log_3\ x+1\ +x+1=735\Leftrightarrow\log_3\ x+1\ +x=734\Leftrightarrow x=729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $x;y$.

Câu 59: **(THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 49)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

A. 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x+y>0$ và $x^2+y>0$. Khi đó

$\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge\left(x+y\right)^{\log_3 4}$

$\Leftrightarrow x^2-x\ge\left(x+y\right)^{\log_3 4}-\left(x+y\right)\ (1)$

Đặt $t=x+y$ thì (1) được viết lại là $x^2-x\ge t^{\log_3 4}-t\ \ (2)$

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 728 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình (2) có không quá 728 nghiệm t.

Ghi Chú!

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x\ge 729^{\log_3 4}-729=3367$ thì sẽ có ít nhất 729 nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x<3367 \Leftrightarrow -57\le x\le 58$ (do x nguyên).

Vậy có tất cả $58+58=116$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 60: **(THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 49)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn $\log_4(x^2+y)\ge \log_3(x+y)$?

A. 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x+y>0$ và $x^2+y>0$. Khi đó

$$\log_4(x^2+y)\ge \log_3(x+y) \Leftrightarrow x^2+y\ge 4^{\log_3(x+y)} \Leftrightarrow x^2+y\ge (x+y)^{\log_3 4}$$

$$\Leftrightarrow x^2-x>(x+y)^{\log_3 4}-(x+y)\ (1)$$

Đặt $t=x+y$ thì (1) được viết lại là $x^2-x>t^{\log_3 4}-t$ (2)

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 242 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1)

Tương đương với bất phương trình (2) có không quá 242 nghiệm t.

Nhận thấy $f(t)=t^{\log_3 4}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>243^{\log_3 4}-243=781$ thì sẽ có ít nhất 243 nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\le 781 \Leftrightarrow -27\le x\le 28$ (do x nguyên).

Vậy có tất cả $28+28=56$ số nguyên x thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 61: **(THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 49)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y)\ge \log_2(x+y)$?

A. 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

Lời giải

Chọn D

❄ Cách 1

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0 \end{cases}$.

Đặt $k=x+y\in\mathbb{Z}^+$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x^2+y)-\log_2(x+y)\ge 0$.

Suy ra $f'(y)=\dfrac{1}{(x^2+y).\ln 3}-\dfrac{1}{(x+y).\ln 2}<0 \Rightarrow f(y)$ nghịch biến.

Ghi Chú!

Xét hàm số $g(k)=f(k-x)=\log_3(x^2+k-x)-\log_2 k$, $k\in\mathbb{Z}^+$.

Do hàm số f nghịch biến nên hàm số g cũng nghịch biến.

Giả sử k_0 là nghiệm của phương trình $g(k)=0$.

Suy ra $\begin{cases}1\le k\le k_0\\ k\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\Rightarrow k_0<128$.

Nên $g(128)<0\Leftrightarrow \log_3(x^2+128-x)<\log_2 128$

$\Rightarrow x^2-x+128<3^{\log_2 128}\Rightarrow -44\le x\le 45$.

Vậy có 90 số nguyên x.

❄ Cách 2

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y>0\\ x+y>0\end{cases}$.

Xét hàm số $\log_3(x^2+y)\ge\log_2(x+y)$

$\Leftrightarrow x^2+y\ge 3^{\log_2(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge(x+y)^{\log_2 3}\Leftrightarrow x^2-x\ge(x+y)^{\log_2 3}-(x+y)$ (1).

Đặt $t=x+y$ thì (1) trở thành $x^2-x\ge t^{\log_2 3}-t$ (2).

Với mỗi x nguyên cho trước có không quá 127 số nguyên y thỏa mãn bất phương trình (1) tương đương với bất phương trình (2) có không quá 127 nghiệm t.

Ta có hàm số $f(t)=t^{\log_2 3}-t$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên nếu $x^2-x>128^{\log_2 3}-128=2059$ thì sẽ có ít nhất 127 nghiệm nguyên $t\ge 1$.

Do đó yêu cầu bài toán tương đương với $x^2-x\le 2059\Leftrightarrow -44\le x\le 45$ (do x nguyên).

Vậy có 90 số nguyên x.

Câu 62: **(THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 49)** Có bao nhiêu số nguyên x sao cho ứng với mỗi x có không quá 255 số nguyên y thỏa mãn $\log_3(x^2+y)\ge\log_2(x+y)$?

A. 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $\begin{cases}x+y>0\\ x^2+y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y>-x\\ y>-x^2\end{cases}$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x^2-x\ge 0,\forall x\in\mathbb{Z}$ suy ra $x^2>x\Leftrightarrow -x^2\le -x$ do đó có điều kiện $y>-x\Rightarrow y\ge 1-x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x^2+y)-\log_2(x+y)$.

Ghi Chú!

Ta có $f'(y)=\dfrac{1}{(x^2+y)\ln 3}-\dfrac{1}{(x+y)\ln 2}=\dfrac{(x+y)\ln 2-(x^2+y)\ln 3}{(x^2+y)(x+y)\ln 3.\ln 2}$

Vì $x\le x^2\Rightarrow 0<x+y\le x^2+y$

$0<\ln 2<\ln 3$

Suy ra $\ln 2(x+y)<\ln 3(x^2+y)\Rightarrow f'(y)<0$.

Nhận xét: $f(1-x)=\log_3(x^2-x+1)-\log_2 1\ge 0,\forall x\in\mathbb{Z}$.

Giả sử phương trình $f(y)=0$ có nghiệm, vì $f(y)<0$ $\Rightarrow$ phương trình $f(y)=0$ có nghiệm duy nhất $y=m$.

Có bảng biến thiên:

y	$1-x$		m		$+\infty$
$f'(y)$		$-$		$-$	
$f(y)$	$+$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-$

Nên bất phương trình $f(y)\ge 0\Leftrightarrow 1-x\le y\le m$ do đó để bất phương trình có không quá 255 giá trị $y\in\mathbb{Z}$ thì $m\le 255-x$ nên $f(256-x)<0$ $\Leftrightarrow \log_3(x^2-x+256)-\log_2 256<0\Leftrightarrow x^2-x+256<3^8\Leftrightarrow -78,9<x<79,9$.

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $-78\le x\le 79\Rightarrow$ có 158 giá trị x thỏa mãn.

Câu 63: **(DE MH BGD 2023 - Câu 47)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$\log_3(x^2+y^2+x)+\log_2(x^2+y^2)\le\log_3 x+\log_2(x^2+y^2+24x)$?

A. 89. **B.** 48. **C.** 90. **D.** 49.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x>0$.

Ta có: $\log_3(x^2+y^2+x)+\log_2(x^2+y^2)\le\log_3 x+\log_2(x^2+y^2+24x)$

$\Leftrightarrow\log_3(x^2+y^2+x)-\log_3 x\le\log_2(x^2+y^2+24x)-\log_2(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2+x}{x}\right)\le\log_2\left(\dfrac{x^2+y^2+24x}{x^2+y^2}\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(1+\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)\le\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)$

$\Leftrightarrow\log_3\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}+1\right)-\log_2\left(1+\dfrac{24x}{x^2+y^2}\right)\le 0.$

Đặt: $t=\dfrac{x^2+y^2}{x}(t>0)$, bất phương trình trở thành: $\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)\le 0$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\log_3(1+t)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{t}\right)$ có $f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)\ln 3}+\dfrac{24}{\left(t^2+24t\right)\ln 2}>0,\forall t>0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f(8)=\log_3(1+8)-\log_2\left(1+\dfrac{24}{8}\right)=0$

Từ đó suy ra: $(1)\Leftrightarrow f(t)\le f(8)\Leftrightarrow t\le 8\Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{x}\le 8\Leftrightarrow (x-4)^2+y^2\le 16$.

Đếm các cặp giá trị nguyên của $(x;y)$

Ta có: $(x-4)^2\le 16\Leftrightarrow 0\le x\le 8$, mà $x>0$ nên $0<x\le 8$.

Với $x=1,x=7\Rightarrow y=\{\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 10 cặp.

Với $x=2,x=6\Rightarrow y=\{\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=3,x=5\Rightarrow y=\{\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 14 cặp.

Với $x=4\Rightarrow y=\{\pm 4;\pm 3;\pm 2;\pm 1;0\}$ nên có 9 cặp.

Với $x=8\Rightarrow y=0$ có 1 cặp.

Vậy có 48 cặp giá trị nguyên $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

Câu 64: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 47] Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_2\left(-x^2+6x-5\right)$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số

$$f(x)=\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right)-\log_2\left(-x^2+6x-5\right)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2-12x+9}{\left(x^3-6x^2+9x+y\right)\ln 3}+\frac{2x-6}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=(x-3)\left[\frac{3x-3}{\left(x^3-6x^2+9x+y\right)\ln 3}+\frac{2}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2}\right]$$

Ghi Chú!

Xét trên tập $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ thì ta dễ thấy

$f'(x)>0$ với $x>3$

$f'(x)<0$ với $x<3$

Nếu $x=3$ thỏa mãn điều kiện.

Ta có $f(3)=\log_3 y-2;\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_3\left(\frac{27}{8}+y\right)-\log_2\frac{7}{4}$; $f\left(\frac{9}{2}\right)=\log_3\left(\frac{81}{8}+y\right)-\log_2\frac{7}{4}$

TH1. $f(3)>0\Leftrightarrow y>9\Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

TH2. $f(3)=0\Leftrightarrow y=9\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

TH3. $f(3)<0$ hoặc $x=3$ không thuộc tập xác định của phương trình, khi đó phương trình có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow\begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right)<0\\ f\left(\frac{9}{2}\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3\left(\frac{27}{8}+y\right)<\log_2\frac{7}{4}\\ \log_3\left(\frac{81}{8}+y\right)\ge\log_2\frac{7}{4}\end{cases}\Rightarrow -7,7<y<-0,9$$

Do y nguyên $\Rightarrow y\in\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy số phần tử của S là 8.

Câu 65: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 47] Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right)=\log_2\left(-x^2+6x-5\right)$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 1. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số

$f(x)=\log_3\left(x^3-6x^2+9x+y\right)-\log_2\left(-x^2+6x-5\right)$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2-12x+9}{\left(x^3-6x^2+9x+y\right)\ln 3}+\frac{2x-6}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=(x-3)\left[\frac{3x-3}{\left(x^3-6x^2+9x+y\right)\ln 3}+\frac{2}{\left(-x^2+6x-5\right)\ln 2}\right]$$

Xét trên tập $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ thì ta dễ thấy

$f'(x)>0$ với $x>3$

$f'(x)<0$ với $x<3$

Nếu $x=3$ thỏa mãn điều kiện.

Ta có $f(3)=\log_3 y-2;\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\log_3\left(\frac{27}{8}+y\right)-\log_2\frac{7}{4}$; $f\left(\frac{9}{2}\right)=\log_3\left(\frac{81}{8}+y\right)-\log_2\frac{7}{4}$

TH1. $f(3)>0 \Leftrightarrow y>9 \Rightarrow$ Phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm.

TH2. $f(3)=0 \Leftrightarrow y=9 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

TH3. $f(3)<0$ hoặc $x=3$ không thuộc tập xác định của phương trình, khi đó phương trình có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right)<0 \\ f\left(\frac{9}{2}\right)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(\frac{27}{8}+y\right)<\log_2\frac{7}{4} \\ \log_3\left(\frac{81}{8}+y\right)\ge \log_2\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow -7{,}7<y<-0{,}9$$

Do y nguyên $\Rightarrow y\in\{-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy số phần tử của S là 8.

Câu 66: **[MD 103-TN BGD 2023-CÂU 46]** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ thoả mãn $\log_3\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_2\left(-x^2+8x-12\right)$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

ĐK: $\begin{cases} x^3-9x^2+24x+y>0 \\ -x^2+8x-12>0 \Leftrightarrow 2<x<6 \end{cases}$

Ta có: $\log_3\left(x^3-9x^2+24x+y\right)=\log_2\left(-x^2+8x-12\right)$

$\Leftrightarrow x^3-9x^2+24x+y=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}$

$\Leftrightarrow y=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}-x^3+9x^2-24x$.

Xét hàm số $f(x)=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}-x^3+9x^2-24x$ với $x\in\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$.

Ta có: $f'(x)=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}.\ln 3.\dfrac{-2x+8}{\left(-x^2+8x-12\right).\ln 2}-3x^2+18x-24$

$=3^{\log_2\left(-x^2+8x-12\right)}.\ln 3.\dfrac{-2(x-4)}{\left(-x^2+8x-12\right).\ln 2}-3(x-4)(x-2)$

$$=-(x-4)\left[3^{\log_2(-x^2+8x-12)}.\ln 3.\frac{2}{(-x^2+8x-12).\ln 2}+3(x-2)\right]$$

Vì $2<x<6$ nên $3^{\log_2(-x^2+8x-12)}.\ln 3.\dfrac{2}{(-x^2+8x-12).\ln 2}+3(x-2)>0$

Do đó, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$.

Bảng biến thiên

x	$\frac{5}{2}$		4		$\frac{11}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-16,95$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-23,7$

Để với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\frac{5}{2};\frac{11}{2}\right]$ thì $y=-7$ hoặc $-23,7\le y<-16,95$.

Mà $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{-7;-23;-22;...;-17\}$.

Vậy tập S có 8 phần tử.

Câu 67: **[MD 104-TN BGD 2023-CÂU 44]** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của y sao cho ứng với mỗi y, tồn tại duy nhất một giá trị $x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$ thỏa mãn $\log_2(x^3-6x^2+9x+y)=\log_3(-x^2+6x)$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\log_2(x^3-6x^2+9x+y)=\log_3(-x^2+6x)$

$\Leftrightarrow y=2^{\log_3(-x^2+6x)}-x^3+6x^2-9$

Xét $f(x)=2^{\log_3(-x^2+6x)}-x^3+6x^2-9, x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$

$$\Rightarrow f'(x)=(3-x)\left[\frac{2}{(-x^2+6x)\ln 3}.2^{\log_3(-x^2+6x)}+3(x-1)\right].$$

Ta thấy $\dfrac{2}{(-x^2+6x)\ln 3}.2^{\log_3(-x^2+6x)}+3(x-1)>0\forall x\in\left[\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right]$. Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$

Bảng biến thiên

Ghi Chú!

x	$\frac{3}{2}$		3		$\frac{9}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-0,04$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-6,8$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=4 \\ -6,8<y<0,04 \end{array}\right.$.

Do y nguyên $\Rightarrow y\in\{-6;-5;-4;-3;-2;-1;4\}$.

Vậy số phần tử của S là 7.

Dạng ⑦: Phương trình loga có chứa tham số

Câu 68: **(THPTQG 2017-MĐ101-Câu 39)** Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_3^2 x - m\log_3 x + 2m - 7 = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$.

A. $m=-4$ **B.** $m=4$ **C.** $m=81$ **D.** $m=44$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\log_3 x$ ta được $t^2 - mt + 2m - 7 = 0$, tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm t_1, t_2

$t_1 + t_2 = \log_3 x_1 + \log_3 x_2 = \log_3(x_1x_2) = \log_3 81 = 4$

Theo vi-et suy ra $t_1 + t_2 = m \Rightarrow m = 4$ (Thay lại $m=4$ vào đề bài ta thấy phương trình có hai

nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1x_2 = 81$).

Câu 69: **(THPTQG 2019-MĐ101-Câu 39)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(3x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $x>\frac{1}{3}$. Phương trình tương đương với:

$$\log_3 x - \log_3(3x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3\frac{3x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \frac{3x-1}{x} = f(x)$$

Xét $f(x) = \frac{3x-1}{x}; x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0; \forall x\in\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$

Ghi Chú!

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3

Để phương trình có nghiệm thì $m \in (0;3)$, suy ra có 2 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 70: **(THPTQG 2019-MĐ102-Câu 37)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 6. **B.** 5. **C.** Vô số. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m$.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \frac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases}$.

Khi đó.

$\log_9 x^2 - \log_3(6x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 m = \log_3(6x-1)$.

$\Leftrightarrow mx = 6x - 1 \Leftrightarrow x(6-m) = 1$ (1)

+) Với $m = 6$, phương trình (1) trở thành $0 = 1$ (vô lý).

+) Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{1}{6-m}$.

$\Rightarrow \frac{1}{6-m} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6-m} - \frac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \frac{m}{6-m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6$.

Vậy $0 < m < 6$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 71: **(THPTQG 2019-MĐ103-Câu 36)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. Vô số. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$.

Xét phương trình: $\log_9 x^2 - \log_3(5x-1) = -\log_3 m$ (1).

Cách 1.

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \frac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow 5 - \frac{1}{x} = m$ (2)

.

Ghi Chú!

Xét $f(x)=5-\frac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\frac{1}{5};+\infty\right)$.

Có $f'(x)=\frac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in\left(\frac{1}{5};+\infty\right)$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5-\frac{1}{x}\right)=5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$\frac{1}{5}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
$f(x)$	|| 0	$\nearrow$	5

Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ phương trình (2) có nghiệm $x>\frac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $0<m<5$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m>0$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Cách 2.

Với $\begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ m>0 \end{cases}$, ta có:

$(1)\Leftrightarrow \log_3 x-\log_3(5x-1)=-\log_3 m \Leftrightarrow \log_3\frac{5x-1}{x}=\log_3 m \Leftrightarrow \frac{5x-1}{x}=m \Leftrightarrow (5-m)x=1 \quad (2)$

Với $m=5$, phương trình (2) thành $0.x=1$ (vô nghiệm).

Với $m\neq 5$, $(2)\Leftrightarrow x=\frac{1}{5-m}$.

Xét $x>\frac{1}{5}\Leftrightarrow \frac{1}{5-m}>\frac{1}{5}\Leftrightarrow \frac{m}{5.(5-m)}>0\Leftrightarrow 0<m<5$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ và $m>0$ nên $m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu 72: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 36) Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(4x-1)=-\log_3 m$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 5. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

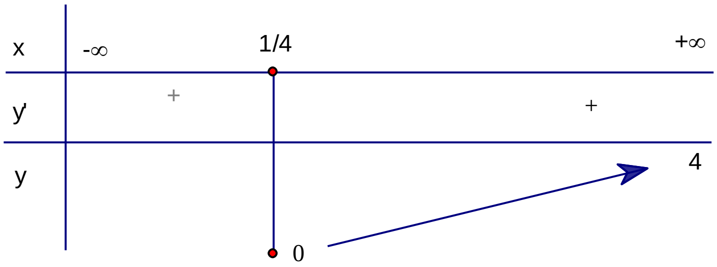
Điều kiện: $x>\frac{1}{4}$. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 x-\log_3(4x-1)=-\log_3 m$

$\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3(4x-1) = \log_3 \frac{1}{m}$

$\Leftrightarrow \log_3 \frac{x}{(4x-1)} = \log_3 \frac{1}{m} \Leftrightarrow m = \frac{(4x-1)}{x} = f(x)$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(4x-1)}{x}$ có $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x > \frac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:



Do đó phương trình có nghiệm khi $0 < m < 4$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2;3\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m.

Câu 73: **(ĐTK 2020-L1-Câu 43)** Cho phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

A. $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow [1 + \log(x)]^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \ (*)$

Đặt $t = \log_2 x = g(x) \Rightarrow 0 \le t \le 1$ và mỗi giá trị của x sẽ cho một giá trị của t

$(*)$ trở thành $(1+t)^2 - (m+2)t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 - mt - 2t + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 1 = m(t-1) \Leftrightarrow (t-1)(t+1-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = m-1 & (1) \\ t = 1 & (2) \end{array}\right.$

Với $t = 1$ thì phương trình có một nghiệm $x = 2$

Vậy để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì PT (1) phải có một nghiệm $t \ne 1$

$\Leftrightarrow 0 \le m - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 \le m < 2$.

Vậy $m \in [1;2)$ để thoả mãn yêu cầu bài toán.

Ghi Chú!

Câu 74: **(ĐTK 2017-Câu 45)** Hỏi có bao nhiêu giá trị m nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

A. 2017. **B.** 4014. **C.** 2018. **D.** 4015.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện $x>-1$ và $x\neq 0$.

$\log(mx)=2\log(x+1)\Leftrightarrow mx=(x+1)^2\Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x}$

Xét hàm $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ $(x>-1, x\neq 0)$; $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\ (l)\end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

x	-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}m=4\\m<0.\end{array}\right.$

Vì $m\in[-2017;2017]$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu là

$m\in\{-2017;-2016;...;-1;4\}$.

Chú ý: Trong lời giải, ta đã bỏ qua điều kiện $mx>0$ vì với phương trình $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ với $0<a\neq 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x)>0$ (hoặc $g(x)>0$).

Câu 75: **(THPTQG 2017-MĐ104-Câu 46)** Xét các số nguyên dương a, b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

A. $S_{\min}=30$ **B.** $S_{\min}=25$ **C.** $S_{\min}=33$ **D.** $S_{\min}=17$

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x>0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2>20a$.

Đặt $t=\ln x, u=\log x$ khi đó ta được $at^2+bt+5=0(1)$, $5t^2+bt+a=0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x, một u thì có một x.

Ta có $x_1.x_2=e^{t_1}.e^{t_2}=e^{t_1+t_2}=e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3.x_4=10^{u_1+u_2}=10^{-\frac{b}{5}}$, lại có

$x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{a} > -\dfrac{b}{5}\ln 10 \Leftrightarrow a > \dfrac{5}{\ln 10} \Leftrightarrow a \ge 3$ (do a, b nguyên dương), suy ra $b^2 > 60 \Rightarrow b \ge 8$.

Vậy $S = 2a + 3b \ge 2.3 + 3.8 = 30$,suy ra $S_{\min} = 30$ đạt được $a = 3, b = 8$.

Dạng ⑧: Bất phương trình loga chứa tham số

Câu 76: **(THPTQG 2017-MĐ103-Câu 42)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x + 3m - 2 < 0$ có nghiệm thực.

A. $m < 1$. **B.** $m < \dfrac{2}{3}$. **C.** $m < 0$. **D.** $m \le 1$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $x > 0$; Bất phương trình tương đương

$\log_2^2 x - 2\log_2 x - 2 < -3m$.

Xét hàm số $f(x) = \log_2^2 x - 2\log_2 x - 2$.

$f'(x) = \dfrac{2\ln(x) - 2\ln(2)}{x\ln^2(2)}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, để bất phương trình có nghiệm thực thì $-3m \ge -3 \Leftrightarrow m \le 1$.

Dạng ⑨: Hệ có chứa loga

Câu 77: **(ĐTK 2020-L1-Câu 41)** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}} 2$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4(2x + y)$. Khi đó $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ 2x + y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 2.9^t + 6^t = 4^t$

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{9}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = -1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{1}{2}.$$

Ghi Chú!

Do đó: $\frac{x}{y}=\left(\frac{9}{6}\right)^t=\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{1}{2}$.

Dạng ⑩: Phương trình,bất phương trình tổ hợp cả mũ và loga(không tham số)

Câu 78: **(ĐTK 2019-Câu 31)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(7-3^x\right)=2-x$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_3\left(7-3^x\right)=2-x \Leftrightarrow 7-3^x=3^{2-x} \Leftrightarrow 7-3^x=\frac{9}{3^x}$

Đặt $t=3^x$, với $t>0$. Phương trình trở thành $t^2-7t+9=0$. Phương trình này luôn có hai nghiệm dương t_1 và t_2.

Do đó $x_1+x_2=\log_3 t_1+\log_3 t_2=\log_3\left(t_1.t_2\right)=\log_3 9=2$.

Câu 79: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0$

A. 27. **B.** Vô số. **C.** 26. **D.** 25.

Lời giải

Chọn C

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x>-25$.

Đặt $A(x)=\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right], x>-25$.

$3^{x^2}-9^x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$.

$\log_3\left(x+25\right)-3=0 \Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó, $A(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -25<x\le 0 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{-24;-23;...;0;2\}$ (do) $x\in\mathbb{Z}$.

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Câu 80: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 39)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(3^{x^2}-9^x\right)\left[\log_2(x+30)-5\right]\le 0$?

A. 30. **B.** Vô số. **C.** 31. **D.** 29.

Lời giải

Chọn C

Ghi Chú!

Điều kiện xác định: $x > -30$. Đặt $f(x) = \left(3^{x^2} - 9^x\right)\left[\log_2(x+30) - 5\right]$

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x^2} = 9^x \\ \log_2(x+30) = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2x \\ x + 30 = 2^5 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \text{ (kép)} \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	-30		0		2		$+\infty$
$f(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra bất phương trình $f(x) \le 0$ có tập nghiệm là: $S = (-30; 0] \cup \{2\}$

Với $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-29; -28; \ldots; -2; -1; 0; 2\}$.

Vậy có 31 số nguyên x thỏa mãn.

Câu 81: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 39)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2} - 4^x\right)\left[\log_2(x+14) - 4\right] \le 0$?

A. 14. **B.** 13. **C.** Vô số. **D.** 15.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

• Trường hợp 1:

$$\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \le 0 \\ \log_2(x+14) - 4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} \le 2^{2x} \\ x + 14 \ge 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \le 0 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

• Trường hợp 2:

$$\begin{cases} 2^{x^2} - 4^x \ge 0 \\ \log_2(x+14) - 4 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \ge 0 \\ -14 < x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ -14 < x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -14 < x \le 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Vậy có 15 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Điều kiện xác định: $x > -14$. Đặt $f(x) = \left(2^{x^2} - 4^x\right)\left[\log_2(x+14) - 4\right]$

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x^2} = 4^x \\ \log_2(x+14) = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2x \\ x + 14 = 2^4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \text{ (kép)} \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu:

x	-14		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$+$	

Suy ra bất phương trình $f(x)\le 0$ có tập nghiệm là: $S=(-14;0]\cup\{2\}$.

Do $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-13;-12;...;-2;-1;0;2\}$.

Vậy có 15 giá trị nguyên của x thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 82: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 40)** Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$?

A. 24. **B.** Vô số. **C.** 25. **D.** 26.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có điều kiện xác định của bất phương trình là $x>-25$.

Đặt $A(x)=\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right], x>-25$.

$2^{x^2}-4^x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$.

$\log_3(x+25)-3=0\Leftrightarrow x=2$.

Ta có bảng xét dấu $A(x)$ như sau

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

Từ đó, $A(x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\-25<x\le 0\end{array}\right.\Rightarrow x\in\{-24;-23;...;0;2\}$ (do) $x\in\mathbb{Z}$

Kết luận: có 26 nghiệm nguyên thỏa mãn.

Cách 2:

• Trường hợp 1:

$$\begin{cases}2^{x^2}-4^x\le 0\\ \log_3(x+25)-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^{x^2}\le 2^{2x}\\ x+25\ge 27\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x\le 0\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 2\\ x\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

• Trường hợp 2:

$$\begin{cases}2^{x^2}-4^x\ge 0\\ \log_3(x+25)-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x\ge 0\\ -25<x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 0\\ x\ge 2\end{array}\right.\\ -25<x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -25<x\le 0\vee x=2.$$

• Vậy có 26 giá trị nguyên của x thỏa mãn $\left(2^{x^2}-4^x\right)\left[\log_3(x+25)-3\right]\le 0$.

Câu 83: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** (DE TN BGD 2022 - MD 102)ét các số thực x,y sao cho $49^{9-y^2}\ge a^{4x-\log_7 a^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x-3y$ bằng:

A. $\frac{121}{4}$. **B.** $\frac{39}{4}$. **C.** 24. **D.** 39.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn C

- Ta có $49^{9-y^2} \geq a^{4x-\log_7 a^2} \Leftrightarrow \log_7\left(49^{9-y^2}\right) \geq \log_7\left(a^{4x-\log_7 a^2}\right)$.

$\Leftrightarrow \left(9-y^2\right)\log_7(49) \geq \left(4x-\log_7 a^2\right)\log_7(a)$

$\Leftrightarrow 2\left(9-y^2\right) \geq 2\left(2x-\log_7 a\right)\log_7 a$. (1)

Đặt $t=\log_7 a$, khi $a>0$ thì $t\in\mathbb{R}$, (1) trở thành $t^2-2x.t+9-y^2\geq 0$. (2)

(1) đúng với mọi $a>0 \Leftrightarrow (2)$ đúng với mọi $t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta'=x^2-9+y^2\leq 0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2\leq 9$.

- (DE TN BGD 2022 - MD 102)ét

$(4x-3y)^2\leq(16+9)\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow(4x-3y)^2\leq 225\Rightarrow 4x-3y\leq 15$

- Suy ra $P=x^2+y^2+4x-3y\leq 9+15=24$, đẳng thức (DE TN BGD 2022 - MD 102)ảy ra khi

$$\begin{cases}\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{-3}\\ x^2+y^2=9\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{12}{5};y=-\dfrac{9}{5}\\ x=-\dfrac{12}{5};y=\dfrac{9}{5}\end{array}\right..$$

Vậy GTLN của P bằng 24.

Dạng ⑩: Phương trình,bất phương trình tổ hợp cả mũ và loga(không tham số)

Câu 84: (DE TN BGD 2022-MD 103)Xét tất cả số thực x, y sao cho $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2-4x+8y$ bằng

A. -15. **B.** 25. **C.** -5. **D.** -20.

Lời giải

Chọn A

Giả sử x, y thỏa $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}$ với mọi số thực dương a.

Ta có $P=x^2+y^2-4x+8y \Leftrightarrow x^2+y^2-4x+8y-P=0$

Suy ra điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn tâm $I(2;-4)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2^2+(-4)^2+P}=\sqrt{20+P}$.

$27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3} \Leftrightarrow \left(5-y^2\right).3\geq\left(6x-\log_3 a^3\right)\log_3 a \Leftrightarrow \left(5-y^2\right).3\geq\left(6x-3\log_3 a\right)\log_3 a$

Đặt $t=\log_3 a$, $t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $\left(5-y^2\right).3\geq(6x-3t)t \Leftrightarrow -3t^2+6xt-15+3y^2\leq 0$

Theo đề bài ta có $27^{5-y^2}\geq a^{6x-\log_3 a^3}$ đúng với mọi số thực dương a nên $-3t^2+6xt-15+3y^2\leq 0$ đúng với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Ghi Chú!

Do đó $\begin{cases} -3<0 \\ (3x)^2+3\left(-15+3y^2\right)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9x^2+9y^2-45\le 0 \Leftrightarrow x^2+y^2\le 5$.

Suy ra tập hợp các điểm $M(x;y)$ là hình tròn tâm $O(0;0)$ và bán kính $R_2=\sqrt{5}$.

Vậy để tồn tại cặp $(x;y)$ thì đường tròn $(I;R_1)$ và hình tròn $\left(O;\sqrt{5}\right)$ phải có điểm chung

Do đó $IO\le R_1+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{2^2+(-4)^2}\le\sqrt{20+P}+\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{5}\le\sqrt{20+P} \Leftrightarrow P\ge -15$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -15

Dạng ⓫: Phương trình,bất phương trình tổ hợp cả mũ và loga(có tham số)

Câu 85: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 42) Cho phương trình $7^x+m=\log_7(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-25;25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9. **B.** 25. **C.** 24. **D.** 26.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x>m$

Đặt $t=\log_7(x-m)$ ta có $\begin{cases} 7^x+m=t \\ 7^t+m=x \end{cases} \Rightarrow 7^x+x=7^t+t \quad (1)$

Do hàm số $f(u)=7^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1)\Leftrightarrow t=x$. Khi đó:

$7^x+m=x \Leftrightarrow m=x-7^x$. Xét hàm số $g(x)=x-7^x \Rightarrow g'(x)=1-7^x\ln 7=0$ $\Leftrightarrow x=-\log_7(\ln 7)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\log_7(\ln 7)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-\log_7(\ln 7))$	$\searrow$	$-\infty$

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\le g(-\log_7(\ln 7))\approx -0{,}856$ (cácnghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x-m=7^x>0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-25;25)$, nên $m\in\{-24;-16;...;-1\}$.

Câu 86: **(THPTQG 2018-MĐ101-Câu 46)** Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 20. **B.** 19. **C.** 9. **D.** 21.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x>m$

Ta có $5^x+m=\log_5(x-m)\Leftrightarrow 5^x+x=x-m+\log_5(x-m)\Leftrightarrow 5^x+x=5^{\log_5(x-m)}+\log_5(x-m)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=5^t+t$, $f'(t)=5^t\ln 5+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$, do đó từ (1) suy ra $x=\log_5(x-m)\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-5^x$, $g'(x)=1-5^x.\ln 5$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_5\dfrac{1}{\ln 5}=-\log_5\ln 5=x_0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\log_5\ln 5$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$	

Do đó để phương trình có nghiệm thì $m\le g(x_0)\approx -0,92$.

Các giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ là $\{-19;-18;...;-1\}$, có 19 giá trị m thỏa mãn.

Câu 87: **(THPTQG 2018-MĐ102-Câu 45)** Cho phương trình $3^x+m=\log_3(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 16. **B.** 9. **C.** 14. **D.** 15.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3^x+m=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x+x=\log_3(x-m)+x-m$ (*).

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$, với $t\in\mathbb{R}$. Có $f'(t)=3^t\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác phương trình (*) có dạng: $f(x)=f(\log_3(x-m))$. Do đó ta có $f(x)=f(\log_3(x-m))$ $\Leftrightarrow x=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x=x-m\Leftrightarrow 3^x-x=-m$

Ghi Chú!

Xét hàm số $g(x)=3^x-x$, với $x\in\mathbb{R}$. Có $g'(x)=3^x\ln 3-1$, $g'(x)=0$ $\Leftrightarrow x=\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là: $m\in\left(-\infty;-g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)\right]$. Vậy số giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là: 14.

Câu 88: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 48) Cho phương trình $2^x+m=\log_2(x-m)$ với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-18;18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

A. 9. **B.** 19. **C.** 17. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x>m$

Đặt $t=\log_2(x-m)$ ta có $\begin{cases}2^x+m=t\\2^t+m=x\end{cases}\Rightarrow 2^x+x=2^t+t\ \ (1)$

Do hàm số $f(u)=2^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1)\Leftrightarrow t=x$. Khi đó:

$2^x+m=x\Leftrightarrow m=x-2^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-2^x\Rightarrow g'(x)=1-2^x\ln 2=0\Leftrightarrow x=-\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\log_2(\ln 2)$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-\log_2(\ln 2))$	$\searrow$	$-\infty$

Ghi Chú!

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \le g\left(-\log_2(\ln 2)\right) \approx -0,914$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x-m=2^x>0$)

Do m nguyên thuộc khoảng $(-18;18)$, nên $m \in \{-17;-16;...;-1\}$.

Câu 89: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 50) Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

Lời giải

Chon B

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x \ge \log_7 m \end{cases}$

Với $m=1$, phương trình trở thành $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-1}=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0 \\ 7^x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4} \\ x=0 \quad (loai) \end{array}\right. .$$

Phương trình này có hai nghiệm (thỏa)

Với $m \ge 2$, điều kiện phương trình là $x \ge \log_7 m$

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0 \\ 7^x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=1 \\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4} \\ 7^x=m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=2^{\frac{-5}{4}} \\ 7^x=m \end{array}\right.$$

Do $x=2^{-\frac{5}{4}} \approx 2,26$ không là số nguyên, nên phương trình có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi

$\begin{cases} m \ge 3 \\ m<7^2 \end{cases}$ (nghiệm $x=2^{\frac{-5}{4}}$ không thỏa điều kiện và nghiệm $x=2$ thỏa điều kiện và khác $\log_7 m$)

Vậy $m \in \{3;4;5;...;48\}$. Suy ra có 46 giá trị của m.

Do đó có tất cả 47 giá trị của m.

Câu 90: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 47) Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{3^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 79. **B.** 80. **C.** vô số. **D.** 81.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ 3^x-m\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ m\le 3^x \end{cases}$ (*).

Ta có $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{3^x-m}=0$

$(1)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\log_2^2 x-3\log_2 x-2=0 & (2) \\ \sqrt{3^x-m}=0 & (3) \end{array}\right.$.

Trong đó $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=2 \\ \log_2 x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$.(4).

Với $m>0$ thì $3^x=m\Leftrightarrow \log_3 m=x$.

Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra các trường hợp sau:.

TH1: (3) có nghiệm $x=\log_3 m\le 0\Leftrightarrow 0<m\le 1$. Kết hợp điều kiện (*) và (4) ta được $m=1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $x=4$.

TH2: $m>1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x\ge \log_3 m>0$.

Và do $4>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\le \log_3 m<4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\le m<3^4$

Mà m nguyên dương nên ta có $m\in\{3,4,...,80\}$, có 78 giá trị của m.

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt.

Câu 91: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 46) Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. 123. **B.** 125. **C.** Vô số. **D.** 124.

Lời giải

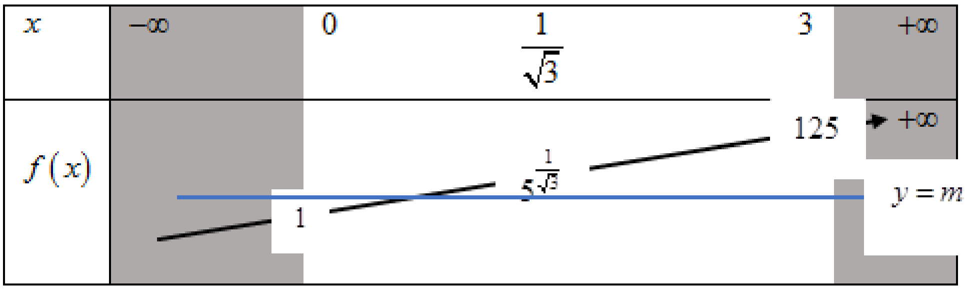
Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 5^x-m\ge 0\ (m>0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ge \log_5 m \end{cases}$.

$\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x-\log_3 x-1=0 \\ 5^x-m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, x=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x)=5^x=m \end{array}\right.$.

Xét $f(x)=5^x$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$$\left[\begin{array}{l} m=1 \\ 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \le m < 125 \end{array}\right., \ m\in\mathbb{Z}_+ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<m\le 1 \\ 3\le m\le 124 \end{array}\right.$$

Nên có 123 giá trị m thoả mãn.

Câu 92: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 48) Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ (m là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. Vô số. **B.** 62. **C.** 63. **D.** 64.

Lời giải

Chọn B

Ta có điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\ge \log_4 m \end{cases}$ (*) (với m nguyên dương).

Phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ (1)

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x-\log_3 x-1=0 \ (2) \\ 4^x=m \ (3) \end{array}\right..$$

Phương trình $(2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=1 \\ \log_3 x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\frac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right..$

Phương trình $(3)\Leftrightarrow x=\log_4 m$.

Do m nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

TH 1: $m=1$ thì $\log_4 m=0$. Do đó (*) là $x>0$.

Khi đó nghiệm của phương trình (3) bị loại và nhận nghiệm của phương trình (2).

Do đó nhận giá trị $m=1$.

TH 2: $m\ge 2$ thì (*) là $x\ge \log_4 m$ (vì $\log_4 m\ge \frac{1}{2}$)

Để phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\le \log_4 m<3$$

Ghi Chú!

$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \le m < 4^3$

Suy ra $m \in \{3;4;5;\ldots;63\}$.

Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63-3+1+1=62$ giá trị nguyên dương m.

Câu 93: **(THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 50)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình: $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \quad (1)$.

+ Nhận xét: $a=0$ là một nghiệm của phương trình (1).

+ Với $a\ne 0$, phương trình $(1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{n} = \dfrac{\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m} \quad (*)$.

Xét hàm số: $f(a) = \dfrac{\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}$ trên $(-1;1)$;

$$f'(a) = \dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^{m+1}}.$$

Xét phương trình $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) = 0 \quad (2)$.

Xét hàm số $g(a) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}} - m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$.

$$g'(a) = \dfrac{1-m}{\sqrt{a^2+1}} - \dfrac{a^2}{\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3} \Rightarrow g'(a)\le 0, \forall a\in(-1;1); m\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra hàm số $g(a)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Do đó, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $a=0$.

+ **Trường hợp 1:** m chẵn.

a	-1		0		1
$f'(a)$		$-$	||	$-$	
$f(a)$	$\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy với n nguyên dương phương trình $f(a)=\dfrac{2}{n}$ không có hai nghiệm phân biệt. Suy ra loại trường hợp m chẵn.

+ **Trường hợp 2:** m lẻ và $m\neq 1$.

a	-1		0		1
$f'(a)$		$+$	||	$-$	
$f(a)$	$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow \dfrac{2}{n}>\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \end{array}\right.$.

Với $n=1$, m lẻ và $m\neq 1$, $m+1\le 14$ suy ra $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$.

Với $n=2$, m lẻ và $m\neq 1$, $m+2\le 14$ suy ra $m\in\{3;5;7;9;11\}$.

+ **Trường hợp 3:** $m=1$.

a	-1		0		1
$f'(a)$		$+$	||	$-$	
$f(a)$	$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$	$\nearrow$	1 || 1	$\searrow$	$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 thuộc khoảng $(-1;1)\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right)<\dfrac{2}{n}<1\Leftrightarrow 2<n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$ suy ra không tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn.

Vậy có 11 cặp $(m;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 94: **(THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 49)** Có bao nhiêu cặp số nguyên (m,n) sao cho $m+n\le 16$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2.a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 16. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình: $2.a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\ (*)$.

Nhận thấy $a=0$ là một nghiệm của phương trình $(*)$.

Xét $a\neq 0$ khi đó: $(*)\Leftrightarrow \dfrac{2}{n}=\dfrac{\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}\quad (**)$.

Xét hàm số: $f(a)=\dfrac{\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^m}\Rightarrow f'(a)=\dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}-m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)}{a^{m+1}}$.

Xét

$$g(a)=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}-m\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Rightarrow g'(a)=\frac{1-m}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{a^2}{\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3}\leq 0,\forall a\in\mathbb{R},m\in\mathbb{N}^*$$

.

Suy ra $g(a)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và phương trình $g(a)=0$ có nghiệm duy nhất $a=0$.

Nếu m chẵn:

a	-1		0		1
$g(a)$		$+$	0	$-$	
a^{m+1}		$-$	0	$+$	
$f'(a)$		$-$	||	$-$	
$f(a)$	$\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)$ ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Khi đó phương trình $f(a)=\dfrac{2}{n}$ không có hai nghiệm phân biệt (loại).

Nếu m lẻ:

a	-1		0		1
$g(a)$		$+$	0	$-$	
a^{m+1}		$+$	0	$+$	
$f'(a)$		$+$	||	$-$	
$f(a)$	$\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)$ ↗		$+\infty$ || $+\infty$	↘	$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Để phương trình $(*)$ có 3 nghiệm phân biệt $\in(-1;1)$ khi và chỉ khi $(**)$ có 2 nghiệm phân biệt $\in(-1;1) \Leftrightarrow \dfrac{2}{n} > \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \Leftrightarrow n < \dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 2,27$ mà $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n \in \{1;2\}$

.

Với $m=1$ ta có: $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2a}{n} = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) - \dfrac{2a}{n} = 0$.

Đặt $h(a) = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) - \dfrac{2a}{n} \Rightarrow h'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} - \dfrac{2}{n} < 0, \forall a \in \mathbb{R}, n \in \{1;2\}$

nên $h(a)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$, suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $a=0$ (loại).

Từ đó ta có $m>1$.

Với $n=1 \Rightarrow m+1 \le 16 \Rightarrow m \le 15$, mà m lẻ và $m>1$ nên $m \in \{3;5;7;9;11;13;15\}$.

Với $n=2 \Rightarrow m+2 \le 16 \Rightarrow m \le 14$, mà m lẻ và $m>1$ nên $m \in \{3;5;7;9;11;13\}$

.

Vậy có tất cả 13 cặp (m,n) thỏa mãn.

Câu 95: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 50)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương (m,n) sao cho $m+n<10$ và ứng với mỗi cặp (m,n) tại đúng ba số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow h(a) = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) - \dfrac{2}{n}a^m = 0$ (1)

Ta tìm m, n nguyên dương thỏa mãn $m+n<10$ sao cho (1) có đúng 3 nghiệm $a \in (-1;1)$ $(*)$

* Với $m=1$: $h(a) = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) - \dfrac{2}{n}a$ có $h'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} - \dfrac{2}{n}$ và $h''(a) = -\dfrac{a}{\sqrt{\left(a^2+1\right)^3}}$.

a	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$h''(a)$			$+$	0	$-$		
$h'(a)$		$\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{n}$	$\nearrow$	$1-\dfrac{2}{n}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{2}{n}$	

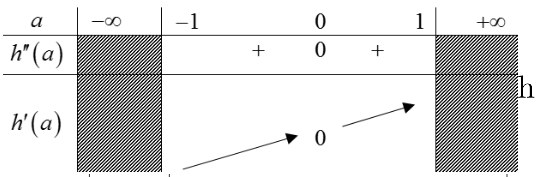
Ghi Chú!

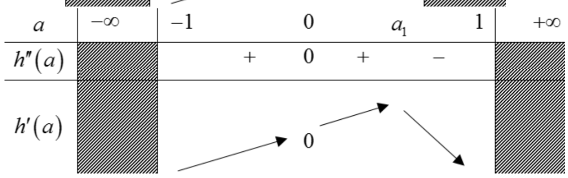
Nếu $\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{2}{n}\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2}{n}\ge 0\end{array}\right.$ thì $h'(a)$ không đổi dấu trên khoảng $(-1;1)$, suy ra $(*)$ không thỏa mãn.

Nếu $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2}{n}<0<1-\dfrac{2}{n}\Leftrightarrow\begin{cases}2<n<2\sqrt{2}\\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ cũng không xảy ra.

Vậy $m\ge 2$. Khi đó $h'(a)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\dfrac{2ma^{m-1}}{n}$ và $h''(a)=-\dfrac{1}{\sqrt{\left(a^2+1\right)^3}}-\dfrac{2m(m-1)a^{m+2}}{n}$.

+ Nếu m chẵn thì $h'(a)>0$ với $\forall a\in(-1;0)$; $h''(a)<0$ với $\forall a\in(0;1)$, suy ra $h'(a)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Mà $h'(0)=1$ nên hoặc $h'(a)>0$ với $\forall a\in(0;1)$ hoặc trên khoảng $(0;1)$ thì $h'(a)=0$ có nghiệm duy nhất a_1.





Suy ra $(*)$ không thỏa mãn.

+ Vậy phải có m lẻ và $m\ge 3$. Khi đó $h(-a)=\ln\left(-a+\sqrt{a^2+1}\right)-\dfrac{2}{n}(-a)^n$

$=\ln\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}+\dfrac{2}{n}a^m=-h(a)$. Hay hàm số $h(a)$ là hàm số lẻ và $h(0)=0$.

Do đó từ $(*)$ $\Leftrightarrow$ trên khoảng $(0;1)$ (1) có nghiệm duy nhất $(**)$

Ta có $h''(a)<0$ với $\forall a\in(0;1)$ nên $h'(a)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

+ Nếu $h(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2m}{n}\ge 0$ thì $h(a)>0$ với $\forall a\in(0;1)$, suy ra $(**)$ không thỏa mãn.

Vậy phải có $h'(a)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2m}{n}<0$. Mà $h'(0)=1>0$ nên $h'(a)=0$ có nghiệm duy nhất a_2 trên khoảng $(0;1)$.

a	$-\infty$	0		a_1		1	$+\infty$
$h''(a)$			$+$	0	$-$		
$h'(a)$			$\nearrow$	0	$\searrow$	$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\dfrac{2}{n}$	

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} m,n\in\mathbb{Z}^+ \\ m+n\le 10 \\ m=2k+1, m\ge 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{2m}{n}<0 \\ \ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\dfrac{2}{n}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m,n\in\mathbb{Z}^+ \\ m+n\le 10 \\ m=2k+1, m\ge 3 \\ \dfrac{m}{n}\ge\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}=2,2... \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m,n\in\{1;2\} \\ m=2k+1, m\ge 3 \\ m+n\le 10 \\ n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}=2,2... \end{cases}$$

n	m
1	3 , 5 , 7 , 9
2	3 , 5 , 7

Từ bảng trên suy ra có 7 cặp số (m,n) thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 96: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 49)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n\le 12$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

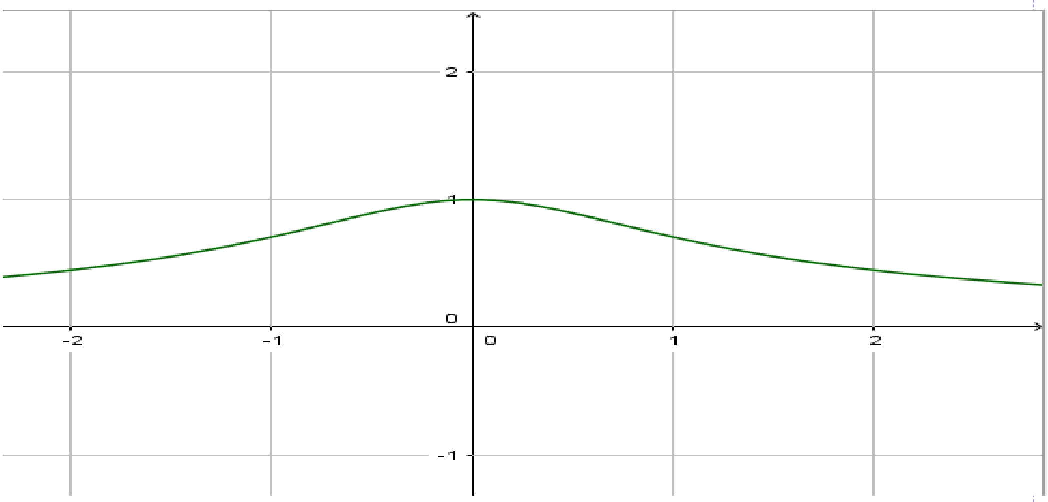
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{2}{n}x^m-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$

$\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2m}{n}x^{m-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Khi đó: $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{2m}{n}x^{m-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Theo bài: Để $f(x)=0$ có ba nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$ thì phương trình $\dfrac{2m}{n}x^{m-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ phải có ít nhất hai nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

Ghi Chú!

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ như hình vẽ.



Và đồ thị của hàm số $y=x^{m-1}$ suy ra $m-1$ chẵn và $m-1>0$

$\Rightarrow m\in\{3;5;...;11\}$. Khi đó $f'(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu $\begin{cases}x_1<0\\x_2>0\end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)$	$f(x_1)$	0	$f(x_2)$	$f(1)$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên: Phương trình có 3 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(-1)<0\\f(1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\\\dfrac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\end{cases}\Leftrightarrow n\le 2\Rightarrow n\in\{1;2\}.$$

Với $m=3\to 9$ có 8 cặp thỏa mãn

Với $m=11\Rightarrow n=1$ có 1 cặp thỏa mãn

Vậy có 9 cặp $(m;n)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 97: **(ĐTK 2021-Câu 47)** Có bao nhiêu số nguyên a $(a\ge 2)$ sao cho tồn tại số thực x thỏa mãn:

$$\left(a^{\log x}+2\right)^{\log a}=x-2\,?$$

A. 8. **B.** 9. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

ĐK có nghiệm là $x>2$.

Ta có: $\left(a^{\log x}+2\right)^{\log a}=x-2 \Leftrightarrow \left(x^{\log a}+2\right)^{\log a}+\left(x^{\log a}+2\right)=x^{\log a}+x$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^{\log a}+t$ trên $(0;+\infty)$

$f'(t)=t^{\log a-1}.\log a+1>0 \forall t>0$ và $a\ge 2 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó $(1)\Leftrightarrow f\left(x^{\log a}+2\right)=f(x)\Leftrightarrow x^{\log a}+2=x \Leftrightarrow x^{\log a}=x-2 \Leftrightarrow \log x^{\log a}=\log(x-2)$

$\Leftrightarrow \log a \log x=\log(x-2)\Leftrightarrow \log a=\dfrac{\log(x-2)}{\log x}$

Mà $\log(x-2)<\log x \forall x>2$ và $\log x>0 \forall x>2$ nên $\dfrac{\log(x-2)}{\log x}<1 \forall x>2$

Khi đó phương trình đã cho có nghiệm thì $\log a<1 \Leftrightarrow a<10$

Lại có a nguyên và $a\ge 2$ nên $a\in\{2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Vậy có 8 số nguyên a $(a\ge 2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 98: **(TN BGD 2022-MD101)** Xéttất cả các số thực x, y sao cho $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}$ với mọi số thực dương a. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+x-3y$ bằng

A. $\dfrac{125}{2}$. **B.** 80. **C.** 60. **D.** 20.

Lời giải

Chọn C

Ta có $a^{4x-\log_5 a^2}\le 25^{40-y^2}\Leftrightarrow \log_5 a^{4x-\log_5 a^2}\le \log_5 25^{40-y^2}$

$\Leftrightarrow (4x-2\log_5 a)\log_5 a\le 2\left(40-y^2\right)$

$\Leftrightarrow \log_5^2 a-2x\log_5 a+40-y^2\ge 0$ $(*)$

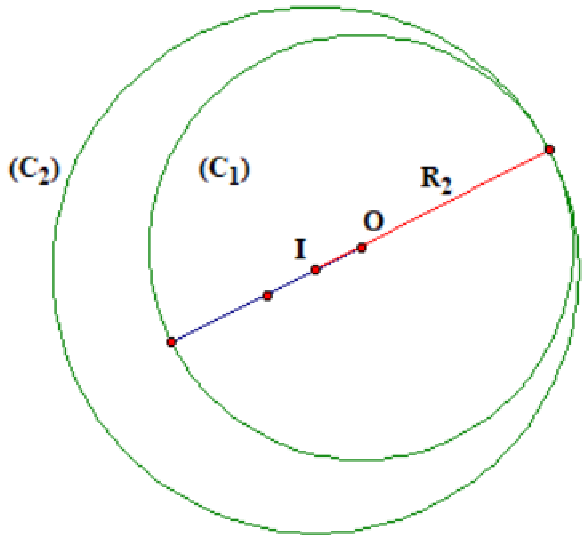
Coi $(*)$ là bất phương trình bậc hai ẩn $\log_5 a$

Để $(*)$ đúng với mọi số thực dương a thì

$\Delta'\le 0\Leftrightarrow x^2-\left(40-y^2\right)\le 0\Leftrightarrow x^2+y^2-40\le 0$ (1).

Ta có biểu thức (1) là hình tròn (C_1) tâm $O(0;0)$, bán kính $R_1=2\sqrt{10}$.

Mặt khác $P=x^2+y^2+x-3y\Leftrightarrow x^2+y^2+x-3y-P=0$ là phương trình đường tròn (C_2) tâm $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, bán kính $R_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{10+4P}$.



Để tồn tại điểm chung của đường tròn (C_2) với hình tròn (C_1) thì

$R_2 \le R_1 + OI \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10+4P} \le 2\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{10+4P} \le 5\sqrt{10} \Leftrightarrow P \le 60$.

Vậy $P_{\max} = 60$.

Câu 99: **(DE TN BGD 2022-MD 104)** Xét tất cả các số thực x, y sao cho $8^{9-y^2} \ge a^{6x-\log_2 a^3}$ với mọi số thực dương a. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 6x - 8y$ bằng

A. -21. **B.** -6. **C.** -25. **D.** 39.

Lời giải

Chọn A

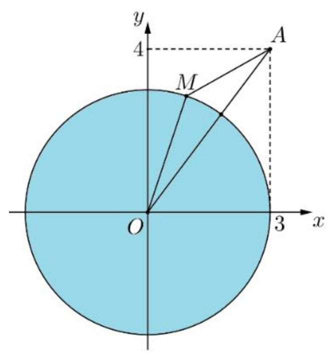
Ta có: $8^{9-y^2} \ge a^{6x-\log_2 a^3}$, $\forall a > 0$

$\Leftrightarrow 3\left(9-y^2\right) \ge \left(6x - 3\log_2 a\right)\log_2 a$, $\forall a > 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 a - 2x\log_2 a + 9 - y^2 \ge 0$, $\forall a > 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = x^2 + y^2 - 9 \le 0$.

Gọi $M(x;y)$ thuộc hình tròn (C) tâm O, bán kính $R = 3$.



Gọi $A(3;4)$, ta có: $OA = 5 > R$. Do đó A nằm ngoài hình tròn (C).

Khi đó: $P = (x-3)^2 + (y-4)^2 - 25 = MA^2 - 25 \ge (OA - R)^2 - 25 = -21$.

Vậy $\min P = -21$ khi O, M, A theo thứ tự thẳng hàng.

Ghi Chú!

Ghi Chú!

MỤC LỤC

♻ - NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN 369

§1- NGUYÊN HÀM 369

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 369

Ⓑ Dạng toán cơ bản 370

Dạng ①: Định nghĩa, tính chất của nguyên hàm 370

Dạng ②: Nguyên hàm của hs cơ bản, gần cơ bản 370

Dạng ③: PP đổi biến số t = u(x) hàm xác định(ngắn gọn là vi phân) 383

Dạng ④: PP nguyên hàm từng phần 385

Dạng ⑤: Nguyên hàm của hs phân thức hữu tỷ 387

Dạng ⑥: Nguyên hàm liên quan đến hàm ẩn 389

Dạng ⑦: Nguyên hàm của hs cho bởi nhiều công thức 392

Dạng ⑧: Tìm nguyên hàm thỏa mãn ĐK cho trước 395

§2- TÍCH PHÂN 398

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 398

Ⓑ Dạng toán cơ bản 401

Dạng ①: Kiểm tra định nghĩa, tính chất của tích phân 401

Dạng ②: Tích phân cơ bản(a), kết hợp tính chất (b) 408

Dạng ③: PP đổi biến t = u(x)-hàm công thức xđ (ngắn gọn là vi phân) 416

Dạng ④: PP tích phân từng phần-hàm xđ 417

Dạng ⑤: Tích phân đặc biệt-hàm xđ 418

Dạng ⑥: Tích phân dựa vào đồ thị 418

Dạng ⑦: Tích phân chứa tham số (chỉ trong kết quả) 421

Dạng ⑧: Tích phân liên quan đến phương trình hàm ẩn 424

§3- ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN 431

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 431

Ⓑ Dạng toán cơ bản 434

Dạng ①: Câu hỏi lý thuyết 434

Dạng ②: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm xác định 435

Dạng ③: Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay) hàm xác định 449

Dạng ④: Thể tích tính theo mặt cắt S(x) 451

Dạng ⑤: Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng 452

Dạng ⑥: Ứng dụng vào bài toán chuyển động 454

Dạng ⑦: Ứng dụng tích phân vào đại số(min-max, cực trị, so sánh, đơn điệu,...) 459

Dạng ⑧: Diện tích khi biết dạng các đồ thị hoặc hàm ẩn 462

Ghi Chú!

CHƯƠNG 3 - NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

§1- NGUYÊN HÀM

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

Ghi nhớ 1!

Định nghĩa:

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Định lí:

- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số.
- Do đó $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- Ký hiệu $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Ghi nhớ 2!

Tính chất của nguyên hàm

- ***Tính chất 1:*** $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$ và $\int f'(x)dx=f(x)+C$
- ***Tính chất 2:*** $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ với k là hằng số khác 0.
- ***Tính chất 3:*** $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$

Sự tồn tại của nguyên hàm

- ***Định lí:*** Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

Ghi nhớ 3!

Nguyên hàm của hàm số đơn giản	*Nguyên hàm của hàm số hợp* $(u=u(x))$
$\int dx=x+C$	$\int du=u+C$
$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C\,(\alpha\ne-1)$	$\int u^\alpha du=\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C\,(\alpha\ne-1)$
$\int\frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$	$\int\frac{1}{u}du=\ln\lvert u\rvert+C$
$\int e^x dx=e^x+C$	$\int e^u du=e^u+C$
$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\,(a>0,a\ne1)$	$\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C\,(a>0,a\ne1)$

Hàm số lượng giác

Ghi Chú!

$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$

Ghi nhớ 4!

①. *Phương pháp đổi biến số:*

- ***Định lý***: Cho hàm số $u = u\ x$ có đạo hàm liên tục trên K và hàm số $y = f\ u$ liên tục sao cho $f[u\ x]$ xác định trên K. Khi đó nếu F là một nguyên hàm của f, tức là $\int f\ u\ du = F\ u + C$ thì $\int f[u\ x]u'\ x\ dx = F[u\ x] + C.$
- ***Ghi nhớ:*** $\int f[u\ x]u'\ x\ dx = \int f[u\ x]du\ x = \int f\ u\ du$ $= F\ u + C = F[u\ x] + C.$ Với $u = u\ x$.

②. *Phương pháp từng phần:*

- ***Định lý***: Nếu $u,\ v$ là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K thì
$$\int u\ x\ v'\ x\ dx = u\ x\ v\ x - \int v\ x\ u'\ x\ dx.$$
- ***Ghi nhớ:*** Công thức trên viết gọn dưới dạng $\int u dv = uv - \int v du.$

B Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Định nghĩa, tính chất của nguyên hàm

Câu 1: (ĐTK 2020-L2-Câu 6) Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x) = -f(x), \forall x \in K$. **B.** $f'(x) = F(x), \forall x \in K$.

C. $F'(x) = f(x), \forall x \in K$. **D.** $f'(x) = -F(x), \forall x \in K$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa, hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.

Dạng ②: Nguyên hàm của hs cơ bản, gần cơ bản

Câu 2: **(ĐTN 2017-Câu 22)** Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 2x$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$ **B.** $\int f(x) dx = -\frac{1}{2}\sin 2x + C$

Ghi Chú!

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$ với $a \neq 0$; thay $a=2$ và $b=0$ để có kết quả.

Câu 3: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 2) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos 3x$

A. $\int \cos 3x dx = 3\sin 3x + C$ **B.** $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

C. $\int \cos 3x dx = \frac{-\sin 3x}{3} + C$ **D.** $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C$

Câu 4: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 2) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

A. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$ **B.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = -\frac{1}{2}\ln(5x-2) + C$

C. $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = 5\ln|5x-2| + C$ **D.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \ln|5x-2| + C$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức $\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \ (a \neq 0)$ ta được $\int \frac{\mathrm{d}x}{5x-2} = \frac{1}{5}\ln|5x-2| + C$.

Câu 5: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 8) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2\sin x$.

A. $\int 2\sin x dx = 2\cos x + C$. **B.** $\int 2\sin x dx = \sin^2 x + C$.

C. $\int 2\sin x dx = \sin 2x + C$. **D.** $\int 2\sin x dx = -2\cos x + C$.

Lời giải

Chọn D

Câu 6: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 9) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x \mathrm{d}x = 7^x \ln 7 + C$ **B.** $\int 7^x \mathrm{d}x = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

C. $\int 7^x \mathrm{d}x = 7^{x+1} + C$ **D.** $\int 7^x \mathrm{d}x = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $(0 < a \neq 1)$ ta được đáp án B

Ghi Chú!

Câu 7: (ĐTK 2018-Câu 9) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2+1$ là

A. x^3+C **B.** $\frac{x^3}{3}+x+C$ **C.** $6x+C$ **D.** x^3+x+C

Lời giải

Chọn D

$\int(3x^2+1)dx=x^3+x+C.$

Câu 8: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 7) Nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=x^3+x$ là

A. x^4+x^2+C. **B.** $3x^2+1+C$. **C.** x^3+x+C. **D.** $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int\left(x^3+x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 9: (ĐTK 2019-Câu 10) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^x+x$ là

A. e^x+x^2+C. **B.** $\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$.

C. $\frac{1}{x+1}\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$. **D.** e^x+1+C.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int(\mathrm{e}^x+x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 10: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 15) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+5$ là

A. $x^2+5x+C.$ **B.** $2x^2+5x+C.$ **C.** $2x^2+C.$ **D.** $x^2+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2x+5)\mathrm{d}x=x^2+5x+C.$

Câu 11: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 1) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+6$ là

A. x^2+6x+C. **B.** $2x^2+C$. **C.** $2x^2+6x+C$. **D.** x^2+C.

Lời giải

Chọn A

$\int(2x+6)dx=x^2+6x+C$.

Câu 12: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 12) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+3$ là

A. $2x^2+C$. **B.** x^2+3x+C. **C.** $2x^2+3x+C$. **D.** x^2+C.

Lời giải

Chọn B

Ghi Chú!

Ta có $\int(2x+3)\mathrm{d}x=x^2+3x+C$.

Câu 13: (ĐTK 2020-L1-Câu 11) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\cos x+6x$ là

A. $\sin x+3x^2+C$. **B.** $-\sin x+3x^2+C$.
C. $\sin x+6x^2+C$. **D.** $-\sin x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\cos x+6x)\mathrm{d}x=\sin x+3x^2+C$.

Câu 14: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 14) $\int x^2\mathrm{d}x$ bằng

A. $2x+C$. **B.** $\frac{1}{3}x^3+C$. **C.** x^3+C. **D.** $3x^3+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C$.

Câu 15: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 14) $\int x^3dx$ bằng

A. $4x^4+C$. **B.** $3x^2+C$. **C.** x^4+C. **D.** $\frac{1}{4}x^4+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C.$

Câu 16: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 25) $\int x^4\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** $4x^3+C$. **C.** x^5+C. **D.** $5x^5+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5+C$

Câu 17: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 6) $\int 5x^4\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** x^5+C. **C.** $5x^5+C$. **D.** $20x^3+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 5x^4\mathrm{d}x=5.\frac{x^5}{5}+C=x^5+C$.

Câu 18: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 14) $\int 6x^5dx$ bằng

A. $6x^6+C$. **B.** x^6+C. **C.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **D.** $30x^4+C$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int 6x^5dx = 6.\dfrac{x^6}{6} = x^6 + C$

Câu 19: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 24) $\int 3x^2\mathrm{d}x$ bằng

A. $3x^3 + C$. **B.** $6x + C$. **C.** $\dfrac{1}{3}x^3 + C$. **D.** $x^3 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int 3x^2\mathrm{d}x = x^3 + C$.

Câu 20: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 5) $\int 4x^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $4x^4 + C$. **B.** $\dfrac{1}{4}x^4 + C$. **C.** $12x^2 + C$. **D.** $x^4 + C$.

Lời giải

Chọn D

Theo công thức nguyên hàm cơ bản ta có $\int 4x^3\mathrm{d}x = x^4 + C$.

Câu 21: (ĐTK 2021-Câu 14) Cho hàm số $f(x) = 3x^2 - 1$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 3x^3 - x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{3}x^3 - x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 - C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (3x^2 - 1)\mathrm{d}x = x^3 - x + C$

Câu 22: (ĐTK 2021-Câu 15) Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2\sin 2x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = -2\sin 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức ta có: $\int \cos 2x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

Câu 23: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 11) Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$.

Ghi Chú!

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 4x + C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = x^3 + 4x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\left(x^2 + 4\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 4x + C.$$

Câu 24: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 27) Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^{x-2} + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x + 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x - 2x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(\mathrm{e}^x + 2)\mathrm{d}x = e^x + 2x + C$.

Câu 25: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 11) Cho hàm số $f\left(x\right) = x^2 + 3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = x^2 + 3x + C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 3x + C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = x^3 + 3x + C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2x + C$.

Lời giải

Chọn B

Câu 26: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 20) Cho hàm số $f(x) = e^x + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^{x-1} + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x - x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x + x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int f(x)dx = \int\left(e^x + 1\right)dx = \int e^x dx + \int 1dx = e^x + x + C.$$

Câu 27: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 9) Cho hàm số $f\left(x\right) = x^2 + 1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = x^3 + x + C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + x + C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = x^2 + x + C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = 2x + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x = \int\left(x^2 + 1\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + x + C$.

Ghi Chú!

Câu 28: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 14) Cho hàm số $f(x)=e^x+3$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+3x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-3}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-3x+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+3x+C.$

Câu 29: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 13) Cho hàm số $f(x)=x^2+2$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=2x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+2x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=x^2+2x+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=x^3+2x+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(x^2+2)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+2x+C$.

Câu 30: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 23) Cho hàm số $f(x)=e^x+4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+4x+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^{x-4}+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-4x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)dx=\int(e^x+4)dx=e^x+4x+C$.

Câu 31: (TN BGD 2022-MD101) Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)=-\sin x$. **B.** $f(x)=-\cos x$.

C. $f(x)=\sin x$. **D.** $f(x)=\cos x$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Suy ra $f(x)=\sin x$.

Câu 32: (TN BGD 2022-MD101) Cho hàm số $f(x)=e^x+2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x-x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=e^x+2x^2+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int(e^x+2x)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$.

Ghi Chú!

Câu 33: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Cho hàm số $f\left(x\right)=e^{x}+2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)dx=e^{x}+2x^{2}+C$. **B.** $\int f\left(x\right)dx=e^{x}-x^{2}+C$.

C. $\int f\left(x\right)dx=e^{x}+C$. **D.** $\int f\left(x\right)dx=e^{x}+x^{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f\left(x\right)dx=e^{x}+x^{2}+C$.

Câu 34: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Cho $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\cos x+C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f\left(x\right)=-\sin x$. **B.** $f\left(x\right)=\cos x$.

C. $f\left(x\right)=\sin x$. **D.** $f\left(x\right)=-\cos x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f\left(x\right)=\left(-\cos x+C\right)'=\sin x$.

Câu 35: (DE TN BGD 2022-MD 103) Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int e^{x}\mathrm{d}x=xe^{x}+C$. **B.** $\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x+1}+C$.

C. $\int e^{x}\mathrm{d}x=-e^{x+1}+C$. **D.** $\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}+C$.

Câu 36: (DE TN BGD 2022-MD 103) Hàm số $F\left(x\right)=\cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

A. $f_2\left(x\right)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **B.** $f_1\left(x\right)=-\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

C. $f_4\left(x\right)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. **D.** $f_3\left(x\right)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải

Chọn D

Có $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-\cot x+C$ suy ra $F\left(x\right)=\cot x$ trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3\left(x\right)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 37: (DE TN BGD 2022-MD 104) Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ là

A. $y=0$. **B.** $x=0$. **C.** $x+y=0$. **D.** $z=0$.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn D

Phương trình của mặt phẳng (Oxy) là $z=0$.

Câu 38: (DE TN BGD 2022-MD 104) Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int e^x dx = e^x + C$. **B.** $\int e^x dx = xe^x + C$.

C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. **D.** $\int e^x dx = e^{x+1} + C$.

Lời giải

Chọn A

$\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 39: (DE MH BGD 2023 - Câu 23) Cho $\int \frac{1}{x} dx = F(x) + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $F'(x) = \frac{2}{x^2}$. **B.** $F'(x) = \ln x$. **C.** $F'(x) = \frac{1}{x}$. **D.** $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[F(x)\right]' = \left(\int \frac{1}{x} dx\right)' = \frac{1}{x}$.

Câu 40: (DE MH BGD 2023 – Câu 25) Cho hàm số $f(x) = \cos x + x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = -\sin x + x^2 + C.$ **B.** $\int f(x) dx = \sin x + x^2 + C.$

C. $\int f(x) dx = -\sin x + \frac{x^2}{2} + C.$ **D.** $\int f(x) dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C.$

Lời giải

Chọn D

$\int f(x) dx = \int [\cos x + x] dx = \sin x + \frac{x^2}{2} + C.$

Câu 41: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 2] Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^{\frac{1}{3}} dx = x^{\frac{4}{3}} + C$. **B.** $\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$.

C. $\int x^{\frac{1}{3}} dx = x^{\frac{2}{3}} + C$. **D.** $\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C$ với $C \in \mathbb{R}$.

Câu 42: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 4] Cho hàm số $f(x) = \cos x - x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx=\int\left(\cos x-x\right)dx=\sin x-\dfrac{1}{2}x^2+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

Câu 43: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 2] Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^{\frac{1}{3}}dx=x^{\frac{4}{3}}+C$. **B.** $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$.

C. $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=x^{\frac{2}{3}}+C$. **D.** $\int x^{\frac{1}{3}}dx=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int x^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+C=\dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

Câu 44: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 4] Cho hàm số $f(x)=\cos x-x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x+x^2+C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=-\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-x^2+C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx=\int\left(\cos x-x\right)dx=\sin x-\dfrac{1}{2}x^2+C$ với $C\in\mathbb{R}$.

Câu 45: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 4] Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}x^6+C$. **B.** $\int x^5\mathrm{d}x=\dfrac{x^5}{\ln 5}+C$.

C. $\int x^5\mathrm{d}x=5x^4+C$. **D.** $\int x^5\mathrm{d}x=x^6+C$.

Lời giải

Chọn A

Câu 46: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 6] Cho hàm số $f\quad x\ =\cos x-x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\sin x+x^2+C$. **B.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\sin x-x^2+C$. **D.** $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=-\sin x-\dfrac{x^2}{2}+C$.

Lời giải

Chọn B

Ghi Chú!

$\int f(x)\mathrm{d}x = \sin x - \dfrac{x^2}{2} + C$.

Câu 47: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 13] Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = x^{\frac{4}{3}} + C$.
B. $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = x^{\frac{2}{3}} + C$.
C. $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \dfrac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$.
D. $\int x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

Câu 48: (ĐMH 2017-Câu 23) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)dx = \dfrac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x)dx = \dfrac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x)dx = -\dfrac{1}{3}\sqrt{2x-1} + C.$

D. $\int f(x)dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{2x-1} + C.$

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)dx = \int \sqrt{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}d(2x-1)$$
$$= \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} + C$$

Câu 49: (ĐTK 2017-Câu 10) Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{x} + C$.
B. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{x} + C$.
C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{x} + C$.
D. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{x} + C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\left(x^2 + \dfrac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{x} + C$.

Câu 50: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 4) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

A. $x^4 + x + C$ **B.** $4x^3 + 1 + C$. **C.** $x^5 + x^2 + C$. **D.** $\dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int f(x)dx = \int (x^4 + x)dx = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{1}{2}x^2 + C$.

Câu 51: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 14) Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $4x^3+2x+C$. **B.** $\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$.

C. x^4+x^2+C. **D.** x^5+x^3+C.

Lời giải

Chọn B

$\int f(x)dx=\int(x^4+x^2)dx=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+C$.

Câu 52: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 6) Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x^2$ là

A. x^4+x^3+C. **B.** $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+C$.

C. $3x^2+2x+C$. **D.** x^3+x^2+C.

Lời giải

Chọn B

Câu 53: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 8) Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x)=2x+4$ là

A. $2x^2+4x+C$. **B.** x^2+4x+C. **C.** x^2+C. **D.** $2x^2+C$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int f(x)dx=\int(2x+4)dx=x^2+4x+C$.

Câu 54: (ĐTK 2020-L1-Câu 24) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $x+3\ln(x-1)+C.$ **B.** $x-3\ln(x-1)+C.$

C. $x-\frac{3}{(x-1)^2}+C.$ **D.** $x+\frac{3}{(x-1)^2}+C.$

Lời giải

Chọn A

Trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $x-1>0$ nên

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+2}{x-1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{3}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+3\ln|x-1|+C=x+3\ln(x-1)+C.$$

Câu 55: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 21) $\int x^5dx$ bằng

A. $5x^4+C$. **B.** $\frac{1}{6}x^6+C$. **C.** x^6+C. **D.** $6x^6+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int x^5dx=\frac{1}{6}x^6+C$ nên chọn đáp án B.

Câu 56: (TN BGD 2022-MD101) Cho hàm số $f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ghi Chú!

A. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \tan 2x + C$. **B.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\cot 2x + C$.

C. $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C$. **D.** $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Lời giải

Chọn C

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{\cos^2 2x} = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C.$$

Câu 57: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 2x}$. Khẳng định nào dưới đay đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \tan 2x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\tan 2x + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C$.

Lời giải

Chọn D

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int\left(1 - \frac{1}{\cos^2 2x}\right)\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}\tan 2x + C.$$

Câu 58: (DE TN BGD 2022-MD 103) Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{x} + C.$

B $\int f(x)dx = x + 2e^{2x} + C.$

B. $\int f(x)dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

C. $\int f(x)dx = x + e^{2x} + C.$

D. Lời giải

Chọn C

Ta có $\int (1 + e^{2x})dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$

Câu 59: (DE TN BGD 2022-MD 104) Cho hàm số $f(x) = 1 + \mathrm{e}^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + C$. **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x + 2\mathrm{e}^{2x} + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \mathrm{e}^{2x} + C$. **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x = x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C$.

Lời giải

Chọn D

Ghi Chú!

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$.

Câu 60: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 16] Cho hàm số $f(x)=1+2\cos 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=x+\sin 2x+C$. **B.** $\int f(x)dx=x+2\sin 2x+C$.

C. $\int f(x)dx=x-2\sin 2x+C$. **D.** $\int f(x)dx=x-\sin 2x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int(1+2\cos 2x)dx=\int 1dx+\int 2\cos 2xdx=x+2\int\frac{\cos 2xd(2x)}{2}=x+\sin 2x+C$

Dạng ③: PP đổi biến số t = u(x) hàm xác định(ngắn gọn là vi phân)

Câu 61: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 42) Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2e^x+2x^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C$.

C. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C$. **D.** $e^{2x}+4x^2+C$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1: $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có $f(x)=F'(x),\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=e^x+2x,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(2x)=e^{2x}+4x$.

Vậy $\int f(2x)\mathrm{d}x=\int\left(e^{2x}+4x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C$.

Cách 2:

$\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}F(2x)+C=\frac{1}{2}\left[e^{2x}+(2x)^2\right]+C=\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C$

.

Câu 62: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 40) Biết $F(x)=e^x-2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $2e^x-4x^2+C$. **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}-4x^2+C$. **C.** $e^{2x}-8x^2+C$. **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int f(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(2x)\mathrm{d}(2x)=\frac{1}{2}F(2x)=\frac{1}{2}\left(e^{2x}-2(2x)^2\right)+C$

Ghi Chú!

Câu 63: (ĐTK 2020-L1-Câu 38) Cho hàm số $f(x)$ có $f(3)=3$ và $f'(x)=\dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$, $\forall x>0$. Khi đó $\int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** $\dfrac{197}{6}$. **C.** $\dfrac{29}{2}$. **D.** $\dfrac{181}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \dfrac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$. Đặt

$t=\sqrt{x+1}\Rightarrow x+1=t^2\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow \mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

Khi đó,

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x=\int \frac{t^2-1}{t^2-t}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int \frac{(t-1).(t+1)}{t.(t-1)}\cdot 2t\mathrm{d}t=\int (2t+2)\mathrm{d}t$$

$$=t^2+2t+C=(x+1)+2\sqrt{x+1}+C.$$

Mà $f(3)=3\Leftrightarrow (3+1)+2\sqrt{3+1}+C=3\Leftrightarrow C=-5$.

$$\Rightarrow f(x)=(x+1)+2\sqrt{x+1}-5=x+2\sqrt{x+1}-4.$$

$$\Rightarrow \int\limits_3^8 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_3^8\left(x+2\sqrt{x+1}-4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}\sqrt{(x+1)^3}-4x\right)\right|_3^8=36-\frac{19}{6}=\frac{197}{6}$$

.

Câu 64: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 42) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$. **B.** $\dfrac{x+1}{2\sqrt{x^2+1}}+C$.

C. $\dfrac{2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}}+C$. **D.** $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Do đó $g(x)=(x+1)f'(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

$$\int g(x)\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}(x^2+1)+\int\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$$

$$=-(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C=\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}+C.$$ Chọn đáp án

Ghi Chú!

D.

Câu 65: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 39) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **B.** $\dfrac{x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

C. $\dfrac{x^2+2x-4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$. **D.** $\dfrac{2x^2+x+4}{2\sqrt{x^2+4}}+C$.

Lời giải

Chọn B

$\int g(x)\mathrm{d}x=\int(x+1)f'(x)\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=(x+1)\\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\mathrm{d}x\\ v=f(x)\end{cases}$.

$\Rightarrow\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=(x+1)f(x)-\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$.

Tính $\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$, đặt $t=\sqrt{x^2+4}\Rightarrow t^2=x^2+4\Rightarrow t\mathrm{d}t=x\mathrm{d}x$.

$\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x=\int\dfrac{t}{t}\mathrm{d}t=\int 1\mathrm{d}t=t+C=\sqrt{x^2+4}+C$.

Khi đó: $\int g(x)\mathrm{d}x=(x+1)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\sqrt{x^2+4}+C=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2+4}}+C$.

Dạng ④: PP nguyên hàm từng phần

Câu 66: (ĐTK 2019-Câu 33) Họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$ là

A. $2x^2\ln x+3x^2$. **B.** $2x^2\ln x+x^2$.

C. $2x^2\ln x+3x^2+C$. **D.** $2x^2\ln x+x^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 4x(1+\ln x)\mathrm{d}x=\int 4x\mathrm{d}x+\int 4x\ln x\mathrm{d}x$

+ Tính $\int 4x\mathrm{d}x=2x^2+C_1$

+ Tính $\int 4x\ln x\mathrm{d}x$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=4x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x\\ v=2x^2\end{cases}$

Suy ra $\int 4x\ln x\mathrm{d}x=2x^2\ln x-\int 2x\mathrm{d}x=2x^2\ln x-x^2+C_2$. Do đó $I=2x^2\ln x+x^2+C$.

Cách 2. Ta có $\left(2x^2\ln x+x^2\right)'=\left(2x^2\right)'.\ln x+2x^2.(\ln x)'+\left(x^2\right)'$

Ghi Chú!

$=4x.\ln x+2x^2.\dfrac{1}{x}+2x\ =4x(1+\ln x)$.

Do đó $2x^2\ln x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$.

Hay $2x^2\ln x+x^2+C$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=4x(1+\ln x)$.

Câu 67: (ĐTK 2020-L1-Câu 44) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là:

A. $-\sin 2x+\cos 2x+C$. **B.** $-2\sin 2x+\cos 2x+C$.

C. $-2\sin 2x-\cos 2x+C$. **D.** $2\sin 2x-\cos 2x+C$.

Lời giải

Chọn C

Do $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^x$

nên $f(x)e^x=(\cos 2x)'\Leftrightarrow f(x)e^x=-2\sin 2x$.

Khi đó ta có $\int f(x)e^x\mathrm{d}x=\cos 2x+C$.

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(x)\mathrm{d}x\\ v=e^x\end{cases}$.

Khi đó $\int f(x)e^x\mathrm{d}x=\cos 2x+C\Leftrightarrow\int f(x)\mathrm{d}(e^x)=\cos 2x+C$

$\Leftrightarrow f(x)e^x-\int f'(x)e^x\mathrm{d}x=\cos 2x+C\Leftrightarrow\int f'(x)e^x\mathrm{d}x=-2\sin 2x-\cos 2x+C$

.

Vậy tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^x$ là $-2\sin 2x-\cos 2x+C$.

Câu 68: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 39) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1)f'(x)$ là

A. $\dfrac{x^2+2x-2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$. **B.** $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C$.

C. $\dfrac{2x^2+x+2}{\sqrt{x^2+2}}+C$. **D.** $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x^2+2}}+C$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1

$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$;

$g(x)=(x+1)f'(x)=\dfrac{2(x+1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$.

Ghi Chú!

Ta có $\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C\right)'=\dfrac{2(x+1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=g(x)$.

Cách 2

Đặt $\begin{cases}u=x+1\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=f(x)\end{cases}$. Khi đó

$$g(x)=(x+1)f(x)-\int f(x)dx=(x+1).\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}-\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}-\int\frac{d(x^2+2)}{2\sqrt{x^2+2}}$$

$$=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2}}-\sqrt{x^2+2}+C=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}+C.$$

Câu 69: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 41) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x)=(x+1).f'(x)$ là:

A. $\dfrac{x^2+2x-3}{2\sqrt{x^2+3}}+C$. **B.** $\dfrac{x+3}{2\sqrt{x^2+3}}+C$.

C. $\dfrac{2x^2+x+3}{\sqrt{x^2+3}}+C$. **D.** $\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}+C$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $I=\int(x+1).f'(x)dx$

Đặt $\begin{cases}u=x+1\Rightarrow du=dx\\ dv=f'(x)dx\Rightarrow v=f(x)\end{cases}$

Khi đó:

$$I=(x+1).f(x)-\int f(x).dx=(x+1).\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}.dx$$

$$=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}\int(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}.d(x^2+3)=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{2}.\frac{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+3}}-\sqrt{x^2+3}+C=\frac{x^2+x-x^2-3}{\sqrt{x^2+3}}+C=\frac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}+C$$

Dạng ⑤: Nguyên hàm của hs phân thức hữu tỷ

Câu 70: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 31) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$ là

Ghi Chú!

A. $2\ln(x+1)+\dfrac{2}{x+1}+C$. **B.** $2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C$.

C. $2\ln(x+1)-\dfrac{2}{x+1}+C$. **D.** $2\ln(x+1)-\dfrac{3}{x+1}+C$.

Lời giải

Chọn B

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2x-1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-3\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}=2\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+C$$
.

Vì $x\in(-1;+\infty)$ nên $\int f(x)dx=2\ln(x+1)+\dfrac{3}{x+1}+C$

Câu 71: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 34) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-1)-\dfrac{2}{x-1}+c$. **B.** $3\ln(x-1)+\dfrac{1}{x-1}+c$.

C. $3\ln(x-1)-\dfrac{1}{x-1}+c$. **D.** $3\ln(x-1)+\dfrac{2}{x-1}+c$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\dfrac{3x-3+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3(x-1)+2}{(x-1)^2}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

Vậy $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x=3\int\dfrac{\mathrm{d}(x-1)}{x-1}+2\int\dfrac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2}$.

$=3\ln|x-1|+2\int(x-1)^{-2}\mathrm{d}(x-1)\ =3\ln(x-1)-\dfrac{2}{x-1}+C$ vì $x>1$.

Câu 72: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 34) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{(x+2)^2}$ trên khoảng $(-2;+\infty)$ là

A. $2\ln(x+2)+\dfrac{1}{x+2}+C$. **B.** $2\ln(x+2)-\dfrac{1}{x+2}+C$.

C. $2\ln(x+2)-\dfrac{3}{x+2}+C$. **D.** $2\ln(x+2)+\dfrac{3}{x+2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\int f(x)dx=\int\frac{2x+4-3}{(x+2)^2}dx=\int\left[\frac{2}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}\right]dx=2\ln(x+2)+\frac{3}{x+2}+C$$

Cách khác:

$$I=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{2x+1}{(x+2)^2}\mathrm{d}x.$$

Đặt $x+2=t\Rightarrow x=t-2\Rightarrow \mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ với $t>0$.

Ghi Chú!

Ta có $I=\int \frac{2t-3}{t^2}dt=\int\left(\frac{2}{t}-\frac{3}{t^2}\right)dt=2\ln t+\frac{3}{t}+C$.

Khi đó $I=2\ln(x+2)+\frac{3}{x+2}+C.$

Câu 73: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 35) Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $3\ln(x-2)+\frac{4}{x-2}+C$.
B. $3\ln(x-2)+\frac{2}{x-2}+C$.
C. $3\ln(x-2)-\frac{2}{x-2}+C$.
D. $3\ln(x-2)-\frac{4}{x-2}+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\frac{3x-2}{(x-2)^2}=\frac{3(x-2)+4}{(x-2)^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}$. Do đó

$$\int\frac{3x-2}{(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{3}{x-2}+\frac{4}{(x-2)^2}\right)dx=3\ln(x-2)-\frac{4}{x-2}+C.$$

Dạng ⑥: Nguyên hàm liên quan đến hàm ẩn

Câu 74: (ĐTK 2018-Câu 37) Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}, f(0)=1, f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $4+\ln 15$ **B.** $2+\ln 15$ **C.** $3+\ln 15$ **D.** $\ln 15$

Lời giải

Chọn C

$$\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=f(x)$$

Với $x<\frac{1}{2}\Rightarrow C=1$ nên $f(-1)=1+\ln 3$

Với $x>\frac{1}{2}\Rightarrow C=2$ nên $f(3)=2+\ln 5$

Nên $f(-1)+f(3)=3+\ln 15$.

Câu 75: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 40) Biết $F(x)=e^x-x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

Ghi Chú!

A. $\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C.$ **B.** $e^{2x}-4x^2+C.$

C. $2e^{x}-2x^2+C.$ **D.** $\frac{1}{2}e^{2x}-x^2+C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=e^x-x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $f(x)=F'(x)=e^x-2x\Rightarrow f(2x)=e^{2x}-4x.$

Khi đó, $\int f(2x)\mathrm{d}x=\int\left(e^{2x}-4x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C.$

Câu 76: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 40) Biết $F(x)=\mathrm{e}^x+2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\mathrm{e}^{2x}+8x^2+C$. **B.** $2\mathrm{e}^{x}+4x^2+C$.

C. $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+2x^2+C$. **D.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+4x^2+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\left(F(x)\right)'=\left(\mathrm{e}^x+2x^2\right)'=\mathrm{e}^x+4x$.

Khi đó $\int f(2x)\mathrm{d}x=\int\left(\mathrm{e}^{2x}+8x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+4x^2+C$

Câu 77: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 40) Cho $F(x)=(x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(4-2x)e^x+C$ **B.** $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{2-x}{2}e^x+C$

C. $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(2-x)e^x+C$ **D.** $\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=(x-2)e^x+C$

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài ta có $\int f(x).e^{2x}\mathrm{d}x=(x-1)e^x+C$, suy ra $f(x).e^{2x}=\left[(x-1)e^x\right]'=e^x+(x-1).e^x$

$\Rightarrow f(x)=e^{-x}+(x-1).e^{-x}\Rightarrow f'(x)=(1-x).e^{-x}$

Suy ra
$\int f'(x)e^{2x}\mathrm{d}x=\int(1-x)e^x\mathrm{d}x=\int(1-x)\mathrm{d}\left(e^x\right)=e^x(1-x)+\int e^x\mathrm{d}x=e^x(2-x)+C$.

Câu 78: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 37) Cho $F(x)=-\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{5x^5}+C$. **B.** $\int f'(x)\ln x dx=\frac{\ln x}{x^3}-\frac{1}{5x^5}+C$.

Ghi Chú!

C. $\int f'(x)\ln xdx=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$. **D.** $\int f'(x)\ln xdx=-\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $F'(x)=\frac{1}{3}.\frac{3x^2}{x^6}=\frac{1}{x^4}=\frac{f(x)}{x}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{x^3}$.

Xét $I=\int f'(x)\ln x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=f'(x)dx\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=f(x)\end{cases}$.

Ta có: $I=\ln x.f(x)-\int\frac{f(x)}{x}dx+C=\frac{\ln x}{x^3}+\frac{1}{3x^3}+C$.

Câu 79: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 42) Cho $F(x)=\frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)\ln x$.

A. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C$

B. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}+C$

C. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)+C$

D. $\int f'(x)\ln x\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+C$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2x^2}$. Chọn $f(x)=\frac{-1}{x^2}$.

Khi đó: $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int\frac{2}{x^3}\ln x\,\mathrm{d}x$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ \mathrm{d}v=\frac{2}{x^3}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ v=\frac{-1}{x^2}\end{cases}$.

Khi đó: $\int f'(x)\ln x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\ln x}{x^3}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x^2}+\int\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=-\left(\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)+C.$

Câu 80: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 48) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{2}{9}$ và $f'(x)=2x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{19}{36}$. **D.** $-\frac{2}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Ghi Chú!

Ta có $f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=2x\Leftrightarrow\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-2x\Leftrightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-x^2+C$

.

Từ $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ suy ra $C=-\dfrac{1}{2}$. Do đó $f(1)=\dfrac{1}{-1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 81: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 40) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\dfrac{11}{6}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** $-\dfrac{2}{9}$. **D.** $-\dfrac{7}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=x$.

Do đó

$\int\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int xdx\Leftrightarrow-\int d\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=\int xdx\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{2}x^2+C\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2+C}$

Theo giả thiết $f(2)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2+1}$. Từ đó suy ra

$f(1)=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 82: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 41) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\dfrac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{41}{400}$. **B.** $-\dfrac{1}{10}$. **C.** $-\dfrac{391}{400}$. **D.** $-\dfrac{1}{40}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=4x^3\left[f(x)\right]^2\Rightarrow-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-4x^3\Rightarrow\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]'=-4x^3$

$\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}=-x^4+C$

Do $f(2)=-\dfrac{1}{25}$, nên ta có $C=-9$. Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{x^4+9}\Rightarrow f(1)=-\dfrac{1}{10}$.

Dạng ⑦: Nguyên hàm của hs cho bởi nhiều công thức

Ghi Chú!

Câu 83: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 39) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+5 & khi\;\; x\ge 1\\ 3x^2+4 & khi\;\; x<1\end{cases}$.

Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Lời giải

Chọn A

$$f(x)=\begin{cases}2x+5 & khi\;\; x\ge 1\\ 3x^2+4 & khi\;\; x<1\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 & khi\;\; x\ge 1\\ x^3+4x+C_2 & khi\;\; x<1\end{cases}.$$

Vì $F(0)=2\Rightarrow C_2=2\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+5x+C_1 & khi\;\; x\ge 1\\ x^3+4x+2 & khi\;\; x<1\end{cases}$.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(x^2+5x+C_1\right)=\lim_{x\to 1^-}\left(x^3+4x+2\right)\Leftrightarrow 1+5+C_1=1+4+2\Leftrightarrow C_1=1$$

$$\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+5x+1 & khi\;\; x\ge 1\\ x^3+4x+2 & khi\;\; x<1\end{cases}.$$

Vậy $F(-1)+2F(2)=-3+2.15=27$.

Câu 84: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 40) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2-2 & \text{khi } x<1\end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$.Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng.

A. 9. **B.** 15. **C.** 11. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int(2x-1)\mathrm{d}x=x^2-x+c_1$; $\int\left(3x^2-2\right)\mathrm{d}x=x^3-2x+c_2$

Suy ra $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x^2-x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3-2x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

Mà ta có $F(0)=2\Rightarrow C_2=2$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y=F(x)$ liên tục tại $x=1$

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} F(x)\Rightarrow C_1=1$.

Khi đó ta có: $F(x)=\begin{cases}x^2-x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3-2x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ suy ra $\begin{cases}F(-1)=3\\ F(2)=3\end{cases}$.

Vậy $F(-1)+2F(2)=9$.

Ghi Chú!

Câu 85: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 40) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ge 1\\ 3x^2+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 23. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Ta có $F(x)=\begin{cases}x^2+3x+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+2x+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+3x+C_1\right)=C_1+4$.

$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^3+2x+C_2\right)=C_2+3$.

$F(x)$ liên tục tại $x=1\Leftrightarrow C_1+4=C_2+3$ (1)

$F(0)=2\Rightarrow C_2=2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}C_1=1\\ C_2=2\end{cases}\Rightarrow F(x)=\begin{cases}x^2+3x+1 & \text{khi } x\ge 1\\ x^3+2x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

$F(-1)+2F(2)=(-1)^3+2(-1)+2+2\left(2^2+3.2+1\right)=21$.

Câu 86: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 41) Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+2 & khi\ \ x\ge 1\\ 3x^2+1 & khi\ \ x<1\end{cases}$.

Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0)=2$. Giá trị của $F(-1)+2F(2)$ bằng

A. 18. **B.** 20. **C.** 9. **D.** 24.

Lời giải

Chọn A

- F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)=\begin{cases}x^2+2x+C_1 & khi\ \ x\ge 1\\ x^3+x+C_2 & khi\ \ x<1\end{cases}$.
- Ta có: $F(0)=2\Rightarrow C_2=2$. (1)
- Do F liên tục tại $x=1$ nên $\lim\limits_{x\to 1^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)$

$\Leftrightarrow C_1+3=C_2+2\overset{(1)}{\Leftrightarrow}C_1+3=4\Leftrightarrow C_1=1$.

- Do đó $F(x)=\begin{cases}x^2+2x+1 & khi\ \ x\ge 1\\ x^3+x+2 & khi\ \ x<1\end{cases}$.
- Suy ra $F(-1)+2F(2)=18$.

➠Dạng ⑧: Tìm nguyên hàm thỏa mãn ĐK cho trước

Câu 87: (ĐTN 2017-Câu 24) Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{x-1}$ và $F(2)=1$. Tính $F(3)$.

A. $F(3)=\ln 2-1$ **B.** $F(3)=\ln 2+1$ **C.** $F(3)=\frac{1}{2}$ **D.** $F(3)=\frac{7}{4}$

Lời giải

Chọn B

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x=\ln|x-1|+C$. $F(2)=1\Leftrightarrow \ln 1+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\ln|x-1|+1$. Suy ra $F(3)=\ln 2+1$.

Câu 88: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 27) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x)=3-5\sin x$ và $f(0)=10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x)=3x+5\cos x+5$ **B.** $f(x)=3x+5\cos x+2$

C. $f(x)=3x-5\cos x+2$ **D.** $f(x)=3x-5\cos x+15$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f(x)=\int(3-5\sin x)dx=3x+5\cos x+C$

Theo giả thiết $f(0)=10$ nên $5+C=10\Rightarrow C=5$.

Vậy $f(x)=3x+5\cos x+5$.

Câu 89: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 13) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x)=e^x+x^2+\frac{3}{2}$. **B.** $F(x)=2e^x+x^2-\frac{1}{2}$.

C. $F(x)=e^x+x^2+\frac{5}{2}$. **D.** $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$F(x)=\int(e^x+2x)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$.

$F(0)=\frac{3}{2}\Leftrightarrow e^0+C=\frac{3}{2}\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$. Vậy $F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Câu 90: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 28) Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

A. $F(x)=\cos x-\sin x+3$ **B.** $F(x)=-\cos x+\sin x+3$

Ghi Chú!

C. $F(x)=-\cos x+\sin x-1$ **D.** $F(x)=-\cos x+\sin x+1$

Lời giải

Chọn D

Có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=2\Leftrightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1$

$\Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+1$.

Câu 91: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 32) Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x).e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x).e^{2x}$.

A. $\int f'(x).e^{2x}dx=-x^2+2x+C$ **B.** $\int f'(x).e^{2x}dx=-x^2+x+C$

C. $\int f'(x).e^{2x}dx=2x^2-2x+C$ **D.** $\int f'(x).e^{2x}dx=-2x^2+2x+C$

Lời giải:

Chọn D

Ta có $f(x).e^{2x}=F'(x)=2x\Rightarrow\left(f(x).e^{2x}\right)'=2$ hay

$f'(x)e^{2x}+2f(x)e^{2x}=2\Rightarrow f'(x)e^{2x}+4x=2$

Suy ra $f'(x)e^{2x}=2-4x$ nên $\int f'(x).e^{2x}dx=-2x^2+2x+C$.

------------- HẾT -------------

§2- TÍCH PHÂN

A Tóm tắt lý thuyết cơ bản

Ghi nhớ 1

Định nghĩa:

- Cho hàm số f liên tục trên K và $a,\ b$ là hai số bất kì thuộc K.
- Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F\ b - F\ a$ được gọi là tích phân của f từ a đến b
- ***Kí hiệu là***: $\int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x.$

Trong trường hợp $a < b$, ta gọi $\int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x$ là *tích phân của f trên đoạn* $a;b$.

- Người ta còn dùng kí hiệu $F\ x\ \Big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F\ b - F\ a$.

Như vậy ta có: $\boxed{\int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x = F\ x\ \Big|_a^b.}$

Ghi nhớ 2

Định lý:

- Giả sử các hàm số $f,\ g$ liên tục trên K và $a,\ b,\ c$ là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có

①. $\int\limits_a^a f\ x\ \mathrm{d}x = 0;$

②. $\int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f\ x\ \mathrm{d}x;$

③. $\int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x + \int\limits_b^c f\ x\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^c f\ x\ \mathrm{d}x;$

④. $\int\limits_a^b [f\ x\ + g\ x\ ]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x + \int\limits_a^b g\ x\ \mathrm{d}x;$

⑤. $\int\limits_a^b kf\ x\ \mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}.$

Ghi nhớ 3

Để tính tích phân $I = \int\limits_a^b f\ x\ \mathrm{d}x$ **nếu** $f\ x\ = g[u\ x\ ].u'\ x$ **, ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau:**

Bước 1. **Đặt** $t = u\ x\ \Rightarrow \mathrm{d}t = u'\ x\ \mathrm{d}x.$

Bước 2. **Đổi cận:** $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = u\ a \\ x = b \Rightarrow t = u\ b \end{cases}.$

Bước 3. **Thay vào, ta có** $I = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} g\ t\ \mathrm{d}t = G\ t\ \Big|_{u\ a}^{u\ b}.$

Ghi Chú!

Ghi Chú!

Dấu hiệu nhận biết và cách đổi biến

	Dấu hiệu	Có thể đặt	Ví dụ
1	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	• $I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. ☞Đặt $t=\sqrt{x+1}$
2	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	• $I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. ☞Đặt $t=x-1$
3	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	• $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. ☞Đặt $t=\tan x+3$
4	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t=\ln x$ *hoặc* biểu thức chứa $\ln x$	• $I=\int_1^e \frac{\ln xdx}{x(\ln x+1)}$. ☞Đặt $t=\ln x+1$
5	Có e^xdx	$t=e^x$ *hoặc* biểu thức chứa e^x	• $I=\int_0^{\ln 2} e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. ☞ Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$
6	Có $\sin xdx$	$t=\cos x$	• $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos xdx$. ☞Đặt $t=\sin x$
7	Có $\cos xdx$	$t=\sin xdx$	• $I=\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$. ☞Đặt $t=2\cos x+1$
8	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$	• $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ ☞Đặt $t=\tan x$
9	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$	• $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int \frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. ☞Đặt $t=\cot x$

Ghi nhớ 4

Phương pháp từng phần:

- Cho hai hàm số u và v liên tục trên $a;b$ và có đạo hàm liên tục trên $a;b$.
- Khi đó: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$
- Một số tích phân các hàm số dễ phát hiện u và dv

Đặt	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos xdx$	$\int_a^b P(x).\sin xdx$	$\int_a^b P(x).l\,n\,xdx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos xdx$	$\sin xdx$	$P(x)$

Ghi nhớ: đặt u theo quy tắc " nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ" .

Ghi nhớ 1

Định nghĩa:

Ghi Chú!

- Cho hàm số f liên tục trên K và $a,\ b$ là hai số bất kì thuộc K.
- Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của f từ a đến b
- ***Kí hiệu là***: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

☑ Trong trường hợp $a<b$, ta gọi $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ là *tích phân của f trên đoạn $[a;b]$*.

- Người ta còn dùng kí hiệu $F(x)\big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$.

☑ Như vậy ta có: $\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b.}$

Ghi nhớ 2

☑ ***Định lý:***

• Giả sử các hàm số $f,\ g$ liên tục trên K và $a,\ b,\ c$ là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có

①. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0;$

②. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x;$

③. $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x;$

④. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x;$

⑤. $\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$.

Ghi nhớ 3

Để tính tích phân $I=\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nếu $f(x)=g[u(x)].u'(x)$, ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau:

☑ ***Bước 1.*** **Đặt** $t=u(x) \Rightarrow \mathrm{d}t = u'(x)\,\mathrm{d}x$.

☑ ***Bước 2.*** **Đổi cận:** $\begin{cases} x=a \Rightarrow t=u(a) \\ x=b \Rightarrow t=u(b) \end{cases}$.

☑ ***Bước 3.*** **Thay vào, ta có** $I=\int\limits_{u(a)}^{u(b)} g(t)\,\mathrm{d}t = G(t)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$.

Dấu hiệu nhận biết và cách đổi biến

	Dấu hiệu	*Có thể đặt*	*Ví dụ*
①	Có $\sqrt{f(x)}$	$t=\sqrt{f(x)}$	• $I=\int_0^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}$. ☞Đặt $t=\sqrt{x+1}$
②	Có $(ax+b)^n$	$t=ax+b$	• $I=\int_0^1 x(x+1)^{2016}dx$. ☞Đặt $t=x-1$

Ghi Chú!

③	Có $a^{f(x)}$	$t=f(x)$	• $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\tan x+3}}{\cos^2 x}dx$. ☞Đặt $t=\tan x+3$
④	Có $\frac{dx}{x}$ và $\ln x$	$t=\ln x$ hoặc biểu thức chứa $\ln x$	• $I=\int_1^e\frac{\ln xdx}{x(\ln x+1)}$. ☞Đặt $t=\ln x+1$
⑤	Có $e^x dx$	$t=e^x$ hoặc biểu thức chứa e^x	• $I=\int_0^{\ln 2}e^{2x}\sqrt{3e^x+1}dx$. ☞ Đặt $t=\sqrt{3e^x+1}$
⑥	Có $\sin xdx$	$t=\cos x$	• $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\cos xdx$. ☞Đặt $t=\sin x$
⑦	Có $\cos xdx$	$t=\sin xdx$	• $I=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2\cos x+1}dx$. ☞Đặt $t=2\cos x+1$
⑧	Có $\frac{dx}{\cos^2 x}$	$t=\tan x$	• $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\frac{1}{\cos^2 x}dx$ ☞Đặt $t=\tan x$
⑨	Có $\frac{dx}{\sin^2 x}$	$t=\cot x$	• $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{\cot x}}{1-\cos 2x}dx=\int\frac{e^{\cot x}}{2\sin^2 x}dx$. ☞Đặt $t=\cot x$

Ghi nhớ ④

Phương pháp từng phần:

- Cho hai hàm số u và v liên tục trên $a;b$ và có đạo hàm liên tục trên $a;b$.
- Khi đó: $\int_a^b u\mathrm{d}v=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\mathrm{d}u.$
- Một số tích phân các hàm số dễ phát hiện u và $\mathrm{d}v$

Đặt	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos xdx$	$\int_a^b P(x).\sin xdx$	$\int_a^b P(x).l\,\mathrm{n}\,xdx$
u	$P(x)$	$P(x)$	$P(x)$	$\ln x$
dv	$e^x dx$	$\cos xdx$	$\sin xdx$	$P(x)$

Ghi nhớ: đặt u theo quy tắc "nhất log, nhì đa, tam lượng, tứ mũ".

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Kiểm tra định nghĩa, tính chất của tích phân

Câu 1: (ĐTN 2017-Câu 23) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên đoạn $[1;2]$, $f(1)=1$ và $f(2)=2$. Tính $I=\int_1^2 f'(x)dx.$

Ghi Chú!

A. $I=1$. **B.** $I=-1$. **C.** $I=3$. **D.** $I=\dfrac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $I=\int\limits_1^2 f'(x)dx=f(x)\Big|_1^2=f(2)-f(1)=2-1=1$.

Câu 2: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 11) Biết $\int\limits_0^1 f(x)dx=-2$ và $\int\limits_0^1 g(x)dx=3$, khi đó $\int\limits_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\limits_0^1\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int\limits_0^1 f(x)dx-\int\limits_0^1 g(x)dx=-2-3=-5$.

Câu 3: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 8) Biết tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx=3$ và $\int\limits_0^1 g(x)dx=-4$. Khi đó $\int\limits_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int\limits_0^1\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_0^1 g(x)dx=3+(-4)=-1$.

Câu 4: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 4) Biết $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=6$, khi đó $\int\limits_1^2\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** -8. **C.** 8. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\limits_1^2\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x=2-6=-4$.

Câu 5: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 15) Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=-4$, khi đó $\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\int_0^1\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=2+(-4)=-2$.

Ghi Chú!

Câu 6: (ĐTK 2020-L1-Câu 7) Nếu $\int_1^2 f(x)dx=-2$ và $\int_2^3 f(x)dx=1$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^3 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx=-2+1=-1$.

Câu 7: (ĐTK 2020-L2-Câu 18) Nếu $\int_0^1 f(x)dx=4$ thì $\int_0^1 2f(x)dx$ bằng

A. 16. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_0^1 2f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2.4=8$.

Câu 8: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 3) Biết $\int_1^2 f(x)dx=2$. Giá trị của $\int_1^3 3f(x)dx$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^3 3f(x)dx=3\int_1^3 f(x)dx=3.2=6$.

Câu 9: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 11) Biết $\int_2^3 f(x)dx=4$ và $\int_2^3 g(x)dx=1$. Khi đó $\int_2^3 \left[f(x)-g(x)\right]dx$ bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_2^3 \left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_2^3 f(x)dx-\int_2^3 g(x)dx=4-1=3$.

Câu 10: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 8) Biết $\int_1^2 f(x)dx=3$ và $\int_1^2 g(x)dx=2$. Khi đó $\int_1^2 \left[f(x)-g(x)\right]dx$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^2 \left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_1^2 f(x)dx-\int_1^2 g(x)dx=3-2=1$.

Ghi Chú!

Câu 11: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 10) Biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$ và $\int_1^2 g(x)dx = 2$. Khi đó $\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** -1. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$\int_1^2 [f(x)+g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_1^2 g(x)dx = 3+2=5.$$

Câu 12: (ĐTK 2021-Câu 16) Nếu $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ và $\int_2^3 f(x)\,dx = -2$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -10. **D.** -7.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = 5-2=3$.

Câu 13: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 2) Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 3$ và $\int_1^4 g(x)dx = -2$ thì $\int_1^4 [f(x)-g(x)]dx$ bằng

A. -1. **B.** -5. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$$\int_1^4 [f(x)-g(x)]dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 3-(-2)=5.$$

Câu 14: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 16) Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^3 3f(x)dx$ bằng

A. 36. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$\int_0^3 3f(x)dx = 3\int_0^3 f(x)dx = 3.4 = 12.$$

Câu 15: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 3) Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 6$ và $\int_1^4 g(x)dx = -5$ thì $\int_1^4 [f(x)-g(x)]dx$ bằng:

A. -1. **B.** -11. **C.** 1. **D.** 11.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^4 \left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 6-(-5)=11$.

Câu 16: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 22) Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 3$ thì $\int_0^3 2f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 18. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

$\int_0^3 2f(x)dx = 2\int_0^3 f(x)dx = 2.3 = 6$.

Câu 17: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 4) Nếu $\int_1^4 f(x)dx = 5$ và $\int_1^4 g(x)dx = -4$ thì $\int_1^4 \left[f(x)-g(x)\right]dx$ bằng

A. -1. **B.** -9. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^4 \left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 9$.

Câu 18: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 12) Nếu $\int_0^3 f(x)dx = 2$ thì $\int_0^3 3f(x)dx$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3.2 = 6$.

Câu 19: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 3) Nếu $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = -3$ thì $\int_1^4 \left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** -7. **C.** -1. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_1^4 \left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx = 4-(-3)=7$.

Câu 20: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 10) Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3$ thì $\int_0^3 4f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 36. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ghi Chú!

Ta có $\int_0^3 4f(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 4.3 = 12$.

Câu 21: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chon B

$\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)+2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 2\mathrm{d}x = 2+4=6$.

Câu 22: (DE TN BGD 2022-MD 103) Nếu $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 6$ thì $\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng?

A. 8. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chon A

Ta có $\int_0^3 \left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_0^3 f(x)dx + \int_0^3 2dx = \frac{1}{3}\cdot 6+6=8$.

Câu 23: (DE TN BGD 2022-MD 104) Nếu $\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = -5$ thì $\int_{-1}^5 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** -3. **C.** -7. **D.** 4.

Lời giải

Chon B

Ta có: $\int_{-1}^5 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^5 f(x)\mathrm{d}x = 2+(-5) = -3$.

Câu 24: (DE MH BGD 2023 – Câu 8) Nếu $\int_{-1}^4 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^4 g(x)dx = 3$ thì $\int_{-1}^4 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 1 **D.** -1.

Lời giải

Chon A

Ta có $\int_{-1}^4 [f(x)+g(x)]dx = \int_{-1}^4 f(x)dx + \int_{-1}^4 g(x)dx = 2+3=5$.

Câu 25: (DE MH BGD 2023 - Câu 24) Nếu $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 4$ thì $\int_0^2 \left[\frac{1}{2}f(x)-2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 8. **D.** -2.

Lời giải

Chon D

$\int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}f\left(x\right)-2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^2 2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.4-4=-2$.

Câu 26: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 10] Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ và $F\left(2\right)=6, F\left(4\right)=12.$ Tích phân $\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 18. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B

$\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx=F\left(4\right)-F\left(2\right)=12-6=6$.

Câu 27: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 10] Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ và $F\left(2\right)=6, F\left(4\right)=12.$ Tích phân $\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 18. **D.** -6.

Lời giải

Chọn B

$\int\limits_2^4 f\left(x\right)dx=F\left(4\right)-F\left(2\right)=12-6=6$.

Câu 28: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 14] Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ và $F\left(1\right)=3,\ F\left(3\right)=6$. Tích phân $\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -3. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(x\right)\Big|_1^3=F\left(3\right)-F\left(1\right)=6-3=3.$

Câu 29: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 7] Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$ và $F\left(2\right)=6, F\left(4\right)=12$. Tích phân $\int_2^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. -6. **B.** 2. **C.** 18. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_2^4 f\left(x\right)\mathrm{d}x=F\left(4\right)-F\left(2\right)=12-6=6$.

Câu 30: (TN BGD 2022-MD101) Nếu $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=4$ thì $\int\limits_0^2\left[\frac{1}{2}f\left(x\right)+2\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Ta có: $\int_0^2 \left[\frac{1}{2} f(x)+2\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2 2dx=2+4=6$.

Dạng ②: Tích phân cơ bản(a), kết hợp tính chất (b)

Câu 31: (ĐTK 2019-Câu 6) Cho $\int_0^1 f(x)dx=2$ và $\int_0^1 g(x)dx=5$ khi đó $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]dx$ bằng

A. -3. **B.** 12. **C.** -8. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 g(x)dx=5 \Leftrightarrow 2\int_0^1 g(x)dx=10 \Leftrightarrow \int_0^1 2g(x)dx=10$

Xét $\int_0^1 [f(x)-2g(x)]dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 2g(x)dx=2-10=-8$.

Câu 32: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 23) Biết $\int_1^3 f(x)dx=3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x)dx$ bằng

A. 5. **B.** 9. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$\int_1^3 2f(x)dx=2\int_1^3 f(x)dx=6$.

Câu 33: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 1) Biết $\int_1^5 f(x)dx=4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x)dx$ bằng

A. 7. **B.** $\frac{4}{5}$. **C.** 64. **D.** 12.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^5 3f(x)dx=3\int_1^5 f(x)dx=3.4=12$.

Câu 34: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 5) Biết $\int_2^3 f(x)dx=6$. Giá trị của $\int_2^3 2f(x)dx$ bằng

Ghi Chú!

A. 36. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

$\int_2^3 2f(x)\mathrm{d}x = 2\int_2^3 f(x)\mathrm{d}x = 2\times 6 = 12$.

Câu 35: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 21) Biết $\int_2^3 f(x)dx = 3$ và $\int_2^3 g(x)dx = 1$.

Khi đó $\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_2^3 [f(x)+g(x)]dx = \int_2^3 f(x)dx + \int_2^3 g(x)dx = 3+1 = 4$.

Câu 36: (ĐTK 2021-Câu 17) Tích phân $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{15}{3}$. **B.** $\frac{17}{4}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{15}{4}$.

Câu 37: (TN BGD 2022-MD101) Nếu $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -3$ thì $\int_{5}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_5^{-1} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -(-3) = 3$.

Câu 38: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Nếu $\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = -3$ thì $\int_{5}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$\int_5^{-1} f(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 3$.

Ghi Chú!

Câu 39: (DE TN BGD 2022-MD 103) Nếu $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 2$ và $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = -5$ thì $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx$ bằng

A. -7. **B.** -3. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{5} f(x)\,dx = 2 - 5 = -3$.

Câu 40: (DE TN BGD 2022-MD 104) Nếu $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = 6$ thì $\int_{0}^{3}\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]dx$ bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_{0}^{3}\left[\frac{1}{3}f(x)+2\right]dx = \frac{1}{3}\int_{0}^{3} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} 2\,dx = 2 + 6 = 8$.

Câu 41: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 22] Nếu $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2$ và $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 5$ thì $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -3

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = 2 + 5 = 7$.

Câu 42: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 22] Nếu $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 2$ và $\int_{1}^{3} f(x)\,dx = 5$ thì $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$ bằng

A. 10. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -3

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{0}^{3} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = 2 + 5 = 7$.

Câu 43: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 5] Nếu $\int_{1}^{4} f(x)\,dx = 6$ thì $\int_{1}^{4} 2f(x)\,dx$ bằng

A. 3. **B.** 12. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_1^4 2f(x)dx = 2\int_1^4 f(x)dx = 2.6 = 12$.

Câu 44: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 5] Nếu $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ thì $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 10. **C.** 7. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = 2 + 5 = 7$.

Câu 45: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 12) Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Tính: $I = F(e) - F(1)$?

A. $I = e$ **B.** $I = \frac{1}{e}$ **C.** $I = \frac{1}{2}$ **D.** $I = 1$

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Vì $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ nên $I = F(e) - F(1) = \int_1^e f(x)\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \int_1^e \ln x \mathrm{d}(\ln x) = \left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e = \frac{1}{2}$

.

Cách 2: Dùng MTCT $I = F(e) - F(1) = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Câu 46: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 21) Cho $\int_{-1}^2 f(x)dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x)dx = -1$. Tính $I = \int_{-1}^2 \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]dx$.

A. $I = \frac{5}{2}$ **B.** $I = \frac{7}{2}$ **C.** $I = \frac{17}{2}$ **D.** $I = \frac{11}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_{-1}^2 \left[x + 2f(x) - 3g(x)\right]\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^2 + 2\int_{-1}^2 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^2 g(x)\mathrm{d}x =$

$\frac{3}{2} + 2.2 - 3(-1) = \frac{17}{2}$.

Câu 47: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 25) Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[f(x) + 2\sin x\right]\mathrm{d}x$.

Ghi Chú!

A. $I=7$ **B.** $I=5+\frac{\pi}{2}$ **C.** $I=3$ **D.** $I=5+\pi$.

Lời giải

Chọn A

Ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+2\sin x\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx-2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=5-2(0-1)=7.$$

Câu 48: (ĐTK 2018-Câu 19) Tích phân $\int_0^2\frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{16}{225}$ **B.** $\log\frac{5}{3}$ **C.** $\ln\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{2}{15}$

Lời giải

Chọn C

$$\int_0^2\frac{dx}{x+3}=\ln|x+3|\Big|_0^2=\ln\frac{5}{3}$$

Câu 49: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 22) $\int_1^2 e^{3x-1}dx$ bằng:

A. $\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$. **B.** $\frac{1}{3}e^5-e^2$. **C.** e^5-e^2. **D.** $\frac{1}{3}\left(e^5+e^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_1^2 e^{3x-1}dx=\frac{1}{3}e^{3x-1}\Big|_1^2=\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$.

Câu 50: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 20) $\int_0^1 e^{3x+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}\ e^4-e$. **B.** e^4-e. **C.** $\frac{1}{3}\ e^4+e$. **D.** e^3-e.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^1 e^{3x+1}dx=\frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_0^1=\frac{e^4-e}{3}$. **Chọn A**

Câu 51: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 19) $\int_1^2\frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$. **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^2\frac{dx}{3x-2}=\frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2=\frac{1}{3}(\ln 4-\ln 1)=\frac{2}{3}\ln 2$.

Ghi Chú!

Câu 52: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 20) $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

A. $2\ln\frac{7}{5}$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 35$. **C.** $\ln\frac{7}{5}$. **D.** $\frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3} = \frac{1}{2}\ln|2x+3|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 7 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln\frac{7}{5}$.

Câu 53: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 28) Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x))dx$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$\int_1^2 (2+f(x))dx = \int_1^2 2dx + \int_1^2 f(x)dx = 2 + x^2\Big|_1^2 = 2 + 4 - 1 = 5$.

Câu 54: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 34) Biết rằng $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị $\int_1^2 [2 + f(x)]dx$ bằng:

A. $\frac{23}{4}$. **B.** 7. **C.** 9. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) = F'(x) = 3x^2$.

Khi đó $\int_1^2 [2+f(x)]dx = \int_1^2 2dx + \int_1^2 f(x)dx = 2x\Big|_1^2 + x^3\Big|_1^2 = 2 + 7 = 9.$

Câu 55: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 26) Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x))dx$ bằng

A. 20. **B.** 22. **C.** 26. **D.** 28.

Lời giải

Chọn D

$\int_1^3 [1 + f(x)]dx = \int_1^3 dx + \int_1^3 f(x)dx = (x + x^3)\Big|_1^3 = 28$

Câu 56: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 38) Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)]dx$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** $\frac{26}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Do $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên

$f(x)=(F(x))'=(x^2)'=2x$. Suy ra $\int_1^3[1+f(x)]\mathrm{d}x=\int_1^3(1+2x)\mathrm{d}x=(x+x^2)\Big|_1^3=10$.

Câu 57: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 27) Biết $\int_0^1[f(x)+2x]\mathrm{d}x=2$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\int_0^1[f(x)+2x]\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 2x\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+x^2\Big|_0^1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+1$.

Theo bài ra: $\int_0^1[f(x)+2x]\mathrm{d}x=2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+1=2\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

Vậy $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$.

Câu 58: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 37) Biết $\int_0^1[f(x)+2x]dx=3$. Khi đó $\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$\int_0^1[f(x)+2x]dx=3\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 2xdx=3\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=3-\int_0^1 2xdx\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)dx=3-1=2$

Câu 59: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 30) Biết $\int_0^1[f(x)+2x]\mathrm{d}x=4$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int_0^1[f(x)+2x]\mathrm{d}x=4\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 2x\mathrm{d}x=4$

$\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4-\int_0^1 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4-x^2\Big|_0^1=3$.

Câu 60: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 38) Biết $\int_0^1[f(x)+2x]\mathrm{d}x=5$. Khi đó $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\int_0^1 [f(x)+2x]dx=5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx+\int_0^1 2xdx=5 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=5-\int_0^1 2xdx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx=5-1=4$$

.

Câu 61: (ĐTK 2021-Câu 33) Nếu $\int_1^3 [2f(x)+1]dx=5$ thì $\int_1^3 f(x)dx$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^3 [2f(x)+1]dx=5 \Rightarrow 2\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 dx=5$

$$\Rightarrow 2\int_1^3 f(x)dx+x\Big|_1^3=5 \Rightarrow \int_1^3 f(x)dx=\frac{3}{2}.$$

Câu 62: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 38) Nếu $\int_0^2 f(x)dx=5$ thì $\int_0^2 [2f(x)-1]dx$ bằng

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

$$\int_0^2 [2f(x)-1]dx=\int_0^2 2f(x)dx-\int_0^2 1dx=8.$$

Câu 63: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 37) Nếu $\int_0^2 f(x)dx=3$ thì $\int_0^2 [2f(x)-1]dx$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_0^2 [2f(x)-1]dx=2\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 dx=2.3-2=4$.

Câu 64: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 37) Nếu $\int_0^2 f(x)dx=6$ thì $\int_0^2 [2f(x)-1]dx$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 14

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^2 [2f(x)-1]dx=2\int_0^2 f(x)dx-\int_0^2 1dx=2.6-2=10$.

Ghi Chú!

Câu 65: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 32) Nếu $\int_0^2 f(x)dx = 4$ thì $\int_0^2 \left[2f(x)-1)\right]dx$ bằng

A. 8. **B.** 10. **C.** 7. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int_0^2 \left[2f(x)-1)\right]dx = \int_0^2 2f(x)dx - \int_0^2 dx = 2.4 - 2 = 6$.

Dạng ③: PP đổi biến t = u(x)-hàm công thức xđ (ngắn gọn là vi phân)

Câu 66: (ĐMH 2017-Câu 25) Tính tích phân $I = \int_0^\pi \cos^3 x.\sin x dx$.

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$ **B.** $I = -\pi^4$ **C.** $I = 0$ **D.** $I = -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I = \int_0^\pi \cos^3 x.\sin x dx$. Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Leftrightarrow -dt = \sin x dx$

Đổi cận: Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$; với $x = \pi \Rightarrow t = -1$.

Vậy $I = -\int_1^{-1} t^3 dt = \int_{-1}^1 t^3 dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_{-1}^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$.

Cách khác : Bấm máy tính

Câu 67: (ĐTN 2017-Câu 25) Cho $\int_0^4 f(x)dx = 16$. Tính $I = \int_0^2 f(2x)dx$

A. $I = 32$. **B.** $I = 8$. **C.** $I = 16$. **D.** $I = 4$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = 2x \Rightarrow \frac{dt}{2} = dx$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = 2$; $x = 2 \Rightarrow t = 4$

Khi đó ta có $I = \int_0^2 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx = 8$.

Câu 68: (ĐTK 2017-Câu 24) Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I = 2\int_0^3 \sqrt{u}du$ **B.** $I = \int_1^2 \sqrt{u}du$ **C.** $I = \int_0^3 \sqrt{u}du$ **D.** $I = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{u}du$

Lời giải

Chọn C

Ghi Chú!

$I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$;đặt $u=x^2-1 \Rightarrow du=2xdx$. Đổi cận $x=1 \Rightarrow u=0$;

$x=2 \Rightarrow u=3$

Nên $I=\int_0^3 \sqrt{u}du$

Câu 69: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 25) Cho $\int_0^6 f(x)dx=12$. Tính $I=\int_0^2 f(3x)dx$.

A. $I=6$ **B.** $I=36$ **C.** $I=2$ **D.** $I=4$

Lời giải

Chon D

Ta có: $I=\int_0^2 f(3x)dx=\frac{1}{3}\int_0^2 f(3x)d3x=\frac{1}{3}\int_0^6 f(t)dt=\frac{1}{3}.12=4.$

Câu 70: (ĐTK 2020-L2-Câu 33) Xét $\int_0^2 xe^{x^2}dx$, nếu đặt $u=x^2$ thì $\int_0^2 xe^{x^2}dx$ bằng

A. $2\int_0^2 e^u du$. **B.** $2\int_0^4 e^u du$. **C.** $\frac{1}{2}\int_0^2 e^u du$. **D.** $\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du$.

Lời giải

Chon D

Đặt $u=x^2 \Rightarrow du=2xdx \Rightarrow xdx=\frac{1}{2}du$.

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow u=0 \\ x=2 \Rightarrow u=4 \end{cases}$.

Vậy $\int_0^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du$.

Dạng ④: PP tích phân từng phần-hàm xđ

Câu 71: (ĐMH 2017-Câu 26) Tính tích phân $I=\int_1^e x\ln x dx$:

A. $I=\frac{1}{2}$ **B.** $I=\frac{e^2-2}{2}$ **C.** $I=\frac{e^2+1}{4}$ **D.** $I=\frac{e^2-1}{4}$

Lời giải

Chon C

$I=\int_1^e x\ln x dx$. Đặt $\begin{cases} u=\ln x \\ dv=xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=\frac{1}{x}dx \\ v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_0^e-\int_0^e \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_0^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big|_0^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$

Ghi Chú!

Dạng ⑤: Tích phân đặc biệt-hàm xđ

Câu 72: **(ĐTK 2017-Câu 44)** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn

$f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx.$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Lời giải

Chọn D

Đặt $x=-t$. Khi đó $\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)dx=\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)d(-t)=-\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{0} f(-t)dt=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

Ta có:

$$I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x)=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{0} f(x)d(x)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)d(x)+\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)d(x)$$

Hay

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\left(f(-x)+f(x)\right)d(x)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2+2\cos 2x}\,d(x)=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2(1+\cos 2x)}\,d(x)$$

$$\Leftrightarrow I=\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{4\cos^2 x}\,d(x)=2\int\limits_{0}^{\frac{3\pi}{2}}|\cos x|\,d(x)=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(x)-2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(x)$$

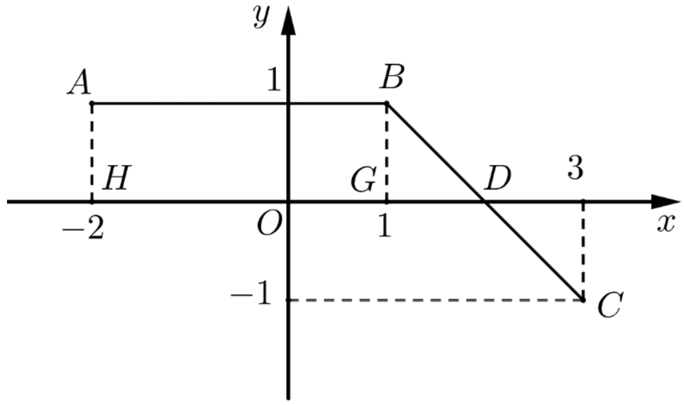
Vậy $I=2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Dạng ⑥: Tích phân dựa vào đồ thị

Câu 73: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 37]** Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$. Tích phân $\int\limits_{-2}^{3} f(x)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{7}{2}$. **D.** 3.

Ghi Chú!



Lời giải

Chọn D

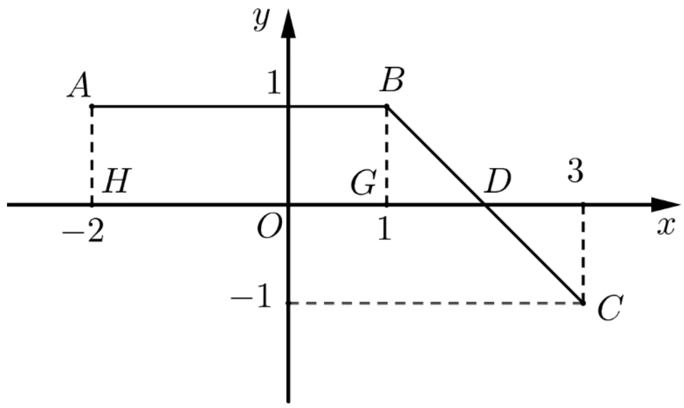
Ta có

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = S_{ABGH} + S_{BGD} - S_{CDE}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = 3.1 + \frac{1}{2}.1.1 - \frac{1}{2}.1.1 = 3.$$

Câu 74: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 37] Đường gấp khúc ABC trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$. Tích phân $\int_{-2}^{3} f(x)dx$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{7}{2}$. **D.** 3.



Lời giải

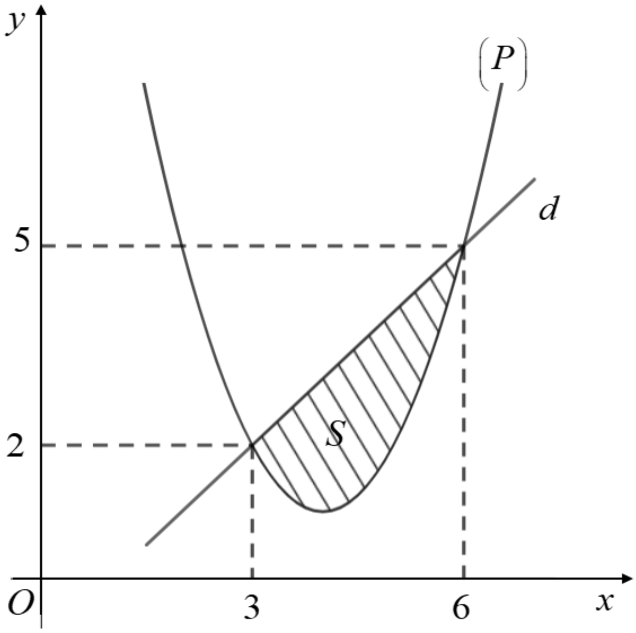
Chọn D

Ta có

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = S_{ABGH} + S_{BGD} - S_{CDE}$$

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = 3.1 + \frac{1}{2}.1.1 - \frac{1}{2}.1.1 = 3.$$

Câu 75: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 40] Cho hàm số bậc hai $y = f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như hình vẽ bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{9}{2}$. Tích phân $\int\limits_3^6 (2x-3)\,f'(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. 33. **B.** 51. **C.** 39. **D.** 27.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $d: y=mx+n$, $(P): f(x)=ax^2+bx+c$

Từ đồ thị ta có:

Đường thẳng d đi qua $A(3;2), B(6;5)$ nên có $\begin{cases} 3m+n=2 \\ 6m+n=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow d: y=x-1$.

Đồ thị (P) đi qua $A(3;2), B(6;5)$ nên có $\begin{cases} 9a+3b+c=2 \\ 36a+6b+c=5 \end{cases}$

Và $S=\int\limits_3^6 \left(x-1-ax^2-bx-c\right)\mathrm{d}x=\dfrac{9}{2} \Leftrightarrow \left.\left(\dfrac{x^2}{2}-x-\dfrac{ax^3}{3}-\dfrac{bx^2}{2}-cx\right)\right|_3^6=\dfrac{9}{2}$

$\Leftrightarrow 63a+\dfrac{27}{2}b+3c=6$

Do đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 9a+3b+c=2 \\ 36a+6b+c=5 \\ 63a+\dfrac{27}{2}b+3c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c=17 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x)=x^2-8x+17 \Rightarrow f'(x)=2x-8$.

Suy ra $\int\limits_3^6 (2x-3)\,f'(x)\mathrm{d}x=\int\limits_3^6 (2x-3)(2x-8)\mathrm{d}x=\int\limits_3^6 \left(4x^2-22x+24\right)\mathrm{d}x$

$=\left.\left(\dfrac{4x^3}{3}-11x^2+24x\right)\right|_3^6=27$

Ghi Chú!

Dạng ⑦: Tích phân chứa tham số (chỉ trong kết quả)

Câu 76: (ĐTN 2017-Câu 26) Biết $I=\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5,$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $S=a+b+c.$

A. $S=6$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-2$. **D.** $S=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\frac{1}{x^2+x}=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$

Khi đó:

$$I=\int_3^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x}=\int_3^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(\ln x-\ln(x+1)\right)\Big|_3^4=(\ln 4-\ln 5)-(\ln 3-\ln 4)$$

$=4\ln 2-\ln 3-\ln 5.$

Suy ra: $a=4,b=-1,c=-1.$ Vậy $S=2.$

Câu 77: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 18) Cho $\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=2$. **B.** $a-2b=0$. **C.** $a+b=-2$. **D.** $a+2b=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=(\ln 2-\ln 3)-(\ln 1-\ln 2)=2\ln 2-\ln 3$$

suy ra $a=2,b=-1\Rightarrow a+2b=0$.

Câu 78: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 27) Cho $\int_5^{21}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}=a\ln 3+b\ln 5+c\ln 7$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=-2c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=-c$. **D.** $a-b=-2c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+4}\Rightarrow t^2=x+4\Rightarrow 2t\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	5	21
t	3	5

$$\int_5^{21}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}=\int_3^5\frac{2t\mathrm{d}t}{\left(t^2-4\right)t}=\int_3^5\frac{2\mathrm{d}t}{(t-2)(t+2)}=2\int_3^5\left(\frac{1}{4(t-2)}-\frac{1}{4(t+2)}\right)\mathrm{d}t$$

Ghi Chú!

$=\left(\frac{1}{2}\ln|t-2|-\frac{1}{2}\ln|t+2|\right)\Big|_3^5=\frac{1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 7$.

Câu 79: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 33) Cho $\int_1^e (2+x\ln x)dx=ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a-b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^e (2+x\ln x)dx=\int_1^e 2dx+\int_1^e x\ln x dx=2x\Big|_1^e+I=2e-2+I$ với

$I=\int_1^e x\ln x dx$

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{1}{x}dx\\ v=\frac{x^2}{2}\end{cases}\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e$

$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=\frac{e^2+1}{4}$

$\Rightarrow\int_1^e(2+x\ln x)dx=2e-2+\frac{e^2+1}{4}=\frac{1}{4}e^2+2e-\frac{7}{4}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4};b=2\\ c=-\frac{7}{4}\end{cases}$

$\Rightarrow a-b=c$.

Câu 80: (ĐTK 2019-Câu 38) Cho $\int_0^1\frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$\int_0^1\frac{xdx}{(x+2)^2}=\int_0^1\frac{(x+2)-2}{(x+2)^2}dx=\int_0^1\frac{dx}{x+2}-\int_0^1\frac{2dx}{(x+2)^2}$

$=\ln(x+2)\Big|_0^1-2.\frac{(x+2)^{-1}}{-1}\Big|_0^1=\ln 3-\ln 2+\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}-\ln 2+\ln 3$.

Vậy $a=-\frac{1}{3};b=-1;c=1\Rightarrow 3a+b+c=-1$.

Câu 81: (ĐTK 2017-Câu 27) Cho $\int_0^1\frac{dx}{e^x+1}=a+b\ln\frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=2$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=0$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1. Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1; x=1\Rightarrow t=e$

Ghi Chú!

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x\left(e^x+1\right)}=\int_1^e \frac{dt}{t(t+1)}=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\left(\ln|t|-\ln|t+1|\right)\Big|_1^e=\left(1-\ln(1+e)\right)-(-\ln 2)$$

$$=1+\ln\frac{2}{1+e}=1-\ln\frac{1+e}{2}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow S=a^3+b^3=0.$$

Cách 2.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_0^1 \frac{\left(e^x+1\right)-e^x}{e^x+1}dx=\int_0^1 dx-\int_0^1 \frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=x\Big|_0^1-\ln\left|e^x+1\right|\Big|_0^1=1-\ln\frac{1+e}{2}.$$

Suy ra $a=1$ và $b=-1$. Vậy $S=a^3+b^3=0$.

Câu 82: (ĐTK 2018-Câu 32) Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=24$ **B.** $P=12$ **C.** $P=18$ **D.** $P=46$

Lời giải

Chọn D

Cách 1

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2}dx$$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\Rightarrow dt=\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx\Leftrightarrow 2dt=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx$

Khi đó $I=\int_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\frac{2}{t^2}dt=\left(\frac{-2}{t}\right)\Big|_{1+\sqrt{2}}^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-2=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$

$\Rightarrow P=a+b+c=32+12+2=46.$

Cách 2

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x(x+1)}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}dx$$

$$=\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}=\sqrt{32}-\sqrt{12}-2$$

Câu 83: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 26) Cho $\int_{16}^{55}\frac{dx}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a-b=-c$. **B.** $a+b=c$. **C.** $a+b=3c$. **D.** $a-b=-3c$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\sqrt{x+9}\Rightarrow t^2=x+9\Rightarrow 2tdt=dx$.

Đổi cận:

x	16	55
t	5	8

$$\int_{16}^{55}\frac{dx}{x\sqrt{x+9}}=\int_5^8\frac{2tdt}{\left(t^2-9\right)t}=2\int_5^8\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{3}\left(\int_5^8\frac{dt}{t-3}-\int_5^8\frac{dt}{t+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln|x-3|-\ln|x+3|\right)\Big|_5^8=\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 5-\frac{1}{3}\ln 11.$$

Ghi Chú!

Vậy $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=-\frac{1}{3}$. Mệnh đề $a-b=-c$ đúng.

Câu 84: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 26) Cho $\int_1^e (1+x\ln x)\,dx = ae^2+be+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$. **B.** $a+b=-c$. **C.** $a-b=c$. **D.** $a-b=-c$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_1^e (1+x\ln x)\,dx = \int_1^e 1.dx + \int_1^e x\ln x\,dx = e-1+\int_1^e x\ln x\,dx$.

Đặt $\begin{cases} u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x.dx \Rightarrow v=\frac{x^2}{2} \end{cases}$ Khi đó $\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$.

Suy ra $\int_1^e (1+x\ln x)\,dx = e-1+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} = \frac{e^2}{4}+e-\frac{3}{4}$ nên $a=\frac{1}{4}$, $b=1$, $c=-\frac{3}{4}$.

Vậy $a-b=c$.

Dạng ⑧: Tích phân liên quan đến phương trình hàm ẩn

Câu 85: (ĐTK 2017-Câu 38) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int_0^1 (x+1)f'(x)\,dx=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A. $I=-12$ **B.** $I=8$ **C.** $I=1$ **D.** $I=-8$

Lời giải

Chọn D

Đặt $\begin{cases} u=x+1 \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$. Khi đó $I=(x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$

Suy ra $10=2f(1)-f(0)-\int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx=-10+2=-8$. Vậy $\int_0^1 f(x)\,dx=-8$.

Câu 86: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 32) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2+4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+14\pi}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi+16}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (2\cos^2 x+1)\,dx=\int (2+\cos 2x)\,dx = 2x+\frac{1}{2}\sin 2x + C$.

Ghi Chú!

Theo bài: $f(0)=4 \Leftrightarrow 2.0+\frac{1}{2}.\sin 0+C=4 \Leftrightarrow C=4$. Suy ra $f(x)=2x+\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

Vậy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x+\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)dx=\left(x^2-\frac{\cos 2x}{4}+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\left(\frac{\pi^2}{16}+\pi\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi^2+16\pi+4}{16}$$

.

Câu 87: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 41) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{31}{2}$. **B.** -16. **C.** 8. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=4x \Rightarrow \mathrm{d}t=4\mathrm{d}x$

Khi đó: $\int_0^1 xf(4x)\mathrm{d}x=\int_0^4 \frac{t.f(t)}{16}\mathrm{d}t=1 \Rightarrow \int_0^4 xf(x)\mathrm{d}x=16$

Xét: $\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^4 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=x^2 f(x)\Big|_0^4-\int_0^4 2x.f(x)\mathrm{d}x=16.f(4)-2\int_0^4 x.f(x)\mathrm{d}x=16-2.16=-16$$

Câu 88: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 33) Cho hàm số $f(x)$.Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\frac{\pi^2+2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **D.** $\frac{\pi^2+6\pi+8}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x)=\int f'(x)dx=\int(2\cos^2 x+3)dx=\int(2.\frac{1+\cos 2x}{2}+3)dx$.

$=\int(\cos 2x+4)dx=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+C$ do $f(0)=4\Rightarrow C=4$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4$ nên $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{2}\sin 2x+4x+4)dx$.

$=(-\frac{1}{4}\cos 2x+2x^2+4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi+2}{8}$.

Câu 89: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 42) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó $\int_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15. **B.** 23. **C.** $\frac{123}{5}$. **D.** -25.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn D

$+) \, I=\int_0^5 x^2 f'(x)\,dx=\int_0^5 x^2 df(x)=x^2.f(x)\Big|_0^5-\int_0^5 f(x)\,dx^2$.

$=25.f(5)-0.f(x)-\int_0^5 f(x).2xdx=25-2\int_0^5 xf(x)\,dx$.

$+)$ Ta có: $\int_0^1 xf(5x)dx=1$.

Đặt $5x=t \Rightarrow \int_0^5 \frac{t}{5} f(t)d\frac{t}{5}=1 \Leftrightarrow \int_0^5 tf(t)dt=25$.

Vậy $I=25-2\times 25=-25$.

Câu 90: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 35) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và

$f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+15\pi}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2-4}{16}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\sin^2 x+1\right)\mathrm{d}x=\int\left(2-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Suy ra $f(x)=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Vì $f(0)=4\Rightarrow C=4$ hay $f(x)=2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

Khi đó: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x$

$=\left(x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{16}+\pi-\frac{1}{4}=\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$.

Câu 91: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 32) Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và

$f'(x)=2\sin^2 x+3,\ \forall x\in R$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\frac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

Lời giải

Chọn C

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2\sin^2 x+3\right)\mathrm{d}x=\int\left(1-\cos 2x+3\right)\mathrm{d}x=\int\left(4-\cos 2x\right)\mathrm{d}x=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+C$.

Ta có $f(0)=4$ nên $4.0-\frac{1}{2}\sin 0+C=4\Leftrightarrow C=4$.

Ghi Chú!

Nên $f(x)=4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4x-\frac{1}{2}\sin 2x+4\right)\mathrm{d}x=\left(2x^2+\frac{1}{4}\cos 2x+4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}.$$

Câu 92: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 44) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** 7. **C.** -9. **D.** $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=3x\Rightarrow \mathrm{d}t=3\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{d}t$.

Suy ra $1=\int_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow \int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t=9$.

Đặt $\begin{cases}u=f(t)\\ \mathrm{d}v=t\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=f'(t)\mathrm{d}t\\ v=\frac{t^2}{2}\end{cases}$.

$$\Rightarrow \int_0^3 tf(t)\mathrm{d}t=\frac{t^2}{2}f(t)\Bigg|_0^3-\int_0^3\frac{t^2}{2}f'(t)\mathrm{d}t=\frac{9}{2}f(3)-\frac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)\mathrm{d}t.$$

$$\Leftrightarrow 9=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\int_0^3 t^2 f'(t)\mathrm{d}t\Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t)\mathrm{d}t=-9.$$

Vậy $\int_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x=-9$.

Câu 93: (ĐTK 2020-L2-Câu 45) Cho hàm số $f(x)$ có $f(0)=0$ và $f'(x)=\cos x\cos^2 2x,\forall x\in\mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1041}{225}$. **B.** $\frac{208}{225}$. **C.** $\frac{242}{225}$. **D.** $\frac{149}{225}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=\cos x\cos^2 2x=\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos 3x}{4}+\frac{\cos 5x}{4}$

Do đó $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\cos x}{2}+\frac{\cos 3x}{4}+\frac{\cos 5x}{4}\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow f(x)=\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 3x}{12}+\frac{\sin 5x}{20}+C$, vì $f(0)=0$ nên $C=0$

$\Rightarrow I=\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{242}{225}$

Ghi Chú!

Câu 94: (DE MH BGD 2023 – Câu 40) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x), G(x)$ là hai nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(4)+G(4)=4$ và $F(0)+G(0)=1$. Khi đó $\int_0^2 f(2x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 6. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $G(x)=F(x)+C$

$$\begin{cases} F(4)+G(4)=4 \\ F(0)+G(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2F(4)+C=4 \\ 2F(0)+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow F(4)-F(0)=\frac{3}{2}.$$

Vậy:

$$\int_0^2 f(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{F(4)-F(0)}{2}=\frac{3}{4}.$$

Câu 95: (ĐTK 2018-Câu 50) Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. $\frac{7}{5}$ **B.** 1 **C.** $\frac{7}{4}$ **D.** 4

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Đặt $u=f(x)\Rightarrow du=f'(x)dx$, $dv=x^2dx\Rightarrow v=\frac{x^3}{3}$.

Ta có $\frac{1}{3}=\frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^3}{3}f'(x)dx\Rightarrow\int_0^1 x^3f'(x)dx=-1$

Ta có $\int_0^1 49x^6\mathrm{d}x=7$, $\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x=7$, $\int_0^1 2.7x^3.f'(x)dx=-14\Rightarrow\int_0^1\left[7x^3+f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=0$

$\Rightarrow 7x^3+f'(x)=0\Rightarrow f(x)=-\frac{7x^4}{4}+C$, mà $f(1)=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}$

$$\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{5}.$$

Cách 2: Nhắc lại bất đẳng thức Holder tích phân như sau:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$$

Dấu bằng xảy ra khi $f(x)=k.g(x),\left(\forall x\in[a;b],k\in\mathbb{R}\right)$

Ghi Chú!

Ta có $\frac{1}{9}=\left(\int\limits_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x)dx\right)^2 \le \int\limits_0^1 \frac{x^6}{9}dx.\int\limits_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx=\frac{1}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi

$f'(x)=k.\frac{x^3}{3}$.

Mặt khác $\int\limits_0^1 \frac{x^3}{3} f'(x)dx=\frac{-1}{3} \Rightarrow k=21 \Rightarrow f'(x)=-7x^3$ suy ra $f(x)=-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}$.

Từ đó $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{5}$.

Câu 96: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 44) Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$. **B.** $-\frac{71}{20}$. **C.** $-\frac{79}{20}$. **D.** $-\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chon D

Ta có: $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)}=x^3 \Rightarrow \int\limits_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^3\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Bigg|_1^2=\frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(1)}=\frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1)=-\frac{4}{5}$.

Câu 97: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 44) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Lời giải

Chon D

Theo bài ra: $\int\limits_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$.

Đặt $t=6x \Rightarrow \mathrm{d}t=6\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

x	0	1
t	0	6

Do đó:

$\int\limits_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1 \Leftrightarrow \int\limits_0^6 \frac{1}{6}t.f(t)\frac{\mathrm{d}t}{6}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{36}\int\limits_0^6 t.f(t)\mathrm{d}t=1 \Leftrightarrow \int\limits_0^6 t.f(t)\mathrm{d}t=36$.

Tính $I=\int\limits_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

Đặt $\begin{cases} u=x^2 \\ \mathrm{d}v=f'(x)\mathrm{d}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x \\ v=f(x) \end{cases}$

Ghi Chú!

$\Rightarrow I = x^2 f(x)\Big|_0^6 - \int_0^6 2xf(x)\,dx = 36f(6) - 2\int_0^6 xf(x)\,dx = 36.1 - 2.36 = -36$.

Câu 98: (ĐTK 2020-L1-Câu 48) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_{-1}^{0} f(x)dx$?

A. $\frac{-17}{20}$. **B.** $\frac{-13}{4}$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** -1.

Lời giải

Chon B

Ta có $xf(x^3) + f(1-x^2) = -x^{10} + x^6 - 2x \Rightarrow x^2 f(x^3) + xf(1-x^2) = -x^{11} + x^7 - 2x^2$.

Lấy tích phân hai vế cận từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 x^2 f(x^3)\,dx + \int_0^1 xf(1-x^2)\,dx = \int_0^1 (-x^{11} + x^7 - 2x^2)dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(x^3)\,d(x^3) - \frac{1}{2}\int_0^1 f(1-x^2)\,d(1-x^2) = -\frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_1^0 f(t)\,dt = -\frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{6}\int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{5}{8} \Leftrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{3}{4}$$

Suy ra $\int_0^1 f(x)\,dx = -\frac{3}{4}$.

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 0 ta được:

$$\int_{-1}^0 x^2 f(x^3)\,dx + \int_{-1}^0 xf(1-x^2)\,dx = \int_{-1}^0 (-x^{11} + x^7 - 2x^2)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(x^3)\,d(x^3) - \frac{1}{2}\int_{-1}^0 f(1-x^2)\,d(1-x^2) = -\frac{17}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{17}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{17}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(t)\,dt = -\frac{17}{24} + \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int_{-1}^0 f(x)\,dx = \frac{-17}{24} + \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{-17}{24} - \frac{1}{2}.\frac{3}{4} = -\frac{13}{12} \Rightarrow \int_{-1}^0 f(x)\,dx = \frac{-13}{4}.$$

§3- ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

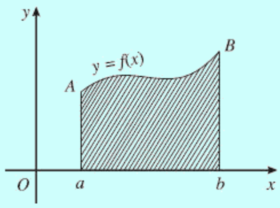
Ghi Chú!

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

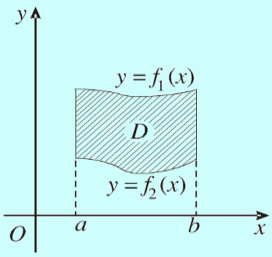
Ghi nhớ 1!

Định lý: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x=a, x=b$ là: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$

☑ **Bài toán 1:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$



☑ **Bài toán 2:** Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int\limits_a^b \left|f_1(x)-f_2(x)\right|dx$



Ghi nhớ 2!

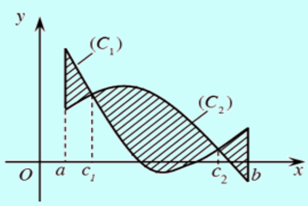
☑ Nếu $f\left(x\right)$ không đổi dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì

$$S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\right|$$

☑ Nếu phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm duy nhất $x=c$ thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ thì

$$S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx=\int\limits_a^c \left|f\left(x\right)\right|dx+\int\limits_c^b \left|f\left(x\right)\right|dx$$

$$=\left|\int\limits_a^c f\left(x\right)dx\right|+\left|\int\limits_c^b f\left(x\right)dx\right|$$



☑ Nếu phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm $c_1<c_2$ thuộc khoảng $\left(a;b\right)$ thì

$$S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|dx=\left|\int\limits_c^{c_1} f\left(x\right)dx\right|+\left|\int\limits_{c_1}^{c_2} f\left(x\right)dx\right|+\left|\int\limits_{c_2}^b f\left(x\right)dx\right|$$

Ghi nhớ 3!

Ghi Chú!

☑ Nếu $f(x) \ge g(x),\ \forall x \in [a;b]$ (đồ thị (C_1) nằm phía trên đồ thị (C_2)) thì ta có:

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

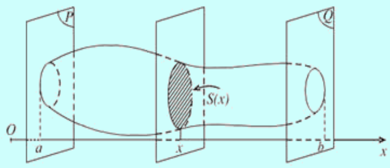
☑ Nếu $f(x) \le g(x),\ \forall x \in [a;b]$ (đồ thị (C_1) nằm phía dưới đồ thị (C_2)) thì ta có:

$$S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx = -\int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

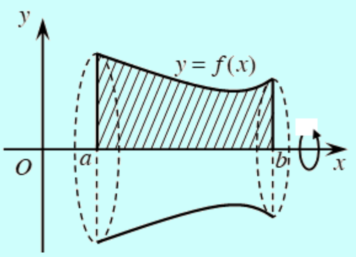
Ghi nhớ 4!

☑ *Thể tích vật thể:*

• Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



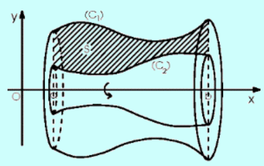
☑ ***Dạng 1:*** Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx}$$

☑ ***Dạng 2:*** Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b.$

• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bởi công thức: $S = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$.

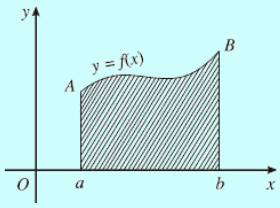


Ghi Chú!

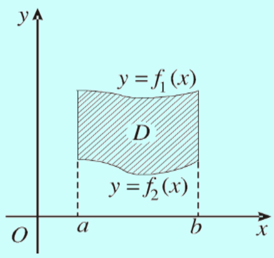
Ghi nhớ 1!

Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, không âm trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = b$ là: $S = \int_a^b f(x)dx$

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx$



Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được xác định: $S = \int_a^b \left|f_1(x) - f_2(x)\right| dx$



Ghi nhớ 2!

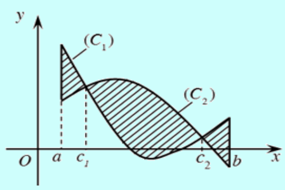
- Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = c$ thuộc khoảng $(a;b)$ thì

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx = \int_a^c \left|f(x)\right| dx + \int_c^b \left|f(x)\right| dx$$

$$= \left|\int_a^c f(x)dx\right| + \left|\int_c^b f(x)dx\right|$$



- Nếu phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm $c_1 < c_2$ thuộc khoảng $(a;b)$ thì

$$S = \int_a^b \left|f(x)\right| dx = \left|\int_c^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_2}^b f(x)dx\right|$$

Ghi nhớ 3!

- Nếu $f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in \left[a;b\right]$ (đồ thị (C_1) nằm phía trên đồ thị (C_2)) thì ta có:

$$S = \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx$$

Ghi Chú!

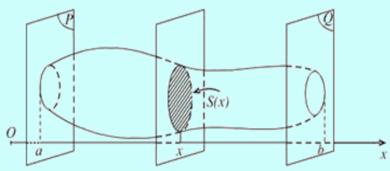
Nếu $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a;b]$ (đồ thị (C_1) nằm phía dưới đồ thị (C_2)) thì ta có:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx = -\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

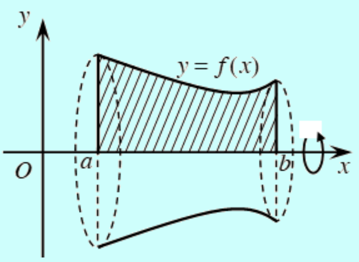
Ghi nhớ 4!

Thể tích vật thể:

• Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

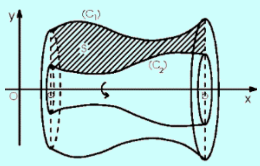


Dạng 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad \boxed{V_x = \pi\int_a^b [f(x)]^2\, dx}$$

Dạng 2: Ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = f(x), y = g(x), x = a, x = b.$



• Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị: $(C_1): y = f(x)$, $(C_2): y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được xác định bởi công thức: $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Câu hỏi lý thuyết

Câu 1: (ĐMH 2017-Câu 22) Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b (a < b)$, xung quanh trục Ox.

A. $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ **B.** $V = \int_a^b f^2(x)dx$

Ghi Chú!

C. $V=\pi\int\limits_a^b f(x)dx$ **D.** $V=\int\limits_a^b |f(x)|dx$

Lời giải

Chọn A

Câu 2: (ĐTK 2018-Câu 6) Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b(a<b)$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

A. $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$ **B.** $V=2\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

C. $V=\pi^2\int\limits_a^b f^2(x)dx$ **D.** $V=\pi^2\int\limits_a^b f(x)dx$

Lời giải

Chọn A

➽Dạng ②: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đồ thị hàm xác định

Câu 3: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 5) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\pi\int\limits_0^2 e^{2x}\,dx$. **B.** $S=\int\limits_0^2 e^{x}\,dx$.

C. $S=\pi\int\limits_0^2 e^{x}\,dx$. **D.** $S=\int\limits_0^2 e^{2x}\,dx$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ được tính theo công thức $S=\int\limits_0^2 |e^x|dx=\int\limits_0^2 e^x\,dx$.

Câu 4: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 2) Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S=\int\limits_0^2 2^x dx$. **B.** $S=\pi\int\limits_0^2 2^{2x} dx$. **C.** $S=\int\limits_0^2 2^{2x} dx$. **D.** $S=\pi\int\limits_0^2 2^x dx$.

Lời giải

Chọn A

$S=\int\limits_0^2 |2^x|dx=\int\limits_0^2 2^x dx$ (do $2^x>0, \forall x\in[0;2]$).

Câu 5: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 29) Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{2x}$, $y=0$, $x=0$, $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int\limits_0^1 e^{4x}dx$. **B.** $\int\limits_0^1 e^{2x}dx$. **C.** $\pi\int\limits_0^1 e^{2x}dx$. **D.** $\int\limits_0^1 e^{4x}dx$.

Lời giải

Chọn A

Ta có thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^1(e^{2x})^2dx=\pi\int_0^1 e^{4x}dx.$$

Câu 6: (ĐMH 2017-Câu 27) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$.

A. $\frac{37}{12}$ **B.** $\frac{9}{4}$ **C.** $\frac{81}{12}$ **D.** 13

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm

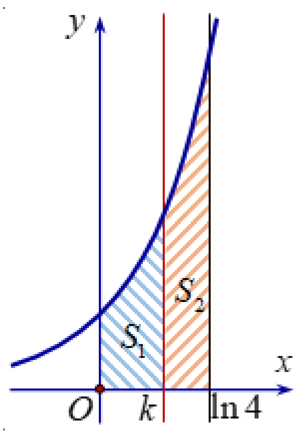
$$x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đồ thị hàm số $y=x-x^2$ là:

$$S=\int_{-2}^{1}\left|x^3-x-\left(x-x^2\right)\right|dx=\left|\int_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}\right|=\left|-\left(\frac{16}{4}-\frac{8}{3}-4\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-1\right)\right|=\frac{37}{12}.$$

Câu 7: (ĐTN 2017-Câu 27) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y=e^x$, $y=0$, $x=0$, $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ $(0<k<\ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$. **B.** $k=\ln 2$. **C.** $k=\ln\frac{8}{3}$. **D.** $k=\ln 3$.

Lời giải

Chọn D

PP1: Ta có $S_1=\int_0^k e^x dx=e^x\big|_0^k=e^k-1$ và $S_2=\int_k^{\ln 4}e^x dx=e^x\big|_k^{\ln 4}=4-e^k$.

Ta có $S_1=2S_2\Leftrightarrow e^k-1=2\left(4-e^k\right)\Leftrightarrow k=\ln 3$.

PP2: CASIO

• Bước 1: NHẬP là biểu thức $\int_0^Y e^X dx-2\int_Y^{\ln 4}e^X dx$

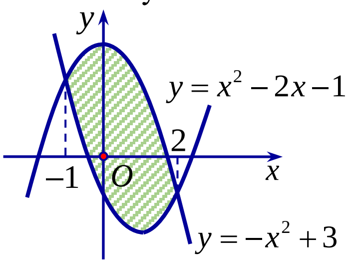
Ghi Chú!

• Bước 2: Dùng chức năng $S_1 - 2S_2$ CALC, gán X giá trị bất kỳ, Y là các giá trị trong 3 đáp án A, B, C, kết quả bằng 0 hoặc vô cùng nhỏ ở đáp nào. thì chọn đáp án đó, nếu không thỏa mãn thì **Chọn D**

Phân tích phương án nhiễu:

- Bấm nhầm hoặc tính sai tích phân dẫn đến chọn sai đáp án.

Câu 8: (ĐTK 2019-Câu 24) Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int\limits_{-1}^{2} (2x^2 - 2x - 4)\,\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-1}^{2} (-2x + 2)\,\mathrm{d}x$.

C. $\int\limits_{-1}^{2} (2x - 2)\,\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$.

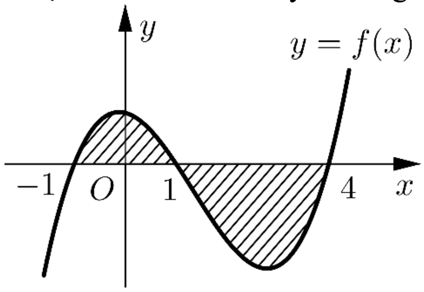
Lời giải

Chọn D

Ta thấy: $\forall x \in [-1;2]$: $-x^2 + 3 \ge x^2 - 2x - 1$ nên

$$S = \int\limits_{-1}^{2} \left[(-x^2 + 3) - (x^2 - 2x - 1) \right] \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x.$$

Câu 9: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 29) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây là đúng?



A. $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)dx$. **B.** $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)dx$.

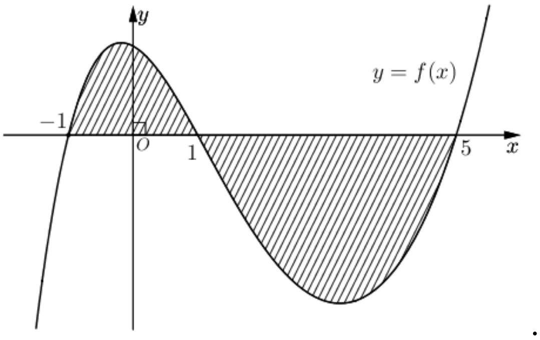
C. $S = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx + \int\limits_{1}^{4} f(x)dx$. **D.** $S = -\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)dx$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S = \int\limits_{-1}^{4} |f(x)|dx = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|dx + \int\limits_{1}^{4} |f(x)|dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x)dx - \int\limits_{1}^{4} f(x)dx$

Câu 10: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 29) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 5$ (như hình vẽ bên).



Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $S=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{5}f(x)dx$. **B.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{5}f(x)dx$.

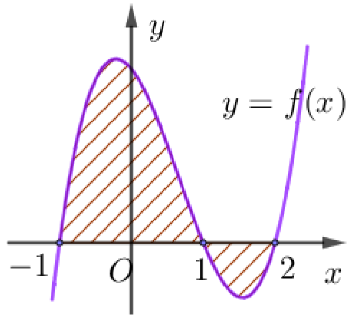
C. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{5}f(x)dx$. **D.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{5}f(x)dx$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{5}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_{1}^{5}f(x)dx$.

Câu 11: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 29) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1, x=2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{2}f(x)\,dx$. **B.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{2}f(x)\,dx$.

C. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{2}f(x)\,dx$. **D.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{2}f(x)\,dx$.

Lời giải

Chọn C

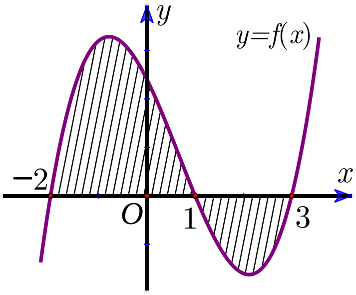
$S=\int_{-1}^{2}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx+\int_{1}^{2}|f(x)|dx$

Nhìn hình ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị không âm trên đoạn $[-1;1]$ nên $\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx$; hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị âm trên đoạn $[1;2]$ nên $\int_{1}^{2}|f(x)|dx=-\int_{1}^{2}f(x)dx$

Vậy $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_{1}^{2}f(x)\,dx$

Ghi Chú!

Câu 12: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 24) Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f\left(x\right)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=-\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

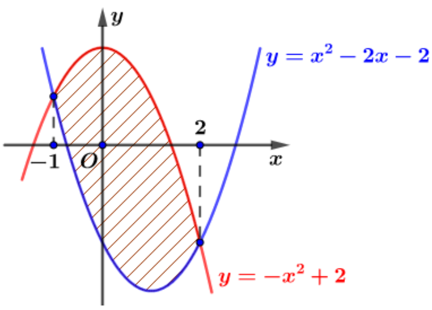
Chọn A

Ta có $S=\int\limits_{-2}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

Do $f\left(x\right)\ge 0$ với $\forall x\in\left[-2;1\right]$ và $f\left(x\right)\le 0$ với $\forall x\in\left[1;3\right]$ nên

$S=\int\limits_{-2}^{1} f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{3} f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 13: (ĐTK 2020-L1-Câu 29) Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2-2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2+2x-4\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Dựa và hình vẽ ta có diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên là:

$\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+2\right)-\left(x^2-2x-2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$.

Câu 14: (ĐTK 2020-L2-Câu 34) Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2$, $y=-1$, $x=0$ và $x=1$ được tính bởi công thức nào dưới đây?

A. $S=\pi\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)^2\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_{0}^{1}\left(2x^2+1\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn D

$$S=\int_0^1\left|2x^2-(-1)\right|dx=\int_0^1\left|2x^2+1\right|dx=\int_0^1\left(2x^2+1\right)dx.$$

Câu 15: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 29) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ bằng

A. 36. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** 36π.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ là

$$x^2-4=2x-4\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4$ và $y=2x-4$ là

$$S=\int_0^2\left|\left(x^2-4\right)-\left(2x-4\right)\right|dx=\frac{4}{3}.$$

Vậy $S=\frac{4}{3}$.

Câu 16: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 32) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong đã cho là

$$x^2-1=x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right..$$

Suy ra diện tích hình phẳng cần tính là

$$S=\int_0^1\left|x^2-x\right|dx=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|=\frac{1}{6}.$$

Câu 17: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 28) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-2$ và $y=3x-2$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9\pi}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{125\pi}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2-2=3x-2\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\end{array}\right.$.

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm $S=\int_0^3\left|x^2-3x\right|dx=\frac{9}{2}$

Câu 18: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 31) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-3$ và $y=x-3$ bằng

A. $\frac{125\pi}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{\pi}{6}$.

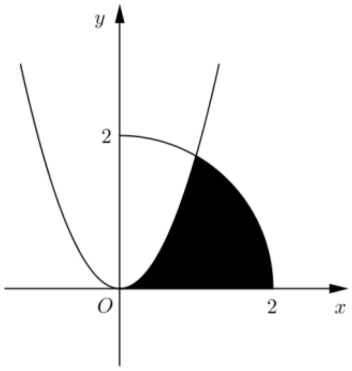
Lời giải

Chọn B

$x^2-3=x-3 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

$S=\int_0^1\left|x^2-3-(x-3)\right| \mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^2-x\right| \mathrm{d}x=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right) \mathrm{d}x\right|=\left|\left.\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 19: (ĐTK 2018-Câu 31) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng



A. $\frac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\frac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$ **D.** $\frac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm giữa parabol và cung tròn ta được

$\sqrt{3}x^2=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x=1$ với $0 \leq x \leq 2$

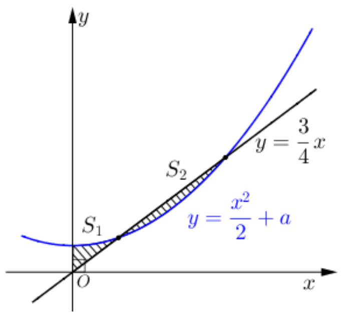
Ta có diện tích

$S=\int_0^1 \sqrt{3}x^2 dx+\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx=\left.\frac{\sqrt{3}}{3} x^3\right|_0^1+\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx=\frac{\sqrt{3}}{3}+\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Đặt: $x=2\sin t => dx=2\cos t dt; x=1 => t=\frac{\pi}{6}; x=2 => t=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{3}+2\left.\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

Câu 20: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 43) Cho đường thẳng $y=\frac{3}{4}x$ và parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?.



A. $\left(\frac{1}{4};\frac{9}{32}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right)$. **C.** $\left(0;\frac{3}{16}\right)$. **D.** $\left(\frac{7}{32};\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+4a=0$.

Theo đề bài phương trình có hai nghiệm $0<x_1<x_2$ thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3}{2} & (*) \\ x_1x_2=2a & (**) \end{cases}.$$

$$S_1-S_2=0 \Leftrightarrow \int_0^{x_1}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|\mathrm{d}x=0$$

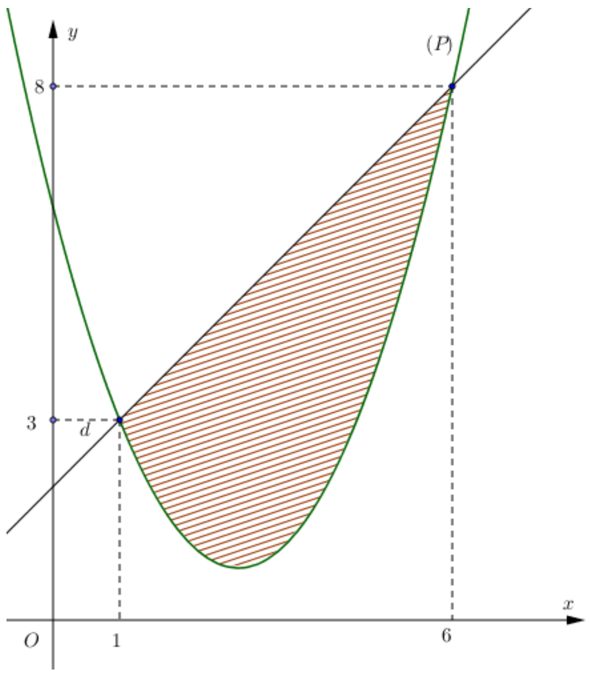
$$\Leftrightarrow \int_0^{x_2}\left|\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x+a\right|\mathrm{d}x=0.$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{8}x^2+ax\right|\Bigg|_0^{x_2}=0 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{6}x_2^3-\frac{3}{8}x_2^2+ax_2\right|=0 \Rightarrow a=-\frac{x_2^2}{6}+\frac{3x_2}{8}\ (***).$$

Từ $(*)\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}-x_2$, thay vào $(**)\Rightarrow\left(\frac{3}{2}-x_2\right)x_2=-\frac{x_2^2}{3}+\frac{3x_2}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_2^2}{3}-\frac{3x_2}{4}=0 \Rightarrow x_2=\frac{9}{8}\xrightarrow{(***)}a=\frac{27}{128}. \text{ Vậy } a\in\left(\frac{3}{16};\frac{7}{32}\right).$$

Câu 21: **[MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 40]** Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình vẽ bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{9}$. Tích phân $\int_1^6(2x-5)f'(x)\mathrm{d}x$ bằng



Ghi Chú!

A. $\frac{830}{9}$. **B.** $\frac{178}{9}$. **C.** $\frac{340}{9}$. **D.** $\frac{925}{18}$.

Lời giải

Chọn C

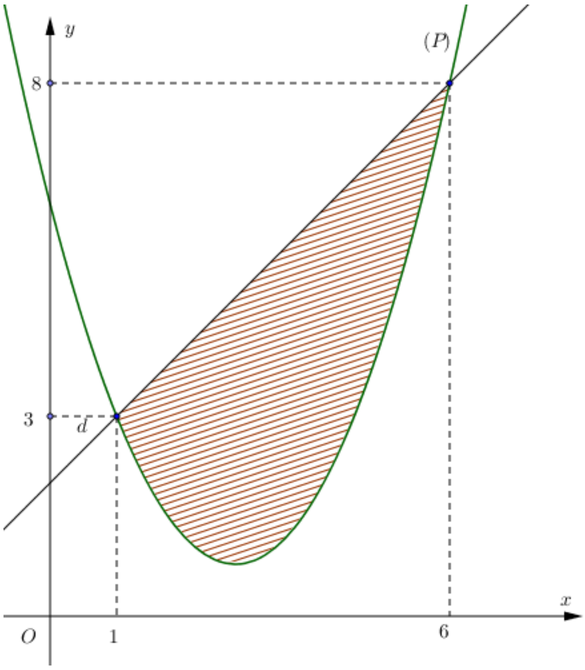
Ta có $S_{hthang}=\frac{(8+3).5}{2}=\frac{55}{2}\Rightarrow\int_1^6 f(x)dx=\frac{55}{2}-\frac{125}{9}=\frac{245}{18}$.

Đặt $\begin{cases} u=2x-5\Rightarrow du=2dx \\ dv=f'(x)dx\Rightarrow v=f(x)\end{cases}$

$$\int_1^6(2x-5)f'(x)dx=(2x-5)f(x)\Big|_1^6-2\int_1^6 f(x)dx=7.f(6)+3.f(1)-2.\frac{245}{18}$$

$=7.8+3.3-2.\frac{245}{18}=\frac{340}{9}$.

Câu 22: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 40] Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm như trong hình vẽ bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{9}$. Tích phân $\int_1^6(2x-5)f'(x)dx$ bằng



A. $\frac{830}{9}$. **B.** $\frac{178}{9}$. **C.** $\frac{340}{9}$. **D.** $\frac{925}{18}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S_{hthang}=\frac{(8+3).5}{2}=\frac{55}{2}\Rightarrow\int_1^6 f(x)dx=\frac{55}{2}-\frac{125}{9}=\frac{245}{18}$.

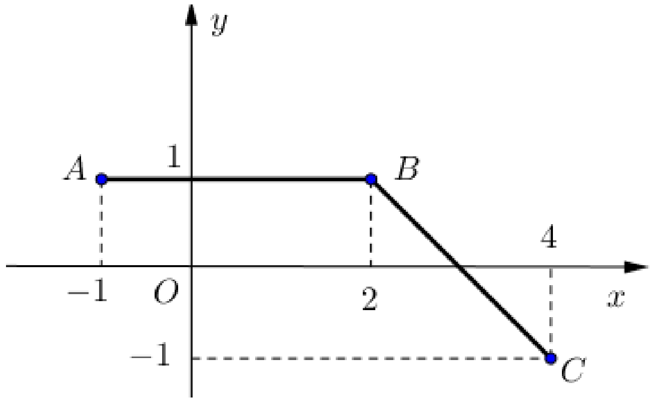
Đặt $\begin{cases} u=2x-5\Rightarrow du=2dx \\ dv=f'(x)dx\Rightarrow v=f(x)\end{cases}$

$$\int_1^6(2x-5)f'(x)dx=(2x-5)f(x)\Big|_1^6-2\int_1^6 f(x)dx=7.f(6)+3.f(1)-2.\frac{245}{18}$$

$=7.8+3.3-2.\frac{245}{18}=\frac{340}{9}$.

Ghi Chú!

Câu 23: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 34] Cho đường gấp khúc ABC trong hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;4]$. Tích phân $I=\int_{-1}^{4} f(x)dx$ bằng



A. 4. **B.** 3. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{7}{2}$.

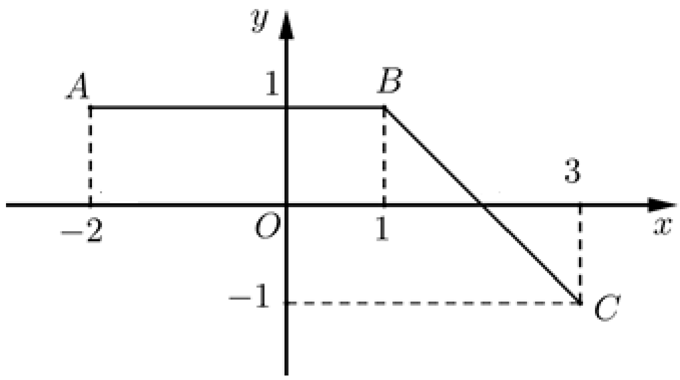
Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x)=\begin{cases}1 & , x\in[-1;2] \\ -x+3 & , x\in[2;4]\end{cases}$.

Khi đó $I=\int_{-1}^{4} f(x)dx=\int_{-1}^{2} 1dx+\int_{2}^{4}(-x+3)dx=3$.

Câu 24: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU37] Đường gấp khúc ABC trong hình bên là đồ thị của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$. Tích phân $\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ bằng



A. $\frac{9}{2}$ **B.** 3 **C.** 4 **D.** $\frac{7}{2}$

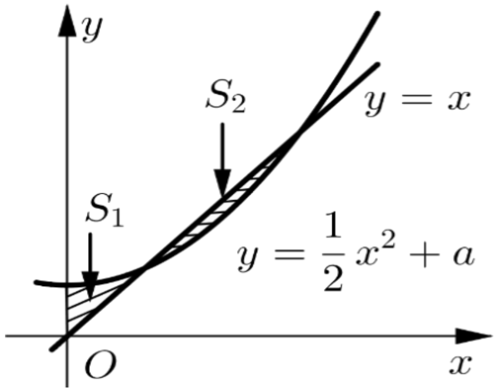
Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị ta có:

$$\int_{-2}^{3} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1} 1.\mathrm{d}x=x\Big|_{-2}^{1}=1-(-2)=3$$

Câu 25: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 45) Cho đường thẳng $y=x$ và Parabol $y=\frac{1}{2}x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào sau đây?



A. $\left(\frac{3}{7};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{5};\frac{3}{7}\right)$

Lời giải

Chọn C

Xét phương trình tương giao: $\frac{1}{2}x^2 + a = x$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x + a = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{1-2a} \\ x_1 = 1 + \sqrt{1-2a} \end{array}\right.$, với điều kiện $a < \frac{1}{2}$.

Đặt $t = \sqrt{1-2a}, (t \geq 0) \Rightarrow a = \frac{1-t^2}{2}$.

Xét $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + a$ và $\int g(x)dx = G(x) + C$.

Theo giả thiết ta có $S_1 = \int\limits_0^{x_1} g(x)dx = G(x_1) - G(0)$.

$S_2 = -\int\limits_{x_1}^{x_2} g(x)dx = G(x_1) - G(x_2)$.

Do $S_1 = S_2 \Rightarrow G(x_2) = G(0) \Rightarrow \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2^2 + ax_2 = 0$

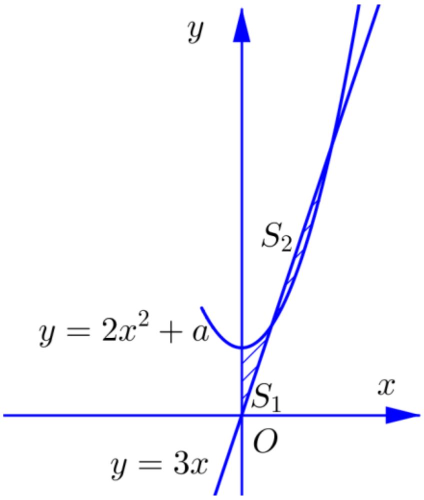
$\Rightarrow x_2^2 - 3x_2 + 6a = 0 \Rightarrow (1+t)^2 - 3(1+t) + 6\left(\frac{1-t^2}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow -2t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$ và $t = -1$(loại).

Khi $t = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{8}$.

Câu 26: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 41) Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?

Ghi Chú!



A. $\left(\frac{4}{5};\frac{9}{10}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{4}{5}\right)$. **C.** $\left(1;\frac{9}{8}\right)$. **D.** $\left(\frac{9}{10};1\right)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm $2x^2+a=3x \Leftrightarrow 2x^2-3x+a=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = 9-8a>0\\ \dfrac{a}{2}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<\dfrac{9}{8}\\ a>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<a<\frac{9}{8}.$$

Ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8a}}{4}$.

Ta có $S_1=S_2 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x = -\int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x$.

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{3-\sqrt{9-8a}}{4}}^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2+a-3x\right)\mathrm{d}x=0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}\left(2x^2-3x+a\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \left.\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+ax\right)\right|_0^{\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2+a\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)=0$$

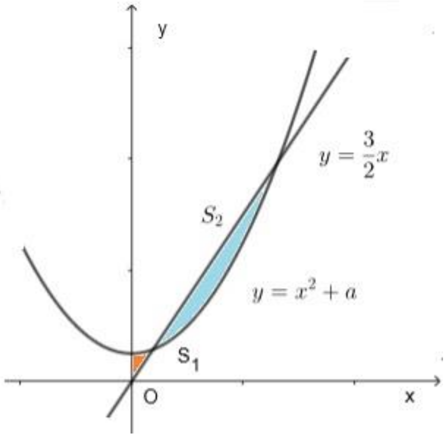
$$\Leftrightarrow \left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}=0\ \ (vn)\\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)^2-\frac{2}{3}\left(\frac{3+\sqrt{9-8a}}{4}\right)+a=0 \xrightarrow[\text{Shift Solve}]{\text{CASIO}} a=\frac{27}{32}$$

Ghi Chú!

Câu 27: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 41) Cho đường thẳng $y=\frac{3}{2}x$ và parabol $y=x^2+a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1=S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$. **B.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$. **C.** $\left(\frac{9}{20};\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(0;\frac{2}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Giải toán:

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+a=\frac{3}{2}x \Leftrightarrow 2x^2-3x+2a=0$

Để phương trình có 2 nghiệm dương thì $\begin{cases} a>0 \\ \Delta>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ a<\frac{9}{16} \end{cases}$.

Gọi hai nghiệm đó là $0<x_1<x_2$ thì $x_2=\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}$.

Để $S_1=S_2$ khi và chỉ khi $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)dx=0$

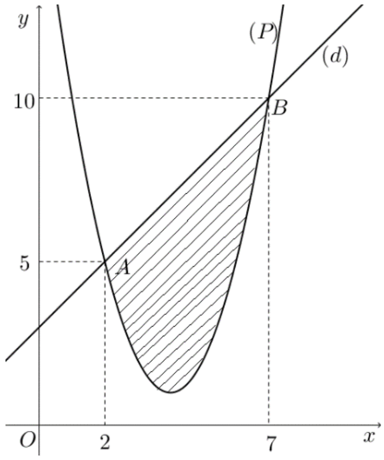
Ta có: $\int\limits_0^{x_2}\left(x^2+a-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x=0 \Leftrightarrow \frac{x_2^3}{3}+ax_2-\frac{3}{4}x_2^2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^3}{3}+a\cdot\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3+\sqrt{9-16a}}{4}\right)^2=0$$

Giải nhanh bằng máy tính cho kết quả $x=0,421875$ thuộc khoảng $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{20}\right)$.

Câu 28: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 40] Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{6}$. Tích phân $\int\limits_2^7(2x-3)f'(x)dx$ bằng

Ghi Chú!



A. $\dfrac{215}{3}$. **B.** $\dfrac{265}{3}$. **C.** $\dfrac{245}{3}$. **D.** $\dfrac{415}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Đặt $\begin{cases} u = 2x-3 \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Ta có: $\int\limits_2^7 (2x-3)f'(x)dx = \left[(2x-3)f(x)\right]\Big|_2^7 - 2\int\limits_2^7 f(x)dx$

$= 11f(7) - f(2) - 2\left[\dfrac{(5+10).5}{2} - \dfrac{125}{6}\right] = \dfrac{215}{3}$.

Cách 2: Dựa vào đồ thị ta có điểm $A(2;5)$ và $B(7;10)$ thuộc đường thẳng d và Parabol (P)

Suy ra đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (5;5)$

Phương trình đường thẳng $d: y = x+3$

Gọi (P) có phương trình: $y = ax^2 + bx + c, (a>0)$

$A, B \in (P) \Rightarrow$ Hệ phương trình:

$\begin{cases} 4a+2b+c=5 \\ 49a+7b+c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-4a-2b+5 \\ 49a+7b+5-4a-2b=10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-4a-2b+5 \\ b=1-9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3+14a \\ b=1-9a \end{cases}$

Hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S = \dfrac{125}{6}$

$\Rightarrow \int\limits_2^7 \left|x+3-\left(ax^2+bx+c\right)\right|dx = \dfrac{125}{6}$

$\Rightarrow \int\limits_2^7 \left|x+3-\left[ax^2+(1-9a)x+(3+14a)\right]\right|dx = \dfrac{125}{6}$

$\Leftrightarrow \int\limits_2^7 \left[-ax^2+9ax-14a\right]dx = \dfrac{125}{6} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{ax^3}{3} + \dfrac{9ax^2}{2} - 14ax\right)\Big|_2^7 = \dfrac{125}{6}$

$\Leftrightarrow \dfrac{125}{6}a = \dfrac{125}{6} \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = -8; c = 17$

(P) có phương trình: $y = f(x) = x^2 - 8x + 17 \Rightarrow f'(x) = 2x - 8$

Ghi Chú!

$$\Rightarrow \int_2^7 (2x-3)f'(x)dx = \frac{215}{3}$$

Dạng ③: Thể tích giới hạn bởi các đồ thị (tròn xoay) hàm xác định

Câu 29: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 4) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$. **B.** $V=\pi\int_0^2 (x^2+3)dx$.

C. $V=\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$. **D.** $V=\int_0^2 (x^2+3)dx$.

Lời giải

Chọn A

Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^2 (x^2+3)^2 dx$.

Câu 30: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 29) Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{3x}$, $y=0$, $x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{3x}dx$. **B.** $\int_0^1 e^{6x}dx$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{6x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{3x}dx$.

Lời giải

Chọn C

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là:

$V=\pi\int_0^1 (e^{3x})^2 dx=\pi\int_0^1 e^{6x}dx$.

Câu 31: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 33) Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0$ và $x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\pi\int_0^1 e^{2x}dx$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{x}dx$ **C.** $\int_0^1 e^{x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{2x}dx$.

Lời giải

Chọn A

Câu 32: (ĐMH 2017-Câu 28) Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

A. $V=4-2e$ **B.** $V=(4-2e)\pi$ **C.** $V=e^2-5$ **D.** $V=(e^2-5)\pi$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $2(x-1)e^x=0 \Leftrightarrow x=1$

Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:

Ghi Chú!

$V=\pi\int_0^1\left[2(x-1)e^x\right]^2dx=4\pi\int_0^1(x-1)^2e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=(x-1)^2\\dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2(x-1)dx\\v=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow V=4\pi(x-1)^2\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-4\pi\int_0^1 2(x-1)\frac{e^{2x}}{2}dx=4\pi(x-1)^2\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-4\pi\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$$

Gọi $I_1=\int_0^1(x-1)e^{2x}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x-1\Rightarrow du=dx\\dv=e^{2x}dx\Rightarrow v=\dfrac{e^{2x}}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow I_1=4\pi(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-4\pi\int_0^1\frac{e^{2x}}{2}dx=2\pi-\pi e^{2x}\Big|_0^1=2\pi-\pi e^2+\pi=3\pi-\pi e^2$$

Vậy $V=4\pi(x-1)^2\dfrac{e^{2x}}{2}\Big|_0^1-I_1=-2\pi-\left(3\pi-\pi e^2\right)=\pi\left(e^2-5\right)$.

Câu 33: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 14) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,x=\dfrac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\pi-1$ **B.** $V=(\pi-1)\pi$ **C.** $V=(\pi+1)\pi$ **D.** $V=\pi+1$

Lời giải

Chọn C

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2dx=\pi\left(2x+\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

Câu 34: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 20) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=2(\pi+1)$ **B.** $V=2\pi(\pi+1)$

C. $V=2\pi^2$ **D.** $V=2\pi$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình $\sqrt{2+\sin x}=0$ vô nghiệm nên:

$$V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2dx=\pi\int_0^{\pi}(2+\sin x)dx=\pi(2x-\cos x)\Big|_0^{\pi}=2\pi(\pi+1).$$

Câu 35: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 21) Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=1$. Khối tròn xoay tạo thanh khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A. $V=\dfrac{\pi e^2}{2}$. **B.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2+1\right)}{2}$. **C.** $V=\dfrac{e^2-1}{2}$. **D.** $V=\dfrac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$V=\pi\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\pi e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{2}.$$

Câu 36: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 14) Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y=\sqrt{x^2+1}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,x=1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

Ghi Chú!

A. $V=\dfrac{4\pi}{3}$ **B.** $V=2\pi$ **C.** $V=\dfrac{4}{3}$ **D.** $V=2$

Lời giải

Chọn A

Thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1=\frac{4\pi}{3}.$$

Câu 37: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 13) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2+2, y=0, x=1, x=2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^2\left(x^2+2\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $V=\pi\int_1^2\left(x^2+2\right)^2\mathrm{d}x$.

Câu 38: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 34) Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=e^{4x}, y=0, x=0, x=1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\int_0^1 e^{4x}dx$. **B.** $\pi\int_0^1 e^{8x}dx$. **C.** $\pi\int_0^1 e^{4x}dx$. **D.** $\int_0^1 e^{8x}dx$.

Lời giải

Chọn B

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_0^1\left(e^{4x}\right)^2dx=\pi\int_0^1 e^{8x}dx.$$

Câu 39: (DE MH BGD 2023 – Câu 29) Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+2x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\dfrac{16}{15}$. **B.** $V=\dfrac{16\pi}{9}$. **C.** $V=\dfrac{16}{9}$. **D.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y=-x^2+2x$ và đường $y=0$ là

$$-x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Thể tích là

$$V=\pi\int_0^2\left(-x^2+2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+4.\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{16\pi}{15}$$

Dạng ④: Thể tích tính theo mặt cắt S(x)

Câu 40: (ĐTK 2017-Câu 34) Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox

tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2-2}$.

A. $V = 32 + 2\sqrt{15}$ **B.** $V = \dfrac{124\pi}{3}$

C. $V = \dfrac{124}{3}$ **D.** $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$

Lời giải

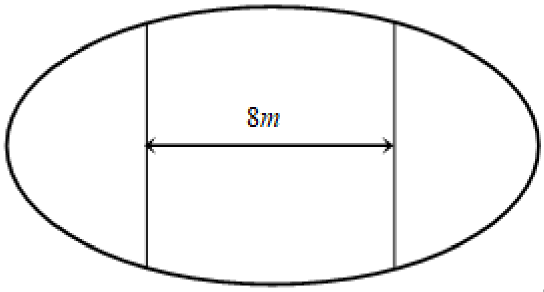
Chọn C

Diện tích thiết diện là: $S(x) = 3x.\sqrt{3x^2-2}$ $\Rightarrow$ Thể tích vật thể là:

$$V = \int_1^3 3x.\sqrt{3x^2-2}dx = \frac{124}{3}$$

➡Dạng ⑤: Bài toán thực tế sử dụng diện tích hình phẳng

Câu 41: (ĐTN 2017-Câu 28) Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng$/1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn.)



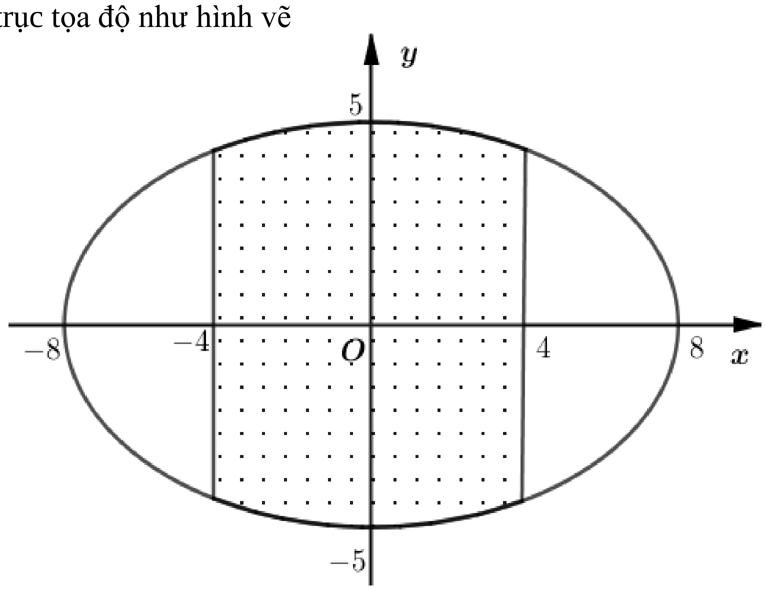
A. $7.862.000$ đồng **B.** $7.653.000$ đồng

C. $7.128.000$ đồng **D.** $7.826.000$ đồng

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Giả sử elip có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Từ giả thiết ta có $2a = 16 \Rightarrow a = 8$ và $2b = 10 \Rightarrow b = 5$

Vậy phương trình của elip là $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\ \ (E_1) \\ y=-\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\ \ (E_2) \end{array}\right.$

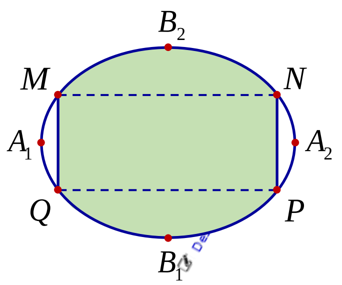
Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là

$S=2\int\limits_{-4}^{4}\dfrac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=\dfrac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}$

Khi đó số tiền là $T=\left(\dfrac{40\pi}{3}+20\sqrt{3}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

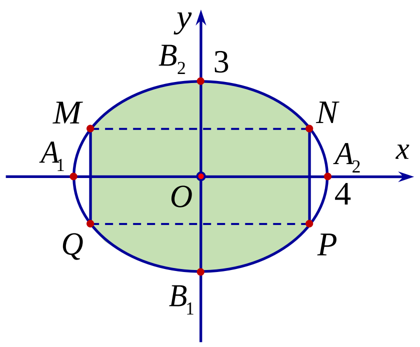
Câu 42: (ĐTK 2019-Câu 46) Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng/m^2 và phần còn lại là 100.000 đồng/m^2. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết $A_1A_2=8\,\mathrm{m}$, $B_1B_2=6\,\mathrm{m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ=3\,\mathrm{m}$?



A. 7.322.000 đồng. **B.** 7.213.000 đồng.
C. 5.526.000 đồng. **D.** 5.782.000 đồng.

Lời giải

Chọn A



Giả sử phương trình elip $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases} A_1A_2=8 \\ B_1B_2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=8 \\ 2b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ a=3 \end{cases}$

$\Rightarrow (E):\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \Rightarrow y=\pm\dfrac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

Diện tích của elip (E) là $S_{(E)}=\pi ab=12\pi\ (m^2)$.

Ta có: $MQ = 3 \Rightarrow \begin{cases} M = d \cap (E) \\ N = d \cap (E) \end{cases}$ với $d: y = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(-2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$ và $N\left(2\sqrt{3}; \frac{3}{2}\right)$.

Khi đó, diện tích phần không tô màu là $S = 4\int\limits_{2\sqrt{3}}^{4}\left(\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\right)dx = 4\pi - 6\sqrt{3}$ $\left(m^2\right)$.

Diện tích phần tô màu là $S' = S_{(E)} - S = 8\pi + 6\sqrt{3}$.

Số tiền để sơn theo yêu cầu bài toán là

$T = 100.000 \times \left(4\pi - 6\sqrt{3}\right) + 200.000 \times \left(8\pi + 6\sqrt{3}\right) \approx 7.322.000$ đồng.

Dạng ⑥: Ứng dụng vào bài toán chuyển động

Câu 43: (ĐMH 2017-Câu 24) Một ô tô đang chạy với vận tốc 10m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 10$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 0,2m **B.** 2m **C.** 10m **D.** 20m

Lời giải

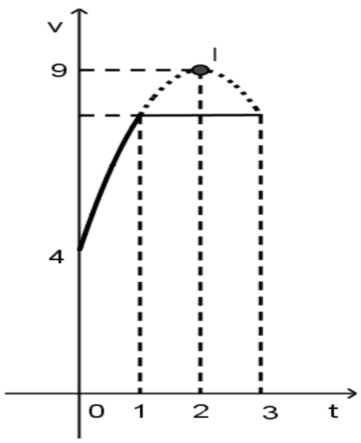
Chọn C

Xét phương trình $-5t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 2$. Do vậy, kể từ lúc người lái đạp phanh thì sau 2s ô tô dừng hẳn.

Quãng đường ô tô đi được kể từ lúc người lái đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn là

$$s = \int\limits_0^2 (-5t + 10)\,dt = \left(-\frac{5}{2}t^2 + 10t\right)\Bigg|_0^2 = 10m.$$

Câu 44: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 41) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động được trong 3 giờ đó (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



A. $s = 23,25(km)$ **B.** $s = 21,58(km)$

C. $s = 15,50(km)$ **D.** $s = 13,83(km)$

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn B

Gọi phương trình của parabol $v = at^2 + bt + c$ ta có hệ như sau:

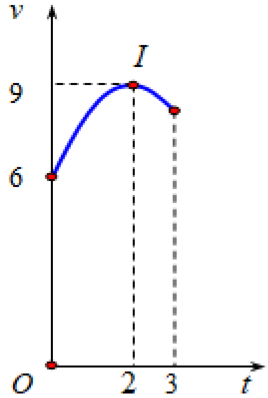
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a + 2b + c = 9 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 4 \\ a = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Với $t = 1$ ta có $v = \dfrac{31}{4}$.

Vậy quãng đường vật chuyển động được là

$$s = \int_0^1 \left(-\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4 \right) dt + \int_1^3 \frac{31}{4} dt = \frac{259}{12} \approx 21,583.$$

Câu 45: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 38) Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(\text{km/h})$ phụ thuộc thời gian $t(\text{h})$ có đồ thị là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 3 giờ đó.



A. $s = 24,25(\text{km})$ **B.** $s = 26,75(\text{km})$

C. $s = 24,75(\text{km})$ **D.** $s = 25,25(\text{km})$

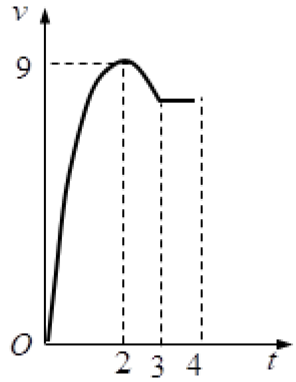
Lời giải

Chọn C

Tìm được phương trình của vận tốc là $v(t) = -\dfrac{3}{4}t^2 + 3t + 6$

Vậy $S = \displaystyle\int_0^3 \left(-\frac{3}{4}t^2 + 3t + 6\right)dt = 24,75.$

Câu 46: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 35) Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc thời gian $t(h)$ có đồ thị của vận tốc. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường Parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật chuyển động trong 4 giờ đó.



A. $s = 26,5(km)$ **B.** $s = 28,5(km)$.

C. $s = 27(km)$. **D.** $s = 24(km)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$.

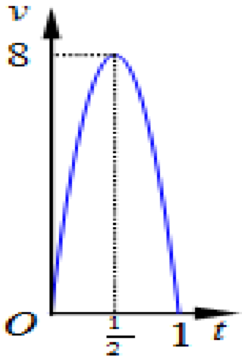
Vì (P) qua $O(0;0)$ và có đỉnh $I(2;9)$ nên dễ tìm được phương trình (P) là

$y = \frac{-9}{4}x^2 + 9x$.

Ngoài ra tại $x = 3$ ta có $y = \frac{27}{4}$.

Vậy quãng đường cần tìm là $S = \int_0^3 \left(\frac{-9}{4}x^2 + 9x\right)dx + \int_3^4 \frac{27}{4}x = 27(km)$.

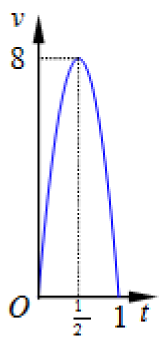
Câu 47: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 35) Một người chạy trong thời gian 1 giờ, vận tốc v (km/h) phụ thuộc vào thời gian t (h) có đồ thị là một phần parabol với đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$ và trục đối xứng song song với trục tung như hình bên. Tính quảng đường s người đó chạy được trong khoảng thời gian 45 phút, kể từ khi chạy?



A. $s = 4$ (km) **B.** $s = 2,3$ (km) **C.** $s = 4,5$ (km) **D.** $s = 5,3$ (km)

Lời giải

Chọn C



Ghi Chú!

Gọi parabol là $(P): y = ax^2 + bx + c$. Từ hình vẽ ta có (P) đi qua $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$ và điểm $I\left(\frac{1}{2};\ 8\right)$.

Suy ra $\begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 0 \\ \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -32 \\ b = 32 \\ c = 0 \end{cases}$.

Vậy $(P): y = -32x^2 + 32x$. Quảng đường người đó đi được là

$$s = \int_0^{\frac{3}{4}} \left(-32x^2 + 32x\right) dx = 4,5\,(\text{km}).$$

Câu 48: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 32) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $22\ (\text{m/s})$. **B.** $15\ (\text{m/s})$. **C.** $10\ (\text{m/s})$. **D.** $7\ (\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

+) Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 10 giây.

+) Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t) = \int a\,dt = at + C$, lại có $v_B(0) = 0$ nên $v_B(t) = at$.

+) Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15} \left(\frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t\right) dt = \int_0^{10} at\,dt \Leftrightarrow 75 = 50a \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng $v_B(10) = \frac{3}{2}.10 = 15\ (\text{m/s})$.

Câu 49: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 32) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \frac{1}{150}t^2 + \frac{59}{75}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(\text{m/s}^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng.

A. $20(\text{m/s})$. **B.** $16(\text{m/s})$. **C.** $13(\text{m/s})$. **D.** $15(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn B

+) Từ đề bài, ta suy ra: tính từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì A đi được 15 giây, B đi được 12 giây.

Ghi Chú!

+) Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int adt=at+C$, lại có $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

+) Từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi bị chất điểm B bắt kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được là bằng nhau. Do đó

$$\int_0^{15}\left(\frac{1}{150}t^2+\frac{59}{75}t\right)dt=\int_0^{12}atdt\Leftrightarrow 96=72a\Leftrightarrow a=\frac{4}{3}.$$

Từ đó, vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

$v_B(12)=\frac{4}{3}.12=16(m/s)$.

Câu 50: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 27) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\,(\text{m/s})$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 10 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(\text{m/s}^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(\text{m/s})$. **B.** $9(\text{m/s})$. **C.** $42(\text{m/s})$. **D.** $25(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $v_B(t)=\int a.\text{d}t=at+C$, $v_B(0)=0\Rightarrow C=0\Rightarrow v_B(t)=at$.

Quãng đường chất điểm A đi được trong 25 giây là

$$S_A=\int_0^{25}\left(\frac{1}{100}t^2+\frac{13}{30}t\right)\text{d}t=\left(\frac{1}{300}t^3+\frac{13}{60}t^2\right)\Big|_0^{25}=\frac{375}{2}.$$

Quãng đường chất điểm B đi được trong 15 giây là

$S_B=\int_0^{15}at.\text{d}t=\frac{at^2}{2}\Big|_0^{15}=\frac{225a}{2}$. Ta có $\frac{375}{2}=\frac{225a}{2}\Leftrightarrow a=\frac{5}{3}$.

Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A là $v_B(15)=\frac{5}{3}.15=25(\text{m/s})$.

Câu 51: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 27) Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 15 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $25(m/s)$. **B.** $36(m/s)$. **C.** $30(m/s)$. **D.** $21(m/s)$.

Lời giải

Chọn C

Thời điểm chất điểm B đuổi kịp chất điểm A thì chất điểm B đi được 15 giây, chất điểm A đi được 18 giây.

Biểu thức vận tốc của chất điểm B có dạng $v_B(t)=\int adt=at+C$ mà $v_B(0)=0$ nên $v_B(t)=at$.

Do từ lúc chất điểm A bắt đầu chuyển động cho đến khi chất điểm B đuổi kịp thì quãng đường hai chất điểm đi được bằng nhau. Do đó

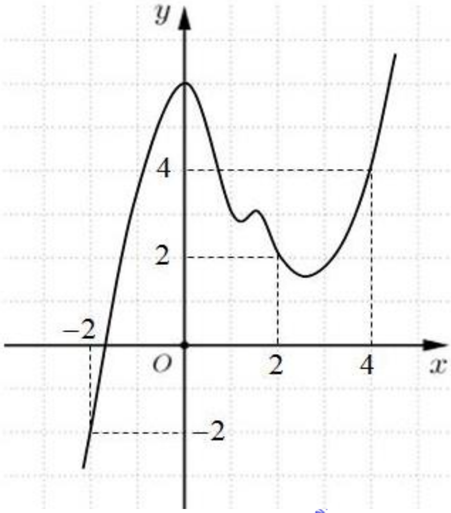
$$\int_0^{18}\left(\frac{1}{120}t^2+\frac{58}{45}\right)dt=\int_0^{15}atdt \Leftrightarrow 225=a.\frac{225}{2}\Leftrightarrow a=2$$

Vậy, vận tốc của chất điểm B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

$v_B(t)=2.15=30(m/s)$.

Dạng ⑦: Ứng dụng tích phân vào đại số(min-max, cực trị, so sánh, đơn điệu,…)

Câu 52: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 49) Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $h(x)=2f(x)-x^2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $h(4)=h(-2)>h(2)$ **B.** $h(4)=h(-2)<h(2)$

C. $h(2)>h(4)>h(-2)$ **D.** $h(2)>h(-2)>h(4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $h'(x)=2[f'(x)-x]; h'(x)=0\Rightarrow x\in\{-2;2;4\}$.

Bảng biến thiên

x		-2		2		4	
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	↘	$h(-2)$	↗	$h(2)$	↘	$h(4)$	↗

Suy ra $h(2)>h(4)$.

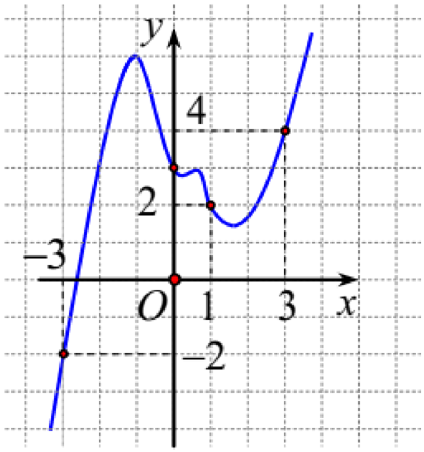
Kết hợp với BBT ta có

$\int_{-2}^{2}h'(x)dx>\int_{2}^{4}-h'(x)dx \Leftrightarrow \int_{-2}^{2}h'(x)dx>\int_{4}^{2}h'(x)dx$

$\Leftrightarrow h(2)-h(-2)>h(2)-h(4)\Leftrightarrow h(4)>h(-2)$.

Vậy ta có $h(2)>h(4)>h(-2)$.

Câu 53: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 48) Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)-(x+1)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(-3)>g(3)>g(1)$ **B.** $g(1)>g(-3)>g(3)$

C. $g(3)>g(-3)>g(1)$ **D.** $g(1)>g(3)>g(-3)$

Lời giải

Chọn D

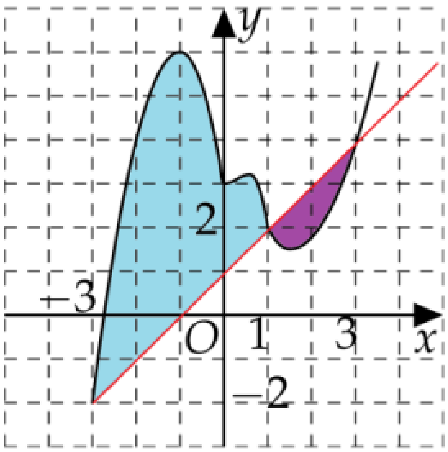
Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=\pm3\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-\infty$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(-3)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $g(-3)<g(1)$ và $g(3)<g(1)$.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy diện tích của phần màu xanh lớn hơn phần màu tím, nghĩa là $\int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx>\int_{1}^{3}\left[(x+1)-f'(x)\right]dx>0$, hay

$\int_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx+\int_{1}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx>0$, suy ra

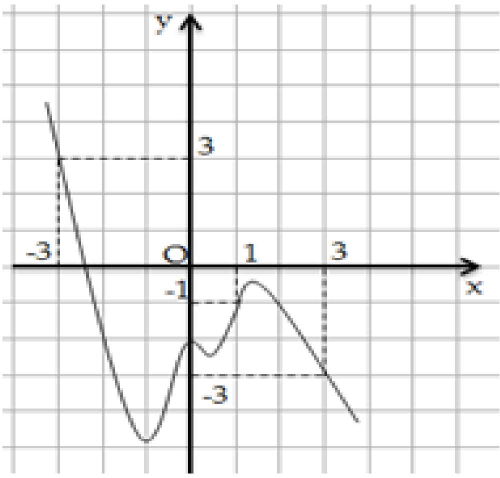
$\int_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx>0$. Từ đó

Ghi Chú!

$g(3)-g(-3)=\int\limits_{-3}^{3} g'(x)\mathrm{d}x = 2\int\limits_{-3}^{3}\left[f'(x)-(x+1)\right]\mathrm{d}x > 0$. Vậy

$g(1) > g(3) > g(-3)$.

Câu 54: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 46) Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=2f(x)+x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)<g(-3)<g(1)$. **B.** $g(1)<g(3)<g(-3)$.

C. $g(1)<g(-3)<g(3)$. **D.** $g(-3)<g(3)<g(1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $g'(x)=2f'(x)+2x \Rightarrow g'(x)=0 \Rightarrow x\in\{-3;1;3\}$.

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên.(Chú ý là hàm $g(x)$ và $g'(x)$)

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗		↘		↗		↘	

Suy ra $g(3)>g(1)$

Kết hợp với bảng biến thiên ta có:

$\int\limits_{-3}^{1}(-g'(x))dx > \int\limits_{1}^{3} g'(x)dx$

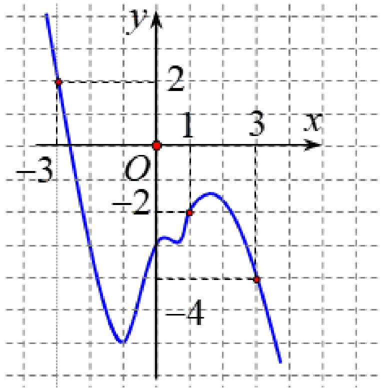
$\Leftrightarrow \int\limits_{1}^{-3} g'(x)dx > \int\limits_{1}^{3} g'(x)dx \Leftrightarrow g(-3)-g(1) > g(3)-g(1) \Leftrightarrow g(-3)>g(3)$

Vậy ta có $g(-3)>g(3)>g(1)$.

Câu 55: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 48) Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=2f(x)+(x+1)^2$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ghi Chú!



A. $g(1)<g(3)<g(-3)$ **B.** $g(1)<g(-3)<g(3)$

C. $g(3)=g(-3)<g(1)$ **D.** $g(3)=g(-3)>g(1)$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$g'(x)=2f'(x)+2(x+1)\Rightarrow g'(-3)=2f'(-3)-4, g'(1)=2f'(1)+4, g'(3)=2f'(3)+8$

Lại có nhìn đồ thị ta thấy

$f'(-3)=2,\ f'(1)=-2,\ f'(3)=-4\Rightarrow g'(-3)=g'(1)=g'(3)=0$

Hay phương trình $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-x-1$ có 3 nghiệm

x	-3		1		3
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$	$g(-3)$	↘	$g(1)$	↗	$g(3)$

Nhìn đồ thị ta có bảng biến thiên, suy ra $g(3)>g(1), g(-3)>g(1)$.

Mặt khác diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng $y=-x-1$ và đồ thị hàm số

$y=f'(x)$ trên 2 miền $[-3;1]$ và $[1;3]$, ta có

$$\int_{-3}^{1}\left(-x-1-f'(x)\right)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}\left(f'(x)+x+1\right)\mathrm{d}x$$

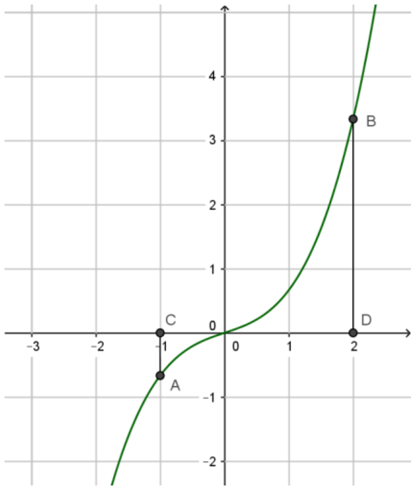
$$\Leftrightarrow -\int_{-3}^{1}g'(x)\mathrm{d}x>\int_{1}^{3}g'(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow -g(1)+g(-3)>g(3)-g(1)\Leftrightarrow g(-3)>g(3).$$

Vậy $g(1)<g(3)<g(-3)$.

»Dạng ⑧: Diện tích khi biết dạng các đồ thị hoặc hàm ẩn

Câu 56: (ĐTK 2017-Câu 21) Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ (như hình vẽ bên dưới).

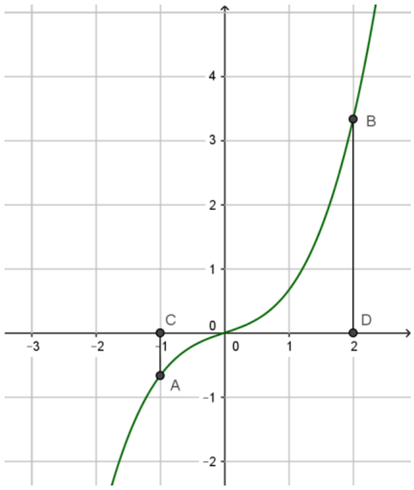
Đặt $a=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int_{0}^{2}f(x)\mathrm{d}x$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$ **B.** $S=b+a$ **C.** $S=-b+a$ **D.** $S=-b-a$

Lời giải

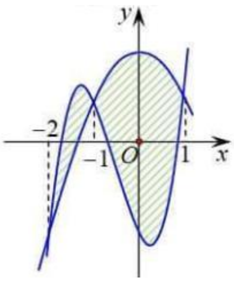
Chọn A



Ta có:

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-a+b.$$

Câu 57: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 36) Cho hai hàm số $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx-2$ và $g\left(x\right)=dx^2+ex+2$ với $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2;-1;1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị có diện tích bằng?



A. $\frac{37}{6}$ **B** $\frac{13}{2}$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{37}{12}$

Lời giải

Chọn A

Xét phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0\Leftrightarrow ax^3+\left(b-d\right)x^2+\left(c-e\right)x-4=0$ có 3 nghiệm $x_1;x_2;x_3$ lần lượt là $-2;-1;1$.

Áp dụng định lý $Vi-et$ cho phương trình bậc 3 ta được:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b-d}{a}=-2 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\dfrac{c-e}{a}=-1 \\ x_1x_2x_3=\dfrac{4}{a}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ c-e=-2 \\ b-d=4 \end{cases}.$$ Suy ra

$$f(x)-g(x)=2x^3+4x^2-2x-4$$

Diện tích hình phẳng: $\int\limits_{-2}^{-1}\left(2x^3+4x^2-2x-4\right)dx-\int\limits_{-1}^{1}\left(2x^3+4x^2-2x-4\right)dx=\dfrac{37}{6}$

Câu 58: (TN BGD 2022-MD101) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^3 f(x)dx=F(3)-G(0)+a\quad (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x), y=G(x), x=0$ và $x=3$. Khi $S=15$ thì a bằng:

A. 15. **B.** 12. **C.** 18. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$F(x), G(x)$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow F(x)=G(x)+C$

$$\Rightarrow S=\int\limits_0^3\left|F(x)-G(x)\right|dx=\int\limits_0^3|C|\,dx=\left|\int\limits_0^3 C\,dx\right|=|3C|=15\Rightarrow |C|=5\Rightarrow C=\pm 5$$

$$\int\limits_0^3 f(x)dx=F(3)-F(0)=F(3)-(G(0)+C)=F(3)-G(0)-C=F(3)-G(0)+a$$

$\Rightarrow a=-C=5$ (do $a>0$)

Câu 59: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-G(0)+a, (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=5$. Khi $S=20$ thì a bằng?

A. 4. **B.** 15. **C.** 25. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A

Đặt $G(x)=F(x)+C$ (C là hằng số).

$$\int\limits_0^5 f(x)\mathrm{d}x=F(5)-F(0)=F(5)-\left(G(0)-C\right)=F(5)-G(0)+C$$

Suy ra $C=a$.

$$S=\int\limits_0^5\left|F(x)-G(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^5|a|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^5 a\mathrm{d}x=5a.$$

Theo giả thiết $5a=20\Leftrightarrow a=4$

Câu 60: (DE TN BGD 2022-MD 103) Biết $F(x); G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x); y=G(x); x=0; x=4$. Khi $S=8$ thì a bằng

Ghi Chú!

A. 8 **B.** 4 **C.** 12 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Đặt $F(x)=G(x)+c$

$$S=\int_0^4 \left|F(x)-G(x)\right|dx \Rightarrow \left|F(x)-G(x)\right|=2 \ hay \ |c|=2$$

$$\int_0^4 f(x)dx=F(4)-G(0)+a$$

$$\Leftrightarrow F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+a$$

$$\Leftrightarrow -G(0)-c=-G(0)+a$$

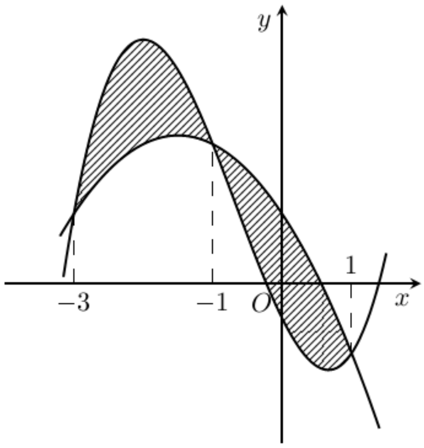
$$\Leftrightarrow a=-c$$

$$\Rightarrow a=\pm 2$$

Mà $a>0 \Rightarrow a=2$

Câu 61: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 41) Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=dx^2+ex+1$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -3; -1; 1 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\dfrac{9}{2}$. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.



Lời giải

Chọn C

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-3}^{-1}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left[g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-3}^{-1}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x.$$

Trong đó phương trình $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\dfrac{3}{2}=0$ $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm -3; -1; 1 nên

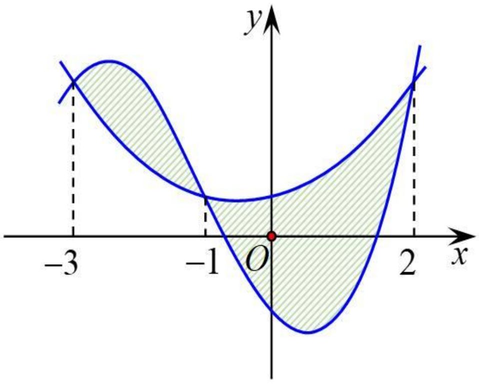
$$\begin{cases} -27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0 \\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0 \\ a+(b-d)+(c-e)-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27a+9(b-d)-3(c-e)=\frac{3}{2} \\ -a+(b-d)-(c-e)=\frac{3}{2} \\ a+(b-d)+(c-e)=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ (b-d)=\frac{3}{2} \\ (c-e)=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vậy $S=\int_{-3}^{-1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]dx-\int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right]dx=2-(-2)=4$

.

Câu 62: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 43) Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ và $g(x)=dx^2+ex+\frac{1}{2}$ $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3;-1;2$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

A. $\frac{253}{12}$. **B.** $\frac{125}{12}$. **C.** $\frac{253}{48}$. **D.** $\frac{125}{48}$

Lời giải

Chọn C

Theo giả thiết hai đồ thị hàm số cắt nhau tại các điểm $-3;1;2$ nên ta có

$$\begin{cases} -27a+9b-3c-1=9d-3e+\frac{1}{2} \\ -a+b-c-1=d-e+\frac{1}{2} \\ 8a+4b+2c-1=4d+2e+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -27a+9(b-d)-3(c-e)-\frac{3}{2}=0 \\ -a+(b-d)-(c-e)-\frac{3}{2}=0 \\ 8a+4(b-d)+2(c-e)-\frac{3}{2}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b-d=\frac{1}{2} \\ c-e=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

Vậy diện tích cần tính là:

$$S=\left|\int_{-3}^{-1}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{-1}^{2}\left[ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}\right]\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\frac{1}{4}.(-20)+\frac{1}{2}.\frac{26}{3}-\frac{5}{4}(-4)-\frac{3}{2}.2\right|+\left|\frac{1}{4}.\frac{15}{4}+\frac{1}{2}.3-\frac{5}{4}.\frac{3}{2}-\frac{3}{2}.3\right|=\frac{4}{3}+\frac{63}{16}=\frac{253}{48}$$

Cách 2. $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow a(x+3)(x-2)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x^2+4x+3)(x-2)=0\Leftrightarrow x^3+2x^2-5x-6=0$

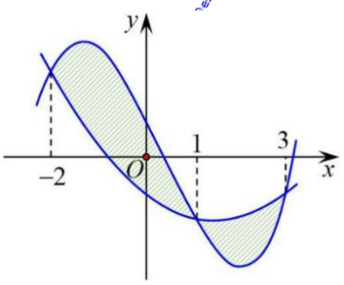
Đồng nhất hệ số với phương trình $ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x-\frac{3}{2}=0$ ta có:

$$\frac{a}{1}=\frac{-\frac{3}{2}}{-6}\Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1}{4}(x^3+2x^2-5x-6)$. Do đó

$$S=\int_{-3}^{2}\left|\frac{1}{4}(x+3)(x+1)(x-2)\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{48}.$$

Câu 63: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 40) Cho hai hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}$ và $g(x)=dx^2+ex-\frac{3}{4}$, $(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$. Biết rằng đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là -2; 1; 3 (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



A. $\frac{253}{48}$. **B.** $\frac{125}{24}$. **C.** $\frac{125}{48}$. **D.** $\frac{253}{24}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình hoành độ giao điểm là:

$ax^3+bx^2+cx+\frac{3}{4}=dx^2+ex-\frac{3}{4}\Leftrightarrow ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}=0$.

Đặt $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$

Dựa vào đồ thị ta có $h(x)=ax^3+(b-d)x^2+(c-e)x+\frac{3}{2}$ có ba nghiệm là $x=-2$; $x=1; x=3$.

Với $x=-2$ ta có $-8a+4(b-d)-2(c-e)=-\frac{3}{2}$, (1).

Với $x=1$ ta có $a+(b-d)+(c-e)=-\frac{3}{2}$, (2).

Với $x=3$ ta có $27a+9(b-d)+3(c-e)=-\frac{3}{2}$, (3).

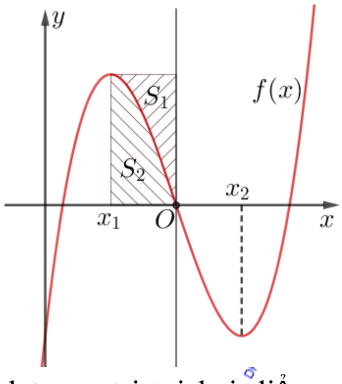
Từ $(1),(2)$ và (3) ta có $\begin{cases} -8a+4(b-d)-2(c-e)=-\dfrac{3}{2} \\ a+(b-d)+(c-e)=-\dfrac{3}{2} \\ 27a+9(b-d)+3(c-e)=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{4} \\ b-d=-\dfrac{1}{2} \\ c-e=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$.

Hay ta có

$$S=\int_{-2}^{3}\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_{-2}^{1}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|dx+\int_{1}^{3}\left|\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}\right|dx$$

$$=\frac{63}{16}+\frac{4}{3}=\frac{253}{48}.$$

Câu 64: (ĐTK 2021-Câu 48) Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.

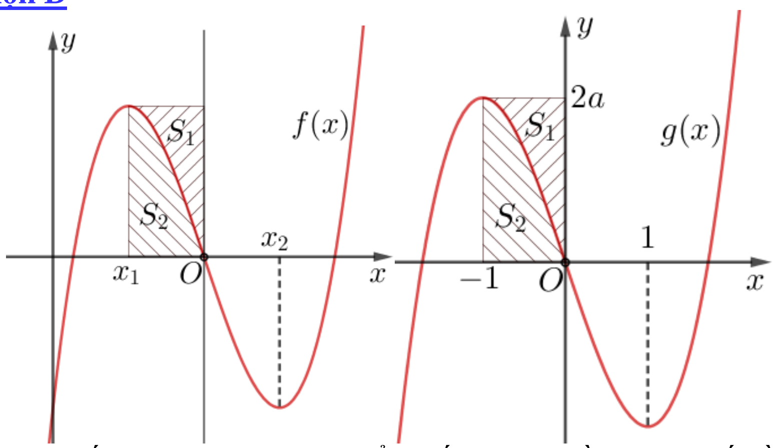


Biết hàm số $f(x)$ đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn $x_2=x_1+2$ và $f(x_1)+f(x_2)=0$. Gọi S_1 và S_2 là diện tích của hai hình phẳng được gạch trong hình vẽ. Tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{8}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Từ giả thiết của bài toán ta có điểm uốn I của đồ thị hàm số nằm trên trục hoành.

Tịnh tiến đồ thị theo vectơ $\overrightarrow{IO}$, ta thu được đồ thị hàm số $y=g(x)$ có điểm uốn là gốc tọa độ O và hai điểm cực trị $x_3=-1$, $x_4=1$.

Khi đó $g'(x)$ là tam thức bậc hai có hai nghiệm ±1 nên

$g'(x)=3a(x+1)(x-1)=3a(x^2-1)$ với $a\neq0$.

Ghi Chú!

Từ đó ta có $g(x)=3a\left(\frac{x^3}{3}-x\right)+b \Leftrightarrow g(x)=a\left(x^3-3x\right)+b$.

Do $g(x)$ đi qua gốc tọa độ O nên $b=0$, suy ra $g(x)=a\left(x^3-3x\right)$.

Ta có $S_2=\int\limits_{-1}^{0}a\left(x^3-3x\right)\mathrm{d}x=a\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{5a}{4}$.

Lại có S_1+S_2 bằng diện tích của hình chữ nhật có hai kích thước 1 và $g(-1)=2a$, suy ra $S_1+S_2=2a$. Do đó $S_1=2a-\frac{5a}{4}=\frac{3a}{4}$.

Vậy $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{5}$.

Câu 65: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 46) Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a,b,c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 18$. **D.** $2\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$f'(x)=3x^2+2ax+b$;

$f''(x)=6x+2a$;

$f'''(x)=6$;

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Vì $g(x)$ có hai giá trị cực trị là là -3 và 6 nên không giảm tổng quát, $g(x)$ có hai điểm cực trị là x_1,x_2 và $g(x_1)=-3$, $g(x_1)=6$.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1$$

$$\Leftrightarrow f(x)=g(x)+6 \Leftrightarrow f(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)+6$$

$$\Leftrightarrow f'(x)+f''(x)+6=0$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln 12-\ln 3\right|=2\ln 2.$$

Câu 66: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 43) Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị

Ghi Chú!

cực trị là -4 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 2$. **B.** $\ln 6$. **C.** $3\ln 2$. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-4$, $g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\dfrac{g'(x)}{g(x)+6}=0$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1,x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$S=\left|\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\dfrac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln|g(x)+6|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\big|\ln|2+6|-\ln|-4+6|\big|=\ln 2$.

Câu 67: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 46) Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 3. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 2$. **C.** $\ln 15$. **D.** $3\ln 2$.

Lời giải

Chọn A

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$, $f''(x)=6x+2a$, $f'''(x)=6$.

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$

$\Rightarrow g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=f'(x)+f''(x)+6$.

Do $g(x)$ có hai cực trị là -5 và 3 nên $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$ với $g(x_1)=-5$, $g(x_2)=3$.

Ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\dfrac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=x_2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{g(x)+6}\mathrm{d}\left(g(x)+6\right)\right|=\left|\left(\ln\left|g(x)+6\right|\right)\Big|_{x_1}^{x_2}\right|$$

$$=\left|\ln\left|g(x_2)+6\right|-\ln\left|g(x_1)+6\right|\right|=\left|\ln 1-\ln 9\right|=2\ln 3.$$

Câu 68: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 47) Cho hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực. Biết hàm số $g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ bằng

A. $\ln 3$. **B.** $3\ln 2$. **C.** $\ln 10$. **D.** $\ln 7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có

$g(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)=x^3+(a+3)x^2+(2a+b+6)x+(2a+b+c)$

$g'(x)=f'(x)+f''(x)+f'''(x)=3x^2+2ax+b+6x+2a+6$

$=3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)$.

Vì $y=g(x)$ có hai giá trị cực trị là -5 và 2 nên $g'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với $g(x_1)=-5, g(x_2)=2$.

Phương trình hoành độ giao điểm

$$\frac{f(x)}{g(x)+6}=1\Leftrightarrow\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2+(2a+6)x+(2a+b+6)}{g(x)+6}=0\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g(x)+6}=0.$$

Phương trình này cũng có hai nghệm phân biệt x_1,x_2

Như vậy diện tích hình phẳng giới hạn bởi các hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ và $y=1$ là

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right|=\left|\ln\left|g(x)+6\right|\Big|_{x_1}^{x_2}\right|=\left|\ln|2+6|-\ln|-5+6|\right|=3\ln 2.$$

Câu 69: (TN BGD 2022-MD101) Cho hàm số $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln\dfrac{43}{8}$	$\nearrow$	$\ln 6$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;6)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(3;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=e^{g(x)}$.

Từ bảng biến thiên suy ra: $g(x)\ge \ln 2 \Rightarrow e^{g(x)}\ge e^{\ln 2}=2$.

+) $f'(x)=g'(x)e^{g(x)}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $g'(x)$:

$$f'(x)-g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)e^{g(x)}-g'(x)=0 \Leftrightarrow g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right..$$

Mặt khác từ bảng biến thiên ta cũng có: $g'(x)>0,\ \forall x\in(x_1;x_2)$; $g'(x)<0$, $\forall x\in(x_2;x_3)$.

Suy ra:

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|f'(x)-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|g'(x)e^{g(x)}-g'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}x-\int_{x_2}^{x_3}g'(x)\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}(g(x))-\int_{x_2}^{x_3}\left(e^{g(x)}-1\right)\mathrm{d}(g(x))$$

$$=\left(e^{g(x)}-g(x)\right)\Big|_{x_1}^{x_2}-\left(e^{g(x)}-g(x)\right)\Big|_{x_2}^{x_3}$$

$$=\left[e^{g(x_2)}-g(x_2)-e^{g(x_1)}+g(x_1)\right]-\left[e^{g(x_3)}-g(x_3)-e^{g(x_2)}+g(x_2)\right]$$

$$=2e^{g(x_2)}-e^{g(x_1)}-e^{g(x_3)}-2g(x_2)+g(x_1)+g(x_3)$$

$$=2.6-\frac{43}{8}-2-2\ln 6+\ln\frac{43}{8}+\ln 2=\frac{37}{8}+\ln\frac{43}{144}\approx 3,416.$$

Câu 70: (DE TN BGD 2022-MD 103) Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Biết rằng hàm số $g(x)=\ln f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\ln 30$	↗	$\ln 35$	↘	$\ln 3$	↗	$+\infty$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(33;35)$. **B.** $(37;40)$. **C.** $(29;32)$. **D.** $(24;26)$.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên hàm số $g(x)=\ln f(x)$ ta có

$\ln f(x)\ge \ln 3,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)\ge 3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 điểm cực trị là $A(x_1;\ln 30)$, $B(x_2;\ln 35)$, $C(x_3;\ln 3)$ nên $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)=0$ và $f(x_1)=30,\ f(x_2)=35,\ f(x_3)=3$.

Do $y=f'(x)$ là hàm số bậc 3 nên phương trình $f'(x)=0$ chỉ có 3 nghiệm $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $f'(x)$ và $g'(x)$ ta có

$$f'(x)=g'(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(x)=0\\ f(x)=1\ (\text{VN})\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\ x=x_2\\ x=x_3\end{array}\right..$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f'(x)$ và $y=g'(x)$ là:

$$S=\int_{x_1}^{x_3}\left|g'(x)-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}-f'(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x$$

+ Tính $I_1=\int_{x_1}^{x_2}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{x_1}^{x_2}f'(x).\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ (do $f'(x)\ge 0,\ \forall x\in(x_1;x_2)$)

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

$x=x_1\Rightarrow t=f(x_1)=30$.

$x=x_2\Rightarrow t=f(x_2)=35$.

Suy ra $I_1=\int_{30}^{35}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\left(t-\ln|t|\right)\Big|_{30}^{35}=35-\ln 35-30+\ln 30=5+\ln\frac{6}{7}$.

+ Tính $I_2=\int_{x_2}^{x_3}\left|f'(x).\left(\frac{1}{f(x)}-1\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{x_2}^{x_3}f'(x).\left(1-\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x$ (do $f'(x)\le 0,\ \forall x\in(x_2;x_3)$).

Đặt $t=f(x)\Rightarrow \mathrm{d}t=f'(x)\mathrm{d}x$.

Đổi cận:

$x=x_2\Rightarrow t=f(x_2)=35$.

$x=x_3\Rightarrow t=f(x_3)=3$.

Suy ra $I_2=-\int_{35}^{3}\left(1-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=-\left(t-\ln|t|\right)\Big|_{35}^{3}=-(3-\ln 3-35+\ln 35)=32-\ln\frac{35}{3}$.

Vậy $S=5+\ln\frac{6}{7}+\left(32-\ln\frac{35}{3}\right)=37+\ln\frac{18}{245}\approx 34{,}39\in(33;35)$.

Câu 71: (DE TN BGD 2022-MD 104) Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-G(0)+a\ (a>0)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$, $x=0$ và $x=2$, Khi $S=6$ thì a bằng

A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 8.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn C

$F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có

$\forall x \in \mathbb{R}: F(x) = G(x) + C$ (với C là hằng số).

Do đó $F(0) = G(0) + C$ (1).

Lại có $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = F(2) - F(0)$

$\Leftrightarrow F(2) - G(0) + a = F(2) - F(0) \Leftrightarrow F(0) = G(0) - a$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $C = -a$.

Khi đó $F(x) = G(x) - a$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |F(x) - G(x)| = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$, $y = G(x)$, $x = 0$ và $x = 2$ là

$$S = \int_0^2 |F(x) - G(x)|.\mathrm{d}x = \int_0^2 a.\mathrm{d}x = 2a = 6 \Rightarrow a = 3.$$

Câu 72: (DE MH BGD 2023 - Câu 44) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + xf'(x) = 4x^3 + 4x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ bằng

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f(x) + x.f'(x) = 4x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow (x)' \cdot f(x) + x.f'(x) = 4x^3 + 4x + 2$

$\Leftrightarrow [x.f(x)]' = 4x^3 + 4x + 2 \Leftrightarrow x.f(x) = x^4 + 2x^2 + 2x + C$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + C}{x}$$

Vì do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $C = 0$. Do đó $f(x) = x^3 + 2x + 2$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = f'(x)$, ta có:

$x^3 + 2x + 2 = 3x^2 + 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$. Vậy diện tích phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$ và $y = f'(x)$ là: $S = \int_0^2 |f(x) - f'(x)|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

Ghi Chú!

MỤC LỤC

♻ - SỐ PHỨC 475

§1- ĐỊNH NGHĨA SỐ PHỨC 475

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 475

Ⓑ Dạng toán cơ bản 476

Dạng ①: Các yếu tố và thuộc tính cơ bản của số phức 476

Dạng ②: Hai số phức bằng nhau và ứng dụng hai số phức bằng nhau . 480

Dạng ③: Các yếu tố và thuộc tính cơ bản của số phức 483

Dạng ④: Thực hiện các phép toán cơ bản về số phức 488

Dạng ⑤: Xác định các yếu tố của số phức (phần thực, ảo, mô đun, liên hợp,...) qua các phép toán 491

Dạng ⑥: Tìm số phức thỏa mãn đk cho trước 497

Dạng ⑦: Câu hỏi lý thuyết, biểu diễn liên quan đến 1 số phức 505

Dạng ⑧: Biểu diễn số phức qua các phép toán 508

Dạng ⑨: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z độc lập 511

.... 512

Dạng ⑩: Tìm tâm, bán kính của đường tròn biểu diễn số phức z độc lập 512

§2- CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC 513

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 513

Ⓑ Dạng toán cơ bản 515

Dạng ①: Thực hiện các phép toán cơ bản về số phức 515

Dạng ②: Xác định các yếu tố của số phức (phần thực, ảo, mô đun, liên hợp,...) qua các phép toán 518

Dạng ③: Tìm số phức thỏa mãn đk cho trước 524

Dạng ④: Sử dụng Module và liên hợp để giải toán số phức 531

Dạng ⑤: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đường tròn 537

Dạng ⑥: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đường elip 538

Dạng ⑦: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đa giác 539

§3- PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI 540

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản 540

Dạng ①: Tính toán biểu thức nghiệm 541

Dạng ②: Định lí Viet và ứng dụng 549

Dạng ③: Phương trình quy về bậc hai, phương trình bậc cao 550

Dạng ④: Các bài toán biểu diễn hình học nghiệm của phương trình 550

Dạng ⑤: Các bài toán khác về phương trình 555

Ghi Chú!

CHƯƠNG 4 - SỐ PHỨC

§1- ĐỊNH NGHĨA SỐ PHỨC

A Tóm tắt lý thuyết cơ bản

Ghi nhớ!

1. Định nghĩa dạng đại số của số phức.

- Một số phức là một biểu thức dạng $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$,
  - i được gọi là đơn vị ảo,
  - a được gọi là phần thực và
  - b được gọi là phần ảo của số phức $z = a + bi$.
- Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$; $\mathbb{C} = \{a + bi / a, b \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$.

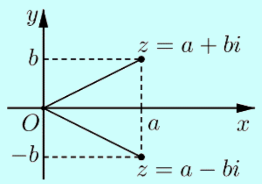
Chú ý:

- Khi phần thực $a = 0 \Leftrightarrow z = bi \Leftrightarrow z$ là số thuần ảo.
- Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực, vừa là số ảo.

- Hai số phức bằng nhau: $a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$;$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.
- Hai số phức $z_1 = a + bi$; $z_2 = -a - bi$ được gọi là hai số phức đối nhau.

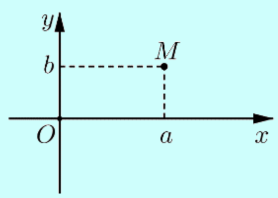
2. Số phức liên hợp.

- Số phức liên hợp của $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là $a - bi$ và được kí hiệu bởi $\bar{z}$.
- Chú ý: $\bar{\bar{z}} = z$



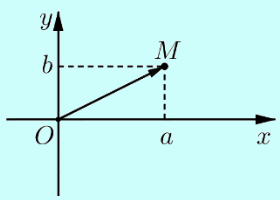
3. Biểu diễn hình học .

- Trong mặt phẳng phức Oxy (Ox là trục thực, Oy là trục ảo), số phức $z = a + bi$ với $a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bằng điểm $M(a;b)$.



4. Mô đun của số phức

- Môđun của số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Như vậy, môđun của số phức z là $\bar{z}$ chính là khoảng cách từ điểm M biểu diễn số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ đến



Ghi Chú!

gốc tọa độ O của mặt phẳng phức là $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Các yếu tố và thuộc tính cơ bản của số phức

Câu 1: (ĐMH 2017-Câu 29) Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\overline{z}$:

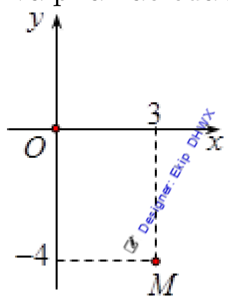
A. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$
B. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2
C. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$
D. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2

Lời giải

Chọn D

$z = 3 - 2i \Rightarrow \overline{z} = 3 + 2i$. Vậy phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2 .

Câu 2: (ĐTN 2017-Câu 29) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .



A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3
B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$
C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4
D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$

Lời giải

Chọn C

Nhắc lại: *Trên mặt phẳng phức, số phức $z = x + yi$ được biểu diễn bởi điểm $M(x; y)$*
.
Điểm M trong hệ trục Oxy có hoành độ $x = 3$ và tung độ $y = -4$.
Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

Câu 3: (ĐTK 2017-Câu 4) Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a , b .

A. $a = 3; b = 2$ **B.** $a = 3; b = 2\sqrt{2}$
C. $a = 3; b = \sqrt{2}$ **D.** $a = 3; b = -2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D

Số phức $3 - 2\sqrt{2}i$ có phần thực là $a = 3$ và phần ảo là $b = -2\sqrt{2}$.

Câu 4: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu3) Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. $z = -2 + 3i$ **B.** $z = 3i$ **C.** $z = -2$ **D.** $z = \sqrt{3} + i$

Lời giải

Chọn B

Số phức z được gọi là số thuần ảo nếu phần thực của nó bằng 0 .

Ghi Chú!

Câu 5: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 9) Cho số phức $z=2-3i$. Tìm phần thực a của z.

A. $a=2$. **B.** $a=3$. **C.** $a=-3$. **D.** $a=-2$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ có phần thực là a $\Rightarrow z=2-3i$ có phần thực $a=2$.

Câu 6: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 4) Cho số phức $z=2+i$. Tính $|z|$.

A. $|z|=3$ **B.** $|z|=5$ **C.** $|z|=2$ **D.** $|z|=\sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $|z|=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$.

Câu 7: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 9) Số phức $-3+7i$ có phần ảo bằng

A. 3. **B.** -7. **C.** -3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Câu 8: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 6) Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

A. $3+4i$. **B.** $4-3i$. **C.** $3-4i$. **D.** $4+3i$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 11) Số phức $5+6i$ có phần thực bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Số phức $5+6i$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng 6.

Câu 10: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 9) Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

A. $-1-3i$. **B.** $1-3i$. **C.** $-1+3i$. **D.** $1+3i$.

Lời giải

Chọn D

Câu 11: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 13) Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A. $-3-4i$. **B.** $-3+4i$. **C.** $3+4i$. **D.** $-4+3i$.

Lời giải

Chọn C

$z=3-4i\Rightarrow \bar{z}=3+4i$.

Câu 12: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 4) Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là

A. $-5+3i$. **B.** $-3+5i$. **C.** $-5-3i$. **D.** $5+3i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là $5+3i$.

Câu 13: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 7) Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là:

A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ là số phức $\bar{z}=a-bi,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Câu 14: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 5) Số phức liên hợp của số phức $z=3-2i$ là.

A. $-3+2i$. **B.** $3+2i$. **C.** $-3-2i$. **D.** $-2+3i$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn B

Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\overline{z}=a-bi$ từ đó suy ra chọn đáp án **B.**

Câu 15: (ĐTK 2020-L1-Câu 12) Môđun của số phức $1+2i$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 16: (ĐTK 2020-L2-Câu 19) Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là

A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là $\overline{z}=2-i$.

Câu 17: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 6) Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là $\overline{z}=-3-5i$.

Câu 18: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 24) Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là

A. $\overline{z}=2-5i$. **B.** $\overline{z}=2+5i$. **C.** $\overline{z}=-2+5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 19: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 13) Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là

A. $\overline{z}=2+5i$. **B.** $\overline{z}=-2+5i$. **C.** $\overline{z}=2-5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là $\overline{z}=2+5i$.

Câu 20: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 13) Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn B

Số phức liên hợp của $z=3-5i$ là $\overline{z}=3+5i$.

Câu 21: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 13) Phần thực của số phức $z=-3-4i$ bằng

A. 4. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa số phức ta có phần thực của số phức $z=-3-4i$ bằng -3.

Câu 22: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 18) Phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** -3 **D.** -4

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=3-4i$, suy ra phần thực của số phức z bằng 3.

Ghi Chú!

Câu 23: **(THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 3)** Phần thực của số phức $z=-5-4i$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Phần thực của số phức $z=-5-4i$ là $a=-5$.

Câu 24: **(THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 15)** Phần thực của số phức $z=5-4i$ bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

Phần thực số phức $z=5-4i$ bằng 5.

Câu 25: **(ĐTK 2021-Câu 18)** Số phức liên hợp của số phức $z=3+2i$ là

A. $\overline{z}=3-2i$. **B.** $\overline{z}=2+3i$. **C.** $\overline{z}=-3+2i$. **D.** $\overline{z}=-3-2i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=3+2i$ là $\overline{z}=3-2i$.

Câu 26: **(THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 9)** Phần thực của số phức $z=5-2i$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Phần thực của $z=5-2i$ là 5.

Câu 27: **(THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 25)** Phần thực của số phức $z=6-2i$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Phần thực của số phức $z=6-2i$ bằng 6.

Câu 28: **(THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 25)** Phần thực của số phức $z=3-2i$ bằng:

A. 2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Câu 29: **(THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 16)** Phần thực của số phức $z=4-2i$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Số phức $z=4-2i$ có phần thực là 4.

Câu 30: **(TN BGD 2022-MD101)** Môđun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. 25. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Câu 31: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Mô đun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. $\sqrt{7}$ **B.** 5. **C.** 7. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

Ghi Chú!

Ta có $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

Câu 32: (DE TN BGD 2022-MD 103) Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=(2-i)(1+i)=3+i$. Vậy phần ảo là 1.

Câu 33: (DE TN BGD 2022-MD 103)Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w=1-4i$

A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_1=5-4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_4=1+4i$.

Lời giải

Chọn B

Cả hai số phức $w=1-4i$ và $z_1=5-4i$ đều có phần ảo bằng -4 nên ta chọn

Câu 34: (DE TN BGD 2022-MD 104)Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w=1-4i$?

A. $z_1=5-4i$. **B.** $z_4=1+4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_2=3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $w=1-4i$ có phần ảo bằng -4.

Trong các số phức đã cho, số phức $z_1=5-4i$ cũng có phần ảo bằng -4.

Câu 35: (DE TN BGD 2022-MD 104)Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=(2-i)(1+i)=3+i$.

Vậy phần ảo của số phức z bằng 1.

Câu 36: (DE MH BGD 2023 – Câu 16)Phần ảo của số phức $z=2-3i$ là

A. -3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết.

Câu 37: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 12] Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. 2. **B.** $1-i$. **C.** $1+i$ **D.** $-i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z=-i=0-1.i$.

Số phức này có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -1, khác 0 nên nó là số thuần ảo.

Câu 38: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 1] Cho số phức $z=1-2i$.Phần ảo của số phức $\bar{z}$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$z=1-2i\Rightarrow \bar{z}=1+2i$.

Dạng ②: Hai số phức bằng nhau và ứng dụng hai số phức bằng nhau

Câu 39: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 14) Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

A. $x=-\sqrt{2},y=2.$ **B.** $x=\sqrt{2},y=2.$

C. $x=0,y=2.$ **D.** $x=\sqrt{2},y=-2.$

Lời giải

Chọn C

$$x^2-1+yi=-1+2i\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=-1\\y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}.$$

Câu 40: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 24) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1$; $y=-3$. **B.** $x=-1$; $y=-1$.

C. $x=1$; $y=-1$. **D.** $x=1$; $y=-3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i\Leftrightarrow x+1-(3y+9)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=0\\3y+9=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}.$$

Câu 41: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 25) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $3x+2yi\ +\ 2+i\ =2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2;y=-2$. **B.** $x=-2;y=-1$.

C. $x=2;y=-2$. **D.** $x=2;y=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3x+2yi\ +\ 2+i\ =2x-3i\Leftrightarrow x+2+(2y+4)i=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+2=0\\2y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}.$$

Câu 42: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 23) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2$; $y=4$. **B.** $x=2$; $y=4$.

C. $x=-2$; $y=0$. **D.** $x=2$; $y=0$.

Lời giải

Chọn B

$(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i\Leftrightarrow 2x-4+(4-y)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-4=0\\4-y=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}.$$

Câu 43: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 25) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1;y=-1$. **B.** $x=-1;y=1$.

C. $x=1;y=-1$. **D.** $x=1;y=1$.

Lời giải

Chọn D

Ghi Chú!

$(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i \Leftrightarrow (2x+3)-(3y+1)i=5x-4i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3=5x\\3y+1=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Câu 44: (ĐTK 2019-Câu 18) Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0, b=2$. **B.** $a=\frac{1}{2}, b=1$. **C.** $a=0, b=1$. **D.** $a=1, b=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a+(b+i)i=1+2i \Leftrightarrow (2a-1)+bi=1+2i \Leftrightarrow \begin{cases}2a-1=1\\b=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$.

Câu 45: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 14) Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2-1+yi=-1+2i$.

A. $x=-\sqrt{2}, y=2$. **B.** $x=\sqrt{2}, y=2$.

C. $x=0, y=2$. **D.** $x=\sqrt{2}, y=-2$.

Lời giải

Chọn C

$x^2-1+yi=-1+2i \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1=-1\\y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$.

Câu 46: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 24) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1$; $y=-3$. **B.** $x=-1$; $y=-1$.

C. $x=1$; $y=-1$. **D.** $x=1$; $y=-3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(2x-3yi)+(1-3i)=x+6i \Leftrightarrow x+1-(3y+9)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x+1=0\\3y+9=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$.

Câu 47: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 25) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $3x+2yi\ +\ 2+i\ =2x-3i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2; y=-2$. **B.** $x=-2; y=-1$.

C. $x=2; y=-2$. **D.** $x=2; y=-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3x+2yi\ +\ 2+i\ =2x-3i \Leftrightarrow x+2+(2y+4)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2=0\\2y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$.

Câu 48: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 23) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-2$; $y=4$. **B.** $x=2$; $y=4$.

C. $x=-2$; $y=0$. **D.** $x=2$; $y=0$.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn B

$(3x+yi)+(4-2i)=5x+2i \Leftrightarrow 2x-4+(4-y)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x-4=0\\4-y=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}.$

Câu 49: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 25) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i$ với i là đơn vị ảo.

A. $x=-1; y=-1$. **B.** $x=-1; y=1$.

C. $x=1; y=-1$. **D.** $x=1; y=1$.

Lời giải

Chọn D

$(2x-3yi)+(3-i)=5x-4i \Leftrightarrow (2x+3)-(3y+1)i=5x-4i \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3=5x\\3y+1=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Câu 50: (ĐTK 2019-Câu 18) Tìm các số thực a và b thỏa mãn $2a+(b+i)i=1+2i$ với i là đơn vị ảo.

A. $a=0, b=2$. **B.** $a=\frac{1}{2}, b=1$.

C. $a=0, b=1$. **D.** $a=1, b=2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2a+(b+i)i=1+2i \Leftrightarrow (2a-1)+bi=1+2i \Leftrightarrow \begin{cases}2a-1=1\\b=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}.$

Dạng ③: Các yếu tố và thuộc tính cơ bản của số phức

Câu 51: (ĐMH 2017-Câu 29) Cho số phức $z=3-2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $\bar{z}$:

A. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$

B. Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2

C. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$

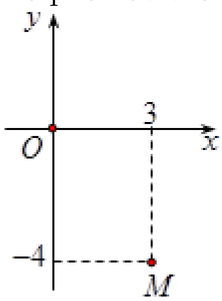
D. Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2

Lời giải

Chọn D

$z=3-2i \Rightarrow \bar{z}=3+2i$. Vậy phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.

Câu 52: (ĐTN 2017-Câu 29) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z.



A. Phần thực là -4 và phần ảo là 3

B. Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$

C. Phần thực là 3 và phần ảo là -4

Ghi Chú!

D. Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$

Lời giải

Chọn C

Nhắc lại: *Trên mặt phẳng phức, số phức* $z = x + yi$ *được biểu diễn bởi điểm* $M(x; y)$

.

Điểm M trong hệ trục Oxy có hoành độ $x = 3$ và tung độ $y = -4$.

Vậy số phức z có phần thực là 3 và phần ảo là -4.

Câu 53: (ĐTK 2017-Câu 4) Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b.

A. $a = 3; b = 2$ **B.** $a = 3; b = 2\sqrt{2}$

C. $a = 3; b = \sqrt{2}$ **D.** $a = 3; b = -2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D

Số phức $3 - 2\sqrt{2}i$ có phần thực là $a = 3$ và phần ảo là $b = -2\sqrt{2}$.

Câu 54: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu3) Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. $z = -2 + 3i$ **B.** $z = 3i$ **C.** $z = -2$ **D.** $z = \sqrt{3} + i$

Lời giải

Chọn B

Số phức z được gọi là số thuần ảo nếu phần thực của nó bằng 0.

Câu 55: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 9) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z.

A. $a = 2$. **B.** $a = 3$. **C.** $a = -3$. **D.** $a = -2$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ có phần thực là a $\Rightarrow z = 2 - 3i$ có phần thực $a = 2$.

Câu 56: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 4) Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

A. $|z| = 3$ **B.** $|z| = 5$ **C.** $|z| = 2$ **D.** $|z| = \sqrt{5}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $|z| = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$.

Câu 57: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 9) Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng

A. 3. **B.** -7. **C.** -3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Câu 58: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 6) Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

A. $3 + 4i$. **B.** $4 - 3i$. **C.** $3 - 4i$. **D.** $4 + 3i$.

Lời giải

Chọn A

Câu 59: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 11) Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng 5, phần ảo bằng 6.

Câu 60: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 9) Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

A. $-1 - 3i$. **B.** $1 - 3i$. **C.** $-1 + 3i$. **D.** $1 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Câu 61: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 13) Số phức liên hợp của số phức $3-4i$ là

A. $-3-4i$. **B.** $-3+4i$. **C.** $3+4i$. **D.** $-4+3i$.

Lời giải

Chọn C

$z=3-4i\Rightarrow \overline{z}=3+4i$.

Câu 62: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 4) Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là

A. $-5+3i$. **B.** $-3+5i$. **C.** $-5-3i$. **D.** $5+3i$.

Lời giải

Chọn D

Số phức liên hợp của số phức $5-3i$ là $5+3i$.

Câu 63: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 7) Số phức liên hợp của số phức $1-2i$ là:

A. $-1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $-2+i$. **D.** $-1+2i$.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa số phức liên hợp của số phức $z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ là số phức $z=a-bi,\ a,b\in\mathbb{R}$.

Câu 64: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 5) Số phức liên hợp của số phức $z=3-2i$ là.

A. $-3+2i$. **B.** $3+2i$. **C.** $-3-2i$. **D.** $-2+3i$.

Lời giải

Chọn B

Số phức liên hợp của số phức $z=a+bi$ là số phức $\overline{z}=a-bi$ từ đó suy ra chọn đáp án **B.**

Câu 65: (ĐTK 2020-L1-Câu 12) Môđun của số phức $1+2i$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 66: (ĐTK 2020-L2-Câu 19) Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là

A. $\overline{z}=-2+i$. **B.** $\overline{z}=-2-i$. **C.** $\overline{z}=2-i$. **D.** $\overline{z}=2+i$.

Lời giải

Chọn C

Số phức liên hợp của số phức $z=2+i$ là $\overline{z}=2-i$.

Câu 67: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 6) Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=-3+5i$ là $\overline{z}=-3-5i$.

Câu 68: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 24) Số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là

A. $\overline{z}=2-5i$. **B.** $\overline{z}=2+5i$. **C.** $\overline{z}=-2+5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có số phức liên hợp của số phức $z=-2+5i$ là $\overline{z}=-2-5i$.

Câu 69: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 13) Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là

A. $\overline{z}=2+5i$. **B.** $\overline{z}=-2+5i$. **C.** $\overline{z}=2-5i$. **D.** $\overline{z}=-2-5i$.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=2-5i$ là $\overline{z}=2+5i$.

Câu 70: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 13) Số phức liên hợp của số phức $z=3-5i$

A. $\overline{z}=-3-5i$. **B.** $\overline{z}=3+5i$. **C.** $\overline{z}=-3+5i$. **D.** $\overline{z}=3-5i$.

Lời giải

Chọn B

Số phức liên hợp của $z=3-5i$ là $\overline{z}=3+5i$.

Câu 71: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 13) Phần thực của số phức $z=-3-4i$ bằng

A. 4. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -4.

Lời giải

Chọn B

Theo định nghĩa số phức ta có phần thực của số phức $z=-3-4i$ bằng -3.

Câu 72: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 18) Phần thực của số phức $z=3-4i$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** -3 **D.** -4

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=3-4i$, suy ra phần thực của số phức z bằng 3.

Câu 73: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 3) Phần thực của số phức $z=-5-4i$ là

A. 5. **B.** 4. **C.** -4. **D.** -5.

Lời giải

Chọn D

Phần thực của số phức $z=-5-4i$ là $a=-5$.

Câu 74: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 15) Phần thực của số phức $z=5-4i$ bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** 5. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

Phần thực số phức $z=5-4i$ bằng 5.

Câu 75: (ĐTK 2021-Câu 18) Số phức liên hợp của số phức $z=3+2i$ là

A. $\overline{z}=3-2i$. **B.** $\overline{z}=2+3i$. **C.** $\overline{z}=-3+2i$. **D.** $\overline{z}=-3-2i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức liên hợp của số phức $z=3+2i$ là $\overline{z}=3-2i$.

Câu 76: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 9) Phần thực của số phức $z=5-2i$ bằng

A. 5. **B.** 2. **C.** -5. **D.** -2.

Lời giải

Chọn A

Phần thực của $z=5-2i$ là 5.

Câu 77: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 25) Phần thực của số phức $z=6-2i$ bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 6. **D.** -6.

Lời giải

Chọn C

Phần thực của số phức $z=6-2i$ bằng 6.

Câu 78: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 25) Phần thực của số phức $z=3-2i$ bằng:

Ghi Chú!

A. 2. **B.** -3. **C.** 3. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Câu 79: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 16) Phần thực của số phức $z=4-2i$ bằng

A. 2. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Số phức $z=4-2i$ có phần thực là 4.

Câu 80: (TN BGD 2022-MD101) Môđun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. 25. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

Câu 81: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Mô đun của số phức $z=3+4i$ bằng

A. $\sqrt{7}$ **B.** 5. **C.** 7. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5.$

Câu 82: (DE TN BGD 2022-MD 103) Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z=(2-i)(1+i)=3+i$. Vậy phần ảo là 1.

Câu 83: (DE TN BGD 2022-MD 103) Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w=1-4i$

A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_1=5-4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_4=1+4i$.

Lời giải

Chọn B

Cả hai số phức $w=1-4i$ và $z_1=5-4i$ đều có phần ảo bằng -4 nên ta chọn

Câu 84: (DE TN BGD 2022-MD 104) Số phức nào dưới đây có phần ảo bằng phần ảo của số phức $w=1-4i$?

A. $z_1=5-4i$. **B.** $z_4=1+4i$. **C.** $z_3=1-5i$. **D.** $z_2=3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Số phức $w=1-4i$ có phần ảo bằng -4.

Trong các số phức đã cho, số phức $z_1=5-4i$ cũng có phần ảo bằng -4.

Câu 85: (DE TN BGD 2022-MD 104) Phần ảo của số phức $z=(2-i)(1+i)$ bằng

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=(2-i)(1+i)=3+i$.

Vậy phần ảo của số phức z bằng 1.

Câu 86: (DE MH BGD 2023 – Câu 16) Phần ảo của số phức $z=2-3i$ là

A. -3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

Lý thuyết.

Câu 87: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 12] Số phức nào dưới đây là số thuần ảo?

A. 2. **B.** $1-i$. **C.** $1+i$ **D.** $-i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z=-i=0-1.i$.

Số phức này có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -1, khác 0 nên nó là số thuần ảo.

Câu 88: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 1] Cho số phức $z=1-2i$.Phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng

A. -2. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

$z=1-2i \Rightarrow \overline{z}=1+2i$.

Dạng ④: Thực hiện các phép toán cơ bản về số phức

Câu 89: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 22) Cho hai số phức $z_1=3-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $-5+i$. **C.** $5-i$. **D.** $-5-i$.

Lời giải

Chọn C

$z_1+z_2=(3-2i)+(2+i)=5-i$.

Câu 90: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 6) Cho hai số phức $z_1=3+2i$ và $z_2=2-i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5-i$. **B.** $5+i$. **C.** $-5-i$. **D.** $-5+i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z_1+z_2=(3+2i)+(2-i)=5+i$.

Câu 91: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 16) Cho hai số phức $z_1=1-2i$ và $z_2=2+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+i$. **B.** $-3-i$. **C.** $3-i$. **D.** $-3+i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1+z_2=1-2i+2+i=3-i$.

Câu 92: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 25) Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=3+i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $4-2i$. **B.** $-4+2i$. **C.** $4+2i$. **D.** $-4-2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1+z_2=1-3i+3+i=4-2i$.

Vậy $z_1+z_2=4-2i$.

Câu 93: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 24) Cho hai số phức $z_1=3+2i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1-z_2 bằng

A. $2-3i$. **B.** $-2+3i$. **C.** $-2-2i$. **D.** $2+3i$.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn D

Ta có $z_1 - z_2 = 3+2i-(1-i) = 2+3i$.

Câu 94: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 10) Cho hai số phức $z_1 = 1+2i$ và $z_2 = 4-i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $3+3i$. **B.** $-3-3i$. **C.** $-3+3i$. **D.** $3-3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1 - z_2 = 1+2i-(4-i) = -3+3i$.

Câu 95: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 14) Cho hai số phức $z_1 = 1-3i$ và $z_2 = 3+i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $-2-4i$. **B.** $2-4i$. **C.** $-2+4i$. **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn A

$z_1 - z_2 = 1-3i-(3+i) = -2-4i$.

Câu 96: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 23) Cho hai số phức $z_1 = 3-2i$ và $z_2 = 2+i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $-1+3i$. **B.** $-1-3i$. **C.** $1+3i$. **D.** $1-3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$z_1 - z_2 = 3-2i-(2+i) = 1-3i$.

Câu 97: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 25) Cho hai số phức $z = 4+2i$ và $w = 3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $1+6i$. **B.** $7-2i$. **C.** $7+2i$. **D.** $-1-6i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z+w = 4+2i+3-4i = 7-2i$.

Câu 98: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 19) Cho hai số phức $z = 5+2i$ và $w = 1-4i$. Số phức $z+w$ bằng:

A. $6+2i$. **B.** $4+6i$. **C.** $6-2i$. **D.** $-4-6i$.

Lời giải

Chọn C

$z+w = 5+2i+1-4i = (5+1)+(2-4)i = 6-2i$.

Câu 99: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 21) Cho hai số phức $z = 1+2i$ và $w = 3-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $2-6i$. **B.** $4+2i$. **C.** $4-2i$. **D.** $-2+6i$.

Lời giải

Chọn C

$z+w = 1+2i+3-4i = 4-2i$.

Câu 100: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 1) Cho hai số phức $z = 3+2i$ và $w = 1-4i$. Số phức $z+w$ bằng

A. $4+2i$. **B.** $4-2i$. **C.** $-2-6i$. **D.** $2+6i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z+w = 3+2i+1-4i = 4-2i$.

Câu 101: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Cho 2 số phức $z_1 = 2+3i$ và $z_2 = 1-i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

Ghi Chú!

A. $3+4i.$ **B.** $1+4i.$ **C.** $z=5+i.$ **D.** $3+2i.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_1+z_2=2+3i+1-i=3+2i.$

Câu 102: (DE MH BGD 2023 – Câu 12) Cho số phức $z=2+9i$, phần thực của số phức z^2 bằng

A. -77 **B.** 4 **C.** 36 **D.** 85

Lời giải

Chọn A

$z=2+9i\Rightarrow z^2=(2+9i)^2=-77+36i$.

Vậy phần thực của số phức z^2 bằng -77.

Câu 103: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 11] Cho số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=i$. Số phức $z_1.z_2$ bằng

A. $3-2i$. **B.** $2-3i$. **C.** $-3+2i$ **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn C

$z_1.z_2=(2+3i).i=2i+3i^2=2i+3(-1)=-3+2i$.

Câu 104: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 4] Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** -4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_1-z_2=2-i-1-3i=1-4i$

Câu 105: (ĐMH 2017-Câu 32) Cho số phức $z=2+5i.$ Tìm số phức $w=iz+\overline{z}$

A. $w=7-3i$. **B.** $w=-3-3i$. **C.** $w=3+7i.$. **D.** $w=-7-7i$

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=iz+\overline{z}=i(2+5i)+(2-5i)=2i-5+2-5i=-3-3i$.

Câu 106: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 7) Cho 2 số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=7-4i$ **B.** $z=2+5i$ **C.** $z=-2+5i$ **D.** $z=3-10i$

Lời giải

Chọn A

$z=5-7i+2+3i=7-4i$.

Câu 107: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 8) Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=11$ **B.** $z=3+6i$ **C.** $z=-1-10i$ **D.** $z=-3-6i$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z=z_1-z_2=(4-3i)-(7+3i)=-3-6i$.

Câu 108: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 28) Cho số phức $z=1-2i$, số phức $(2+3i)\overline{z}$ bằng

A. $4-7i$. **B.** $-4+7i$. **C.** $8+i$. **D.** $-8+i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=1-2i\Rightarrow\overline{z}=1+2i\Rightarrow(2+3i)\overline{z}=(2+3i)(1+2i)=2+3i+4i+6i^2=-4+7i$.

Ghi Chú!

Vậy $(2+3i)\overline{z}=-4+7i$.

Câu 109: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 33) Cho số phức $z=2-i$, số phức $(2-3i)\overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(2-3i)\overline{z}=(2-3i)(2+i)=7-4i$.

Câu 110: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 27) Cho số phức $z=-3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng.

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$ **C.** $1-5i$ **D.** $-5+i$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(1-i)\overline{z}=(1-i)(-3-2i)=-5+i$

Câu 111: (ĐTK 2021-Câu 19) Cho hai số phức $z=3+i$ và $w=2+3i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $1+4i$. **B.** $1-2i$. **C.** $5+4i$. **D.** $5-2i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z-w=3+i-(2+3i)=1-2i$.

Dạng ⑤: Xác định các yếu tố của số phức (phần thực, ảo, mô đun, liên hợp,...) qua các phép toán

Câu 112: (ĐTK 2020-L2-Câu 20) Cho hai số phức $z_1=2+i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1+z_2=(2+i)+(1+3i)=3+4i$. Phần thực của z_1+z_2 là 3.

Câu 113: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 15] Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$z_1-z_2=2-i-(1+3i)=1-4i$.

Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng 1.

Câu 114: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 21] Cho số phức $z=1-2i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{z}=1+2i$ nên phần ảo của số phức $\overline{z}$ là 2.

Câu 115: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 15] Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng

Ghi Chú!

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$z_1 - z_2 = 2 - i - (1+3i) = 1 - 4i$.

Phần thực của số phức $z_1 - z_2$ bằng 1.

Câu 116: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 21] Cho số phức $z = 1 - 2i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{z} = 1 + 2i$ nên phần ảo của số phức $\overline{z}$ là 2.

Câu 117: (ĐMH 2017-Câu 30) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. **B.** $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.

C. $|z_1 + z_2| = 1$. **D.** $|z_1 + z_2| = 5$.

Lời giải

Chọn A

$z_1 + z_2 = 1 + i + (2 - 3i) = 3 - 2i$ nên ta có: $|z_1 + z_2| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Câu 118: (ĐTN 2017-Câu 30) Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i+1)$.

A. $\overline{z} = 3 - i$. **B.** $\overline{z} = -3 + i$. **C.** $\overline{z} = 3 + i$. **D.** $\overline{z} = -3 - i$.

Lời giải

Chọn D

$z = i(3i+1) = -3 + i$ nên suy ra $\overline{z} = -3 - i$.

Câu 119: (ĐTN 2017-Câu 31) Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i) + 13i = 1$.

A. $|z| = \sqrt{34}$ **B.** $|z| = 34$ **C.** $|z| = \dfrac{5\sqrt{34}}{3}$ **D.** $|z| = \dfrac{\sqrt{34}}{3}$

Lời giải

Chọn A

$z(2-i) + 13i = 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{1-13i}{2-i} \Leftrightarrow z = \dfrac{(1-13i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \Leftrightarrow z = 3 - 5i$.

$|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$.

Câu 120: (ĐTN 2017-Câu 33) Cho số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z + 2\overline{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$.

A. $P = \dfrac{1}{2}$ **B.** $P = 1$ **C.** $P = -1$ **D.** $P = -\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

$(1+i)z + 2\overline{z} = 3 + 2i.(1)$. Ta có: $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$.

Thay vào (1) ta được $(1+i)(a+bi) + 2(a-bi) = 3 + 2i$

$\Leftrightarrow (a-b)i + (3a-b) = 3 + 2i \Leftrightarrow (a-b)i + (3a-b) = 3 + 2i$

Ghi Chú!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 3a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P=-1.$$

Câu 121: (ĐTK 2017-Câu 5) Tính môđun của số phức z biết $\overline{z}=(4-3i)(1+i)$.

A. $|z|=25\sqrt{2}$ **B.** $|z|=7\sqrt{2}$ **C.** $|z|=5\sqrt{2}$ **D.** $|z|=\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

$\overline{z}=(4-3i)(1+i)=7+i \Rightarrow z=7-i \Rightarrow |z|=5\sqrt{2}$

Câu 122: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 27) Cho số phức $z=1-i+i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a=0, b=1$ **B.** $a=-2, b=1$ **C.** $a=1, b=0$ **D.** $a=1, b=-2$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z=1-i+i^3=1-i+i^2.i=1-i-i=1-2i$ (vì $i^2=-1$)

Suy ra phần thực của z là $a=1$, phần ảo của z là $b=-2$.

Câu 123: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 7) Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=-2-5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z=z_1-z_2$.

A. $b=-2$. **B.** $b=2$. **C.** $b=3$. **D.** $b=-3$.

Lời giải

Chọn B

$z=z_1-z_2=(1-3i)-(-2-5i)=3+2i$. Vậy phần ảo của z là: 2.

Câu 124: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 34) Cho số phức z thỏa mãn $3(\overline{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Mô đun của z bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \overline{z}=x-yi$.

Ta có $3(\overline{z}+i)-(2-i)z=3+10i \Leftrightarrow 3(x-yi)-(2-i)(x+yi)=3+7i$

$\Leftrightarrow x-y+(x-5y)i=3+7i \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x-5y=7 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$. Suy ra $z=2-i$.

Vậy $|z|=\sqrt{5}$.

Câu 125: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 31) Cho số phức z thoả mãn $3\ \overline{z}-i\ -\ 2+3i\ z=7-16i.$ Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi\quad a;b\in\mathbb{R}$.

Theo đề ta có.

$3\ a-bi-i\ -\ 2+3i\ \ a+bi\ =7-16i \Leftrightarrow 3a-3bi-3i-2a-2bi-3ai+3b=7-16i$

.

Ghi Chú!

$\Leftrightarrow (a+3b)+(-3a-5b-3)=7-16i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b-3=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 126: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 32) Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=a+bi$; $(a,b\in\mathbb{R})$.

Có $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$

$\Leftrightarrow (2+i)(a+bi)-4(a-bi-i)=-8+19i \Leftrightarrow -2a-b+(a+6b+4)i=-8+19i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b=-8 \\ a+6b+4=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy $z=3+2i$ suy ra $|z|=\sqrt{13}$.

Câu 127: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 31) Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$. Ta có:

$(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$

$\Leftrightarrow (2-i)(x+yi)+3+16i=2(x-yi+i) \Leftrightarrow 2x+2yi-xi+y+3+16i=2x-2yi+2i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+3=2x \\ 2y-x+16=-2y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3=0 \\ -x+4y=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$

Suy ra $z=2-3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

Câu 128: (ĐTK 2020-L1-Câu 30) Cho hai số phức $z_1=-3+i$ và $z_2=1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overline{z_2}=1+i$. Do đó $z_1+\overline{z_2}=(-3+i)+(1+i)=-2+2i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng 2.

Câu 129: (ĐTK 2020-L1-Câu 31) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$. **B.** $Q(5;4)$. **C.** $N(4;-3)$. **D.** $M(4;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=(1+2i)^2=1^2+2.1.2i+(2i)^2=-3+4i$.

Vậy trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm $P(-3;4)$.

Ghi Chú!

Câu 130: (ĐTK 2020-L2-Câu 35) Cho hai số phức $z_1 = 3-i$ và $z_2 = -1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Lời giải

Chọn A

$z_1z_2 = (3-i)(-1+i) = -3+3i+i-i^2 = -2+4i$ nên phần ảo của số phức z_1z_2 bằng 4.

Câu 131: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 37) Cho hai số phức $z = 1+2i$ và $w = 3+i$. Môđun của số phức $z\overline{w}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A

$\overline{w} = 3-i$ suy ra $z\overline{w} = (1+2i)(3-i) = 3-i+6i-2i^2 = 5+5i$.

$|z\overline{w}| = \sqrt{5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$.

Câu 132: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 31) Cho hai số phức $z = 2+2i$ và $w = 2+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. 40. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z.\overline{w} = (2+2i)(2-i) = 6+2i.$

Vậy $|z.\overline{w}| = |6+2i| = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}.$

Câu 133: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 37) Cho hai số phức $z = 4+2i$ và $w = 1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** 40.

Lời giải

Chọn C

Ta có $w = 1+i \Rightarrow \overline{w} = 1-i$

Nên $z.\overline{w} = 6-2i \Rightarrow |z.\overline{w}| = \sqrt{6^2+2^2} = 2\sqrt{10}$.

Câu 134: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 36) Cho hai số phức $z = 1+3i$ và $w = 1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w = 1+i \Rightarrow \overline{w} = 1-i$.

$z.\overline{w} = (1+3i)(1-i) = 4+2i$.

$|z.\overline{w}| = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$.

Câu 135: (ĐTK 2021-Câu 34) Cho số phức $z = 3+4i.$ Môđun của số phức $(1+i)z$ bằng

A. $50.$ **B.** $10.$ **C.** $\sqrt{10}.$ **D.** $5\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$(1+i)z = (1+i)(3+4i) = -1+7i$

$\Rightarrow |(1+i)z| = |-1+7i| = \sqrt{(-1)^2+7^2} = 5\sqrt{2}.$

Ghi Chú!

Câu 136: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 35) Cho số phức z thỏa mãn $iz=5+4i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z}=4+5i$. **B.** $\bar{z}=4-5i$. **C.** $\bar{z}=-4+5i$. **D.** $\bar{z}=-4-5i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $iz=5+4i \Rightarrow z=\dfrac{5+4i}{i} \Rightarrow z=4-5i \Rightarrow \bar{z}=4+5i$.

Câu 137: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 32) Số phức z thỏa mãn $iz=6+5i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z}=5-6i$. **B.** $\bar{z}=-5+6i$. **C.** $\bar{z}=5+6i$. **D.** $\bar{z}=-5-6i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $iz=6+5i \Leftrightarrow z=\dfrac{6+5i}{i}=5-6i$. Vậy $\bar{z}=5+6i$.

Câu 138: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 31) Cho số phức z thỏa mãn $iz=3+2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z}=2+3i$. **B.** $\bar{z}=-2-3i$. **C.** $\bar{z}=-2+3i$. **D.** $\bar{z}=2-3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $iz=3+2i \Leftrightarrow z=2-3i$. Nên $\bar{z}=2+3i$.

Câu 139: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 34) Cho số phức z thỏa mãn $iz=4+3i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\bar{z}=3+4i$. **B.** $\bar{z}=-3-4i$. **C.** $\bar{z}=3-4i$. **D.** $\bar{z}=-3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $iz=4+3i \Leftrightarrow z=\dfrac{4+3i}{i} \Leftrightarrow z=3-4i$. Khi đó: $\bar{z}=3+4i$.

Câu 140: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 37] Số phức z thoả mãn $z-2\bar{z}=1+6i$. Mô đun của z bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=x+yi \Rightarrow \bar{z}=x-yi,\left(x,y\in R\right)$ thay vào $z-2\bar{z}=1+6i$ ta có:

$$z-2\bar{z}=1+6i \Leftrightarrow x+yi-2(x-yi)=1+6i \Leftrightarrow \begin{cases}x-2x=1\\ y+2y=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}.$$

Vậy số phức $z=-1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 141: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 38) Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$. **B.** $|z|=\sqrt{17}$. **C.** $|z|=\sqrt{10}$. **D.** $|z|=10$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+3|=5 \Leftrightarrow |a+bi+3|=5 \Leftrightarrow (a+3)^2+b^2=25\,(1)$.

Ta lại có:

Ghi Chú!

$|z-2i|=|z-2-2i| \Leftrightarrow |a+bi-2i|=|a+bi-2-2i|$

$\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-2)^2$

$\Leftrightarrow a^2=(a-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=a \\ a-2=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow a=1$

Thế vào (1) $\Rightarrow 16+b^2=25 \Leftrightarrow b^2=9$.

Vậy $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+9}=\sqrt{10}$.

Câu 142: (ĐTN 2017-Câu 34) Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^{-1}=\dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Vậy $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$

$\Leftrightarrow (|z|+2)+(2|z|-1)i=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\bar{z} \Rightarrow |(|z|+2)+(2|z|-1)i|=\left|\left(\dfrac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\bar{z}\right|$

$\Rightarrow (|z|+2)^2+(2|z|-1)^2=\left(\dfrac{10}{|z|^4}\right).|z|^2=\dfrac{10}{|z|^2}$. Đặt $|z|=a>0$.

$\Rightarrow (a+2)^2+(2a-1)^2=\left(\dfrac{10}{a^2}\right) \Leftrightarrow a^4+a^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=-2 \end{array}\right. \Rightarrow a=1 \Rightarrow |z|=1$.

Dạng ⑥: Tìm số phức thỏa mãn đk cho trước

Câu 143: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 36) Cho số phức $z=a+bi, (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$.

A. $S=\dfrac{7}{3}$ **B.** $S=-5$ **C.** $S=5$ **D.** $S=-\dfrac{7}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$z+1+3i-|z|i=0 \Leftrightarrow a+bi+1+3i-\sqrt{a^2+b^2}i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow S=a+3b=-5$.

Câu 144: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 39) Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-4$

Lời giải

Chọn D

Ghi Chú!

Ta có $z+2+i=|z| \Leftrightarrow (a+2)+(b+1)i=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2=\sqrt{a^2+b^2}, a\ge -2 \\ b+1=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ (a+2)^2=a^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow S=4a+b=-4$.

Câu 145: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 10) Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.

A. $z=1-5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=5-5i$. **D.** $z=1-i$.

Lời giải

Chọn B

$z+2-3i=3-2i \Leftrightarrow z=3-2i-2+3i=1+i$.

Câu 146: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 36) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $w=z-4+3i$.

A. $w=-3+8i$. **B.** $w=1+3i$. **C.** $w=-1+7i$. **D.** $w=-4+8i$.

Lời giải

Chọn D

$z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$x^2+y^2=25$ và $(x+3)^2+y^2=(x+3)^2+(y-10)^2$.

Giải hệ phương trình trên ta được $x=0; y=5$. Vậy $z=5i$. Từ đó ta có $w=-4+8i$.

Câu 147: (ĐTK 2017-Câu 39) Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Vì $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2=25 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b=4 \\ a=b=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-a=4 \\ b=-a=-3 \end{cases} \end{array}\right..$$

Câu 148: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 46) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$. Điều kiện $z\ne 4$

$|z-3i|=5 \Leftrightarrow |x+(y-3)i|=5 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2-6y=16\,(1)$

Do $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{x+yi}{(x-4)+yi}$ là số thuần ảo nên phần thực

$\dfrac{x(x-4)+y^2}{(x-4)^2+y^2}=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x=0\,(2)$

Ghi Chú!

Từ (1) và (2) suy ra $4x-6y=16 \Rightarrow x=4+\dfrac{3}{2}y$, thay vào (1) ta được:

$\left(4+\dfrac{3}{2}y\right)^2+y^2-6y-16=0 \Leftrightarrow y=0$ hoặc $y=-\dfrac{24}{13}$

Với $y=0$ ta được $x=4$, suy ra $z=4$ (loại)

Với $y=-\dfrac{24}{13}$ ta được $x=\dfrac{16}{13}$ và $z=\dfrac{16}{13}-\dfrac{24}{13}i$ (thỏa mãn)

Vậy có một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z=\dfrac{16}{13}-\dfrac{24}{13}i$.

Câu 149: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 44) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức $z=x+yi$ với $(x,y\in\mathbb{R})$, vì $(z-1)^2=(x-1)^2-y^2+2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có HPT $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=8\\(x-1)^2=y^2\end{cases}$

Với $y=x-1$, thay vào phương trình đầu, ta được

$$(x+2)^2+(x-2)^2=8 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Với $x=3\sqrt{2}$, thay vào phương trình đầu, ra được

$$(x+2)^2+(-x)^2=8 \Leftrightarrow 2x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 150: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 48) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi, |z+3i|=\sqrt{13} \Leftrightarrow x^2+y^2+6y=4.$ (1)

$\dfrac{z}{z+2}=\dfrac{x+yi}{(x+2)+yi}=\dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}+\dfrac{2yi}{(x+2)^2+y^2}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$\dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0$ (2)

Lấy $(1)-(2): 3y-x=2 \Leftrightarrow x=3y-2$ thay vào (1):

$(3y-2)^2+y^2+6y=4 \Leftrightarrow 5y^2-3y=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=0\\y=\dfrac{3}{5}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$.

Thử lại thấy $z=-2$ không thỏa điều kiện.

Vậy có 1 số phức $z=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

Câu 151: (ĐTK 2018-Câu 38) Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0 \Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$

$\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0 \ (1) \\ b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0 \ (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a-b+1=0 \Leftrightarrow b=a+1$. Thế vào (1) ta được:

$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow a+2=\sqrt{2a^2+2a+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2+4a+4=2a^2+2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} a=3 \quad (tm) \\ a=-1 \ (tm) \end{array}\right. \end{cases}$

Với $a=3 \Rightarrow b=4$; $a=-1 \Rightarrow b=0$. Vì

$|z|>1 \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow P=a+b=3+4=7$.

Câu 152: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 38) Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z \Leftrightarrow z(|z|-5+i)=4|z|+(|z|-2)i$.

Lấy môđun 2 vế phương trình trên ta được

$$|z|\sqrt{(|z|-5)^2+1}=\sqrt{(4|z|)^2+(|z|-2)^2}.$$

Đặt $t=|z|$, $t\ge 0$ ta được

$$t\sqrt{(t-5)^2+1}=\sqrt{(4t)^2+(t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4)=0.$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t\ge 0$ vậy có 3 số phức z thoả mãn.

Câu 153: (ĐTK 2019-Câu 42) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=2|z+\bar{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

$|z|^2=2|z+\bar{z}|+4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4|x|+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-4=0, x\ge 0 \ (1) \\ x^2+y^2+4x-4=0, x<0 \ (2) \end{array}\right.$.

$|z-1-i|=|z-3+3i| \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow 4x=8y+16$

$\Leftrightarrow x=2y+4 \ (3)$.

+ Thay (3) vào (1) ta được:

$(2y+4)^2+y^2-4(2y+4)-4=0 \Leftrightarrow 5y^2+8y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{5} \Rightarrow x=\dfrac{24}{5} (n) \\ y=-2 \Rightarrow x=0 (n) \end{array}\right.$.

+ Thay (3) vào (2) ta được:

$(2y+4)^2+y^2+4(2y+4)-4=0 \Leftrightarrow 5y^2+24y+28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \Rightarrow x=0\,(l) \\ y=-\dfrac{14}{5} \Rightarrow x=-\dfrac{8}{5}\,(n) \end{array}\right.$.

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Câu 154: (ĐTK 2021-Câu 42) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$

• $|z|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2=2 \Leftrightarrow a^2+b^2=2\ (1)$

• $(z+2i)(\bar{z}-2)=z.\bar{z}-2z+2i.\bar{z}-4i=|z|^2-2z+2i.\bar{z}-4i$

$=2-2(a+bi)+2i(a-bi)-4i=2-2a-2bi+2ai+2b-4i$

$=(2-2a+2b)+(2a-2b-4)i$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow 2-2a+2b=0 \Leftrightarrow 1-a+b=0\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ 1-a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ (b+1)^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 2b^2+2b-1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 số phức thỏa mãn bài toán.

Câu 155: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=|z-\bar{z}|$ và $|(z-2)(\bar{z}-2i)|=|z+2i|^2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$|(z-2)(\bar{z}-2i)|=|z+2i|^2 \Leftrightarrow |z-2||\bar{z}-2i|=|z+2i||\bar{z}-2i|$

$\Leftrightarrow |\bar{z}-2i|\cdot(|z-2|-|z+2i|)$

Trường hợp 1.

$|\bar{z}-2i|=0 \Leftrightarrow \bar{z}=2i \Leftrightarrow z=-2i$

Trường hợp 2.

$|z-2|-|z+2i|=0 \Leftrightarrow |z-2|=|z+2i|=0$

Đặt $z=x+y\cdot i$ ta có $z-2=x-2+y\cdot i$ và $z+2i=x+(y+2)\cdot i$.

Khi đó

$|z-2|=|z+2i| \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2=x^2+(y+2)^2$

$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2+4y+4$

$\Leftrightarrow -4x = 4y \Leftrightarrow x = -y$

Lại có

$\left|z^2\right| = \left|z - \overline{z}\right| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2|y| \Leftrightarrow 2y^2 = 2|y| \Leftrightarrow 2|y| \cdot \left(|y| - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = \pm 1$.

Do đó ta có các số $z \in \{0; 1-i; -1+i; -2i\}$ thỏa mãn.

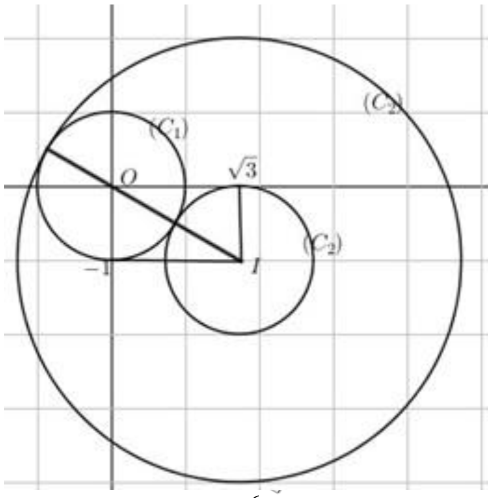
Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 156: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 50) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$ và $\left|z - \sqrt{3} + i\right| = m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$, ta có hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \ (1) \\ \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + \left(y + 1\right)^2 = m^2 \ (m \geq 0) \end{cases}$

Ta thấy $m = 0 \Rightarrow z = \sqrt{3} - i$ không thỏa mãn $z.\overline{z} = 1$ suy ra $m > 0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0), R_1 = 1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I\left(\sqrt{3}; -1\right), R_2 = m$, ta thấy $OI = 2 > R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1).

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều này xảy ra khi

$OI = R_1 + R_2 \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $R_2 = R_1 + OI \Leftrightarrow m = 1 + 2 = 3$.

Câu 157: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 49) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|\left(z - 3 - i\right) + 2i = \left(4 - i\right)z$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|\left(z - 3 - i\right) + 2i = \left(4 - i\right)z \Leftrightarrow z\left(5 - |z| - i\right) = -4|z| + \left(2 - |z|\right)i$.

Đặt $|z| = t \geq 0, t \in \mathbb{R}$. Lấy môđun hai vế ta được:

$t\left|5 - t - i\right| = \left|-4t + \left(2 - t\right)i\right| \Leftrightarrow t\sqrt{\left(5 - t\right)^2 + 1} = \sqrt{16t^2 + \left(2 - t\right)^2}$

Ghi Chú!

$$\Leftrightarrow t^4-10t^3+9t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t\approx 8,95 \\ t\approx 0,69 \\ t\approx -0,64 \end{array}\right..$$

Do $t\geq 0$ nên t có 3 giá trị thỏa mãn.

Ứng với mỗi $t\geq 0$ ta được $z=\dfrac{-4t+(2-t)i}{5-t-i}$ nên có duy nhất 1 số phức thỏa mãn.

Vậy có ba số phức thỏa mãn.

Câu 158: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 36) Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $|z|=a\geq 0, a\in\mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow a(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+ai-2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+(a-2)i \Leftrightarrow |(a-7+i)||z|=|6a+(a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2=36a^2+(a-2)^2 \Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3-13a^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^3-12a^2+4=0 \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(a)=a^3-13a^2\ (a\geq 0)$, có bảng biến thiên là

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-12a^2+4=0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1)\neq 0$). Thay giá trị môđun của z vào kiểm tra đều được kết quả đúng.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Câu 159: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 47) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow (|z|-6+i)z=5|z|+(|z|-2)i \quad (1)$

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$\sqrt{(|z|-6)^2+1}.|z|=\sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$

Bình phương và rút gọn ta được:

$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow (|z|-1)(|z|^3-11|z|^2+4)=0$

Ghi Chú!

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=1 \\ |z|^3-11|z|^2+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z|=1 \\ |z|=10,9667... \\ |z|=0,62... \\ |z|=-0,587... \end{array}\right.$$

Do $|z|\ge 0$, nên ta có $|z|=1$, $|z|=10,9667...$, $|z|=0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 160: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=|z-\overline{z}|$ và $|(z+2)(\overline{z}+2i)|=|z-2i|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$ với $a;b\in\mathbb{R}$

Ta có: $|z^2|=|z-\overline{z}|\Leftrightarrow a^2+b^2=2|b|(*)$

Mặt khác $|(z+2)||(\overline{z}+2i)|=|z-2i|^2\,(**)$

Vì $\overline{z+2i}=z-2i$ nên $|\overline{z}+2i|=|z-2i|$.

Nên từ $(**)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z-2i|=0\Rightarrow z=2i \\ |z+2|=|z-2i| \end{array}\right.$.

Với $|z-2i|=0\Rightarrow z=2i$ (thoả mãn $(*)$)

Với $|z+2|=|z-2i|\Rightarrow (a+2)^2+b^2=a^2+(b-2)^2\Leftrightarrow a=-b$ thay vào $(*)$ ta được:

$$b^2+b^2=2|b|\Leftrightarrow b^2=|b|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \\ b=-1 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-1 \\ a=1 \end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=-1+i \\ z=1-i \end{array}\right..$$

Vậy có tất cả 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 161: (DE TN BGD 2022-MD 104) Có bao nhiêu số phức z thỏa $|z^2|=2|z-\overline{z}|$ và $|(z+4)(\overline{z}+4i)|=|z-4i|^2$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1 **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có: $|z^2|=2|z-\overline{z}|\Leftrightarrow a^2+b^2=4|b|$ (1).

$|(z+4)(\overline{z}+4i)|=|z-4i|^2\Leftrightarrow |z+4|.|\overline{z}+4i|=|z-4i|^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a+4)^2+b^2}.\sqrt{a^2+(b-4)^2}=a^2+(b-4)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+(b-4)^2}.\left(\sqrt{(a+4)^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-4)^2}\right)=0$.

+ TH-1: $\sqrt{a^2+(b-4)^2}=0\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=4 \end{cases}$ thỏa (1).

Vậy $z=4i$.

+ TH-2: $\sqrt{(a+4)^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-4)^2}=0\Leftrightarrow a=-b$.

Thay vào ta được (1):

Ghi Chú!

$2b^2-4|b|=0 \Leftrightarrow |b|=0 \vee |b|=2$.

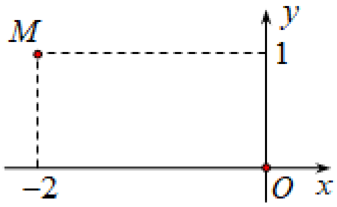
Với $|b|=0 \Leftrightarrow b=0 \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow z=0$.

Với $|b|=2 \Leftrightarrow b=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} b=-2 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow z=-2+2i \vee z=2-2i$.

Kết luận: có 4 số phức z.

Dạng ⑦: Câu hỏi lý thuyết, biểu diễn liên quan đến 1 số phức

Câu 162: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 4) Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên.



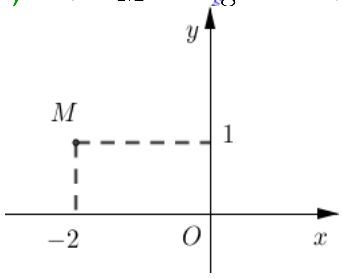
A. $z_4=2+i$ **B.** $z_2=1+2i$ **C.** $z_3=-2+i$ **D.** $z_1=1-2i$

Lời giải

Chọn C

Điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z_1=-2+i$

Câu 163: (ĐTK 2018-Câu 1) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức



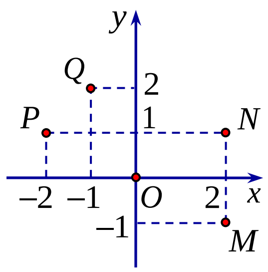
A. $z=-2+i$ **B.** $z=1-2i$ **C.** $z=2+i$ **D.** $z=1+2i$

Lời giải

Chọn A

Theo hình vẽ $M(-2;1) \Rightarrow z=-2+i$.

Câu 164: (ĐTK 2019-Câu 14) Điểm nào trong hình vẽ bên dưới là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?



A. N. **B.** P. **C.** M. **D.** Q.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=-1+2i$ có điểm biểu diễn là điểm $Q(-1;2)$.

Câu 165: (ĐTK 2020-L2-Câu 21) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$ là điểm nào dưới đây?

Ghi Chú!

A. $Q(1;2)$. **B.** $P(-1;2)$. **C.** $N(1;-2)$. **D.** $M(-1;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 166: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 24) Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3;1)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$z=-3+i$ nên phần thực của z là -3.

Câu 167: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 4) Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn của số phức z. Phần thực của z bằng

A. 3. **B.** -1. **C.** -3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M(-1;3)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+3i$.

Vậy phần thực của số phức z là -1.

Câu 168: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 20) Trên mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-1;2)$ là điểm biểu diễn số phức z. Phần thực của z bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** -1.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M(-1;2)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=-1+2i$ nên phần thực là $a=-1$.

Câu 169: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 4) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z=-3+4i$?

A. $N(3;4)$. **B.** $M(4;3)$. **C.** $P(-3;4)$. **D.** $Q(4;-3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có số phức $z=-3+4i \Rightarrow$ Điểm $P(-3;4)$ là biểu diễn số phức z trên mặt phẳng tọa độ.

Câu 170: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 9) Trong mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây biểu diễn số phức $z=1-2i$?

A. $Q(1;2)$. **B.** $M(2;1)$. **C.** $P(-2;1)$. **D.** $N(1;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Số phức $z=1-2i$ có điểm biểu diễn là $N(1;-2)$.

Câu 171: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 18) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z=3-2i$?

A. $P(-3;2)$. **B.** $Q(2;-3)$. **C.** $N(3;-2)$. **D.** $M(-2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z=3-2i$ có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2, nên điểm biểu diễn số phức z là $N(3;-2)$.

Câu 172: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 7) Trên mặt phẳng toạ độ, điểm nào là điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$?

A. $N(-1;2)$. **B.** $P(2;-1)$. **C.** $Q(-2;1)$. **D.** $M(1;-2)$.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Điểm biểu diễn số phức $z=-1+2i$ là $N(-1;2)$.

Câu 173: (ĐTK 2021-Câu 20) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $3-2i$ có tọa độ là

A. $(2;3)$. **B.** $(-2;3)$. **C.** $(3;2)$. **D.** $(3;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm biểu diễn của số phức $3-2i$ có tọa độ là $(3;-2)$.

Câu 174: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 28) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_2=3+4i$. **B.** $z_3=-3+4i$. **C.** $z_4=-3-4i$. **D.** $z_1=3-4i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $M(-3;4)$ là điểm biểu diễn của số phức $-3+4i$.

Câu 175: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 12) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $z_3=3-2i$. **B.** $z_4=3+2i$. **C.** $z_1=-3-2i$. **D.** $z_2=-3+2i$.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M(-3;2)$ là điểm biểu diễn của số phức $z_2=-3+2i$.

Câu 176: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 13) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2;3)$ là điểm biểu diễn số phức nào dưới đây?

A. $z_3=2+3i$. **B.** $z_4=-2-3i$. **C.** $z_1=-2+3i$. **D.** $z_2=2-3i$.

Lời giải

Chọn C

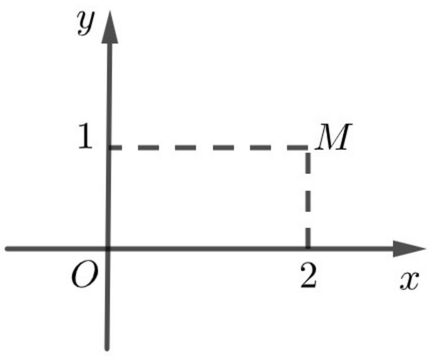
Câu 177: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 21) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-4;3)$ là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

A. $z_3=-4-3i$. **B.** $z_4=4+3i$. **C.** $z_2=4-3i$. **D.** $z_1=-4+3i$.

Lời giải

Chọn D

Câu 178: [MD 101-TN BGD 2023 – CÂU 11] Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?



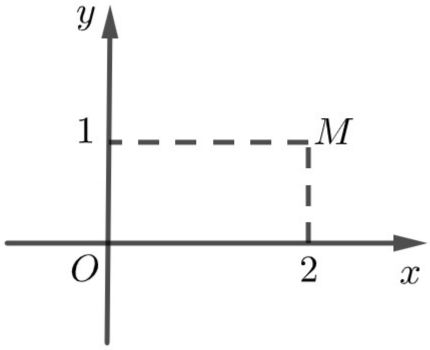
A. $2-i$. **B.** $1+2i$. **C.** $1-2i$. **D.** $2+i$.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M(2;1)$ biểu diễn số $2+i$.

Câu 179: [MD 101-TN BGD 2023 – CÂU 11] Điểm M trong hình bên là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?



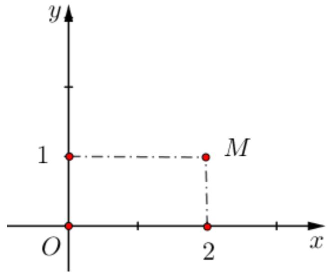
A. $2-i$. **B.** $1+2i$. **C.** $1-2i$. **D.** $2+i$.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M(2;1)$ biểu diễn số $2+i$.

Câu 180: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 8] Điểm M trong hình bên biểu diễn số phức nào dưới đây?



A. $1-2i$. **B.** $1+2i$. **C.** $2-i$. **D.** $2+i$.

Lời giải

Chọn D

Điểm $M\ 2;1$ nên biểu diễn số phức $2+i$.

Dạng ⑧: Biểu diễn số phức qua các phép toán

Câu 181: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 21) Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng:

A. -2 . **B.** 2 . **C.** 1 . **D.** -1 .

Lời giải

Chọn A

$M(-2;1)$ là điểm biểu diễn số phức $z=-2+i$. Vậy phần thực của z bằng -2 .

Câu 182: (TN BGD 2022-MD101) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2-7i$ có tọa độ là

A. $(2;7)$. **B.** $(-2;7)$. **C.** $(2;-7)$. **D.** $(-7;2)$.

Lời giải

Chọn C

Điểm biểu diễn số phức $z=2-7i$ trên mặt phẳng tọa độ có tọa độ là $(2;-7)$.

Câu 183: (TN BGD 2022-MD101) Cho hai số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $5+i$. **B.** $3+2i$. **C.** $1+4i$. **D.** $3+4i$.

Lời giải

Chọn B

Vì $z_1=2+3i$ và $z_2=1-i$ nên $z_1+z_2=(2+3i)+(1-i)=3+2i$.

Ghi Chú!

Câu 184: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2-7i$ có tọa độ là

A. $(2;7)$. **B.** $(2;-7)$. **C.** $(-2;7)$. **D.** $(-7;2)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm biểu diễn số phức $z=2-7i$ có tọa độ là $(2;-7)$

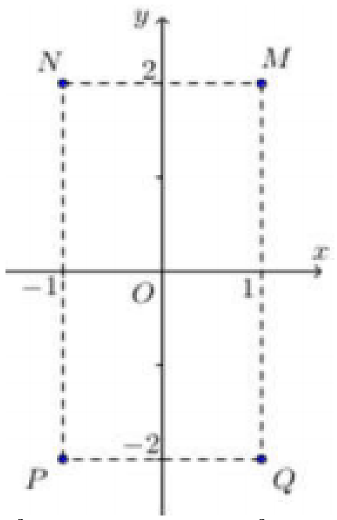
Câu 185: (DE TN BGD 2022-MD 103) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=2+7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(2;7)$. **C.** $(7;2)$. **D.** $(-2;-7)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 186: (ĐMH 2017-Câu 31) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z=3-i$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M,N,P,Q ở hình bên?



A. Điểm P. **B.** Điểm Q. **C.** Điểm M. **D.** Điểm N.

Lời giải

Chọn B

$(1+i)z=3-i \Leftrightarrow z=\dfrac{3-i}{1+i}=\dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-4i}{2}=1-2i$. Vậy điểm biểu diễn của z là $Q(1;-2)$.

Câu 187: (ĐTN 2017-Câu 32) Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2-16z+17=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $w=iz_0$?

A. $M_1\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. **B.** $M_2\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$. **C.** $M_3\left(-\dfrac{1}{4};1\right)$. **D.** $M_4\left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $4z^2-16z+17=0$ có $\Delta'=64-4.17=-4=(2i)^2$.

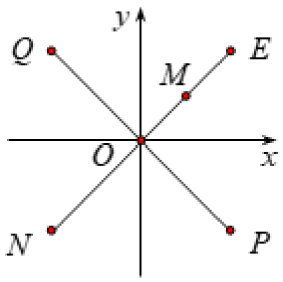
Phương trình có hai nghiệm $z_1=\dfrac{8-2i}{4}=2-\dfrac{1}{2}i$, $z_2=\dfrac{8+2i}{4}=2+\dfrac{1}{2}i$.

Do z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0=2+\dfrac{1}{2}i$. Ta có $w=iz_0=-\dfrac{1}{2}+2i$.

Vậy điểm biểu diễn $w=iz_0$ là $M_2\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Ghi Chú!

Câu 188: (ĐTK 2017-Câu 25) Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn củasố phức z (như hình vẽ bên). Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?



A. Điểm N **B.** Điểm Q **C.** Điểm E **D.** Điểm P

Lời giải

Chọn C

Gọi $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$. Điểm biểu diễn của z là điểm $M(a;b)$

$\Rightarrow 2z = 2a + 2bi$ có điểm biểu diễn trên mặt phẳng Oxy là $M_1(2a;2b)$.

Ta có $\overrightarrow{OM_1} = 2\overrightarrow{OM}$ suy ra $M_1 \equiv E$.

Câu 189: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 30) Cho số phước $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ

A. $Q(1;2)$ **B.** $N(2;1)$ **C.** $M(1;-2)$ **D.** $P(-2;1)$

Lời giải

Chọn B

$w = iz = i(1-2i) = 2 + i$.

Câu 190: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 13) Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

A. $N(4;-3)$ **B.** $M(2;-5)$ **C.** $P(-2;-1)$ **D.** $Q(-1;7)$

Lời giải

Chọn C

$z = z_1 + z_2 = -2 - i$.

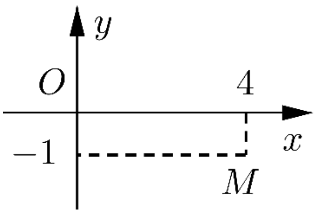
Câu 191: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 25) Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có toạ độ là

A. $(4;-1)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $(1;4)$.

Lời giải

Chọn A

- $3z_1 + z_2 = 3(1-i) + (1+2i) = 4 - i$.



- Vậy số phức $z = 3z_1 + z_2$ được biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ Oxy là $M(4;-1)$

.

Ghi Chú!

Câu 192: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 28) Cho hai số phức $z_1 = -2 + i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

A. $(3;-3)$. **B.** $(2;-3)$. **C.** $(-3;3)$. **D.** $(-3;2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2z_1 + z_2 = -4 + 2i + 1 + i = -3 + 3i$..

Vậy điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là $(-3;3)$.

Câu 193: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 17) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

A. $(2;5)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;2)$. **D.** $(5;3)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z_1 + 2z_2 = (1+i) + 2(2+i) = 5 + 3i$.

Do đó điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là $(5;3)$.

Câu 194: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 16) Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm biểu diễn của số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

A. $(5;-1)$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $(5;0)$. **D.** $(0;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2z_1 + z_2 = 5 - i$. Nên ta chọn **A.**

Dạng ⑨: Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z độc lập

Câu 195: (DE TN BGD 2022-MD 104) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 7i$ có tọa độ là

A. $(2;-7)$. **B.** $(-2;-7)$. **C.** $(7;2)$. **D.** $(2;7)$.

Lời giải

Chọn D

Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 2 + 7i$ có tọa độ là $(2;7)$.

Câu 196: (DE MH BGD 2023 – Câu 1) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là

A. $(-6;7)$. **B.** $(6;7)$. **C.** $(7;6)$. **D.** $(7;-6)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có điểm biểu diễn số phức $z = 7 - 6i$ có tọa độ là $(7;-6)$.

Câu 197: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 22] Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M(-2;2)$ là điểm biểu diễn của số phức nào dưới đây?

A. $2 - 2i$. **B.** $2i$. **C.** $-2 + 2i$. **D.** $2 + 2i$.

Lời giải

Chọn C

Ghi Chú!

Trên mặt phẳng tọa độ, điểm $M\left(-2;2\right)$ là điểm biểu diễn của số phức $-2+2i$.

Dạng ⑩: Tìm tâm, bán kính của đường tròn biểu diễn số phức z độc lập

Câu 198: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 30) Xét các điểm số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}+i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tạo độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 1. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi$ $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

Ta có: $\left(\overline{z}+i\right)\left(z+2\right)=\left(a-bi+i\right)\left(a+bi+2\right)$

$=\left(a^2+2a+b^2-b\right)+\left(a-2b+2\right)i$

Vì $\left(\overline{z}+i\right)\left(z+2\right)$ là số thuần ảo nên ta có: $a^2+2a+b^2-b=0$

$\Leftrightarrow\left(a+1\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$.

Trên mặt phẳng tạo độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 199: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 33) Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}+3i\right)\left(z-3\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi\Rightarrow\overline{z}=x-yi$.

Ta có: $\left(\overline{z}+3i\right)\left(z-3\right)=x^2+y^2-3x-3y+\left(3x+3y-9\right)i$.

Để $\left(\overline{z}+3i\right)\left(z-3\right)$ là số thuần ảo thì

$x^2+y^2-3x-3y=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn điều kiện trên là một đường tròn có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 200: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 28) Xét các số phức z thỏa mãn $\left(\overline{z}+2i\right)\left(z-2\right)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 4. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ghi Chú!

Giả sử $z=x+yi$ với $x,y\in\mathbb{R}$.

Vì $(\overline{z}+2i)(z-2)=[x+(2-y)i][(x-2)+yi]=$

$[x(x-2)-y(2-y)]+[xy+(x-2)(2-y)]i$ là số thuần ảo nên có phần thực bằng không do đó $x(x-2)-y(2-y)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2$.

Suy ra tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 201: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 29) Xét các số phức z thỏa mãn $(\overline{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$

Ta có:

$(\overline{z}-2i)(z+2)=(a-bi-2i)(a+bi+2)=a^2+2a+b^2+2b-2(a+b+2)i$

Vì $(\overline{z}-2i)(z+2)$ là số thuần ảo nên ta có

$a^2+2a+b^2+2b=0 \Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=2$.

Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{2}$.

Câu 202: (ĐTK 2019-Câu 37) Xét các số phức z thỏa mãn $(z+2i)(\overline{z}+2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

A. $(1;-1)$. **B.** $(1;1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-1;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Điểm biểu diễn cho z là $M(x;y)$.

Ta có: $(z+2i)(\overline{z}+2)=(x+yi+2i)(x-yi+2)$

$=x(x+2)+y(y+2)+i[(x-2)(y+2)-xy]$ là số thuần ảo

$\Leftrightarrow x(x+2)+y(y+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+1)^2=2$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn có tâm $I(-1;-1)$.

§2- CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

Ghi nhớ!

1. ***Phép cộng hai số phức.***

- Tổng của hai số phức $z=a+bi;z'=a'+b'i$ $(a;a';b;b'\in\mathbb{R})$ là số phức $z+z'=a+a'+(b+b')i$.
- Một số tính chất của phép cộng số phức:

Ghi Chú!

① . Tính chất kết hợp: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3), \forall z_1;z_2;z_3 \in \mathbb{C}$.

② . Tính chất giao hoán: $z+z'=z'+z, \forall z',z \in \mathbb{C}$

③ . Cộng với 0: $z+0=0+z=z, \forall z \in \mathbb{C}$.

④ . Với mỗi số phức $z=a+bi$ $(a;b\in\mathbb{R})$ nếu kí hiệu số phức $-a-bi$ là $-z$ thì ta có: $z+(-z)=(-z)+z=0$

- Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z

2. *Phép trừ hai số phức .*

- Hiệu của hai số phức z và z' là tổng của z và $-z'$, nghĩa là $z-z'=z+(-z')$
- Nếu $z=a+bi;\ z'=a'+b'i$ thì $z-z'=a-a'+(b-b')i$.

3. *Phép nhân hai số phức .*

- Tích của hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$ $(a;a';b;b'\in\mathbb{R})$ là số phức:

$$zz'=(a+bi)(a'+b'i)=aa'+(ab'+b'a)i+bb'i^2=(aa'-bb')+(ab'+a'b)i$$

- Một số tính chất của phép nhân hai số phức:

① . Tính chất giao hoán: $zz'=z'z, \forall z;z'\in\mathbb{C}$.

② . Tính chất kết hợp: $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3), \forall z_1;z_2;z_3\in\mathbb{C}$.

③ . Nhân với 1: $1.z=z.1, \forall z\in\mathbb{C}$.

④ .Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng:

$$z(z_1+z_2)=zz_1+zz_2, \forall z;z_1;z_2\in\mathbb{C}$$

4. *Phép chia hai số phức*

- Định nghĩa: Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}}=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
- Thương $\dfrac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với số nghịch đảo của số phức z, tức là $\dfrac{z'}{z}=z'.z^{-1}$. Do đó, nếu $z\neq 0$ thì $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'.\overline{z}}{|z|^2}$.

5. *Một số chú ý*

- Cho $z_1=a_1+b_1i;\ z_2=a_2+b_2i$ ta có:

① . $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$. ② . $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2\neq 0)$.

- Tổng quát: $|z_1z_2.........z_n|=|z_1||z_2|.........|z_n|$
- $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$.
- Chú ý: $i^{4k}=1;\ i^{4k+1}=i;\ i^{4k+2}=-1;\ i^{4k+3}=-i$ $(k\in\mathbb{Z})$
- ***Một số bài toán max, min Số Phức***

Ghi Chú!

①. Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 \cdot z + z_2| = r, (r > 0)$ $\begin{cases} \max|z| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| + \dfrac{r}{|z_1|} \\ \min|z| = \left|\left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| - \dfrac{r}{|z_1|}\right| \end{cases}$

②. Cho số phức z thỏa mãn $|z_1.z - z_2| = r_1, (r_1 > 0)$

$\min P = \left|\left|\dfrac{z_2}{z_1} - z_3\right| - \dfrac{r_1}{|z_1|}\right|$; $\max P = \left|\dfrac{z_2}{z_1} - z_3\right| + \dfrac{r_1}{|z_1|}$

③. Cho số phức z thỏa mãn $|z_1 z + z_2| + |z_1 \cdot z - z_2| = k, (k > 0)$

$\max|z| = \dfrac{k}{2|z_1|}$ và $\min|z| = \dfrac{\sqrt{k^2 - 4|z_2|^2}}{2|z_1|}$

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Dạng ①: Thực hiện các phép toán cơ bản về số phức

Câu 1: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 22) Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $5 + i$. **B.** $-5 + i$. **C.** $5 - i$. **D.** $-5 - i$.

Lời giải

Chọn C

$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (2 + i) = 5 - i$.

Câu 2: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 6) Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 2 - i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $5 - i$. **B.** $5 + i$. **C.** $-5 - i$. **D.** $-5 + i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (2 - i) = 5 + i$.

Câu 3: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 16) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $3 + i$. **B.** $-3 - i$. **C.** $3 - i$. **D.** $-3 + i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z_1 + z_2 = 1 - 2i + 2 + i = 3 - i$.

Câu 4: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 25) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

A. $4 - 2i$. **B.** $-4 + 2i$. **C.** $4 + 2i$. **D.** $-4 - 2i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z_1 + z_2 = 1 - 3i + 3 + i = 4 - 2i$.

Ghi Chú!

Vậy $z_1 + z_2 = 4 - 2i$.

Câu 5: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 24) Cho hai số phức $z_1 = 3 + 2i$ và $z_2 = 1 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $2 - 3i$. **B.** $-2 + 3i$. **C.** $-2 - 2i$. **D.** $2 + 3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z_1 - z_2 = 3 + 2i - (1 - i) = 2 + 3i$.

Câu 6: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 10) Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 4 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $3 + 3i$. **B.** $-3 - 3i$. **C.** $-3 + 3i$. **D.** $3 - 3i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $z_1 - z_2 = 1 + 2i - (4 - i) = -3 + 3i$.

Câu 7: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 14) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $-2 - 4i$. **B.** $2 - 4i$. **C.** $-2 + 4i$. **D.** $2 + 4i$.

Lời giải

Chọn A

$z_1 - z_2 = 1 - 3i - (3 + i) = -2 - 4i$.

Câu 8: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 23) Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

A. $-1 + 3i$. **B.** $-1 - 3i$. **C.** $1 + 3i$. **D.** $1 - 3i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$z_1 - z_2 = 3 - 2i - (2 + i) = 1 - 3i$.

Câu 9: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 25) Cho hai số phức $z = 4 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

A. $1 + 6i$. **B.** $7 - 2i$. **C.** $7 + 2i$. **D.** $-1 - 6i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z + w = 4 + 2i + 3 - 4i = 7 - 2i$.

Câu 10: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 19) Cho hai số phức $z = 5 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng:

A. $6 + 2i$. **B.** $4 + 6i$. **C.** $6 - 2i$. **D.** $-4 - 6i$.

Lời giải

Chọn C

$z + w = 5 + 2i + 1 - 4i = (5 + 1) + (2 - 4)i = 6 - 2i$.

Câu 11: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 21) Cho hai số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 3 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

A. $2 - 6i$. **B.** $4 + 2i$. **C.** $4 - 2i$. **D.** $-2 + 6i$.

Lời giải

Chọn C

$z + w = 1 + 2i + 3 - 4i = 4 - 2i$.

Câu 12: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 1) Cho hai số phức $z = 3 + 2i$ và $w = 1 - 4i$. Số phức $z + w$ bằng

A. $4 + 2i$. **B.** $4 - 2i$. **C.** $-2 - 6i$. **D.** $2 + 6i$.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z+w=3+2i+1-4i=4-2i$.

Câu 13: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Cho 2 số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=1-i$. Số phức z_1+z_2 bằng

A. $3+4i$. **B.** $1+4i$. **C.** $z=5+i$. **D.** $3+2i$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_1+z_2=2+3i+1-i=3+2i$.

Câu 14: (DE MH BGD 2023 – Câu 12) Cho số phức $z=2+9i$, phần thực của số phức z^2 bằng

A. -77 **B.** 4 **C.** 36 **D.** 85

Lời giải

Chọn A

$z=2+9i \Rightarrow z^2=(2+9i)^2=-77+36i$.

Vậy phần thực của số phức z^2 bằng -77.

Câu 15: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 11] Cho số phức $z_1=2+3i$ và $z_2=i$. Số phức $z_1.z_2$ bằng

A. $3-2i$. **B.** $2-3i$. **C.** $-3+2i$ **D.** $2+4i$.

Lời giải

Chọn C

$z_1.z_2=(2+3i).i=2i+3i^2=2i+3(-1)=-3+2i$.

Câu 16: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 4] Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** -4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z_1-z_2=2-i-1-3i=1-4i$

Câu 17: (ĐMH 2017-Câu 32) Cho số phức $z=2+5i$. Tìm số phức $w=iz+\bar{z}$

A. $w=7-3i$. **B.** $w=-3-3i$. **C.** $w=3+7i$.. **D.** $w=-7-7i$

Lời giải

Chọn B

Ta có $w=iz+\bar{z}=i(2+5i)+(2-5i)=2i-5+2-5i=-3-3i$.

Câu 18: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 7) Cho 2 số phức $z_1=5-7i$ và $z_2=2+3i$. Tìm số phức $z=z_1+z_2$.

A. $z=7-4i$ **B.** $z=2+5i$ **C.** $z=-2+5i$ **D.** $z=3-10i$

Lời giải

Chọn A

$z=5-7i+2+3i=7-4i$.

Câu 19: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 8) Cho hai số phức $z_1=4-3i$ và $z_2=7+3i$. Tìm số phức $z=z_1-z_2$.

A. $z=11$ **B.** $z=3+6i$ **C.** $z=-1-10i$ **D.** $z=-3-6i$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z=z_1-z_2=(4-3i)-(7+3i)=-3-6i$.

Ghi Chú!

Câu 20: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 28) Cho số phức $z=1-2i$, số phức $(2+3i)\overline{z}$ bằng

A. $4-7i$. **B.** $-4+7i$. **C.** $8+i$. **D.** $-8+i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z=1-2i \Rightarrow \overline{z}=1+2i \Rightarrow (2+3i)\overline{z}=(2+3i)(1+2i)=2+3i+4i+6i^2=-4+7i$.

Vậy $(2+3i)\overline{z}=-4+7i$.

Câu 21: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 33) Cho số phức $z=2-i$, số phức $2-3i\ \overline{z}$ bằng

A. $-1+8i$. **B.** $-7+4i$. **C.** $7-4i$. **D.** $1+8i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $2-3i\ \overline{z}=\ 2-3i\ \ 2+i\ =7-4i$.

Câu 22: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 27) Cho số phức $z=-3+2i$, số phức $(1-i)\overline{z}$ bằng.

A. $-1-5i$ **B.** $5-i$ **C.** $1-5i$ **D.** $-5+i$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(1-i)\overline{z}=(1-i)(-3-2i)=-5+i$

Câu 23: (ĐTK 2021-Câu 19) Cho hai số phức $z=3+i$ và $w=2+3i$. Số phức $z-w$ bằng

A. $1+4i$. **B.** $1-2i$. **C.** $5+4i$. **D.** $5-2i$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z-w=3+i-(2+3i)=1-2i$.

➧Dạng ②: Xác định các yếu tố của số phức (phần thực, ảo, mô đun, liên hợp,…) qua các phép toán

Câu 24: (ĐTK 2020-L2-Câu 20) Cho hai số phức $z_1=2+i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1+z_2 bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Ta có $z_1+z_2=(2+i)+(1+3i)=3+4i$. Phần thực của z_1+z_2 là 3.

Câu 25: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 15] Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+3i$.

Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$z_1-z_2=2-i-(1+3i)=1-4i$.

Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng 1.

Câu 26: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 21] Cho số phức $z=1-2i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn B

Ta có $\overline{z}=1+2i$ nên phần ảo của số phức $\overline{z}$ là 2.

Câu 27: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 15] Cho hai số phức $z_1=2-i$ và $z_2=1+3i$. Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

$z_1-z_2=2-i-(1+3i)=1-4i$.

Phần thực của số phức z_1-z_2 bằng 1.

Câu 28: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 21] Cho số phức $z=1-2i$. Phần ảo của số phức $\overline{z}$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overline{z}=1+2i$ nên phần ảo của số phức $\overline{z}$ là 2.

Câu 29: (ĐMH 2017-Câu 30) Cho hai số phức $z_1=1+i$ và $z_2=2-3i$. Tính môđun của số phức z_1+z_2.

A. $|z_1+z_2|=\sqrt{13}$. **B.** $|z_1+z_2|=\sqrt{5}$. **C.** $|z_1+z_2|=1$. **D.** $|z_1+z_2|=5$.

Lời giải

Chọn A

$z_1+z_2=1+i+(2-3i)=3-2i$ nên ta có: $|z_1+z_2|=|3-2i|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

Câu 30: (ĐTN 2017-Câu 30) Tìm số phức liên hợp của số phức $z=i(3i+1)$.

A. $\overline{z}=3-i$. **B.** $\overline{z}=-3+i$. **C.** $\overline{z}=3+i$. **D.** $\overline{z}=-3-i$.

Lời giải

Chọn D

$z=i(3i+1)=-3+i$ nên suy ra $\overline{z}=-3-i$.

Câu 31: (ĐTN 2017-Câu 31) Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(2-i)+13i=1$.

A. $|z|=\sqrt{34}$ **B.** $|z|=34$ **C.** $|z|=\dfrac{5\sqrt{34}}{3}$ **D.** $|z|=\dfrac{\sqrt{34}}{3}$

Lời giải

Chọn A

$z(2-i)+13i=1 \Leftrightarrow z=\dfrac{1-13i}{2-i} \Leftrightarrow z=\dfrac{(1-13i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \Leftrightarrow z=3-5i$.

$|z|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}$.

Câu 32: (ĐTN 2017-Câu 33) Cho số phức $z=a+bi\,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $(1+i)z+2\overline{z}=3+2i$. Tính $P=a+b$.

A. $P=\dfrac{1}{2}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=-\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

$(1+i)z+2\overline{z}=3+2i.(1)$. Ta có: $z=a+bi \Rightarrow \overline{z}=a-bi.$

Thay vào (1) ta được $(1+i)(a+bi)+2(a-bi)=3+2i$

$\Leftrightarrow (a-b)i+(3a-b)=3+2i \Leftrightarrow (a-b)i+(3a-b)=3+2i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b=2 \\ 3a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow P=-1.$$

Câu 33: (ĐTK 2017-Câu 5) Tính môđun của số phức z biết $\bar{z}=(4-3i)(1+i)$.

A. $|z|=25\sqrt{2}$ **B.** $|z|=7\sqrt{2}$ **C.** $|z|=5\sqrt{2}$ **D.** $|z|=\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn C

$\bar{z}=(4-3i)(1+i)=7+i \Rightarrow z=7-i \Rightarrow |z|=5\sqrt{2}$

Câu 34: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 27) Cho số phức $z=1-i+i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z.

A. $a=0, b=1$ **B.** $a=-2, b=1$ **C.** $a=1, b=0$ **D.** $a=1, b=-2$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z=1-i+i^3=1-i+i^2.i=1-i-i=1-2i$ (vì $i^2=-1$)

Suy ra phần thực của z là $a=1$, phần ảo của z là $b=-2$.

Câu 35: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 7) Cho hai số phức $z_1=1-3i$ và $z_2=-2-5i$.

Tìm phần ảo b của số phức $z=z_1-z_2$.

A. $b=-2$. **B.** $b=2$. **C.** $b=3$. **D.** $b=-3$.

Lời giải

Chọn B

$z=z_1-z_2=(1-3i)-(-2-5i)=3+2i$. Vậy phần ảo của z là: 2.

Câu 36: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 34) Cho số phức z thỏa mãn

$3(\bar{z}+i)-(2-i)z=3+10i$. Mô đun của z bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$ $(x,\ y\in\mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

Ta có $3(\bar{z}+i)-(2-i)z=3+10i \Leftrightarrow 3(x-yi)-(2-i)(x+yi)=3+7i$

$\Leftrightarrow x-y+(x-5y)i=3+7i \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x-5y=7 \end{cases} \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$. Suy ra $z=2-i$.

Vậy $|z|=\sqrt{5}$.

Câu 37: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 31) Cho số phức z thoả mãn

$3\ \bar{z}-i\ -\ 2+3i\ z=7-16i$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $z=a+bi$ $\ a;b\in\mathbb{R}\ $.

Theo đề ta có.

$3\ a-bi-i\ -\ 2+3i\ \ a+bi\ =7-16i \Leftrightarrow 3a-3bi-3i-2a-2bi-3ai+3b=7-16i$.

$\Leftrightarrow\ a+3b\ +\ -3a-5b-3\ =7-16i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b-3=-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=7 \\ -3a-5b=-13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}.$

Ghi Chú!

Vậy $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 38: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 32) Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$. Môđun của z bằng

A. 13. **B.** 5. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=a+bi$; $(a,b\in\mathbb{R})$.

Có $(2+i)z-4(\overline{z}-i)=-8+19i$

$\Leftrightarrow(2+i)(a+bi)-4(a-bi-i)=-8+19i\Leftrightarrow-2a-b+(a+6b+4)i=-8+19i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2a-b=-8\\a+6b+4=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$.

Vậy $z=3+2i$ suy ra $|z|=\sqrt{13}$.

Câu 39: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 31) Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi$. Ta có:

$(2-i)z+3+16i=2(\overline{z}+i)$

$\Leftrightarrow(2-i)(x+yi)+3+16i=2(x-yi+i)\Leftrightarrow 2x+2yi-xi+y+3+16i=2x-2yi+2i$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+3=2x\\2y-x+16=-2y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+3=0\\-x+4y=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

Suy ra $z=2-3i$. Vậy $|z|=\sqrt{13}$.

Câu 40: (ĐTK 2020-L1-Câu 30) Cho hai số phức $z_1=-3+i$ và $z_2=1-i$. Phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng

A. -2. **B.** $2i$. **C.** 2. **D.** $-2i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overline{z_2}=1+i$. Do đó $z_1+\overline{z_2}=(-3+i)+(1+i)=-2+2i$.

Vậy phần ảo của số phức $z_1+\overline{z_2}$ bằng 2.

Câu 41: (ĐTK 2020-L1-Câu 31) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

A. $P(-3;4)$. **B.** $Q(5;4)$. **C.** $N(4;-3)$. **D.** $M(4;5)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=(1+2i)^2=1^2+2.1.2i+(2i)^2=-3+4i$.

Vậy trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z=(1+2i)^2$ là điểm $P(-3;4)$.

Câu 42: (ĐTK 2020-L2-Câu 35) Cho hai số phức $z_1=3-i$ và $z_2=-1+i$. Phần ảo của số phức z_1z_2 bằng

A. 4. **B.** $4i$. **C.** -1. **D.** $-i$.

Lời giải

Chọn A

$z_1z_2=(3-i)(-1+i)=-3+3i+i-i^2=-2+4i$ nên phần ảo của số phức z_1z_2 bằng 4.

Câu 43: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 37) Cho hai số phức $z=1+2i$ và $w=3+i$. Môđun của số phức $z\overline{w}$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 26. **D.** 50.

Lời giải

Chọn A

$\overline{w}=3-i$ suy ra $z\overline{w}=(1+2i)(3-i)=3-i+6i-2i^2=5+5i$.

$|z\overline{w}|=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

Câu 44: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 31) Cho hai số phức $z=2+2i$ và $w=2+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. 40. **B.** 8. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z.\overline{w}=(2+2i)(2-i)=6+2i.$

Vậy $|z.\overline{w}|=|6+2i|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}.$

Câu 45: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 37) Cho hai số phức $z=4+2i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{2}.$ **B.** $8.$ **C.** $2\sqrt{10}.$ **D.** $40.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $w=1+i \Rightarrow \overline{w}=1-i$

Nên $z.\overline{w}=6-2i \Rightarrow |z.\overline{w}|=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$.

Câu 46: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 36) Cho hai số phức $z=1+3i$ và $w=1+i$. Môđun của số phức $z.\overline{w}$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 20. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có $w=1+i \Rightarrow \overline{w}=1-i$.

$z.\overline{w}=(1+3i)(1-i)=4+2i$.

$|z.\overline{w}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

Câu 47: (ĐTK 2021-Câu 34) Cho số phức $z=3+4i.$ Môđun của số phức $(1+i)z$ bằng

A. $50.$ **B.** $10.$ **C.** $\sqrt{10}.$ **D.** $5\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$(1+i)z=(1+i)(3+4i)=-1+7i$

$\Rightarrow |(1+i)z|=|-1+7i|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=5\sqrt{2}.$

Câu 48: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 35) Cho số phức z thỏa mãn $iz=5+4i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=4+5i$. **B.** $\overline{z}=4-5i$. **C.** $\overline{z}=-4+5i$. **D.** $\overline{z}=-4-5i$.

Lời giải

Chọn A

Ghi Chú!

Ta có $iz=5+4i \Rightarrow z=\dfrac{5+4i}{i} \Rightarrow z=4-5i \Rightarrow \overline{z}=4+5i$.

Câu 49: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 32) Số phức z thỏa mãn $iz=6+5i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=5-6i$. **B.** $\overline{z}=-5+6i$. **C.** $\overline{z}=5+6i$. **D.** $\overline{z}=-5-6i$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $iz=6+5i \Leftrightarrow z=\dfrac{6+5i}{i}=5-6i$. Vậy $\overline{z}=5+6i$.

Câu 50: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 31) Cho số phức z thỏa mãn $iz=3+2i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=2+3i$. **B.** $\overline{z}=-2-3i$. **C.** $\overline{z}=-2+3i$. **D.** $\overline{z}=2-3i$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $iz=3+2i \Leftrightarrow z=2-3i$. Nên $\overline{z}=2+3i$.

Câu 51: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 34) Cho số phức z thỏa mãn $iz=4+3i$. Số phức liên hợp của z là

A. $\overline{z}=3+4i$. **B.** $\overline{z}=-3-4i$. **C.** $\overline{z}=3-4i$. **D.** $\overline{z}=-3+4i$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $iz=4+3i \Leftrightarrow z=\dfrac{4+3i}{i} \Leftrightarrow z=3-4i$. Khi đó: $\overline{z}=3+4i$.

Câu 52: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 37] Số phức z thoả mãn $z-2\overline{z}=1+6i$. Mô đun của z bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 3. **C.** 5. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi số phức $z=x+yi \Rightarrow \overline{z}=x-yi, (x,y\in R)$ thay vào $z-2\overline{z}=1+6i$ ta có:

$$z-2\overline{z}=1+6i \Leftrightarrow x+yi-2(x-yi)=1+6i \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x=1 \\ y+2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}.$$

Vậy số phức $z=-1+2i \Rightarrow |z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$.

Câu 53: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 38) Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính $|z|$.

A. $|z|=17$. **B.** $|z|=\sqrt{17}$. **C.** $|z|=\sqrt{10}$. **D.** $|z|=10$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+3|=5 \Leftrightarrow |a+bi+3|=5 \Leftrightarrow (a+3)^2+b^2=25\,(1)$.

Ta lại có:

$|z-2i|=|z-2-2i| \Leftrightarrow |a+bi-2i|=|a+bi-2-2i|$

$\Leftrightarrow a^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-2)^2$

$$\Leftrightarrow a^2=(a-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-2=a \\ a-2=-a \end{array}\right. \Leftrightarrow a=1$$

Thế vào (1) $\Rightarrow 16+b^2=25 \Leftrightarrow b^2=9$.

Vậy $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+9}=\sqrt{10}$.

Ghi Chú!

Câu 54: (ĐTN 2017-Câu 34) Xét số phức z thỏa mãn $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\dfrac{3}{2}<|z|<2$. **B.** $|z|>2$. **C.** $|z|<\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2}<|z|<\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $z^{-1}=\dfrac{1}{|z|^2}\bar{z}$.

Vậy $(1+2i)|z|=\dfrac{\sqrt{10}}{z}-2+i$

$$\Leftrightarrow (|z|+2)+(2|z|-1)i=\left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\bar{z}\Rightarrow \left|(|z|+2)+(2|z|-1)i\right|=\left|\left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2}\right).\bar{z}\right|$$

$$\Rightarrow (|z|+2)^2+(2|z|-1)^2=\left(\frac{10}{|z|^4}\right).|z|^2=\frac{10}{|z|^2}.$$ Đặt $|z|=a>0$.

$$\Rightarrow (a+2)^2+(2a-1)^2=\left(\frac{10}{a^2}\right)\Leftrightarrow a^4+a^2-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a^2=1\\ a^2=-2\end{array}\right.\Rightarrow a=1\Rightarrow |z|=1.$$

Dạng ③: Tìm số phức thỏa mãn đk cho trước

Câu 55: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 36) Cho số phức $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Tính $S=a+3b$.

A. $S=\dfrac{7}{3}$ **B.** $S=-5$ **C.** $S=5$ **D.** $S=-\dfrac{7}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$z+1+3i-|z|i=0\Leftrightarrow a+bi+1+3i-\sqrt{a^2+b^2}i=0\Leftrightarrow \begin{cases}a+1=0\\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$\Rightarrow S=a+3b=-5.$

Câu 56: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 39) Cho số phức $z=a+bi$ $(a,\ b\in\mathbb{R})$ thoả mãn $z+2+i=|z|$. Tính $S=4a+b$.

A. $S=4$ **B.** $S=2$ **C.** $S=-2$ **D.** $S=-4$

Lời giải

Chọn D

Ta có $z+2+i=|z|\Leftrightarrow (a+2)+(b+1)i=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow \begin{cases}a+2=\sqrt{a^2+b^2},a\ge -2\\ b+1=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b=-1\\ (a+2)^2=a^2+1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{3}{4}\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow S=4a+b=-4.$$

Câu 57: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 10) Tìm số phức z thỏa mãn $z+2-3i=3-2i$.

A. $z=1-5i$. **B.** $z=1+i$. **C.** $z=5-5i$. **D.** $z=1-i$.

Lời giải

Chọn B

$z+2-3i=3-2i \Leftrightarrow z=3-2i-2+3i=1+i$.

Câu 58: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 36) Cho số phức z thỏa mãn $|z|=5$ và $|z+3|=|z+3-10i|$. Tìm số phức $w=z-4+3i$.

A. $w=-3+8i$. **B.** $w=1+3i$. **C.** $w=-1+7i$. **D.** $w=-4+8i$.

Lời giải

Chọn D

$z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Theo đề bài ta có

$x^2+y^2=25$ và $(x+3)^2+y^2=(x+3)^2+(y-10)^2$.

Giải hệ phương trình trên ta được $x=0; y=5$. Vậy $z=5i$. Từ đó ta có $w=-4+8i$.

Câu 59: (ĐTK 2017-Câu 39) Hỏi có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 0

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z=a+bi \Rightarrow z^2=a^2-b^2+2abi$

Vì $|z-i|=5$ và z^2 là số thuần ảo ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2=25 \\ a^2-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-b \\ b^2+(b-1)^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b=4 \\ a=b=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=-a=4 \\ b=-a=-3 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Câu 60: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 46) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-4}$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$. Điều kiện $z\neq 4$

$|z-3i|=5 \Leftrightarrow \left|x+\left(y-3\right)i\right|=5 \Leftrightarrow x^2+\left(y-3\right)^2=25 \Rightarrow x^2+y^2-6y=16\left(1\right)$

Do $\dfrac{z}{z-4}=\dfrac{x+yi}{\left(x-4\right)+yi}$ là số thuần ảo nên phần thực

$\dfrac{x\left(x-4\right)+y^2}{\left(x-4\right)^2+y^2}=0 \Rightarrow x^2+y^2-4x=0\left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra $4x-6y=16 \Rightarrow x=4+\dfrac{3}{2}y$, thay vào $\left(1\right)$ ta được:

$\left(4+\dfrac{3}{2}y\right)^2+y^2-6y-16=0 \Leftrightarrow y=0$ hoặc $y=-\dfrac{24}{13}$

Với $y=0$ ta được $x=4$, suy ra $z=4$ (loại)

Với $y=-\dfrac{24}{13}$ ta được $x=\dfrac{16}{13}$ và $z=\dfrac{16}{13}-\dfrac{24}{13}i$ (thỏa mãn)

Vậy có một số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán là $z=\dfrac{16}{13}-\dfrac{24}{13}i$.

Ghi Chú!

Câu 61: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 44) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z-1)^2$ là số thuần ảo?

A. 0 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Gọi số phức $z=x+yi$ với $(x,y\in\mathbb{R})$, vì $(z-1)^2=(x-1)^2-y^2+2(x-1)yi$ là số thuần ảo nên theo đề bài ta có HPT $\begin{cases}(x+2)^2+(y-1)^2=8\\(x-1)^2=y^2\end{cases}$

Với $y=x-1$, thay vào phương trình đầu, ta được

$$(x+2)^2+(x-2)^2=8\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0.$$

Với $x=3\sqrt{2}$, thay vào phương trình đầu, ra được

$$(x+2)^2+(-x)^2=8\Leftrightarrow 2x^2+4x-4=0\Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy có 3 số phức thỏa mãn.

Câu 62: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 48) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi, |z+3i|=\sqrt{13}\Leftrightarrow x^2+y^2+6y=4.$ (1)

$\dfrac{z}{z+2}=\dfrac{x+yi}{(x+2)+yi}=\dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}+\dfrac{2yi}{(x+2)^2+y^2}$ là số thuần ảo khi và chỉ khi:

$\dfrac{x^2+y^2+2x}{(x+2)^2+y^2}=0\Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0$ (2)

Lấy $(1)-(2):3y-x=2\Leftrightarrow x=3y-2$ thay vào (1):

$$(3y-2)^2+y^2+6y=4\Leftrightarrow 5y^2-3y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\y=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=-\dfrac{1}{5}\end{array}\right..$$

Thử lại thấy $z=-2$ không thỏa điều kiện.

Vậy có 1 số phức $z=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$.

Câu 63: (ĐTK 2018-Câu 38) Cho số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+2+i-|z|(1+i)=0$ và $|z|>1$. Tính $P=a+b$.

A. $P=-1$ **B.** $P=-5$ **C.** $P=3$ **D.** $P=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z+2+i-|z|(1+i)=0\Leftrightarrow a+bi+2+i-\sqrt{a^2+b^2}(1+i)=0$

$$\Leftrightarrow a+2-\sqrt{a^2+b^2}+\left(b+1-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+2-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (1)\\b+1-\sqrt{a^2+b^2}=0\ (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được: $a-b+1=0\Leftrightarrow b=a+1$. Thế vào (1) ta được:

Ghi Chú!

$a+2-\sqrt{a^2+(a+1)^2}=0 \Leftrightarrow a+2=\sqrt{2a^2+2a+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2+4a+4=2a^2+2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -2 \\ \left[\begin{array}{l} a=3 \quad (tm) \\ a=-1 \ (tm) \end{array}\right. \end{cases}$$

Với $a=3 \Rightarrow b=4$; $a=-1 \Rightarrow b=0$.Vì

$|z|>1 \Rightarrow z=3+4i \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow P=a+b=3+4=7$.

Câu 64: (THPTQG 2018-MĐ101-Câu 38) Có bao nhiêu số phức z thoả mãn $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z|(z-4-i)+2i=(5-i)z \Leftrightarrow z(|z|-5+i)=4|z|+(|z|-2)i$.

Lấy môđun 2 vế phương trình trên ta được

$$|z|\sqrt{(|z|-5)^2+1}=\sqrt{(4|z|)^2+(|z|-2)^2}.$$

Đặt $t=|z|$, $t\ge 0$ ta được

$$t\sqrt{(t-5)^2+1}=\sqrt{(4t)^2+(t-2)^2} \Leftrightarrow (t-1)(t^3-9t^2+4)=0.$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $t\ge 0$ vậy có 3 số phức z thoả mãn.

Câu 65: (ĐTK 2019-Câu 42) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|^2=2|z+\bar{z}|+4$ và $|z-1-i|=|z-3+3i|$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Gọi $z=x+yi$ $(x;y\in\mathbb{R})$.

$$|z|^2=2|z+\bar{z}|+4 \Leftrightarrow x^2+y^2=4|x|+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-4x-4=0, x\ge 0 \ (1) \\ x^2+y^2+4x-4=0, x<0 \ (2) \end{array}\right..$$

$|z-1-i|=|z-3+3i| \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow 4x=8y+16$

$\Leftrightarrow x=2y+4 \ (3)$.

+ Thay (3) vào (1) ta được:

$$(2y+4)^2+y^2-4(2y+4)-4=0 \Leftrightarrow 5y^2+8y-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{2}{5} \Rightarrow x=\frac{24}{5}(n) \\ y=-2 \Rightarrow x=0(n) \end{array}\right..$$

+ Thay (3) vào (2) ta được:

$$(2y+4)^2+y^2+4(2y+4)-4=0 \Leftrightarrow 5y^2+24y+28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \Rightarrow x=0(l) \\ y=-\frac{14}{5} \Rightarrow x=-\frac{8}{5}(n) \end{array}\right..$$

Vậy có 3 số phức thỏa điều kiện.

Câu 66: (ĐTK 2021-Câu 42) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|=\sqrt{2}$ và $(z+2i)(\bar{z}-2)$ là số thuần ảo?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Ghi Chú!

Lời giải

Chọn C

Đặt $z = a + bi\left(a,b \in \mathbb{R}\right)$

• $\left|z\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|z\right|^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\ (1)$

• $\left(z+2i\right)\left(\overline{z}-2\right) = z.\overline{z} - 2z + 2i.\overline{z} - 4i = \left|z\right|^2 - 2z + 2i.\overline{z} - 4i$

$= 2 - 2\left(a+bi\right) + 2i\left(a-bi\right) - 4i = 2 - 2a - 2bi + 2ai + 2b - 4i$

$= \left(2-2a+2b\right) + \left(2a-2b-4\right)i$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow 2-2a+2b = 0 \Leftrightarrow 1-a+b=0\ (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ 1-a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ \left(b+1\right)^2+b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ 2b^2+2b-1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ \left[\begin{array}{l} b=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 số phức thỏa mãn bài toán.

Câu 67: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z^2\right| = \left|z-\overline{z}\right|$ và $\left|\left(z-2\right)\left(\overline{z}-2i\right)\right| = \left|z+2i\right|^2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$\left|\left(z-2\right)\left(\overline{z}-2i\right)\right| = \left|z+2i\right|^2 \Leftrightarrow \left|z-2\right|\left|\overline{z}-2i\right| = \left|z+2i\right|\left|\overline{z}-2i\right|$

$\Leftrightarrow \left|\overline{z}-2i\right|\cdot\left(\left|z-2\right|-\left|z+2i\right|\right)$

Trường hợp 1.

$\left|\overline{z}-2i\right| = 0 \Leftrightarrow \overline{z} = 2i \Leftrightarrow z = -2i$

Trường hợp 2.

$\left|z-2\right| - \left|z+2i\right| = 0 \Leftrightarrow \left|z-2\right| = \left|z+2i\right| = 0$

Đặt $z = x + y\cdot i$ ta có $z-2 = x-2+y\cdot i$ và $z+2i = x+\left(y+2\right)\cdot i$.

Khi đó

$\left|z-2\right| = \left|z+2i\right| \Leftrightarrow \left(x-2\right)^2 + y^2 = x^2 + \left(y+2\right)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 + 4y + 4$

$\Leftrightarrow -4x = 4y \Leftrightarrow x = -y$

Lại có

$\left|z^2\right| = \left|z-\overline{z}\right| \Leftrightarrow x^2+y^2 = 2\left|y\right| \Leftrightarrow 2y^2 = 2\left|y\right| \Leftrightarrow 2\left|y\right|\cdot\left(\left|y\right|-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow y = 0$ hoặc $y = \pm 1$.

Do đó ta có các số $z \in \left\{0; 1-i; -1+i; -2i\right\}$ thỏa mãn.

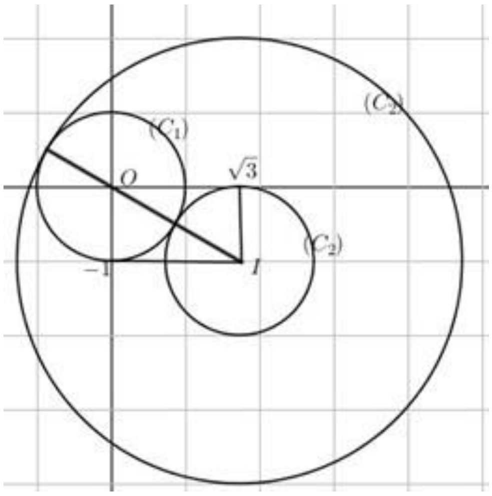
Vậy có 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 68: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 50) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Tìm số phần tử của S.

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A



Gọi $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$, ta có hệ $\begin{cases}x^2+y^2=1\ (1)\\ \left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=m^2\ (m\ge 0)\end{cases}$

Ta thấy $m=0\Rightarrow z=\sqrt{3}-i$ không thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ suy ra $m>0$.

Xét trong hệ tọa độ Oxy tập hợp các điểm thỏa mãn (1) là đường tròn (C_1) có $O(0;0),R_1=1$, tập hợp các điểm thỏa mãn (2) là đường tròn (C_2) tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right),R_2=m$, ta thấy $OI=2>R_1$ suy ra I nằm ngoài (C_1).

Để có duy nhất số phức z thì hệ có nghiệm duy nhất khi đó tương đương với $(C_1),(C_2)$ tiếp xúc ngoài và tiếp xúc trong, điều này xảy ra khi $OI=R_1+R_2\Leftrightarrow m+1=2\Leftrightarrow m=1$ hoặc $R_2=R_1+OI\Leftrightarrow m=1+2=3$.

Câu 69: (THPTQG 2018-MĐ102-Câu 49) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z|\left(z-3-i\right)+2i=\left(4-i\right)z$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|\left(z-3-i\right)+2i=\left(4-i\right)z\Leftrightarrow z\left(5-|z|-i\right)=-4|z|+\left(2-|z|\right)i$.

Đặt $|z|=t\ge 0,t\in\mathbb{R}$. Lấy môđun hai vế ta được:

$t\left|5-t-i\right|=\left|-4t+\left(2-t\right)i\right|\Leftrightarrow t\sqrt{\left(5-t\right)^2+1}=\sqrt{16t^2+\left(2-t\right)^2}$

$$\Leftrightarrow t^4-10t^3+9t^2+4t-4=0\Leftrightarrow\left(t-1\right)\left(t^3-9t^2+4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t\approx 8,95\\ t\approx 0,69\\ t\approx -0,64\end{array}\right..$$

Do $t\ge 0$ nên t có 3 giá trị thỏa mãn.

Ứng với mỗi $t\ge 0$ ta được $z=\dfrac{-4t+\left(2-t\right)i}{5-t-i}$ nên có duy nhất 1 số phức thỏa mãn.

Vậy có ba số phức thỏa mãn.

Ghi Chú!

Câu 70: (THPTQG 2018-MĐ103-Câu 36) Có bao nhiêu số phức thỏa mãn
$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $|z|=a\geq 0, a\in\mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow a(z-6-i)+2i=(7-i)z \Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+ai-2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+(a-2)i \Leftrightarrow |(a-7+i)||z|=|6a+(a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2=36a^2+(a-2)^2 \Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3-13a^2+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1\\ a^3-12a^2+4=0\end{array}\right.$

Xét hàm số $f(a)=a^3-13a^2\ (a\geq 0)$, có bảng biến thiên là

a	0	$\frac{26}{3}$	$+\infty$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
f	$0 \searrow$	$-\frac{8788}{27}$	$\nearrow +\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-12a^2+4=0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1)\neq 0$). Thay giá trị môđun của z vào kiểm tra đều được kết quả đúng.

Vậy có 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Câu 71: (THPTQG 2018-MĐ104-Câu 47) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn
$|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z|(z-5-i)+2i=(6-i)z \Leftrightarrow (|z|-6+i)z=5|z|+(|z|-2)i$ (1)

Lấy môđun hai vế của (1) ta có:

$\sqrt{(|z|-6)^2+1}.|z|=\sqrt{25|z|^2+(|z|-2)^2}$

Bình phương và rút gọn ta được:

$|z|^4-12|z|^3+11|z|^2+4|z|-4=0 \Leftrightarrow (|z|-1)(|z|^3-11|z|^2+4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|^3-11|z|^2+4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|z|=1\\ |z|=10,9667...\\ |z|=0,62...\\ |z|=-0,587...\end{array}\right.$

Do $|z|\geq 0$, nên ta có $|z|=1$, $|z|=10,9667...$, $|z|=0,62...$. Thay vào (1) ta có 3 số phức thỏa mãn đề bài.

Câu 72: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z^2|=|z-\bar{z}|$ và $|(z+2)(\bar{z}+2i)|=|z-2i|^2$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

Gọi $z=a+bi$ với $a;b\in\mathbb{R}$

Ta có: $\left|z^2\right|=\left|z-\bar{z}\right|\Leftrightarrow a^2+b^2=2|b|\,(*)$

Mặt khác $\left|(z+2)\right|\left|(\bar{z}+2i)\right|=|z-2i|^2\,(**)$

Vì $\overline{z+2i}=\bar{z}-2i$ nên $\left|\bar{z}+2i\right|=|z-2i|$.

Nên từ (**) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z-2i|=0\Rightarrow z=2i\\|z+2|=|z-2i|\end{array}\right.$.

Với $|z-2i|=0\Rightarrow z=2i$ (thoả mãn $(*)$)

Với $|z+2|=|z-2i|\Rightarrow(a+2)^2+b^2=a^2+(b-2)^2\Leftrightarrow a=-b$ thay vào (*) ta được:

$$b^2+b^2=2|b|\Leftrightarrow b^2=|b|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=1\\b=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-1\\a=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=0\\z=-1+i\\z=1-i\end{array}\right..$$

Vậy có tất cả 4 số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 73: (DE TN BGD 2022-MD 104) Có bao nhiêu số phức z thỏa $\left|z^2\right|=2\left|z-\bar{z}\right|$ và $\left|(z+4)(\bar{z}+4i)\right|=|z-4i|^2$.

A. 4. **B.** 2. **C.** 1 **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Gọi $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left|z^2\right|=2\left|z-\bar{z}\right|\Leftrightarrow a^2+b^2=4|b|$ (1).

$\left|(z+4)(\bar{z}+4i)\right|=|z-4i|^2\Leftrightarrow|z+4|.\left|\bar{z}+4i\right|=|z-4i|^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a+4)^2+b^2}.\sqrt{a^2+(b-4)^2}=a^2+(b-4)^2$

$\Leftrightarrow\sqrt{a^2+(b-4)^2}.\left(\sqrt{(a+4)^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-4)^2}\right)=0$.

+ TH-1: $\sqrt{a^2+(b-4)^2}=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=4\end{cases}$ thỏa (1).

Vậy $z=4i$.

+ TH-2: $\sqrt{(a+4)^2+b^2}-\sqrt{a^2+(b-4)^2}=0\Leftrightarrow a=-b$.

Thay vào ta được (1):

$2b^2-4|b|=0\Leftrightarrow|b|=0\vee|b|=2$.

Với $|b|=0\Leftrightarrow b=0\Rightarrow\begin{cases}b=0\\a=0\end{cases}\Rightarrow z=0$.

Với $|b|=2\Leftrightarrow b=\pm2\Rightarrow\begin{cases}b=2\\a=-2\end{cases}\vee\begin{cases}b=-2\\a=2\end{cases}\Rightarrow z=-2+2i\vee z=2-2i$.

Kết luận: có 4 số phức z.

Dạng ④: Sử dụng Module và liên hợp để giải toán số phức

Câu 74: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 44) Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $\left|z+i\bar{w}-6-8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng

Ghi Chú!

A. $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$|w|=2\Rightarrow |i\overline{w}|=2$

$|z+i\overline{w}|\le |z|+|i\overline{w}|=3$

$P=|z+i\overline{w}-6-8i|\ge |-6-8i|-|z+i\overline{w}|=10-3=7$.

Suy ra: $P_{\min}=7$ khi $\begin{cases} z=k.i\overline{w},(k\ge 0)\\ -6-8i=h.(z+i\overline{w}),(h\le 0)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1}{2}\\ h=-\dfrac{10}{3}\\ z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\\ \overline{w}=\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i\end{cases}$.

Vậy $|z-w|=\left|\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i-\left(\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i\right)\right|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Câu 75: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 42) Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}+6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|z+i\overline{w}+6+8i|\ge |6+8i|-|z|-|i\overline{w}|=10-1-2=7$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i\\ i\overline{w}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{8}{5}i\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} z=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i\\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i\end{cases}$

Khi đó $|z-w|=\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 76: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 42) Xét các số phức z,w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $|z+i\overline{w}-6+8i|$ đạt giá trị nhỏ nhất, $|z-w|$ bằng?

A. 3. **B.** $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Theo BĐT modun số phức, ta có:

$|z+i\overline{w}|\le |z|+|i\overline{w}|=|z|+|w|=3$.

Ta lại có:

$|z+i\overline{w}-6+8i|=\left|(-6+8i)-\left[-(z+i\overline{w})\right]\right|\ge |-6+8i|-\left|-(z+i\overline{w})\right|=|-6+8i|-|z+i\overline{w}|\ge 10-3=7$

.

Dấu bằng xảy ra, khi và chỉ khi: $\begin{cases} z = k.i\overline{w} \\ -6+8i = m.\left(z+i\overline{w}\right) \end{cases} k>0, m<0.$

Lấy modun 2 vế, ta được: $\begin{cases} |z| = k.\left|i\overline{w}\right| \\ |-6+8i| = -m.\left|z+i\overline{w}\right| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = k.2 \\ 10 = -m.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ m = \dfrac{-10}{3} \end{cases}.$

$\Rightarrow \begin{cases} z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i \\ w = \dfrac{-8}{5} + \dfrac{6}{5}i \end{cases} \Rightarrow |z-w| = \dfrac{\sqrt{221}}{5}.$

Câu 77: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 48) Xét các số phức z, w thỏa mãn $|z|=1$ và $|w|=2$. Khi $\left|z+i\overline{w}+6+8i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất $|z-w|$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{29}}{5}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{221}}{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\left|z+i\overline{w}+6+8i\right| \geq |6+8i| - |z| - \left|i\overline{w}\right| = 10-1-2=7$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i \\ i\overline{w} = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i \\ w = \dfrac{8}{5} + \dfrac{6}{5}i \end{cases}.$

Khi đó $|z-w| = \dfrac{\sqrt{221}}{5}$.

Câu 78: (ĐTK 2021-Câu 49) Xét hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1|=1, |z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị lớn nhất của $|3z_1+z_2-5i|$ bằng

A. $5-\sqrt{19}$. **B.** $5+\sqrt{19}$. **C.** $-5+2\sqrt{19}$. **D.** $5+2\sqrt{19}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Đặt $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$ với $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết thì

$a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=4,\ (a-c)^2+(b-d)^2=3.$

Do đó $a^2-2ac+c^2+b^2-2bd+d^2=3 \Rightarrow ac+bd=1.$

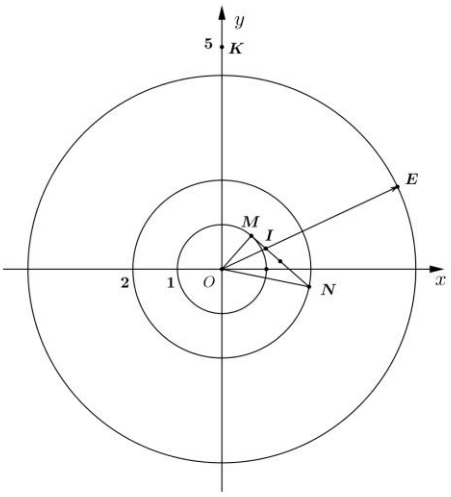
Ta có $3z_1+z_2=3(a+c)+(3b+d)i$ nên

$|3z_1+z_2| = (3a+c)^2+(3b+d)^2 = 9(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+6(ac+bd)=19.$

Áp dụng bất đẳng thức $|z+z'| \leq |z|+|z'|$, ta có ngay

$|3z_1+z_2-5i| \leq |3z_1+z_2| + |-5i| = \sqrt{19}+5.$

Cách 2:



Giả sử M,N,K lần lượt là các điểm biểu diễn $z_1,z_2,z_3=5i$.

Theo giả thiết ta có $M\in(C_1)$ tâm $O(0;0)$ và bán kính $r_1=1$.

$N\in(C_2)$ tâm $O(0;0)$ và bán kính $r_2=2$ và $MN=|z_1-z_2|=\sqrt{3}$.

Đặt $T=|3z_1+z_2-5i|=|3\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OK}|$

Gọi I là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IN}=-3\overrightarrow{IM}\Rightarrow IN=3IM, I\in MN$ (hình vẽ)

Ta có ΔOMN vuông tại M, suy ra $OI^2=OM^2+IM^2=1+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{19}{14}\Rightarrow OI=\frac{\sqrt{19}}{4}$.

Suy ra I thuộc đường tròn (C_3) tâm O bà kính $r_3=\frac{\sqrt{19}}{4}$.

Khi đó $T=|3z_1+z_2-5i|=|3\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OK}|=|4\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OK}|=|\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OK}|=KE$

Với $\overrightarrow{OE}=4\overrightarrow{OI}$ suy ra E thuộc đường tròn (C_4) tâm $O(0,0)$ bán kính $r_4=\sqrt{19}$.

Suy ra $T_{\max}=KE_{\max}=KO+r_4=5+\sqrt{19}$.

Câu 79: (DE MH BGD 2023 – Câu 42) Xét các số phức z thỏa mãn $|z^2-3-4i|=2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Giá trị của M^2+m^2 bằng

A. 28. **B.** $18+4\sqrt{6}$. **C.** 14. **D.** $11+4\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có:

$2|z|=|z^2-3-4i|\ge\left||z^2|-|3+4i|\right|=\left||z|^2-5\right|$ (vì $|z^2|=|z|^2$). Dấu "=" xảy ra khi

$z^2=k(-3-4i)$.

Suy ra $4|z|^2\ge(|z|-5)^2\Leftrightarrow|z|^4-14|z|^2+25\le0\Leftrightarrow7-2\sqrt{6}\le|z|^2\le7+2\sqrt{6}$.

$\Rightarrow\sqrt{6}-1\le|z|\le\sqrt{6}+1$

Do đó, ta có $M=1+\sqrt{6}$ và $m=\sqrt{6}-1$.

Vậy $M^2+m^2=14$.

Câu 80: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 43] Gọi S là tập hợp các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=6$ và $ab\le0$. Xét z_1 và z_2

thuộc S sao cho $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1+3i|+|z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $3+3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Từ giả thiết suy ra $|a|+|b|=3\Rightarrow a-b=\pm 3$ **(do** $ab\le 0$**)**

Do $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}$ là số thực dương nên $a_1-a_2=-(b_1-b_2)<0$ suy ra $a_1<a_2$ và $a_1+b_1=a_2+b_2$ **(1)**

Nếu $a_1-b_1=a_2-b_2$ thì $z_1=z_2$ **(loại);**

Vậy $a_1-b_1=-(a_2-b_2)$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** suy ra $a_1=b_2$, $a_2=b_1\Rightarrow a_1<a_2=b_1$

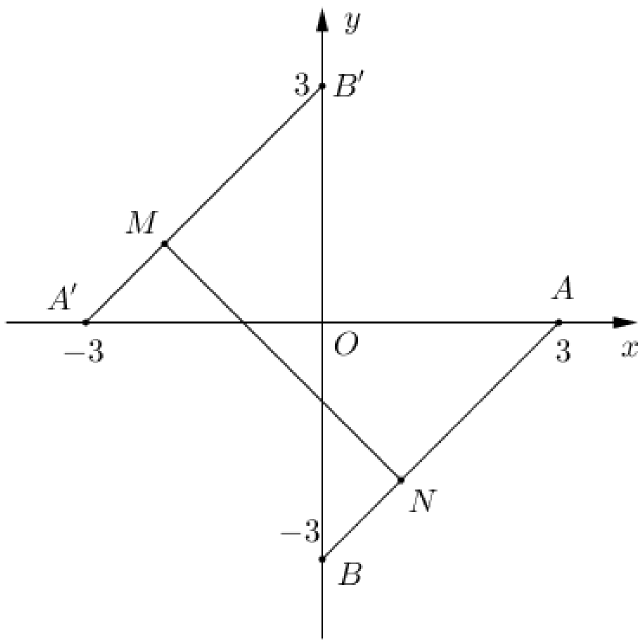
Do đó $a_1-b_1=-3\Rightarrow b_1=a_1+3=x+3$

$\Rightarrow z_1=x+(x+3)i$, $z_2=x+3+xi$

Vậy $|z_1+3i|+|z_2|=\sqrt{x^2+(x+6)^2}+\sqrt{(x+3)^2+x^2}\ge\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-2$.

Cách 2



Từ giả thiết suy ra $|a|+|b|=3\Rightarrow a-b=\pm 3$ **(do** $ab\le 0$**)**

Trên mặt phẳng *Oab*, vẽ 2 đoạn thẳng

: $a-b=3\ (0\le a\le 3)$ với $A(3;0)$, $B(0;-3)$

: $a-b=-3\ (-3\le a\le 0)$ với $A'(-3;0)$, $B'(0;3)$

Gọi $M(a;b)$ biểu diễn cho số phức z_1, $N(a';b')$ biểu diễn cho số phức z_2. Thế thì M, N chạy trên hoặc.

Ta có $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}=\dfrac{1}{2}\left[(b-b')-(a-a')-(a-a')i-(b-b')i\right]$

Do $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}$ là số thực dương nên $\begin{cases}(b-b')-(a-a')>0\\(b-b')+(a-a')=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<a'\\b>b'\\a+b=a'+b'\end{cases}$

Ghi Chú!

Khi đó $M\in[A'B']$, $N\in[AB]$.

Vậy $M(a;a+3)$, $N(a';a'-3)$

Ta có $a+b=a'+b'\Leftrightarrow a+a-3=a'+a'+3\Leftrightarrow a'=a+3$ nên $N(a+3;a)$

Do vậy

$|z_1+3i|+|z_2|=\sqrt{a^2+(a+6)^2}+\sqrt{(a+3)^2+a^2}=\sqrt{(-a)^2+(a+6)^2}+\sqrt{(a+3)^2+(-a)^2}$

$\geq\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a+6}{-a}=\dfrac{-a}{a+3}>0\Leftrightarrow a=-2$.

Câu 81: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 43] Gọi S là tập hợp các số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=6$ và $ab\leq 0$. Xét z_1 và z_2 thuộc S sao cho $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1+3i|+|z_2|$ bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** 3. **C.** $3\sqrt{5}$. **D.** $3+3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Từ giả thiết suy ra $|a|+|b|=3\Rightarrow a-b=\pm3$ **(do** $ab\leq0$**)**

Do $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}$ là số thực dương nên $a_1-a_2=-(b_1-b_2)<0$ suy ra $a_1<a_2$ và $a_1+b_1=a_2+b_2$ **(1)**

Nếu $a_1-b_1=a_2-b_2$ thì $z_1=z_2$ **(loại)**;

Vậy $a_1-b_1=-(a_2-b_2)$ **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** suy ra $a_1=b_2$, $a_2=b_1\Rightarrow a_1<a_2=b_1$

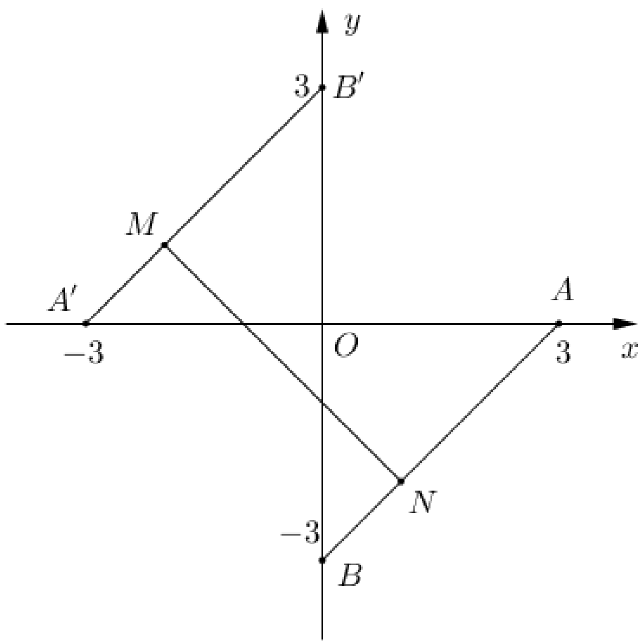
Do đó $a_1-b_1=-3\Rightarrow b_1=a_1+3=x+3$

$\Rightarrow z_1=x+(x+3)i$, $z_2=x+3+xi$

Vậy $|z_1+3i|+|z_2|=\sqrt{x^2+(x+6)^2}+\sqrt{(x+3)^2+x^2}\geq\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=-2$.

Cách 2



Ghi Chú!

Từ giả thiết suy ra $|a|+|b|=3 \Rightarrow a-b=\pm 3$ (do $ab \le 0$)

Trên mặt phẳng Oab, vẽ 2 đoạn thẳng

: $a-b=3\ (0\le a\le 3)$ với $A(3;0)$, $B(0;-3)$

: $a-b=-3\ (-3\le a\le 0)$ với $A'(-3;0)$, $B'(0;3)$

Gọi $M(a;b)$ biểu diễn cho số phức z_1, $N(a';b')$ biểu diễn cho số phức z_2. Thế thì M, N chạy trên hoặc.

Ta có $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}=\dfrac{1}{2}\left[(b-b')-(a-a')-(a-a')i-(b-b')i\right]$

Do $\dfrac{z_1-z_2}{-1+i}$ là số thực dương nên $\begin{cases}(b-b')-(a-a')>0\\(b-b')+(a-a')=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a<a'\\b>b'\\a+b=a'+b'\end{cases}$

Khi đó $M\in[A'B']$, $N\in[AB]$.

Vậy $M(a;a+3)$, $N(a';a'-3)$

Ta có $a+b=a'+b' \Leftrightarrow a+a-3=a'+a'+3 \Leftrightarrow a'=a+3$ nên $N(a+3;a)$

Do vậy

$|z_1+3i|+|z_2|=\sqrt{a^2+(a+6)^2}+\sqrt{(a+3)^2+a^2}=\sqrt{(-a)^2+(a+6)^2}+\sqrt{(a+3)^2+(-a)^2}$

$\ge \sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{a+6}{-a}=\dfrac{-a}{a+3}>0 \Leftrightarrow a=-2$.

Dạng ⑤: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đường tròn

Câu 82: (ĐTK 2018-Câu 46) Xét số phức $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z-4-3i|=\sqrt{5}$. Tính $P=a+b$ khi $|z+1-3i|+|z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất.

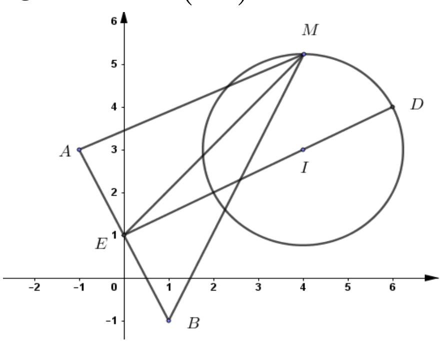
A. $P=10$ **B.** $P=4$ **C.** $P=6$ **D.** $P=8$

Lời giải

Chọn A

Goi E là trung điểm của AB và $M(a;b)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Theo giả thiết ta có: $|z-4-3i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow (a-4)^2+(b-3)^2=5 \Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là đường tròn tâm $I(4;3)$ bán kính $R=\sqrt{5}$



Ta có: $\begin{cases}A(-1;3)\\B(1;-1)\end{cases} \Rightarrow Q=|z+1-3i|+|z-1+i|=MA+MB$

Gọi E là trung điểm của AB, kéo dài EI cắt đường tròn tại D

Ta có: $Q^2=MA^2+MB^2+2MA.MB$

$\Leftrightarrow Q^2\le MA^2+MB^2+MA^2+MB^2=2(MA^2+MB^2)$

Vì ME là trung tuyến trong ΔMAB

$$\Rightarrow ME^2=\frac{MA^2+MB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\Rightarrow MA^2+MB^2=2ME^2+\frac{AB^2}{2}$$

$$\Rightarrow Q^2\le 2\left(2ME^2+\frac{AB^2}{2}\right)=4ME^2+AB^2.$$ Mặt khác

$$ME\le DE=EI+ID=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow Q^2\le 4.\left(3\sqrt{5}\right)^2+20=200$$

$$\Rightarrow Q\le 10\sqrt{2}\Rightarrow Q_{max}=10\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}MA=MB\\M\equiv D\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EI}=2\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\begin{cases}4=2(x_D-4)\\2=2(y_D-3)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=6\\y_D=4\end{cases}\Leftrightarrow\Rightarrow M(6;4)\Rightarrow P=a+b=10$$

Cách 2: Đặt $z=a+bi$. Theo giả thiết ta có: $(a-4)^2+(b-5)^2=5$.

Đặt $\begin{cases}a-4=\sqrt{5}\sin t\\b-3=\sqrt{5}\cos t\end{cases}$. Khi đó:

$$Q=|z+1-3i|+|z-1+i|=\sqrt{(a+1)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+5\right)^2+5\cos^2 t}+\sqrt{\left(\sqrt{5}\sin t+3\right)^2+\left(\sqrt{5}\cos t+4\right)^2}$$

$$=\sqrt{30+10\sqrt{5}\sin t}+\sqrt{30+2\sqrt{5}\left(3\sin t+4\cos t\right)}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$Q\le\sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}\left(2\sin t+\cos t\right)\right)}\le\sqrt{2\left(60+8\sqrt{5}.\sqrt{5}\right)}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow Q\le 10\sqrt{2}\Rightarrow Q_{max}=10\sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\sin t=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \cos t=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\b=4\end{cases}\Rightarrow P=a+b=10.$

Dạng ⑥: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đường elip

Câu 83: (ĐTK 2017-Câu 48) Xét số phức z thỏa mãn $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$. Gọi $m,\ M$ lần lượt là giá trị nhỏ nhất cả giá trị lớn nhất của $|z-1+i|$. Tính $P=m+M$.

A. $P=\sqrt{13}+\sqrt{73}$ **B.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$

C. $P=5\sqrt{2}+\sqrt{73}$ **D.** $P=\dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Gọi A là điểm biểu diễn số phức z, $F_1(-2;1)$, $F_2(4;7)$ và $N(1;-1)$.

Ghi Chú!

Từ $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}$ và $F_1F_2=6\sqrt{2}$ nên ta có A là đoạn thẳng F_1F_2. Gọi H là hình chiếu của N lên F_1F_2, ta có $H\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Suy ra

$P=NH+NF_2=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.

Dạng ⑦: Min-Max liên quan đến quỹ tích là đa giác

Câu 84: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 42] Gọi S là tập hợp các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=2$ và $ab\le 0$. Xét z_1 và z_2 thuộc S sao cho $\frac{z_1-z_2}{-1+i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1|+|z_2-i|$ bằng:

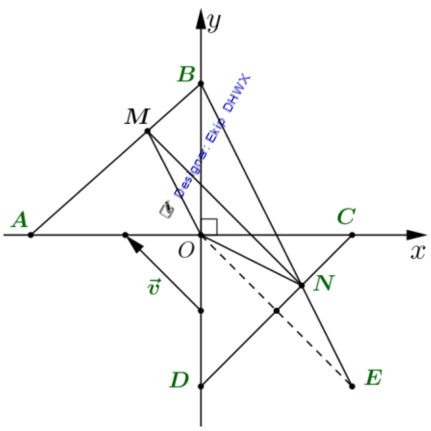
A. $\sqrt{5}$. **B.** $1+\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$.

Khi đó $|z+\overline{z}|+|z-\overline{z}|=2\Leftrightarrow 2|a|+2|b|=2\Leftrightarrow |a|+|b|=1,\ ab\le 0$.



Do $ab\le 0$. nên tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ là hai cạnh hình vuông $ABCD$ với $A(-1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;0)$, $D(0;-1)$

Gọi $M(z_1)$, $N(z_2)$ ta có: $\frac{z_1-z_2}{-1+i}=k$, $(k>0)\Rightarrow \overrightarrow{MN}=k\vec{v}$ với $\vec{v}=(-1;1)$

nên $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{v}\Rightarrow MN\,//\,AD\,//\,BC$

Gọi $E(1;-1)$ là điểm đối xứng với O qua đoạn thẳng CD

Suy ra $P=|z_1|+|z_2-i|=MO+NB=NO+NB=NE+NB\ge BE=\sqrt{5}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $N\equiv N_0=BE\cap CD$.

Vậy $P_{\min}=\sqrt{5}$ khi $E;N;B$ thẳng hàng.

§3- PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Ghi Chú!

Ⓐ Tóm tắt lý thuyết cơ bản

Ghi nhớ!

1. *Căn bậc hai của số phức.*

- Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn thức bậc 2 của w.
- Mỗi số phức $w \neq 0$ 0 có hai căn bậc hai là hai số phức đối nhau (z và –z).
- Trường hợp w là số thực ($w = a \in \mathbb{R}$)
  - Khi a>0 thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.
  - Khi a<0 nên $a = (-a)i^2$, do đó w có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}.i$ và $-\sqrt{-a}.i$

2. ***Phương trình bậc hai trên C .***

- Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c$, với $z \in \mathbb{C}; a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.
- Xét biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$.
  - Nếu $\Delta \neq 0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$, trong đó δ là một căn bậc hai của Δ .
  - Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $z_1 = z_2 = -\dfrac{b}{2a}$.
- ***Đặc biệt:***
- Khi Δ là số thực dương thì phương trình có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Khi Δ là số thực âm thì phương trình có hai nghiệm $z_1 = \dfrac{-+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ và $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
- ***Nhận xét:***
  - Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc 2 đều có 2 nghiệm (không nhất thiết phân biệt)
- ***Định lý Vi-et:*** Phương tình bậc hai $az^2 + bz + c$, với $z \in \mathbb{C}; a,b,c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$ có 2 nghiệm phức:
  - z_1 và z_2 thì: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a} \\ z_1 z_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$.

Ⓑ Dạng toán cơ bản

Ghi Chú!

Dạng ①: Tính toán biểu thức nghiệm

Câu 1: (ĐTK 2017-Câu 18) Kí hiệu z_1; z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+z+1=0$. Tính $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2$.

A. $P=1$ **B.** $P=2$ **C.** $P=-1$ **D.** $P=0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$

$$P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$$

Cách 2: Theo định lí Vi-et: $z_1+z_2=-1$; $z_1.z_2=1$.

Khi đó $P=z_1^2+z_2^2+z_1z_2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2+z_1z_2=1^2-1=0$.

Câu 2: (THPTQG 2017-MĐ102-Câu 17) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-z+1=0$. Tính $P=|z_1|+|z_2|$.

A. $P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $P=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **C.** $P=\frac{2}{3}$ **D.** $P=\frac{\sqrt{14}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $3z^2-z+1=0$ có $\Delta=(-1)^2-4.3.1=-11<0$. Căn bậc hai của Δ là $\pm i\sqrt{11}$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phức phân biệt

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i;\quad z_2=\frac{1-i\sqrt{11}}{6}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i$$

Từ đó suy ra:

$$P=|z_1|+|z_2|=\left|\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|+\left|\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}i\right|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Cách khác: Sử dụng máy tính Casio FX 570ES Plus hỗ trợ tìm nghiệm phương trình bậc 2 sau đó vào môi trường số phức (Mode 2 CMPLX) tính tổng môđun của 2 nghiệm vừa tìm được.

Câu 3: (THPTQG 2017-MĐ103-Câu 17) Ký hiệu z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-z+6=0$ Tính $P=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$.

A. $P=\frac{1}{6}$. **B.** $P=\frac{1}{12}$. **C.** $P=\frac{-1}{6}$. **D.** $P=6$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $z^2 - z + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{23}}{2}i \\ z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{23}}{2}i \end{array}\right.$ suy ra $P = \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{6}$.

Câu 4: (ĐTK 2018-Câu 20) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 3 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$ ta có hai nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ z_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2| = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = \sqrt{3}$.

Câu 5: (ĐTK 2019-Câu 21) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $2\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** 10.

Lời giải

Chọn A

Ta có : $z^2 - 3z + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{3 + \sqrt{11}i}{2} \\ z_2 = \dfrac{3 - \sqrt{11}i}{2} \end{array}\right.$. Suy ra

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{5} \Rightarrow |z_1| + |z_2| = 2\sqrt{5}$.

Câu 6: (THPTQG 2019-MĐ101-Câu 18) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Giá trị $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 16. **B.** 56. **C.** 20. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý Vi-ét ta có $z_1 + z_2 = 6$, $z_1.z_2 = 10$ .Suy ra

$z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1z_2 = 6^2 - 20 = 16$.

Câu 7: (THPTQG 2019-MĐ102-Câu 20) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 36. **B.** 8. **C.** 28. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Ta có : $z^2 - 6z + 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + \sqrt{5}i \\ z = 3 - \sqrt{5}i \end{array}\right. \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = \left(3 + \sqrt{5}i\right)^2 + \left(3 - \sqrt{5}i\right)^2 = 8$.

Câu 8: (THPTQG 2019-MĐ103-Câu 30) Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 26.

Lời giải

Ghi Chú!

Chọn A

$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 5 = -1$

Phương trình có 2 nghiệm phức $z_1 = -2 + i, z_2 = -2 - i$

nên $z_1^2 + z_2^2 = (-2+i)^2 + (-2-i)^2 = 4 - 4i + i^2 + 4 + 4i + i^2 = 8 + 2i^2 = 8 - 2 = 6$

Câu 9: (THPTQG 2019-MĐ104-Câu 20) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

A. 10. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta' = 4 - 7 = -3 = \left(\sqrt{3}i\right)^2$.

Do đó phương trình có hai nghiệm phức là $z_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 2 - \sqrt{3}i$.

Suy ra $z_1^2 + z_2^2 = \left(2 + \sqrt{3}i\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}i\right)^2 = 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$.

Câu 10: (ĐTK 2020-L2-Câu 36) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Môđun của số phức $z_0 + i$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z^2 - 2z + 5 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm 2i$.

Suy ra $z_0 = 1 - 2i \Rightarrow z_0 + i = 1 - i \Rightarrow |z_0 + i| = \sqrt{2}$.

Câu 11: (THPTQG 2020-L1-MĐ103-Câu 33) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1 - z_0$ là

A. $P(-1;-3)$. **B.** $M(-1;3)$. **C.** $N(3;-3)$. **D.** $Q(3;3)$.

Lời giải

Chọn C

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2 + 3i \\ z = -2 - 3i \end{array}\right.$$

Suy ra $z_0 = -2 + 3i \Rightarrow 1 - z_0 = 3 - 3i$.

Vậy điểm biểu diễn cho số phức $1 - z_0$ là $N(3;-3)$.

Câu 12: (THPTQG 2020-L2-MĐ101-Câu 36) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 2 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình $z^2 + z + 2 = 0$, có $\Delta = 1 - 4.1.2 = -7 < 0$.

Suy ra phương trình có hai nghiệm phức $z_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Do đó $|z_1| + |z_2| = \left|\dfrac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\right| + \left|\dfrac{-1 - i\sqrt{7}}{2}\right| = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2}$.

Ghi Chú!

Câu 13: (THPTQG 2020-L2-MĐ102-Câu 31) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $z^2 - z + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = z_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{11}}{2}i \\ z = z_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{11}}{2}i \end{array}\right.$.

Suy ra $|z_1| + |z_2| = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{11}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{3}$.

Câu 14: (THPTQG 2020-L2-MĐ103-Câu 26) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $z^2 - z + 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$.

Do đó: $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$, (vì) $|z_1| = |z_2|$.

Câu 15: (THPTQG 2020-L2-MĐ104-Câu 34) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có $z^2 + z + 3 = 0 \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{11}}{2}i$. Suy ra $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{3}$

Câu 16: (TN BGD 2022-MD101) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 6 = 0$. Khi đó $z_1 + z_2 + z_1 z_2$ bằng:

A. 7. **B.** 5. **C.** -7. **D.** -5.

Lời giải

Chọn B

Vì phương trình $z^2 + z + 6 = 0$ có hai nghiệm z_1 và z_2. Theo định lí Vi-et, ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -1 \\ z_1 z_2 = 6 \end{cases}$. Do đó: $z_1 + z_2 + z_1 z_2 = -1 + 6 = 5$.

Câu 17: (DE TN BGD 2022 - MD 102) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 6 = 0$. Khi đó $z_1 + z_2 + z_1.z_2$ bằng

A. -5. **B.** -7. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

$z_1+z_2+z_1.z_2=(z_1+z_2)+(z_1.z_2)=\frac{-1}{1}+\frac{6}{1}=5$ (áp dụng định lý Vi-et).

Câu 18: (DE TN BGD 2022-MD 103) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Khi đó $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** $8i$. **C.** $-8i$. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $z^2-2z+5=0$ có nghiệm là $z_1=1-2i$ và $z_2=1+2i$ nên ta có:

$z_1^2+z_2^2=(1+2i)^2+(1-2i)^2=-6$.

Câu 19: (DE TN BGD 2022-MD 104) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Khi đó $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 6. **B.** $-8i$. **C.** $8i$. **D.** -6.

Lời giải

Chọn D

Vì z_1,z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$ nên ta có:

$$\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a}=2 \\ z_1.z_2=\frac{c}{a}=5 \end{cases}.$$

Ta có: $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2.z_1.z_2=2^2-2.5=-6$.

Câu 20: (DE MH BGD 2023 - Câu 45) Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2-2(m+1)z+m^2=0$ (m là số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1|+|z_2|=2$?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\Delta'=2m+2$

TH1: $\Delta'<0\Leftrightarrow m<-1$.

Phương trình có hai nghiệm phức, khi đó: $|z_1|=|z_2|=\sqrt{\frac{c}{a}}=\sqrt{m^2}$.

Suy ra: $2\sqrt{m^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1\ (l) \end{array}\right.$.

TH2: $\Delta'>0\Leftrightarrow m>-1$.

Vì $a.c=m^2\ge 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_1.z_2\ge 0$ hoặc $z_1.z_2\le 0$.

Suy ra: $|z_1|+|z_2|=2\Leftrightarrow|z_1+z_2|=2\Leftrightarrow|2m+2|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=-2\ (l) \\ m=0 \end{array}\right.$.

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 21: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 46] Trên tập số phức, xét phương trình $z^2+az+b=0$ $(a,b\in\mathbb{R})$. Có bao nhiêu cặp số (a,b) để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-2|=2$ và $|z_2+1-4i|=4$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta = a^2 - 4b$

TH1. $\Delta > 0 \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$$|z_1 - 2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 - 2 = 2 \\ z_1 - 2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 4 \\ z_1 = 0 \end{array}\right.$$

$$|z_2 + 1 - 4i| = 4 \Rightarrow (z_2 + 1)^2 + 16 = 16 \Leftrightarrow z_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -1.$$

Với $z_1 = 4, z_2 = -1$ có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3\ (\text{tm}) \\ b = -4\ (\text{tm}) \end{cases}$

Với $z_1 = 0, z_2 = -1$ có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1\ (\text{tm}) \\ b = 0\ (\text{tm}) \end{cases}$

Vậy TH1 có 2 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn.

TH2. $\Delta < 0 \Rightarrow \begin{cases} z_1 = x + yi \\ z_2 = x - yi \end{cases}$

Vì $\begin{cases} |z_1 - 2| = 2 \\ |z_2 + 1 - 4i| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + yi - 2| = 2 \\ |x - yi + 1 - 4i| = 4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4 \\ (x+1)^2 + (y+4)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0\ (1) \\ x^2 + y^2 + 2x + 8y + 1 = 0\ (2) \end{cases}$$

Lấy **(2)** – **(1)** vế theo vế ta được: $6x + 8y + 1 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-6x-1}{8}$

$$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{6x+1}{8}\right)^2 - 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow 100x^2 - 244x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{61 + 4\sqrt{231}}{50} \\ x_2 = \dfrac{61 - 4\sqrt{231}}{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \dfrac{-416 - 24\sqrt{231}}{400} \\ y_2 = \dfrac{-416 + 24\sqrt{231}}{400} \end{cases}$$

Vậy TH2 có 2 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn.

Vậy có 4 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn.

Câu 22: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 46] Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Có bao nhiêu cặp số (a,b) để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - 2| = 2$ và $|z_2 + 1 - 4i| = 4$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta = a^2 - 4b$

TH1. $\Delta > 0 \Rightarrow z_1, z_2 \in \mathbb{R}$

$$|z_1 - 2| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 - 2 = 2 \\ z_1 - 2 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = 4 \\ z_1 = 0 \end{array}\right.$$

$$|z_2 + 1 - 4i| = 4 \Rightarrow (z_2 + 1)^2 + 16 = 16 \Leftrightarrow z_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_2 = -1.$$

Với $z_1 = 4, z_2 = -1$ có $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a \\ z_1 z_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3\ (\text{tm}) \\ b = -4\ (\text{tm}) \end{cases}$

Với $z_1=0, z_2=-1$ có $\begin{cases} z_1+z_2=-a \\ z_1z_2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\ (\text{tm}) \\ b=0\ (\text{tm}) \end{cases}$

Vậy TH1 có 2 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn.

TH2. $\Delta<0 \Rightarrow \begin{cases} z_1=x+yi \\ z_2=x-yi \end{cases}$

Vì $\begin{cases} |z_1-2|=2 \\ |z_2+1-4i|=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+yi-2|=2 \\ |x-yi+1-4i|=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+y^2=4 \\ (x+1)^2+(y+4)^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4x=0\ (1) \\ x^2+y^2+2x+8y+1=0\ (2) \end{cases}$

Lấy **(2)** – **(1)** vế theo vế ta được: $6x+8y+1=0 \Rightarrow y=\dfrac{-6x-1}{8}$

$\Rightarrow x^2+\left(\dfrac{6x+1}{8}\right)^2-4x=0$

$\Leftrightarrow 100x^2-244x+1=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{61+4\sqrt{231}}{50} \\ x_2=\dfrac{61-4\sqrt{231}}{50} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=\dfrac{-416-24\sqrt{231}}{400} \\ y_2=\dfrac{-416+24\sqrt{231}}{400} \end{cases}$

Vậy TH2 có 2 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn.

Vậy có 4 cặp số $(a;b)$ thỏa mãn.

Câu 23: [MD 103-TN BGD 2023-CÂU 45] Trên tập số phức xét phương trình $z^2+az+b=0\ (a,b\in\mathbb{R})$. Có bao nhiêu cặp số thực (a,b) để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1-1|=2, |z_2-3-2i|=3$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta=a^2-4b$

Trường hợp 1: $\Delta>0 \Leftrightarrow a^2-4b>0$ phương trình có hai nghiệm thực phân biệt z_1,z_2. Khi đó:

$|z_1+1|^2=4 \Leftrightarrow (z_1+1)^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1+1=2 \\ z_1+1=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=1 \\ z_1=-3 \end{array}\right.$.

$|z_2-3-2i|=3 \Leftrightarrow (z_2-3)^2+(-2)^2=9 \Leftrightarrow (z_2-3)^2=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_2=3+\sqrt{5} \\ z_2=2-\sqrt{5} \end{array}\right.$

Vậy có 4 cặp nghiệm (z_1,z_2) nên có 4 cặp (a,b) tương ứng.

Trường hợp 2: $\Delta<0 \Leftrightarrow a^2-4b<0$. Khi đó, phương trình có 2 nghiệm phức liên hợp

$z_1=x+yi,\ z_2=x-yi\ (x,y\in\mathbb{R})$

$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=4 \\ (x-3)^2+(y-2)^2=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x=3 \\ x^2+y^2-6x-4y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+4y-7=0\ (d) \\ x^2+y^2-2x-3=0\ (C) \end{cases}\ (I)$

Ghi Chú!

Xét đường tròn (C): Tâm $I(1;0), R=2$

Ta có $d(I;d)=\dfrac{|4-7|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}<R=2$

Suy ra đường thẳng d và đường tròn (C) có 2 điểm chung. Nên hệ (I) có 2 nghiệm phân biệt. Suy ra có 2 cặp (z_1,z_2) nên có 2 cặp (a,b) tương ứng.

Vậy có 6 cặp (a,b) thỏa mãn.

Câu 24: **[MD 104-TN BGD 2023-CÂU 43]** Gọi S là tập hợp các số phức $z=a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $|z+\bar{z}|+|z-\bar{z}|=8$ và $ab\geq 0$. Xét z_1 và z_2 thuộc S sao cho $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là số thực dương. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|z_1+4i|+|z_2|$ bằng

A. 4. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $4+4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $|a|+|b|=4\Rightarrow a+b=\pm 4$ (do $ab\geq 0$)

Đặt $z_1=a_1+ib_1, z_2=a_2+ib_2; (a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R})$.

Do $\dfrac{z_1-z_2}{1+i}$ là số thực dương nên $a_1-a_2=b_1-b_2$ và $a_1+b_1>a_2+b_2$

Do đó $a_1+b_1=4\Rightarrow\begin{cases}a_2=a_1-4\\ b_2=a_1\end{cases}$

$\Rightarrow z_1=x+(4-x)i$, $z_2=x-4+xi$

Vậy $|z_1+4i|+|z_2|=\sqrt{x^2+(8-x)^2}+\sqrt{(x-4)^2+x^2}\geq\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$

Dấu "=" xảy ra khi $x=\dfrac{8}{3}$.

Câu 25: **[MD 104-TN BGD 2023-CÂU 46]** Trên tập số phức, xét phương trình $z^2+az+b=0$ $a,b\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu cặp số a,b để phương trình đó có hai nghiệm phân biệt $z_1;z_2$ thỏa mãn $|z_1-1|=2$ và $|z_2-2+3i|=3$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

$z^2+az+b=0$

$\Delta=a^2-4b$.

Trường hợp 1: $\Delta>0$, phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

Khi đó ta có $\begin{cases}|z_1-1|=2\\ |z_2-2+3i|=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}z_1-1=2\\ z_1-1=-2\end{array}\right.\\ \sqrt{(z_2-2)^2+9}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}z_1=3\\ z_1=-1\end{array}\right.\\ z_2=2\end{cases}$

Nếu $\begin{cases}z_1=3\\ z_2=2\end{cases}$, khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases}a=-(z_1+z_2)=-5\\ b=z_1.z_2=6\end{cases}$ (nhận)

Ghi Chú!

Nếu $\begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = 2 \end{cases}$, khi đó theo Viet ta có: $\begin{cases} a = -(z_1 + z_2) = -1 \\ b = z_1.z_2 = -2 \end{cases}$ (nhận)

Trường hợp $\Delta < 0$, phương trình có 2 nghiệm không thực. Khi đó ta có $z_2 = \overline{z_1}$.

Gọi $z_1 = x + yi \quad (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z_2 = x - yi$.

Ta có $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ 2x + 6y = 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{25+9\sqrt{15}}{20} \\ y = \dfrac{15-3\sqrt{15}}{20} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{25-9\sqrt{15}}{20} \\ y = \dfrac{15+3\sqrt{15}}{20} \end{cases} \end{array}\right.$. Do đó ta có. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z_1 = \dfrac{25+9\sqrt{15}}{20} + \dfrac{15-3\sqrt{15}}{20}i \\ z_2 = \dfrac{25+9\sqrt{15}}{20} - \dfrac{15-3\sqrt{15}}{20}i \end{cases} \\ \begin{cases} z_1 = \dfrac{25-9\sqrt{15}}{20} + \dfrac{15+3\sqrt{15}}{20}i \\ z_2 = \dfrac{25-9\sqrt{15}}{20} - \dfrac{15+3\sqrt{15}}{20}i \end{cases} \end{array}\right.$.

Nếu $\begin{cases} z_1 = \dfrac{25+9\sqrt{15}}{20} + \dfrac{15-3\sqrt{15}}{20}i \\ z_2 = \dfrac{25+9\sqrt{15}}{20} - \dfrac{15-3\sqrt{15}}{20}i \end{cases}$, ta có $\begin{cases} a = -\dfrac{25+9\sqrt{15}}{20} \\ b = \dfrac{55+9\sqrt{15}}{10} \end{cases}$ (nhận)

Nếu $\begin{cases} z_1 = \dfrac{25-9\sqrt{15}}{20} + \dfrac{15+3\sqrt{15}}{20}i \\ z_2 = \dfrac{25-9\sqrt{15}}{20} - \dfrac{15+3\sqrt{15}}{20}i \end{cases}$, ta có $\begin{cases} a = -\dfrac{25-9\sqrt{15}}{20} \\ b = \dfrac{55-9\sqrt{15}}{10} \end{cases}$ (Nhận)

Dạng ②: Định lí Viet và ứng dụng

Câu 26: (THPTQG 2017-MĐ101-Câu 22) Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1+\sqrt{2}i$ và $1-\sqrt{2}i$ là nghiệm.

A. $z^2 + 2z + 3 = 0$ **B.** $z^2 - 2z - 3 = 0$

C. $z^2 - 2z + 3 = 0$ **D.** $z^2 + 2z - 3 = 0$

Lời giải

Chọn C

Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} z_1 + z_2 = 2 \\ z_1.z_2 = 3 \end{cases}$, do đó z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 3 = 0$

Ghi Chú!

Dạng ③: Phương trình quy về bậc hai, phương trình bậc cao

Câu 27: (ĐMH 2017-Câu 33) Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

A. $T = 4$ **B.** $T = 2\sqrt{3}$ **C.** $T = 4 + 2\sqrt{3}$ **D.** $T = 2 + 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C

$$z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -3 \\ z^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm i\sqrt{3} \\ z = \pm 2 \end{array}\right.$$

$$T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = |i\sqrt{3}| + |i\sqrt{3}| + |-2| + |2| = 2\sqrt{3} + 4.$$

Dạng ④: Các bài toán biểu diễn hình học nghiệm của phương trình

Câu 28: (THPTQG 2017-MĐ104-Câu 17) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

A. $T = \sqrt{2}$ **B.** $T = 2$ **C.** $T = 8$ **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Ta có: $z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{array}\right.$

Suy ra $M(0;-2); N(0;2)$ nên $T = OM + ON = \sqrt{(-2)^2} + \sqrt{2^2} = 4$.

Câu 29: (THPTQG 2020-L1-MĐ101-Câu 31) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $N(-2;2)$. **B.** $M(4;2)$. **C.** $P(4;-2)$. **D.** $Q(2;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$ có 2 nghiệm phức là $-3 + 2i$ và $-3 - 2i$.

Vì z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương nên $z_0 = -3 + 2i$.

Ta có $1 - z_0 = 1 - (-3 + 2i) = 4 - 2i$. Vậy điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là $P(4;-2)$.

Câu 30: (THPTQG 2020-L1-MĐ102-Câu 38) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

A. $M(-2;2)$. **B.** $Q(4;-2)$. **C.** $N(4;2)$. **D.** $P(-2;-2)$.

Lời giải

Chọn D

Phương trình $z^2 - 6z + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3 + 2i \\ z = 3 - 2i \end{array}\right.$ suy ra $z_0 = 3 + 2i$, khi đó $1 - z_0 = -2 - 2i$

Ghi Chú!

Vậy điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $P(-2;-2)$.

Câu 31: (THPTQG 2020-L1-MĐ104-Câu 33) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2-4z+13=0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là

A. $M(3;-3)$. **B.** $P(-1;3)$. **C.** $Q(1;3)$. **D.** $N(-1;-3)$.

Lời giải

Chọn D

$$z^2-4z+13=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+3i \\ z=2-3i \end{array}\right.$$

Vậy $z_0=2+3i$.

$1-z_0=1-(2+3i)=-1-3i$.

Suy ra điểm biểu diễn số phức $1-z_0$ là $N(-1;-3)$.

Câu 32: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 36] Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+14=0$ và M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trên mặt phẳng GTạ độ.Trung điểm của đoạn MN có GTạ độ là

A. $(3;7)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;7)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $z^2-6z+14=0$

Có $\Delta'=9-14=-5=5i^2$

Suy ra $\sqrt{\Delta'}=\sqrt{5i^2}=i\sqrt{3}$

Phương trình có 2 nghiệm là $z_1=3+i\sqrt{3}; z_2=3-i\sqrt{3}$

Tọa độ $M\left(3;\sqrt{3}\right); N\left(3;-\sqrt{3}\right)$

Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là $(3;0)$.

Câu 33: [MD 101-TN BGD 2023 - CÂU 36] Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+14=0$ và M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trên mặt phẳng GTạ độ.Trung điểm của đoạn MN có GTạ độ là

A. $(3;7)$. **B.** $(-3;0)$. **C.** $(3;0)$. **D.** $(-3;7)$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $z^2-6z+14=0$

Có $\Delta'=9-14=-5=5i^2$

Suy ra $\sqrt{\Delta'}=\sqrt{5i^2}=i\sqrt{3}$

Phương trình có 2 nghiệm là $z_1=3+i\sqrt{3}; z_2=3-i\sqrt{3}$

Tọa độ $M\left(3;\sqrt{3}\right); N\left(3;-\sqrt{3}\right)$

Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là $(3;0)$.

Câu 34: [MD 104-TN BGD 2023-CÂU 34] Gọi z_1,z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-6z+14=0$ và M,N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1,z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là

A. $(-3;0)$. **B.** $(3;0)$. **C.** $(3;7)$. **D.** $(-3;7)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta' = 9 - 14 = -5$ có một căn bậc hai là $i\sqrt{5}$ do đó phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 3 + i\sqrt{5}$ và $z_2 = 3 - i\sqrt{5}$.

Suy ra tọa độ các điểm biểu diễn của z_1, z_2 lần lượt là $M\left(3;\sqrt{5}\right), N\left(3;-\sqrt{5}\right)$.

Vậy trung điểm của đoạn thẳng MN có tọa độ là $(3;0)$.

Câu 35: (TN BGD 2022-MD101) Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2|z_3| = 2$ và $8(z_1 + z_2)z_3 = 3z_1z_2$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\dfrac{\sqrt{55}}{32}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{55}}{16}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{55}}{44}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{55}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|z_1| = |z_2| = 2 \Rightarrow OA = OB = 2$; $|z_3| = 1 \Rightarrow OC = 1$.

$+) 8(z_1 + z_2)z_3 = 3z_1z_2 \Leftrightarrow 8(z_1 + z_2) = 3\dfrac{z_1z_2}{z_3} \Leftrightarrow 8|z_1 + z_2| = 3\left|\dfrac{z_1z_2}{z_3}\right|$

$\Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \dfrac{3}{2}$.

Gọi H là trung điểm của AB, biểu diễn số phức $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$, ta có:

$OH = \left|\dfrac{z_1 + z_2}{2}\right| = \dfrac{3}{4}$

+) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \dfrac{\sqrt{55}}{2} \Rightarrow AB = \dfrac{\sqrt{55}}{2}$.

+) $8(z_1 + z_2)z_3 = 3z_1z_2 \Leftrightarrow 8z_1z_3 + 8z_2z_3 = 3z_1z_2 \Leftrightarrow z_1z_3 + z_2z_3 = \dfrac{3}{8}z_1z_2$

Đặt $2a = \dfrac{3}{8}$, suy ra: $z_1z_3 + z_2z_3 = 2az_1z_2 \Leftrightarrow z_1(z_3 - az_2) = (az_1 - z_3)z_2$

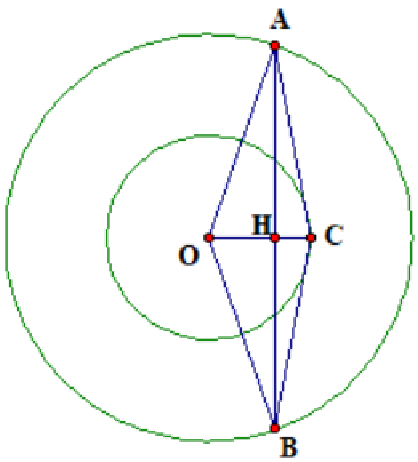
$\Rightarrow |z_1||z_3 - az_2| = |az_1 - z_3||z_2|$

$\Leftrightarrow |z_3 - az_2|^2 = |az_1 - z_3|^2 \Leftrightarrow z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 = z_1\overline{z_3} + \overline{z_1}z_3 = b$

$AC^2 = |z_3 - z_1|^2 = |z_3|^2 + |z_1|^2 - \left(z_1\overline{z_3} + \overline{z_1}z_3\right) = 5 - b$.

$BC^2 = |z_3 - z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_2|^2 - \left(z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3\right) = 5 - b$.

Suy ra: $AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow AC = BC$ hay tam giác ABC cân tại C.



Ghi Chú!

$CH = OC - OH = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.CH = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{55}}{2}.\frac{1}{4} = \frac{\sqrt{55}}{16}$.

Câu 36: **(DE TN BGD 2022 - MD 102)** Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = 2|z_3| = 2$ và $3z_1z_2 = 4z_3(z_1 + z_2)$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

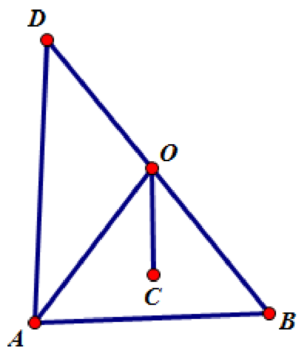
Lời giải

Chọn A

Ta có

$3z_1z_2 = 4z_3(z_1 + z_2) \Rightarrow |3z_1z_2| = |4z_3(z_1 + z_2)| \Leftrightarrow |3z_1z_2| = |4z_3(z_1 - (-z_2))|$

$\Leftrightarrow |z_1 - (-z_2)| = 3$.



Lấy D đối (DE TN BGD 2022 - MD 102)ứng với B qua O, suy ra D biểu diễn $(-z_2)$.

Ta có $|z_1 - (-z_2)| = 3 \Leftrightarrow AD = 3$.

ΔABD có trung tuyến $AO = \frac{1}{2}BD$ nên ΔABD vuông tại A

$\Rightarrow AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{7}$.

+ $3z_1z_2 = 4z_3(z_1 + z_2) \Leftrightarrow z_1(3z_2 - 4z_3) = 4z_2z_3$

$\Rightarrow |z_1||3z_2 - 4z_3| = |4z_2z_3|$

$\Rightarrow |3z_2 - 4z_3| = 4 \Leftrightarrow |3\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}| = 4$

$\Leftrightarrow 9OB^2 + 16OC^2 - 24OB.OC.\cos BOC = 16$

$\Leftrightarrow \cos BOC = \frac{3}{4}$.

Áp dụng định lí cosin cho ΔBOC ta có:

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2 - 2OB.OC.\cos BOC} = \sqrt{4 + 1 - 4.\frac{3}{4}} = \sqrt{2}$.

Tương tự ta tính được $AC = \sqrt{2}$.

Vậy $S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Ghi Chú!

Câu 37: (DE TN BGD 2022-MD 103) Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $2|z_1| = 2|z_2| = |z_3| = 2$ và $(z_1 + z_2)z_3 = 3z_1z_2$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{5\sqrt{7}}{8}$. **B.** $\frac{5\sqrt{7}}{16}$. **C.** $\frac{5\sqrt{7}}{24}$. **D.** $\frac{5\sqrt{7}}{32}$.

Lời giải

Chọn B

Không mất tính tổng quát, giả sử $z_3 = 2$.

Khi đó $(z_1 + z_2)z_3 = 3z_1z_2$ trở thành $2(z_1 + z_2) = 3z_1z_2 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{3}{2}$.

Đặt $\frac{1}{z_1} = x + yi \; (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \frac{1}{z_2} = \left(\frac{3}{2} - x\right) - yi$.

Ta có $z_3 = 2$ và $2|z_1| = 2|z_2| = |z_3| = 2$ nên $|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z_1}\right| = \left|\frac{1}{z_2}\right| = 1$.

Suy ra $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{7}}{4} \\ y = -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} - x = \frac{3}{4} \\ \left[\begin{array}{l} -y = -\frac{\sqrt{7}}{4} \\ -y = +\frac{\sqrt{7}}{4} \end{array}\right. \end{cases}$

Do đó $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i; z_1 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$.

Nên tọa độ các điểm là $A\left(\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{7}}{4}\right); B\left(\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right); C(2;0)$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.d(C;AB) = \frac{1}{2}.2.\frac{\sqrt{7}}{4}.\left(2 - \frac{3}{4}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{16}$.

Câu 38: (DE TN BGD 2022-MD 104) Cho các số phức z_1, z_2, z_3 thỏa mãn $2|z_1| = 2|z_2| = |z_3| = 2$ và $(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2$. Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của z_1, z_2, z_3 trên mặt phẳng tọa độ. Diện tích tam giác ABC bằng

A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

- Từ giả thiết ta được $|z_1| = |z_2| = 1$ và $|z_3| = 2$.

- Theo giả thiết $(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2 \Rightarrow |z_1 + z_2||z_3| = 2|z_1||z_2| \Rightarrow |z_1 + z_2| = 1$.

- Từ đẳng thức

$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{3} \Rightarrow AB = \sqrt{3}.$

- Theo giả thiết $(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)z_3 = 2(z_1 - z_3)z_2$

$\Rightarrow |z_1 - z_2||z_3| = 2|z_1 - z_3||z_2|$

$\Rightarrow |z_1 - z_3| = \sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{3}.$

- Theo giả thiết $(z_1 + z_2)z_3 = 2z_1z_2 \Leftrightarrow (z_3 - z_2)z_1 = (z_1 - z_3)z_2$

$\Rightarrow |z_3 - z_2||z_1| = |z_1 - z_3||z_2|$

$\Rightarrow |z_3 - z_2| = \sqrt{3} \Rightarrow BC = \sqrt{3}$.

Suy ra tam giác ABC đều cạnh $\sqrt{3}$. Suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Dạng ⑤: Các bài toán khác về phương trình

Câu 39: (THPTQG 2021-L1-MĐ101-Câu 43) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 7$?

A. 2. **B.** 3.
C. 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m+1$.

+) Nếu $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\dfrac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó $|z_0| = 7 \Leftrightarrow z_0 = \pm 7$.

Thế $z_0 = 7$ vào phương trình ta được: $m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \pm \sqrt{14}$ (nhận).

Thế $z_0 = -7$ vào phương trình ta được: $m^2 + 14m + 63 = 0$, phương trình này vô nghiệm.

+) Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ thỏa $z_2 = \overline{z_1}, |z_1| = |z_2| = 7$. Khi đó $z_1.z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 7^2$ hay $m = 7$ (loại) hoặc $m = -7$ (nhận).

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của m là $m = 7 \pm \sqrt{14}$ và $m = -7$.

Câu 40: (THPTQG 2021-L1-MĐ102-Câu 48) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thỏa mãn $|z_0| = 5$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta' = 2m+1$.

- **TH1**: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ thì $z_0 = \dfrac{1}{2}$, suy ra $m = -\dfrac{1}{2}$ (loại).
- **TH2:** $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$ thì $z_0 = m + 1 + \sqrt{|2m+1|}.i$ hoặc $z_0 = m + 1 - \sqrt{|2m+1|}.i$.

Theo đề bài $|z_0| = 5 \Rightarrow (m+1)^2 + (-2m-1) = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \quad (L) \\ m = -5 \ (N) \end{array}\right.$.

- **TH 3:** $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt

Theo đề bài $|z_0| = 5 \Leftrightarrow z_0 = \pm 5$.

Khi $z_0 = 5$: thế vào phương trình ta được $m^2 - 10m + 15 = 0 \Leftrightarrow m = 5 \pm \sqrt{10}$ (nhận).

Ghi Chú!

Khi $z_0 = -5$: thế vào phương trình ta được $m^2 + 10m + 35 = 0$ vô nghiệm.
Vậy có ba giá trị của m.

Câu 41: (THPTQG 2021-L1-MĐ103-Câu 48) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_o thõa mãn $|z_o| = 8$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\Delta = 8m + 4$.

Trường hợp 1: $\Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$ suy ra phương trình có 2 nghiệm thực $\Rightarrow z_o$ là nghiệm thực

$|z_o| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_o = 8 \\ z_o = -8 \end{array}\right.$ thay vào phương trình

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 16m + 48 = 0 => \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = 12 \end{array}\right.(T/M) \\ m^2 + 16m + 80 = 0 (VN) \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$ suy ra phương trình sẽ có 2 nghiệm phức, vì z_o là nghiệm nên suy ra $\overline{z_o}$ cũng là nghiệm

$$|z_o| = 8 \Rightarrow |z_o|^2 = 64 \Leftrightarrow z_o.\overline{z_o} = 64 \Leftrightarrow m^2 = 64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 8 \\ m = -8 \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện nên ta nhận $m = -8$.
Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn.

Câu 42: (THPTQG 2021-L1-MĐ104-Câu 45) Trên tập hợp các số phức, xét phương trình $z^2 - 2(m+1)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đó có nghiệm z_0 thoả mãn $|z_0| = 6$?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\Delta' = (m+1)^2 - m^2 = 2m + 1$.

+) Nếu $\Delta' \ge 0 \Leftrightarrow 2m + 1 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm thực. Khi đó $|z_0| = 6 \Leftrightarrow z_0 = \pm 6$.

* Thay $z_0 = 6$ vào phương trình ta được

$36 - 12(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 6 \pm 2\sqrt{3}$ (thoả mãn).

* Thay $z_0 = -6$ vào phương trình ta được

$36 + 12(m+1) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 12m + 48 = 0$ (vô nghiệm).

Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm phức $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ thỏa $z_2 = \overline{z_1}, |z_1| = |z_2| = 6$. Khi đó $z_1.z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 6^2$ hay $m = 6$ (loại) hoặc $m = -6$ (nhận).

Vậy tổng cộng có 3 giá trị của m là $m = 6 \pm 2\sqrt{3}$ và $m = -6$.

Ghi Chú!