

NGUYỄN VĂN HOÀNG

TÀI LIỆU LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

TOÁN

NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN – SỐ PHỨC

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH OXYZ

HỌC KỲ 2

Năm học: 2020 - 2021

HỌ VÀ TÊN:.....

LỚP:.....

“Trên con đường thành công không có dấu chân của kẻ LƯỜI BIẾNG”

MỤC LỤC



Chuyên đề 1: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG 1

§1- NGUYÊN HÀM	1
A. Khái niệm nguyên hàm	1
B. Tính chất	1
▢ Dạng 1.1: Nguyên hàm cơ bản có điều kiện	9
▢ Dạng 1.2: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số	11
▢ Dạng 1.3: Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ	16
▢ Dạng 1.4: Nguyên hàm từng phần	18
§2- TÍCH PHÂN	23
A. Khái niệm tích phân	23
B. Tính chất của tích phân	23
▢ Dạng 2.5: Tích phân cơ bản & tính chất tích phân	23
▢ Dạng 2.6: Tích phân cơ bản có điều kiện	43
▢ Dạng 2.7: Tích phân hàm số hữu tỷ	47
▢ Dạng 2.8: Tích phân đổi biến	52
▢ Dạng 2.9: Tích phân từng phần	63
§3- ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN	69
A. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN	69
▢ Dạng 3.10: Ứng dụng tích phân để tìm diện tích	69
B. BÀI TẬP MỨC 5 - 6 ĐIỂM	84
▢ Dạng 3.11: Ứng dụng tích phân để tìm thể tích	84
C. BÀI TẬP MỨC 7-8 ĐIỂM	92

Chuyên đề 2: SỐ PHỨC 105

§1- SỐ PHỨC	105
A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN	105
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP MỨC 5-6 ĐIỂM	106
▢ Dạng 1.12: Xác định các yếu tố cơ bản của số phức	106
▢ Dạng 1.13: Biểu diễn hình học cơ bản của số phức	113
▢ Dạng 1.14: Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia cơ bản của số phức ..	120

<i>▮ Dạng 1.15: Phương trình bậc hai trên tập số phức</i>	132
C. CÁC DẠNG BÀI TẬP MỨC 7-8 ĐIỂM	141
<i>▮ Dạng 1.16: Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K</i>	143
<i>▮ Dạng 1.17: Tập hợp điểm biểu diễn số phức</i>	146
Chuyên đề 3: KIẾN THỨC LỚP 11	160
§1- QUY TẮC ĐỀM	160
A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN	160
B. BÀI TẬP ÔN LUYỆN	160
§2- CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN	173
A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN	173
B. BÀI TẬP ÔN LUYỆN	173
Chuyên đề 4: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN .	186
§1- HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN	186
A. Định nghĩa hệ trục tọa độ	186
B. Tọa độ véc-tơ	186
C. Tọa độ điểm	187
D. Tích có hướng của hai véc-tơ	187
E. Phương trình mặt cầu	188
<i>▮ Dạng 1.18: Nhóm bài toán liên quan đến hình chiếu, điểm đối xứng của điểm lên trục, lên mặt phẳng tọa độ</i>	189
<i>▮ Dạng 1.19: Bài toán liên quan đến véc-tơ và độ dài đoạn thẳng</i>	194
<i>▮ Dạng 1.20: Bài toán liên quan đến trung điểm tọa độ trọng tâm</i>	200
<i>▮ Dạng 1.21: Nhóm bài toán liên quan đến tích vô hướng của hai véc-tơ</i>	205
<i>▮ Dạng 1.22: Nhóm bài toán liên quan đến tích có hướng của hai véc-tơ</i>	211
<i>▮ Dạng 1.23: Xác định các yếu tố cơ bản của mặt cầu</i>	216
<i>▮ Dạng 1.24: Viết phương trình mặt cầu loại cơ bản</i>	225
§2- PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG	234
A. Kiến thức cơ bản cần nhớ	234
<i>▮ Dạng 2.25: Xác định các yếu tố của mặt phẳng</i>	237
<i>▮ Dạng 2.26: Viết phương trình mặt phẳng</i>	244
<i>▮ Dạng 2.27: Điểm thuộc mặt phẳng</i>	265
<i>▮ Dạng 2.28: Khoảng cách từ điểm đến mặt</i>	269

§3 - PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG	285
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ	285
📁 Dạng 3.29: Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng	288
📁 Dạng 3.30: Góc	295
📁 Dạng 3.31: Khoảng cách	299
📁 Dạng 3.32: Viết phương trình đường thẳng	304
📁 Dạng 3.33: Xác định phương trình mặt phẳng có yếu tố đường thẳng	328
📁 Dạng 3.34: Xác định phương trình đường thẳng	336
§4 - ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN	369
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ	369
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP	369
📁 Dạng 4.35: Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để tìm GÓC	369
📁 Dạng 4.36: Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để tìm KHOẢNG CÁCH	372
📁 Dạng 4.37: Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để tìm THỂ TÍCH, BÁN KÍNH	373

§1. NGUYÊN HÀM

A. KHÁI NIỆM NGUYÊN HÀM

⇨ **Định nghĩa 1.1.** Cho hàm số $f(x)$ xác định trên \mathcal{K} . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in \mathcal{K}$.

⇨ **Định lý 1.1.** Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} thì mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathcal{K} đều có dạng $F(x) + C$, với C là một hằng số.

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

B. TÍNH CHẤT

- $\int f'(x) dx = f(x) + C$, $\int f''(x) dx = f'(x) + C$, $\int f'''(x) dx = f''(x) + C \dots$
- $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ (k là một hằng số khác 0).
- $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.
- $F'(x) = f(x)$ (định nghĩa).

Bảng nguyên hàm một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy ý)

• $\int 0 dx = C$	→ • $\int k dx = kx + C$
• $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	→ • $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$
• $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	→ • $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
• $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	→ • $\int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = -\frac{1}{a} \frac{1}{(ax+b)} + C$

$\bullet \int e^x dx = e^x + C$	$\rightarrow \bullet \frac{1}{a} \int e^{(ax+b)} du = \frac{1}{a} e^{(ax+b)} + C$
$\bullet \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\rightarrow \bullet \int a^u du = \frac{1}{a} \frac{a^{(ax+b)}}{\ln a} + C$
$\bullet \int \cos x dx = \sin x + C$	$\rightarrow \bullet \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\bullet \int \sin x dx = -\cos x + C$	$\rightarrow \bullet \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\bullet \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\rightarrow \bullet \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\bullet \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\rightarrow \bullet \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$

Chú ý: Khi thay x bằng $(ax+b)$ thì khi lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

MỨC ĐỘ 5-6 ĐIỂM

Câu 1 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

- (A) $F'(x) = -f(x), \forall x \in K.$
 (B) $f'(x) = F(x), \forall x \in K.$
 (C) $F'(x) = f(x), \forall x \in K.$
 (D) $f'(x) = -F(x), \forall x \in K.$

Câu 2 (Mã 101-2020 Lần 1). $\int x^2 dx$ bằng

- (A) $2x + C.$
 (B) $\frac{1}{3}x^3 + C.$
 (C) $x^3 + C.$
 (D) $3x^3 + C.$

Câu 3 (Mã 102-2020 Lần 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3$ là

- (A) $4x^4 + C.$
 (B) $3x^2 + C.$
 (C) $x^4 + C.$
 (D) $\frac{1}{4}x^4 + C.$

Câu 4 (Mã 103-2020 Lần 1). $\int x^4 dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{5}x^5 + C.$
 (B) $4x^3 + C.$
 (C) $x^5 + C.$
 (D) $5x^5 + C.$

Câu 5 (Mã 104-2020 Lần 1). $\int x^5 dx$ bằng

- (A) $5x^4 + C$. (B) $\frac{1}{6}x^6 + C$. (C) $x^6 + C$. (D) $6x^6 + C$.

Câu 6 (Mã 101- 2020 Lần 2). $\int 5x^4 dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{5}x^5 + C$. (B) $x^5 + C$. (C) $5x^5 + C$. (D) $20x^3 + C$.

Câu 7 (Mã 102-2020 Lần 2). $\int 6x^5 dx$ bằng

- (A) $6x^6 + C$. (B) $x^6 + C$. (C) $\frac{1}{6}x^6 + C$. (D) $30x^4 + C$.

Câu 8 (Mã 103-2020 Lần 2). $\int 3x^2 dx$ bằng

- (A) $3x^3 + C$. (B) $6x + C$. (C) $\frac{1}{3}x^3 + C$. (D) $x^3 + C$.

Câu 9 (Mã 104-2020 Lần 2). $\int 4x^3 dx$ bằng

- (A) $4x^4 + C$. (B) $\frac{1}{4}x^4 + C$. (C) $12x^2 + C$. (D) $x^4 + C$.

Câu 10 (Mã 103 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

- (A) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$. (B) $x^4 + x^2 + C$. (C) $x^5 + x^3 + C$. (D) $4x^3 + 2x + C$.

Câu 11 (Mã 104-2019). Họ tất cả nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 4$ là

- (A) $x^2 + C$. (B) $2x^2 + C$. (C) $2x^2 + 4x + C$. (D) $x^2 + 4x + C$.

Câu 12 (Mã 102-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

- (A) $x^2 + C$. (B) $x^2 + 6x + C$. (C) $2x^2 + C$. (D) $2x^2 + 6x + C$.

Câu 13 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- (A) $\sin x + 3x^2 + C$. (B) $-\sin x + 3x^2 + C$. (C) $\sin x + 6x^2 + C$. (D) $-\sin x + C$.

Câu 14 (Mã 105 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x$.

- (A) $\int 2 \sin x dx = -2 \cos x + C$. (B) $\int 2 \sin x dx = 2 \cos x + C$.
 (C) $\int 2 \sin x dx = \sin^2 x + C$. (D) $\int 2 \sin x dx = \sin 2x + C$.

Câu 15 (Mã 101 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

- (A) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$. (B) $3x^2 + 1 + C$. (C) $x^3 + x + C$. (D) $x^4 + x^2 + C$.

Câu 16 (Mã 103-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 3$ là

- (A) $x^2 + 3x + C$. (B) $2x^2 + 3x + C$. (C) $x^2 + C$. (D) $2x^2 + C$.

Câu 17 (Đề Minh Họa 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

- (A) $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x - 1)\sqrt{2x - 1} + C$. (B) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x - 1)\sqrt{2x - 1} + C$.
 (C) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x - 1} + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x - 1} + C$.

Câu 18 (Đề Tham Khảo 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$ (B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$
 (C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$ (D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

Câu 19 (Mã 110 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x-2}$.

- (A) $\int \frac{dx}{5x-2} = \frac{1}{5} \ln|5x-2| + C.$ (B) $\int \frac{dx}{5x-2} = \ln|5x-2| + C.$
 (C) $\int \frac{dx}{5x-2} = -\frac{1}{2} \ln|5x-2| + C.$ (D) $\int \frac{dx}{5x-2} = 5 \ln|5x-2| + C.$

Câu 20 (Mã 123 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos 3x$

- (A) $\int \cos 3x dx = 3 \sin 3x + C.$ (B) $\int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} + C.$
 (C) $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C.$ (D) $\int \cos 3x dx = -\frac{\sin 3x}{3} + C.$

Câu 21 (Mã 104 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

- (A) $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C.$ (B) $3x^2 + 2x + C.$ (C) $x^3 + x^2 + C.$ (D) $x^4 + x^3 + C.$

Câu 22 (Đề Tham Khảo 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + x$ là

- (A) $e^x + 1 + C.$ (B) $e^x + x^2 + C.$
 (C) $e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$ (D) $\frac{1}{x+1}e^x + \frac{1}{2}x^2 + C.$

Câu 23 (Mã 101-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 5$ là

- (A) $x^2 + C.$ (B) $x^2 + 5x + C.$ (C) $2x^2 + 5x + C.$ (D) $2x^2 + C.$

Câu 24 (Mã 104 2017). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

- (A) $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C.$ (B) $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C.$
 (C) $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C.$ (D) $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C.$

Câu 25 (Mã 102 2018). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x$ là

- (A) $4x^3 + 1 + C.$ (B) $x^5 + x^2 + C.$ (C) $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 + C.$ (D) $x^4 + x + C.$

Câu 26 (Đề Tham Khảo 2018). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

- (A) $x^3 + C.$ (B) $\frac{x^3}{3} + x + C.$ (C) $6x + C.$ (D) $x^3 + x + C.$

Câu 27 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Tìm nguyên hàm $\int x(x^2 + 7)^{15} dx$?

- (A) $\frac{1}{2}(x^2 + 7)^{16} + C.$ (B) $-\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$
 (C) $\frac{1}{16}(x^2 + 7)^{16} + C.$ (D) $\frac{1}{32}(x^2 + 7)^{16} + C.$

Câu 28 (THPT Ba Đình -2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- (A) $3e^x + C.$ (B) $\frac{1}{3}e^{3x} + C.$ (C) $\frac{1}{3}e^x + C.$ (D) $3e^{3x} + C.$

Câu 29 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Tính $\int (x - \sin 2x) dx$.

- (A) $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$. (B) $\frac{x^2}{2} + \cos 2x + C$. (C) $x^2 + \frac{\cos 2x}{2} + C$. (D) $\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + C$.

Câu 30 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019).

Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- (A) $2e^{2x-1} + C$. (B) $e^{2x-1} + C$. (C) $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$. (D) $\frac{1}{2}e^x + C$.

Câu 31 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+3}$

- (A) $\ln |2x+3| + C$. (B) $\frac{1}{2} \ln |2x+3| + C$.
 (C) $\frac{1}{\ln 2} \ln |2x+3| + C$. (D) $\frac{1}{2} \lg (2x+3) + C$.

Câu 32 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- (A) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. (B) $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.
 (C) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$. (D) $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln |x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 33 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$

- (A) $-3\cos 3x + C$. (B) $3\cos 3x + C$. (C) $\frac{1}{3}\cos 3x + C$. (D) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

Câu 34 (Chuyên KHTN 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

- (A) $x^3 + \cos x + C$. (B) $6x + \cos x + C$. (C) $x^3 - \cos x + C$. (D) $6x - \cos x + C$.

Câu 35 (Chuyên Bắc Ninh -2019). Công thức nào sau đây là sai?

- (A) $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$. (B) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.
 (C) $\int \sin x dx = -\cos x + C$. (D) $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 36 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Nếu $\int f(x) dx = 4x^3 + x^2 + C$ thì hàm số $f(x)$ bằng

- (A) $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3} + Cx$. (B) $f(x) = 12x^2 + 2x + C$.
 (C) $f(x) = 12x^2 + 2x$. (D) $f(x) = x^4 + \frac{x^3}{3}$.

Câu 37 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- (A) $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$. (B) $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$.
 (C) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$. (D) $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$.

Câu 38 (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019).

Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

$$\textcircled{A} \int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$$

$$\textcircled{B} \int 2^x dx = 2^x + C.$$

$$\textcircled{C} \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

$$\textcircled{D} \int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C.$$

Câu 39 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = 3 + \cos x + C.$$

Câu 40 (Sở Bình Phước 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x + \sin x$ là

$$\textcircled{A} x^2 + \cos x + C.$$

$$\textcircled{B} x^2 - \cos x + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{x^2}{2} - \cos x + C.$$

$$\textcircled{D} \frac{x^2}{2} + \cos x + C.$$

Câu 41 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ là:

$$\textcircled{A} \cos x + C.$$

$$\textcircled{B} -\cos x + C.$$

$$\textcircled{C} -\sin x + C.$$

$$\textcircled{D} \sin x + C.$$

Câu 42 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-2019).

Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

$$\textcircled{A} 4x^3 + 2x + C.$$

$$\textcircled{B} x^4 + x^2 + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

$$\textcircled{D} x^5 + x^3 + C.$$

Câu 43 (THPT Cù Huy Cận 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

$$\textcircled{A} e^x + x^2 + C.$$

$$\textcircled{B} e^x - x^2 + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C.$$

$$\textcircled{D} e^x - 2 + C.$$

Câu 44 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019).

Họ các nguyên hàm của hàm số $y = \cos x + x$ là

$$\textcircled{A} \sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$\textcircled{B} \sin x + x^2 + C.$$

$$\textcircled{C} -\sin x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$\textcircled{D} -\sin x + x^2 + C.$$

Câu 45 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$ là

$$\textcircled{A} \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - \ln|x| + C.$$

$$\textcircled{B} \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

$$\textcircled{D} \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{x^2} + C.$$

Câu 46 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

$$\textcircled{A} \ln|x| - \cos x + C.$$

$$\textcircled{B} -\frac{1}{x^2} - \cos x + C.$$

$$\textcircled{C} \ln|x| + \cos x + C.$$

$$\textcircled{D} \ln|x| - \cos x + C.$$

Câu 47 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Hàm số $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây trên $(-\infty; +\infty)$?

$$\textcircled{A} f(x) = 3x^2.$$

$$\textcircled{B} f(x) = x^3.$$

$$\textcircled{C} f(x) = x^2.$$

$$\textcircled{D} f(x) = \frac{1}{4}x^4.$$

Câu 48 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$.

(A) $\int f(x) dx = 2^x + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

(C) $\int f(x) dx = 2^x \ln 2 + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{2^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 49 (THPT-Yên Định Thanh Hóa 2019).

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$.

(A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

(B) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Câu 50 (Sở Hà Nội 2019). Hàm số nào trong các hàm số sau đây là một nguyên hàm của hàm số $y = e^x$?

(A) $y = \frac{1}{x}.$

(B) $y = e^x.$

(C) $y = e^{-x}.$

(D) $y = \ln x.$

Câu 51 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019).

Tính $F(x) = \int e^2 dx$, trong đó e là hằng số và $e \approx 2,718$.

(A) $F(x) = \frac{e^2 x^2}{2} + C.$ (B) $F(x) = \frac{e^3}{3} + C.$ (C) $F(x) = e^2 x + C.$ (D) $F(x) = 2ex + C.$

Câu 52 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ trên $(-\infty; \frac{1}{2})$.

(A) $\frac{1}{2} \ln |2x - 1| + C.$

(B) $\frac{1}{2} \ln (1 - 2x) + C.$

(C) $-\frac{1}{2} \ln |2x - 1| + C.$

(D) $\ln |2x - 1| + C.$

Câu 53 (Chuyên Hưng Yên 2019). Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x + x$ là

(A) $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^2}{2} + C.$ (B) $2^x + x^2 + C.$ (C) $\frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C.$ (D) $2^x + \frac{x^2}{2} + C.$

Câu 54 (Chuyên Sơn La 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 1 + \sin x$

(A) $1 + \cos x + C.$ (B) $1 - \cos x + C.$ (C) $x + \cos x + C.$ (D) $x - \cos x + C.$

Câu 55 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2019$ là

(A) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C.$

(B) $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

(C) $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

(D) $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2019x + C.$

Câu 56 (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3x-1}$ trên khoảng $(-\infty; \frac{1}{3})$ là:

(A) $\frac{1}{3} \ln(3x - 1) + C.$ (B) $\ln(1 - 3x) + C.$ (C) $\frac{1}{3} \ln(1 - 3x) + C.$ (D) $\ln(3x - 1) + C.$

Câu 57 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

$$\textcircled{A} \int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C.$$

$$\textcircled{B} \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$$

$$\textcircled{C} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C.$$

$$\textcircled{D} \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C \quad (\forall x \neq -1).$$

Câu 58 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{2x} + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{2x^3}{3} + \frac{3}{x} + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = 2x^3 - \frac{3}{x} + C.$$

Câu 59 (Sở Thanh Hóa 2019). Cho hàm số $f(x) = 2^x + x + 1$. Tìm $\int f(x) dx$.

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = 2^x + x^2 + x + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \frac{1}{x+1} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

Câu 60 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x - \sin x$.

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = 3x^2 + \cos x + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} - \cos x + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = \frac{3x^2}{2} + \cos x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = 3 + \cos x + C.$$

Câu 61 (Chuyên Bắc Giang 2019). Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

$$\textcircled{A} f(x) = 2xe^{x^2}. \quad \textcircled{B} f(x) = x^2 e^{x^2} - 1. \quad \textcircled{C} f(x) = e^{2x}. \quad \textcircled{D} f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}.$$

Câu 62 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

$$\textcircled{A} -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C. \quad \textcircled{B} -3^{-x} + C. \quad \textcircled{C} 3^{-x} \ln 3 + C. \quad \textcircled{D} \frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$$

Câu 63 (Sở Phú Thọ 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x^2$ là

$$\textcircled{A} \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + C. \quad \textcircled{B} x^4 + x^3 + C. \quad \textcircled{C} 3x^2 + 2x + C. \quad \textcircled{D} \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{4} + C.$$

Câu 64 (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019).

Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2019}$?

$$\textcircled{A} \frac{x^{2020}}{2020} + 1. \quad \textcircled{B} \frac{x^{2020}}{2020}. \quad \textcircled{C} y = 2019x^{2018}. \quad \textcircled{D} \frac{x^{2020}}{2020} - 1.$$

Câu 65 (Chuyên Quốc Học Huế 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

$$\textcircled{A} \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{B} \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Câu 66 (Quảng Ninh 2019). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

(A) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C.$

(B) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C.$

(C) $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C.$

(D) $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C.$

Câu 67 (HSG Bắc Ninh 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

(A) $2e^x + \tan x + C.$ (B) $2e^x - \tan x + C.$ (C) $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C.$ (D) $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C.$

Câu 68 (Chuyên Hạ Long 2019). Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$?

(A) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C.$

(B) $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C.$

(C) $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$

(D) $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C.$

Câu 69 (Sở Bắc Ninh 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{5x + 4}$ là

(A) $\frac{1}{5} \ln(5x + 4) + C.$

(B) $\ln|5x + 4| + C.$

(C) $\frac{1}{\ln 5} \ln|5x + 4| + C.$

(D) $\frac{1}{5} \ln|5x + 4| + C.$

MỨC ĐỘ 7-8 ĐIỂM

 Dạng 1.1. Nguyên hàm cơ bản có điều kiện

Câu 1 (Đề Tham Khảo 2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x - 1}, f(0) = 1, f(1) = 2.$ Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

(A) $2 + \ln 15.$

(B) $3 + \ln 15.$

(C) $\ln 15.$

(D) $4 + \ln 15.$

Câu 2 (Sở Phú Thọ 2019). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ thỏa mãn $F(e + 1) = 4$ Tìm $F(x).$

(A) $2 \ln(x - 1) + 2.$

(B) $\ln(x - 1) + 3.$

(C) $4 \ln(x - 1).$

(D) $\ln(x - 1) - 3.$

Câu 3 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x - 2},$ biết $F(1) = 2$ Giá trị của $F(0)$ bằng

(A) $2 + \ln 2.$

(B) $\ln 2.$

(C) $2 + \ln(-2).$

(D) $\ln(-2).$

Câu 4 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \frac{1}{2x + 1};$ biết $F(0) = 2.$ Tính $F(1).$

(A) $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 - 2.$

(B) $F(1) = \ln 3 + 2.$

(C) $F(1) = 2 \ln 3 - 2.$

(D) $F(1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 2.$

Câu 5 (Chuyên ĐHSPT Hà Nội 2019).

Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \forall x \in (-\infty; 0)$.

(B) $F(x) = \ln|x| + C \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

(C) $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \forall x \in (-\infty; 0)$.

(D) $F(x) = \ln(-x) + C \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Câu 6 (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$.

Tính $S = f(3) - f(-1)$.

(A) $S = \ln 4035$.

(B) $S = 4$.

(C) $S = \ln 2$.

(D) $S = 1$.

Câu 7 (Mã 105 2017). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

(A) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

(B) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$.

(C) $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$.

(D) $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$.

Câu 8 (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

(A) 2.

(B) 6.

(C) 8.

(D) 4.

Câu 9 (Sở Bình Phước 2019). Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số e^{2x} và $F(0) = \frac{201}{2}$.

Giá trị $F\left(\frac{1}{2}\right)$ là

(A) $\frac{1}{2}e + 200$.

(B) $2e + 100$.

(C) $\frac{1}{2}e + 50$.

(D) $\frac{1}{2}e + 100$.

Câu 10 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên \mathbb{R} và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

(A) $y = 2e^x + 2x$.

(B) $y = 2e^x + 2$.

(C) $y = e^{2x} + x + 2$.

(D) $y = e^{2x} + x + 1$.

Câu 11 (Sở Bắc Ninh 2019). Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2019$.

(A) $F(x) = x^2 + e^x + 2018$.

(B) $F(x) = x^2 + e^x - 2018$.

(C) $F(x) = x^2 + e^x + 2017$.

(D) $F(x) = e^x - 2019$.

Câu 12. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

(A) $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} + 1}{\ln 2}$.

(B) $T = 2^{2019 \cdot 2020}$.

(C) $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}$.

(D) $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$.

Câu 13 (Mã 104 2017). Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

(A) $F(x) = -\cos x + \sin x + 3.$

(B) $F(x) = -\cos x + \sin x - 1.$

(C) $F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$

(D) $F(x) = \cos x - \sin x + 3.$

Câu 14 (Mã 123 2017). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15.$

(B) $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2.$

(C) $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5.$

(D) $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2.$

Câu 15 (Việt Đức Hà Nội 2019). Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3.$

(B) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15.$

(C) $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5.$

(D) $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10.$

Câu 16 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm $f(x) = \cos 3x$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$. Tính $F\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

(A) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 2}{6}.$ (B) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 2}{6}.$ (C) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} + 6}{6}.$ (D) $F\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3} - 6}{6}.$

Câu 17 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$. Tính $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

(A) 55.

(B) 44.

(C) 45.

(D) 0.

Câu 18 (Yên Lạc 2-Vinh Phúc-2020).

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + F(2) + \dots + F(2019)$.

(A) $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}.$

(B) $T = 1009 \cdot \frac{2^{2019} - 1}{2}.$

(C) $T = 2^{2019 \cdot 2020}.$

(D) $T = \frac{2^{2019} - 1}{\ln 2}.$

Dạng 1.2. Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

“Nếu $\int f(x) dx = F(x) + C$ thì $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F(u(x)) + C$ ”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I = \int f(x) dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x)) u'(x) dx$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) dx$.

Khi đó: $I = \int g(t) dt = G(t) + C = G(u(x)) + C$.

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t = u(x)$.

Câu 1 (Mã 101-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x + x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} .

Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

(A) $2e^x + 2x^2 + C.$

(B) $\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 + C.$

(C) $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C.$

(D) $e^{2x} + 4x^2 + C.$

Câu 2 (Mã 102-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x - 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- (A) $2e^x - 4x^2 + C$. (B) $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x^2 + C$. (C) $e^{2x} - 8x^2 + C$. (D) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$.

Câu 3 (Mã 103-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x - x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- (A) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$. (B) $e^{2x} - 4x^2 + C$. (C) $2e^x - 2x^2 + C$. (D) $\frac{1}{2}e^{2x} - x^2 + C$.

Câu 4 (Mã 104-2020 Lần 2). Biết $F(x) = e^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

- (A) $e^{2x} + 8x^2 + C$. (B) $2e^x + 4x^2 + C$. (C) $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. (D) $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$.

Câu 5 (Thi thử Lô-môn-ô-xốp-Hà Nội lần V 2019).

Biết $\int f(2x) dx = \sin^2 x + \ln x + C$. Tìm nguyên hàm $\int f(x) dx$?

- (A) $\int f(x) dx = \sin^2 \frac{x}{2} + \ln x + C$. (B) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 2x + 2 \ln x + C$.
(C) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \ln x + C$. (D) $\int f(x) dx = 2 \sin^2 x + 2 \ln x + C$.

Câu 6. Cho $\int f(4x) dx = x^2 + 3x + C$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 2x + C$. (B) $\int f(x+2) dx = x^2 + 7x + C$.
(C) $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{4} + 4x + C$. (D) $\int f(x+2) dx = \frac{x^2}{2} + 4x + C$.

Câu 7 (DS12.C3.1.D09.b). Cho $\int f(x) dx = 4x^3 + 2x + C_0$. Tính $I = \int xf(x^2) dx$.

- (A) $I = 2x^6 + x^2 + C$. (B) $I = \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^6}{6} + C$.
(C) $I = 4x^6 + 2x^2 + C$. (D) $I = 12x^2 + 2$.

Câu 8 (Sở Bắc Ninh 2019). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 \cdot e^{x^3+1}$.

- (A) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} \cdot e^{x^3+1} + C$. (B) $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C$.
(C) $\int f(x) dx = e^{x^3+1} + C$. (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$.

Câu 9 (THPT Hà Huy Tập-2018). Nguyên hàm của $f(x) = \sin 2x \cdot e^{\sin^2 x}$ là

- (A) $\sin^2 x \cdot e^{\sin^2 x - 1} + C$. (B) $\frac{e^{\sin^2 x + 1}}{\sin^2 x + 1} + C$. (C) $e^{\sin^2 x} + C$. (D) $\frac{e^{\sin^2 x - 1}}{\sin^2 x - 1} + C$.

Câu 10. Tìm tất cả các họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x^9 + 3x^5}$

- (A) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$. (B) $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$.
(C) $\int f(x) dx = -\frac{1}{3x^4} - \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$. (D) $\int f(x) dx = -\frac{1}{12x^4} + \frac{1}{36} \ln \left| \frac{x^4}{x^4 + 3} \right| + C$.

Câu 11 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Tìm hàm số $F(x)$ biết $F(x) = \int \frac{x^3}{x^4 + 1} dx$ và $F(0) = 1$.

(A) $F(x) = \ln(x^4 + 1) + 1.$

(B) $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + \frac{3}{4}.$

(C) $F(x) = \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + 1.$

(D) $F(x) = 4 \ln(x^4 + 1) + 1.$

Câu 12. Biết $\int \frac{(x-1)^{2017}}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^b + C, x \neq -1$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a = 2b.$

(B) $b = 2a.$

(C) $a = 2018b.$

(D) $b = 2018a.$

Câu 13 (Chuyên Quốc Học Huế-2018).

Biết rằng $F(x)$ là một nguyên hàm trên \mathbb{R} của hàm số $f(x) = \frac{2017x}{(x^2 + 1)^{2018}}$ thỏa mãn $F(1) = 0.$

Tìm giá trị nhỏ nhất m của $F(x).$

(A) $m = -\frac{1}{2}.$

(B) $m = \frac{1 - 2^{2017}}{2^{2018}}.$

(C) $m = \frac{1 + 2^{2017}}{2^{2018}}.$

(D) $m = \frac{1}{2}.$

Câu 14. Cho $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ và $F(0) = -\ln 2e.$ Tập nghiệm S của phương trình $F(x) + \ln(e^x + 1) = 2$ là:

(A) $S = \{3\}.$

(B) $S = \{2; 3\}.$

(C) $S = \{-2; 3\}.$

(D) $S = \{-3; 3\}.$

Câu 15 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{2019}$ là

(A) $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right].$

(B) $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020}.$

(C) $\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} + C.$

(D) $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2 + 1)^{2021}}{2021} - \frac{(x^2 + 1)^{2020}}{2020} \right] + C.$

Câu 16 (THPT Hà Huy Tập-2018). Nguyên hàm của $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x}$ là:

(A) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + C.$

(B) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x^2 \cdot \ln x| + C.$

(C) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x + \ln x| + C.$

(D) $\int \frac{1 + \ln x}{x \cdot \ln x} dx = \ln |x \cdot \ln x| + C.$

Câu 17 (Chuyên Hạ Long-2018). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 e^{x^3+1}$

(A) $\int \left(-t^{-5} + 2t^{-3} - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{4} t^{-4} - t^{-2} - \ln |t| + C.$

(B) $\int f(x) dx = 3e^{x^3+1} + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{x^3+1} + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} e^{x^3+1} + C.$

Câu 18 (Chuyên Lương Văn Chánh Phú Yên 2019).

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{3x + 1}$ là

(A) $\int f(x) dx = (3x + 1) \sqrt[3]{3x + 1} + C.$

(B) $\int f(x) dx = \sqrt[3]{3x + 1} + C.$

(C) $\int f(x) dx = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3x + 1} + C.$

(D) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} (3x + 1) \sqrt[3]{3x + 1} + C.$

Câu 19. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x + 2}$ là

$$\textcircled{A} \frac{2}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{2}{9}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$$

$$\textcircled{B} \frac{1}{3}(3x+2)\sqrt{3x+2} + C.$$

$$\textcircled{D} \frac{1}{2\sqrt{3x+2}} + C.$$

Câu 20 (HSG Bắc Ninh 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$ là

$$\textcircled{A} -\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\textcircled{B} \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\textcircled{D} \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$$

Câu 21 (THPT An Lão Hải Phòng 2019).

Cho hàm số $f(x) = 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{x}}$. Hàm số nào dưới đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x)$?

$$\textcircled{A} F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C.$$

$$\textcircled{B} F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C.$$

$$\textcircled{C} F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C.$$

$$\textcircled{D} F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C.$$

Câu 22 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019).

Khi tính nguyên hàm $\int \frac{x-3}{\sqrt{x+1}} dx$, bằng cách đặt $u = \sqrt{x+1}$ ta được nguyên hàm nào?

$$\textcircled{A} \int 2(u^2 - 4) du.$$

$$\textcircled{B} \int (u^2 - 4) du.$$

$$\textcircled{C} \int (u^2 - 3) du.$$

$$\textcircled{D} \int 2u(u^2 - 4) du.$$

Câu 23 (Chuyên Hạ Long-2018). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$.

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \sqrt{2x+1} + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = 2\sqrt{2x+1} + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}} + C.$$

Câu 24 (THCS-THPT Nguyễn Khuyến-2018).

Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ là

$$\textcircled{A} F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \sqrt{x^2+1} + C.$$

$$\textcircled{B} F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C.$$

$$\textcircled{C} F(x) = x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

$$\textcircled{D} F(x) = x^2 \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

Câu 25 (Chuyên Hạ Long-2018). Biết rằng trên khoảng $(\frac{3}{2}; +\infty)$, hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ có một nguyên hàm $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x-3}$ (a, b, c là các số nguyên). Tổng $S = a + b + c$ bằng

$$\textcircled{A} 4.$$

$$\textcircled{B} 3.$$

$$\textcircled{C} 5.$$

$$\textcircled{D} 6.$$

Câu 26 (Chuyên Bắc Ninh 2019). Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$.

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = \frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = \ln |1 + 3 \cos x| + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = 3 \ln |1 + 3 \cos x| + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3 \cos x| + C.$$

Câu 27 (Sở Thanh Hóa 2019). Tìm các hàm số $f(x)$ biết $f'(x) = \frac{\cos x}{(2 + \sin x)^2}$.

(A) $f(x) = \frac{\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C.$
 (C) $f(x) = -\frac{1}{2 + \sin x} + C.$

(B) $f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)} + C.$
 (D) $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x} + C.$

Câu 28 (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x}$ và $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. Tính $F(0)$

(A) $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 + 2.$
 (B) $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 + 2.$
 (C) $F(0) = -\frac{2}{3} \ln 2 - 2.$
 (D) $F(0) = -\frac{1}{3} \ln 2 - 2.$

Câu 29 (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019).

Biết $\int f(x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

(A) $\int f(3x) dx = 3x \cos(6x - 5) + C.$
 (B) $\int f(3x) dx = 9x \cos(6x - 5) + C.$
 (C) $\int f(3x) dx = 9x \cos(2x - 5) + C.$
 (D) $\int f(3x) dx = 3x \cos(2x - 5) + C.$

Câu 30 (Chuyên Hạ Long-2018). Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^5 x$.

(A) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$
 (B) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$
 (C) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C.$
 (D) $\int f(x) dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln |\cos x| + C.$

Câu 31 (Hồng Bàng-Hải Phòng-2018).

Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^3 x \cdot \cos x$ và $F(0) = \pi$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

(A) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi.$
 (B) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$
 (C) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \pi.$
 (D) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} + \pi.$

Câu 32. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ và

$F(e) = \ln 2$ Giá trị của biểu thức $F\left(\frac{1}{e^2}\right) + F(e^2)$ bằng

(A) $3 \ln 2 + 2.$
 (B) $\ln 2 + 2.$
 (C) $\ln 2 + 1.$
 (D) $2 \ln 2 + 1.$

Câu 33 (Chuyên Nguyễn Huệ-HN 2019).

Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:

(A) $x = 0.$
 (B) $x = 1.$
 (C) $x = -1.$
 (D) $x = 1 - \sqrt{3}.$

Câu 34. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x^2}$. Biết $F(3) = 6$, giá trị của $F(8)$ là

(A) $\frac{217}{8}.$
 (B) $27.$
 (C) $\frac{215}{24}.$
 (D) $\frac{215}{8}.$

Câu 35. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ là

(A) $(4x^2 + 2x + 1) \sqrt{2x-3} + C.$
 (B) $(4x^2 - 2x + 1) \sqrt{2x-3}.$

$$\textcircled{C} (3x^2 - 2x + 1) \sqrt{2x - 3}.$$

$$\textcircled{D} (4x^2 - 2x + 1) \sqrt{2x - 3} + C.$$

Dạng 1.3. Nguyên hàm của hàm số hữu tỉ

- Công thức thường áp dụng

$$1. \int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C$$

$$2. \int \frac{1}{(ax + b)^2} dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax + b} + C$$

$$3. \ln a + \ln b = \ln(ab)$$

$$4. \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

$$5. \ln a^n = n \ln a$$

$$6. \ln 1 = 0$$

- Phương pháp tính nguyên hàm, tích phân của hàm số hữu tỷ $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

• Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ Chia đa thức.

• Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP}$ phân tích mẫu $Q(x)$ thành tích số, rồi sử dụng phương pháp che để đưa về công thức nguyên hàm số 01.

• Nếu mẫu không phân tích được thành tích số \xrightarrow{PP} thêm bớt để đổi biến hoặc lượng giác hóa bằng cách đặt $X = a \tan t$, nếu mẫu đưa được về dạng $X^2 + a^2$.

Câu 1 (Đề Minh họa 2020 Lần 1). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

$$\textcircled{A} x + 3 \ln(x-1) + C.$$

$$\textcircled{B} x - 3 \ln(x-1) + C.$$

$$\textcircled{C} x - \frac{3}{(x-1)^2} + C.$$

$$\textcircled{D} x + \frac{3}{(x-1)^2} + C.$$

Câu 2 (Mã đề 104-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x-2}{(x-2)^2}$ trên khoảng $(2; +\infty)$ là

$$\textcircled{A} 3 \ln(x-2) + \frac{2}{x-2} + C.$$

$$\textcircled{B} 3 \ln(x-2) - \frac{2}{x-2} + C.$$

$$\textcircled{C} 3 \ln(x-2) - \frac{4}{x-2} + C.$$

$$\textcircled{D} 3 \ln(x-2) + \frac{4}{x-2} + C.$$

Câu 3 (Mã đề 101-BGD-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{(x+1)^2}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

$$\textcircled{A} 2 \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C.$$

$$\textcircled{B} 2 \ln(x+1) + \frac{3}{x+1} + C.$$

$$\textcircled{C} 2 \ln(x+1) - \frac{2}{x+1} + C.$$

$$\textcircled{D} 2 \ln(x+1) - \frac{3}{x+1} + C.$$

Câu 4 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), biết rằng $F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$

$$\textcircled{A} F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}.$$

$$\textcircled{B} F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}.$$

$$\textcircled{C} F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}.$$

$$\textcircled{D} F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}.$$

Câu 5. Cho biết $\int \frac{2x - 13}{(x + 1)(x - 2)} dx = a \ln |x + 1| + b \ln |x - 2| + C$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a + 2b = 8$. (B) $a + b = 8$. (C) $2a - b = 8$. (D) $a - b = 8$.

Câu 6. Cho biết $\int \frac{1}{x^3 - x} dx = a \ln |(x - 1)(x + 1)| + b \ln |x| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P = 2a + b$.

- (A) 0. (B) -1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

Câu 7. Cho biết $\int \frac{4x + 11}{x^2 + 5x + 6} dx = a \ln |x + 2| + b \ln |x + 3| + C$. Tính giá trị biểu thức: $P = a^2 + ab + b^2$.

- (A) 12. (B) 13. (C) 14. (D) 15.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

- (A) $-\frac{3}{2}$. (B) 0. (C) 5. (D) $\frac{3}{2}$.

Câu 9 (Mã 102 2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x - 1}{(x - 1)^2}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

- (A) $3 \ln(x - 1) - \frac{1}{x - 1} + c$. (B) $3 \ln(x - 1) + \frac{2}{x - 1} + c$.
 (C) $3 \ln(x - 1) - \frac{2}{x - 1} + c$. (D) $3 \ln(x - 1) + \frac{1}{x - 1} + c$.

Câu 10 (Mã 103-2019). Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x + 1}{(x + 2)^2}$ trên khoảng $(-2; +\infty)$ là

- (A) $2 \ln(x + 2) + \frac{3}{x + 2} + C$. (B) $2 \ln(x + 2) + \frac{1}{x + 2} + C$.
 (C) $2 \ln(x + 2) - \frac{1}{x + 2} + C$. (D) $2 \ln(x + 2) - \frac{3}{x + 2} + C$.

Câu 11 (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019).

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x + 1}{x^4 + 2x^3 + x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $F(1) = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $S = F(1) + F(2) + F(3) + \dots + F(2019)$ bằng

- (A) $\frac{2019}{2020}$. (B) $\frac{2019 \cdot 2021}{2020}$. (C) $2018 \cdot \frac{1}{2020}$. (D) $-\frac{2019}{2020}$.

Câu 12. Giả sử $\int \frac{(2x + 3) dx}{x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (C là hằng số).
 Tính tổng các nghiệm của phương trình $g(x) = 0$.

- (A) -1. (B) 1. (C) 3. (D) -3.

Câu 13 (Nam Trực-Nam Định-2018).

Cho $I = \int \frac{1}{x^3(1 + x^2)} dx = \frac{-a}{x^2} - b \ln |x| + 2c \ln(1 + x^2) + C$. Khi đó $S = a + b + c$ bằng

- (A) $-\frac{1}{4}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{7}{4}$. (D) 2.

Câu 14 (Trường VINSCHOOL-2020).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$. Biết $f(3) + f(-3) = 4$ và $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-5) + f(0) + f(2)$ bằng

- (A) $5 - \frac{1}{2} \ln 2$. (B) $6 - \frac{1}{2} \ln 2$. (C) $5 + \frac{1}{2} \ln 2$. (D) $6 + \frac{1}{2} \ln 2$.

Câu 15 (Quảng Xương-Thanh Hóa-2018).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$, $f(-3) - f(3) = 0$ và $f(0) = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $f(-4) + f(-1) - f(4)$ bằng

- (A) $\frac{1}{3} \ln 2 + \frac{1}{3}$. (B) $\ln 80 + 1$. (C) $\frac{1}{3} \ln \frac{4}{5} + \ln 2 + 1$. (D) $\frac{1}{3} \ln \frac{8}{5} + 1$.

Câu 16 (Chuyên Nguyễn Quang Diêu-Đồng Tháp-2018).

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(0) = 2017$, $f(2) = 2018$. Tính $S = (f(3) - 2018)(f(-1) - 2017)$.

- (A) $S = 1$. (B) $S = 1 + \ln^2 2$. (C) $S = 2 \ln 2$. (D) $S = \ln^2 2$.

Câu 17 (Sở Phú Thọ-2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{x^2 - 1}$, $f(-2) + f(2) = 0$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Tính $f(-3) + f(0) + f(4)$ được kết quả

- (A) $\ln \frac{6}{5} + 1$. (B) $\ln \frac{6}{5} - 1$. (C) $\ln \frac{4}{5} + 1$. (D) $\ln \frac{4}{5} - 1$.

Dạng 1.4. Nguyên hàm từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a; b]$.

Khi đó: $\int u dv = uv - \int v du$ (*)

Để tính nguyên hàm $I = \int f(x) dx$ bằng phương pháp từng phần ta làm như sau:

- Bước 1: Chọn u, v sao cho $f(x) dx = u dv$ (Chú ý: $dv = v'(x) dx$).

Tính $v = \int dv$ và $du = u' dx$.

- Bước 2: Thay vào công thức (*) và tính $\int v du$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int v du$ dễ tính hơn $\int u dv$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1: $I = \int P(x) \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $u = P(x)$, $dv = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} dx$.

Dạng 2: $I = \int (x) e^{ax+b} dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = P(x) \\ dv = e^{ax+b} dx \end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3: $I = \int P(x) \ln [Mx + n] dx$.

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \ln [Mx + n] \\ dv = P(x) dx \end{cases}$.

Dạng 4: $I = \int \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} e^x dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ để tính $\int v du$ ta đặt $\begin{cases} u = \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} \\ dv = e^x dx \end{cases}$ f

Câu 1 (Mã 101-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) \cdot f'(x)$ là
 (A) $\frac{x^2 + 2x - 2}{2\sqrt{x^2 + 2}} + C$. (B) $\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 2}} + C$. (C) $\frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} + C$. (D) $\frac{x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2}} + C$.

Câu 2 (Mã 102-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) f'(x)$ là
 (A) $\frac{x^2 + 2x - 3}{2\sqrt{x^2 + 3}} + C$. (B) $\frac{x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3}} + C$. (C) $\frac{2x^2 + x + 3}{\sqrt{x^2 + 3}} + C$. (D) $\frac{x - 3}{\sqrt{x^2 + 3}} + C$.

Câu 3 (Mã 103-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) f'(x)$ là
 (A) $\frac{x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 + 1}} + C$. (B) $\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$. (C) $\frac{2x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$. (D) $\frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$.

Câu 4 (Mã 104-2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $g(x) = (x + 1) f'(x)$ là
 (A) $\frac{x + 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. (B) $\frac{x - 4}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$. (C) $\frac{x^2 + 2x - 4}{2\sqrt{x^2 + 4}} + C$. (D) $\frac{2x^2 + x + 4}{\sqrt{x^2 + 4}} + C$.

Câu 5 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Biết $\cos 2x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) e^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f'(x) e^x$ là:
 (A) $-\sin 2x + \cos 2x + C$. (B) $-2 \sin 2x + \cos 2x + C$.
 (C) $-2 \sin 2x - \cos 2x + C$. (D) $2 \sin 2x - \cos 2x + C$.

Câu 6 (Đề Tham Khảo 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 4x(1 + \ln x)$ là:
 (A) $2x^2 \ln x + 3x^2$. (B) $2x^2 \ln x + x^2$. (C) $2x^2 \ln x + 3x^2 + C$. (D) $2x^2 \ln x + x^2 + C$.

Câu 7. Họ các nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \sin x$ là
 (A) $F(x) = x \cos x + \sin x + C$. (B) $F(x) = x \cos x - \sin x + C$.

$$\textcircled{C} F(x) = -x \cos x - \sin x + C.$$

$$\textcircled{D} F(x) = -x \cos x + \sin x + C.$$

Câu 8 (Chuyên Phan Bội Châu 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x.e^{2x}$ là:

$$\textcircled{A} F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

$$\textcircled{B} F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$$

$$\textcircled{C} F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C.$$

$$\textcircled{D} F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Câu 9 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = (2x - 1)e^x$ là

$$\textcircled{A} (2x - 3)e^x + C.$$

$$\textcircled{B} (2x + 3)e^x + C.$$

$$\textcircled{C} (2x + 1)e^x + C.$$

$$\textcircled{D} (2x - 1)e^x + C.$$

Câu 10 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019).

Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{2x}$?

$$\textcircled{A} F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

$$\textcircled{B} F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} (x - 2) + C.$$

$$\textcircled{C} F(x) = 2e^{2x} (x - 2) + C.$$

$$\textcircled{D} F(x) = 2e^{2x} \left(x - \frac{1}{2}\right) + C.$$

Câu 11 (Chuyên Sơn La 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(1 + \sin x)$ là

$$\textcircled{A} \frac{x^2}{2} - x \sin x + \cos x + C.$$

$$\textcircled{B} \frac{x^2}{2} - x \cos x + \sin x + C.$$

$$\textcircled{C} \frac{x^2}{2} - x \cos x - \sin x + C.$$

$$\textcircled{D} \frac{x^2}{2} - x \sin x - \cos x + C.$$

Câu 12 (Chuyên Thái Bình-Lần 3-2020).

Giả sử $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2e^x$. Tính tích $P = abc$.

$$\textcircled{A} -4.$$

$$\textcircled{B} 1.$$

$$\textcircled{C} -5.$$

$$\textcircled{D} -3.$$

Câu 13. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x(1 + e^x)$ là

$$\textcircled{A} (2x - 1)e^x + x^2.$$

$$\textcircled{B} (2x + 1)e^x + x^2.$$

$$\textcircled{C} (2x + 2)e^x + x^2.$$

$$\textcircled{D} (2x - 2)e^x + x^2.$$

Câu 14. Họ nguyên hàm của $f(x) = x \ln x$ là kết quả nào sau đây?

$$\textcircled{A} F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

$$\textcircled{B} F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C.$$

$$\textcircled{C} F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

$$\textcircled{D} F(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x + C.$$

Câu 15 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Tìm tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = (3x^2 + 1) \cdot \ln x$.

$$\textcircled{A} \int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\textcircled{B} \int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\textcircled{C} \int f(x) dx = x(x^2 + 1) \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$$

$$\textcircled{D} \int f(x) dx = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3} - x + C.$$

Câu 16 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$ trên khoảng $(0; \pi)$ là

$$\textcircled{A} -x \cot x + \ln |\sin x| + C.$$

$$\textcircled{B} x \cot x - \ln |\sin x| + C.$$

(C) $x \cot x + \ln |\sin x| + C.$

(D) $-x \cot x - \ln (\sin x) + C.$

Câu 17 (Sở Phú Thọ 2019). Họ nguyên hàm của hàm số $y = 3x(x + \cos x)$ là

(A) $x^3 + 3(x \sin x + \cos x) + C.$

(B) $x^3 - 3(x \sin x + \cos x) + C.$

(C) $x^3 + 3(x \sin x - \cos x) + C.$

(D) $x^3 - 3(x \sin x - \cos x) + C.$

Câu 18 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + xe^x$ là

(A) $\frac{1}{5}x^5 + (x + 1)e^x + C.$

(B) $\frac{1}{5}x^5 + (x - 1)e^x + C.$

(C) $\frac{1}{5}x^5 + xe^x + C.$

(D) $4x^3 + (x + 1)e^x + C.$

Câu 19. Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên \mathbb{R} . Biết rằng $F(x) \cdot G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x) \cdot g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$ Họ nguyên hàm của $f(x) \cdot G(x)$ là

(A) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C.$

(B) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C.$

(C) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$

(D) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C.$

Câu 20 (Sở Bắc Ninh 2019). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

(A) $\int xe^x dx = e^x + xe^x + C.$

(B) $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + e^x + C.$

(C) $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C.$

(D) $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x + C.$

Câu 21 (Sở Bắc Giang 2019). Cho hai hàm số $F(x), G(x)$ xác định và có đạo hàm lần lượt là $f(x), g(x)$ trên \mathbb{R} . Biết $F(x) \cdot G(x) = x^2 \ln(x^2 + 1)$ và $F(x) \cdot g(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Tìm họ nguyên hàm của $f(x) \cdot G(x)$.

(A) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + 2x^2 + C.$

(B) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - 2x^2 + C.$

(C) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) - x^2 + C.$

(D) $(x^2 + 1) \ln(x^2 + 1) + x^2 + C.$

Câu 22. Cho biết $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x}$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{(x^2 + a)^2}{x^2}$. Tìm nguyên hàm của $g(x) = x \cos ax$.

(A) $x \sin x - \cos x + C.$

(B) $\frac{1}{2}x \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

(C) $x \sin x + \cos x + C.$

(D) $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$

Câu 23. Họ nguyên hàm của hàm số $y = \frac{(2x^2 + x) \ln x + 1}{x}$ là

(A) $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

(B) $(x^2 + x - 1) \ln x + \frac{x^2}{2} - x + C.$

(C) $(x^2 + x + 1) \ln x - \frac{x^2}{2} - x + C.$

(D) $(x^2 + x - 1) \ln x - \frac{x^2}{2} + x + C.$

Câu 24 (Mã 104 2017). Cho $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$.

(A) $\int f'(x) \ln x dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) + C.$

(B) $\int f'(x) \ln x dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + C.$

$$\textcircled{C} \int f'(x) \ln x \, dx = -\left(\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2x^2}\right) + C. \quad \textcircled{D} \int f'(x) \ln x \, dx = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} + C.$$

Câu 25 (Mã 105 2017). Cho $F(x) = -\frac{1}{3x^3}$ là một nguyên hàm của hàm số $\frac{f(x)}{x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x) \ln x$

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \int f'(x) \ln x \, dx &= \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{5x^5} + C. & \textcircled{B} \int f'(x) \ln x \, dx &= \frac{\ln x}{x^3} - \frac{1}{5x^5} + C. \\ \textcircled{C} \int f'(x) \ln x \, dx &= -\frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C. & \textcircled{D} \int f'(x) \ln x \, dx &= \frac{\ln x}{x^3} + \frac{1}{3x^3} + C. \end{aligned}$$

Câu 26 (Mã 110 2017). Cho $F(x) = (x-1)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \int f'(x) e^{2x} \, dx &= (4-2x)e^x + C. & \textcircled{B} \int f'(x) e^{2x} \, dx &= (x-2)e^x + C. \\ \textcircled{C} \int f'(x) e^{2x} \, dx &= \frac{2-x}{2}e^x + C. & \textcircled{D} \int f'(x) e^{2x} \, dx &= (2-x)e^x + C. \end{aligned}$$

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = xe^x$ và $f(0) = 2$. Tính $f(1)$.

$$\textcircled{A} f(1) = 3. \quad \textcircled{B} f(1) = e. \quad \textcircled{C} f(1) = 5 - e. \quad \textcircled{D} f(1) = 8 - 2e.$$

Câu 28 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^{2x}$ là

$$\begin{aligned} \textcircled{A} (x-2)e^x + e^x + C. & \quad \textcircled{B} (x+2)e^{2x} + e^x + C. \\ \textcircled{C} (x-1)e^x + C. & \quad \textcircled{D} (x+1)e^x + C. \end{aligned}$$

Câu 29 (Việt Đức Hà Nội 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x+1)e^x, f(0) = 0$ và $\int f(x) \, dx = (ax+b)e^x + C$ với a, b, c là các hằng số. Khi đó:

$$\textcircled{A} a + b = 2. \quad \textcircled{B} a + b = 3. \quad \textcircled{C} a + b = 1. \quad \textcircled{D} a + b = 0.$$

Câu 30 (THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018).

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Tính $F(x)$ biết $F(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \textcircled{A} F(x) &= -(x+1)e^{-x} + 2. & \textcircled{B} F(x) &= (x+1)e^{-x} + 1. \\ \textcircled{C} F(x) &= (x+1)e^{-x} + 2. & \textcircled{D} F(x) &= -(x+1)e^{-x} + 1. \end{aligned}$$

Câu 31 (Sở Quảng Nam-2018). Biết $\int x \cos 2x \, dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính tích ab ?

$$\textcircled{A} ab = \frac{1}{8}. \quad \textcircled{B} ab = \frac{1}{4}. \quad \textcircled{C} ab = -\frac{1}{8}. \quad \textcircled{D} ab = -\frac{1}{4}.$$

Câu 32 (Chuyên ĐH Vinh-2018). Giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x^2}$ sao cho $F(-2) + F(1) = 0$. Giá trị của $F(-1) + F(2)$ bằng

$$\textcircled{A} \frac{10}{3} \ln 2 - \frac{5}{6} \ln 5. \quad \textcircled{B} 0. \quad \textcircled{C} \frac{7}{3} \ln 2. \quad \textcircled{D} \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{3}{6} \ln 5.$$

Câu 33 (THCS&THPT Nguyễn Khuyến-Bình Dương-2018).

Gọi $g(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \ln(x - 1)$. Cho biết $g(2) = 1$ và $g(3) = a \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên dương phân biệt. Hãy tính giá trị của $T = 3a^2 - b^2$

- (A) $T = 8$. (B) $T = -17$. (C) $T = 2$. (D) $T = -13$.

Câu 34 (Sở Quảng Nam-2018). Biết $\int x \cos 2x \, dx = ax \sin 2x + b \cos 2x + C$ với a, b là các số hữu tỉ. Tích ab bằng?

- (A) $ab = \frac{1}{8}$. (B) $ab = \frac{1}{4}$. (C) $ab = -\frac{1}{8}$. (D) $ab = -\frac{1}{4}$.

§2. TÍCH PHÂN

A. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên K và $a, b \in K$. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì $F(b) - F(a)$ được gọi là tích phân của $f(x)$ từ a đến b và được kí hiệu là $\int_a^b f(x) \, dx$. Khi đó $\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$, (a là cận dưới, b là cận trên).
- Đối với biến số lấy tích phân, có thể chọn bất kỳ một chữ khác nhau thay cho x , nghĩa là $I = \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \dots = F(b) - F(a)$ (**không phụ thuộc biến mà phụ thuộc hai cận**).

B. TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

- a) $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$ và $\int_a^a f(x) \, dx = 0$.
- b) $\int_a^b kf(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx$, với $k \neq 0$.
- c) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$.
- d) $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$.
- e) $\int_a^b f'(x) \, dx = f(x) \Big|_a^b$, $\int_a^b f''(x) \, dx = f'(x) \Big|_a^b$, $\int_a^b f'''(x) \, dx = f''(x) \Big|_a^b$, ...

Dạng 2.5. Tích phân cơ bản & tính chất tích phân

Ví dụ mẫu: Tính các tích phân hoặc tìm tham số m (nhóm đa thức)

a) Tính $I = \int_1^3 (3x^2 - 4x + 5) dx$.

b) Tính $I = \int_{-2}^3 (4x^3 - 3x^2 + 10) dx$.

c) Tính $I = \int_0^1 (2x + 1)^5 dx$.

d) Tính $I = \int_0^3 (1 - 3x)^{10} dx$.

Ví dụ 1 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Nếu $\int_1^2 f(x) dx = -2$ và $\int_2^3 f(x) dx = 1$ thì

$\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) -3.

(B) -1.

(C) 1.

(D) 3.

Ví dụ 2 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2). Nếu $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì $\int_0^1 2f(x) dx$ bằng

(A) 16.

(B) 4.

(C) 2.

(D) 8.

Ví dụ 3 (Mã 101-2020 Lần 1). Biết $\int_1^3 f(x) dx = 3$. Giá trị của $\int_1^3 2f(x) dx$ bằng

(A) 5.

(B) 9.

(C) 6.

(D) $\frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4 (Mã 101-2020 Lần 1). Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 [2 + f(x)] dx$ bằng

- A) 5.
 B) 3.
 C) $\frac{13}{3}$.
 D) $\frac{7}{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5 (Mã 102-2020 Lần 1). Biết $\int_1^5 f(x) dx = 4$. Giá trị của $\int_1^5 3f(x) dx$ bằng

- A) 7.
 B) $\frac{4}{3}$.
 C) 64.
 D) 12.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6 (Mã 102-2020 Lần 1). Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^2 (2 + f(x)) dx$ bằng

- A) $\frac{23}{4}$.
 B) 7.
 C) 9.
 D) $\frac{15}{4}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7 (Mã 103-2020 Lần 1). Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_1^3 3f(x) dx$ bằng

(A) 5. (B) 6. (C) $\frac{2}{3}$. (D) 8.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8 (Mã 103-2020 Lần 1). Biết $F(x) = x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 (1 + f(x)) dx$ bằng

(A) 20. (B) 22. (C) 26. (D) 28.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9 (Mã 104-2020 Lần 1). Biết $\int_2^3 f(x) dx = 6$ Giá trị của $\int_2^3 2f(x) dx$ bằng.

(A) 36. (B) 3. (C) 12. (D) 8.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 10 (Mã 104-2020 Lần 1). Biết $F(x) = x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên \mathbb{R} . Giá trị của $\int_1^3 [1 + f(x)] dx$ bằng

(A) 10. (B) 8. (C) $\frac{26}{3}$. (D) $\frac{32}{3}$.

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 11 (Mã 101-2020 Lần 2). Biết $\int_2^3 f(x) dx = 4$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$. Khi đó:

$\int_2^3 [f(x) - g(x)] dx$ bằng:

- (A) -3. (B) 3. (C) 4. (D) 5.
-
-
-

✍ Ví dụ 12 (Mã 101-2020 Lần 2). Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 2$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng:

- (A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 0.
-
-
-

✍ Ví dụ 13 (Mã 102-2020 Lần 2). Biết $\int_2^3 f(x) dx = 3$ và $\int_2^3 g(x) dx = 1$. Khi đó

$\int_2^3 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- (A) 4. (B) 2. (C) -2. (D) 3.
-
-
-

✍ Ví dụ 14 (Mã 102-2020 Lần 2). Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 3$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$

bằng

- (A) 1. (B) 5. (C) 3. (D) 2.

✍ **Ví dụ 15 (Mã 103-2020 Lần 2).** Biết $\int_1^2 f(x) dx = 3$ và $\int_1^2 g(x) dx = 2$. Khi đó

$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng?

(A) 6.

(B) 1.

(C) 5.

(D) -1.

✍ **Ví dụ 16 (Mã 103-2020 Lần 2).** Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 4$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

(A) 3.

(B) 2.

(C) 6.

(D) 4.

✍ **Ví dụ 17 (Mã 104-2020 Lần 2).** Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 3$ Khi đó $\int_1^2 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

(A) 1.

(B) 5.

(C) -1.

(D) 6.

✍ Ví dụ 18 (Mã 104-2020 Lần 2). Biết $\int_0^1 [f(x) + 2x] dx = 5$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) 7. (B) 3. (C) 5. (D) 4.

.....

✍ Ví dụ 19 (Mã 103-2019). Biết $\int_1^2 f(x) dx = 2$ và $\int_1^2 g(x) dx = 6$, khi đó

$\int_1^2 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

- (A) 8. (B) -4. (C) 4. (D) -8.

.....

✍ Ví dụ 20 (Mã 102-2019). Biết tích phân $\int_0^1 f(x) dx = 3$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$. Khi đó

$\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- (A) -7. (B) 7. (C) -1. (D) 1.

.....

✍ Ví dụ 21 (Mã 104-2019). Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = -4$, khi đó

$\int_0^1 [f(x) + g(x)] dx$ bằng

- (A) 6. (B) -6. (C) -2. (D) 2.

✍ Ví dụ 22 (Mã 101 2019).

Biết $\int_0^1 f(x) dx = -2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 3$, khi đó

$\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx$ bằng

(A) -1.

(B) 1.

(C) -5.

(D) 5.

✍ Ví dụ 23 (Đề Tham Khảo 2019).

Cho $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 g(x) dx = 5$, khi

$\int_0^1 [f(x) - 2g(x)] dx$ bằng

(A) -8.

(B) 1.

(C) -3.

(D) 12.

✍ Ví dụ 24 (THPT Ba Đình 2019). Khẳng định nào trong các khẳng định sau đúng với

mọi hàm f, g liên tục trên K và a, b là các số bất kỳ thuộc K ?

(A) $\int_a^b [f(x) + 2g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + 2 \int_a^b g(x) dx.$

(B) $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$

Ⓒ $\int_a^b [f(x).g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx.$

Ⓓ $\int_a^b f^2(x) dx = \left[\int_a^b f(x) dx \right]^2.$

.....

✍ **Ví dụ 25 (THPT Cẩm Giàng 2 2019).** Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1, \int_{-2}^4 f(t) dt = -4.$ Tính

$\int_2^4 f(y) dy.$

Ⓐ $I = 5.$

Ⓑ $I = -3.$

Ⓒ $I = 3.$

Ⓓ $I = -5.$

.....

✍ **Ví dụ 26 (THPT Cù Huy Cận -2019).** Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$ và $\int_0^2 g(x) dx = 7,$ khi

đó $\int_0^2 [f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

Ⓐ 16.

Ⓑ -18.

Ⓒ 24.

Ⓓ 10.

.....

✍ **Ví dụ 27 (THPT-YÊN Định Thanh Hóa 2019).** Cho $\int_0^1 f(x) dx = -1; \int_0^3 f(x) dx = 5.$

Tính $\int_1^3 f(x) dx$

Ⓐ 1.

Ⓑ 4.

Ⓒ 6.

Ⓓ 5.

 **Ví dụ 28 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019).** Cho $\int_1^2 f(x) dx = -3$ và


$\int_2^3 f(x) dx = 4$. Khi đó $\int_1^3 f(x) dx$ bằng

(A) 12.

(B) 7.

(C) 1.

(D) -12.

 **Ví dụ 29.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $[-1; 2]$, $f(-1) = 8$; $f(2) = -1$.


Tích phân $\int_{-1}^2 f'(x) dx$ bằng

(A) 1.

(B) 7.

(C) -9.

(D) 9.

 **Ví dụ 30 (Sở Thanh Hóa-2019).** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên R và có $\int_0^2 f(x) dx =$

9 ; $\int_2^4 f(x) dx = 4$ Tính $I = \int_0^4 f(x) dx$

(A) $I = 5$.

(B) $I = 36$.

(C) $I = \frac{9}{4}$.

(D) $I = 13$.

✍ Ví dụ 31. Cho $\int_{-1}^0 f(x) dx = 3$, $\int_0^3 f(x) dx = 3$. Tích phân $\int_{-1}^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 6. (B) 4. (C) 2. (D) 0.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 32 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^4 f(x) dx = 10$, $\int_3^4 f(x) dx = 4$. Tích phân $\int_0^3 f(x) dx$ bằng

- (A) 4. (B) 7. (C) 3. (D) 6.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 33 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019). Nếu $F'(x) = \frac{1}{2x-1}$ và $F(1) = 1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng

- (A) $\ln 7$. (B) $1 + \frac{1}{2} \ln 7$. (C) $\ln 3$. (D) $1 + \ln 7$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 34 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương -2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} thoả mãn $\int_1^8 f(x) dx = 9$, $\int_4^{12} f(x) dx = 3$, $\int_4^8 f(x) dx = 5$.

Tính $I = \int_1^{12} f(x) dx$.

- (A) $I = 17$. (B) $I = 1$. (C) $I = 11$. (D) $I = 7$.

.....

✍ Ví dụ 35 (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0; 10]$ thỏa mãn $\int_0^{10} f(x) dx = 7, \int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

- (A) $P = 10.$ (B) $P = 4.$ (C) $P = 7.$ (D) $P = -6.$

✍ Ví dụ 36 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019). Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10, \int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính

$$\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx.$$

- (A) 7. (B) 6. (C) 8. (D) 9.

✍ Ví dụ 37 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 10]$ và $\int_0^{10} f(x) dx = 7; \int_2^6 f(x) dx = 3$. Tính $P = \int_0^2 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$.

- (A) $P = 4.$ (B) $P = 10.$ (C) $P = 7.$ (D) $P = -4.$

✎ Ví dụ 38. Cho f, g là hai hàm số liên tục trên $[1; 3]$ thỏa mãn điều kiện $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ đồng thời $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$. Tính $\int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- (A) 9. (B) 6. (C) 7. (D) 8.

.....

✎ Ví dụ 39 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019). Cho f, g là hai hàm liên tục trên $[1; 3]$ thỏa: $\int_1^3 [f(x) + 3g(x)] dx = 10$ và $\int_1^3 [2f(x) - g(x)] dx = 6$.

Tính $I = \int_1^3 [f(x) + g(x)] dx$.

- (A) 8. (B) 7. (C) 9. (D) 6.

.....

✎ Ví dụ 40 (Mã 104 2017). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2 \sin x] dx = 5$.

- (A) $I = 7$. (B) $I = 5 + \frac{\pi}{2}$. (C) $I = 3$. (D) $I = 5 + \pi$.

.....

✎ Ví dụ 41 (Mã 110 2017). Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$.

Tính $I = \int_{-1}^2 [x + 2f(x) - 3g(x)] dx$.

Ⓐ $I = \frac{17}{2}$.

Ⓑ $I = \frac{5}{2}$.

Ⓒ $I = \frac{7}{2}$.

Ⓓ $I = \frac{11}{2}$.

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 42 (THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019).** Cho hai tích phân $\int_{-2}^5 f(x) dx = 8$

và $\int_5^{-2} g(x) dx = 3$. Tính $I = \int_{-2}^5 [f(x) - 4g(x) - 1] dx$

Ⓐ 13.

Ⓑ 27.

Ⓒ -11.

Ⓓ 3.

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 43 (Sở Bình Phước 2019).** Cho $\int_{-1}^2 f(x) dx = 2$ và $\int_{-1}^2 g(x) dx = -1$, khi đó

$\int_{-1}^2 [x + 2f(x) + 3g(x)] dx$ bằng

Ⓐ $\frac{5}{2}$.

Ⓑ $\frac{7}{2}$.

Ⓒ $\frac{17}{2}$.

Ⓓ $\frac{11}{2}$.

.....

.....

.....

✍ **Ví dụ 44 (Sở Phú Thọ 2019).** Cho $\int_0^2 f(x) dx = 3$, $\int_0^2 g(x) dx = -1$ thì

$\int_0^2 [f(x) - 5g(x) + x] dx$ bằng

Ⓐ 12.

Ⓑ 0.

Ⓒ 8.

Ⓓ 10.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 45 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019). Cho $\int_0^5 f(x) dx = -2$. Tích

phân $\int_0^5 [4f(x) - 3x^2] dx$ bằng

- (A) -140. (B) -130. (C) -120. (D) -133.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 46 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019). Cho $\int_1^2 [4f(x) - 2x] dx = 1$.

Khi đó $\int_1^2 f(x) dx$ bằng:

- (A) 1. (B) -3. (C) 3. (D) -1.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 47. Cho $\int_0^1 f(x) dx = 1$ tích phân $\int_0^1 (2f(x) - 3x^2) dx$ bằng

- (A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) -1.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 48 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019).** Tính tích phân $I = \int_{-1}^0 (2x + 1) dx$.

(A) $I = 0$.

(B) $I = 1$.


(C) $I = 2$.

(D) $I = -\frac{1}{2}$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 49.** Tích phân $\int_0^1 (3x + 1)(x + 3) dx$ bằng

(A) 12.

(B) 9.

(C) 5.

(D) 6.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 50 (KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ -2019).** Giá trị của $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ bằng

(A) 0.

(B) 1.

(C) -1.

(D) $\frac{\pi}{2}$.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 51 (KTNL GV Bắc Giang 2019).** Tính tích phân $I = \int_0^2 (2x + 1) dx$

(A) $I = 5$.

(B) $I = 6$.

(C) $I = 2$.

(D) $I = 4$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 52. Với a, b là các tham số thực. Giá trị tích phân $\int_0^b (3x^2 - 2ax - 1) dx$ bằng

(A) $b^3 - b^2a - b.$
 (B) $b^3 + b^2a + b.$
 (C) $b^3 - ba^2 - b.$
 (D) $3b^2 - 2ab - 1.$

✎ Ví dụ 53 (THPT An Lão Hải Phòng 2019). Giả sử $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx = a + b\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Khi đó giá trị của $a - b$ là

(A) $-\frac{1}{6}.$
 (B) $-\frac{1}{6}.$
 (C) $-\frac{3}{10}.$
 (D) $\frac{1}{5}.$

✎ Ví dụ 54 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và $\int_0^2 (f(x) + 3x^2) dx = 10$. Tính $\int_0^2 f(x) dx$.

(A) 2.
 (B) -2.
 (C) 18.
 (D) -18.

✎ Ví dụ 55 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019). Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

(A) $(-1; 2).$
 (B) $(-\infty; 0).$
 (C) $(0; 4).$
 (D) $(-3; 1).$

✍ Ví dụ 56 (Mã 104 2018). $\int_1^2 \frac{dx}{2x+3}$ bằng

Ⓐ $\frac{1}{2} \ln 35$.

Ⓑ $\ln \frac{7}{5}$.

Ⓒ $\frac{1}{2} \ln \frac{7}{5}$.

Ⓓ $2 \ln \frac{7}{5}$.

✍ Ví dụ 57 (Mã 103 2018). $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

Ⓐ $2 \ln 2$.

Ⓑ $\frac{1}{3} \ln 2$.

Ⓒ $\frac{2}{3} \ln 2$.

Ⓓ $\ln 2$.

✍ Ví dụ 58 (Đề Tham Khảo 2018). Tích phân $\int_0^2 \frac{dx}{x+3}$ bằng

Ⓐ $\frac{2}{15}$.

Ⓑ $\frac{16}{225}$.

Ⓒ $\log \frac{5}{3}$.

Ⓓ $\ln \frac{5}{3}$.

✍ Ví dụ 59 (Mã 105 2017). Cho $\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = a \ln 2 + b \ln 3$ với a, b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $a + 2b = 0$.

Ⓑ $a + b = 2$.

Ⓒ $a - 2b = 0$.

Ⓓ $a + b = -2$.

.....

.....

✍ Ví dụ 60 (THPT An Lão Hải Phòng 2019). Tính tích phân $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$

- (A) $I = \frac{1}{e}$.
 (B) $I = \frac{1}{e} + 1$.
 (C) $I = 1$.
 (D) $I = e$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 61 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019). Tính tích phân $I = \int_0^3 \frac{dx}{x+2}$.

- (A) $I = -\frac{21}{100}$.
 (B) $I = \ln \frac{5}{2}$.
 (C) $I = \log \frac{5}{2}$.
 (D) $I = \frac{4581}{5000}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 62 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-2019). $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$ bằng

- (A) $2 \ln 2$.
 (B) $\frac{2}{3} \ln 2$.
 (C) $\ln 2$.
 (D) $\frac{1}{3} \ln 2$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 63. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x-1}{x} dx$.

- (A) $I = 1 - \ln 2$.
 (B) $I = \frac{7}{4}$.
 (C) $I = 1 + \ln 2$.
 (D) $I = 2 \ln 2$.

.....

.....

✎ Ví dụ 64. Biết $\int_1^3 \frac{x+2}{x} dx = a + b \ln c$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}, c < 9$ Tính tổng $S = a + b + c$
 (A) $S = 7$. (B) $S = 5$. (C) $S = 8$. (D) $S = 6$.

.....

✎ Ví dụ 65 (Mã 110 2017). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
 Tính: $I = F(e) - F(1)$?
 (A) $I = \frac{1}{2}$. (B) $I = \frac{1}{e}$. (C) $I = 1$. (D) $I = e$.

.....

✎ Ví dụ 66 (Mã 102 2018). $\int_0^1 e^{3x+1} dx$ bằng
 (A) $\frac{1}{3}(e^4 + e)$. (B) $e^3 - e$. (C) $\frac{1}{3}(e^4 - e)$. (D) $e^4 - e$.

.....

✎ Ví dụ 67 (Mã 101 2018). $\int_1^2 e^{3x-1} dx$ bằng
 (A) $\frac{1}{3}(e^5 + e^2)$. (B) $\frac{1}{3}(e^5 - e^2)$. (C) $\frac{1}{3}e^5 - e^2$. (D) $e^5 - e^2$.

.....

.....

✍ Ví dụ 68 (Mã 123 2017). Cho $\int_0^6 f(x) dx = 12$. Tính $I = \int_0^2 f(3x) dx$

- A $I = 5$.
 B $I = 36$.
 C $I = 4$.
 D $I = 6$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 69 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019). Tích phân $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ có giá trị bằng

- A $\ln 2 - 1$.
 B $-\ln 2$.
 C $\ln 2$.
 D $1 - \ln 2$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 70 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên -2019). Tính $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$.

- A $K = \ln 2$.
 B $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$.
 C $K = 2 \ln 2$.
 D $K = \ln \frac{8}{3}$.

.....

.....

.....

MỨC 7-8 ĐIỂM

📄 Dạng 2.6. Tích phân cơ bản có điều kiện

✍ Ví dụ 1 (Kinh Môn-Hải Dương 2019). Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{2}{x+2}$. Biết $F(-1) = 0$. Tính $F(2)$ kết quả là.

(A) $\ln 8 + 1$.

(B) $4 \ln 2 + 1$.

(C) $2 \ln 3 + 2$.

(D) $2 \ln 4$.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2 (Mã 103-2019). Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

(A) $\frac{\pi^2 + 16\pi - 4}{16}$.

(B) $\frac{\pi^2 - 4}{16}$.

(C) $\frac{\pi^2 + 15\pi}{16}$.

(D) $\frac{\pi^2 + 16\pi - 16}{16}$.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3 (Mã 104-2019). Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \sin^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

(A) $\frac{\pi^2 - 2}{8}$.

(B) $\frac{\pi^2 + 8\pi - 8}{8}$.

(C) $\frac{\pi^2 + 8\pi - 2}{8}$.

(D) $\frac{3\pi^2 + 2\pi - 3}{8}$.

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 4 (Mã 102-2019). Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$,

khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng?

- A $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}$.
 B $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}$.
 C $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}$.
 D $\frac{\pi^2 + 2}{8}$.

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 5. Biết rằng hàm số $f(x) = mx + n$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = 3, \int_0^2 f(x) dx = 8$.

Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A $m + n = 4$.
 B $m + n = -4$.
 C $m + n = 2$.
 D $m + n = -2$.

.....

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6. Biết rằng hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ thỏa mãn $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{2}, \int_0^2 f(x) dx =$

-2 và

- A $-\frac{3}{4}$.
 B $-\frac{4}{3}$.
 C $\frac{4}{3}$.
 D $\frac{3}{4}$.

.....

✍ Ví dụ 7 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019). Có hai giá trị của số thực a là a_1, a_2 ($0 < a_1 < a_2$) thỏa mãn $\int_1^a (2x - 3) dx = 0$. Hãy tính $T = 3^{a_1} + 3^{a_2} + \log_2 \left(\frac{a_2}{a_1} \right)$.

- (A) $T = 26$. (B) $T = 12$. (C) $T = 13$. (D) $T = 28$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019).

Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1) dx = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- (A) $(-1; 2)$. (B) $(-\infty; 0)$. (C) $(0; 4)$. (D) $(-3; 1)$.

Câu 2 (Thi thử Lâmônôxốp-Hà Nội 2019).

Cho $I = \int_0^1 (4x - 2m^2) dx$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I + 6 > 0$?

- (A) 1. (B) 5. (C) 2. (D) 3.

Câu 3 (Sở GD Kon Tum-2019). Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của a để $\int_0^a (2x - 3) dx \leq 4$?

- (A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 3.

Câu 4 (THPT Lương Thế Vinh-HN 2018).

.Có bao nhiêu số thực b thuộc khoảng $(\pi; 3\pi)$ sao cho $\int_{\pi}^b 4 \cos 2x dx = 1$?

- (A) 8. (B) 2. (C) 4. (D) 6.

Câu 5 (Cần Thơ-2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$, $f(-3) + f(3) = f(-1) + f(1) = 2$. Giá trị biểu thức $f(-4) + f(0) + f(4)$ bằng

- (A) 4. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 6 (Chuyên Lương Thế Vinh-Đồng Nai-2018).

Biết $\int_1^4 \sqrt{\frac{1}{4x} + \frac{\sqrt{x} + e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}} dx = a + e^b - e^c$ với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$

- (A) $T = -3$. (B) $T = 3$. (C) $T = -4$. (D) $T = -5$.

Câu 7 (Sở Bạc Liêu-2018). Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng

- (A) $\frac{6 \ln 2 - 3}{4}$. (B) $\frac{6 \ln 2 + 3}{4}$. (C) $\frac{8 \ln 2 + 3}{4}$. (D) $\frac{8 \ln 2 - 3}{4}$.

Câu 8 (Chuyên Lương Văn Chánh-Phú Yên-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng.

- (A) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 16}{16}$. (B) $\frac{\pi^2 + 4}{16}$. (C) $\frac{\pi^2 + 14\pi}{16}$. (D) $\frac{\pi^2 + 16\pi + 4}{16}$.

Câu 9 (Sở Hà Tĩnh-2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^4 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tích phân

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{\pi^2 - 6}{18}$. (B) $\frac{\pi^2 - 3}{32}$. (C) $\frac{3\pi^2 - 16}{64}$. (D) $\frac{3\pi^2 - 6}{112}$.

Dạng 2.7. Tích phân hàm số hữu tỷ

Tính $I = \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} dx$? với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không chứa căn.

- Nếu bậc của tử $P(x) \geq$ bậc mẫu $Q(x) \xrightarrow{PP}$ chia đa thức.
- Nếu bậc của tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu số phân tích được thành tích số \xrightarrow{PP} đồng nhất thức để đưa thành tổng của các phân số.
- Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

$$-\frac{1}{(ax+m)(bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right) \quad (1)$$

$$- \frac{mx+n}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{(A+B)x - (Ab+Ba)}{(x-a)(x-b)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=m \\ Ab+Ba=-n \end{cases}$$

$$- \frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-m} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c} \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$- \frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{D}{(x-b)^2}.$$

- Nếu bậc tử $P(x) <$ bậc mẫu $Q(x)$ mà mẫu không phân tích được thành tích số, ta xét một số trường hợp thường gặp sau:

$$- I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, (n \in N^*) \xrightarrow{PP} x = a \cdot \tan t.$$

$$- I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, (\Delta < 0) = \int \frac{dx}{a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a}\right) \right]}.$$

$$\text{Ta sẽ đặt } \rightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4a}} \tan t.$$

$$- I_3 = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \cdot dx \text{ với } \Delta = b^2 - 4ac < 0.$$

$$\text{Ta sẽ phân tích: } I_3 = \frac{p}{2a} \underbrace{\int \frac{(2ax+b) dx}{ax^2+bx+c}}_A + \left(q - \frac{b \cdot p}{2a}\right) \cdot \underbrace{\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}}_{I_2} \text{ và giải A}$$

bằng cách đặt $t =$ mẫu số

✍ Ví dụ 1 (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019). Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)(2x+1)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$. Khi đó giá trị $a + b + c$ bằng

(A) -3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 0.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2 (THPT An Lão Hải Phòng 2019). Biết $I = \int_{-1}^0 \frac{3x^2 + 5x - 1}{x - 2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$). Khi đó giá trị của $a + 4b$ bằng

- (A) 50. (B) 60. (C) 59. (D) 40.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. Biết $\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x + 1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $m + n$.

- (A) $S = 1$. (B) $S = 4$. (C) $S = -5$. (D) $S = -1$.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4 (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019). Tích phân $I = \int_0^1 \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 1} dx = a - \ln b$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính giá trị của biểu thức $a + b$.

- (A) 1. (B) 0. (C) -1. (D) 3.

.....

.....

✍ Ví dụ 5 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019). Biết $\int_3^5 \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

(A) $S = 2$. (B) $S = -2$. (C) $S = 5$. (D) $S = 10$.

✍ Ví dụ 6 (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019). Cho $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{x}{x+1} \right) dx = \frac{10}{b} + \ln \frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $P = a + b$?

(A) $P = 1$. (B) $P = 5$. (C) $P = 7$. (D) $P = 2$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (Chuyên Sơn La 2019). Cho $\int_1^3 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) 0. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

Câu 2 (Sở Phú Thọ 2019). Cho $\int_3^4 \frac{5x-8}{x^2-3x+2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của 2^{a-3b+c} bằng

- (A) 12. (B) 6. (C) 1. (D) 64.

Câu 3. Biết $\int_3^5 \frac{x^2+x+1}{x+1} dx = a + \ln \frac{b}{2}$ với a, b là các số nguyên. Tính $S = a - 2b$.

- (A) $S = 2$. (B) $S = -2$. (C) $S = 5$. (D) $S = 10$.

Câu 4. Biết rằng $\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, a < 10$). Khi đó $a + b$ có giá trị bằng

- (A) 14. (B) 15. (C) 13. (D) 12.

Câu 5 (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019).

Biết $\int_0^2 \frac{x^2+5x+2}{x^2+4x+3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

- (A) -8. (B) -10. (C) -12. (D) 16.

Câu 6 (THPT Nguyễn Trãi-Dà Nẵng-2018).

Giả sử rằng $\int_{-1}^0 \frac{3x^2+5x-1}{x-2} dx = a \ln \frac{2}{3} + b$. Khi đó, giá trị của $a + 2b$ là

- (A) 30. (B) 60. (C) 50. (D) 40.

Câu 7 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019).

Biết $\int_1^4 \frac{x^3+x^2+7x+3}{x^2-x+3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a - b^2 - c^3$.

- (A) -5. (B) -4. (C) 5. (D) 0.

Câu 8. Cho $\int_0^1 \frac{4x^2+15x+11}{2x^2+5x+2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Biểu thức $T = a.c - b$ bằng

- (A) 4. (B) 6. (C) $-\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 9 (SGD Bến Tre 2019). Biết $\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1} dx = \frac{-1}{m} + n \ln 2$, với m, n là các số nguyên. Tính $S = m + n$.

- (A) $S = -1$. (B) $S = -5$. (C) $S = 1$. (D) $S = 4$.

Câu 10 (THPT Cẩm Bình 2019). Cho $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2} dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỷ. Khi đó $a + b$ bằng

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Câu 11 (Sở Hà Nam-2019). Cho $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x}{x^2 + 3x + 2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Tổng $a + b + c$ bằng

- (A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

Câu 12 (Chu Văn An-Hà Nội-2019).

Cho biết $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4x+3} dx = a \ln 5 + b \ln 3$, với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = a^2 + b^2$ bằng

- (A) 13. (B) 10. (C) 25. (D) 5.

Câu 13 (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019).

Biết $\int_0^2 \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x + 3} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$, ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của abc bằng

- (A) -8. (B) -10. (C) -12. (D) 16.

Câu 14 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Biết $\int_1^4 \frac{x^3 + x^2 + 7x + 3}{x^2 - x + 3} dx = \frac{a}{b} + c \ln 5$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Tính giá trị của $P = a - b^2 - c^3$.

- (A) -5. (B) -3. (C) 6. (D) -4.

Câu 15 (Bình Phước-2019). Cho $\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b^2 - c^3$ bằng

- (A) 3. (B) 6. (C) 5. (D) 4.

Câu 16 (SGD Đà Nẵng 2019). Cho $\int_3^4 \frac{2x+3}{x^2+3x} dx = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 7$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $2a + 3b + 7c$ bằng

- (A) -9. (B) 6. (C) 15. (D) 3.

Câu 17 (SGD Điện Biên-2019). Cho $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị $6a + b + c$ bằng:

- (A) -2. (B) 1. (C) 2. (D) -1.

Câu 18 (SP Đồng Nai-2019). Biết $\int_2^3 \frac{5x+12}{x^2+5x+6} dx = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 6$. Tính $S = 3a + 2b + c$.

- (A) -11. (B) -14. (C) -2. (D) 3.

Dạng 2.8. Tích phân đổi biến

✍ Ví dụ 1 (Đề Tham Khảo -2019). Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

- (A) 2. (B) 1. (C) -2. (D) -1.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2. Tính $K = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx$ bằng

- (A) $K = \ln 2$. (B) $K = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$. (C) $K = 2 \ln 2$. (D) $K = \ln \frac{8}{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3 (Chuyên Long An-2018). Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5} dx$, giả sử đặt $t = 1 + x^2$. Tìm mệnh đề đúng.

- (A) $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$. (B) $I = \int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5} dt$.
 (C) $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$. (D) $I = \frac{3}{2} \int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4} dt$.

.....

.....

✍ Ví dụ 4 (KTNL Gia Bình Năm 2019). Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2} dx = 1$.

- (A) 2. (B) 1. (C) 0. (D) 3.

✍ Ví dụ 5 (Nguyễn Huệ-Phú Yên-2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(1) = 0$ và $f'(x) = 2019 \cdot 2020 \cdot x(x-1)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{2}{2021}$. (B) $\frac{1}{1011}$. (C) $-\frac{2}{2021}$. (D) $-\frac{1}{1011}$.

✍ Ví dụ 6 (Đề Tham Khảo 2019). Cho $\int_0^1 \frac{x dx}{(x+2)^2} = a + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a + b + c$ bằng

- (A) -2. (B) -1. (C) 2. (D) 1.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7 (Chuyên Vĩnh Phúc 2019). Cho $\int 2x(3x - 2)^6 dx = A(3x - 2)^8 + B(3x - 2)^7 + C$ với $A, B, C \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $12A + 7B$.

A $\frac{23}{252}$
 B $\frac{241}{252}$
 C $\frac{52}{9}$
 D $\frac{7}{9}$

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8 (Chuyên Hà Tĩnh-2018). Biết $\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x + 1} dx = a - \ln b$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2$.

A 13.
 B 5.
 C 4.
 D 10.

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019).

Cho $\int_1^2 e^{3x-1} dx = m(e^p - e^q)$ với $m, p, q \in \mathbb{Q}$ và là các phân số tối giản. Giá trị $m+p+q$ bằng

- (A) 10. (B) 6. (C) $\frac{22}{3}$. (D) 8.

Câu 2. Biết rằng $\int_0^1 xe^{x^2+2} dx = \frac{a}{2}(e^b - e^c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Giá trị của $a+b+c$ bằng

- (A) 4. (B) 7. (C) 5. (D) 6.

Câu 3 (KTNL GV Lý Thái Tổ 2019). Biết $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+x \ln x} dx = \ln(ae+b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 - ab + b^2$

- (A) 3. (B) 1. (C) 0. (D) 8.

Câu 4 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n$, trong đó m, n, p, q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Tính $T = m+n+p+q$.

- (A) $T = 11$. (B) $T = 10$. (C) $T = 7$. (D) $T = 8$.

Câu 5. Số điểm cực trị của hàm số $f(x) = \int_{2x}^{\frac{x^2}{1+t^2}} 2t dt$ là

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Câu 6 (Chuyên Bắc Giang 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} đồng thời thỏa mãn $f(0) = f(1) = 5$. Tính tích phân $I = \int_0^1 f'(x) e^{f(x)} dx$.

- (A) $I = 10$. (B) $I = -5$. (C) $I = 0$. (D) $I = 5$.

Câu 7 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Cho hàm số $f(x)$ có $f(3) = 3$ và $f'(x) = \frac{x}{x+1-\sqrt{x+1}}$,

$\forall x > 0$. Khi đó $\int_3^8 f(x) dx$ bằng

- (A) 7. (B) $\frac{197}{6}$. (C) $\frac{29}{2}$. (D) $\frac{181}{6}$.

Câu 8 (Mã 102 2018). Cho $\int_5^{21} \frac{dx}{x\sqrt{x+4}} = a \ln 3 + b \ln 5 + c \ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a - b = -2c$. (B) $a + b = -2c$. (C) $a + b = c$. (D) $a - b = -c$.

Câu 9 (Mã 101 2018). Cho $\int_{16}^{55} \frac{dx}{x\sqrt{x+9}} = a \ln 2 + b \ln 5 + c \ln 11$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a + b = 3c$. (B) $a - b = -3c$. (C) $a - b = -c$. (D) $a + b = c$.

Câu 10 (Đề Tham Khảo 2017). Tính tích phân $I = \int_1^2 2x\sqrt{x^2 - 1} dx$ bằng cách đặt $u = x^2 - 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $I = \int_0^3 \sqrt{u} du.$ (B) $I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{u} du.$ (C) $I = 2 \int_0^3 \sqrt{u} du.$ (D) $I = \int_1^2 \sqrt{u} du.$

Câu 11 (Nguyễn Trãi-Thái Bình-2020).

Giả sử tích phân $I = \int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$. Lúc đó

- (A) $a + b + c = \frac{5}{3}.$ (B) $a + b + c = \frac{4}{3}.$ (C) $a + b + c = \frac{7}{3}.$ (D) $a + b + c = \frac{8}{3}.$

Câu 12 (Liên trường Nghệ An-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(2) = 0$ và $f'(x) = \frac{x+7}{\sqrt{2x-3}}, \forall x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. Biết rằng $\int_4^7 f\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b > 0, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng

- (A) 250. (B) 251. (C) 133. (D) 221.

Câu 13 (Nam Định-2018). Biết tích phân $\int_0^{\ln 6} \frac{e^x}{1 + \sqrt{e^x + 3}} dx = a + b \ln 2 + c \ln 3$, với a, b, c là các số nguyên. Tính $T = a + b + c$.

- (A) $T = -1.$ (B) $T = 0.$ (C) $T = 2.$ (D) $T = 1.$

Câu 14 (Chuyên Vinh-2018). Tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ bằng

- (A) $\frac{4}{3}.$ (B) $\frac{3}{2}.$ (C) $\frac{1}{3}.$ (D) $\frac{2}{3}.$

Câu 15 (Đề Tham Khảo 2018). Biết $\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+x\sqrt{x+1}}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - c$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$

- (A) $P = 18.$ (B) $P = 46.$ (C) $P = 24.$ (D) $P = 12.$

Câu 16 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019).

Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

- (A) $S = 1.$ (B) $S = \frac{1}{2}.$ (C) $S = \frac{3}{4}.$ (D) $S = \frac{2}{3}.$

Câu 17 (Gang Thép Thái Nguyên 2019).

Cho tích phân $I = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx$ và $x = 4 \sin t$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt.$ (B) $I = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt.$

$$\textcircled{C} I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2t) dt.$$

$$\textcircled{D} I = -16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt.$$

Câu 18. Biết $\int_1^5 \frac{1}{1 + \sqrt{3x+1}} dx = a + b \ln 3 + c \ln 5$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $a + b + c$ bằng

$$\textcircled{A} \frac{7}{3}.$$

$$\textcircled{B} \frac{5}{3}.$$

$$\textcircled{C} \frac{8}{3}.$$

$$\textcircled{D} \frac{4}{3}.$$

Câu 19. Cho $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}} dx = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{b}{c} + \sqrt{d} \right)$, với a, b, c, d là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ tối giản.

Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

$$\textcircled{A} 12.$$

$$\textcircled{B} 10.$$

$$\textcircled{C} 18.$$

$$\textcircled{D} 15.$$

Câu 20 (Lê Quý Đôn-Quảng Trị-2018).

Cho biết $\int_0^{\sqrt{7}} \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx = \frac{m}{n}$ với $\frac{m}{n}$ là một phân số tối giản. Tính $m - 7n$

$$\textcircled{A} 0.$$

$$\textcircled{B} 1.$$

$$\textcircled{C} 2.$$

$$\textcircled{D} 91.$$

Câu 21 (Chuyên Đại Học Vinh 2019).

Biết rằng $\int_0^1 \frac{dx}{3x + 5\sqrt{3x+1} + 7} = a \ln 2 + b \ln 3 + c \ln 5$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của $a + b + c$ bằng

$$\textcircled{A} -\frac{10}{3}.$$

$$\textcircled{B} -\frac{5}{3}.$$

$$\textcircled{C} \frac{10}{3}.$$

$$\textcircled{D} \frac{5}{3}.$$

Câu 22. Biết $\int_1^e \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx = a + b\sqrt{2}$ với a, b là các số hữu tỷ. Tính $S = a + b$.

$$\textcircled{A} S = 1.$$

$$\textcircled{B} S = \frac{1}{2}.$$

$$\textcircled{C} S = \frac{3}{4}.$$

$$\textcircled{D} S = \frac{2}{3}.$$

Câu 23 (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019).

Cho $\int_0^3 \frac{x}{4 + 2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{3} + b \ln 2 + c \ln 3$ với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng:

$$\textcircled{A} 9.$$

$$\textcircled{B} 2.$$

$$\textcircled{C} 1.$$

$$\textcircled{D} 7.$$

Câu 24 (THPT Ba Đình 2019). Cho $I = \int_0^3 \frac{x}{4 + 2\sqrt{x+1}} dx = \frac{a}{d} + b \ln 2 + c \ln d$, với a, b, c, d là các số nguyên và $\frac{a}{d}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng

$$\textcircled{A} 16.$$

$$\textcircled{B} 4.$$

$$\textcircled{C} 28.$$

$$\textcircled{D} -2.$$

Câu 25. Tính $I = \int_0^a \frac{x^3 + x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

$$\textcircled{A} I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1.$$

$$\textcircled{B} I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} - 1].$$

$$\textcircled{C} I = \frac{1}{3} [(a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1].$$

$$\textcircled{D} I = (a^2 + 1) \sqrt{a^2 + 1} + 1.$$

Câu 26 (THCS-THPT Nguyễn Khuyến-2018).

Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ bằng tích phân nào dưới đây?

- (A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin^2 y dy.$ (B) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$ (C) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 y}{\cos y} dy.$ (D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 y dy.$

Câu 27 (Chuyên Thăng Long-Đà Lạt-2018).

Biết $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x^2-1} dx = \frac{b}{a} \ln 5 - c \ln 2$ với a, b, c là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là tối giản.

Tính $P = 3a + 2b + c.$

- (A) 11. (B) 12. (C) 14. (D) 13.

Câu 28 (Bình Giang-Hải Dương-2018).

Cho tích phân $\int_1^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = a + b\sqrt{6} + c \ln \left(\frac{5\sqrt{6}+12}{5\sqrt{6}-12} \right) + d \ln 2$ với a, b, c, d là các số hữu tỉ.

Tính tổng $a + b + c + d.$

- (A) $-\frac{1}{3}.$ (B) $-\frac{3}{25}.$ (C) $-\frac{3}{2}.$ (D) $-\frac{3}{20}.$

Câu 29 (Sở Hưng Yên-2018). Cho tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ nếu đổi biến số $x = 2 \sin t, t \in$

$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì ta được.

- (A) $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dt.$ (B) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} dt.$ (C) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt.$ (D) $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{t}.$

Câu 30 (THPT Phú Lương-Thái Nguyên-2018).

Biết $\int_0^1 \frac{x^3}{x + \sqrt{1+x^2}} dx = \frac{a\sqrt{b}+c}{15}$ với a, b, c là các số nguyên và $b \geq 0$. Tính $P = a + b^2 - c.$

- (A) $P = 3.$ (B) $P = 7.$ (C) $P = -7.$ (D) $P = 5.$

Câu 31. Cho n là số nguyên dương khác 0, hãy tính tích phân $I = \int_0^1 (1-x^2)^n x dx$ theo $n.$

- (A) $I = \frac{1}{2n+2}.$ (B) $I = \frac{1}{2n}.$ (C) $I = \frac{1}{2n-1}.$ (D) $I = \frac{1}{2n+1}.$

Câu 32 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Giả sử $I = \int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = a \ln \frac{2}{3} + b$ với a, b là số nguyên. Khi đó giá trị $a - b$ là

- (A) -17. (B) 5. (C) -5. (D) 17.

Câu 33 (Tiên Du-Bắc Ninh-2020). Cho hàm số $f(x)$ có $f(\sqrt{2}) = -2$ và $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{6-x^2}}, \forall x \in$

$(-\sqrt{6}; \sqrt{6})$. Khi đó $\int_0^{\sqrt{3}} f(x) \cdot dx$ bằng

- (A) $-\frac{3\pi}{4}$. (B) $\frac{3\pi + 6}{4}$. (C) $\frac{\pi + 2}{4}$. (D) $-\frac{3\pi + 6}{4}$.

Câu 34 (Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-2018).

Biết $\int_1^2 \frac{x}{3x + \sqrt{9x^2 - 1}} dx = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{35}$ với a, b, c là các số hữu tỷ, tính $P = a + 2b + c - 7$.

- (A) $-\frac{1}{9}$. (B) $\frac{86}{27}$. (C) -2 . (D) $\frac{67}{27}$.

Câu 35 (THPT Phan Chu Trinh-Đắc Lắc-2018).

Biết $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x+1} + (x+1)\sqrt{x}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = a + b + c$.

- (A) $P = 44$. (B) $P = 42$. (C) $P = 46$. (D) $P = 48$.

Câu 36 (Sở Phú Thọ-2018). Biết $\int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1} dx}{2x + 3\sqrt{2x+1} + 3} = a + b \ln 2 + c \ln \frac{5}{3}$ ($a, b, c \in \mathbb{Z}$). Tính $T = 2a + b + c$.

- (A) $T = 4$. (B) $T = 2$. (C) $T = 1$. (D) $T = 3$.

Câu 37 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \cos x \cos^2 2x, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\pi} f(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{1042}{225}$. (B) $\frac{208}{225}$. (C) $\frac{242}{225}$. (D) $\frac{149}{225}$.

Câu 38 (Sở Bình Phước-2020). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{b}$. Giá trị của $a + b$ bằng

- (A) 0. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Câu 39 (Đề Minh Họa 2017). Tính tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$.

- (A) $I = -\frac{1}{4}$. (B) $I = -\frac{1}{4}\pi^4$. (C) $I = -\pi^4$. (D) $I = 0$.

Câu 40 (THPT Kinh Môn-2018). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - 5 \sin x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, tính tổng $S = a + b + c$

- (A) $S = 1$. (B) $S = 4$. (C) $S = 3$. (D) $S = 0$.

Câu 41 (Bình Dương 2018). Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 + \cos x} \cdot \sin x dx$. Nếu đặt $t = 2 + \cos x$ thì kết quả nào sau đây đúng?

(A) $I = \int_3^2 \sqrt{t} dt.$
 (B) $I = \int_2^3 \sqrt{t} dt.$
 (C) $I = 2 \int_3^2 \sqrt{t} dt.$
 (D) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t} dt.$

Câu 42 (Đồng Tháp-2018). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng cách đặt $u = \tan x$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $I = \int_0^{\frac{4}{\pi}} u^2 du.$
 (B) $I = \int_0^2 \frac{1}{u^2} du.$
 (C) $I = - \int_0^1 u^2 du.$
 (D) $I = \int_0^1 u^2 du.$

Câu 43 (THPT Lê Quý Đôn-Hà Nội-2018).

Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$

(A) $I = \frac{5}{2}.$
 (B) $I = \frac{3}{2}.$
 (C) $I = \frac{\pi}{3} + \frac{9}{20}.$
 (D) $I = \frac{9}{4}.$

Câu 44 (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-2018).

Cho tích phân $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $2a + b = 0.$
 (B) $a - 2b = 0.$
 (C) $2a - b = 0.$
 (D) $a + 2b = 0.$

Câu 45 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019).

Có bao nhiêu số $a \in (0; 20\pi)$ sao cho $\int_0^a \sin^5 x \sin 2x dx = \frac{2}{7}.$

(A) 10.
 (B) 9.
 (C) 20.
 (D) 19.

Câu 46 (HSG Bắc Ninh 2019). Biết $F(x)$ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$ và

$F(0) = 2.$ Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(A) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} - 8}{3}.$
 (B) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2} + 8}{3}.$
 (C) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 8}{3}.$
 (D) $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4\sqrt{2} + 8}{3}.$

Câu 47. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{1 + \sin x} = \frac{a\sqrt{3} + b}{c},$ với $a, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}^+$ và a, b, c là các số nguyên tố cùng nhau. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

(A) 5.
 (B) 12.
 (C) 7.
 (D) -1.

Câu 48. Cho tích phân số $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + 2} dx = a \ln 5 + b \ln 2$ với $a, b \in \mathbb{Z}.$ Mệnh đề nào dưới đây

đúng?

- (A) $2a + b = 0$. (B) $a - 2b = 0$. (C) $2a - b = 0$. (D) $a + 2b = 0$.

Câu 49 (THPT Nghèn-Hà Tĩnh-2018).

Cho $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(\cos x)^2 - 5 \cos x + 6} dx = a \ln \frac{4}{c} + b$, với a, b là các số hữu tỉ, $c > 0$. Tính tổng m .

- (A) $S = 3$. (B) $S = 0$. (C) $S = 1$. (D) $S = 4$.

Câu 50 (Thanh Chương 1-Nghệ An-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 1$ và $f'(x) = \tan^3 x + \tan x, \forall x \in \mathbb{R}$. Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{a + \pi}{b}; a, b \in \mathbb{Q}$, khi đó $b - a$ bằng

- (A) 4. (B) 12. (C) 0. (D) -4.

Câu 51 (Tiên Lãng-Hải Phòng-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(0) = 0$ và $f'(x) = \sin^8 x - \cos^8 x - 4 \sin^6 x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $I = \int_0^{\pi} 16f(x) dx$.

- (A) $I = 10\pi^2$. (B) $I = 160\pi$. (C) $I = 16\pi^2$. (D) $I = -10\pi^2$.

Câu 52 (Đề Tham Khảo 2017). Cho $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = a + b \ln \frac{1+e}{2}$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $S = a^3 + b^3$.

- (A) $S = -2$. (B) $S = 0$. (C) $S = 1$. (D) $S = 2$.

Câu 53 (Cần Thơ-2018). Cho tích phân $I = \int_1^e \frac{3 \ln x + 1}{x} dx$. Nếu đặt $t = \ln x$ thì

- (A) $I = \int_0^1 \frac{3t + 1}{e^t} dt$. (B) $I = \int_1^e \frac{3t + 1}{t} dt$. (C) $I = \int_1^e (3t + 1) dt$. (D) $I = \int_0^1 (3t + 1) dt$.

Câu 54 (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019).

Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + \frac{c}{3}$, với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Khẳng định nào sau đây đúng.

- (A) $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. (B) $a^2 + b^2 + c^2 = 11$. (C) $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. (D) $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Câu 55 (Việt Đức Hà Nội 2019). Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ là:

- (A) $T = 11$. (B) $T = 9$. (C) $T = 10$. (D) $T = 8$.

Câu 56. Cho $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x + 2)^2} dx$ có kết quả dạng $I = \ln a + b$ với $a > 0, b \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $2ab = -1$. (B) $2ab = 1$. (C) $-b + \ln \frac{3}{2a} = -\frac{1}{3}$. (D) $-b + \ln \frac{3}{2a} = \frac{1}{3}$.

Câu 57 (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019).

Cho $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 2)^2} dx = \ln \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ với a, b, c là các số nguyên dương, biết $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính giá trị $a + b + c + d$?

- (A) 18. (B) 15. (C) 16. (D) 17.

Câu 58 (Kim Liên-Hà Nội-2018). Biết $\int_0^1 \frac{\pi x^3 + 2^x + e x^3 \cdot 2^x}{\pi + e \cdot 2^x} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{e \ln n} \ln \left(p + \frac{e}{e + \pi} \right)$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tính tổng $S = m + n + p$.

- (A) $S = 6$. (B) $S = 5$. (C) $S = 7$. (D) $S = 8$.

Câu 59 (THPT-Yên Định Thanh Hóa 2019).

Cho $\int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = a \cdot e^3 + b + c \cdot \ln(e + 1)$ với a, b, c là các số nguyên và $\ln e = 1$. Tính $P = a^2 + b^2 + c^2$.

- (A) $P = 9$. (B) $P = 14$. (C) $P = 10$. (D) $P = 3$.

Câu 60. Biết $I = \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x + 3e^{-x} + 4} = \frac{1}{c} (\ln a - \ln b + \ln c)$ với a, b, c là các số nguyên dương. Tính $P = 2a - b + c$.

- (A) $P = -3$. (B) $P = -1$. (C) $P = 4$. (D) $P = 3$.

Câu 61 (Chuyên Hạ Long-2018). Biết $\int_1^2 \frac{x + 1}{x^2 + x \ln x} dx = \ln(\ln a + b)$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $P = a^2 + b^2 + ab$.

- (A) 10. (B) 8. (C) 12. (D) 6.

Câu 62 (Chuyên Thái Bình 2018). Cho $\int_0^1 \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx = a \cdot e + b \ln(e + c)$ với $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính $P = a + 2b - c$.

- (A) $P = 1$. (B) $P = -1$. (C) $P = 0$. (D) $P = -2$.

Câu 63 (Chuyên KHTN-2020). Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f(0) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = xe^{x^2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 xf(x) dx$ bằng

- (A) $\frac{e + 1}{4}$. (B) $\frac{e - 1}{4}$. (C) $\frac{e - 1}{2}$. (D) $\frac{e + 1}{2}$.

Câu 64 (Chuyên Nguyễn Bình Khiêm-Quảng Nam-2020).

Biết rằng $\int_1^e \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln x + 1)^2} dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b + c$.

- (A) $S = 3$. (B) $S = 7$. (C) $S = 10$. (D) $S = 5$.

Dạng 2.9. Tích phân từng phần

✍ Ví dụ 1 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2). Xét $\int_0^2 x e^{x^2} dx$, nếu đặt $u = x^2$ thì $\int_0^2 x e^{x^2} dx$ bằng

(A) $2 \int_0^2 e^u du.$

(B) $2 \int_0^4 e^u du.$

(C) $\frac{1}{2} \int_0^2 e^u du.$

(D) $\frac{1}{2} \int_0^4 e^u du.$

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2 (Đề Minh Họa 2017). Tính tích phân $I = \int_1^e x \ln x dx$:

(A) $I = \frac{e^2 - 1}{4}.$

(B) $I = \frac{1}{2}.$

(C) $I = \frac{e^2 - 2}{2}.$

(D) $I = \frac{e^2 + 1}{4}.$

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3 (Mã 103 2018). Cho $\int_1^e (1 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $a + b = c.$

(B) $a + b = -c.$

(C) $a - b = c.$

(D) $a - b = -c.$

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4 (Mã 104 2018). Cho $\int_1^e (2 + x \ln x) dx = ae^2 + be + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $a + b = c.$
 (B) $a - b = c.$
 (C) $a - b = -c.$
 (D) $a + b = -c.$

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5 (THPT Nguyễn Việt Xuân-2020). Biết $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx = a \ln 2 - \frac{b}{c}$ (với $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Tính $P = 13a + 10b + 84c$.

- (A) 193.
 (B) 191.
 (C) 190.
 (D) 189.

.....

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6 (Nguyễn Trãi-Thái Bình-2020). Cho a là số thực dương. Tính $I = \int_0^a \sin^{2016} x \cdot \cos(2018x) dx$ bằng:

- (A) $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \sin 2017a}{2016}.$
 (B) $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}.$
 (C) $I = \frac{\sin^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2016}.$
 (D) $I = \frac{\cos^{2017} a \cdot \cos 2017a}{2017}.$

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1 (Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình-2020).

Cho hàm số $f(x)$ có $f(0) = -1$ và $f'(x) = x(6 + 12x + e^{-x})$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^1 f(x) dx$ bằng

- (A) $3e$. (B) $3e^{-1}$. (C) $4 - 3e^{-1}$. (D) $-3e^{-1}$.

Câu 2 (Chuyên Bắc Ninh-2020). Biết $I = \int_0^4 x \ln(x^2 + 9) dx = a \ln 5 + b \ln 3 + c$ trong đó a, b, c là các số thực. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

- (A) $T = 9$. (B) $T = 11$. (C) $T = 8$. (D) $T = 10$.

Câu 3 (Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-2020).

Xét hàm số $f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x) dx$. Giá trị của $f(\ln(5620))$ bằng

- (A) 5622. (B) 5620. (C) 5618. (D) 5621.

Câu 4. Tích phân $\int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$ bằng

- (A) $\frac{-5 - 3e^2}{4}$. (B) $\frac{5 - 3e^2}{4}$. (C) $\frac{5 - 3e^2}{2}$. (D) $\frac{5 + 3e^2}{4}$.

Câu 5 (THPT Cẩm Giàng 2 2019). Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b \cdot e$, tích $a \cdot b$ bằng

- (A) -15 . (B) -1 . (C) 1 . (D) 20 .

Câu 6 (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019).

Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

- (A) $P = 6$. (B) $P = 5$. (C) $P = -6$. (D) $P = 4$.

Câu 7 (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019).

Cho tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x - 1) \sin 2x \, dx$ Tìm đẳng thức đúng?

- (A) $I = -(x - 1) \cos 2x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx.$ (B) $I = -\frac{1}{2} (x - 1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx.$
- (C) $I = -\frac{1}{2} (x - 1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx.$ (D) $I = -(x - 1) \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx.$

Câu 8 (Chuyên KHTN 2019). Biết rằng tồn tại duy nhất các bộ số nguyên a, b, c sao cho

$\int_2^3 (4x + 2) \ln x \, dx = a + b \ln 2 + c \ln 3.$ Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) 19. (B) -19. (C) 5. (D) -5.

Câu 9 (HSG Bắc Ninh 2019). Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} \, dx = a \ln 2 + b \ln 3,$ với a, b là các số hữu tỉ. Tính

$P = a + 4b.$

- (A) $P = 0.$ (B) $P = 1.$ (C) $P = 3.$ (D) $P = -3.$

Câu 10. Tính tích phân $I = \int_1^{2^{1000}} \frac{\ln x}{(x+1)^2} \, dx,$ ta được

- (A) $I = -\frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} + 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}.$ (B) $I = -\frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} + \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}.$
- (C) $I = \frac{\ln 2^{1000}}{1+2^{1000}} - 1001 \ln \frac{2}{1+2^{1000}}.$ (D) $I = \frac{1000 \ln 2}{1+2^{1000}} - \ln \frac{2^{1000}}{1+2^{1000}}.$

Câu 11. Biết $\int_0^2 2x \ln(x+1) \, dx = a \ln b,$ với $a, b \in \mathbb{N}^*, b$ là số nguyên tố. Tính $6a + 7b.$

- (A) $6a + 7b = 33.$ (B) $6a + 7b = 25.$ (C) $6a + 7b = 42.$ (D) $6a + 7b = 39.$

Câu 12 (Chuyên Hưng Yên 2019). Biết rằng $\int_1^a \ln x \, dx = 1 + 2a, (a > 1)$ Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- (A) $a \in (18; 21).$ (B) $a \in (1; 4).$ (C) $a \in (11; 14).$ (D) $a \in (6; 9).$

Câu 13 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Cho tích phân $\int_0^1 (x - 2)e^x \, dx = a + be,$ với $a; b \in \mathbb{Z}.$ Tổng $a + b$ bằng

- (A) 1. (B) -3. (C) 5. (D) -1.

Câu 14 (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh -2019).

Tính tích phân $I = \int_1^2 xe^x \, dx.$

- (A) $I = e^2.$ (B) $I = -e^2.$ (C) $I = e.$ (D) $I = 3e^2 - 2e.$

Câu 15 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019).

Biết rằng $\int_2^3 x \ln x \, dx = m \ln 3 + n \ln 2 + p$ trong đó $m, n, p \in \mathbb{Q}$. Tính $m + n + 2p$

- (A) $\frac{5}{4}$. (B) $\frac{9}{2}$. (C) 0. (D) $-\frac{5}{4}$.

Câu 16 (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019).

Biết $\int_0^2 2x \ln(1+x) \, dx = a \cdot \ln b$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$, b là số nguyên tố. Tính $3a + 4b$.

- (A) 42. (B) 21. (C) 12. (D) 32.

Câu 17 (Chuyên Quốc Học Huế 2019).

Cho tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \, dx = \frac{b}{c} + a \ln 2$ với a là số thực, b và c là các số nguyên dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + 3b + c$.

- (A) $P = 6$. (B) $P = -6$. (C) $P = 5$. (D) $P = 4$.

Câu 18. Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$. Khi đó, giá trị của $a^2 + b$ bằng

- (A) 11. (B) 7. (C) 13. (D) 9.

Câu 19. Cho $\int \ln(x^2 - x) \, dx = F(x)$, $F(2) = 2 \ln 2 - 4$. Khi đó $I = \int_2^3 \left[\frac{F(x) + 2x + \ln(x-1)}{x} \right] dx$ bằng

- (A) $3 \ln 3 - 3$. (B) $3 \ln 3 - 2$. (C) $3 \ln 3 - 1$. (D) $3 \ln 3 - 4$.

Câu 20 (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019).

Biết $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \frac{\sqrt{3}}{a} \pi - \ln b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + b$

- (A) $T = 9$. (B) $T = 13$. (C) $T = 7$. (D) $T = 11$.

Câu 21 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019).

Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+2x)}{x^2} \, dx = \frac{a}{2} \ln 5 + b \ln 3 + c \ln 2$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị của $a + 2(b + c)$ là:

- (A) 0. (B) 9. (C) 3. (D) 5.

Câu 22. Cho $\int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} \, dx = a \ln 2 + b \ln 3$, với a, b là các số hữu tỉ. Tính $P = ab$.

- (A) $P = \frac{3}{2}$. (B) $P = 0$. (C) $P = \frac{-9}{2}$. (D) $P = -3$.

Câu 23 (KTNL GV Bắc Giang 2019).

Cho tích phân $\int_0^1 (x - 2)e^x dx = a + be$, với $a; b \in \mathbb{Z}$. Tổng $a + b$ bằng

- (A) 1. (B) -3. (C) 5. (D) -1.

Câu 24 (Sở Phú Thọ 2019). Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\sin x + 2 \cos x)}{\cos^2 x} dx = a \ln 3 + b \ln 2 + c\pi$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Giá trị của abc bằng

- (A) $\frac{15}{8}$. (B) $\frac{5}{8}$. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $\frac{17}{8}$.

Câu 25 (Chuyên Thái Bình 2019). Biết $\int_{\frac{1}{12}}^{12} \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx = \frac{a}{b} e^{\frac{c}{d}}$ trong đó a, b, c, d là các số nguyên dương và các phân số $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là tối giản. Tính $bc - ad$.

- (A) 12. (B) 1. (C) 24. (D) 64.

Câu 26 (THPT Yên Khánh A 2018). Cho $\int_0^2 \frac{x + \ln(x + 1)}{(x + 2)^2} dx = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \ln 3$ (với $a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $P = (a + b)(c + d)$.

- (A) 7. (B) -7. (C) 3. (D) -3.

Câu 27 (Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-2020).

Cho hàm số $y = f(x)$ có $f(1) = \frac{1}{2}$ và $f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ với $x > -1$. Biết $\int_1^2 f(x) dx = a \ln \frac{b}{c} - d$ với a, b, c, d là các số nguyên dương, $b \leq 3$ và $\frac{b}{c}$ tối giản. Khi đó $a + b + c + d$ bằng

- (A) 8. (B) 5. (C) 6. (D) 10.

§3. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

A. CÁC DẠNG BÀI TẬP CƠ BẢN

📄 Dạng 3.10. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

- Hình phẳng giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : y = g(x) \\ x = a, x = b (a < b) \end{cases}$ thì diện tích là $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- Hình phẳng (H) giới hạn bởi $\begin{cases} (C_1) : y = f(x) \\ (C_2) : Ox (y = 0) \\ x = a, x = b (a < b) \end{cases}$ thì diện tích là $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Hình thức đề thường hay cho

- Hình thức 1: Không cho hình vẽ, cho dạng (H) : $\{y = f(x), y = g(x), x = a, x = b (a < b)\}$ $\xrightarrow{\text{casio}} \int_a^b |f(x) - g(x)| dx =$ kết quả, so sánh với bốn đáp án.
- Hình thức 2: Không cho hình vẽ, cho dạng (H) : $\{y = f(x), y = g(x)\}$, cho $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm x_1, \dots, x_i , với x_1 nhỏ nhất, x_i lớn nhất $\xrightarrow{\text{casio}} \int_{x_1}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx$
- Hình thức 3: Cho hình vẽ, sẽ giải phương trình tìm tọa độ giao điểm (nếu chưa cho trên hình), chia từng diện tích nhỏ, xỏ hình từ trên xuống, ghi công thức và bấm máy tính.
- Hình thức 4: Cho ba hàm trở lên, chẳng hạn $y = f(x), y = g(x), y = h(x)$ ta nên vẽ hình.

✍ Ví dụ 1 (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ được tính theo công thức

Ⓐ $S = \int_a^b |f(x)| dx.$

Ⓑ $S = \int_a^b f(x) dx.$

Ⓒ $S = - \int_a^b f(x) dx.$

Ⓓ $S = \int_b^a |f(x)| dx.$

.....

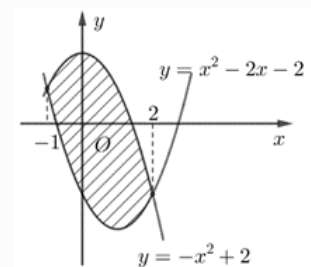
✍ Ví dụ 2 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng được gạch chéo trong hình bên bằng

Ⓐ $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$

Ⓑ $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$

Ⓒ $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$

Ⓓ $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$



.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2). Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x^2$, $y = -1$, $x = 0$ và $x = 1$ được tính bởi công thức nào sau đây?

(A) $S = \pi \int_0^1 (2x^2 + 1) dx.$

(B) $S = \int_0^1 (2x^2 - 1) dx.$

(C) $S = \int_0^1 (2x^2 + 1)^2 dx.$

(D) $S = \int_0^1 (2x^2 + 1) dx.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4 (Mã 101-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 4$ và $y = 2x - 4$ bằng

(A) 36.

(B) $\frac{4}{3}.$

(C) $\frac{4\pi}{3}.$

(D) $36\pi.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5 (Mã 102-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 1$ và $y = x - 1$ là

(A) $\frac{\pi}{6}.$

(B) $\frac{13}{6}.$

(C) $\frac{13\pi}{6}.$

(D) $\frac{1}{6}.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6 (Mã 104-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 3$ và $y = x - 3$ bằng

(A) $\frac{125\pi}{6}.$

(B) $\frac{1}{6}.$

(C) $\frac{125}{6}.$

(D) $\frac{\pi}{6}.$

✎ Ví dụ 7 (Mã 103-2020 Lần 1). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2 - 2$ và $y = 3x - 2$ bằng

(A) $\frac{9}{2}$.

(B) $\frac{9\pi}{2}$.

(C) $\frac{125}{6}$.

(D) $\frac{125\pi}{6}$.

✎ Ví dụ 8 (Mã 102 2018). Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = \pi \int_0^2 2^x dx$.

(B) $S = \int_0^2 2^x dx$.

(C) $S = \pi \int_0^2 2^{2x} dx$.

(D) $S = \int_0^2 2^{2x} dx$.

✎ Ví dụ 9 (Mã 101 2018). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = \int_0^2 e^x dx$.

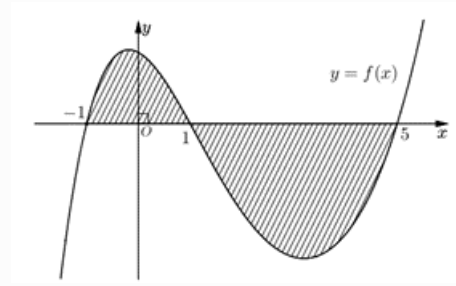
(B) $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.

(C) $S = \pi \int_0^2 e^x dx$.

(D) $S = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$.

✎ Ví dụ 10 (Mã 102-2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = 0$, $x = -1$ và $x = 5$ (hình vẽ bên). Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$
- (B) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$
- (C) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^5 f(x) dx.$
- (D) $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^5 f(x) dx.$



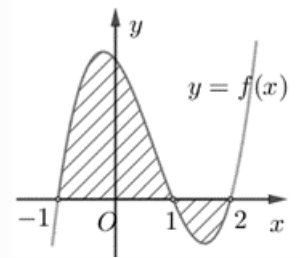
.....

.....

.....

☑ Ví dụ 11 (Mã 103-2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1, x = 2$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$
- (B) $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$
- (C) $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx.$
- (D) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx.$



.....

.....

.....

☑ Ví dụ 12 (Đề Minh Họa 2017). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$

- (A) $\frac{37}{12}.$
- (B) $\frac{9}{4}.$
- (C) $\frac{81}{12}.$
- (D) $13.$

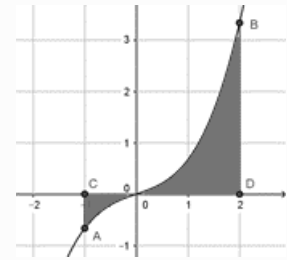
.....

.....

✍ Ví dụ 13 (Đề Tham Khảo 2017). Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -1, x = 2$. Đặt $a = \int_{-1}^0 f(x) dx$,

$b = \int_0^2 f(x) dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $S = b - a.$
- (B) $S = b + a.$
- (C) $S = -b + a.$
- (D) $S = -b - a.$



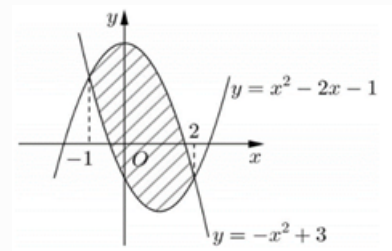
.....

.....

.....

✍ Ví dụ 14 (Đề Tham Khảo 2019). Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

- (A) $\int_{-1}^2 (-2x + 2) dx.$
- (B) $\int_{-1}^2 (2x - 2) dx.$
- (C) $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$
- (D) $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$



.....

.....

.....

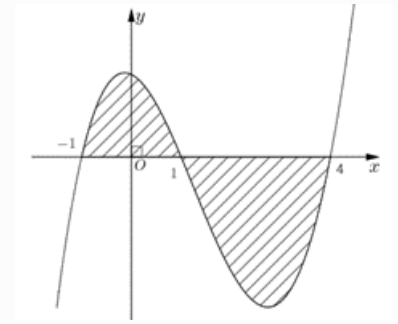
✍ Ví dụ 15 (Mã 101-2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x), y = 0, x = -1$ và $x = 4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$

(B) $S = \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx.$

(C) $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx.$

(D) $S = - \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx.$



.....

.....

.....

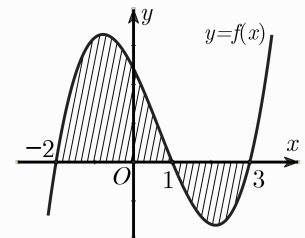
☞ Ví dụ 16 (Mã 104-2019). Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y = f(x), y = 0, x = -2$ và $x = 3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $S = - \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

(B) $S = \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx.$

(C) $S = - \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$

(D) $S = \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx.$



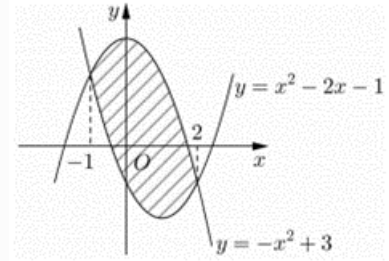
.....

.....

.....

☞ Ví dụ 17 (Chuyên KHTN 2019). Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?

- A $\int_{-1}^2 (2x^2 - 2x - 4) dx.$ B $\int_{-1}^2 (2x^2 + 2x - 4) dx.$
 C $\int_{-1}^2 (-2x^2 + 2x + 4) dx.$ D $\int_{-1}^2 (-2x^2 - 2x + 4) dx.$



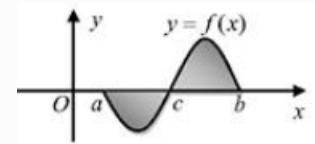
.....

.....

.....

✎ Ví dụ 18. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = a, x = b$ (như hình vẽ bên). Hỏi cách tính S nào dưới đây đúng?

- A $S = \int_a^b f(x) dx.$
 B $S = \left| \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \right|.$
 C $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$
 D $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$



.....

.....

.....

✎ Ví dụ 19 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $y = x^3 - 3x, y = x$. Tính S .

- A $S = 4.$ B $S = 8.$ C $S = 2.$ D $S = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 20 (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019). Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** $S = \int_0^2 3^x dx.$
 B $S = \pi \int_0^2 3^{2x} dx.$
 C $S = \pi \int_0^2 3^x dx.$
 D $S = \int_0^2 3^{2x} dx.$

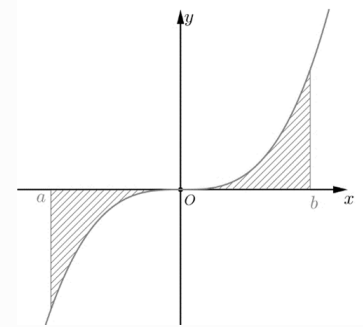
.....

.....

.....

✍ Ví dụ 21 (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $(C) : y = f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ (như hình vẽ dưới đây). Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D . đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

- A** $S_D = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$
 B $S_D = -\int_a^0 f(x) dx + \int_0^b f(x) dx.$
 C $S_D = \int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$
 D $S_D = -\int_a^0 f(x) dx - \int_0^b f(x) dx.$



.....

.....

.....

✍ Ví dụ 22. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (x - 2)^2 - 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ bằng

- A** $\frac{2}{3}.$
 B $\frac{3}{2}.$
 C $\frac{1}{3}.$
 D $\frac{7}{3}.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và các đường thẳng $x = a$, $x = b$ bằng

(A) $\left| \int_a^b [f(x) - g(x)] dx \right|$.

(B) $\int_a^b |f(x) + g(x)| dx$.

(C) $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

(D) $\int_a^b [f(x) - g(x)] dx$.

.....

✍ Ví dụ 24 (KTNL GV Bắc Giang 2019). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 4x - x^2$ và trục Ox

(A) 11.

(B) $\frac{34}{3}$.

(C) $\frac{31}{3}$.

(D) $\frac{32}{3}$.

.....

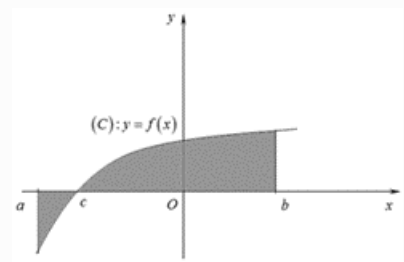
✍ Ví dụ 25 (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019). Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$) (phần tô đậm trong hình vẽ) tính theo công thức nào dưới đây ?

(A) $S = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

(B) $S = \int_a^b f(x) dx$.

(C) $S = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

(D) $S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$.



.....

✍ Ví dụ 26 (Việt Đức Hà Nội 2019). Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 1, x = -1, x = 2$ và trục hoành.

- A $S = 6.$
 B $S = 16.$
 C $S = \frac{13}{6}.$
 D $S = 13.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 27 (THPT An Lão Hải Phòng 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 5, y = 6x, x = 0, x = 1.$ Tính $S.$

- A $\frac{4}{3}.$
 B $\frac{7}{3}.$
 C $\frac{8}{3}.$
 D $\frac{5}{3}.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 28 (THPT An Lão Hải Phòng 2019). Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C) : y = \frac{-3x - 1}{x - 1}$ và hai trục tọa độ là $S.$ Tính $S?$

- A $S = 1 - \ln \frac{4}{3}.$
 B $S = 4 \ln \frac{4}{3}.$
 C $S = 4 \ln \frac{4}{3} - 1.$
 D $S = \ln \frac{4}{3} - 1.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 29. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2; y = 0; x = 1; x = 2$ bằng

- A $\frac{4}{3}.$
 B $\frac{7}{3}.$
 C $\frac{8}{3}.$
 D $1.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 30 (THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số (H) $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- (A) $2\ln 2 - 1$. (B) $\ln 2 + 1$. (C) $\ln 2 - 1$. (D) $2\ln 2 + 1$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 31. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019] Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \frac{\ln x}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $S = \pi \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$. (B) $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.
- (C) $S = \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2 dx$. (D) $S = \pi \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2 dx$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 32 (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

- (A) 8. (B) 5. (C) 4. (D) 10.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 33 (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019). Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

- (A) $\frac{7}{2}$. (B) $\frac{9}{2}$. (C) $\frac{5}{2}$. (D) $\frac{11}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 34 (Chuyên Hạ Long 2019). Hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường $y = x^2$, $y = 3x - 2$. Tính diện tích hình phẳng (H)

A $\frac{2}{3}$ (đvdt).
 B $\frac{1}{3}$ (đvdt).
 C 1 (đvdt).
 D $\frac{1}{6}$ (đvdt) .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 35 (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \ln x, y = 1$ và đường thẳng $x = 1$ bằng

A e^2 .
 B $e + 2$.
 C $2e$.
 D $e - 2$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 36. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4x - x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ bằng

A 4.
 B $\frac{20}{3}$.
 C $\frac{4}{3}$.
 D $\frac{16}{3}$.

.....

.....

.....

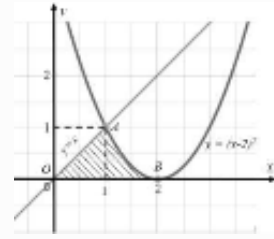
✍ Ví dụ 37 (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019). Tính diện tích phần hình phẳng gạch chéo (tam giác cong OAB) trong hình vẽ bên.

(A) $\frac{5}{6}$.

(B) $\frac{5\pi}{6}$.

(C) $\frac{8}{15}$.

(D) $\frac{8\pi}{15}$.



.....

.....

.....

✎ Ví dụ 38. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019] Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, $y = 0$, $x = -10$, $x = 10$.

(A) $S = \frac{2000}{3}$.

(B) $S = 2008$.

(C) $S = 2000$.

(D) $S = \frac{2008}{3}$.

.....

.....

.....

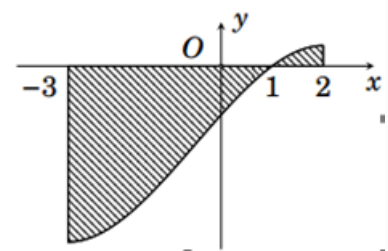
✎ Ví dụ 39 (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = -3$, $x = 2$ (như hình vẽ bên). Đặt $a = \int_{-3}^1 f(x) dx$, $b = \int_1^2 f(x) dx$. Mệnh đề nào sau đây là đúng.

(A) $S = a + b$.

(B) $S = a - b$.

(C) $S = -a - b$.

(D) $S = b - a$.



.....

.....

.....

✎ Ví dụ 40 (Chuyên Bắc Giang 2019). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2$ và đường thẳng $y = 2x$ là:

A $\frac{4}{3}$.

B $\frac{5}{3}$.

C $\frac{3}{2}$.

D $\frac{23}{15}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 41 (Chuyên Phan Bội Châu 2019). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x^2 - 4x + 1$ là

A 8.

B 5.

C 4.

D 10.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 42 (HSG Bắc Ninh 2019). Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S là

A $S = 1 + \ln 2$.

B $S = 2 \ln 2 - 1$.

C $S = 2 \ln 2 + 1$.

D $S = \ln 2 - 1$.

.....

.....

.....

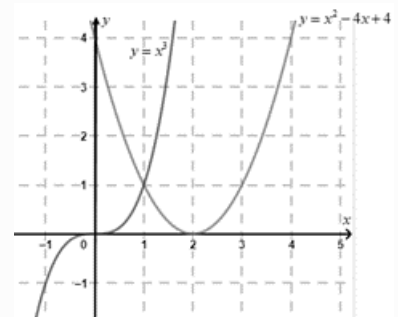
✍ Ví dụ 43. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = x^3$, $y = x^2 - 4x + 4$ và trục Ox (tham khảo hình vẽ) được tính theo công thức nào dưới đây?

A $\int_0^2 |x^3 - (x^2 - 4x + 4)| dx$.

B $-\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

C $\int_0^1 x^3 dx - \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.

D $\int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4) dx$.



.....

B. BÀI TẬP MỨC 5 - 6 ĐIỂM

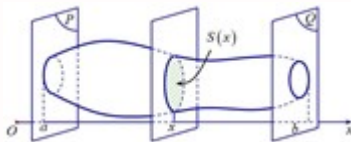
📄 Dạng 3.11. Ứng dụng tích phân để tìm thể tích

a) Thể tích vật thể

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b , $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x , ($a \leq x \leq b$).

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$ Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định bởi công thức

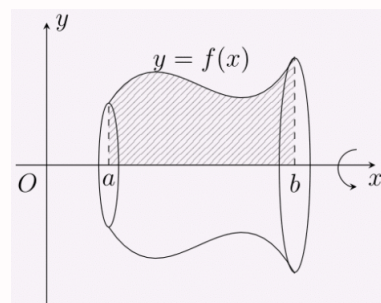
$$S = \int_a^b S(x) dx$$



b) Thể tích khối tròn xoay

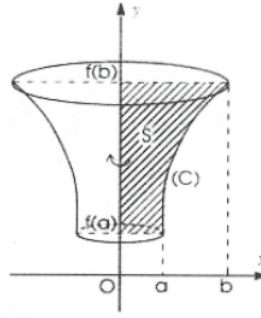
- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox .

$$\left\{ \begin{array}{l} (C): y = f(x) \\ \text{Trục } Ox: y = 0 \\ x = a \\ x = b. \end{array} \right. \Rightarrow V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

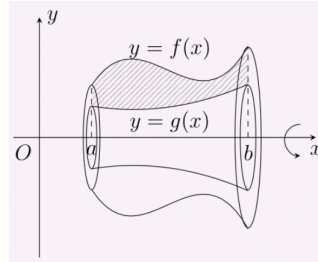


- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy

$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ \text{Trục } Oy: x = 0 \\ y = c \\ y = d. \end{cases} \Rightarrow V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$



- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ (cùng nằm một phía so với Ox) và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$



quanh trục Ox $V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$

✍ Ví dụ 1 (Đề Minh Họa 2017). Viết công thức tính thể tích V của khối tròn xoay được tạo ra khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$), xung quanh trục Ox .

A $V = \int_a^b |f(x)| dx.$

B $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

C $V = \int_a^b f^2(x) dx.$

D $V = \pi \int_a^b f(x) dx .$

.....

✍ Ví dụ 2 (Đề Tham Khảo 2018). Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$ ($a < b$). Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức

A $V = \pi^2 \int_a^b f(x) dx.$

B $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$

$$\textcircled{C} V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

$$\textcircled{D} V = \pi^2 \int_a^b f^2(x) dx.$$

✍ Ví dụ 3 (Mã 101 2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{3x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

$$\textcircled{A} \pi \int_0^1 e^{3x} dx.$$

$$\textcircled{B} \int_0^1 e^{6x} dx.$$

$$\textcircled{C} \pi \int_0^1 e^{6x} dx.$$

$$\textcircled{D} \int_0^1 e^{3x} dx.$$

✍ Ví dụ 4 (Mã 102-2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{4x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

$$\textcircled{A} \int_0^1 e^{4x} dx.$$

$$\textcircled{B} \pi \int_0^1 e^{8x} dx.$$

$$\textcircled{C} \pi \int_0^1 e^{4x} dx.$$

$$\textcircled{D} \int_0^1 e^{8x} dx.$$

✍ Ví dụ 5 (Mã 103-2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^{2x}$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

$$\textcircled{A} \pi \int_0^1 e^{4x} dx.$$

$$\textcircled{B} \int_0^1 e^{2x} dx.$$

$$\textcircled{C} \pi \int_0^1 e^{2x} dx.$$

$$\textcircled{D} \int_0^1 e^{4x} dx.$$

.....
✎ Ví dụ 6 (Mã 104-2020 Lần 2). Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 1$. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

- A** $\pi \int_0^1 e^{2x} dx.$
 B $\pi \int_0^1 e^x dx.$
 C $\int_0^1 e^x dx.$
 D $\int_0^1 e^{2x} dx.$
-

✎ Ví dụ 7 (Mã 103 2018). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A** $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx.$
 B $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx.$
 C $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx.$
 D $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx .$
-

✎ Ví dụ 8 (Mã 105 2017). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = e^x$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

- A** $V = \frac{\pi(e^2 + 1)}{2}.$
 B $V = \frac{e^2 - 1}{2}.$
 C $V = \frac{\pi e^2}{3}.$
 D $V = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2} .$
-

✎ Ví dụ 9 (Mã 104 2017). Cho hình phẳng D giới hạn với đường cong $y = \sqrt{x^2 + 1}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0$, $x = 1$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = 2.$

B $V = \frac{4\pi}{3}.$

C $V = 2\pi.$

D $V = \frac{4}{3}.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 10 (Mã 123 2017). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$. Khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = (\pi + 1)\pi.$

B $V = \pi - 1.$

C $V = \pi + 1.$

D $V = (\pi - 1)\pi.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 11 (Mã 110 2017). Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{2 + \sin x}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 0, x = \pi$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quay quanh trục hoành có thể tích V bằng bao nhiêu?

A $V = 2\pi(\pi + 1).$

B $V = 2\pi.$

C $V = 2(\pi + 1).$

D $V = 2\pi^2.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 12 (Mã 104 2018). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường thẳng $y = x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 2$. Gọi V là thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A $V = \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$

B $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$

C $V = \int_1^2 (x^2 + 2)^2 dx.$

D $V = \pi \int_1^2 (x^2 + 2) dx.$

.....

✍ Ví dụ 13 (Đề Tham Khảo 2017). Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($1 \leq x \leq 3$) thì được thiết diện là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh là $3x$ và $\sqrt{3x^2 - 2}$.

A $V = \frac{124}{3}$.

B $V = (32 + 2\sqrt{15})\pi$.

C $V = 32 + 2\sqrt{15}$.

D $V = \frac{124\pi}{3}$.

✍ Ví dụ 14. Tìm công thức tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P) : y = x^2$ và đường thẳng $d : y = 2x$ quay xung quanh trục Ox .

A $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

B $\pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx$.

C $\pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx$.

D $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

✍ Ví dụ 15 (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-2019). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 3, y = 0, x = 0, x = 2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

B $V = \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

C $V = \int_0^2 (x^2 + 3)^2 dx$.

D $V = \pi \int_0^2 (x^2 + 3) dx$.

.....

.....

✍ Ví dụ 16 (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019). Gọi V là thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình thang cong, giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục Ox , trục Oy và đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$, xung quanh trục Ox . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$

(B) $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx.$

(C) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx.$

(D) $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx .$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 17. Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$, trục hoành, đường thẳng $x = 0$ và $x = 1$ quanh trục hoành bằng

(A) $\frac{16\pi}{15}.$

(B) $\frac{2\pi}{3}.$

(C) $\frac{4\pi}{3}.$

(D) $\frac{8\pi}{15}.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18 (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019). Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi $y = \sqrt{x}$, hai đường thẳng $x = 1$, $x = 2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

(A) $3\pi.$

(B) $\frac{3\pi}{2}.$

(C) $\frac{2\pi}{3}.$

(D) $\frac{3}{2}.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 19 (Sở Phú Thọ 2019). Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = 2x - x^2$, $y = 0$. Quay (H) quanh trục hoành tạo thành khối tròn xoay có thể tích là

(A) $\int_0^2 (2x - x^2) dx$.

(B) $\pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.

(C) $\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx$.

(D) $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

.....

✍ Ví dụ 20. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{\tan x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra.

(A) $\frac{\pi \ln 2}{2}$.

(B) $\frac{\pi \ln 3}{4}$.

(C) $\frac{\pi}{4}$.

(D) $\pi \ln 2$.

.....

✍ Ví dụ 21 (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019). Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$ quanh trục Ox là

(A) $\frac{81\pi}{35}$.

(B) $\frac{81}{35}$.

(C) $\frac{71\pi}{35}$.

(D) $\frac{71}{35}$.

.....

✍ Ví dụ 22 (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019). Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng d : $y = 2x$ quay xung quanh trục Ox bằng:

(A) $\pi \int_0^2 (2x - x^2) dx$.

(B) $\pi \int_0^2 (x^2 - 2x)^2 dx$.

$$\textcircled{C} \pi \int_0^2 4x^2 dx + \pi \int_0^2 x^4 dx.$$

$$\textcircled{D} \pi \int_0^2 4x^2 dx - \pi \int_0^2 x^4 dx.$$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23 (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019). Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P) : y = 2x - x^2$ và trục Ox bằng

$$\textcircled{A} V = \frac{19\pi}{15}.$$

$$\textcircled{B} V = \frac{13\pi}{15}.$$

$$\textcircled{C} V = \frac{17\pi}{15}.$$

$$\textcircled{D} V = \frac{16\pi}{15}.$$

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP MỨC 7-8 ĐIỂM

Dạng 1. Ứng dụng tích phân để tìm diện tích

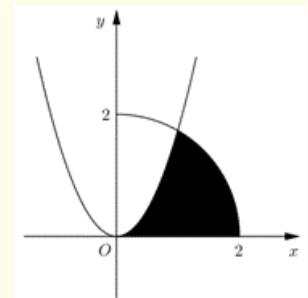
Câu 1. (Đề Tham Khảo 2018) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = \sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4 - x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) bằng

$$\textcircled{A} \frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}.$$

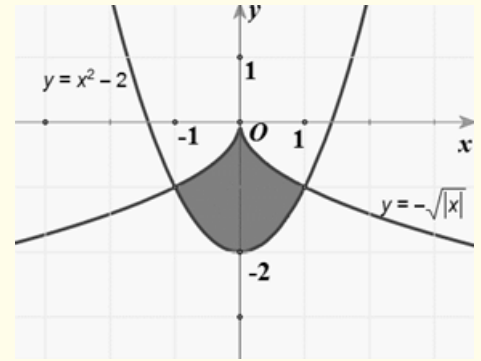
$$\textcircled{B} \frac{4\pi - \sqrt{3}}{6}.$$

$$\textcircled{C} \frac{4\pi + 2\sqrt{3} - 3}{6}.$$

$$\textcircled{D} \frac{5\sqrt{3} - 2\pi}{3}.$$



Câu 2. Diện tích phần hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



- (A) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 + \sqrt{|x|}) dx.$
- (B) $\int_{-1}^1 (x^2 - 2 - \sqrt{|x|}) dx.$
- (C) $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 + \sqrt{|x|}) dx.$
- (D) $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2 - \sqrt{|x|}) dx. .$

Câu 3. (Sở Bắc Giang 2019) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x \ln x$, trục hoành và đường thẳng $x = e$ là

- (A) $\frac{e^2 - 1}{2}.$
- (B) $\frac{e^2 + 1}{2}.$
- (C) $\frac{e^2 - 1}{4}.$
- (D) $\frac{e^2 + 1}{4}.$

Câu 4. Giá trị dương của tham số m sao cho diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 2x + 3$ và các đường thẳng $y = 0, x = 0, x = m$ bằng 10 là

- (A) $m = \frac{7}{2}.$
- (B) $m = 5.$
- (C) $m = 2.$
- (D) $m = 1.$

Câu 5. (Chuyên KHTN 2019) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 7 - 4x^3 & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 4 - x^2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tính diện tích hình

phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x = 0, x = 3, y = 0$.

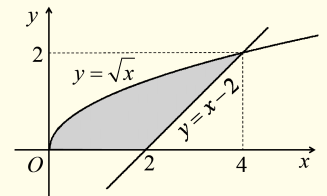
- (A) $\frac{16}{3}.$
- (B) $\frac{20}{3}.$
- (C) 10.
- (D) 9.

Câu 6. (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Tính diện tích S của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong $y = -x^3 + 12x$ và $y = -x^2$.

- (A) $S = \frac{937}{12}.$
- (B) $S = \frac{343}{12}.$
- (C) $S = \frac{793}{4}.$
- (D) $S = \frac{397}{4}.$

Câu 7. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, y = x - 2$ và trục hoành. Diện tích của (H) bằng

- (A) $\frac{7}{3}.$
- (B) $\frac{8}{3}.$
- (C) $\frac{10}{3}.$
- (D) $\frac{16}{3}.$



Câu 8. Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$ là

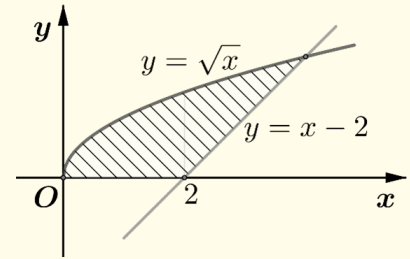
- (A) $\frac{8}{15}.$
- (B) $\frac{7}{15}.$
- (C) $\frac{2}{5}.$
- (D) $\frac{4}{15}.$

Câu 9. (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019) Gọi S là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(H) : y = \frac{x - 1}{x + 1}$ và các trục tọa độ. Khi đó giá trị của S bằng

- (A) $S = \ln 2 + 1.$
- (B) $S = 2 \ln 2 + 1.$
- (C) $S = \ln 2 - 1.$
- (D) $S = 2 \ln 2 - 1. .$

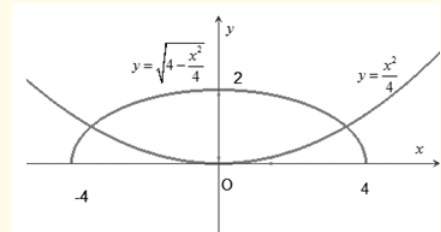
Câu 10. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Tính diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ sau:

- (A) $\frac{10}{3}$. (B) 4. (C) $\frac{13}{3}$. (D) $\frac{11}{3}$.



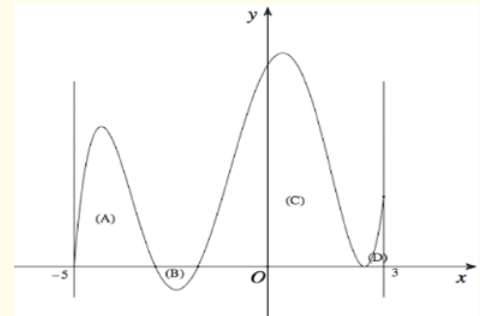
Câu 11. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $y = \frac{x^2}{12}$ và đường cong có phương trình $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ (tham khảo hình vẽ bên) Diện tích hình phẳng (H) bằng:

- (A) $\frac{2(4\pi + \sqrt{3})}{3}$. (B) $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{6}$.
 (C) $\frac{4\pi + \sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{4\sqrt{3} + \pi}{6}$.



Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết diện tích của hình phẳng (A), (B), (C), (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục hoành lần lượt là 6; 3; 12; 2. Tính tích phân $\int_{-3}^1 [2f(2x + 1) + 1] dx$ bằng

- (A) 27. (B) 25. (C) 17. (D) 21.

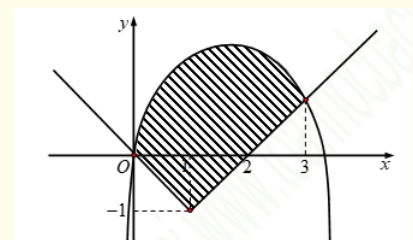


Câu 13. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = |x - 1|$ và nửa trên của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ bằng?

- (A) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. (B) $\frac{\pi - 1}{2}$. (C) $\frac{\pi}{2} - 1$. (D) $\frac{\pi}{4} - 1$.

Câu 14 (Kim Liên-Hà Nội-2018). Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y = \frac{10}{3}x - x^2$, $y = \begin{cases} -x & \text{khi } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Diện tích của (H) bằng?

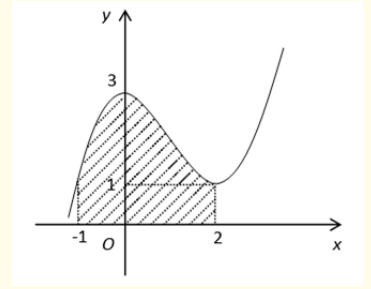
- (A) $\frac{11}{6}$. (B) $\frac{13}{2}$. (C) $\frac{11}{2}$. (D) $\frac{14}{3}$.



Câu 15. (THCS&THPT Nguyễn Khuyến-Bình Dương-2018) Cho đường tròn có đường kính bằng 4 và 2 Elip lần lượt nhận 2 đường kính vuông góc nhau của đường tròn làm trục lớn, trục bé của mỗi Elip đều bằng 1. Diện tích S phần hình phẳng ở bên trong đường tròn và bên ngoài 2 Elip (phần gạch caro trên hình vẽ) gần với kết quả nào nhất trong 4 kết quả dưới đây?

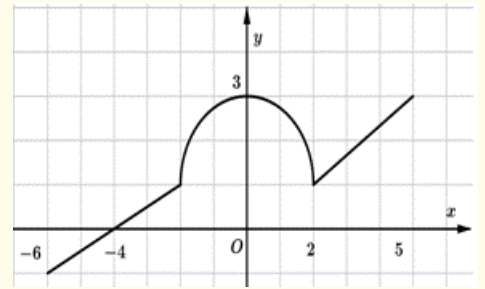
- (A) $S = 4, 8$. (B) $S = 3, 9$. (C) $S = 3, 7$. (D) $S = 3, 4$.

Câu 16. (THPT Trần Quốc Tuấn-2018) Tính diện tích S của miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, các đường thẳng $x = 1, x = 2$ và trục hoành (miền gạch chéo) cho trong hình dưới đây.



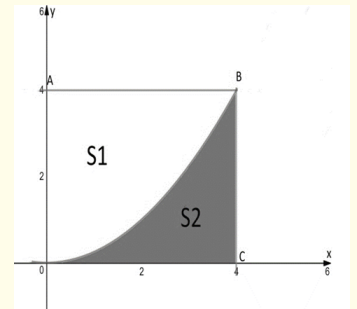
- Ⓐ $S = \frac{51}{8}$. Ⓑ $S = \frac{52}{8}$. Ⓒ $S = \frac{50}{8}$. Ⓓ $S = \frac{53}{8}$.

Câu 17. (Chuyên Thoại Ngọc Hầu-2018) Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[-6; 5]$, có đồ thị gồm 2 đoạn thẳng và nửa đường tròn như hình vẽ. Tính giá trị $I = \int_{-6}^5 [f(x) + 2] dx$.



- Ⓐ $I = 2\pi + 35$. Ⓑ $I = 2\pi + 34$.
 Ⓒ $I = 2\pi + 33$. Ⓓ $I = 2\pi + 32$.

Câu 18. Hình vuông $OABC$ có cạnh bằng 4 được chia thành hai phần bởi đường cong (C) có phương trình $y = \frac{1}{4}x^2$. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của phần không bị gạch và bị gạch như hình vẽ bên dưới. Tỷ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng

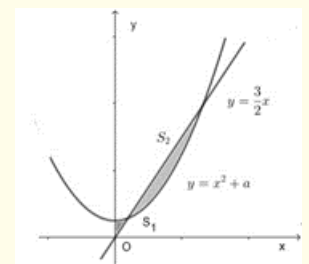


- Ⓐ $\frac{3}{2}$. Ⓑ 3. Ⓒ $\frac{1}{2}$. Ⓓ 2.

Câu 19. (Việt Đức Hà Nội 2019) Kí hiệu $S(t)$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 2x + 1, y = 0, x = 1, x = t (t > 1)$. Tìm t để $S(t) = 10$.

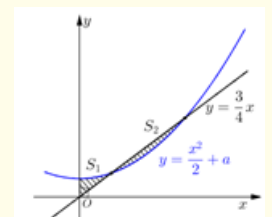
- Ⓐ $t = 3$. Ⓑ $t = 4$. Ⓒ $t = 13$. Ⓓ $t = 14$.

Câu 20. (Mã 104-2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$ và parabol $y = x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



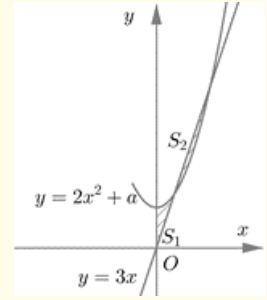
- Ⓐ $(0; \frac{2}{5})$. Ⓑ $(\frac{1}{2}; \frac{9}{16})$. Ⓒ $(\frac{2}{5}; \frac{9}{20})$. Ⓓ $(\frac{9}{20}; \frac{1}{2})$.

Câu 21. (Mã 102-2019) Cho đường thẳng $y = \frac{3}{4}x$ và parabol $y = \frac{1}{2}x^2 + a$, (a là tham số thực dương). Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



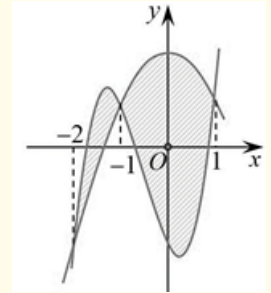
- Ⓐ $(\frac{7}{32}; \frac{1}{4})$. Ⓑ $(\frac{1}{4}; \frac{9}{32})$. Ⓒ $(\frac{3}{16}; \frac{7}{32})$. Ⓓ $(0; \frac{3}{16})$.

Câu 22. (Mã 103-2019) Cho đường thẳng $y = 3x$ và parabol $2x^2 + a$ (a là tham số thực dương). Gọi S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ bên. Khi $S_1 = S_2$ thì a thuộc khoảng nào dưới đây?



- Ⓐ $(1; \frac{9}{8})$. Ⓑ $(\frac{9}{10}; 1)$. Ⓒ $(\frac{4}{5}; \frac{9}{10})$. Ⓓ $(0; \frac{4}{5})$.

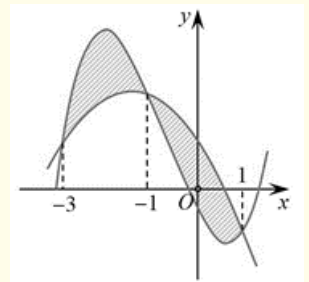
Câu 23. (Mã 102 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx - 2$ và $g(x) = d^2 + ex + 2$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ).



Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng

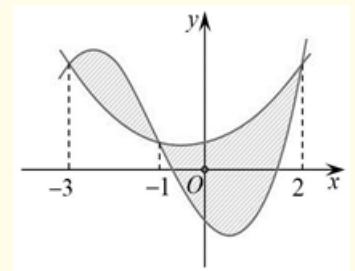
- Ⓐ $\frac{37}{12}$. Ⓑ $\frac{37}{6}$. Ⓒ $\frac{13}{2}$. Ⓓ $\frac{9}{2}$.

Câu 24. (Mã 101 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - \frac{1}{2}$ và $g(x) = d^2 + ex + 1$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 1$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị đã cho có diện tích bằng



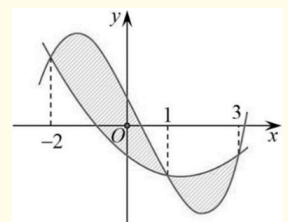
- Ⓐ 5. Ⓑ $\frac{9}{2}$. Ⓒ 8. Ⓓ 4.

Câu 25. (Mã 103 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$ và $g(x) = d^2 + ex + \frac{1}{2}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt $-3; -1; 2$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



- Ⓐ $\frac{253}{12}$. Ⓑ $\frac{125}{12}$. Ⓒ $\frac{253}{48}$. Ⓓ $\frac{125}{48}$.

Câu 26. (Mã 104 2018) Cho hai hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{3}{4}$ và $g(x) = d^2 + ex - \frac{3}{4}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$). Biết rằng đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cắt nhau tại ba điểm có hoành độ lần lượt là $-2; 1; 3$ (tham khảo hình vẽ). Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị đã cho có diện tích bằng



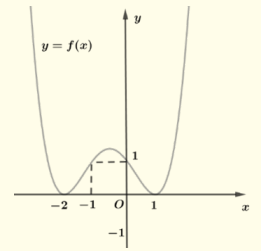
- Ⓐ $\frac{253}{48}$. Ⓑ $\frac{125}{24}$. Ⓒ $\frac{125}{48}$. Ⓓ $\frac{253}{24}$.

Câu 27. Cho parabol $(P_1) : y = -x^2 + 2x + 3$ cắt trục hoành tại hai điểm A, B và đường thẳng $d : y = a$ ($0 < a < 4$). Xét parabol (P_2) đi qua A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d . Gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và

trục hoành. Biết $S_1 = S_2$, tính $T = a^3 - 8a^2 + 48a$.

- (A) $T = 99$. (B) $T = 64$. (C) $T = 32$. (D) $T = 72$.

Câu 28. (Tỉnh Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và có đồ thị như hình vẽ. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f(x); y = f'(x)$ có diện tích bằng

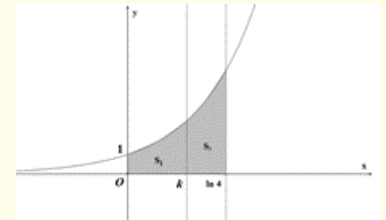


- (A) $\frac{127}{40}$. (B) $\frac{127}{10}$. (C) $\frac{107}{5}$. (D) $\frac{13}{5}$.

Câu 29. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2, mx = y^2 (m > 0)$. Tìm giá trị của m để $S = 3$.

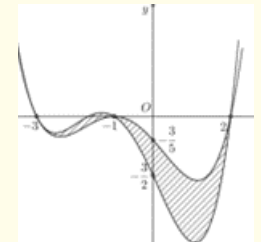
- (A) $m = 1$. (B) $m = 2$. (C) $m = 3$. (D) $m = 4$.

Câu 30. (THPT Cẩm Giàng 2 -2019) Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0, x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k (0 < k < \ln 4)$ chia (H) thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$.



- (A) $k = \frac{4}{3} \ln 2$. (B) $k = \ln \frac{8}{3}$. (C) $k = \ln 2$. (D) $k = \ln 3$.

Câu 31. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Biết rằng đồ thị của hai hàm số này cắt nhau tại đúng ba điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $-3; -1; 2$. Diện tích của hình phẳng (H) (phần gạch sọc trên hình vẽ bên) gần nhất với kết quả nào dưới đây?



- (A) 3, 11. (B) 2, 45. (C) 3, 21. (D) 2, 95.

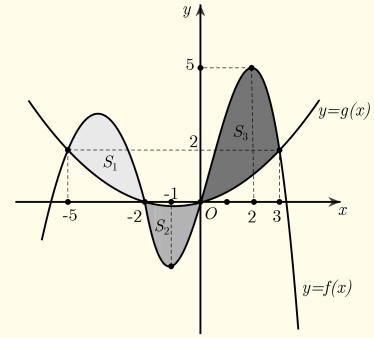
Câu 32. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Cho parabol (P) : $y = x^2$ và hai điểm A, B thuộc (P) sao cho $AB = 2$. Diện tích lớn nhất của hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

- (A) $\frac{3}{4}$. (B) $\frac{3}{2}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Câu 33. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho Parabol (P) : $y = x^2 + 1$ và đường thẳng $d : y = mx + 2$ với m là tham số. Gọi m_0 là giá trị của m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và d là nhỏ nhất. Hỏi m_0 nằm trong khoảng nào?

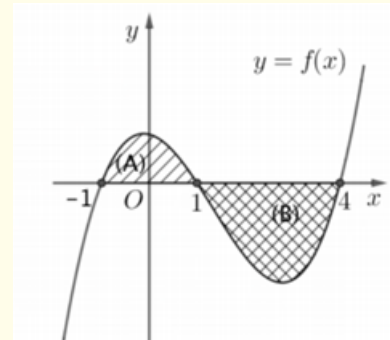
- (A) $(-\sqrt{2}; -\frac{1}{2})$. (B) $(0; 1)$. (C) $(-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$. (D) $(\frac{1}{2}; 3)$.

Câu 34. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-5; 3]$. Biết rằng diện tích hình phẳng S_1, S_2, S_3 giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và đường parabol $y = g(x) = ax^2 + bx + c$ lần lượt là m, n, p . Tích phân $\int_{-5}^3 f(x) dx$ bằng



- (A) $-m + n - p - \frac{208}{45}$.
- (B) $m - n + p + \frac{208}{45}$.
- (C) $m - n + p - \frac{208}{45}$.
- (D) $-m + n - p + \frac{208}{45}$.

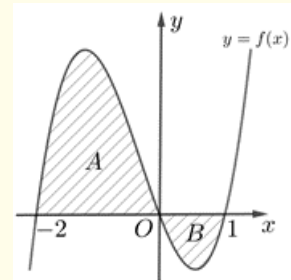
Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng diện tích các phần (A), (B) lần lượt bằng 3 và 7.



Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot f(5 \sin x - 1) dx$ bằng

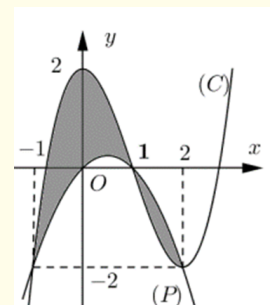
- (A) $-\frac{4}{5}$.
- (B) 2.
- (C) $\frac{4}{5}$.
- (D) -2.

Câu 36. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ và diện tích hai phần A, B lần lượt bằng 11 và 2. Giá trị của $I = \int_{-1}^0 f(3x + 1) dx$ bằng



- (A) 3.
- (B) $\frac{13}{3}$.
- (C) 9.
- (D) 13.

Câu 37. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm của hình vẽ có diện tích bằng



- (A) $\frac{37}{12}$.
- (B) $\frac{7}{12}$.
- (C) $\frac{11}{12}$.
- (D) $\frac{5}{12}$.

Câu 38. (Việt Đức Hà Nội -2019) Parabol $y = \frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm là gốc tọa độ, bán kính bằng $2\sqrt{2}$ thành hai phần có diện tích S_1 và S_2 , trong đó $S_1 < S_2$. Tìm tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

- (A) $\frac{3\pi + 2}{12\pi}$.
- (B) $\frac{9\pi - 2}{3\pi + 2}$.
- (C) $\frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}$.
- (D) $\frac{3\pi + 2}{21\pi - 2}$.

Câu 39. Tìm số thực a để hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^6}$ và $y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^6}$ có diện tích lớn nhất.

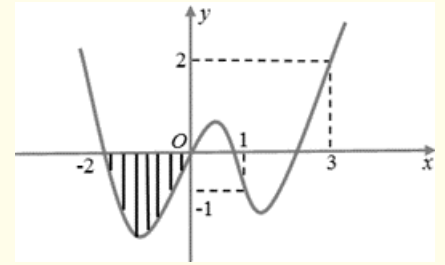
(A) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

(B) 1.

(C) 2.

(D) $\sqrt[3]{3}$.

Câu 40. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên \mathbb{R} , đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ. Biết diện tích hình phẳng phần sọc kẻ bằng 3. Tính giá trị của biểu thức:



$$T = \int_1^2 f'(x+1) dx + \int_2^3 f'(x-1) dx + \int_3^4 f(2x-8) dx$$

(A) $T = \frac{9}{2}$.

(B) $T = 6$.

(C) $T = 0$.

(D) $T = \frac{3}{2}$.

Câu 41. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019) Cho hàm số $y = x^4 - 6x^2 + m$ có đồ thị (C_m) . Giả sử (C_m) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục hoành có phần phía trên trục hoành và phần phía dưới trục hoành có diện tích bằng nhau. Khi đó $m = \frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $S = a + b$ là:

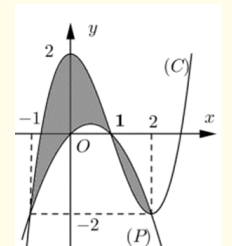
(A) 7.

(B) 6.

(C) 5.

(D) 4.

Câu 42. Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm số đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần tô đậm như hình vẽ có diện tích bằng



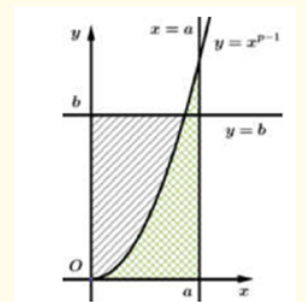
(A) $\frac{37}{12}$.

(B) $\frac{7}{12}$.

(C) $\frac{11}{12}$.

(D) $\frac{5}{12}$.

Câu 43. (Chuyên Hạ Long-2018) Cho các số p, q thỏa mãn các điều kiện: $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ và các số dương a, b . Xét hàm số: $y = x^{p-1} (x > 0)$ có đồ thị là (C) . Gọi (S_1) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục hoành, đường thẳng $x = a$, Gọi (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) , trục tung, đường thẳng $y = b$, Gọi (S) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành, trục tung và hai đường thẳng $x = a, y = b$. Khi so sánh $S_1 + S_2$ và S ta nhận được bất đẳng thức nào trong các bất đẳng thức dưới đây?



(A) $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \leq ab$.

(B) $\frac{a^{p-1}}{p-1} + \frac{b^{q-1}}{q-1} \geq ab$.

(C) $\frac{a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{q+1}}{q+1} \leq ab$.

(D) $\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$.

Câu 44. (Hà Nội-2018) Cho khối trụ có hai đáy là hai hình tròn $(O; R)$ và $(O'; R)$, $OO' = 4R$. Trên đường tròn $(O; R)$ lấy hai điểm A, B sao cho $AB = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (P) đi qua A, B cắt đoạn OO' và tạo với đáy một góc 60° , (P) cắt khối trụ theo thiết diện là một phần của elip. Diện

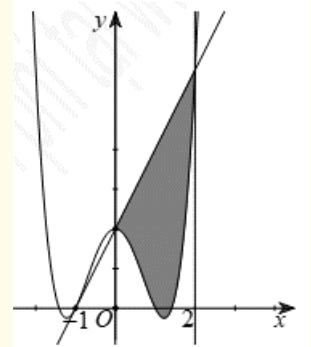
tích thiết diện đó bằng

- Ⓐ $\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2$. Ⓑ $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$. Ⓒ $\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$. Ⓓ $\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) R^2$.

Câu 45. (Chuyên Hùng Vương-Gia Lai-2018) Cho parabol $(P) : y = x^2$ và một đường thẳng d thay đổi cắt (P) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 2018$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng d . Tìm giá trị lớn nhất S_{max} của S

- Ⓐ $S_{max} = \frac{2018^3 + 1}{6}$. Ⓑ $S_{max} = \frac{2018^3}{3}$. Ⓒ $S_{max} = \frac{2018^3 - 1}{6}$. Ⓓ $S_{max} = \frac{2018^3}{3}$.

Câu 46. (Chuyên KHTN-2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị (C) , biết rằng (C) đi qua điểm $A(-1; 0)$, tiếp tuyến d tại A của (C) cắt (C) tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 0 và 2 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi d , đồ thị (C) và hai đường thẳng $x = 0; x = 2$ có diện tích bằng $\frac{28}{5}$ (phần tô màu trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và hai đường thẳng $x = -1; x = 0$ có diện tích bằng

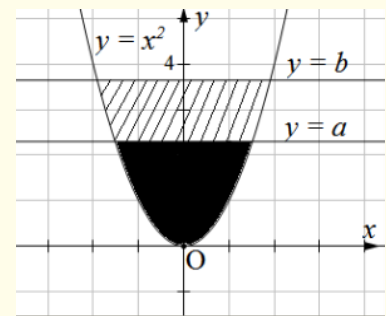


- Ⓐ $\frac{2}{5}$. Ⓑ $\frac{1}{4}$. Ⓒ $\frac{2}{9}$. Ⓓ $\frac{1}{5}$.

Câu 47. (THPT Tú Kỳ-Hải Dương-2018) Đặt S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = 4 - x^2$, trục hoành và đường thẳng $x = -2, x = m, (-2 < m < 2)$. Tìm số giá trị của tham số m để $S = \frac{25}{3}$.

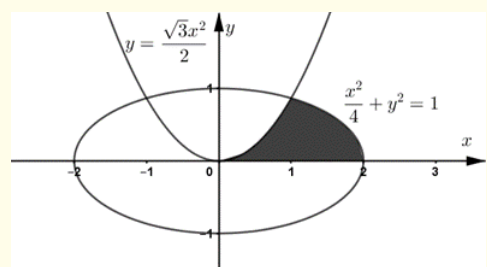
- Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Câu 48. (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-2018) Trong hệ trục tọa độ Oxy , cho parabol $(P) : y = x^2$ và hai đường thẳng $y = a, y = b (0 < a < b)$ (hình vẽ). Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = a$ (phần tô đen); (S_2) là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P) và đường thẳng $y = b$ (phần gạch chéo). Với điều kiện nào sau đây của a và b thì $S_1 = S_2$?



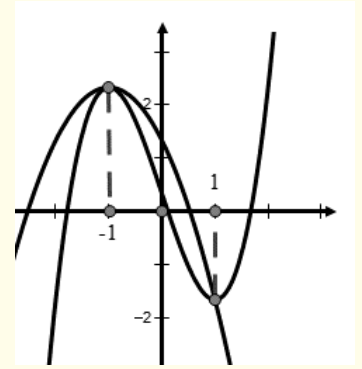
- Ⓐ $b = \sqrt[3]{4a}$. Ⓑ $b = \sqrt[3]{2a}$. Ⓒ $b = \sqrt[3]{3a}$. Ⓓ $b = \sqrt[3]{6a}$.

Câu 49. (THPT Yên Khánh A-2018) Cho hình phẳng giới hạn bởi Elip $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, parabol $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$ và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ) có diện tích $T = \frac{a}{b}\pi + \frac{c}{d}\sqrt{3}$ (với $a, c \in \mathbb{Z}; b, d \in \mathbb{N}^*; \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản). Tính $S = a + b + c + d$.



- Ⓐ $S = 32$. Ⓑ $S = 10$. Ⓒ $S = 15$. Ⓓ $S = 21$.

Câu 50. Cho hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị (C) và $y = mx^2 + nx + p$ ($m, n, p \in \mathbb{R}$) có đồ thị (P) như hình vẽ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và (P) có giá trị nằm trong khoảng nào sau đây?



- Ⓐ (0; 1). Ⓑ (1; 2). Ⓒ (2; 3). Ⓓ (3; 4).

Dạng 2. Tính thể tích khối tròn xoay

Câu 51. (Đề Minh Họa 2017) Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2(x-1)e^x$, trục tung và trục hoành. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox

- Ⓐ $V = (e^2 - 5)\pi$. Ⓑ $V = (4 - 2e)\pi$. Ⓒ $V = e^2 - 5$. Ⓓ $V = 4 - 2e$.

Câu 52. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

- Ⓐ 550. Ⓑ 400. Ⓒ 670. Ⓓ 335.

Câu 53. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 2x$, trục hoành và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V hình tròn xoay sinh ra bởi (H) khi quay (H) quanh trục Ox .

- Ⓐ $V = \frac{4\pi}{3}$. Ⓑ $V = \frac{16\pi}{15}$. Ⓒ $V = \frac{7\pi}{8}$. Ⓓ $V = \frac{15\pi}{8}$.

Câu 54. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi hai đường $y = 2(x^2 - 1)$; $y = 1 - x^2$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục Ox .

- Ⓐ $\frac{64\pi}{15}$. Ⓑ $\frac{32}{15}$. Ⓒ $\frac{32\pi}{15}$. Ⓓ $\frac{64}{15}$.

Câu 55. (Chuyên Bắc Giang -2019) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \tan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

- Ⓐ 5. Ⓑ $\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$. Ⓒ $\frac{3\pi}{2}$. Ⓓ $\pi \left(\frac{1}{2} + \pi\right)$.

Câu 56. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định -2019) Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x} - 2$, $y = 0$ và $x = 9$ quay xung quanh trục Ox . Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành.

- Ⓐ $V = \frac{7}{6}$. Ⓑ $V = \frac{5\pi}{6}$. Ⓒ $V = \frac{7\pi}{11}$. Ⓓ $V = \frac{11\pi}{6}$.

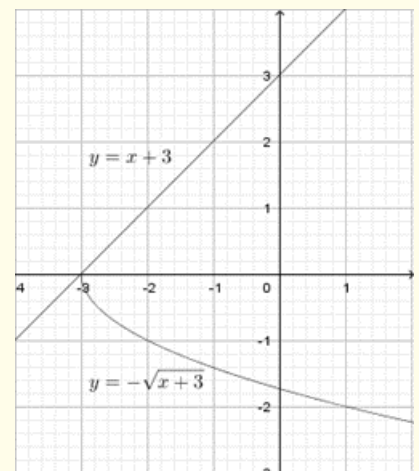
Câu 57. (Chuyên Lê Quý Dôn Điện Biên 2019) Tính thể tích của vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình (H) quanh Ox với (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$ và trục hoành.

- (A) $\frac{31\pi}{3}$. (B) $\frac{32\pi}{3}$. (C) $\frac{34\pi}{3}$. (D) $\frac{35\pi}{3}$.

Câu 58. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $y = 2x - x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V vật thể tròn xoay sinh ra khi cho (H) quay quanh Ox .

- (A) $V = \frac{4}{3}$. (B) $V = \frac{16}{15}\pi$. (C) $V = \frac{16}{15}$. (D) $V = \frac{4}{3}$.

Câu 59. Tính thể tích vật tròn xoay tạo bởi miền hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x + 3$, $y = -\sqrt{x+3}$, $x = 1$ xoay quanh trục Ox .



- (A) $\frac{41}{2}\pi$.
 (B) $\frac{43}{2}\pi$.
 (C) $\frac{41}{3}\pi$.
 (D) $\frac{40}{3}\pi$.

Câu 60. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Ký hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

- (A) $V = e^2 - 1$. (B) $V = \pi(e^2 - 1)$. (C) $V = \frac{1}{4}\pi e^2 - 1$. (D) $V = \frac{1}{4}\pi(e^2 - 1)$.

Câu 61. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình 2019) Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 0$; $x = 2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại x ($0 \leq x \leq 2$) ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x + 1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

- (A) $\frac{\pi(13e^4 - 1)}{4}$. (B) $\frac{13e^4 - 1}{4}$. (C) $2e^2$. (D) $2\pi e^2$.

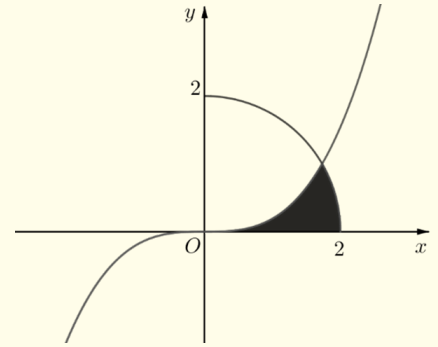
Câu 62. Cho hai mặt cầu (S_1) , (S_2) có cùng bán kính $R = 3$ thỏa mãn tính chất tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích V phần chung của hai khối cầu tạo bởi (S_1) , (S_2) .

- (A) $V = \frac{45\pi}{8}$. (B) $V = \frac{45\pi}{4}$. (C) $V = \frac{45}{4}$. (D) $V = \frac{45}{8}$.

Câu 63. (Toán Học Tuổi Trẻ-2018) Hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = |x|$ và $y = x^2$ quay quanh trục tung tạo nên một vật thể tròn xoay có thể tích bằng

- (A) $\frac{\pi}{6}$. (B) $\frac{\pi}{3}$. (C) $\frac{2\pi}{15}$. (D) $\frac{4\pi}{15}$.

Câu 64. (Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai-Sóc Trăng-2018) Cho hình (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{3}}{9}x^3$, cung tròn có phương trình $y = \sqrt{4-x^2}$ (với $0 \leq x \leq 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Biết thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành là $V = \left(-\frac{a}{b}\sqrt{3} + \frac{c}{d}\right)\pi$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ là các phân số tối giản. Tính $P = a + b + c + d$.

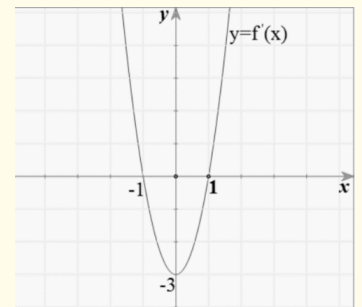


- (A) $P = 52$. (B) $P = 40$. (C) $P = 46$. (D) $P = 34$.

Câu 65. (HSG Tỉnh Bắc Ninh 2019) Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y = \sqrt{m^2 - x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V < 1000\pi$.

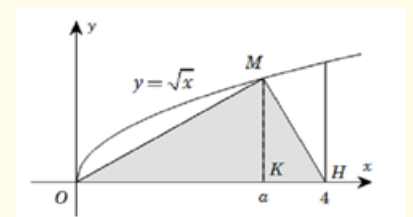
- (A) 18. (B) 20. (C) 19. (D) 21. .

Câu 66. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y = 4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox .



- (A) $\frac{725}{35}\pi$. (B) $\frac{1}{35}\pi$. (C) 6π . (D) đáp án khác.

Câu 67. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ và $x = 4$ quanh trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M (hình vẽ). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox . Biết rằng $V = 2V_1$. Khi đó



- (A) $a = 2$. (B) $a = 2\sqrt{2}$. (C) $a = \frac{5}{2}$. (D) $a = 3$.

Câu 68. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Cho hình phẳng (D) giới hạn bởi các đường $y = x - \pi$, $y = \sin x$ và $x = 0$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do (D) quay quanh trục hoành và $V = p\pi^4$, ($p \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $24p$ bằng

- (A) 8. (B) 4. (C) 24. (D) 12. .

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , $(H_1) : \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = -\frac{x^2}{4} \\ x = -4, x = 4 \end{cases}$, $(H_2) : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x^2 + (y - 2)^2 \geq 4 \\ x^2 + (y + 2)^2 \geq 4 \end{cases}$. Cho

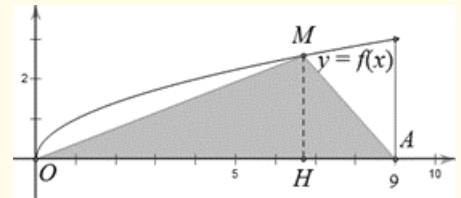
$(H_1), (H_2)$ xoay quanh trục Oy ta được các vật thể có thể tích lần lượt V_1, V_2 . Đẳng thức nào sau đây đúng.

- (A) $V_1 = V_2$. (B) $V_1 = \frac{1}{2}V_2$. (C) $V_1 = 2V_2$. (D) $V_1 = \frac{3}{2}V_2$.

Câu 70. (THPT Chu Văn An -Thái Nguyên-2018) Cho hình thang $ABCD$ có AB song song CD và $AB = AD = BC = a, CD = 2a$. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình thang $ABCD$ quanh trục là đường thẳng AB .

- (A) $\frac{5}{4}\pi a^3$. (B) $\frac{5}{2}\pi a^3$. (C) $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. (D) πa^3 .

Câu 71. (Chuyên Lê Hồng Phong-Tphcm-2018) Cho đồ thị $(C) : y = f(x) = \sqrt{x}$. Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) , đường thẳng $x = 9$ và trục Ox . Cho điểm M thuộc đồ thị (C) và điểm $A(9; 0)$. Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay khi cho (H) quay quanh trục Ox , V_2 là thể tích khối tròn xoay khi cho tam giác AOM quay quanh trục Ox . Biết rằng $V_1 = 2V_2$. Tính diện tích S phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng OM .

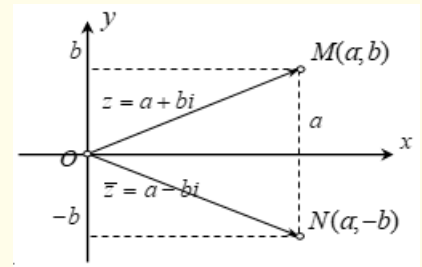


- (A) $S = 3$. (B) $S = \frac{27\sqrt{3}}{16}$. (C) $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. (D) $S = \frac{4}{3}$.

§ 1. SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

- Số phức $z = a + bi$ có phần thực là a , phần ảo là b
- Số phức liên hợp $\bar{z} = a - bi$ và cần nhớ $i^2 = -1$
- Số phức $z = a + bi$ có điểm biểu diễn là $M(a; b)$
 - Số phức liên hợp $\bar{z} = a - bi$ có điểm biểu diễn $N(a; -b)$
 - Hai điểm M và N đối xứng nhau qua trục hoành Ox
 - $\bar{\bar{z}} = z; \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
 - $\overline{z - z'} = \bar{z} - \bar{z}'$;
 - $\bar{z} \cdot \bar{z}' = \overline{z \cdot z'}$;
 - $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$;
 - $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$



- Hai số phức bằng nhau khi thực bằng thực và ảo bằng ảo.
- Mô đun của số phức z là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\blacksquare |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\blacksquare \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$\blacksquare ||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$\blacksquare ||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|.$$

- Phép cộng hai số phức: Cho số phức $z_1 = a + b \cdot i$ và $z_2 = c + d \cdot i$. Khi đó

$$z_1 + z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

- Phép trừ hai số phức

$$z_1 - z_2 = (a + b \cdot i) - (c + d \cdot i) = (a - c) + (b - d) \cdot i$$

- Phép nhân hai số phức

$$- z_1 \cdot z_2 = (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i.$$

$$- k \cdot z = k \cdot (a + bi) = ka + kbi.$$

- Phép chia hai số phức

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(a + b \cdot i) \cdot (c - d \cdot i)}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad) i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP MỨC 5-6 ĐIỂM

Dạng 1.12. Xác định các yếu tố cơ bản của số phức

Loại 1: Xác định phần thực, phần ảo của số phức

 **Ví dụ 1.** (Mã 102-2020 Lần 2) Phần thực của số phức $z = 3 - 4i$ bằng

- (A) 3. (B) 4. (C) -3. (D) -4.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** (Mã 103-2020 Lần 2) Phần thực của số phức $z = -5 - 4i$ bằng

- (A) 5. (B) 4. (C) -4. (D) -5.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. (Mã 104 2018) Số phức có phần thực bằng 1 và phần ảo bằng 3 là

- (A) $1 - 3i$.
 (B) $-1 + 3i$.
 (C) $1 + 3i$.
 (D) $-1 - 3i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4. (Mã 103 -2018) Số phức $5 + 6i$ có phần thực bằng

- (A) -6 .
 (B) 6 .
 (C) -5 .
 (D) 5 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. (Mã 102 2018) Số phức có phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 4 là

- (A) $3 + 4i$.
 (B) $4 - 3i$.
 (C) $3 - 4i$.
 (D) $4 + 3i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. (Đề Tham Khảo 2017) Kí hiệu a, b lần lượt là phần thực và phần ảo của số phức $3 - 2\sqrt{2}i$. Tìm a, b .

- (A) $a = 3; b = \sqrt{2}$.
 (B) $a = 3; b = -2\sqrt{2}$.
 (C) $a = 3; b = 2$.
 (D) $a = 3; b = 2\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. (Mã 101 2018) Số phức $-3 + 7i$ có phần ảo bằng:

- (A) 7 .
 (B) -7 .
 (C) -3 .
 (D) 3 .

✍ Ví dụ 8. (Mã 123 2017) Số phức nào dưới đây là số thuần ảo.

(A) $z = \sqrt{3} + i$.

(B) $z = -2$.

(C) $z = -2 + 3i$.

(D) $z = 3i$.

✍ Ví dụ 9. (Mã 105 2017) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Tìm phần thực a của z ?

(A) $a = 2$.

(B) $a = 3$.

(C) $a = -2$.

(D) $a = -3$.

✍ Ví dụ 10. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho số phức $z = 3 - 4i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

(A) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.

(B) Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .

(C) Phần thực là -4 và phần ảo là 3 .

(D) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.

Loại 2. Xác định số phức liên hợp, số phức đối, môđun của số phức

✍ Ví dụ 11. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Môđun của số phức $1 + 2i$ bằng

(A) 5 .

(B) $\sqrt{3}$.

(C) $\sqrt{5}$.

(D) 3 .

.....

.....

✍ Ví dụ 12. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Số phức liên hợp của số phức $z = 2 + i$ là

- A $\bar{z} = -2 + i.$
 B $\bar{z} = -2 - i.$
 C $\bar{z} = 2 - i.$
 D $\bar{z} = 2 + i.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 13. (Mã 101-2020 Lần 1) Số phức liên hợp của số phức $z = -3 + 5i$ là:

- A $\bar{z} = -3 - 5i.$
 B $\bar{z} = 3 + 5i.$
 C $\bar{z} = -3 + 5i.$
 D $\bar{z} = 3 - 5i.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 14. (Mã 102-2020 Lần 1) Số phức liên hợp của số phức $Z = -2 + 5i$ là

- A $\bar{z} = 2 - 5i.$
 B $\bar{z} = 2 + 5i.$
 C $\bar{z} = -2 + 5i.$
 D $\bar{z} = -2 - 5i.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 15. (Mã 103-2020 Lần 1) Số phức liên hợp của số phức $z = 2 - 5i$ là

- A $\bar{z} = 2 + 5i.$
 B $\bar{z} = -2 + 5i.$
 C $\bar{z} = 2 - 5i.$
 D $\bar{z} = -2 - 5i.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 16. (Mã 104-2020 Lần 1) Số phức liên hợp của số phức $z = 3 - 5i$ là

- (A) $\bar{z} = -3 - 5i.$ (B) $\bar{z} = 3 + 5i.$ (C) $\bar{z} = -3 + 5i.$ (D) $\bar{z} = 3 - 5i.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 17. (Đề Minh Họa 2017) Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} :

- (A) Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng $2i$.
- (B) Phần thực bằng 3 và Phần ảo bằng 2.
- (C) Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng $-2i$.
- (D) Phần thực bằng -3 và Phần ảo bằng -2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18. (Mã 104 2019) Số phức liên hợp của số phức $z = 3 - 2i$ là.

- (A) $3 + 2i.$ (B) $-3 - 2i.$ (C) $-2 + 3i.$ (D) $-3 + 2i.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 19. (Mã 103-2019) Số phức liên hợp của số phức $1 - 2i$ là:

- (A) $-1 - 2i.$ (B) $1 + 2i.$ (C) $-2 + i.$ (D) $-1 + 2i.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 20. (Mã 104 2017) Cho số phức $z = 2 + i$. Tính $|z|$.

- (A) $|z| = \sqrt{5}$.
 (B) $|z| = 5$.
 (C) $|z| = 2$.
 (D) $|z| = 3$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 21. (Mã 102-2019) Số phức liên hợp của số phức $5 - 3i$ là

- (A) $-3 + 5i$.
 (B) $-5 - 3i$.
 (C) $5 + 3i$.
 (D) $-5 + 3i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 22. (Mã 101-2019) Số phức liên hợp của số phức $3 - 4i$ là

- (A) $3 + 4i$.
 (B) $-4 + 3i$.
 (C) $-3 - 4i$.
 (D) $-3 + 4i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Cho số phức $z = 3 + 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} .

- (A) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
 (B) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng -2 .
 (C) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $-2i$.
 (D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 24. Cho số phức $z = 3 - 2i$. Tìm phần thực và phần ảo của số phức \bar{z} .

- (A) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng $2i$.
 (B) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng -2 .
 (C) Phần thực bằng -3 và phần ảo bằng $-2i$.
 (D) Phần thực bằng 3 và phần ảo bằng 2.
-

✍ Ví dụ 25. (Chuyên Hạ Long 2019) Số phức đối của $z = 5 + 7i$ là?

- (A) $\bar{z} = 5 + 7i$. (B) $-z = -5 - 7i$. (C) $-z = -5 + 7i$. (D) $-z = 5 - 7i$.
-

✍ Ví dụ 26. (Chuyên Sơn La 2019) Số phức liên hợp của số phức $z = 1 - 2i$ là

- (A) $\bar{z} = 1 + 2i$. (B) $\bar{z} = 2 - i$. (C) $\bar{z} = -1 + 2i$. (D) $\bar{z} = -1 - 2i$.
-

✍ Ví dụ 27. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Số phức liên hợp của số phức $z = 5 + 6i$ là

- (A) $\bar{z} = -5 + 6i$. (B) $\bar{z} = -5 - 6i$. (C) $\bar{z} = 6 - 5i$. (D) $\bar{z} = 5 - 6i$.
-

✍ Ví dụ 28. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Cho số phức $z = 2 - 3i$. Số phức liên hợp của số phức z là:

- A $\bar{z} = 3 - 2i$.
 B $\bar{z} = 3 + 2i$.
 C $\bar{z} = -2 - 3i$.
 D $\bar{z} = 2 + 3i$.

.....

.....

.....

📄 Dạng 1.13. Biểu diễn hình học cơ bản của số phức

✍ Ví dụ 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = (1 + 2i)^2$ là điểm nào dưới đây?

- A $P(-3; 4)$.
 B $Q(5; 4)$.
 C $N(4; -3)$.
 D $M(4; 5)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$ là điểm nào dưới đây?

- A $Q(1; 2)$.
 B $P(-1; 2)$.
 C $N(1; -2)$.
 D $M(-1; -2)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. (Mã 101-2020 Lần 1) Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-3; 1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng

- A 1.
 B -3.
 C -1.
 D 3.

.....

.....

✍ Ví dụ 4. (Mã 102-2020 Lần 1) Trên mặt phẳng tọa độ, biết $M(-1; 3)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng

- (A) 3. (B) -1. (C) -3. (D) 1.

.....

✍ Ví dụ 5. (Mã 103-2020 Lần 1) Trong mặt phẳng tọa độ, biết điểm $M(-2; 1)$ là điểm biểu diễn số phức z . Phần thực của z bằng:

- (A) -2. (B) 2. (C) 1. (D) -1.

.....

✍ Ví dụ 6. (Mã 102-2020 Lần 2) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z = 1 - 2i$?

- (A) $Q(1; 2)$. (B) $M(2; 1)$. (C) $P(-2; 1)$. (D) $N(1; -2)$.

.....

✍ Ví dụ 7. (Mã 103-2020 Lần 2) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn của số phức $z = 3 - 2i$?

- (A) $P(-3; 2)$. (B) $Q(2; -3)$. (C) $N(3; -2)$. (D) $M(-2; 3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8. (Mã 104-2020 Lần 2) Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $z = -1 + 2i$?

- A $N(-1; 2)$.
 B $P(2; -1)$.
 C $Q(-2; 1)$.
 D $M(1; -2)$.

.....

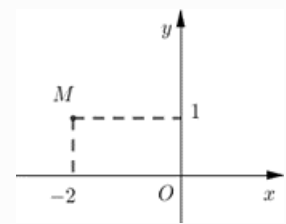
.....

.....

✍ Ví dụ 9.

(Đề Tham Khảo 2018) Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn số phức

- A $z = 1 + 2i$.
 B $z = 1 - 2i$.
 C $z = 2 + i$.
 D $z = -2 + i$.



.....

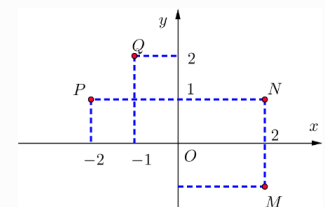
.....

.....

✍ Ví dụ 10.

(Đề Tham Khảo 2019) Điểm nào trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức $z = -1 + 2i$?

- A P .
 B M .
 C Q .
 D N .



.....

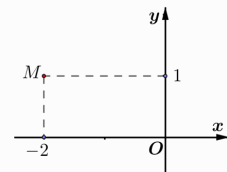
.....

.....

✍ Ví dụ 11.

(Mã 110 2017) Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình bên?

- (A) $z_1 = 1 - 2i$.
 (B) $z_2 = 1 + 2i$.
 (C) $z_3 = -2 + i$.
 (D) $z_4 = 2 + i$.



.....

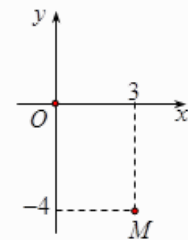
.....

.....

✍ Ví dụ 12.

Điểm M trong hình vẽ bên là điểm biểu diễn của số phức z . Tìm phần thực và phần ảo của số phức z .

- (A) Phần thực là 3 và phần ảo là $-4i$.
 (B) Phần thực là 3 và phần ảo là -4 .
 (C) Phần thực là -4 và phần ảo là $3i$.
 (D) Phần thực là -4 và phần ảo là 3.



.....

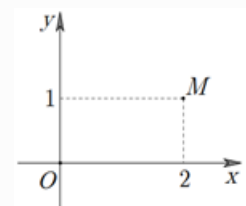
.....

.....

✍ Ví dụ 13.

(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z . Số phức \bar{z} là:

- (A) $1 - 2i$.
 (B) $2 + i$.
 (C) $1 + 2i$.
 (D) $2 - i$.



.....

.....

.....

✍ Ví dụ 14. Điểm nào ở hình vẽ bên biểu diễn số phức $z = 3 - 2i$?

- (A) M .
 (B) N .
 (C) P .
 (D) Q .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 15. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Điểm biểu diễn hình học của số phức $z = 2 - 3i$ là điểm nào trong các điểm sau đây?

- A $M(-2; 3)$.
 B $Q(-2; -3)$.
 C $N(2; -3)$.
 D $P(2; 3)$.

.....

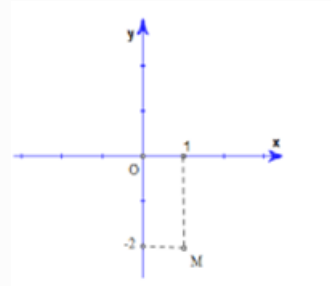
.....

.....

✍ Ví dụ 16.

(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Số phức nào dưới đây có điểm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là điểm M như hình vẽ bên?

- A $1 - 2i$.
 B $i + 2$.
 C $i - 2$.
 D $1 + 2i$.



.....

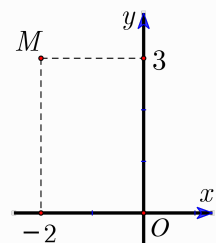
.....

.....

✍ Ví dụ 17.

(Thanh Hóa 2019) Điểm M trong hình vẽ bên dưới biểu thị cho số phức

- A $3 + 2i$.
 B $2 - 3i$.
 C $-2 + 3i$.
 D $3 - 2i$.



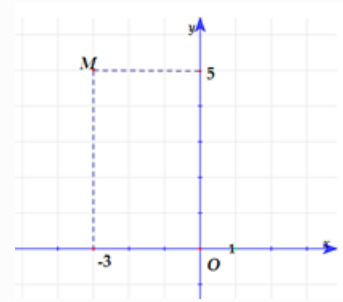
.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18.

(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức z . Chọn kết luận đúng về số phức \bar{z} .



- (A) $\bar{z} = 3 + 5i$. (B) $\bar{z} = -3 + 5i$.
 (C) $\bar{z} = 3 - 5i$. (D) $\bar{z} = -3 - 5i$.

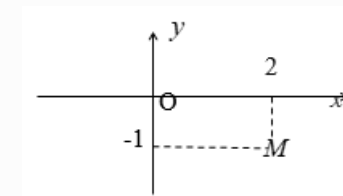
.....

.....

.....

✍ Ví dụ 19.

(Đề Thi Công Bằng KHTN -2019) Điểm M trong hình vẽ là biểu diễn hình học của số phức nào dưới đây?



- (A) $z = 2 - i$. (B) $z = 2 + i$.
 (C) $z = -1 + 2i$. (D) $z = -1 - 2i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 20. (Sở Bình Phước 2019) Số phức nào sau đây có điểm biểu diễn là $M(1; -2)$?

- (A) $-1 - 2i$. (B) $1 + 2i$. (C) $1 - 2i$. (D) $-2 + i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn của hai số phức đối nhau là

- (A) hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .
 (B) hai điểm đối xứng nhau qua trục hoành.
 (C) hai điểm đối xứng nhau qua trục tung.
 (D) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

.....

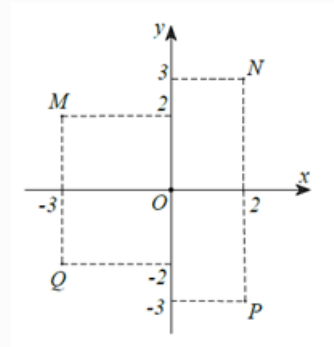
.....

.....

✎ Ví dụ 22.

Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = -3i + 2$?

- Ⓐ M. Ⓑ N. Ⓒ Q. Ⓓ P.



.....

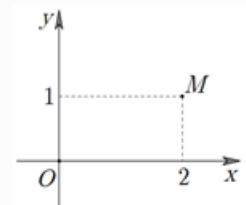
.....

.....

✎ Ví dụ 23.

(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong hình vẽ bên, điểm M biểu diễn số phức z . Số phức \bar{z} là:

- Ⓐ $1 - 2i$. Ⓑ $2 + i$. Ⓒ $1 + 2i$. Ⓓ $2 - i$.



.....

.....

.....

✎ Ví dụ 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , 3 điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của ba số phức $z_1 = 3 - 7i, z_2 = 9 - 5i$ và $z_3 = -5 + 9i$. Khi đó, trọng tâm G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây?

- Ⓐ $z = 1 - 9i$. Ⓑ $z = 3 + 3i$. Ⓒ $z = \frac{7}{3} - i$. Ⓓ $z = 2 + 2i$.

.....

.....

.....

Dạng 1.14. Thực hiện các phép tính cộng, trừ, nhân, chia cơ bản của số phức

Loại 1. Phép tính cộng trừ 2 số phức

✍ Ví dụ 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Cho hai số phức $z_1 = -3 + i$ và $z_2 = 1 - i$. Phần ảo của số phức $z_1 + \bar{z}_2$ bằng

- (A) -2 . (B) $2i$. (C) 2 . (D) $-2i$.
-
-
-

✍ Ví dụ 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hai số phức $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 1 + 3i$. Phần thực của số phức $z_1 + z_2$ bằng

- (A) 1 . (B) 3 . (C) 4 . (D) -2 .
-
-
-

✍ Ví dụ 3. (Mã 101-2020 Lần 1) Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

- (A) $5 + i$. (B) $-5 + i$. (C) $5 - i$. (D) $-5 - i$.
-
-
-

✍ Ví dụ 4. (Mã 103-2020 Lần 1) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng

- (A) $3 + i$. (B) $-3 - i$. (C) $3 - i$. (D) $-3 + i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 5. (Mã 104-2020 Lần 1) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 + z_2$ bằng.

- (A) $4 - 2i$.
 (B) $-4 + 2i$.
 (C) $4 + 2i$.
 (D) $-4 - 2i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6. (Mã 102-2020 Lần 2) Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 4 - i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

- (A) $3 + 3i$.
 (B) $-3 - 3i$.
 (C) $-3 + 3i$.
 (D) $3 - 3i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7. (Mã 103-2020 Lần 2) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = 3 + i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

- (A) $-2 - 4i$.
 (B) $2 - 4i$.
 (C) $-2 + 4i$.
 (D) $2 + 4i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8. (Mã 104-2019) Cho hai số phức $z_1 = 2 - i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn của số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

- (A) $(0; 5)$.
 (B) $(5; -1)$.
 (C) $(-1; 5)$.
 (D) $(5; 0)$.

✍ Ví dụ 9. (Mã 104-2020 Lần 2) Cho hai số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 2 + i$. Số phức $z_1 - z_2$ bằng

- (A) $-1 + 3i$.
 (B) $-1 - 3i$.
 (C) $1 + 3i$.
 (D) $1 - 3i$.

✍ Ví dụ 10. (Mã 103-2019) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $z_1 + 2z_2$ có tọa độ là

- (A) $(3; 5)$.
 (B) $(5; 2)$.
 (C) $(5; 3)$.
 (D) $(2; 5)$.

✍ Ví dụ 11. (Mã 123 2017) Cho 2 số phức $z_1 = 5 - 7i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 + z_2$.

- (A) $z = 3 - 10i$.
 (B) 14 .
 (C) $z = 7 - 4i$.
 (D) $z = 2 + 5i$.

✍ Ví dụ 12. (Đề Minh Họa 2017) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$

- (A) $|z_1 + z_2| = 5$.
 (B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$.
 (C) $|z_1 + z_2| = 1$.
 (D) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 13. (Mã 110 2017) Cho hai số phức $z_1 = 4 - 3i$ và $z_2 = 7 + 3i$. Tìm số phức $z = z_1 - z_2$.

- A $z = -3 - 6i$.
 B $z = 11$.
 C $z = -1 - 10i$.
 D $z = 3 + 6i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 14. (Mã 104 2017) Cho số phức $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i$. Tìm điểm biểu diễn của số phức $z = z_1 + z_2$ trên mặt phẳng tọa độ.

- A $M(2; -5)$.
 B $P(-2; -1)$.
 C $Q(-1; 7)$.
 D $N(4; -3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 15. (Mã 104 2017) Tìm số phức z thỏa mãn $z + 2 - 3i = 3 - 2i$.

- A $z = 5 - 5i$.
 B $z = 1 - i$.
 C $z = 1 - 5i$.
 D $z = 1 + i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 16. (Mã 105 2017) Cho hai số phức $z_1 = 1 - 3i$ và $z_2 = -2 - 5i$. Tìm phần ảo b của số phức $z = z_1 - z_2$.

- A $b = -3$.
 B $b = 2$.
 C $b = -2$.
 D $b = 3$.

.....

.....

✍ Ví dụ 17. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính môđun của số phức $z_1 + z_2$.

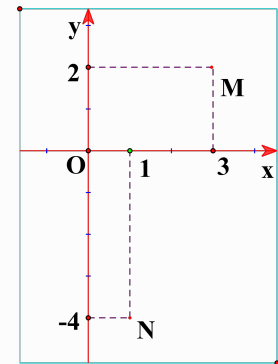
- (A) $|z_1 + z_2| = 1$. (B) $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$. (C) $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$. (D) $|z_1 + z_2| = 5$.

.....

✍ Ví dụ 18.

(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Gọi z_1, z_2 lần lượt có điểm biểu diễn là M và N trên mặt phẳng phức ở hình bên. Tính $|z_1 + z_2|$.

- (A) $2\sqrt{29}$. (B) 20. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 116.



.....

Loại 2. Phép tính nhân, chia 2 số phức

✍ Ví dụ 19. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Cho hai số phức $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = -1 + i$. Phần ảo của số phức $z_1 z_2$ bằng

- (A) 4. (B) $4i$. (C) -1 . (D) $-i$.

.....

✍ Ví dụ 20. (Mã 101-2020 Lần 1) Cho hai số phức $z = 1 + 2i$ và $w = 3 + i$. Môđun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) $5\sqrt{2}$.
 (B) $\sqrt{26}$.
 (C) 26.
 (D) 50.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 21. (Mã 102-2020 Lần 1) Cho hai số phức $z = 2 + 2i$ và $w = 2 + i$. Môđun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) 40.
 (B) 8.
 (C) $2\sqrt{2}$.
 (D) $2\sqrt{10}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 22. (Mã 103-2020 Lần 1) Cho hai số phức $z = 4 + 2i$ và $w = 1 + i$. Môđun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) $2\sqrt{2}$.
 (B) 8.
 (C) $2\sqrt{10}$.
 (D) 40.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. (Mã 104-2020 Lần 1) Cho hai số phức $z = 1 + 3i$ và $w = 1 + i$. Môđun của số phức $z \cdot \bar{w}$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$.
 (B) $2\sqrt{2}$.
 (C) 20.
 (D) 8.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 24. (Mã 102-2020 Lần 2) Cho số phức $z = 2 - i$, số phức $(2 - 3i)\bar{z}$ bằng

(A) $-1 + 8i$.

(B) $-7 + 4i$.

(C) $7 - 4i$.

(D) $1 + 8i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 25. (Mã 103-2020 Lần 2) Cho số phức $z = -2 + 3i$, số phức $(1 + i)\bar{z}$ bằng

(A) $-5 - i$.

(B) $-1 + 5i$.

(C) $1 - 5i$.

(D) $5 - i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 26. (Mã 104-2020 Lần 2) Cho số phức $z = -3 + 2i$, số phức $(1 - i)\bar{z}$ bằng

(A) $-1 - 5i$.

(B) $5 - i$.

(C) $1 - 5i$.

(D) $-5 + i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 27. (Đề Minh Họa 2017) Cho số phức $z = 2 + 5i$ Tìm số phức $w = iz + \bar{z}$

(A) $w = -3 - 3i$.

(B) $w = 3 + 7i$.

(C) $w = -7 - 7i$.

(D) $w = 7 - 3i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 28. (Đề Tham Khảo 2017) Tính môđun của số phức z biết $\bar{z} = (4 - 3i)(1 + i)$.

(A) $|z| = 5\sqrt{2}$.

(B) $|z| = \sqrt{2}$.

(C) $|z| = 25\sqrt{2}$.

(D) $|z| = 7\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 29. (Mã 110 2017) Cho số phức $z = 1 - i + i^3$. Tìm phần thực a và phần ảo b của z .

- A $a = 1, b = 0.$ B $a = 0, b = 1.$ C $a = 1, b = -2.$ D $a = -2, b = 1.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 30. (Mã 123 2017) Cho số phức $z = 1 - 2i$. Điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ

- A $Q(1; 2).$ B $N(2; 1).$ C $P(-2; 1).$ D $M(1; -2).$

.....

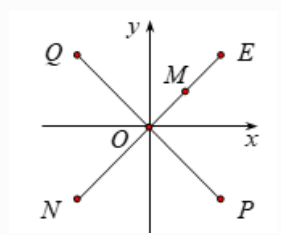
.....

.....

✍ Ví dụ 31.

(Đề Tham Khảo 2017) Trong mặt phẳng tọa độ, điểm M là điểm biểu diễn của số phức z . Điểm nào trong hình vẽ là điểm biểu diễn của số phức $2z$?

- A Điểm $Q.$ B Điểm $E.$ C Điểm $P.$ D Điểm $N.$



.....

.....

.....

✍ Ví dụ 32. (Mã 101-2019) Cho hai số phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 1 + 2i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $3z_1 + z_2$ có tọa độ là:

- A $(1; 4).$ B $(-1; 4).$ C $(4; 1).$ D $(4; -1).$

✍ Ví dụ 33. (Mã 102-2019) Cho hai số phức $z_1 = -2 + i$ và $z_2 = 1 + i$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm biểu diễn số phức $2z_1 + z_2$ có tọa độ là

- (A) $(-3; 3)$.
 (B) $(-3; 2)$.
 (C) $(3; -3)$.
 (D) $(2; -3)$.

✍ Ví dụ 34. Tìm số phức liên hợp của số phức $z = i(3i + 1)$.

- (A) $\bar{z} = 3 + i$.
 (B) $\bar{z} = -3 - i$.
 (C) $\bar{z} = 3 - i$.
 (D) $\bar{z} = -3 + i$.

✍ Ví dụ 35. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) = 4 - 3i$. Tìm số phức liên hợp \bar{z} của z .

- (A) $\bar{z} = \frac{-2}{5} - \frac{11}{5}i$.
 (B) $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{11}{5}i$.
 (C) $\bar{z} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5}i$.
 (D) $\bar{z} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

✍ Ví dụ 36. Cho số phức z thỏa mãn $z(1 + i) = 3 - 5i$. Tính môđun của z

- (A) $|z| = \sqrt{17}$.
 (B) $|z| = 16$.
 (C) $|z| = 17$.
 (D) $|z| = 4$.

.....

.....

✎ Ví dụ 37. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho số phức $z = (1 - 2i)^2$. Tính mô-đun của số phức $\frac{1}{z}$.

- A $\frac{1}{5}$.
 B $\sqrt{5}$.
 C $\frac{1}{25}$.
 D $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 38. (KTNL GV Lý Thái Tổ 2019) Cho số phức $z = (1 - i)^2 (1 + 2i)$. Số phức z có phần ảo là:

- A 2.
 B -2.
 C 4.
 D -2i.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 39. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho số phức $z = 1 - \frac{1}{3}i$. Tìm số phức $w = i\bar{z} + 3z$.

- A $w = \frac{8}{3}$.
 B $w = \frac{8}{3} + i$.
 C $w = \frac{10}{3}$.
 D $w = \frac{10}{3} + i$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 40. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Cho số phức $z = -2 + i$. Điểm nào dưới đây là biểu diễn của số phức $w = iz$ trên mặt phẳng tọa độ?

- A $M(-1; -2)$.
 B $P(-2; 1)$.
 C $N(2; 1)$.
 D $Q(1; 2)$.

.....

.....

✎ Ví dụ 41. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho số phức $z = 1 + 2i$. Tìm tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = 2z + \bar{z}$.

- (A) 3. (B) 5. (C) 1. (D) 2.

.....

✎ Ví dụ 42. (Chuyên KHTN 2019) Cho số phức z khác 0. Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) $\frac{z}{\bar{z}}$ là số thuần ảo. (B) $z \cdot \bar{z}$ là số thực. (C) $z + \bar{z}$ là số thực. (D) $z - \bar{z}$ là số ảo.

.....

✎ Ví dụ 43. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Số phức $2z_1 + 3z_2 - z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

- (A) $10i$. (B) $-10i$. (C) $11 + 8i$. (D) $11 - 10i$.

.....

✎ Ví dụ 44. (THPT Gia Lộc Hải Dương Năm 2019) Tìm tọa độ điểm M là điểm biểu diễn số phức z biết z thỏa mãn phương trình $(1 + i)\bar{z} = 3 - 5i$.

- (A) $M(-1; 4)$. (B) $M(-1; -4)$. (C) $M(1; 4)$. (D) $M(1; -4)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 45. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Cho số phức z thỏa mãn $(1 + 3i)z - 5 = 7i$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A** $\bar{z} = \frac{13}{5} - \frac{4}{5}i.$
 B $\bar{z} = -\frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$
 C $\bar{z} = -\frac{13}{5} - \frac{4}{5}i.$
 D $\bar{z} = \frac{13}{5} + \frac{4}{5}i.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 46. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho số phức $z = \frac{(2 - 3i)(4 - i)}{3 + 2i}$. Tìm tọa độ điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng Oxy .

- A** $(1; 4).$
 B $(-1; 4).$
 C $(-1; -4).$
 D $(1; -4).$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 47. (Chuyên Hạ Long 2019) Cho $z_1 = 2 + 4i, z_2 = 3 - 5i$. Xác định phần thực của $w = z_1 \cdot \bar{z}_2^2$

- A** $-120.$
 B $-32.$
 C $88.$
 D $-152.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 48. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Tìm tọa độ điểm M biểu diễn số phức z .

- A** $M(-1; 1).$
 B $M(-1; -1).$
 C $M(1; 1).$
 D $M(1; -1).$

.....

✎ Ví dụ 49. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Cho số phức z thỏa mãn $(1 - \sqrt{3}i)^2 z = 4 - 3i$.

Môđun của z bằng

(A) $\frac{5}{4}$.

(B) $\frac{5}{2}$.

(C) $\frac{2}{5}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

✎ Ví dụ 50. (THPT Ngô Quyền-Quảng Ninh-2018) Cho $z = \frac{3+i}{x+i}$. Tổng phần thực và phần ảo của z là

(A) $\frac{2x-4}{2}$.

(B) $\frac{4x+2}{2}$.

(C) $\frac{4x-2}{x^2+1}$.

(D) $\frac{2x+6}{x^2+1}$.

📖 Dạng 1.15. Phương trình bậc hai trên tập số phức

Xét phương trình bậc hai với $a \neq 0$ có: $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Nếu $\Delta = 0$ thì (*) có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì (*) có hai nghiệm phân biệt: $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ và $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$.
- Lưu ý
 - Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức \mathbb{C} : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
 - Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức w và tìm như sau:
 - Đặt $w = \sqrt{z} = \sqrt{x + yi} = a + bi$ với $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$$- w^2 = x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = x + yi \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases}.$$

- Giải hệ này với $a, b \in \mathbb{R}$ sẽ tìm được a và b $\Rightarrow w = \sqrt{z} = a + bi$

✎ Ví dụ 1. (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An -2019) Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- Ⓐ $10\sqrt{3}$. Ⓑ $5\sqrt{2}$. Ⓒ $2\sqrt{10}$. Ⓓ 20.

.....

✎ Ví dụ 2. (SGD và ĐT Đà Nẵng 2019) Nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$ là:

- Ⓐ $1 + 2i$. Ⓑ $-1 + 2i$. Ⓒ $-1 - 2i$. Ⓓ $1 - 2i$.

.....

✎ Ví dụ 3. (Mã 101-2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 6z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn số phức $1 - z_0$ là

- Ⓐ $N(-2; 2)$. Ⓑ $M(4; 2)$. Ⓒ $P(4; -2)$. Ⓓ $Q(2; -2)$.

.....

✎ Ví dụ 4. (Mã 103-2020 Lần 1) Cho z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 + 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1 - z_0$ là

- Ⓐ $P(-1; -3)$. Ⓑ $M(-1; 3)$. Ⓒ $N(3; -3)$. Ⓓ $Q(3; 3)$.

✍ Ví dụ 5. (Mã 104-2020 Lần 1) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2 - 4z + 13 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm biểu diễn của số phức $1 - z_0$ là

- (A) $M(3; -3)$.
 (B) $P(-1; 3)$.
 (C) $Q(1; 3)$.
 (D) $N(-1; -3)$.

✍ Ví dụ 6. (Mã 102-2020 Lần 2) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

- (A) $\sqrt{3}$.
 (B) $2\sqrt{3}$.
 (C) 6.
 (D) 3.

✍ Ví dụ 7. (Mã 103-2020 Lần 2) Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 2 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

- (A) 2.
 (B) 4.
 (C) $2\sqrt{2}$.
 (D) $\sqrt{2}$.

✍ Ví dụ 8. (Mã 104-2020 Lần 2) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + z + 3 = 0$. Khi đó $|z_1| + |z_2|$ bằng

- (A) 3.
 (B) $2\sqrt{3}$.
 (C) $\sqrt{3}$.
 (D) 6.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Môđun của số phức $z_0 + i$ bằng

- A) 2.
 B) $\sqrt{2}$.
 C) $\sqrt{10}$.
 D) 10.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 10. (Mã104 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 4 = 0$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trên mặt phẳng tọa độ. Tính $T = OM + ON$ với O là gốc tọa độ.

- A) $T = 8$.
 B) 4.
 C) $T = \sqrt{2}$.
 D) $T = 2$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 11. (Mã 123 2017) Phương trình nào dưới đây nhận hai số phức $1 + \sqrt{2}i$ và $1 - \sqrt{2}i$ là nghiệm.

- A) $z^2 + 2z + 3 = 0$.
 B) $z^2 - 2z + 3 = 0$.
 C) $z^2 + 2z - 3 = 0$.
 D) $z^2 - 2z - 3 = 0$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 12. (Mã 110 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

(A) $P = \frac{2}{3}$.

(B) $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(C) $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(D) $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 13. (Mã 102-2019) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 14 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

(A) 36.

(B) 8.

(C) 28.

(D) 18.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 14. (Mã 104-2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 7 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

(A) 2.

(B) 8.

(C) 16.

(D) 10.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 15. (Đề Tham Khảo 2017) Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + z + 1 = 0$. Tính $P = z_1^2 + z_2^2 + z_1 z_2$.

(A) $P = 2$.

(B) $P = -1$.

(C) $P = 0$.

(D) $P = 1$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 16. (Đề Tham Khảo 2019) Kí hiệu z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 3z + 5 = 0$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng:

- A) 10.
 B) $2\sqrt{5}$.
 C) $\sqrt{5}$.
 D) 3.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 17. (Mã 105 2017) Kí hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - z + 6 = 0$. Tính $P = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$.

- A) $\frac{1}{6}$.
 B) $-\frac{1}{6}$.
 C) 6.
 D) $\frac{1}{12}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18. (Đề Tham Khảo 2018) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $4z^2 - 4z + 3 = 0$. Giá trị của biểu thức $|z_1| + |z_2|$ bằng:

- A) $3\sqrt{2}$.
 B) $2\sqrt{3}$.
 C) 3.
 D) $\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 19. (Mã 103-2019) Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng

- A) 16.
 B) 26.
 C) 6.
 D) 8.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 20. (Mã 101-2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$.

Giá trị của $z_1^2 + z_2^2$ bằng:

(A) 16.

(B) 56.

(C) 20.

(D) 26.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 21. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Tính giá trị biểu thức $A = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

(A) $10\sqrt{3}$.

(B) $5\sqrt{2}$.

(C) $2\sqrt{10}$.

(D) 20.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 22. (Chuyên Sơn La 2019) Ký hiệu z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + 2z + 10 = 0$. Giá trị của $|z_1| \cdot |z_2|$ bằng

(A) 5.

(B) $\frac{5}{2}$.

(C) 10.

(D) 20.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. Ký hiệu z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 = -3$. Giá trị của $|z_1| + |z_2|$ bằng

(A) 6.

(B) $2\sqrt{3}$.

(C) 3.

(D) $\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 24. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 - 8z + 25 = 0$. Giá trị $|z_1 - z_2|$ bằng

- (A) 5. (B) 3. (C) 8. (D) 6.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 25. Biết z là số phức có phần ảo âm và là nghiệm của phương trình $z^2 - 6z + 10 = 0$. Tính tổng phần thực và phần ảo của số phức $w = \frac{z}{|z|}$.

- (A) $\frac{7}{5}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{4}{5}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 26. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Tính $w = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + i(z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1)$.

- (A) $w = -\frac{4}{5} + 20i$. (B) $w = \frac{4}{5} + 20i$. (C) $w = 4 + 20i$. (D) $w = 20 + \frac{4}{5}i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 27. Với các số thực a, b biết phương trình $z^2 + 8az + 64b = 0$ có nghiệm phức $z_0 = 8 + 16i$. Tính môđun của số phức $w = a + bi$

- (A) $|w| = \sqrt{19}$. (B) $|w| = \sqrt{3}$. (C) $|w| = \sqrt{7}$. (D) $|w| = \sqrt{29}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 28. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019) Phương trình $z^2 + a.z + b = 0$, với a, b là các số thực nhận số phức $1 + i$ là một nghiệm.

Tính $a - b$?

(A) -2 .

(B) -4 .

(C) 4 .

(D) 0 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 29. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Gọi z_1, z_2 là các nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 7 = 0$. Số phức $z_1.\bar{z}_2 + \bar{z}_2.z_1$ bằng

(A) 2 .

(B) 10 .

(C) $2i$.

(D) $10i$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 30. Gọi $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - 2z + 27 = 0$. Giá trị của $z_1|z_2| + z_2|z_1|$ bằng:

(A) 2 .

(B) 6 .

(C) $3\sqrt{6}$.

(D) $\sqrt{6}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 31. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 + 4z + 29 = 0$. Tính giá trị của biểu thức $|z_1|^4 + |z_2|^4$.

(A) 841 .

(B) 1682 .

(C) 1282 .

(D) 58 .

.....

.....

.....

Ví dụ 32. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Kí hiệu $z_1; z_2$ là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 1 = 0$. Tính $P = |z_1| + |z_2|$.

- A $P = \frac{\sqrt{14}}{3}$.
 B $P = \frac{2}{3}$.
 C $P = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
 D $P = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 33. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2 - z + 2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $T = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

- A $T = \frac{2}{3}$.
 B $T = \frac{8}{3}$.
 C $T = \frac{4}{3}$.
 D $T = -\frac{11}{9}$.

C. CÁC DẠNG BÀI TẬP MỨC 7-8 ĐIỂM

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Câu 1. (Đề Minh Hóa 2017) Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$

- A $T = 2 + 2\sqrt{3}$.
 B $T = 4$.
 C $T = 2\sqrt{3}$.
 D $T = 4 + 2\sqrt{3}$.

Câu 2. (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019) Tính modun của số phức $w = b + ci, b, c \in \mathbb{R}$ biết số phức $\frac{i^8 - 1 - 2i}{1 - i^7}$ là nghiệm của phương trình $z^2 + bz + c = 0$.

- A 2.
 B 3.
 C $2\sqrt{2}$.
 D $3\sqrt{2}$.

Câu 3. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Gọi A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn cho các số phức z_1, z_2 khác 0 thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 - z_1z_2 = 0$, khi đó tam giác OAB (O là gốc tọa độ):

- A Là tam giác đều.
 B Là tam giác vuông.
 C Là tam giác cân, không đều.
 D Là tam giác tù.

Câu 4. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Cho phương trình $az^2 + bz + c = 0$, với $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ có các nghiệm z_1, z_2 đều không là số thực. Tính $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ theo a, b, c

(A) $P = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$. (B) $P = \frac{2c}{a}$. (C) $P = \frac{4c}{a}$. (D) $P = \frac{2b^2 - 4ac}{a^2}$.

Câu 5. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh -2019) Gọi S là tổng các số thực m để phương trình $z^2 - 2z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 2$ Tính S

(A) $S = 6$. (B) $S = 10$. (C) $S = -3$. (D) $S = 7$.

Câu 6. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 1 + 3i - |z|i = 0$. Tính $S = 2a + 3b$.

(A) $S = -6$. (B) $S = 6$. (C) $S = -5$. (D) $S = 5$.

Câu 7. Gọi S là tổng các giá trị thực của m để phương trình $9z^2 + 6z + 1 - m = 0$ có nghiệm phức thỏa mãn $|z| = 1$. Tính S .

(A) 20. (B) 12. (C) 14. (D) 8.

Câu 8. (Sở GD Kon Tum 2019) Gọi z là một nghiệm của phương trình $z^2 - z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức $M = z^{2019} + z^{2018} + \frac{1}{z^{2019}} + \frac{1}{z^{2018}} + 5$ bằng

(A) 5. (B) 2. (C) 7. (D) -1.

Câu 9. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 4z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức $(z_1 - 1)^{2019} + (z_2 - 1)^{2019}$ bằng?

(A) 2^{1009} . (B) 2^{1010} . (C) 0. (D) -2^{1010} .

Câu 10. Cho phương trình $z^2 + bz + c = 0$, có hai nghiệm z_1, z_2 thỏa mãn $z_2 - z_1 = 4 + 2i$. Gọi A, B là các điểm biểu diễn các nghiệm của phương trình $z^2 - 2bz + 4c = 0$. Tính độ dài đoạn AB .

(A) $8\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{5}$. (C) $4\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 11. (Chu Văn An-Hà Nội-2019) Cho số phức w và hai số thực a, b . Biết rằng $w + i$ và $2w - 1$ là hai nghiệm của phương trình $z^2 + az + b = 0$. Tổng $S = a + b$ bằng

(A) $\frac{5}{9}$. (B) $-\frac{5}{9}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $-\frac{1}{3}$.

Câu 12. Số phức $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình $\frac{(|z| - 1)(1 + iz)}{z - \frac{1}{z}} = i$. Tổng $T = a^2 + b^2$ bằng

(A) 4. (B) $4 - 2\sqrt{3}$. (C) $3 + 2\sqrt{2}$. (D) 3.

Câu 13. Cho các số phức z, w khác 0 thỏa mãn $z + w \neq 0$ và $\frac{1}{z} + \frac{3}{w} = \frac{6}{z + w}$. Khi đó $\left| \frac{z}{w} \right|$ bằng

(A) $\sqrt{3}$.

(B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(C) 3.

(D) $\frac{1}{3}$.

Câu 14. (SGD và ĐT Đà Nẵng 2019) Cho phương trình $x^2 - 4x + \frac{c}{d} = 0$ (với phân số $\frac{c}{d}$ tối giản) có hai nghiệm phức. Gọi A, B là hai điểm biểu diễn của hai nghiệm đó trên mặt phẳng Oxy . Biết tam giác OAB đều (với O là gốc tọa độ), tính $P = c + 2d$.

(A) $P = 18$.

(B) $P = -10$.

(C) $P = -14$.

(D) $P = 22$.

Câu 15. (Đề thử nghiệm 2017) Xét số phức z thỏa mãn $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$ Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

(B) $|z| > 2$.

(C) $|z| < \frac{1}{2}$.

(D) $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Câu 16. Có bao nhiêu giá trị dương của số thực a sao cho phương trình $z^2 + \sqrt{3}z + a^2 - 2a = 0$ có nghiệm phức z_0 với phần ảo khác 0 thỏa mãn $|z_0| = \sqrt{3}$

(A) 3.

(B) 2.

(C) 1.

(D) 4.

Dạng 1.16. Tìm số phức và các thuộc tính của nó thỏa điều kiện K

- Bước 1. Gọi số phức cần tìm là $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z, \bar{z}, |z|$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình $\Rightarrow x, y$.
- Lưu ý: Trong trường phức \mathbb{C} , cho số phức $z = x + y.i$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x, y \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Khi đó, ta cần nhớ:

– Môđun của số phức $z = x + y.i$ là $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\text{thực})^2 + (\text{ảo})^2}$.

– Số phức liên hợp của $z = x + y.i$ là $\bar{z} = x - y.i$ (ngược dấu ảo).

– Hai số phức $z_1 = x_1 + y_1.i$ và $z_2 = x_2 + y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \text{ (hai số phức bằng nhau khi thực = thực và ảo = ảo)}$$

Câu 1. (Mã 104 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = -1; y = -1$.

(B) $x = -1; y = 1$.

(C) $x = 1; y = -1$.

(D) $x = 1; y = 1$.

Câu 2. (Mã 105 2017) Tìm tất cả các số thực x, y sao cho $x^2 - 1 + yi = -1 + 2i$.

(A) $x = \sqrt{2}, y = 2$.

(B) $x = -\sqrt{2}, y = 2$.

(C) $x = 0, y = 2$.

(D) $x = \sqrt{2}, y = -2$.

Câu 3. (Mã 101 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = x + 6i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 1; y = -1$. (B) $x = 1; y = -3$. (C) $x = -1; y = -3$. (D) $x = -1; y = -1$.

Câu 4. (Mã 104-2019) Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)z + 3 + 16i = 2(\bar{z} + i)$. Môđun của z bằng

(A) $\sqrt{13}$. (B) 5. (C) $\sqrt{5}$. (D) 13.

Câu 5. (Mã 103-2019) Cho số z thỏa mãn $(2 + i)z - 4(\bar{z} - i) = -8 + 19i$. Môđun của z bằng

(A) 13. (B) 5. (C) $\sqrt{13}$. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 6. (Mã 102 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + 2yi) + (2 + i) = 2x - 3i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 2; y = -2$. (B) $x = 2; y = -1$. (C) $x = -2; y = -2$. (D) $x = -2; y = -1$.

Câu 7. (Đề Tham Khảo -2019) Tìm các số thực a, b thỏa mãn $2a + (b + i)i = 1 + 2i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $a = 0, b = 1$. (B) $a = 1, b = 2$. (C) $a = 0, b = 2$. (D) $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

Câu 8. (Mã 103 2018) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(3x + yi) + (4 - 2i) = 5x + 2i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 2; y = 4$. (B) $x = -2; y = 0$. (C) $x = 2; y = 0$. (D) $x = -2; y = 4$.

Câu 9. (Mã 102-2019) Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} - i) - (2 + 3i)z = 7 - 16i$ Môđun của z bằng

(A) 3. (B) $\sqrt{5}$. (C) 5. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 10. (Mã 101-2019) Cho số phức z thỏa mãn $3(\bar{z} + i) - (2 - i)z = 3 + 10i$. Môđun của z bằng

(A) $\sqrt{3}$. (B) 3. (C) 5. (D) $\sqrt{5}$.

Câu 11. (THPT Cẩm Giàng 2 Năm 2019) Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (1 - 3i) = -1 + 6i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = 1; y = -3$. (B) $x = -1; y = -3$. (C) $x = -1; y = -1$. (D) $x = 1; y = -1$.

Câu 12. Tìm hai số thực x và y thỏa mãn $(2x - 3yi) + (3 - i) = 5x - 4i$ với i là đơn vị ảo.

(A) $x = -1, y = -1$. (B) $x = 1, y = 1$. (C) $x = -1, y = 1$. (D) $x = 1, y = -1$.

Câu 13. (Chuyên Sơn La 2019) Tìm các số thực x và y thỏa mãn $(3x - 2) + (2y + 1)i = (x + 1) - (y - 5)i$, với i là đơn vị ảo.

(A) $x = \frac{3}{2}, y = -2$. (B) $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{4}{3}$. (C) $x = 1, y = \frac{4}{3}$. (D) $x = \frac{3}{2}, y = \frac{4}{3}$.

Câu 14. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$

(A) $P = 1$. (B) $P = -\frac{1}{2}$. (C) $P = \frac{1}{2}$. (D) $P = -1$.

Câu 15. (Chuyên KHTN -2019) Cho số phức z thỏa mãn $(2 + 3i)z + 4 - 3i = 13 + 4i$. Môđun của z bằng

- (A) 2. (B) 4. (C) $2\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{10}$.

Câu 16. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + 2i)\bar{z} + z = 3 - 4i$. Tính giá trị của biểu thức $S = 3x - 2y$.

- (A) $S = -12$. (B) $S = -11$. (C) $S = -13$. (D) $S = -10$.

Câu 17. (Sở Bình Phước 2019) Tổng phần thực và phần ảo của số phức z thỏa mãn $iz + (1 - i)\bar{z} = -2i$ bằng

- (A) 6. (B) -2. (C) 2. (D) -6.

Câu 18. (Sở Bình Phước 2019) Cho $a, b \in \mathbb{R}$ và thỏa mãn $(a + bi)i - 2a = 1 + 3i$, với i là đơn vị ảo. Giá trị $a - b$ bằng

- (A) 4. (B) -10. (C) -4. (D) 10.

Câu 19. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $(1 + i)z + 2\bar{z} = 3 + 2i$. Tính $P = a + b$

- (A) $P = 1$. (B) $P = -\frac{1}{2}$. (C) $P = \frac{1}{2}$. (D) $P = -1$.

Câu 20. (Chuyên Hạ Long -2019) Tìm số phức z biết $4z + 5\bar{z} = 27 - 7i$.

- (A) $z = -3 + 7i$. (B) $z = -3 - 7i$. (C) $z = 3 - 7i$. (D) $z = 3 + 7i$.

Câu 21. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Cho số phức z thỏa mãn $(3 + 2i)z + (2 - i)^2 = 4 + i$. Môđun của số phức $w = (z + 1)\bar{z}$ bằng.

- (A) 2. (B) $\sqrt{10}$. (C) $\sqrt{5}$. (D) 4.

Câu 22. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Tìm các số thực a, b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $a = -3, b = 1$. (B) $a = 3, b = -1$. (C) $a = -3, b = -1$. (D) $a = 3, b = 1$.

Câu 23. Cho hai số phức $z_1 = m + 1 - 2i$ và $z_2 = 2 - (m + 1)i$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để $z_1 \cdot z_2 - 8 + 8i$ là một số thực.

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Câu 24. (Chuyên Bắc Giang 2019) Tìm môđun của số phức z biết $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

- (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (C) $\frac{2}{9}$. (D) $\frac{1}{3}$.

Câu 25. Tính môđun của số phức z thỏa mãn $z(1 + 2i) + \bar{z}(1 - i) + 4 - i = 0$ với i là đơn vị ảo.

- (A) $\sqrt{6}$. (B) $\sqrt{5}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 26. (Chuyên Trần Đại Nghĩa-TPHCM-2018) Tìm số phức $z - (2 + 3i)\bar{z} = 1 - 9i$ thỏa mãn /.

(A) $-2 + i$.

(B) $-2 - i$.

(C) $2 - i$.

(D) $2 + i$.

Dạng 1.17. Tập hợp điểm biểu diễn số phức

Bài toán: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước?

- Bước 1. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

a) Mối liên hệ giữa x và y

1. $Ax + By + C = 0$

2. $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

3. $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2$ hoặc $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$

4. $R_1^2 \leq (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R_2^2$

5. $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

6. $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ với $MF_1 + MF_2 = 2a$ và $F_1F_2 = 2c < 2a$.

7. $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ với $|MF_1 - MF_2| = 2a$ và $F_1F_2 = 2c > 2a$.

8. $MA = MB$

b) Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$

1. Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$

2. Là đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

3. Là hình tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

4. Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2 .

5. Là một parabol có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

6. Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}, (a > b > 0)$.

7. Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b > 0$.

8. Là đường trung trực đoạn thẳng AB .

Lưu ý: Đối với bài toán dạng này, người ra đề thường cho thông qua hai cách:

- Trực tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm $M(x; y)$ biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn tính chất K .
- Gián tiếp, nghĩa là tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = f(z)$ mà số phức z thỏa mãn tính chất K nào đó, chẳng hạn: $f(z, \bar{z}, |z|) = 0$

Dạng 1. Tập hợp điểm biểu diễn là đường tròn

Câu 1. (Mã 102 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 3i)(z - 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng:

- (A) $\frac{9}{2}$. (B) $3\sqrt{2}$. (C) 3. (D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 2. (Mã 103 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + 2i)(z - 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) 4. (C) $\sqrt{2}$. (D) 2.

Câu 3. (Mã 104 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{5 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) 44. (B) 52. (C) $2\sqrt{13}$. (D) $2\sqrt{11}$.

Câu 4. (Mã 104 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z là một đường tròn có bán kính bằng?

- (A) $\sqrt{2}$. (B) 2. (C) 4. (D) $2\sqrt{2}$.

Câu 5. (Đề Minh Họa 2017) Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

- (A) $r = 22$. (B) $r = 4$. (C) $r = 5$. (D) $r = 20$.

Câu 6. (Đề Tham Khảo 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $(z + 2i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

- (A) (1; 1). (B) (-1; 1). (C) (-1; -1). (D) (1; -1).

Câu 7. (Mã 101 2018) Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} + i)(z + 2)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) 1. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 8. (Mã 101 2019) Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{4 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $\sqrt{26}$. (B) $\sqrt{34}$. (C) 26. (D) 34.

Câu 9. (Mã 102-2019) Xét số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = \frac{3 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) 20. (C) 12. (D) $2\sqrt{3}$.

Câu 10. (Mã 103-2019) Xét các số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = \frac{2 + iz}{1 + z}$ là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $\sqrt{10}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) 2. (D) 10.

Câu 11. (THPT Gia Lộc Hải Dương -2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn đó?

- (A) $I(3; -2)$. (B) $I(-3; 2)$. (C) $I(3; 2)$. (D) $I(-3; -2)$.

Câu 12. (ĐỀ MẪU KSNL ĐHQG TPHCM 2019) Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $z\bar{z} = 1$ là

- (A) một đường thẳng. (B) một đường tròn. (C) một elip. (D) một điểm.

Câu 13. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho số phức z thỏa $|z - 1 + 2i| = 3$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = 2z + i$ trên mặt phẳng (Oxy) là một đường tròn. Tìm tâm của đường tròn đó.

- (A) $I(2; -3)$. (B) $I(1; 1)$. (C) $I(0; 1)$. (D) $I(1; 0)$.

Câu 14. (Chuyên Sơn La 2019) Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$ là một đường tròn, tâm của đường tròn đó có tọa độ là

- (A) $(1; 1)$. (B) $(0; -1)$. (C) $(0; 1)$. (D) $(-1; 0)$.

Câu 15. (Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019) Cho số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z}{i+2} \right| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn (C). Tính bán kính r của đường tròn (C).

- (A) $r = 1$. (B) $r = \sqrt{5}$. (C) $r = 2$. (D) $r = \sqrt{3}$.

Câu 16. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Trong mặt phẳng tọa độ điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1 - 2i| = 3$ là

- (A) đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 9$.
 (B) đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 3$.
 (C) đường tròn tâm $I(-1; -2)$, bán kính $R = 3$.
 (D) đường thẳng có phương trình $x + 2y - 3 = 0$.

Câu 17. (Sở Thanh Hóa 2019) Xét các số phức z thỏa mãn $(2 - z)(\bar{z} + i)$ là số thuần ảo. Tập hợp các điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng tọa độ là:

- (A) Đường tròn tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
 (B) Đường tròn tâm $I\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
 (C) Đường tròn tâm $I(2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

(D) Đường tròn tâm $I\left(1; \frac{1}{2}\right)$, bán kính $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$ nhưng bỏ điểm $A(2; 0); B(0; 1)$.

Câu 18. (Chuyên Bắc Giang 2019) Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - i| = |(1 + i)z|$.

(A) Đường tròn tâm $I(0; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

(B) Đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

(C) Đường tròn tâm $I(-1; 0)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

(D) Đường tròn tâm $I(0; -1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Câu 19. Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z - i| = 4$ là đường cong có phương trình

(A) $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

(B) $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

(C) $(x - 1)^2 + y^2 = 16$.

(D) $x^2 + (y - 1)^2 = 16$.

Câu 20. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là

(A) $I(2; -1); R = 4$. (B) $I(2; -1); R = 2$. (C) $I(-2; -1); R = 4$. (D) $I(-2; -1); R = 2$.

Câu 21. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - 1 + i| = 2$ là đường tròn có tâm và bán kính lần lượt là:

(A) $I(-1; 1), R = 4$. (B) $I(-1; 1), R = 2$. (C) $I(1; -1), R = 2$. (D) $I(1; -1), R = 4$.

Câu 22. (Chuyên KHTN 2019) Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|(1 + i)z - 5 + i| = 2$ là một đường tròn tâm I và bán kính R lần lượt là

(A) $I(2; -3), R = \sqrt{2}$. (B) $I(2; -3), R = 2$. (C) $I(-2; 3), R = \sqrt{2}$. (D) $I(-2; 3), R = 2$.

Câu 23. (Chuyên KHTN -2019) Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z + 2}{z - 2i}$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

(A) 1.

(B) $\sqrt{2}$.

(C) $2\sqrt{2}$.

(D) 2.

Câu 24. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị -2019) Tính tổng của tất cả các giá trị của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn đồng thời $|z| = m$ và $|z - 4m + 3mi| = m^2$.

(A) 4.

(B) 6.

(C) 9.

(D) 10.

Câu 25. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019) Cho số phức z thỏa mãn: $|z + 2 - i| = 3$. Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) biểu diễn số phức $w = 1 + \bar{z}$ là

(A) Đường tròn tâm $I(-2; 1)$ bán kính $R = 3$.

(B) Đường tròn tâm $I(2; -1)$ bán kính $R = 3$.

(C) Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 9$.

(D) Đường tròn tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 3$.

Câu 26. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 2\sqrt{5}$. Biết rằng trong mặt phẳng tọa độ các điểm biểu diễn của số phức $w = i + (2 - i)z$ cùng thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó?

- (A) $r = \sqrt{5}$. (B) $r = 10$. (C) $r = 20$. (D) $r = 2\sqrt{5}$.

Câu 27. Xét các số phức z thỏa mãn $(\bar{z} - 2i)(z + 3)$ là số thuần ảo. Trên mặt phẳng tọa độ, tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z là một đường tròn có bán kính bằng

- (A) $\sqrt{13}$. (B) $\sqrt{11}$. (C) $\frac{\sqrt{11}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 28. Cho các số phức z thỏa mãn $|z + 1| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + i\sqrt{8})z + i$ là một đường tròn. Bán kính r của đường tròn đó là

- (A) 9. (B) 36. (C) 6. (D) 3.

Câu 29. Cho z_1, z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$ đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình

- (A) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$. (B) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.
(C) $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = 9$. (D) $(x - \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Câu 30. (Chuyên KHTN-2018). Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn: $|\bar{z} + 2 - i| = 4$ là đường tròn có tâm I và bán kính R lần lượt là:

- (A) $I(-2; -1); R = 4$. (B) $I(-2; -1); R = 2$.
(C) $I(2; -1); R = 4$. (D) $I(2; -1); R = 2$.

Câu 31. (Toán Học Tuổi Trẻ-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 - i)\bar{z} + 2i$ là

- (A) Một đường tròn. (B) Một đường thẳng.
(C) Một Elip. (D) Một parabol hoặc hyperbol.

Câu 32. (Đồng Tháp 2018) Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + 1| = |1 - i - 2z|$ là đường tròn (C) . Tính bán kính R của đường tròn (C)

- (A) $R = \frac{10}{9}$. (B) $R = 2\sqrt{3}$. (C) $R = \frac{7}{3}$. (D) $R = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

Câu 33. (SGD-Hà Tĩnh-2018) Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2z - i| = 6$ là một đường tròn có bán kính bằng:

- (A) 3. (B) $6\sqrt{2}$. (C) 6. (D) $3\sqrt{2}$.

Câu 34. (Chuyên Thăng Long-Đà Lạt-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 3i| = 2$. Biết tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (2 - i)z - 3i + 5$ là một đường tròn. Xác định tâm I và bán kính

của đường tròn trên.

(A) $I(-6; -4), R = 2\sqrt{5}$.

(B) $I(6; 4), R = 10$.

(C) $I(6; 4), R = 2\sqrt{5}$.

(D) $I(-6; 4), R = 2\sqrt{5}$.

Câu 35. (Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Bán kính R của đường tròn đó bằng?

(A) 7.

(B) 20.

(C) $2\sqrt{5}$.

(D) $\sqrt{7}$.

Câu 36. (SGD Thanh Hóa-2018) Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 5 - 3i| = 5$, đồng thời $|z_1 - z_2| = 8$. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $w = z_1 + z_2$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy là đường tròn có phương trình nào dưới đây?

(A) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

(B) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

(C) $(x - 10)^2 + (y - 6)^2 = 16$.

(D) $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 9$.

Câu 37. (THPT Thái Phiên-Hải Phòng-2018) Xét số phức z thỏa mãn $|z - 3i + 4| = 3$, biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (12 - 5i)\bar{z} + 4i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

(A) $r = 13$.

(B) $r = 39$.

(C) $r = 17$.

(D) $r = 3$.

Câu 38. (THPT Thực Hành-TPHCM-2018) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3| = 1$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 - \sqrt{3}i)z + 1 - 2i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

(A) $r = 2$.

(B) $r = 1$.

(C) $r = 4$.

(D) $r = \sqrt{2}$.

Câu 39. (THPT Lê Thủy-Quảng Bình 2017) Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $|z + m - 1 + \sqrt{3}i| = 4$. Tìm tất cả các số thực m sao cho tập hợp các điểm M là đường tròn tiếp xúc với trục Oy .

(A) $m = -5; m = 3$.

(B) $m = 5; m = -3$.

(C) $m = -3$.

(D) $m = 5$.

Câu 40. (Cụm 4 HCM 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z - 2| = 2$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (1 - i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

(A) $r = 2$.

(B) $r = 4$.

(C) $r = \sqrt{2}$.

(D) $r = 2\sqrt{2}$.

Câu 41. (Chuyên Lương Thế Vinh-Hà Nội -2018) Cho số phức z thỏa mãn $(z - 2 + i)(\bar{z} - 2 - i) = 25$. Biết tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w = 2\bar{z} - 2 + 3i$ là đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Giá trị của $a + b + c$ bằng

(A) 18.

(B) 20.

(C) 10.

(D) 17.

Câu 42. (Chuyên Lê Quý Đôn-Điện Biên 2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

- (A) Một đường thẳng. (B) Một hình tròn. (C) Một đường tròn. (D) Một đường elip.

Câu 43. (Chuyên Ngữ Hà Nội 2019) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$ và $|z| = 1$

- (A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 4.

Câu 44. (SGD Điện Biên-2019) Xét các số phức z thỏa mãn $(z - 4i)(\bar{z} + 2)$ là số thuần ảo. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn. Tìm tọa độ tâm của đường tròn đó.

- (A) $(-1; -2)$. (B) $(-1; 2)$. (C) $(1; 2)$. (D) $(1; -2)$.

Câu 45. (SGD Bắc Ninh 2019) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|\bar{z} + 1 + 2i| = 1$ là

- (A) đường tròn $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$. (B) đường tròn $I(-1; -2)$, bán kính $R = 1$.
(C) đường tròn $I(-1; 2)$, bán kính $R = 1$. (D) đường tròn $I(1; -2)$, bán kính $R = 1$.

Câu 46. (Sở Hà Nam-2019) Cho số phức z thỏa mãn $(z + 1 - 3i)(\bar{z} + 1 + 3i) = 25$. Biết tập hợp biểu diễn số phức z là một đường tròn có tâm $I(a; b)$ và bán kính c . Tổng $a + b + c$ bằng

- (A) 9. (B) 3. (C) 2. (D) 7.

Câu 47. (Ngô Quyền-Hải Phòng 2019) Cho số phức z thay đổi thỏa mãn $|z - 1| = 2$ Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn các số phức $w = (1 + \sqrt{3}i)z + 2$ là đường tròn có bán kính bằng R Tính R

- (A) $R = 8$. (B) $R = 2$. (C) $R = 16$. (D) $R = 4$.

Câu 48. Cho số phức z thỏa mãn $|z - 1| = 5$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức w xác định bởi $w = (2 + 3i)\bar{z} + 3 + 4i$ là một đường tròn bán kính R . Tính R .

- (A) $5\sqrt{13}$. (B) $5\sqrt{17}$. (C) $5\sqrt{10}$. (D) $5\sqrt{5}$.

Câu 49. (SGD Hưng Yên 2019) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = \sqrt{5}$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn số phức $w = (1 + 2i)z + i$ là một đường tròn. Tìm bán kính r của đường tròn đó.

- (A) $r = \sqrt{5}$. (B) $r = 10$. (C) $r = 5$. (D) $r = 2\sqrt{5}$.

Câu 50. Cho số phức z có môđun bằng $2\sqrt{2}$. Biết rằng tập hợp điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức $w = (1 - i)(z + 1) - i$ là đường tròn có tâm $I(a; b)$, bán kính R . Tổng $a + b + R$ bằng

- (A) 5. (B) 7. (C) 1. (D) 3.

Câu 51. (SP Đồng Nai-2019) Cho số phức z thoả mãn $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp điểm biểu diễn của số phức $w = \bar{z} + i$ là một đường tròn. Tìm tâm I của đường tròn đó.

- (A) $I(0; 1)$. (B) $I(0; -1)$. (C) $I(-1; 0)$. (D) $I(1; 0)$.

Dạng 2. Tập hợp điểm biểu diễn là đường thẳng

Câu 52. (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019) Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn $|z + 2| = |z - i|$ là một đường thẳng có phương trình

- (A) $4x + 2y + 3 = 0$. (B) $2x + 4y + 13 = 0$. (C) $4x - 2y + 3 = 0$. (D) $2x - 4y + 13 = 0$.

Câu 53. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho số phức z thoả mãn $|z - 1 + i| = |z + 2|$. Trong mặt phẳng phức, quỹ tích điểm biểu diễn các số phức z .

- (A) là đường thẳng $3x + y + 1 = 0$. (B) là đường thẳng $3x - y + 1 = 0$.
(C) là đường thẳng $3x + y - 1 = 0$. (D) là đường thẳng $3x - y - 1 = 0$.

Câu 54. Trên mặt phẳng phức, tập hợp các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thoả mãn $|z + 2 + i| = |\bar{z} - 3i|$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $y = x + 1$. (B) $y = -x + 1$. (C) $y = -x - 1$. (D) $y = x - 1$.

Câu 55. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn $|z - 1 + 2i| = |\bar{z} + 1 + 2i|$ là đường thẳng có phương trình

- (A) $x - 2y + 1 = 0$. (B) $x + 2y = 0$. (C) $x - 2y = 0$. (D) $x + 2y + 1 = 0$.

Câu 56. Xét các số phức z thoả mãn $z(\bar{z} - 2 + i) + 4i - 1$ là số thực. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z là đường thẳng d . Diện tích tam giác giới hạn bởi đường thẳng d và hai trục tọa độ bằng

- (A) 8. (B) 4. (C) 2. (D) 10.

Câu 57. (Đề Thi Công Bằng KHTN -2019) Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thoả mãn $|z + 2| = |z - i|$ là một đường thẳng có phương trình

- (A) $4x + 2y + 3 = 0$. (B) $2x + 4y + 13 = 0$. (C) $4x - 2y + 3 = 0$. (D) $2x - 4y + 13 = 0$.

Câu 58. (Liên Trường-Nghệ An-2018) Cho số phức z thoả mãn: $|z - 1| = |z - 2 + 3i|$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

- (A) Đường tròn tâm $I(1; 2)$, bán kính $R = 1$.
(B) Đường thẳng có phương trình $2x - 6y + 12 = 0$.
(C) Đường thẳng có phương trình $x - 3y - 6 = 0$.
(D) Đường thẳng có phương trình $x - 5y - 6 = 0$.

Câu 59. (Chuyên Lê Hồng Phong-TPHCM-2018) Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thoả $\left| \frac{(12 - 5i)z + 17 + 7i}{z - 2 - i} \right| = 13$.

(A) $d : 6x + 4y - 3 = 0.$

(B) $d : x + 2y - 1 = 0.$

(C) $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0.$

(D) $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0.$

Câu 60. (SGD BRVT-2018) Cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $z + 2 - i - |z|(1 - i) = 0$. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , điểm M là điểm biểu diễn của số phức z . Hỏi M thuộc đường thẳng nào sau đây?

(A) $x - y + 5 = 0.$

(B) $x - y + 2 = 0.$

(C) $x + y - 2 = 0.$

(D) $x + y + 1 = 0.$

Câu 61. Trong mặt phẳng phức Oxy , tập hợp các điểm biểu diễn số phức Z thỏa mãn $|z^2 + (\bar{z})^2 + 2|z|^2| = 16$ là hai đường thẳng d_1, d_2 . Khoảng cách giữa 2 đường thẳng d_1, d_2 là bao nhiêu?

(A) $d(d_1, d_2) = 1.$

(B) $d(d_1, d_2) = 6.$

(C) $d(d_1, d_2) = 2.$

(D) $d(d_1, d_2) = 4.$

Câu 62. Trong mặt phẳng phức, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = |\bar{z} - 3 + 4i|$ là?

(A) Parabol $y^2 = 4x.$

(B) Đường thẳng $6x + 8y - 25 = 0.$

(C) Đường tròn $x^2 + y^2 - 4 = 0.$

(D) Elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

Câu 63. Cho số phức z thỏa: $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2\bar{z}|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là.

(A) Một đường thẳng có phương trình: $-20x + 32y + 47 = 0.$

(B) Một đường có phương trình: $3y^2 + 20x + 2y - 20 = 0.$

(C) Một đường thẳng có phương trình: $20x + 16y + 47 = 0.$

(D) Một đường thẳng có phương trình: $20x - 16y - 47 = 0.$

Câu 64. (SGD Hưng Yên 2019) Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z sao cho z^2 là số thuần ảo.

(A) Hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x.$

(B) Trục $Ox.$

(C) Trục $Oy.$

(D) Hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x$, bỏ đi điểm $O(0; 0).$

Câu 65. (SGD Bến Tre 2019) Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - 2 - i| = |\bar{z} + 2i|$ là đường thẳng có phương trình

(A) $4x - 2y - 1 = 0.$

(B) $4x - 6y - 1 = 0.$

(C) $4x + 2y - 1 = 0.$

(D) $4x - 2y + 1 = 0.$

Câu 66. (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019) Trên mặt phẳng tọa độ, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn $|2 + z| = |z - i|.$

(A) Đường thẳng $4x + 2y + 3 = 0.$

(B) Điểm $M(-1; 1/2).$

(C) Đường thẳng $2x + y + 3 = 0.$

(D) Đường thẳng $4x + 2y - 3 = 0.$

Câu 67. Cho số phức z thỏa mãn $2|z - 2 + 3i| = |2i - 1 - 2z|$. Tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z là đường thẳng có phương trình:

- (A) $20x - 16y - 47 = 0$. (B) $20x + 6y - 47 = 0$.
 (C) $20x + 16y + 47 = 0$. (D) $20x + 16y - 47 = 0$.

Câu 68. (Kim Liên-Hà Nội 2019) Cho số phức thỏa mãn $|z - i| = |z - 1 + 2i|$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\omega = (2 - i)z + 1$ trên mặt phẳng phức là một đường thẳng. Phương trình đường thẳng đó là

- (A) $x + 7y + 9 = 0$. (B) $x + 7y - 9 = 0$. (C) $x - 7y - 9 = 0$. (D) $x - 7y + 9 = 0$.

Dạng 3. Tập hợp điểm biểu diễn là đường conic

Câu 69. (Sở Bình Phước 2019) Tập hợp các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là

- (A) Một điểm. (B) Một đường tròn. (C) Một đường thẳng. (D) Một Parabol.

Câu 70. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

- (A) Một đường elip. (B) Một đường parabol.
 (C) Một đoạn thẳng. (D) Một đường tròn.

Câu 71. Xét các số phức z thỏa mãn $\frac{z - 1 + i}{z + \bar{z}} i + 1$ là số thực. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức $\frac{z}{2}$ là parabol có tọa độ đỉnh

- (A) $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}\right)$. (B) $I\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$. (C) $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$. (D) $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 72. (Chuyên KHTN 2019) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$.

- (A) 15π . (B) 12π . (C) 20π . (D) Đáp án khác.

Câu 73. (CHUYÊN VINH 2017) Gọi M là điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $3|z + i| = |2\bar{z} + -z + 3i|$. Tìm tập hợp tất cả những điểm M như vậy.

- (A) Một đường thẳng. (B) Một parabol. (C) Một elip. (D) Một đường tròn.

Câu 74. (Sở Bình Phước 2017) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 8$. Trong mặt phẳng phức tập hợp những điểm M biểu diễn cho số phức z là?

- (A) (C) : $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 64$. (B) (E) : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.
 (C) (E) : $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$. (D) (C) : $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

Câu 75. (THPT Nguyễn Trãi 2017) Tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là hình gì?

- (A) Một đường tròn. (B) Một đường Parabol.

(C) Một đường Elip.

(D) Một đường thẳng.

Câu 76. (THPT Hai Bà Trưng- Huế 2017) Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn hình học số phức z trong mặt phẳng phức, biết số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z + 4| + |z - 4| = 10$.

(A) Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

(B) Tập hợp các điểm cần tìm là những điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng Oxy thỏa mãn phương trình $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 12$.

(C) Tập hợp các điểm cần tìm là đường tròn có tâm $O(0; 0)$ và có bán kính $R = 4$.

(D) Tập hợp các điểm cần tìm là đường elip có phương trình $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 77. (Chuyên Bến Tre 2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z + 4| + |z - 4| = 10$. Tập hợp các điểm M biểu diễn cho số phức z là đường có phương trình.

(A) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

(B) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(C) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$.

(D) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Dạng 4. Tập hợp điểm biểu diễn là một miền

Câu 78.

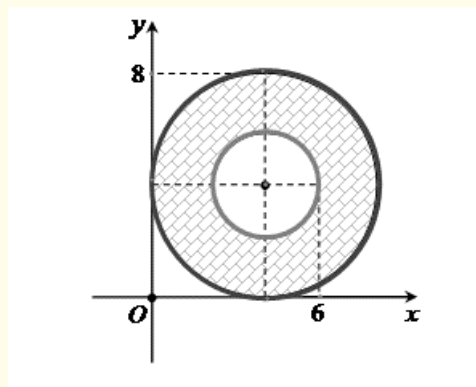
Phần gạch trong hình vẽ dưới là hình biểu diễn của tập các số phức thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

(A) $6 \leq |z| \leq 8$.

(B) $2 \leq |z + 4 + 4i| \leq 4$.

(C) $2 \leq |z - 4 - 4i| \leq 4$.

(D) $4 \leq |z - 4 - 4i| \leq 16$.



Câu 79. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z biết $|z - (2 - 3i)| \leq 2$.

(A) Một đường thẳng.

(B) Một hình tròn.

(C) Một đường tròn.

(D) Một đường Elip.

Câu 80. Trong mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn cho số phức z thỏa $|z + 4 - 4i| \leq 2$ là

(A) Hình tròn tâm $I(4; -4)$, bán kính $R = 4$.

(B) Hình tròn tâm $I(4; -4)$, bán kính $R = 2$.

(C) Hình tròn tâm $I(-4; 4)$, bán kính $R = 2$.

(D) Hình tròn tâm $I(-4; 4)$, bán kính $R = 4$.

Câu 81. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội -2019) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích của hình phẳng đó.

(A) $S = 25\pi$.

(B) $S = 8\pi$.

(C) $S = 4\pi$.

(D) $S = 16\pi$.

Câu 82. (THPT Thực Hành-TPHCM-2018) Trong mặt phẳng Oxy cho số phức z có điểm biểu

điểm nằm trong cung phần tư thứ (I). Hỏi điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{iz}$ nằm trong cung phần tư thứ mấy?

- (A) Cung (IV). (B) Cung (II). (C) Cung (III). (D) Cung (I).

Câu 83. (Sở Nam Định-2018) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là phần mặt phẳng chứa các điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z}{16}$ và $\frac{16}{\bar{z}}$ có phần thực và phần ảo đều thuộc đoạn $[0; 1]$. Tính diện tích S của (H)

- (A) $S = 32(6 - \pi)$. (B) $S = 16(4 - \pi)$. (C) $S = 256$. (D) $S = 64\pi$.

Câu 84. (Sở Yên Bái-2018) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành một hình phẳng. Tính diện tích S của hình phẳng đó.

- (A) $S = 4\pi$. (B) $S = 25\pi$. (C) $S = 8\pi$. (D) $S = 16\pi$.

Câu 85. (Sở Hà Tĩnh 2017) Biết số phức z thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ và $z - \bar{z}$ có phần ảo không âm. Phần mặt phẳng biểu diễn số phức z có diện tích là:

- (A) 2π . (B) π^2 . (C) $\frac{\pi}{2}$. (D) π .

Câu 86. (Chuyên Võ Nguyên Giáp 2017) Gọi H là hình biểu diễn tập hợp các số phức z trong mặt phẳng tọa độ Oxy sao cho $|2z - \bar{z}| \leq 3$, và số phức z có phần ảo không âm. Tính diện tích hình H .

- (A) $\frac{3\pi}{2}$. (B) $\frac{3\pi}{4}$. (C) 6π . (D) 3π .

Câu 87. (Chuyên Thái Nguyên 2017) Tập hợp các số phức $w = (1 + i)z + 1$ với z là số phức thỏa mãn $|z - 1| \leq 1$ là hình tròn. Tính diện tích hình tròn đó.

- (A) 2π . (B) π . (C) 3π . (D) 4π .

Câu 88. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $\varpi = \frac{z + 2\bar{z} - 3i}{z^2 + 2}$, trong đó z là số phức thỏa mãn $(2 + i)(z + i) = 3 - i + z$. Gọi N là điểm trong mặt phẳng sao cho $(\vec{Ox}, \vec{ON}) = 2\varphi$, trong đó $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM})$ là góc lượng giác tạo thành khi quay tia Ox tới vị trí tia OM . Điểm N nằm trong góc phần tư nào?

- (A) Góc phần tư thứ (IV). (B) Góc phần tư thứ (I).
(C) Góc phần tư thứ (II). (D) Góc phần tư thứ (III).

Câu 89. (TRẦN HƯNG ĐẠO-NB-2017) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$ Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

- (A) $S = 9\pi$. (B) $S = 12\pi$. (C) $S = 16\pi$. (D) $S = 25\pi$.

Câu 90. (THPT Hoàng Hoa Thám-Khánh Hòa-2017) Biết số phức z thỏa điều kiện $3 \leq |z - 3i + 1| \leq 5$. Tập hợp các điểm biểu diễn của z tạo thành 1 hình phẳng. Diện tích của hình phẳng đó bằng:

(A) 9π .

(B) 16π .

(C) 25.

(D) 4π .

Câu 91. Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2| + |z - 2| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng tọa độ là

(A) Một đường Parabol.

(B) Một đường Elip.

(C) Một đoạn thẳng.

(D) Một đường tròn.

Câu 92. (THPT Ngô Quyền-Ba Vì-Hải Phòng 2019) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy , tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích

(A) $S = 25\pi$.

(B) $S = 9\pi$.

(C) $S = 12\pi$.

(D) $S = 16\pi$.

Câu 93. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi (H) là tập hợp các điểm biểu diễn hình học của số phức z thỏa mãn $\begin{cases} |z + \bar{z}| \geq 12 \\ |z - 4 - 3i| \leq 2\sqrt{2} \end{cases}$. Diện tích của hình phẳng (H) là:

(A) $4\pi - 4$.

(B) $8\pi - 8$.

(C) $2\pi - 4$.

(D) $8\pi - 4$.

Dạng 5. Một số dạng toán khác

Câu 94. Các điểm A, B tương ứng là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên hệ trục tọa độ Oxy , G là trọng tâm tam giác OAB , biết $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 12$. Độ dài đoạn OG bằng

(A) $4\sqrt{3}$.

(B) $5\sqrt{3}$.

(C) $6\sqrt{3}$.

(D) $3\sqrt{3}$.

Câu 95. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các điểm biểu diễn các số phức thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - i| = 10$.

(A) 15π .

(B) 12π .

(C) 20π .

(D) Đáp án khác.

Câu 96. Cho hai điểm A, B là hai điểm biểu diễn hình học số phức theo thứ tự z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn đẳng thức $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Hỏi ba điểm O, A, B tạo thành tam giác gì? (O là gốc tọa độ) Chọn phương án đúng và đầy đủ nhất.

(A) Vuông cân tại O .

(B) Vuông tại O .

(C) Đều.

(D) Cân tại O .

Câu 97. (Sở Kon Tum 2019) Cho các số phức $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 1 + 4i, z_3 = -1 + i$ có điểm biểu diễn hình học trong mặt phẳng Oxy lần lượt là các điểm A, B, C . Tính diện tích tam giác ABC .

(A) $2\sqrt{17}$.

(B) 12.

(C) $4\sqrt{13}$.

(D) 9.

Câu 98. (Chuyên Bắc Giang 2019) Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng tọa độ, I là trung điểm MN , O là gốc tọa độ, (3 điểm O, M, N không thẳng hàng). Mệnh đề nào sau đây luôn đúng?

(A) $|z_1 - z_2| = 2(OM + ON)$.

(B) $|z_1 + z_2| = OI$.

(C) $|z_1 - z_2| = OM + ON$.

(D) $|z_1 + z_2| = 2OI$.

Câu 99. Cho số phức $z = m - 2 + (m^2 - 1)i$ với $m \in \mathbb{R}$. Gọi (C) là tập hợp các điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng tọa độ. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và trục hoành bằng:

- (A) $\frac{32}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) 1. (D) $\frac{4}{3}$.

Câu 100. Gọi A, B, C, D lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $1 + 2i; 1 + \sqrt{3} + i; 1 + \sqrt{3} - i; 1 - 2i$ trên mặt phẳng tọa độ. Biết tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong một đường tròn, tâm của đường tròn đó biểu diễn số phức có phần thực là

- (A) $\sqrt{3}$. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) 1.

Câu 101. (Chu Văn An-Hà Nội-2019) Xét hai điểm A, B lần lượt là các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy biểu diễn các số phức z và $(1 + 3i)z$. Biết rằng diện tích của tam giác OAB bằng 6, môđun của số phức z bằng

- (A) 2. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{2}$. (D) 4.

Câu 102. (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An-2019) Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để có đúng 4 số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| = |z^2|$ và $|z| = m$?

- (A) $\{2; 2\sqrt{2}\}$. (B) $[2; 2\sqrt{2}]$. (C) $\{2\}$. (D) $(2; 2\sqrt{2})$.

Câu 103. (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019) Có bao nhiêu số phức $z = a + bi$, ($a, b \in \mathbb{Z}$) thỏa mãn $|z + i| + |z - 3i| = |z + 4i| + |z - 6i|$ và $|z| \leq 10$.

- (A) 12. (B) 2. (C) 10. (D) 5.

Câu 104. Cho hai số phức $z_1; z_2$ thỏa mãn: $|z_1| = 6, |z_2| = 2$. Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của các số phức z_1, iz_2 . Biết $\widehat{MON} = 60^\circ$, khi đó giá trị của biểu thức $|z_1^2 + 9z_2^2|$ bằng

- (A) 18. (B) $36\sqrt{3}$. (C) $24\sqrt{3}$. (D) $36\sqrt{2}$.

Câu 105. (SP Đồng Nai-2019) Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = 3, |z_2| = 4, |z_1 - z_2| = \sqrt{37}$. Xét số phức $z = \frac{z_1}{z_2} = a + bi$. Tìm $|b|$

- (A) $|b| = \frac{3\sqrt{3}}{8}$. (B) $|b| = \frac{\sqrt{39}}{8}$. (C) $|b| = \frac{3}{8}$. (D) $|b| = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

§ 1. QUY TẮC ĐẾM

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

- Quy tắc nhân: Để hoàn thành công việc cần chia ra giai đoạn \Rightarrow Sử dụng quy tắc nhân.
- Quy tắc cộng: Để hoàn thành công việc bằng nhiều trường hợp \Rightarrow Sử dụng quy tắc cộng.
- Hoán vị: Xếp n phần tử theo thứ tự \Rightarrow Sử dụng hoán vị
- Tổ hợp: Chọn k phần tử trong n phần tử tùy ý \Rightarrow Sử dụng tổ hợp
- Chỉnh hợp: Chọn k phần tử trong n phần tử và xếp \Rightarrow Sử dụng chỉnh hợp

B. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

 **Ví dụ 1.** (Mã 101-2020 Lần 1) Có bao nhiêu cách xếp 6 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 36.

(B) 720.

(C) 6.

(D) 1.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 2.** (Mã 102-2020 Lần 1) Có bao nhiêu cách xếp 7 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 7.

(B) 5040.

(C) 1.

(D) 49.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. (Mã 103-2020 Lần 1) Có bao nhiêu cách xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 1.

(B) 25.

(C) 5.

(D) 120.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4. (Mã 104-2020 Lần 1) Có bao nhiêu cách xếp 8 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 8.

(B) 1.

(C) 40320.

(D) 64.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. (Mã 102-2020 Lần 2) Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ?

(A) 9.

(B) 54.

(C) 15.

(D) 6.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. (Mã 103-2020 Lần 2) Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 5 học sinh nam và 7 học sinh nữ là

(A) 7.

(B) 12.

(C) 5.

(D) 35.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. (Mã 104-2020 Lần 2) Có bao nhiêu cách chọn một học sinh từ một nhóm gồm 7 học sinh nam và 8 học sinh nữ?

(A) 8.

(B) 15.

(C) 56.

(D) 7.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8. Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

(A) 14.

(B) 48.

(C) 6.

(D) 8.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9. Có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh từ một nhóm gồm 10 học sinh?

(A) C_{10}^2 .

(B) A_{10}^2 .

(C) 10^2 .

(D) 2^{10} .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 10. Số cách chọn 2 học sinh từ 7 học sinh là

(A) 2^7 .

(B) A_7^2 .

(C) C_7^2 .

(D) 7^2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 11. Số cách chọn 2 học sinh từ 5 học sinh là

- A 5^2 .
 B 2^5 .
 C C_5^2 .
 D A_5^2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 12. Số cách chọn 2 học sinh từ 8 học sinh là

- A C_8^2 .
 B 8^2 .
 C A_8^2 .
 D 2^8 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 13. Số cách chọn 2 học sinh từ 6 học sinh là

- A A_6^2 .
 B C_6^2 .
 C 2^6 .
 D 6^2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 14. Trên mặt phẳng cho 2019 điểm phân biệt. Có bao nhiêu vectơ, khác vectơ không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ 2019 điểm đã cho?

- A 2^{2019} .
 B 2019^2 .
 C C_2019^2 .
 D A_2019^2 .

.....

.....

.....


✍ Ví dụ 15. Trong hộp có 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 viên bi. Số cách chọn là

- (A) 9. (B) $C_4^3 + C_5^3 + C_6^3$. (C) C_{15}^3 . (D) A_{15}^3 .

.....

.....

.....


 **Ví dụ 16.** Một tổ có 12 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 học sinh trong tổ làm nhiệm vụ trực nhật.

- (A) 132. (B) 66. (C) 23. (D) 123.

.....

.....

.....


 **Ví dụ 17.** Lớp 11A có 32 học sinh, giáo viên chủ nhiệm muốn chọn ra 3 học sinh trong đó một bạn làm lớp trưởng, một bạn làm lớp phó, một bạn làm sao đở. Hỏi giáo viên chủ nhiệm có bao nhiêu cách chọn.

- (A) 6. (B) 3. (C) C_{32}^3 . (D) A_{32}^3 .

.....

.....

.....

 **Ví dụ 18.** Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

- (A) 120. (B) 25. (C) 15. (D) 10.

.....

.....

.....

Ví dụ 19. Cần chọn 4 người đi công tác trong một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là:

- A C_30^4 .
 B A_30^4 .
 C 30^4 .
 D 4^{30} .

.....

.....

.....

Ví dụ 20. Cho tập hợp A có 20 phần tử. Hỏi A có bao nhiêu tập con gồm 6 phần tử?

- A C_{20}^6 .
 B 20.
 C P_6 .
 D A_{20}^6 .

.....

.....

.....

Ví dụ 21. Một hộp chứa 10 quả cầu phân biệt. Số cách lấy ra từ hộp đó cùng lúc 3 quả cầu là:

- A 720.
 B 120.
 C 10^3 .
 D 3^{10} .

.....

.....

.....

Ví dụ 22. Giả sử ta dùng 6 màu để tô cho 4 nước khác nhau trên bản đồ và không có màu nào được dùng hai lần. Số các cách để chọn những màu cần dùng là

- A A_6^4 .
 B 10.
 C C_6^4 .
 D 6^4 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. Tập hợp M có 12 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

- Ⓐ $A_1 2^8$. Ⓑ $A_1 2^2$. Ⓒ $C_1 2^2$. Ⓓ 12^2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 24. Trong một hộp bánh có 6 loại bánh nhân thịt và 4 loại bánh nhân đậu xanh. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 bánh để phát cho các em thiếu nhi?

- Ⓐ A_{10}^6 . Ⓑ $6!$. Ⓒ 10^6 . Ⓓ C_{10}^6 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 25. Có bao nhiêu cách trao 4 phần quà khác nhau cho 4 học sinh?

- Ⓐ 8. Ⓑ 256. Ⓒ 16. Ⓓ 24.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 26. Cho 3 cái quần và 4 cái áo. Hỏi có bao nhiêu cách chọn một cái quần hoặc một cái áo từ số quần áo đã cho?

- Ⓐ $3 + 4$. Ⓑ A_7^2 . Ⓒ C_7^2 . Ⓓ 3.4 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 27. Từ một lớp có 14 học sinh nam và 16 học sinh nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

(A) 224.

(B) 16.

(C) 14.

(D) 30.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 28. Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ có khả năng như nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 học sinh làm ban cán sự lớp?

(A) A_{35}^3 .

(B) C_{15}^3 .

(C) C_{20}^3 .

(D) C_{35}^3 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 29. Nam muốn qua nhà Lan để cùng Lan tới trường. Từ nhà Nam tới nhà Lan có 3 con đường, từ nhà Lan đến trường có 5 con đường. Hỏi Nam có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà đến trường?

(A) 8.

(B) 243.

(C) 15.

(D) 10.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 30. Với k và n là hai số nguyên dương tùy ý thỏa mãn $k \leq n$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) $A_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

(B) $A_n^k = \frac{n!}{k!}$.

(C) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(D) $A_n^k = \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 31. Có bao nhiêu số tự nhiên n thỏa mãn $A_n^3 + 9A_n^2 = 1152$?

(A) 0.

(B) 1.

(C) 2.

(D) 3.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 32. Tìm giá trị $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $C_{x+1}^1 + 3C_{x+2}^2 = C_{x+1}^3$

(A) $x = 12$.

(B) $x = 9$.

(C) $x = 16$.

(D) $x = 2$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 33. Tìm giá trị $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $A_n^2 \cdot C_n^{n-1} = 48$

(A) $n = 4$.

(B) $n = 3$.

(C) $n = 7$.

(D) $n = 12$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 34. Có bao nhiêu các sắp xếp 10 bạn học sinh thành một hàng ngang ?

(A) P_{10} .

(B) C_{10}^1 .

(C) A_{10}^1 .

(D) C_{10}^1 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 35. Tính số các chỉnh hợp chập 5 của 7 phần tử ?

(A) 21.

(B) 2520.

(C) 5040.

(D) 120.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 36. Cho tập $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, có bao nhiêu tập con gồm 3 phần tử của tập hợp A ?

- (A) A_6^3 .
 (B) P_6 .
 (C) P_3 .
 (D) C_6^3 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 37. Từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5 có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số khác nhau?

- (A) 120.
 (B) 5.
 (C) 625.
 (D) 24.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 38. Cho tập hợp M có 30 phần tử. Số tập con gồm 5 phần tử của M là

- (A) A_30^4 .
 (B) 30^5 .
 (C) 30^5 .
 (D) C_30^5 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 39. Từ 7 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau?

- (A) 7^4 .
 (B) P_7 .
 (C) C_7^4 .
 (D) A_7^4 .

.....

✍ Ví dụ 40. Một tổ có 10 học sinh. Số cách chọn ra 2 học sinh từ tổ đó để giữ 2 chức vụ tổ trưởng và tổ phó là

- A C_{10}^2 .
 B A_{10}^8 .
 C 10^2 .
 D A_{10}^2 .

✍ Ví dụ 41. Cho 20 điểm phân biệt cùng nằm trên một đường tròn. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm này?

- A 6840.
 B 400.
 C 1140.
 D 600.

✍ Ví dụ 42. Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người, hỏi có bao nhiêu cách lập?

- A 25.
 B 455.
 C 50.
 D 252.

✍ Ví dụ 43. Số cách chọn 5 học sinh trong một lớp có 25 học sinh nam và 16 học sinh nữ là

- A $C_{25}^5 + C_{16}^5$.
 B C_{25}^5 .
 C A_{41}^5 .
 D C_{41}^5 .

.....

.....

✍ Ví dụ 44. Số tam giác xác định bởi các đỉnh của một đa giác đều 10 cạnh là

- A) 35.
 B) 120.
 C) 240.
 D) 720.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 45. Từ các số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm ba chữ số đôi một khác nhau.

- A) 60.
 B) 10.
 C) 120.
 D) 125.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 46. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là 2 trong 6 đỉnh của lục giác $ABCDEF$ là

- A) P_6 .
 B) C_6^2 .
 C) A_6^2 .
 D) 36.

.....

.....

.....


✍ Ví dụ 47. Nếu tất cả các đường chéo của đa giác đều 12 cạnh được vẽ thì số đường chéo là:

- A) 121.
 B) 66.
 C) 132.
 D) 54.

.....

.....

.....

 **Ví dụ 48.** Từ một nhóm học sinh gồm 6 nam và 8 nữ, có bao nhiêu cách chọn ra một học sinh?

(A) 14.

(B) 48.

(C) 6.

(D) 8.

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 106. Cần chọn 3 người đi công tác từ một tổ có 30 người, khi đó số cách chọn là

(A) A_{30}^3 .

(B) 3^{30} .

(C) 10.

(D) C_{30}^3 .

Câu 107. Cho một tập hợp M có 10 phần tử. Số tập con gồm 2 phần tử của M là

(A) A_{10}^8 .

(B) A_{10}^2 .

(C) C_{10}^2 .

(D) 10^2 .

Câu 108. Trong một buổi khiêu vũ có 20 nam và 18 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một đôi nam nữ để khiêu vũ

(A) C_{38}^2 .

(B) A_{38}^2 .

(C) $C_{20}^2 C_{18}^1$.

(D) $C_{20}^1 C_{18}^1$.

Câu 109. Số véc-tơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu, điểm cuối là hai trong 6 đỉnh của lục giác bằng

(A) P_6 .

(B) C_6^2 .

(C) A_6^2 .

(D) 36.

Câu 110. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 học sinh thành một hàng dọc?

(A) 5^5 .

(B) $5!$.

(C) 4!

(D) 5.

Câu 111. Số cách sắp xếp 6 học sinh ngồi vào 6 trong 10 ghế trên một hàng ngang là

(A) 6^{10} .

(B) $6!$.

(C) A_{10}^6 .

(D) C_{10}^6 .

Câu 112. Có 14 người gồm 8 nam và 6 nữ. Số cách chọn 6 người trong đó có đúng 2 nữ là

(A) 1078.

(B) 1414.

(C) 1050.

(D) 1386.

Câu 113. Cho hai đường thẳng song song. Trên đường thẳng thứ nhất có 10 điểm, trên đường thẳng thứ hai có 15 điểm, có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho.

(A) 1725.

(B) 1050.

(C) 675.

(D) 1275.

§2. CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

A. LÝ THUYẾT CƠ BẢN

- Cấp số cộng: Một dãy số được gọi là cấp số cộng nếu số liền sau trừ số liền trước bằng một hằng số không thay đổi, hằng số không thay đổi đó được gọi là công sai

$$\square u_k - u_{k-1} = d$$

$$\square u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

$$\square u_n = u_1 + (n - 1)d$$

$$\square S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

- Cấp số nhân: Một dãy số được gọi là cấp số nhân nếu số liền sau chia số liền trước bằng một hằng số không thay đổi, hằng số không thay đổi đó được gọi là công bội q .

$$\square \frac{u_{k+1}}{u_k} = q$$

$$\square u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1}$$

$$\square u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$$

$$\square S_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

B. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

✍ Ví dụ 49. (Mã 101-2020 Lần 1) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 8.

(B) 9.

(C) 6.

(D) $\frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 50. (Mã 102-2020 Lần 1) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 6.

(B) 9.

(C) 8.

(D) $\frac{2}{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 51. (Mã 103-2020 Lần 1) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3$ và công bội $q = 4$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 64.

(B) 81.

(C) 12.

(D) $\frac{3}{4}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 52. (Mã 104-2020 Lần 1) Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 4$ và công bội $q = 3$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 64.

(B) 81.

(C) 12.

(D) $\frac{4}{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 53. (Mã 102-2020 Lần 2) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 9$ và công sai $d = 2$. Giá trị của u_2 bằng

(A) 11.

(B) $\frac{9}{2}$.

(C) 18.

(D) 7.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 54. (Mã 103-2020 Lần 2) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 8$ và công sai $d = 3$. Giá trị của u_2 bằng

(A) $\frac{8}{3}$.

(B) 24.

(C) 5.

(D) 11.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 55. (Mã 104-2020 Lần 2) Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 7$ công sai $d = 2$. Giá trị u_2 bằng

- (A) 14.
 (B) 9.
 (C) $\frac{7}{2}$.
 (D) 5.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 56. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

- (A) 3.
 (B) -4.
 (C) 4.
 (D) $\frac{1}{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 57. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$; $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- (A) 6.
 (B) 3.
 (C) 12.
 (D) -6.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 58. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_7 = -10$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- (A) 2.
 (B) 3.
 (C) -1.
 (D) -2.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 59. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 4$ và $d = 8$. Số hạng u_{20} của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 156.

(B) 165.

(C) 12.

(D) 245.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 60. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $d = -3$. Tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 26.

(B) -26.

(C) -105.

(D) 105.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 61. Cho cấp số cộng 2; 5; 8; 11; 14 Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) -3.

(B) 3.

(C) 2.

(D) 14.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 62. Công thức tính số hạng tổng quát của cấp số cộng với công sai d và số hạng đầu u_1 là

(A) $u_n = nu_1 + n(n-1)d$.

(B) $u_n = u_1 + (n-1)d$.

(C) $u_n = u_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

(D) $u_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 63. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 5; u_2 = 10$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

- (A) -5 .
 (B) 5 .
 (C) 2 .
 (D) 15 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 64. Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- (A) $1; -3; 9; -27; 54$.
 (B) $1; 2; 4; 8; 16$.
 (C) $1; -1; 1; -1; 1$.
 (D) $1; -2; 4; -8; 16$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 65. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = 2$. Giá trị của u_{10} bằng

- (A) 2^8 .
 (B) 2^9 .
 (C) $\frac{1}{2^{10}}$.
 (D) $\frac{37}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 66. Xác định x để 3 số $x - 1; 3; x + 1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân:

- (A) $x = 2\sqrt{2}$.
 (B) $x = \sqrt{5}$.
 (C) $x = \sqrt{10}$.
 (D) $x = 3$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 67. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3; u_2 = 1$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) $\frac{1}{3}$.

(B) -2 .

(C) 3 .

(D) 2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 68. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -\frac{1}{2}; u_6 = 16$. Tìm q ?

(A) $q = \pm 2$.

(B) $q = 2$.

(C) $q = -2$.

(D) $q = \frac{33}{10}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 69. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_2 = 8$ và công bội $q = 3$. Số hạng đầu tiên u_1 của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 24 .

(B) $\frac{8}{3}$.

(C) 5 .

(D) $\frac{3}{8}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 70. Cho cấp số nhân có $u_1 = 3, q = -2$. Tính u_5

(A) $u_5 = -6$.

(B) $u_5 = -5$.

(C) $u_5 = 48$.

(D) $u_5 = -24$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 71. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_4 = -26$. Công sai của (u_n) bằng

- (A) -27 .
 (B) -9 .
 (C) -26 .
 (D) $\sqrt[3]{-26}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 72. Một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Biết $S_n = 21$. Tìm n ?

- (A) $n = 10$.
 (B) $n = 3$.
 (C) $n = 7$.
 (D) Không có giá trị của n .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 73. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_5 bằng

- (A) 15 .
 (B) 27 .
 (C) -26 .
 (D) 2816 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 74. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_2 = 2$ và $u_3 = 5$. Giá trị của u_5 bằng

- (A) 12 .
 (B) 15 .
 (C) 11 .
 (D) 25 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 75. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = -2$. Giá trị của u_6 bằng

(A) 32.

(B) 64.

(C) 42.

(D) -64.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 76. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_3 = -1$ và $u_4 = 2$. Công sai d bằng

(A) 3.

(B) -3.

(C) 5.

(D) 2.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 77. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3^n$. Công bội q bằng

(A) -3.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) ± 3 .

(D) 3.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 78. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 3$ và công sai $d = 2$. Tổng của 2019 số hạng đầu bằng

(A) 4080 399.

(B) 4800 399.

(C) 4399 080.

(D) 8154 741.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 79. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n + 1$ số hạng thứ 2019 của dãy là

- A 4039.
 B 4390.
 C 4930.
 D 4093.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 80. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = 3$. Giá trị u_{2019} bằng

- A 2.3^{2018} .
 B 3.2^{2018} .
 C 2.3^{2019} .
 D 3.2^{2019} .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 81. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$. Công bội q bằng

- A $q = 3$.
 B $q = 5$.
 C $q = \frac{3}{2}$.
 D $q = \frac{2}{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 82. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Hãy tính u_{99} .

- A 401.
 B 403.
 C 402.
 D 404.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 83. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$; $d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

(A) 226.

(B) 225.

(C) 223.

(D) 224.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 84. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 1$ và công sai $d = 2$. Tổng $S_{10} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$ bằng

(A) $S_{10} = 110$.

(B) $S_{10} = 100$.

(C) $S_{10} = 21$.

(D) $S_{10} = 19$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 85. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và $u_6 = 486$. Công bội q bằng

(A) $q = 3$.

(B) $q = 5$.

(C) $q = \frac{3}{2}$.

(D) $q = \frac{2}{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 86. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, công bội $q = 2$. Khi đó u_5 bằng

(A) 24.

(B) 11.

(C) 48.

(D) 9.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 87. Cho cấp số cộng (u_n) , với $u_1 = 2$, $u_5 = 14$. Công sai của cấp số cộng là

(A) 3.

(B) -3.

(C) 4.

(D) -4.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 88. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 2, u_2 = 1$. Công bội của cấp số nhân đó là

- (A) -2 .
 (B) $-\frac{1}{2}$.
 (C) $\frac{1}{2}$.
 (D) 2 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 89. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3, d = -2$. Số hạng thứ 10 của cấp số cộng đó là:

- (A) -5 .
 (B) -15 .
 (C) 15 .
 (D) 5 .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 90. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = 2, u_6 = 32$. Công bội của cấp số nhân đó là

- (A) 2 .
 (B) ± 2 .
 (C) -2 .
 (D) $\pm \frac{1}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 91. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 5, q = 2$. Số hạng thứ 6 của cấp số nhân đó là

- (A) $\frac{1}{160}$.
 (B) 25 .
 (C) 32 .
 (D) 160 .

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 92. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 6$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 4.

(B) -4.

(C) 8.

(D) 3.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 93. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 4$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 4.

(B) -3.

(C) 3.

(D) 5.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 94. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 3$ và $u_2 = 9$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) -6.

(B) 3.

(C) 12.

(D) 6.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 95. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công sai của cấp số cộng đã cho bằng

(A) 10.

(B) 6.

(C) 4.

(D) -6.

.....

.....

.....

Ví dụ 96. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$, $u_2 = 6$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 3.

(B) -4.

(C) 4.

(D) $\frac{1}{3}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 114. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 8$. Công bội của cấp số nhân đã cho bằng

(A) 21.

(B) ± 4 .

(C) 4.

(D) $2\sqrt{2}$.

Câu 115. Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và $u_2 = 8$. Giá trị của u_4 bằng

(A) $\frac{512}{25}$.

(B) $\frac{125}{512}$.

(C) $\frac{625}{512}$.

(D) $\frac{512}{125}$.

Câu 116. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_8 = 26$. Tìm công sai d .

(A) $d = \frac{11}{3}$.

(B) $d = \frac{10}{3}$.

(C) $d = \frac{3}{10}$.

(D) $d = \frac{3}{11}$.

Câu 117. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3}$ và $u_3 = 26$. Tìm công sai d .

(A) $d = \frac{11}{3}$.

(B) $d = \frac{10}{3}$.

(C) $d = \frac{3}{10}$.

(D) $d = \frac{3}{11}$.

Câu 118. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 11$ và công sai $d = 4$. Giá trị của u_{99} bằng

(A) 401.

(B) 403.

(C) 402.

(D) 404.

Câu 119. Biết bốn số 5, x , 15, y theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị của $3x + 2y$ bằng

(A) 50.

(B) 70.

(C) 30.

(D) 80.

Câu 120. Cho ba số x , 5, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng và ba số x , 4, $2y$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân thì $|x - 2y|$ bằng

(A) 8.

(B) 9.

(C) 6.

(D) 10.

Câu 121. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa $u_2 + u_8 + u_9 + u_{15} = 100$. Tổng 16 số hạng đầu tiên bằng

(A) 100.

(B) 200.

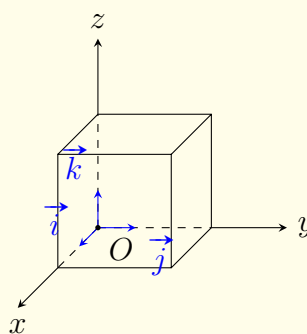
(C) 400.

(D) 300.

§ 1. HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. ĐỊNH NGHĨA HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

Hệ gồm 3 trục Ox , Oy , Oz vuông góc với nhau từng đôi một, và chung điểm gốc O . Gọi $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là các véc-tơ đơn vị, tương ứng trên các trục Ox , Oy , Oz . Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian hay hệ trục $Oxyz$.



! $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$.

B. TỌA ĐỘ VÉC-TƠ

⇔ Định nghĩa 1.1. Cho $\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, $k \in \mathbb{R}$.

• $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$.

• $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$.

• Hai véc-tơ bằng nhau $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3. \end{cases}$

• $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

• Mô-đun (độ dài) véc-tơ: $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

- Tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Suy ra:
$$\begin{cases} \bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = 0 \\ \bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \end{cases}$$

C. TỌA ĐỘ ĐIỂM

⇔ **Định nghĩa 1.2.** $M(a; b; c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = (a; b; c)$.

GHI NHỚ

$$\begin{cases} M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0, M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0, M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0 \\ M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0, M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0, M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0. \end{cases}$$

Cho hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$, $B = (x_B; y_B; z_B)$.

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$.
- Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$, khi đó tọa độ điểm G là $G \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right)$.

D. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VÉC-TƠ

⇔ **Định nghĩa 1.3.** Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$. Tích có

hướng của hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} là một véc-tơ, ký hiệu là $[\vec{a}, \vec{b}]$ (hoặc $\vec{a} \wedge \vec{b}$) và được xác định bởi công thức

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

! Nếu $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ thì ta luôn có $\vec{c} \perp \vec{a}$ và $\vec{c} \perp \vec{b}$.

1. $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}, [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}, [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$
2. $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
3. $|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
4. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$

Ứng dụng của tích có hướng

a) Để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.

Ngược lại, để $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} \neq 0$ (thường gọi là tích hỗn tạp).

Do đó, để chứng minh 4 điểm A, B, C, D là bốn điểm của một tứ diện, ta cần chứng minh $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ không đồng phẳng, nghĩa là $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

Ngược lại, để chứng minh 4 điểm A, B, C, D đồng phẳng, ta cần chứng minh $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ cùng thuộc một mặt phẳng $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 0$.

b) Diện tích của hình bình hành $ABCD$ là

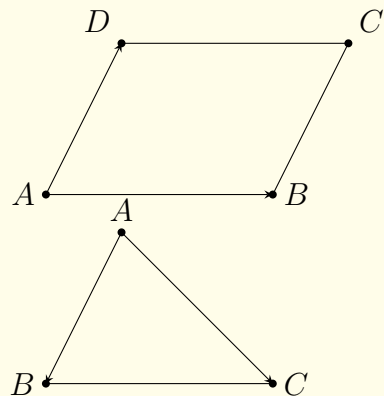
$$S_{ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|.$$

c) Diện tích của tam giác ABC là

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}]|.$$

d) Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'|.$$



e) Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$.

E. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

a) **Phương trình mặt cầu (S) dạng 1.** Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \bullet \text{ Tâm } I(a; b; c) \\ \bullet \text{ Bán kính } R \end{cases} \Rightarrow (S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

b) **Phương trình mặt cầu (S) dạng 2.** Khai triển dạng 1, ta được

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - R^2 = 0$$

và đặt $d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$ thì được phương trình mặt cầu dạng 2 là

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu có tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

📄 Dạng 1.18. Nhóm bài toán liên quan đến hình chiếu, điểm đối xứng của điểm lên trục, lên mặt phẳng tọa độ

a) **Hình chiếu:** “Thiếu cái nào, cho cái đó bằng 0”. Nghĩa là hình chiếu của $M(a; b; c)$ lên:

- Ox là $M_1(a; 0; 0)$. • Oy là $M_2(0; b; 0)$. • Oz là $M_3(0; 0; c)$.
- (Oxy) là $M_4(a; b; 0)$. • (Oxz) là $M_5(a; 0; c)$. • (Oyz) là $M_6(0; b; c)$.

b) **Đối xứng:** “Thiếu cái nào, đổi dấu cái đó”. Nghĩa là điểm đối xứng của $N(a; b; c)$ qua:

- Ox là $N_1(a; -b; -c)$. • Oy là $N_2(-a; b; -c)$. • Oz là $N_3(-a; -b; c)$.
- (Oxy) là $N_4(a; b; -c)$. • (Oxz) là $N_5(a; -b; c)$. • (Oyz) là $N_6(-a; b; c)$.

c) **Khoảng cách:** Để tìm khoảng cách từ điểm M đến trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), ta tìm **hình chiếu** H của điểm M lên trục (hoặc mặt phẳng tọa độ), từ đó suy ra **khoảng cách cần tìm là $d = MH$** .

📌 Ví dụ 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; -2; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- Ⓐ $(2; 0; 1)$. Ⓑ $(2; -2; 0)$. Ⓒ $(0; -2; 1)$. Ⓓ $(0; 0; 1)$.

.....

.....

.....

📌 Ví dụ 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên mặt phẳng (Ozx) có tọa độ là

- Ⓐ $(0; 1; 0)$. Ⓑ $(2; 1; 0)$. Ⓒ $(0; 1; -1)$. Ⓓ $(2; 0; -1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. (Mã 102-2020 Lần 1) Trong không gian \mathcal{O} , hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox có tọa độ là

(A) $(0; 2; 0)$.

(B) $(0; 0; 5)$.

(C) $(1; 0; 0)$.

(D) $(0; 2; 5)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4. (Mã 101-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; 1)$ trên trục Ox có tọa độ là:

(A) $(0; 2; 1)$.

(B) $(3; 0; 0)$.

(C) $(0; 0; 1)$.

(D) $(0; 2; 0)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. (Mã 103-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

(A) $(0; 5; 2)$.

(B) $(0; 5; 0)$.

(C) $(3; 0; 0)$.

(D) $(0; 0; 2)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. (Mã 104-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $A(8; 1; 2)$ trên trục Ox có tọa độ là

(A) $(0; 1; 0)$.

(B) $(8; 0; 0)$.

(C) $(0; 1; 2)$.

(D) $(0; 0; 2)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. (Mã 101-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$. Điểm nào sau đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 4; 2)$ trên mặt phẳng Oxy ?

- A** $(0; 4; 2)$.
 B $(1; 4; 0)$.
 C $(1; 0; 2)$.
 D $(0; 0; 2)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8. (Mã 103-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$ điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 5; 2)$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

- A** $M(3; 0; 2)$.
 B $(0; 0; 2)$.
 C $Q(0; 5; 2)$.
 D $N(3; 5; 0)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9. (Mã 102-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng Oxy .

- A** $Q(1; 0; 3)$.
 B $P(1; 2; 0)$.
 C $M(0; 0; 3)$.
 D $N(0; 2; 3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 10. (Mã 104-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây là hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 4; 1)$ trên mặt phẳng (Oxy) ?

- A** $Q(0; 4; 1)$.
 B $P(3; 0; 1)$.
 C $M(0; 0; 1)$.
 D $N(3; 4; 0)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 11. (Mã 104-2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A** $(3; 0; -1)$.
 B $(0; 1; 0)$.
 C $(3; 0; 0)$.
 D $(0; 0; -1)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 12. (Mã 103-2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oy có tọa độ là

- A** $(0; 0; -1)$.
 B $(2; 0; -1)$.
 C $(0; 1; 0)$.
 D $(2; 0; 0)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 13. (Mã 102-2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(3; -1; 1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A** $(3; -1; 0)$.
 B $(0; 0; 1)$.
 C $(0; -1; 0)$.
 D $(3; 0; 0)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 14. (Mã 101-2019) Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 1; -1)$ trên trục Oz có tọa độ là

- A** $(2; 0; 0)$.
 B $(0; 1; 0)$.
 C $(2; 1; 0)$.
 D $(0; 0; -1)$.
-
-
-

✎ Ví dụ 15. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 1)$. Hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

- A $M(3; 0; 0)$. B $N(0; -1; 1)$. C $P(0; -1; 0)$. D $Q(0; 0; 1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 16. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz) ?

- A $M(3; 4; 0)$. B $P(-2; 0; 3)$. C $Q(2; 0; 0)$. D $N(0; 4; -1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 17. (Chuyên Hạ Long 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $M(4; 5; 6)$. Hình chiếu của M xuống mặt phẳng (Oyz) là M' . Xác định tọa độ M' .

- A $M'(4; 5; 0)$. B $M'(4; 0; 6)$. C $M'(4; 0; 0)$. D $M'(0; 5; 6)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 18. (Chuyên Hạ Long 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(x; y; z)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxz) thì $M'(x; y; -z)$.
- B Nếu M' đối xứng với M qua Oy thì $M'(x; y; -z)$.
- C Nếu M' đối xứng với M qua mặt phẳng (Oxy) thì $M'(x; y; -z)$.
- D Nếu M' đối xứng với M qua gốc tọa độ O thì $M'(2x; 2y; 0)$.

.....

✍ Ví dụ 19. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua mặt phẳng (Oyz) là

- Ⓐ $(0; 2; 3)$. Ⓑ $(-1; -2; -3)$. Ⓒ $(-1; 2; 3)$. Ⓓ $(1; 2; -3)$.

✍ Ví dụ 20. (Chuyên Hạ Long 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -3; 5)$. Tìm tọa độ A' là điểm đối xứng với A qua trục Oy .

- Ⓐ $A'(2; 3; 5)$. Ⓑ $A'(2; -3; -5)$. Ⓒ $A'(-2; -3; 5)$. Ⓓ $A'(-2; -3; -5)$.

📄 Dạng 1.19. Bài toán liên quan đến véc-tơ và độ dài đoạn thẳng

Bài toán liên quan đến véc-tơ và độ dài đoạn thẳng

CẦN NHỚ: Cho hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$, $A = (x_B; y_B; z_B)$.

- $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.
- $\vec{a} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Ví dụ $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a}(\dots; \dots; \dots)$.
- $M(a; b; c) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.
Ví dụ $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \Leftrightarrow M(\dots; \dots; \dots)$.
- Điểm thuộc trục và mặt phẳng tọa độ (thiếu cái nào cho cái đó bằng 0):

- $M \in (Oxy) \xrightarrow{z=0} M(x_M; y_M; 0).$
- $M \in Ox \xrightarrow{y=z=0} M(x_M; 0; 0).$
- $M \in (Oyz) \xrightarrow{x=0} M(0; y_M; z_M).$
- $M \in Oy \xrightarrow{x=z=0} M(0; y_M; 0).$
- $M \in (Oxz) \xrightarrow{y=0} M(x_M; 0; z_M).$
- $M \in Oz \xrightarrow{x=y=0} M(0; 0; z_M).$

✍ Ví dụ 1. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -2)$ và $B(2; 2; 1)$. Vectơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

- A** $(-1; -1; -3).$
 B $(3; 1; 1).$
 C $(1; 1; 3).$
 D $(3; 3; -1).$
-
-
-

✍ Ví dụ 2. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; -1)$ và $B(2; 3; 2)$. Vectơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

- A** $(1; 2; 3).$
 B $(-1; -2; 3).$
 C $(3; 5; 1).$
 D $(3; 4; 1).$
-
-
-

✍ Ví dụ 3. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 2; 1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA .

- A** $OA = \sqrt{5}.$
 B $OA = 5.$
 C $OA = 3.$
 D $OA = 9.$
-
-
-

✍ Ví dụ 4. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}(1; 2; 3); \vec{b}(2; 2; -1); \vec{c}(4; 0; -4)$. Tọa độ của vectơ $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ là

- A** $\vec{d}(-7; 0; -4).$
 B $\vec{d}(-7; 0; 4).$
 C $\vec{d}(7; 0; -4).$
 D $\vec{d}(7; 0; 4).$

✍ Ví dụ 5. (THPT Ba Đình 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; -1)$, $B(2; 3; 2)$. Vectơ \overrightarrow{AB} có tọa độ là

(A) $(2; 2; 3)$.

(B) $(1; 2; 3)$.

(C) $(3; 5; 1)$.

(D) $(3; 4; 1)$.

✍ Ví dụ 6. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho $\vec{a} = (2; 3; 2)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Vectơ $\vec{a} - \vec{b}$ có tọa độ là

(A) $(3; 4; 1)$.

(B) $(-1; -2; 3)$.

(C) $(3; 5; 1)$.

(D) $(1; 2; 3)$.

✍ Ví dụ 7. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

(A) $(10; -2; 13)$.

(B) $(-2; 2; -7)$.

(C) $(-2; -2; 7)$.

(D) $(-2; 2; 7)$.

✍ Ví dụ 8. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ \vec{a} là

(A) $(-1; 2; -3)$.

(B) $(2; -3; -1)$.

(C) $(2; -1; -3)$.

(D) $(-3; 2; -1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -3; 3)$, $\vec{b} = (0; 2; -1)$, $\vec{c} = (3; -1; 5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$.

- Ⓐ $(10; -2; 13)$. Ⓑ $(-2; 2; -7)$. Ⓒ $(-2; -2; 7)$. Ⓓ $(-2; 2; 7)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 10. (THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{x} = (2; 1; -3)$ và $\vec{y} = (1; 0; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{a} = \vec{x} + 2\vec{y}$.

- Ⓐ $\vec{a} = (4; 1; -1)$. Ⓑ $\vec{a} = (3; 1; -4)$. Ⓒ $\vec{a} = (0; 1; -1)$. Ⓓ $\vec{a} = (4; 1; -5)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 11. (THPT-Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 0)$ và $B(1; 1; -3)$. Vectơ \vec{AB} có tọa độ là

- Ⓐ $(3; 0; -3)$. Ⓑ $(-1; 2; -3)$. Ⓒ $(-1; -2; 3)$. Ⓓ $(1; -2; 3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 12. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; -2; 1)$, $B(1; -1; 3)$ Tọa độ vectơ \vec{AB} là:

- Ⓐ $(-1; 1; 2)$. Ⓑ $(-3; 3; -4)$. Ⓒ $(3; -3; 4)$. Ⓓ $(1; -1; -2)$.

✍ Ví dụ 13. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

(A) $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; -1; 1)$.

(B) $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1; 1; 1)$.

(C) $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; 1; -1)$.

(D) $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1; -1; 1)$.

✍ Ví dụ 14. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, khi đó tọa độ vectơ \vec{u} là

(A) $(-2; 3; 1)$.

(B) $(2; 3; -1)$.

(C) $(2; -3; -1)$.

(D) $(2; 3; 1)$.

✍ Ví dụ 15. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; 2; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 0)$. Vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ có tọa độ là

(A) $(1; 7; 2)$.

(B) $(1; 5; 2)$.

(C) $(3; 7; 2)$.

(D) $(1; 7; 3)$.

✍ Ví dụ 16. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Trong không gian với trục hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ Tọa độ của vectơ \vec{a} là:

- A $\vec{a}(-1; 2; -3)$.
 B $\vec{a}(2; -3; -1)$.
 C $\vec{a}(-3; 2; -1)$.
 D $\vec{a}(2; -1; -3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 17. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -3; 1)$, $B(3; 0; -2)$. Tính độ dài AB .

- A 26.
 B 22.
 C $\sqrt{26}$.
 D $\sqrt{22}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 18. (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -1)$, $B(1; 4; 3)$. Độ dài đoạn thẳng AB là

- A $2\sqrt{13}$.
 B $\sqrt{6}$.
 C 3.
 D $2\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 19. (Hội 8 trường chuyên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}(-2; 2; 0)$, $\vec{b}(2; 2; 0)$, $\vec{c}(2; 2; 2)$. Giá trị của $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ bằng

- A 6.
 B 11.
 C $2\sqrt{11}$.
 D $2\sqrt{6}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 20. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1; 3; 5)$, $B(2; 2; 3)$. Độ dài đoạn AB bằng

- A $\sqrt{7}$.
 B $\sqrt{8}$.
 C $\sqrt{6}$.
 D $\sqrt{5}$.

.....

.....

.....

📄 Dạng 1.20. Bài toán liên quan đến trung điểm tọa độ trọng tâm

Bài toán liên quan đến trung điểm tọa độ trọng tâm

CẦN NHỚ: Cho hai điểm $A = (x_A; y_A; z_A)$, $A = (x_B; y_B; z_B)$.

- Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$.

NHỚ: $M = \frac{A + B}{2}$

- Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$.

NHỚ: $G = \frac{A + B + C}{3}$

- Gọi G_1 là trọng tâm tứ diện $ABCD$, khi đó tọa độ điểm G là $G \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right)$.

NHỚ: $G_1 = \frac{A + B + C + D}{4}$

✍ Ví dụ 1. Cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB .

- A $I(-2; 2; 1)$.
 B $I(1; 0; 4)$.
 C $I(2; 0; 8)$.
 D $I(2; -2; -1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2. Cho hai điểm $M(1; -2; 3)$ và $N(3; 0; -1)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn MN .

- A** $I(4; -2; 2)$.
 B $I(2; -1; 2)$.
 C $I(4; -2; 1)$.
 D $I(2; -1; 1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A** $(4; -2; 10)$.
 B $(1; 3; 2)$.
 C $(2; 6; 4)$.
 D $(2; -1; 5)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(3; -4; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(3, 1, 0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

- A** $D(6; 0; 0)$, $D(12; 0; 0)$.
 B $D(0; 0; 0)$, $D(6; 0; 0)$.
 C $D(-2; 1; 0)$, $D(-4; 0; 0)$.
 D $D(0; 0; 0)$, $D(-6; 0; 0)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .

- A** $I(1; 0; 4)$.
 B $I(2; 0; 8)$.
 C $I(2; -2; -1)$.
 D $I(-2; 2; 1)$.

.....

.....

.....

Ví dụ 6. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3; -2; 3)$ và $B(-1; 2; 5)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

- A $I(-2; 2; 1)$.
 B $I(1; 0; 4)$.
 C $I(2; 0; 8)$.
 D $I(2; -2; -1)$.

Ví dụ 7. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 3; 2)$, $B(3; -1; 4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB

- A $I(2; -4; 2)$.
 B $I(4; 2; 6)$.
 C $I(-2; -1; -3)$.
 D $I(2; 1; 3)$.

Ví dụ 8. Trong không gian cho hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; -2; 3)$, $B(-1; 2; 5)$, $C(0; 0; 1)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

- A $G(0; 0; 3)$.
 B $G(0; 0; 9)$.
 C $G(-1; 0; 3)$.
 D $G(0; 0; 1)$.

Ví dụ 9. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; 3; 2)$, $B(3; -1; 4)$. Tìm tọa độ trung điểm I của AB .

- A $I(2; -4; 2)$.
 B $I(4; 2; 6)$.
 C $I(-2; -1; 3)$.
 D $I(2; 1; 3)$.

✍ Ví dụ 10. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 7)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- A $(1; 3; 2)$.
 B $(2; -1; 5)$.
 C $(2; -1; -5)$.
 D $(2; 6; 4)$.

.....

✍ Ví dụ 11. (THPT Cù Huy Cận 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1; 3; 4)$, $B(2; -1; 0)$, $C(3; 1; 2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

- A $G(2; 1; 2)$.
 B $G(6; 3; 6)$.
 C $G\left(3; \frac{2}{3}; 3\right)$.
 D $G(2; -1; 2)$.

.....

✍ Ví dụ 12. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5; -2; 0)$, $B(-2; 3; 0)$, $C(0; 2; 3)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ:

- A $(1; 2; 1)$.
 B $(2; 0; -1)$.
 C $(1; 1; 1)$.
 D $(1; 1; -2)$.

.....

✍ Ví dụ 13. (Chuyên Sơn La 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1; -2; 2)$ và $N(1; 0; 4)$. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng MN là:

- A $(1; -1; 3)$.
 B $(0; 2; 2)$.
 C $(2; -2; 6)$.
 D $(1; 0; 3)$.

.....

.....

✍ Ví dụ 14. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-3; 4)$ và $B(5; 6)$. Trung điểm của đoạn thẳng AB có tọa độ là

- (A) $(1; 5)$.
 (B) $(4; 1)$.
 (C) $(5; 1)$.
 (D) $(8; 2)$.

.....

✍ Ví dụ 15. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -4; 3)$ và $B(2; 2; 9)$. Trung điểm của đoạn AB có tọa độ là

- (A) $(0; 3; 3)$.
 (B) $(4; -2; 12)$.
 (C) $(2; -1; 6)$.
 (D) $(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$.

.....

✍ Ví dụ 16. (Liên Trường THPT Tp Vinh Nghệ An 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 5; 2)$ và $B(3; -3; 2)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

- (A) $M(1; 1; 2)$.
 (B) $M(2; 2; 4)$.
 (C) $M(2; -4; 0)$.
 (D) $M(4; -8; 0)$.

.....

✍ Ví dụ 17. (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(-1; 5; 3)$ và $M(2; 1; -2)$. Tọa độ điểm B biết M là trung điểm của AB là

- (A) $B(\frac{1}{2}; 3; \frac{1}{2})$.
 (B) $B(-4; 9; 8)$.
 (C) $B(5; 3; -7)$.
 (D) $B(5; -3; -7)$.

.....

.....

.....

Dạng 1.21. Nhóm bài toán liên quan đến tích vô hướng của hai véc-tơ

Cần nhớ: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in \mathbb{R}$

Tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

(hoành \times hoành, cộng tung \times tung, cộng cao \times cao).

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

(góc giữa hai véc-tơ có thể nhọn hoặc tù)

Và $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.

(2 véc-tơ vuông góc thì nhân nhau bằng 0).

• $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

• $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ hay $\overline{AB}^2 = AB^2$

và $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Ví dụ 1. Cho $A(2; -1; 1), B(-1; 3; -1), C(5; -3; 4)$. Tính tích vô hướng $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$.

- A $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 48$. B $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -48$. C $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 52$. D $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -52$.

.....

.....

.....

Ví dụ 2. Cho $A(2; 1; 4), B(-2; 2; -6), C(6; 0; -1)$. Tính tích vô hướng $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

- A $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -67$. B $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 65$. C $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 67$. D $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 33$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. Cho hai véc-tơ $\vec{u} = (-1; 3; 2)$ và $\vec{v} = (x; 0; 1)$. Tính giá trị của x để $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

(A) $x = 0$.

(B) $x = 3$.

(C) $x = 2$.

(D) $x = 5$.

.....

✍ Ví dụ 4. (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; 0)$ và $\vec{b} = (-1; 0; -2)$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

(A) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{25}$.

(B) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{2}{5}$.

(C) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{25}$.

(D) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2}{5}$.

.....

✍ Ví dụ 5. (KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a} = (2; -2; -4)$, $\vec{b} = (1; -1; 1)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

(A) $\vec{a} + \vec{b} = (3; -3; -3)$.

(B) \vec{a} và \vec{b} cùng phương.

(C) $|\vec{b}| = \sqrt{3}$.

(D) $\vec{a} \perp \vec{b}$.

.....

✍ Ví dụ 6. (THPT Lê Văn Thịnh Bắc Ninh 2019) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC biết $A(1; 3)$, $B(-2; -2)$, $C(3; 1)$. Tính $\cos A$ của tam giác.

(A) $\cos A = \frac{2}{\sqrt{17}}$.

(B) $\cos A = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

(C) $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{17}}$.

(D) $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019) Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ \vec{i} và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- (A) 120° . (B) 60° . (C) 150° . (D) 30° .

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$, $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Côsin của góc giữa \vec{a} và \vec{b} bằng

- (A) $\frac{3}{13}$. (B) $\frac{5}{6}$. (C) $-\frac{5}{6}$. (D) $-\frac{3}{13}$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 9. (Chuyên Đhsp Hà Nội 2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$ góc giữa hai vectơ \vec{i} và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là

- (A) 120° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 150° .

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 10. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u} = (3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (2; 1; 0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- (A) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$. (B) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$. (C) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. (D) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.

.....

.....

✍ Ví dụ 11. (Chuyên Hưng Yên 2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, góc giữa hai vectơ \vec{i} và $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$ là
 (A) 30° . (B) 120° . (C) 60° . (D) 150° .

.....

✍ Ví dụ 12. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Cosin của góc \widehat{BAC} là
 (A) $\frac{9}{\sqrt{35}}$. (B) $-\frac{9}{\sqrt{35}}$. (C) $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$. (D) $\frac{9}{2\sqrt{35}}$.

.....

✍ Ví dụ 13. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(2; 1; 1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:
 (A) $\frac{\sqrt{11}}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

.....

✍ Ví dụ 14. (Chuyên Đại học Vinh-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 4; 0)$ và $\vec{b} = (5; 0; 12)$. Cosin của góc giữa \vec{a} và \vec{b} bằng
 (A) $\frac{3}{13}$. (B) $\frac{5}{6}$. (C) $-\frac{5}{6}$. (D) $-\frac{3}{13}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 15. (Thpt Vĩnh Lộc-Thanh Hóa 2019) Trong hệ tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (2; -1)$. Tính $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

- A $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. B $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$. C $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2; -3)$. D $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 16. (THPT Ngô Quyền-Ba Vì-Hải Phòng 2019) Cho hai véc tơ $\vec{a} = (1; -2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 1; 2)$. Khi đó, tích vô hướng $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$ bằng

- A 12. B 2. C 11. D 10.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 17. (Kiểm tra năng lực-ĐH-Quốc Tế-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -3)$, $\vec{b} = (-4; -2; 6)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- A $\vec{b} = -2\vec{a}$. B $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
 C \vec{a} ngược hướng với \vec{b} . D $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18. (THPT Mai Anh Tuấn-Thanh Hóa-2019) Cho $\vec{u} = (-1; 1; 0)$, $\vec{v} = (0; -1; 0)$, góc giữa hai véc-tơ \vec{u} và \vec{v} là

- A 120° . B 45° . C 135° . D 60° .

.....

.....

✍ Ví dụ 19. (Chuyên Lê Hồng Phong-2018) Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(1; 0; -1)$, $D(0; 1; -1)$. Mệnh đề nào dưới đây sai?

- (A) $AB \perp BD$. (B) $AB \perp BC$. (C) $AB \perp AC$. (D) $AB \perp CD$.

.....

✍ Ví dụ 20. (THPT Thanh Miện I-Hải Dương-2018) Trong không gian $Oxyz$ cho 2 véc tơ $\vec{a} = (2; 1; -1)$; $\vec{b} = (1; 3; m)$. Tìm m để $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$.

- (A) $m = -5$. (B) $m = 5$. (C) $m = 1$. (D) $m = -2$.

.....

✍ Ví dụ 21. (SGD Đồng Tháp-2018) Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2; -1; 1)$ và $\vec{v} = (0; -3; -m)$. Tìm số thực m sao cho tích vô hướng $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- (A) $m = 4$. (B) $m = 2$. (C) $m = 3$. (D) $m = -2$.

.....

✍ Ví dụ 22. (CỤM Chuyên Môn 4-Hải Phòng-2018) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(1; 2; 3)$; $B(-1; 2; 1)$; $C(3; -1; -2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

- (A) -6 . (B) -14 . (C) 14 . (D) 6 .

✎ Ví dụ 23. (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -2; 3)$, $B(0; 3; 1)$, $C(4; 2; 2)$. Côsin của góc BAC bằng

- A $\frac{9}{\sqrt{35}}$
 B $\frac{9}{2\sqrt{35}}$
 C $-\frac{9}{2\sqrt{35}}$
 D $-\frac{9}{\sqrt{35}}$

📄 Dạng 1.22. Nhóm bài toán liên quan đến tích có hướng của hai véc-tơ

Cần nhớ: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc-tơ $\begin{cases} \vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \end{cases}$.

Tích có hướng:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

(Hoành che hoành tung che tung – đổi dấu; cao che cao)

Ứng dụng:

• $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$. • $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} \neq 0$.

• A, B, C, D đồng phẳng $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 0$.

• A, B, C, D là các đỉnh tứ diện $\Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \neq 0$.

172 Diện tích $\triangle ABC$ là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$.

173 Diện tích của hình bình hành $ABCD$ là $S_{\square ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$.

174 Thể tích khối tứ diện $ABCD$ là $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$.

175 Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $V = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'|$.

✎ Ví dụ 1. Biết ba véc-tơ $\vec{u} = (2; -1; 1)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$ và $\vec{w} = (m; 3; -1)$ đồng phẳng. Tìm m .

- A $m = \frac{3}{8}$
 B $m = -\frac{3}{8}$
 C $m = \frac{8}{3}$
 D $m = -\frac{8}{3}$

.....

✍ Ví dụ 2. Biết ba vectơ $\vec{u} = (1; 2; 1)$, $\vec{v} = (-1; 1; 2)$ và $\vec{w} = (m; 3m; m + 2)$ đồng phẳng.
 Tìm m .

(A) $m = 2$.

(B) $m = 1$.

(C) $m = -2$.

(D) $m = -1$.

.....

✍ Ví dụ 3. Tìm m để bốn điểm $A(1; 1; 4)$, $B(5; -1; 3)$, $C(2; 2; m)$, $D(3; 1; 5)$ đồng phẳng.

(A) $m = 6$.

(B) $m = 4$.

(C) $m = -4$.

(D) $m = -6$.

.....

✍ Ví dụ 4. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a} = (2; 1; -2)$ và vectơ $\vec{b} = (1; 0; 2)$. Tìm tọa độ vectơ \vec{c} là tích có hướng của \vec{a} và \vec{b} .

(A) $\vec{c} = (2; 6; -1)$.

(B) $\vec{c} = (4; 6; -1)$.

(C) $\vec{c} = (4; -6; -1)$.

(D) $\vec{c} = (2; -6; -1)$.

.....

✍ Ví dụ 5. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ một vectơ \vec{n} vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a} = (1; 1; -2)$, $\vec{b} = (1; 0; 3)$ là

(A) $(2; 3; -1)$.

(B) $(3; 5; -2)$.

(C) $(2; -3; -1)$.

(D) $(3; -5; -1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; -1; 0)$, $\vec{c} = (1; -5; 2)$. Câu nào sau đây đúng?

- (A) \vec{a} cùng phương với \vec{b} .
 (B) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} không đồng phẳng.
 (C) \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đồng phẳng.
 (D) \vec{a} vuông góc với \vec{b} .

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. (Việt Đức Hà Nội 2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1; -2; 0)$, $B(2; 0; 3)$, $C(-2; 1; 3)$ và $D(0; 1; 1)$. Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng:

- (A) 6.
 (B) 8.
 (C) 12.
 (D) 4.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = (1; -2; 3)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$.
 (B) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.
 (C) $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$.
 (D) $[\vec{a}, \vec{b}] = (-1; -4; 3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; -1)$, $B(1; -1; 2)$. Diện tích tam giác OAB bằng

- (A) $\sqrt{11}$.
 (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
 (C) $\frac{\sqrt{11}}{2}$.
 (D) $\sqrt{6}$.

✎ Ví dụ 10. (Yên Phong 1-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 2)$, $B(1; -1; -2)$, $C(-1; 1; 0)$, $D(-2; 1; 2)$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ bằng

- A $\frac{42}{3}$.
 B $\frac{14}{3}$.
 C $\frac{21}{3}$.
 D $\frac{7}{3}$.

✎ Ví dụ 11. (SGD và ĐT Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, tính diện tích S của tam giác ABC , biết $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ và $C(0; 0; 4)$.

- A $S = \frac{\sqrt{61}}{3}$.
 B $S = \frac{\sqrt{61}}{2}$.
 C $S = 2\sqrt{61}$.
 D $S = \sqrt{61}$.

✎ Ví dụ 12. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $O(0; 0; 0)$, $A(0; 1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(4; 3; m)$. Tất cả giá trị của m để 4 điểm O, A, B, C đồng phẳng?

- A $m = 14$.
 B $m = -14$.
 C $m = 7$.
 D $m = -7$.

✎ Ví dụ 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $A.BCD$ có $A(0; 1; -1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(1; -1; 0)$ và $D(0; 0; 1)$ Tính độ dài đường cao của hình chóp $A.BCD$.

- A $2\sqrt{2}$.
 B $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.
 C $3\sqrt{2}$.
 D $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 14. (Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2; 1; -3)$, $B(0; -2; 5)$ và $C(1; 1; 3)$. Diện tích hình bình hành $ABCD$ là

- A $2\sqrt{87}$.
 B $\frac{\sqrt{349}}{2}$.
 C $\sqrt{349}$.
 D $\sqrt{87}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 15. (SGD-Bình Dương-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 1; 1)$, $B(-1; 0; 2)$, $C(-1; 1; 0)$ và điểm $D(2; 1; -2)$. Khi đó thể tích tứ diện $ABCD$ là

- A $V = \frac{5}{6}$.
 B $V = \frac{5}{3}$.
 C $V = \frac{6}{5}$.
 D $V = \frac{3}{2}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 16. (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$, $B(0; -2; 3)$. Tính diện tích tam giác OAB .

- A $\frac{\sqrt{29}}{6}$.
 B $\frac{\sqrt{29}}{2}$.
 C $\frac{\sqrt{78}}{2}$.
 D 2.

.....

.....

.....

Dạng 1.23. Xác định các yếu tố cơ bản của mặt cầu

172 Phương trình mặt cầu (S) dạng 1:

Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm một tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Khi đó:

$$(S): \begin{cases} \text{Tâm : } I(a; b; c) \\ \text{Bán kính: } R \end{cases} \Leftrightarrow (S): \boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2}$$

173 Phương trình mặt cầu (S) dạng 2:

(S): $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}$. Với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu dạng 2 có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

Lưu ý: Để $f(x; y; z) = 0$ là một phương trình mặt cầu thì phải thỏa mãn hai điều kiện:

- Hệ số trước x^2, y^2, z^2 phải bằng nhau
- $R^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Ví dụ 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(-1; -2; -3)$.
 (B) $(1; 2; 3)$.
 (C) $(-1; 2; -3)$.
 (D) $(1; -2; 3)$.
-
-
-

Ví dụ 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

- (A) $(-2; 4; -1)$.
 (B) $(2; -4; 1)$.
 (C) $(2; 4; 1)$.
 (D) $(-2; -4; -1)$.
-
-
-

Ví dụ 3. (Mã 101-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 9$. Bán kính của (S) bằng

- (A) 6.
 (B) 18.
 (C) 9.
 (D) 3.
-
-
-

.....

✍ Ví dụ 4. (Mã 103-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16$. Bán kính của (S) là:

- A) 32.
 B) 8.
 C) 4.
 D) 16.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. (Mã 104-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

- A) 4.
 B) 32.
 C) 16.
 D) 8.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. (Mã 101- 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A) $(-1; 2; -3)$.
 B) $(2; -4; 6)$.
 C) $(1; -2; 3)$.
 D) $(-2; 4; -6)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. (Mã 103-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$. Tâm của (S) có tọa độ là

- A) $(-1; 2; 3)$.
 B) $(2; -4; -6)$.
 C) $(-2; 4; 6)$.
 D) $(1; -2; -3)$.

.....

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8. (Mã 102-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

-
-
-
- (A)** $(-2; -4; 6)$. **(B)** $(2; 4; -6)$. **(C)** $(-1; -2; 3)$. **(D)** $(1; 2; -3)$.

✍ Ví dụ 9. (Mã 104-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$. Tâm của (S) có tọa độ là

-
-
-
- (A)** $(-1; -2; 3)$. **(B)** $(-2; -4; 6)$. **(C)** $(1; 2; -3)$. **(D)** $(2; 4; -6)$.

✍ Ví dụ 10. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 8$. Tính bán kính R của (S) .

-
-
-
- (A)** $R = 2\sqrt{2}$. **(B)** $R = 64$. **(C)** $R = 8$. **(D)** $R = 4$.

✍ Ví dụ 11. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S) : (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 3$ có bán kính bằng

-
-
-
- (A)** 9. **(B)** $2\sqrt{3}$. **(C)** 3. **(D)** $\sqrt{3}$.

.....

✎ Ví dụ 12. (Mã 101-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A) 3.
 B) $\sqrt{15}$.
 C) $\sqrt{7}$.
 D) 9.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 13. (Mã 104-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A) $\sqrt{15}$.
 B) $\sqrt{7}$.
 C) 9.
 D) 3.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 14. (Mã 102-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A) $\sqrt{7}$.
 B) 9.
 C) $\sqrt{15}$.
 D) 3.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 15. (Mã 103-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 7 = 0$. Bán kính của mặt cầu đã cho bằng

- A) $\sqrt{7}$.
 B) 3.
 C) 9.
 D) $\sqrt{15}$.

.....

.....

✍ Ví dụ 16. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

- A $I(4; 1; 0), R = 2$. B $I(4; 1; 0), R = 4$. C $I(4; 1; 0), R = 2$. D $I(4; 1; 0), R = 4$.

✍ Ví dụ 17. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- A $R = \sqrt{3}$. B $R = 3$. C $R = 9$. D $R = 3\sqrt{3}$.

✍ Ví dụ 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 1 = 0$. Tìm tọa độ tâm và bán kính mặt cầu (S) :

- A $I(-4; 1; 0), R = 2$. B $I(-4; 1; 0), R = 4$.
 C $I(4; -1; 0), R = 2$. D $I(4; -1; 0), R = 4$.

✍ Ví dụ 19. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S) : (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$. Xác định tọa độ tâm của mặt cầu (S)

- A $I(-3; 1; -1)$. B $I(3; 1; -1)$. C $I(-3; -1; 1)$. D $I(3; -1; 1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 20. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z - 3 = 0$. Tọa độ tâm I của mặt cầu (S) là:

- (A) $(-1; 2; 1)$.
 (B) $(2; -4; -2)$.
 (C) $(1; -2; -1)$.
 (D) $(-2; 4; 2)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 21. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 6z + 49 = 0$. Tính bán kính R của mặt cầu (S) .

- (A) $R = 1$.
 (B) $R = 7$.
 (C) $R = \sqrt{151}$.
 (D) $R = \sqrt{99}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 22. Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 1 = 0$ có tâm là

- (A) $(-4; 2; -6)$.
 (B) $(2; -1; 3)$.
 (C) $(-2; 1; -3)$.
 (D) $(4; -2; 6)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu đó.

- (A) $I(-1; 2; -3); R = 2$.
 (B) $I(-1; 2; -3); R = 4$.

Ⓒ $I(1; -2; 3); R = 2.$

Ⓓ $I(1; -2; 3); R = 4.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 24. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Tính bán kính R của (S)

Ⓐ 1.

Ⓑ 9.

Ⓒ 2.

Ⓓ 3.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 25. (Đề thi minh họa - Bộ GD & ĐT 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tìm tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) .

Ⓐ $I(-1; 2; 1), R = 3.$

Ⓑ $I(1; -2; -1), R = 3.$

Ⓒ $I(-1; 2; 1), R = 9.$

Ⓓ $I(1; -2; -1), R = 9.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 26. (Đề thi THPT QG năm 2018 - Mã 103 Câu 13) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$. Tâm (S) có tọa độ là

Ⓐ $(3; 1; -1).$

Ⓑ $(3; -1; 1).$

Ⓒ $(-3; -1; 1).$

Ⓓ $(-3; 1; -1).$

.....

.....

✍ Ví dụ 27. (Đề thi THPT QG năm 2018 - Mã 104 Câu 11) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi mặt cầu $(S): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 3$ có bán kính bằng

- (A) $\sqrt{3}$.
 (B) $2\sqrt{3}$.
 (C) 3.
 (D) 9.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 28. Tìm tâm I và bán kính của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 10 = 0$

- (A) $I(1; -2; 3), R = 2$.
 (B) $I(-1; 2; -3), R = 2$.
 (C) $I(-1; 2; -3), R = 4$.
 (D) $I(1; -2; 3), R = 4$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 29. Xác định tâm I và bán kính R của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z - 16 = 0$.

- (A) $I(-2; -1; 2), R = 5$.
 (B) $I(-2; -1; 2), R = 5$.
 (C) $I(2; 1; -2), R = 5$.
 (D) $I(4; 2; -4), R = 13$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 30. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

- (A) $I(-2; 4; 0), R = 2\sqrt{6}$.
 (B) $I(2; -4; 0), R = 2\sqrt{6}$.
 (C) $I(-1; 2; 0), R = 3$.
 (D) $I(1; -2; 0), R = 3$.

.....

.....

✍ Ví dụ 31. Tìm độ dài đường kính d của mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 2 = 0$.

(A) $d = 2\sqrt{3}$.

(B) $d = \sqrt{3}$.

(C) $d = 2$.

(D) $d = 1$.

.....

✍ Ví dụ 32. (Đề thi THPTQG năm 2017 Mã đề 110) Trong không gian $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

(A) $m > 6$.

(B) $m \geq 6$.

(C) $m \leq 6$.

(D) $m < 6$.

.....

✍ Ví dụ 33. Tìm m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

(A) $m > 5$.

(B) $m \geq -5$.

(C) $m \leq 5$.

(D) $m > -5$.

.....

✍ Ví dụ 34. Tìm m để $x^2 + y^2 + z^2 + 2mx - 2y + 4z + 2m^2 + 4m = 0$ là phương trình mặt cầu.

(A) $-5 \leq m \leq 1$.

(B) $m > 1$.

(C) $-5 < m < 1$.

(D) $m = 0$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 35. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - m = 0$ có bán kính $R = 5$.
 Tìm m .

- A $m = -16$.
 B $m = 16$.
 C $m = 4$.
 D $m = -4$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 36. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + m = 0$ có bán kính $R = 5$.
 Tìm m

- A $m = -16$.
 B $m = 16$.
 C $m = 4$.
 D $m = -4$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 37. Cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2mz + 6m = 0$ có đường kính bằng 12 thì tổng các giá trị của tham số m bằng

- A -2 .
 B 2 .
 C -6 .
 D 6 .

.....

.....

.....

📄 Dạng 1.24. Viết phương trình mặt cầu loại cơ bản

- Phương trình mặt cầu (S) dạng 1 Để viết phương trình mặt cầu (S) , ta cần tìm tọa độ tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R . Khi đó: $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.
- Phương trình mặt cầu (S) dạng 2: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $(a^2 + b^2 + c^2 - d > 0)$ là phương trình mặt cầu dạng 2. Tâm $I(a; b; c)$, bán kính

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

✍ Ví dụ 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(0; 0; -3)$ và đi qua điểm $M(4; 0; 0)$. Phương trình của (S) là

(A) $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25.$

(B) $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 5.$

(C) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25.$

(D) $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 5.$

.....

✍ Ví dụ 2. (Mã 110 2017) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z + m = 0$ là phương trình của một mặt cầu.

(A) $m < 6.$

(B) $m \geq 6.$

(C) $m \leq 6.$

(D) $m > 6.$

.....

✍ Ví dụ 3. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình mặt cầu có tâm I và đi qua A là

(A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5.$

(B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29.$

(C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5.$

(D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25.$

.....

✍ Ví dụ 4. (THPT Cù Huy Cận 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; 7)$, $B(-3; 8; -1)$. Mặt cầu đường kính AB có phương trình là

(A) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = \sqrt{45}.$

(B) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 = 45.$

(C) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 3)^2 = \sqrt{45}.$

(D) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 3)^2 = 45.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. (THPT-Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1; -4; 3)$ và đi qua điểm $A(5; -3; 2)$.

- A** $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 18.$
 B $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 16.$
 C $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 16.$
 D $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 18.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. (Chuyên Sơn La -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(1; -1; 3)$. Phương trình mặt cầu có đường kính AB là

- A** $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 8.$
 B $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 2.$
 C $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 2.$
 D $(x + 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 8.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-2; 2; -3)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

- A** $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 36.$
 B $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 9.$
 C $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 9.$
 D $x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 36.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 8. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hỏi trong các phương trình sau phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

(A) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0.$

(B) $x^2 + z^2 + 3x - 2y + 4z - 1 = 0.$

(C) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4y + 4z - 1 = 0.$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 8 = 0.$

.....

✍ Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -1; -3); B(0; 3; -1)$. Phương trình của mặt cầu đường kính AB là:

(A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 6.$

(B) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 24.$

(C) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 24.$

(D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6.$

.....

✍ Ví dụ 10. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ phương trình nào sau đây không phải là phương trình của một mặt cầu?

(A) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 4z - 3 = 0.$

(B) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - x - y - z = 0.$

(C) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 8y + 6z + 3 = 0.$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 10 = 0.$

.....

✍ Ví dụ 11. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3), B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

(A) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 36.$

(B) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 9.$

(C) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 6.$

(D) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 9.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 12. (Việt Đức Hà Nội 2019) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt cầu tâm $I(2; 1; -2)$ bán kính $R = 2$ là:

- A** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 2^2$.
 B $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.
 C $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.
 D $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 2$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 13. (Việt Đức Hà Nội 2019) Phương trình nào sau đây là phương trình mặt cầu (S) tâm $A(2; 1; 0)$, đi qua điểm $B(0; 1; 2)$?

- A** $(S) : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 8$.
 B $(S) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 8$.
 C $(S) : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 64$.
 D $(S) : (x + 2)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 64$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 14. (Chuyên Lam Sơn 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(2; 3; 4)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình mặt cầu tâm I và đi qua A có phương trình là:

- A** $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 3$.
 B $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 9$.
 C $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 45$.
 D $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 = 3$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 15. (Thpt Vĩnh Lộc-Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

(A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29.$ **(B)** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5.$

(C) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25.$ **(D)** $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 16. (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(5; 4; -1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là

(A) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 9.$ **(B)** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 6.$

(C) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 1)^2 = 9.$ **(D)** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 36.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 17. (Lý Nhân Tông-Bắc Ninh 1819) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(7; -2; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đường kính AB ?

(A) $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 14.$ **(B)** $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 2\sqrt{14}.$

(C) $(x - 7)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = 14.$ **(D)** $(x - 4)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 56.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18. (Bình Phước-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(3; -2; 5)$, $N(-1; 6; -3)$. Mặt cầu đường kính MN có phương trình là:

(A) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 6.$ **(B)** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 6.$

(C) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 36.$ **(D)** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 36.$

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 0)$, bán kính $R = 3$ là

- (A) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3.$
 (B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9.$
 (C) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9.$
 (D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \sqrt{3}.$

Câu 2. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -2)$, bán kính $R = 4$ là

- (A) $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4.$
 (B) $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 16.$
 (C) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 16.$
 (D) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 4.$

Câu 3. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -3)$, bán kính $R = 2$ là

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 10 = 0.$
 (B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 2.$
 (C) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 10 = 0.$
 (D) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 2^2.$

Câu 4. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 3)$, đường kính bằng 4 là

- (A) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 4.$
 (B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 16.$
 (C) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 2.$
 (D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 16.$

Câu 5. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 0; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 2; -3)$ là

- (A) $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 3.$
 (B) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 3.$
 (C) $(x + 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9.$
 (D) $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9.$

Câu 6. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và đi qua điểm $A(5; -1; 4)$ là

- (A) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = \sqrt{24}.$
 (B) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = \sqrt{24}.$
 (C) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 2)^2 = 24.$
 (D) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 24.$

Câu 7. Cho tam giác ABC có $A(2; 2; 0)$, $B(1; 0; 2)$, $C(0; 4; 4)$. Mặt cầu (S) có tâm A và đi qua trọng tâm G của tam giác ABC có phương trình là

- (A) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 4.$
 (B) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 5.$
 (C) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = \sqrt{5}.$
 (D) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5.$

Câu 8. Phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(2; 1; 1)$, $B(0; 3; -1)$ là

- (A) $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3.$
 (B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3.$
 (C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9.$
 (D) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9.$

Câu 9. Phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 4; 1)$ là

(A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$.

(B) $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 3$.

(C) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 12$.

(D) $x^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 12$.

Câu 10. Phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(3; 0; -1)$, $B(5; 0; -3)$ là

(A) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 4$.

(B) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4z + 18 = 0$.

(C) $(x - 4)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 8$.

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4z + 12 = 0$.

Câu 11. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 4; 2)$ và thể tích bằng $\frac{256\pi}{3}$. Phương trình của mặt cầu (S) là

(A) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 16$.

(B) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 4$.

(C) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 4$.

(D) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + (z + 2)^2 = 4$.

Câu 12. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; -4)$ và thể tích bằng 36π . Phương trình của mặt cầu (S) là

(A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 9$.

(B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$.

(C) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 9$.

(D) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 3$.

Câu 13. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và thể tích bằng $32\sqrt{3}\pi$. Phương trình của mặt cầu (S) là

(A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$.

(B) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 16$.

(C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 12$.

(D) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 8$.

Câu 14. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 0)$. Một mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C), biết diện tích lớn nhất của (C) bằng 3π . Phương trình của mặt cầu (S) là

(A) $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$.

(B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 3$.

(C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$.

(D) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$.

Câu 15. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$. Một mặt phẳng (P) cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C), biết chu vi lớn nhất của (C) bằng $2\pi\sqrt{2}$. Phương trình của mặt cầu (S) là

(A) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$.

(B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 2$.

(C) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$.

(D) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 2$.

Câu 16. Tìm tâm I và bán kính của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$? (**Cách hỏi khác:** Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).

(A) $I(1; 2; 3)$, $R = 5$.

(B) $I(-1; 2; -3)$, $R = 2$.

(C) $I(1; 2; 3)$, $R = \sqrt{14}$.

(D) $I(1; 3; 1)$, $R = \sqrt{11}$.

Câu 17. Tìm bán kính R của mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$? (**Cách hỏi khác:** Phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$).

(A) $I(1; 2; 3), R = 5.$

(B) $I(-1; 2; -3), R = 2.$

(C) $I(1; 2; 3), R = \sqrt{14}.$

(D) $I(1; 3; 1), R = \sqrt{11}.$

Câu 18. Tìm bán kính R của mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$, biết tọa độ các đỉnh của tứ diện $A(2; 0; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2), D(2; 2; 2).$

(A) $R = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

(B) $R = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

(C) $R = \sqrt{3}.$

(D) $R = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 19. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm I thuộc trục Oz là

(A) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0.$

(B) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 11.$

(C) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 11.$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 11 = 0.$

Câu 20. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(1; 2; 3), B(-2; 1; 5)$ và có tâm I thuộc trục Oz là

(A) $(S) : x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 6.$

(B) $(S) : x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 14.$

(C) $(S) : x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16.$

(D) $(S) : x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 9.$

Câu 21. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(1; 2; 3), B(4; -6; 2)$ và có tâm I thuộc trục Ox là

(A) $(S) : (x - 7)^2 + y^2 + z^2 = 6.$

(B) $(S) : (x + 7)^2 + y^2 + z^2 = 36.$

(C) $(S) : (x + 7)^2 + y^2 + z^2 = 6.$

(D) $(S) : (x - 7)^2 + y^2 + z^2 = 49.$

Câu 22. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(2; 0; -2), B(-1; 1; 2)$ và có tâm I thuộc trục Oy là

(A) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 8 = 0.$

(B) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 8 = 0.$

(C) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 8 = 0.$

(D) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 8 = 0.$

Câu 23. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(3; -1; 2), B(1; 1; -2)$ và có tâm I thuộc trục Oz là

(A) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0.$

(B) $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 11.$

(C) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 11.$

(D) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 11 = 0.$

Câu 24. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(1; 2; -4), B(1; -3; 1), C(2; 2; 3)$ và tâm $I \in (Oxy)$ là

(A) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26.$

(B) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$

(C) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 26.$

(D) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9.$

Câu 25. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(3; 0; -1), B(6; -4; -2), C(7; -1; 2)$ và tâm $I \in (Oxy)$ là

(A) $(x + 7)^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 25.$

(B) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9.$

(C) $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 36.$

(D) $(x + 7)^2 + (y - 8)^2 + z^2 = 49.$

Câu 26. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(2; 4; -3)$, $B(6; 9; 6)$, $C(-3; 5; 9)$ và tâm $I \in (Oyz)$ là

Ⓐ $x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9.$

Ⓑ $x^2 + (y - 7)^2 + (z - 3)^2 = 49.$

Ⓒ $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 5)^2 = 16.$

Ⓓ $x^2 + (y + 6)^2 + (z - 1)^2 = 36.$

Câu 27. Phương trình mặt cầu (S) đi qua $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(-3; 1; 4)$ và tâm $I \in (Oxz)$ là

Ⓐ $(x - 5)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 11.$

Ⓑ $(x - 7)^2 + y^2 + (z - 6)^2 = 11.$

Ⓒ $(x + 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 11.$

Ⓓ $(x + 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 11.$

Câu 28. Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và tiếp xúc với trục hoành là

Ⓐ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 13.$

Ⓑ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 5.$

Ⓒ $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 9.$

Ⓓ $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 25.$

§2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

1 Véc-tơ pháp tuyến - Véc-tơ chỉ phương

- Véc-tơ pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng (P) là $\vec{n} \perp (P)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$.
- Véc-tơ chỉ phương (VTVP) \vec{u} của mặt phẳng (P) là véc-tơ có giá song song hoặc nằm trong mặt phẳng (P).
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véc-tơ chỉ phương là \vec{u} , \vec{v} thì (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{u}, \vec{v}]$.
- Nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ là một véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k\vec{n}$ ($k \neq 0$) cũng là véc-tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).
- Chẳng hạn

$$\vec{n}_{(P)} = (-4; 8) = 2(1; -2; 4) \text{ thì } \vec{n} = (1; -2; 4) \text{ cũng là một véc-tơ pháp tuyến của } (P).$$

2 Phương trình tổng quát của mặt phẳng

- Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P): $ax + by + cz + d = 0$ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a; b; c)$. Chẳng hạn (P): $2x - 3y + z - 1 = 0 \Rightarrow$ một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2; -3; 1)$.

- Để viết phương trình mặt phẳng (P) , cần xác định một điểm đi qua và 1 VTPT.

$$(P) : \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = (a; b; c) \end{cases} \Rightarrow (P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

3 Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn

Nếu mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ lần lượt tại các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Chứng minh:

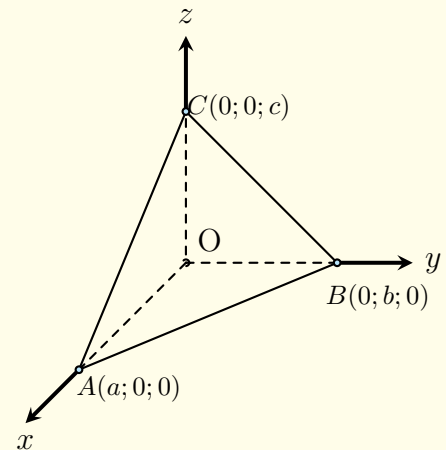
$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{AB} = (-a; b; 0) \\ \vec{AC} = (-a; 0; c) \end{cases} \Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] = (bc; ac; ab)$$

$$\Rightarrow (P) : \begin{cases} \text{Qua } A(a; 0; 0) \\ \text{VTPT: } \vec{n}_{(P)} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (bc; ac; ab). \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (P): bc(x - a) + ac(y - 0) + ab(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow (P): bcx + acy + abz = abc$$

$$\xrightarrow{\text{Chia } abc \neq 0} (P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



4 Các mặt phẳng tọa độ

(thiếu cái gì, cái đó bằng 0)

- Mặt phẳng $(Oxy): z = 0$ nên (Oxy) có VTPT $\vec{n}_{(Oxy)} = \vec{k} = (0; 0; 1)$.
- Mặt phẳng $(Oyz): x = 0$ nên (Oyz) có VTPT $\vec{n}_{(Oyz)} = \vec{i} = (1; 0; 0)$.
- Mặt phẳng $(Oxz): y = 0$ nên (Oxz) có VTPT $\vec{n}_{(Oxz)} = \vec{j} = (0; 1; 0)$.

5 Khoảng cách

- Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ được xác định bởi công thức $d(M, (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song có cùng véc-tơ pháp tuyến:

Cho hai mặt phẳng song song $(P): ax + by + cz + d = 0$ và $(Q): ax + by + cz + d' = 0$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là $d((Q), (P)) = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

6 Góc

Cho hai mặt phẳng $(\alpha): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Ta luôn có $\cos((\alpha), (\beta)) = \frac{|\vec{n}_1, \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$ **Cần nhớ:** Góc giữa hai mặt phẳng là góc nhọn, còn góc giữa hai véc-tơ có thể nhọn hoặc tù.

7 Vị trí tương đối

a) Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng $(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

- (P) cắt $(Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$.
- $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

b) Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I; R)$ và mặt phẳng (P) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và có $d = IH$ là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) . Khi đó :

Nếu $d > R$: Mặt cầu và mặt phẳng không có điểm chung.	Nếu $d = R$: Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu. Lúc đó (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu (S) và H là tiếp điểm.	Nếu $d < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm H và bán kính là $r' = \sqrt{R^2 - IH^2}$.
---	--	--

Chu vi của đường tròn giao tuyến $C = 2\pi r'$, diện tích đường tròn $S = \pi r'^2$. Nếu $d(I, (P)) = 0$ thì giao tuyến là một đường tròn tâm I và được gọi là đường tròn lớn. Lúc này (P) gọi là mặt phẳng kính của mặt cầu (S) .

8 Các trường hợp đặc biệt của mặt phẳng

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (P)	Tính chất mặt phẳng (P)
$D = 0$	$(P): Ax + By + Cz = 0 \quad (H1)$	(P) đi qua gốc tọa độ (O)
$A = 0$	$(P): By + Cz + D = 0 \quad (H2)$	$(P) \parallel Ox$ hoặc $(P) \supset Ox$
$B = 0$	$(P): Ax + Cz + D = 0 \quad (H3)$	$(P) \parallel Oy$ hoặc $(P) \supset Oy$
$C = 0$	$(P): Ax + By + D = 0 \quad (H4)$	$(P) \parallel Oz$ hoặc $(P) \supset Oz$
$A = B = 0$	$(P): Cz + D = 0 \quad (H5)$	$(P) \parallel (Oxy)$ hoặc $(P) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$(P): By + D = 0 \quad (H6)$	$(P) \parallel (Oxz)$ hoặc $(P) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$(P): Ax + D = 0 \quad (H7)$	$(P) \parallel (Oyz)$ hoặc $(P) \equiv (Oyz)$

Dạng 2.25. Xác định các yếu tố của mặt phẳng

- Mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a, b, c)$.
- Nếu $\vec{n} = (a, b, c)$ là một vectơ pháp tuyến của (P) thì $k\vec{n}$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (P) , với $k \neq 0$.
- Nếu \vec{a}, \vec{b} là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) thì vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

✎ Ví dụ 1. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 3x + 2y - 4z + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α) ?

- A $\vec{n}_2 = (3; 2; 4)$. B $\vec{n}_3 = (2; -4; 1)$. C $\vec{n}_1 = (3; -4; 1)$. D $\vec{n}_4 = (3; 2; -4)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 2. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + 3y + z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A $\vec{n}_3 (2; 3; 2)$. B $\vec{n}_1 (2; 3; 0)$. C $\vec{n}_2 (2; 3; 1)$. D $\vec{n}_4 (2; 0; 3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. (Mã 101 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x + 4y - z + 3 = 0$. Vectơ nào sau đây là véc tơ pháp tuyến của (α) ?

- A $\vec{n}_1 = (2; 4; -1)$. B $\vec{n}_2 = (2; -4; 1)$. C $\vec{n}_3 = (-2; 4; 1)$. D $\vec{n}_4 = (2; 4; 1)$.

.....

✍ Ví dụ 4. (Mã 102-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 3y + 4z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α) ?

- A $\vec{n}_3 = (2; -3; 4)$. B $\vec{n}_2 = (2; 3; -4)$. C $\vec{n}_1 = (2; 3; 4)$. D $\vec{n}_4 = (-2; 3; 4)$.

.....

✍ Ví dụ 5. (Mã 103-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, Cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x - y + 3z + 5 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (α) ?

- A $\vec{n}_3 = (-2; 1; 3)$. B $\vec{n}_4 = (2; 1; -3)$. C $\vec{n}_2 = ()$. D $\vec{n}_1 = (2; 1; 3)$.

.....

✍ Ví dụ 6 (Mã 104-2020 Lần 2). Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + 4z - 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) ?

- A $\vec{n}_3 = (1; -2; 4)$. B $\vec{n}_1 = (1; 2; -4)$. C $\vec{n}_2 = (1; 2; 4)$. D $\vec{n}_4 = (-1; 2; 4)$.

.....

✍ Ví dụ 7. (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x - z + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

A $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

B $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$.

C $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$.

D $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$.

.....

✍ Ví dụ 8. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : 2x + y + 3z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là:

A $\vec{n}_3 = (2; 1; 3)$.

B $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

C $\vec{n}_4 = (1; 3; 2)$.

D $\vec{n}_1 = (3; 1; 2)$.

.....

✍ Ví dụ 9. (Mã 101-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 1 = 0$ Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

A $\vec{n}_3 = (1; 2; -1)$.

B $\vec{n}_4 = (1; 2; 3)$.

C $\vec{n}_1 = (1; 3; -1)$.

D $\vec{n}_2 = (2; 3; -1)$.

.....

✍ Ví dụ 10. (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : 2x + 3y + z - 1 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

A $\vec{n}_1 = (2; 3; -1)$.

B $\vec{n}_3 = (1; 3; 2)$.

C $\vec{n}_4 = (2; 3; 1)$.

D $\vec{n}_2 = (-1; 3; 2)$.

.....

Ví dụ 11. (Mã 102-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + 3z + 1 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A $\vec{n}_3 = (2; 3; 1)$.
 B $\vec{n}_1 = (2; -1; -3)$.
 C $\vec{n}_4 = (2; 1; 3)$.
 D $\vec{n}_2 = (2; -1; 3)$.

Ví dụ 12. (Mã 103 -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 3y + z - 2 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P)

- A $\vec{n}_1 = (2; -3; 1)$.
 B $\vec{n}_4 = (2; 1; -2)$.
 C $\vec{n}_3 = (-3; 1; -2)$.
 D $\vec{n}_2 = (2; -3; -2)$.

Ví dụ 13. (Mã 104-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 4x + 3y + z - 1 = 0$. Vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của (P)

- A $\vec{n}_4 = (3; 1; -1)$.
 B $\vec{n}_3 = (4; 3; 1)$.
 C $\vec{n}_2 = (4; -1; 1)$.
 D $\vec{n}_1 = (4; 3; -1)$.

Ví dụ 14. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : 3x + 2y + z - 4 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là

- A $\vec{n}_2 = (3; 2; 1)$.
 B $\vec{n}_1 = (1; 2; 3)$.
 C $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$.
 D $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$.

.....

✎ Ví dụ 15. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 5 = 0$ có một véc tơ pháp tuyến là

- A $\vec{n}_3 = (-1; 2; 3)$. B $\vec{n}_4 = (1; 2; -3)$. C $\vec{n}_2 = (1; 2; 3)$. D $\vec{n}_1 = (3; 2; 1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 16. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) ?

- A $\vec{i} = (1; 0; 0)$. B $\vec{m} = (1; 1; 1)$. C $\vec{j} = (0; 1; 0)$. D $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 17. (THPT Lý Thái Tổ 2019) Cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 3y - 4z + 1 = 0$. Khi đó, một véc tơ pháp tuyến của (α)

- A $\vec{n} = (2; 3; -4)$. B $\vec{n} = (2; -3; 4)$. C $\vec{n} = (-2; 3; 4)$. D $\vec{n} = (-2; 3; 1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3xz + 2 = 0$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của (P) ?

- A $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$. B $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. C $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. D $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 19. Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây có giá vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 3y + 1 = 0$?

- (A)** $\vec{a} = (2; -3; 1)$. **(B)** $\vec{b} = (2; 1; -3)$. **(C)** $\vec{c} = (2; -3; 0)$. **(D)** $\vec{d} = (3; 2; 0)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 20. (THPT Nghĩa Hưng ND- 2019) Trong không gian $Oxyz$, một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1$ là

- (A)** $\vec{n} = (3; 6; -2)$. **(B)** $\vec{n} = (2; -1; 3)$.
(C) $\vec{n} = (-3; -6; -2)$. **(D)** $\vec{n} = (-2; -1; 3)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 21. (THPT Ba Đình 2019) Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho phương trình tổng quát của mặt phẳng $(P) : 2x - 6y - 8z + 1 = 0$. Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) có tọa độ là:

- (A)** $(-1; -3; 4)$. **(B)** $(1; 3; 4)$. **(C)** $(1; -3; -4)$. **(D)** $(1; -3; 4)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 22. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào dưới đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) : 2y - 3z + 1 = 0$?

- (A)** $\vec{u}_4 = (2; 0; -3)$. **(B)** $\vec{u}_2 = (0; 2; -3)$. **(C)** $\vec{u}_1 = (2; -3; 1)$. **(D)** $\vec{u}_3 = (2; -3; 0)$.
-

.....

✍ Ví dụ 23. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho mặt phẳng $(P) : 3x - y + 2 = 0$.
 Véc tơ nào trong các véc tơ dưới đây là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

- (A)** $(3; -1; 2)$. **(B)** $(-1; 0; -1)$. **(C)** $(3; 0; -1)$. **(D)** $(3; -1; 0)$.

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. Cho mặt phẳng $(P) : 3x - z + 2 = 0$. Véc tơ nào là một véc tơ pháp tuyến của (P) ?

- (A)** $\vec{n}_4 = (-1; 0; -1)$. **(B)** $\vec{n}_1 = (3; -1; 2)$. **(C)** $\vec{n}_3 = (3; -1; 0)$. **(D)** $\vec{n}_2 = (3; 0; -1)$.

Câu 2. Cho mặt phẳng $(P) : -3x + 2z - 1 = 0$. Véc tơ nào là một véc tơ pháp tuyến của (P) ?

- (A)** $\vec{n} = (-3; 2; -1)$. **(B)** $\vec{n} = (3; 2; -1)$. **(C)** $\vec{n} = (-3; 0; 2)$. **(D)** $\vec{n} = (3; 0; 2)$.

Câu 3. Cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 1 = 0$. Véc tơ nào là một véc tơ pháp tuyến của (P) ?

- (A)** $\vec{n} = (2; -1; -1)$. **(B)** $\vec{n} = (-2; 1; -1)$. **(C)** $\vec{n} = (2; 1; -1)$. **(D)** $\vec{n} = (-1; 1; -1)$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$, véc tơ nào sau đây là một véc tơ pháp tuyến của (P) ? Biết $\vec{u} = (1; -2; 0)$, $\vec{v} = (0; 2; -1)$ là cặp véc tơ chỉ phương của (P) .

- (A)** $\vec{n} = (1; 2; 0)$. **(B)** $\vec{n} = (2; 1; 2)$. **(C)** $\vec{n} = (0; 1; 2)$. **(D)** $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, véc tơ nào sau đây là một véc tơ pháp tuyến của (P) ? Biết $\vec{u} = (2; 1; 2)$, $\vec{v} = (3; 2; -1)$ là cặp véc tơ chỉ phương của (P) .

- (A)** $\vec{n} = (-5; 8; 1)$. **(B)** $\vec{n} = (5; -8; 1)$. **(C)** $\vec{n} = (1; 1; -3)$. **(D)** $\vec{n} = (-5; 8; -1)$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, véc tơ nào sau đây là một véc tơ pháp tuyến của (P) ? Biết $\vec{a} = (-1; -2; -2)$, $\vec{b} = (-1; 0; -1)$ là cặp véc tơ chỉ phương của (P) .

- (A)** $\vec{n} = (2; 1; 2)$. **(B)** $\vec{n} = (2; -1; -2)$. **(C)** $\vec{n} = (2; 1; -2)$. **(D)** $\vec{n} = (-2; 1; -2)$.

Câu 7. Cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z = 5$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- (A)** $Q(2; -1; 5)$. **(B)** $P(0; 0; -5)$. **(C)** $N(-5; 0; 0)$. **(D)** $M(1; 1; 6)$.

Câu 8. Tìm m để điểm $M(m; 1; 6)$ thuộc mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 5 = 0$.

- (A)** $m = 1$. **(B)** $m = -1$. **(C)** $m = 3$. **(D)** $m = 2$.

Câu 9. Tìm m để điểm $A(m; m - 1; 1 + 2m)$ thuộc mặt phẳng $(P) : 2x - y - z + 1 = 0$

- Ⓐ $m = -1$. Ⓑ $m = 1$. Ⓒ $m = -2$. Ⓓ $m = 2$.

Dạng 2.26. Viết phương trình mặt phẳng

Mặt phẳng (P) $\left\{ \begin{array}{l} \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (a; b; c) \end{array} \right.$ thì phương trình $(P) : a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ (*).

Ngược lại, một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $ax + by + cz + d = 0$, mặt phẳng này có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

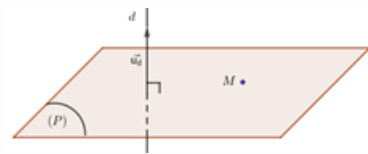
Các mặt phẳng cơ bản

$$mp(Oyz) : x = 0 \rightarrow \vec{n}_{(Oyz)} = (1; 0; 0)$$

$$mp(Oxz) : y = 0 \rightarrow \vec{n}_{(Oxz)} = (0; 1; 0)$$

$$mp(Oxy) : z = 0 \rightarrow \vec{n}_{(Oxy)} = (0; 0; 1)$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với với đường thẳng AB cho trước.



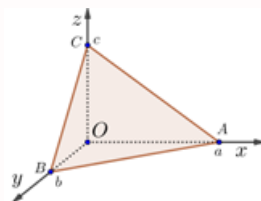
Mặt phẳng (P) qua M , có VTPT $\vec{n}_{(P)} = \vec{AB}$ nên phương trình được viết theo (*).

2. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và song song với mặt phẳng (Q) cho trước.



Mặt phẳng (P) qua M , có VTPT là $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_{(Q)}$ nên phương trình được viết theo (*).

3. Viết phương trình mặt phẳng cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a.b.c \neq 0$.



Phương trình mặt phẳng được viết theo đoạn chắn $(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$

4. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB .

Phương pháp: $(P): \begin{cases} \cdot \text{Qua I} \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right) \\ \cdot \text{VTPT} : \vec{n}_{(P)} = \vec{AB} \end{cases}$

5. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với đường thẳng $d \equiv AB$.

Phương pháp: $(P): \begin{cases} \cdot \text{Qua M}(x_0; y_0; z_0) \\ \cdot \text{VTPT} : \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \vec{AB} \end{cases}$

6. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm M và có cặp vectơ chỉ phương \vec{a}, \vec{b}

Phương pháp: $(P): \begin{cases} \cdot \text{Qua M}(x_0; y_0; z_0) \\ \cdot \text{VTPT} : \vec{n}_{(P)} = [\vec{a}, \vec{b}] \end{cases}$

7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Phương pháp: $(P): \begin{cases} \cdot \text{Qua A, (Hay B hay C)} \\ \cdot \text{VTPT} : \vec{n}_{(ABC)} = [\vec{AB}, \vec{AC}] \end{cases}$

✍ Ví dụ 1. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxz) có phương trình là:

- A $x = 0.$ B $z = 0.$ C $x + y + z = 0.$ D $y = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (Oyz) ?

- A $y = 0.$ B $x = 0.$ C $y - z = 0.$ D $z = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 3. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oyz) có phương trình là

- (A) $z = 0.$
 (B) $x + y + z = 0.$
 (C) $x = 0.$
 (D) $y = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4. (Chuyên Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng Ozx ?

- (A) $x = 0.$
 (B) $y - 1 = 0.$
 (C) $y = 0.$
 (D) $z = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

- (A) $z = 0.$
 (B) $x = 0.$
 (C) $y = 0.$
 (D) $x + y = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 2; -3)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 3)$.

- (A) $x - 2y + 3z + 12 = 0.$
 (B) $x - 2y - 3z - 6 = 0.$
 (C) $x - 2y + 3z - 12 = 0.$
 (D) $x - 2y - 3z + 6 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7. (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 1; 1)$ và $B(1; 2; 3)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB .

(A) $x + y + 2z - 3 = 0.$

(B) $x + y + 2z - 6 = 0.$

(C) $x + 3y + 4z - 7 = 0.$

(D) $x + 3y + 4z - 26 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, Cho hai điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$ Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB có phương trình là

(A) $2x - 3y - z - 20 = 0.$

(B) $3x - y + 3z - 25 = 0.$

(C) $2x - 3y - z + 8 = 0.$

(D) $3x - y + 3z - 13 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 9. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 1)$ và $B(2; 1; 0)$ Mặt phẳng qua A và vuông góc với AB có phương trình là

(A) $x + 3y + z - 5 = 0.$

(B) $x + 3y + z - 6 = 0.$

(C) $3x - y - z - 6 = 0.$

(D) $3x - y - z + 6 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 10. (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; 1; 1)$, $B(2; 1; 0)$ $C(1; -1; 2)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình là

A) $3x + 2z + 1 = 0.$

B) $x + 2y - 2z + 1 = 0.$

C) $x + 2y - 2z - 1 = 0.$

D) $3x + 2z - 1 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 11. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(5; -4; 2)$ và $B(1; 2; 4)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB là?

A) $3x - y + 3z - 25 = 0.$

B) $2x - 3y - z + 8 = 0.$

C) $3x - y + 3z - 13 = 0.$

D) $2x - 3y - z - 20 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 12. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$ có phương trình là

A) $3x - y + 4z - 12 = 0.$

B) $3x - y + 4z + 12 = 0.$

C) $x - y + 2z - 12 = 0.$

D) $x - y + 2z + 12 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 13. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho ba điểm $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(0; -2; -1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

A) $x - 2y - 5z - 5 = 0.$

B) $2x - y + 5z - 5 = 0.$

C) $x - 2y - 5 = 0.$

D) $x - 2y - 5z + 5 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 14. (Sở Bắc Giang 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 2)$ và $B(2; 0; 1)$. Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là

- A** $x + y - z = 0.$
 B $x - y - z - 2 = 0.$
 C $x + y + z - 4 = 0.$
 D $x - y - z + 2 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 15. (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 0)$ và $B(2; 3; -1)$ Phương trình mặt phẳng qua A và vuông góc với AB là

- A** $2x + y - z - 3 = 0.$
 B $x + y - z + 3 = 0.$
 C $x + y - z - 3 = 0.$
 D $x - y - z - 3 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 16. (Chuyên Đại học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(3; -1; 4)$ đồng thời vuông góc với giá của vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$ có phương trình là

- A** $3x - y + 4z - 12 = 0.$
 B $3x - y + 4z + 12 = 0.$
 C $x - y + 2z - 12 = 0.$
 D $x - y + 2z + 12 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 17. (THPT Thuận Thành 3-Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -3)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 3)$ là

- (A) $2x - y + 3z + 9 = 0.$
 (B) $2x - y + 3z - 4 = 0.$
 (C) $x - 2y - 4 = 0.$
 (D) $2x - y + 3z + 4 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18. (SGD Điện Biên-2019) Trong không gian $Oxyz$ phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(1; -2; 3)$ và vuông góc với giá của vectơ $\vec{v} = (-1; 2; 3)$ là

- (A) $x - 2y - 3z - 4 = 0.$
 (B) $x - 2y + 3z - 4 = 0.$
 (C) $x - 2y - 3z + 4 = 0.$
 (D) $-x + 2y - 3z + 4 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 19. (SGD Cần Thơ 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng đi qua điểm $A(3; 0; -1)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4; -2; -3)$ là

- (A) $4x - 2y + 3z - 9 = 0.$
 (B) $4x - 2y - 3z - 15 = 0.$
 (C) $3x - z - 15 = 0.$
 (D) $4x - 2y - 3z + 15 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng qua $A(-1; 1; -2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; -2)$ là

- (A) $x - 2y - 2z - 1 = 0.$
 (B) $-x + y - 2z - 1 = 0.$
 (C) $x - 2y - 2z + 7 = 0.$
 (D) $-x + y - 2z + 1 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 21. (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 2 điểm $A(-1; 0; 1)$, $B(2; 1; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AB .

(A) $(P) : 3x + y - z + 4 = 0.$

(B) $(P) : 3x + y - z - 4 = 0.$

(C) $(P) : 3x + y - z = 0.$

(D) $(P) : 2x + y - z + 1 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 22. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với BC là

(A) $y + 2z - 5 = 0.$

(B) $2x - y - 1 = 0.$

(C) $2x - y + 1 = 0.$

(D) $-y + 2z - 5 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. (Mã 101 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 4)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (P) là

(A) $2x - 2y + 4z - 21 = 0.$

(B) $2x - 2y + 4z + 21 = 0.$

(C) $3x - 2y + z - 12 = 0.$

(D) $3x - 2y + z + 12 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 24. (Mã 102-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; -2)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là:

A) $2x + y - 2z + 9 = 0$.

B) $2x + y - 2z - 9 = 0$.

C) $3x - 2y + z + 2 = 0$.

D) $3x - 2y + z - 2 = 0$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 25. (Mã 103-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 3)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A) $3x - 2y + z + 11 = 0$.

B) $2x - y + 3z - 14 = 0$.

C) $3x - 2y + z - 11 = 0$.

D) $2x - y + 3z + 14 = 0$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 26. (Mã 104-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; -3)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + z - 3 = 0$. Phương trình của mặt phẳng đi qua M và song song với (P) là

A) $3x - 2y + z + 1 = 0$.

B) $3x - 2y + z - 1 = 0$.

C) $2x + y - 3z + 14 = 0$.

D) $2x + y - 3z - 14 = 0$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 27. (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; -1; -2)$ và mặt phẳng $(\alpha) : 3x - y + 2z + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua M và song song với (α) ?

(A) $3x - y + 2z - 6 = 0$.

(B) $3x - y + 2z + 6 = 0$.

(C) $3x - y - 2z + 6 = 0$.

(D) $3x + y + 2z - 14 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 28. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(2; -1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(P) : 2x - y + 3z + 2 = 0$ có phương trình là

(A) $2x - y + 3z + 11 = 0$.

(B) $2x - y - 3z + 11 = 0$.

(C) $2x - y + 3z - 11 = 0$.

(D) $2x + y + 3z - 9 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 29. (THPT Cẩm Giàng 2 -2019) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 3; -2)$ và song song với mặt phẳng $(P) : 2x - y + 3z + 4 = 0$ là:

(A) $2x + y + 3z + 7 = 0$.

(B) $2x + y - 3z + 7 = 0$.

(C) $2x - y + 3z + 7 = 0$.

(D) $2x - y + 3z - 7 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 30. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1; 1; 2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 2y + z - 1 = 0$ có phương trình là

(A) $2x - 2y + z + 2 = 0$.

(B) $2x - 2y + z = 0$.

(C) $2x - 2y + z - 6 = 0$.

(D) $(\alpha) : 2x - 2y + z - 2 = 0$.

✍ Ví dụ 31. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; -1; -3)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + 4z - 5 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình là

(A) $(Q) : 3x - 2y + 4z - 4 = 0.$

(B) $(Q) : 3x - 2y + 4z + 4 = 0.$

(C) $(Q) : 3x - 2y + 4z + 5 = 0.$

(D) $(Q) : 3x + 2y + 4z + 8 = 0.$

✍ Ví dụ 32. (Chuyên Quốc Học Huế 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1; 0; 6)$ và mặt phẳng (α) có phương trình $x + 2y + 2z - 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (β) đi qua M và song song với mặt phẳng (α) .

(A) $(\beta) : x + 2y + 2z - 13 = 0.$

(B) $(\beta) : x + 2y + 2z - 15 = 0.$

(C) $(\beta) : x + 2y + 2z + 15 = 0.$

(D) $(\beta) : x + 2y + 2z + 13 = 0.$

✍ Ví dụ 33. (Mã 101-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ và $C(0; 0; -2)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

(A) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1.$

(B) $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1.$

(C) $\frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1.$

(D) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1.$

.....

✍ Ví dụ 34 (Mã 102-2020 Lần 1). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$ và $C(0; 0; 4)$. Mặt phẳng ABC có phương trình là

A $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

B $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

C $\frac{x}{2} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1.$

D $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-4} = 1.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 35. (Mã 103-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1.$

B $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1.$

C $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

D $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 36. (Mã 104-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1.$

B $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-3} = 1.$

C $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1.$

D $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 37. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(2; 0; 0)$, $N(0; -1; 0)$, $P(0; 0; 2)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A $\frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = -1.$

B $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{2} = 1.$

$$\textcircled{C} \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1.$$

$$\textcircled{D} \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 0.$$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 38. (Đề thử nghiệm THPT QG 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$; $B(0; -2; 0)$; $C(0; 0; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng (ABC) ?

$$\textcircled{A} \frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1.$$

$$\textcircled{B} \frac{x}{-2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1.$$

$$\textcircled{C} \frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1.$$

$$\textcircled{D} \frac{x}{3} + \frac{y}{1} + \frac{z}{-2} = 1.$$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 39. (SGD Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(0; -1; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 0; 3)$ là

$$\textcircled{A} \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1. \quad \textcircled{B} \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 0. \quad \textcircled{C} \frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1. \quad \textcircled{D} \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1.$$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 40. (Lômônôxốp-Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $M(1; 0; 0)$, $N(0; 2; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

$$\textcircled{A} 6x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

$$\textcircled{B} 6x + 3y + 2z + 1 = 0.$$

$$\textcircled{C} 6x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

$$\textcircled{D} x + y + z - 6 = 0.$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 41. (THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $C(0; 0; -3)$ Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(A) $-3x + 6y - 2z + 6 = 0.$

(B) $-3x - 6y + 2z + 6 = 0.$

(C) $-3x + 6y + 2z + 6 = 0.$

(D) $-3x - 6y + 2z - 6 = 0.$

✎ Ví dụ 42. (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; -2)$ là

(A) $4x - 3y + 6z + 12 = 0.$

(B) $4x + 3y + 6z + 12 = 0.$

(C) $4x + 3y - 6z + 12 = 0.$

(D) $4x - 3y + 6z - 12 = 0.$

✎ Ví dụ 43. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 0; 7)$ và $C(0; 3; 0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

(A) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{7} + \frac{z}{3} = 1.$

(B) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 0.$

(C) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} = 1.$

(D) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{7} + 1 = 0.$

✎ Ví dụ 44. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua ba điểm $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; -3)$ có phương trình là

(A) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = -1.$

(B) $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

$$\textcircled{C} \frac{x}{-1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1.$$

$$\textcircled{D} \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1.$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 45. (Chuyên Thái Bình -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

$$\textcircled{A} \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

$$\textcircled{B} \frac{x}{1} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

$$\textcircled{C} \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0.$$

$$\textcircled{D} -\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 46. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(-3; 0; 0)$; $B(0; 4; 0)$ và $C(0; 0; -2)$ là.

$$\textcircled{A} 4x - 3y + 6z + 12 = 0.$$

$$\textcircled{B} 4x + 3y + 6z + 12 = 0.$$

$$\textcircled{C} 4x + 3y - 6z + 12 = 0.$$

$$\textcircled{D} 4x - 3y + 6z - 12 = 0.$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 47. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng qua các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 5)$ có phương trình là

$$\textcircled{A} 15x + 5y + 3z + 15 = 0.$$

$$\textcircled{B} \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} + 1 = 0.$$

$$\textcircled{C} x + 3y + 5z = 1.$$

$$\textcircled{D} \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1.$$

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 48. (Chuyên Sơn La 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ và $C(0; 0; 3)$ là

A $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1.$

B $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = -1.$

C $\frac{x}{1} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 0.$

D $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 49. (THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $C(0; 0; -3)$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

A $-3x + 6y - 2z + 6 = 0.$

B $-3x - 6y + 2z + 6 = 0.$

C $-3x + 6y + 2z + 6 = 0.$

D $-3x - 6y + 2z - 6 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 50. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(-1; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 4)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt phẳng (ABC) ?

A $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

B $\frac{x}{1} - \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = 1.$

C $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-1} = 1.$

D $\frac{x}{1} - \frac{y}{3} - \frac{z}{4} = -1.$

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. (Mã 104-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$ Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $3x - y - z = 0.$

(B) $3x + y + z - 6 = 0.$

(C) $x + y + 2z - 6 = 0.$

(D) $6x - 2y - 2z - 1 = 0.$

Câu 2. (Mã 102-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 0)$ và $B(3; 0; 2)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $x + y + z - 3 = 0.$

(B) $2x - y + z + 2 = 0.$

(C) $2x + y + z - 4 = 0.$

(D) $2x - y + z - 2 = 0.$

Câu 3. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(4; 0; 1)$ và $B(-2; 2; 3)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB ?

(A) $3x + y + z - 6 = 0.$

(B) $3x - y - z = 0.$

(C) $6x - 2y - 2z - 1 = 0.$

(D) $3x - y - z + 1 = 0.$

Câu 4. (Mã 101 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; 0)$ và $B(5; 1; -1)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là:

(A) $x + y + 2z - 3 = 0.$

(B) $3x + 2y - z - 14 = 0.$

(C) $2x - y - z + 5 = 0.$

(D) $2x - y - z - 5 = 0.$

Câu 5. (Mã 103-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 1; 2)$ và $B(6; 5; -4)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $2x + 2y - 3z - 17 = 0.$

(B) $4x + 3y - z - 26 = 0.$

(C) $2x + 2y - 3z + 17 = 0.$

(D) $2x + 2y + 3z - 11 = 0.$

Câu 6. (Chuyên Thái Bình 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 3; -4)$ và $B(-1; 2; 2)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực (α) của đoạn thẳng AB .

(A) $(\alpha) : 4x + 2y + 12z + 7 = 0.$

(B) $(\alpha) : 4x - 2y + 12z + 17 = 0.$

(C) $(\alpha) : 4x + 2y - 12z - 17 = 0.$

(D) $(\alpha) : 4x - 2y - 12z - 7 = 0.$

Câu 7. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; -1)$; $B(-1; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua A, B và vuông góc với (P)

(A) $(Q) : 2x - y + 3 = 0.$

(B) $(Q) : x + z = 0.$

(C) $(Q) : -x + y + z = 0.$

(D) $(Q) : 3x - y + z = 0.$

Câu 8. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P) : x - 3y + 2z - 5 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) .

(A) $2y + 3z - 11 = 0.$

(B) $2x - 3y - 11 = 0.$

(C) $x - 3y + 2z - 5 = 0$.

(D) $3y + 2z - 11 = 0$.

Câu 9. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$ và $B(3; 3; 0)$. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

(A) $x + y - z - 2 = 0$.

(B) $x + y - z + 2 = 0$.

(C) $x + 2y - z - 3 = 0$.

(D) $x + 2y - z + 3 = 0$.

Câu 10. (Chuyên Sơn La 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0; 1; 0)$, $B(2; 3; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q) : x + 2y - z = 0$ có phương trình là

(A) $4x - 3y + 2z + 3 = 0$.

(B) $4x - 3y - 2z + 3 = 0$.

(C) $2x + y - 3z - 1 = 0$.

(D) $4x + y - 2z - 1 = 0$.

Câu 11. (KTNL GV Lý Thái Tổ 2019) Cho hai mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0$, $(\beta) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

(A) $2x - y - 2z = 0$.

(B) $2x - y + 2z = 0$.

(C) $2x + y - 2z = 0$.

(D) $2x + y - 2z + 1 = 0$.

Câu 12. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 4; 1)$; $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P) : x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz - 11 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $a + b + c = 5$.

(B) $a + b + c = 15$.

(C) $a + b + c = -5$.

(D) $a + b + c = -15$.

Câu 13. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; -1; 2)$; $B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là:

(A) $3x - 2y - z - 3 = 0$.

(B) $x + y + z - 2 = 0$.

(C) $-x + y = 0$.

(D) $3x - 2y - z + 3 = 0$.

Câu 14. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x - 3y + 2z - 1 = 0$, $(Q) : x - z + 2 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với cả (P) và (Q) đồng thời cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng 3 Phương trình của mp (α) là

(A) $x + y + z - 3 = 0$.

(B) $x + y + z + 3 = 0$.

(C) $-2x + z + 6 = 0$.

(D) $-2x + z - 6 = 0$.

Câu 15. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng đi qua O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

(A) $2x + y - 2z + 1 = 0$.

(B) $2x + y - 2z = 0$.

(C) $2x - y - 2z = 0$.

(D) $2x - y + 2z = 0$.

Câu 16. (HSG Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y + z + 1 = 0$ và hai điểm $A(1; -1; 2); B(2; 1; 1)$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) , mặt phẳng (Q) có phương trình là:

- (A) $3x - 2y - z + 3 = 0.$
 (B) $x + y + z - 2 = 0.$
 (C) $3x - 2y - z - 3 = 0.$
 (D) $-x + y = 0.$

Câu 17. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0; 1; 0), B(2; 0; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x - y - 1 = 0$ là:

- (A) $x + y - 3z - 1 = 0.$
 (B) $2x + 2y - 5z - 2 = 0.$
 (C) $x - 2y - 6z + 2 = 0.$
 (D) $x + y - z - 1 = 0.$

Câu 18. (Chuyên Lam Sơn 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha) : 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta) : 5x - 4y + 3z + 1 = 0$ Phương trình mặt phẳng qua O , đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) có phương trình là

- (A) $2x - y + 2z = 0.$
 (B) $2x - y + 2z + 1 = 0.$
 (C) $2x + y - 2z = 0.$
 (D) $2x - y - 2z = 0.$

Câu 19. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 2); B(2; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 1 = 0$. Mặt phẳng (Q) chứa A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) . Mặt phẳng (Q) có phương trình là

- (A) $3x - 2y - z - 3 = 0.$
 (B) $-x + y = 0.$
 (C) $x + y + z - 2 = 0.$
 (D) $3x - 2y - z + 3 = 0.$

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : ax + by + cz - 9 = 0$ chứa hai điểm $A(3; 2; 1), B(-3; 5; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q) : 3x + y + z + 4 = 0$. Tính tổng $S = a + b + c$.

- (A) $S = -12.$
 (B) $S = 2.$
 (C) $S = -4.$
 (D) $S = -2.$

Câu 21. (Thi thử hội 8 trường chuyên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P) : x + y + z - 1 = 0, (Q) : 2y + z - 5 = 0$ và $(R) : x - y + z - 2 = 0$ Gọi (α) là mặt phẳng qua giao tuyến của (P) và (Q) , đồng thời vuông góc với (R) Phương trình của (α) là

- (A) $2x + 3y - 5z + 5 = 0.$
 (B) $x + 3y + 2z - 6 = 0.$
 (C) $x + 3y + 2z + 6 = 0.$
 (D) $2x + 3y - 5z - 5 = 0.$

Câu 22. (THPT Lương Thế Vinh-HN-2018) Trong không gian $Oxyz$, phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $B(2; 1; -3)$, đồng thời vuông góc với hai mặt phẳng $(Q) : x + y + 3z = 0, (R) : 2x - y + z = 0$ là

- (A) $4x + 5y - 3z + 22 = 0.$
 (B) $4x - 5y - 3z - 12 = 0.$
 (C) $2x + y - 3z - 14 = 0.$
 (D) $4x + 5y - 3z - 22 = 0.$

Câu 23. (Chuyên Nguyễn Quang Diêu-Đồng Tháp-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng là $ax + by + cz - 11 = 0$. Tính $a + b + c$.

- Ⓐ $a + b + c = 10$. Ⓑ $a + b + c = 3$. Ⓒ $a + b + c = 5$. Ⓓ $a + b + c = -7$.

Câu 24. (Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 1)$ và hai mặt phẳng $(P): 2x - y + 3z - 1 = 0$, $(Q): y = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa A , vuông góc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q) .

- Ⓐ $3x - y + 2z - 4 = 0$. Ⓑ $3x + y - 2z - 2 = 0$.
 Ⓒ $3x - 2z = 0$. Ⓓ $3x - 2z - 1 = 0$.

Câu 25. (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-2018) Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và $(\beta): 5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua gốc tọa độ đồng thời vuông góc (α) và (β) là:

- Ⓐ $x - y - 2z = 0$. Ⓑ $2x - y + 2z = 0$.
 Ⓒ $2x + y - 2z + 1 = 0$. Ⓓ $2x + y - 2z = 0$.

Câu 26. (Toán Học Tuổi Trẻ 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 4; 1)$, $B(-1; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 5 = 0$. Một mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với (P) có dạng: $ax + by + cz - 11 = 0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $a + b = c$. Ⓑ $a + b + c = 5$. Ⓒ $a \in (b; c)$. Ⓓ $b < 2019$.

Câu 27. (Chuyên ĐHSPhN-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 0)$, $C(-2; 0; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua A , trực tâm H của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

- Ⓐ $4x - 2y - z + 4 = 0$. Ⓑ $4x - 2y + z + 4 = 0$.
 Ⓒ $4x + 2y + z - 4 = 0$. Ⓓ $4x + 2y - z + 4 = 0$.

Câu 28. (Thpt Vĩnh Lộc-Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1; 2; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho M là trọng tâm của tam giác ABC .

- Ⓐ $(P): 6x + 3y + 2z + 18 = 0$. Ⓑ $(P): 6x + 3y + 2z + 6 = 0$.
 Ⓒ $(P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$. Ⓓ $(P): 6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Câu 29. (Chuyên Thái Bình-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy, Oz . Viết phương trình mặt phẳng (ABC) .

- Ⓐ $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. Ⓑ $\frac{x}{1} - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. Ⓒ $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0$. Ⓓ $-\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$.

Câu 30. (Chu Văn An-Hà Nội-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $G(1; 4; 3)$ Mặt phẳng nào sau đây cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$?

(A) $\frac{x}{3} + \frac{y}{12} + \frac{z}{9} = 1.$

(B) $12x + 3y + 4z - 48 = 0.$

(C) $\frac{x}{4} + \frac{y}{16} + \frac{z}{12} = 0.$

(D) $12x + 3y + 4z = 0.$

Câu 31. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $A(1; 1; 1)$ và $B(0; 2; 2)$ đồng thời cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại hai điểm M, N (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $OM = 2ON$

(A) $(P) : 3x + y + 2z - 6 = 0.$

(B) $(P) : 2x + 3y - z - 4 = 0.$

(C) $(P) : 2x + y + z - 4 = 0.$

(D) $(P) : x + 2y - z - 2 = 0.$

Câu 32. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, nếu ba điểm A, B, C lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; 2; 3)$ lên các trục tọa độ thì phương trình mặt phẳng (ABC) là

(A) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 1.$

(B) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

(C) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0.$

(D) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0.$

Câu 33. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(8; -2; 4)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz . Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B và C là

(A) $x - 4y + 2z - 8 = 0.$

(B) $x - 4y + 2z - 18 = 0.$

(C) $x + 4y + 2z - 8 = 0.$

(D) $x + 4y - 2z - 8 = 0.$

Câu 34. (Chuyên Hạ Long 2019) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(2; 1; -3)$, biết (α) cắt trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho tam giác ABC nhận M làm trọng tâm

(A) $2x + 5y + z - 6 = 0.$

(B) $2x + y - 6z - 23 = 0.$

(C) $2x + y - 3z - 14 = 0.$

(D) $3x + 4y + 3z - 1 = 0.$

Câu 35. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(2; -3; 1)$ lên các mặt phẳng tọa độ. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

(A) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1.$

(B) $3x - 2y + 6z = 6.$

(C) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 0.$

(D) $3x - 2y + 6z - 12 = 0.$

Câu 36. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(-1; 2; 1), B(2; -1; 4)$ và $C(1; 1; 4)$. Đường thẳng nào dưới đây vuông góc với mặt phẳng (ABC) ?

(A) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$

(B) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$

(C) $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}.$

(D) $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}.$

Câu 37. (THPT Nghĩa Hưng ND-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 1; 0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax + y - z + d = 0$. Hãy xác định a và d .

- (A) $a = 1, d = 1$. (B) $a = 6, d = -6$. (C) $a = -1, d = -6$. (D) $a = -6, d = 6$.

Câu 38. (Lý Nhân Tông-Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 5; 2)$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua các điểm là hình chiếu của điểm A trên các mặt phẳng tọa độ?

- (A) $3x + 5y + 2z - 60 = 0$. (B) $10x + 6y + 15z - 60 = 0$.
 (C) $10x + 6y + 15z - 90 = 0$. (D) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$.

Câu 39. (Thi thử cụm Vũng Tàu-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; -2; -2)$, $B(3; 2; 0)$, $C(0; 2; 1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

- (A) $2x - 3y + 6z + 12 = 0$. (B) $2x + 3y - 6z - 12 = 0$.
 (C) $2x - 3y + 6z = 0$. (D) $2x + 3y + 6z + 12 = 0$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua 3 điểm $A(1; 2; 3)$, $B(4; 5; 6)$, $C(1; 0; 2)$ có phương trình là

- (A) $x - y + 2z - 5 = 0$. (B) $x + 2y - 3z + 4 = 0$.
 (C) $3x - 3y + z = 0$. (D) $x + y - 2z + 3 = 0$.

Câu 41. (SGD-Bình Dương-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng đi qua ba điểm $A(2; 3; 5)$, $B(3; 2; 4)$ và $C(4; 1; 2)$ có phương trình là

- (A) $x + y + 5 = 0$. (B) $x + y - 5 = 0$. (C) $y - z + 2 = 0$. (D) $2x + y - 7 = 0$.

Câu 42. (Lê Quý Đôn-Hải Phòng-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $A(1; 1; 4)$, $B(2; 7; 9)$, $C(0; 9; 13)$.

- (A) $2x + y + z + 1 = 0$. (B) $x - y + z - 4 = 0$.
 (C) $7x - 2y + z - 9 = 0$. (D) $2x + y - z - 2 = 0$.

Câu 43. (SGD-Bình Dương-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $S(-1; 6; 2)$, $A(0; 0; 6)$, $B(0; 3; 0)$, $C(-2; 0; 0)$. Gọi H là chân đường cao vẽ từ S của tứ diện $S.ABC$. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm S, B, H là

- (A) $x + y - z - 3 = 0$. (B) $x + y - z - 3 = 0$.
 (C) $x + 5y - 7z - 15 = 0$. (D) $7x + 5y - 4z - 15 = 0$.

Dạng 2.27. Điểm thuộc mặt phẳng

Một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $(P) : ax + by + cz + d = 0$, và điểm $M(x_M; y_M; z_M)$.

Nếu $ax_M + by_M + cz_M + d = 0 \Rightarrow M \in (P)$

Nếu $ax_M + by_M + cz_M + d \neq 0 \Rightarrow M \notin (P)$

✍ Ví dụ 1. (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 6 = 0$. Điểm nào dưới đây không thuộc (α) ?

- A $Q(3; 3; 0)$. B $N(2; 2; 2)$. C $P(1; 2; 3)$. D $M(1; -1; 1)$.

.....

✍ Ví dụ 2. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 5 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A $P(0; 0; -5)$. B $M(1; 1; 6)$. C $Q(2; -1; 5)$. D $N(-5; 0; 0)$.

.....

✍ Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : x + y + z - 3 = 0$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A $M(-1; -1; -1)$. B $N(1; 1; 1)$. C $P(-3; 0; 0)$. D $Q(0; 0; -3)$.

.....

✍ Ví dụ 4. (THPT Cẩm Giàng 2 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 3 = 0$. Điểm nào trong các phương án dưới đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- A $M(2; 1; 0)$. B $M(2; -1; 0)$. C $M(-1; -1; 6)$. D $M(-1; -1; 2)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 5. (Chuyên Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây nằm trên mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 2 = 0$.

- A $Q(1; -2; 2)$. B $P(2; -1; -1)$. C $M(1; 1; -1)$. D $N(1; -1; -1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6. (Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

- A $P(0; 2; 0)$. B $N(1; 2; 3)$. C $M(1; 0; 0)$. D $Q(0; 0; 3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 7. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào dưới đây đi qua gốc tọa độ?

- A $x + 20 = 0$. B $x - 2019 = 0$.
 C $y + 5 = 0$. D $2x + 5y - 8z = 0$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8. (Chuyên Lê Quý Đôn-Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + 2z - 3 = 0$ Điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng (α) ?

- A $M(2; 0; 1)$.
 B $Q(2; 1; 1)$.
 C $P(2; -1; 1)$.
 D $N(1; 0; 1)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 9. (SGD Bình Phước-2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha) : x - y + 2z - 3 = 0$ đi qua điểm nào dưới đây?

- A $M\left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$.
 B $N\left(1; -1; -\frac{3}{2}\right)$.
 C $P(1; 6; 1)$.
 D $Q(0; 3; 0)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 10. (Sở Kon Tum-2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + z - 4 = 0$ đi qua điểm nào sau đây?

- A $Q(1; -1; 1)$.
 B $N(0; 2; 0)$.
 C $P(0; 0; -4)$.
 D $M(1; 0; 0)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 11. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 1 = 0$. Điểm nào dưới đây thuộc (P) ?

- A $N(0; 1; -2)$.
 B $M(2; -1; 1)$.
 C $P(1; -2; 0)$.
 D $Q(1; -3; -4)$.
-
-
-

Dạng 2.28. Khoảng cách từ điểm đến mặt

Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$ được xác định bởi công thức

$$d(M, (P)) = \frac{|a \cdot x_M + b \cdot y_M + c \cdot z_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ví dụ 1. (Đề Minh Hòa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P)

- A $d = \frac{5}{29}$.
 B $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$.
 C $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
 D $d = \frac{5}{9}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 2. (THPT Ba Đình 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $3x + 4y + 2z + 4 = 0$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Tính khoảng cách d từ A đến (P) .

- A $d = \frac{5}{9}$.
 B $d = \frac{5}{29}$.
 C $d = \frac{5}{\sqrt{29}}$.
 D $d = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

.....

.....

.....

Ví dụ 3. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách từ $M(1; 2; -3)$ đến mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z - 10 = 0$.

- A $\frac{11}{3}$.
 B 3.
 C $\frac{7}{3}$.
 D $\frac{4}{3}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 4. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z - 1 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(-1; 2; 0)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- (A) 5.
 (B) 2.
 (C) $\frac{5}{3}$.
 (D) $\frac{4}{3}$.

.....
.....
.....

✍ Ví dụ 5. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z + 4 = 0$. Tính khoảng cách d từ điểm $M(1; 2; 1)$ đến mặt phẳng (P) .

- (A) $d = 3$.
 (B) $d = 4$.
 (C) $d = 1$.
 (D) $d = \frac{1}{3}$.

.....
.....
.....

✍ Ví dụ 6. (Sở Bắc Giang 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q) : x + 2y - 2z + 1 = 0$ và điểm $M(1; -2; 1)$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Q) bằng

- (A) $\frac{4}{3}$.
 (B) $\frac{1}{3}$.
 (C) $\frac{2}{3}$.
 (D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

.....
.....
.....

✍ Ví dụ 7. (Kiểm tra năng lực-ĐH-Quốc Tế-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm $A(1; -2; 3)$ lên mặt phẳng $(P) : 2x - y - 2z + 5 = 0$. Độ dài đoạn thẳng AH là

- (A) 3.
 (B) 7.
 (C) 4.
 (D) 1.

.....
.....
.....

.....

✍ Ví dụ 8. (SGD Cần Thơ 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z + 5 = 0$. Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) bằng

- A $\frac{4}{3}$.
 B $\frac{1}{3}$.
 C $\frac{2}{3}$.
 D $\frac{4}{9}$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 9. (Cần Thơ-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(-1; 3; -2)$. Khoảng cách từ A đến mặt (P) là

- A $\frac{\sqrt{14}}{7}$.
 B $\frac{3\sqrt{14}}{14}$.
 C $\frac{2}{3}$.
 D 1.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 10. (Sở Kon Tum-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z - 4 = 0$. Khoảng cách từ điểm $M(3; 1; -2)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A 2.
 B $\frac{1}{3}$.
 C 1.
 D 3.

.....

.....

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, điểm M thuộc trục Oy và cách đều hai mặt phẳng: $(P) : x + y - z + 1 = 0$ và $(Q) : x - y + z - 5 = 0$ có tọa độ là

- A $M(0; -3; 0)$.
 B $M(0; 3; 0)$.
 C $M(0; -2; 0)$.
 D $M(0; 1; 0)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; 4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x + y + mz - 1 = 0$ bằng độ

dài đoạn thẳng AB .

- (A) $m = 2$. (B) $m = -2$. (C) $m = -3$. (D) $m = \pm 2$.

Câu 3. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 3)$, $C(1; 1; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới mặt phẳng (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Phương trình mặt phẳng (P) là

- (A) $\begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 7z + 6 = 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ -2x + 3y + 6z + 13 = 0 \end{cases}$.
- (C) $\begin{cases} x + y + 2z - 1 = 0 \\ -2x + 3y + 7z + 23 = 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ -23x + 37y + 17z + 23 = 0 \end{cases}$.

Câu 4. Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của (P) là

- (A) $6x + 3y + 2z - 24 = 0$. (B) $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.
- (C) $6x + 3y + 2z = 0$. (D) $6x + 3y + 2z - 36 = 0$.

Câu 5. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 3)$, $B(5; -4; -1)$ và mặt phẳng (P) qua Ox sao cho $d(B; (P)) = 2d(A; (P))$, (P) cắt AB tại $I(a; b; c)$ nằm giữa AB . Tính $a + b + c$.

- (A) 12. (B) 6. (C) 4. (D) 8.

Câu 6. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q) : x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng:

- (A) $\frac{4}{3}$. (B) $\frac{8}{3}$. (C) $\frac{7}{3}$. (D) 3.

Câu 7. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt có phương trình $2x - y + z = 0$ và $2x - y + z - 7 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- (A) 7. (B) $7\sqrt{6}$. (C) $6\sqrt{7}$. (D) $\frac{7}{\sqrt{6}}$.

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z - 8 = 0$ và $(Q) : x + 2y + 2z - 4 = 0$ bằng

- (A) 1. (B) $\frac{4}{3}$. (C) 2. (D) $\frac{7}{3}$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z - 16 = 0$ và $(Q) : x + 2y - 2z - 1 = 0$ bằng

- (A) 5. (B) $\frac{17}{3}$. (C) 6. (D) $\frac{5}{3}$.

Câu 10. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q) : x + 2y + 3z + 6 = 0$ là

(A) $\frac{7}{\sqrt{14}}$. (B) $\frac{8}{\sqrt{14}}$. (C) 14. (D) $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P) : 6x + 3y + 2z - 1 = 0$ và $(Q) : x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + 8 = 0$ bằng

(A) 7. (B) 8. (C) 9. (D) 6.

Câu 12. (Chuyên Lam Sơn-2019) Trong không gian $Oxyz$ khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 1 = 0$ và $(Q) : x + 2y + 3z + 6 = 0$ là:

(A) $\frac{7}{\sqrt{14}}$. (B) $\frac{8}{\sqrt{14}}$. (C) 14. (D) $\frac{5}{\sqrt{14}}$.

Câu 13. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song $(\alpha) x - 2y - 2z + 4 = 0$ và $(\beta) -x + 2y + 2z - 7 = 0$.

(A) 0. (B) 3. (C) -1. (D) 1.

Câu 14. (THPT Đông Sơn 1-Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y + 6z + 14 = 0$ Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) bằng

(A) 2. (B) 4. (C) 3. (D) 1.

Câu 15. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P) : 2x - y - 2z - 9 = 0$ và $(Q) : 4x - 2y - 4z - 6 = 0$ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Câu 16. (SP Đồng Nai-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z - 6 = 0$ và $(Q) : x + 2y - 2z + 3 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

(A) 3. (B) 1. (C) 9. (D) 6.

Câu 17. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x + 4y - 12z + 5 = 0$ và điểm $A(2; 4; -1)$. Trên mặt phẳng (P) lấy điểm M . Gọi B là điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM}$. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (P) .

(A) $d = 6$. (B) $d = \frac{30}{13}$. (C) $d = \frac{66}{13}$. (D) $d = 9$.

Câu 18. (Chu Văn An-Hà Nội-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z - 1 = 0$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3?

(A) $(Q) : 2x + 2y - z + 10 = 0$. (B) $(Q) : 2x + 2y - z + 4 = 0$.
 (C) $(Q) : 2x + 2y - z + 8 = 0$. (D) $(Q) : 2x + 2y - z - 8 = 0$.

Câu 19. (SGD Bến Tre 2019) Tìm trên trục Oz điểm M cách đều điểm $A(2; 3; 4)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + 3y + z - 17 = 0$.

(A) $M(0; 0; -3)$. (B) $M(0; 0; 3)$. (C) $M(0; 0; -4)$. (D) $M(0; 0; 4)$.

Câu 20. (SGD Bắc Ninh 2019) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; 4; 0)$, mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + 46 = 0$. Biết rằng khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. giá trị của biểu thức $T = a + b + c$ bằng

- (A) -3 . (B) -6 . (C) 3 . (D) 6 .

Câu 21. (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z - 10 = 0$. Phương trình mặt phẳng (Q) với (Q) song song với (P) và khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng $\frac{7}{3}$ là.

- (A) $x + 2y + 2z + 3 = 0; x + 2y + 2z - 17 = 0$. (B) $x + 2y + 2z - 3 = 0; x + 2y + 2z + 17 = 0$.
(C) $x + 2y + 2z + 3 = 0; x + 2y + 2z + 17 = 0$. (D) $x + 2y + 2z - 3 = 0; x + 2y + 2z - 17 = 0$.

Câu 22. (SGD Hưng Yên 2019) Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta) : x + y - z + 3 = 0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

- (A) $x + y - z + 6 = 0; x + y - z = 0$. (B) $x + y - z + 6 = 0$.
(C) $x - y - z + 6 = 0; x - y - z = 0$. (D) $x + y + z + 6 = 0; x + y + z = 0$.

Câu 23. (THPT Hàm Rồng-Thanh Hóa-2018) Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho 3 điểm $A(4; 2; 1)$, $B(0; 0; 3)$, $C(2; 0; 1)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa OC và cách đều 2 điểm A, B .

- (A) $x - 2y - 2z = 0$ hoặc $x + 4y - 2z = 0$. (B) $x + 2y + 2z = 0$ hoặc $x - 4y - 2z = 0$.
(C) $x + 2y - 2z = 0$ hoặc $x + 4y - 2z = 0$. (D) $x + 2y - 2z = 0$ hoặc $x - 4y - 2z = 0$.

Câu 24. (THPT Nguyễn Tất Thành-Yên Bái-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 0; 0)$, $B(0; -2; 3)$, $C(1; 1; 1)$ Phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới (P) bằng $\frac{2}{\sqrt{3}}$ là

- (A) $x + y + z - 1 = 0$ hoặc $-23x + 37y + 17z + 23 = 0$.
(B) $x + y + 2z - 1 = 0$ hoặc $-23x + 3y + 7z + 23 = 0$.
(C) $x + 2y + z - 1 = 0$ hoặc $-13x + 3y + 6z + 13 = 0$.
(D) $2x + 3y + z - 1 = 0$ hoặc $3x + y + 7z - 3 = 0$.

Câu 25. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

- (A) $(Q) : 2x - 2y + z + 4 = 0$. (B) $(Q) : 2x - 2y + z - 14 = 0$.
(C) $(Q) : 2x - 2y + z - 19 = 0$. (D) $(Q) : 2x - 2y + z - 8 = 0$.

Câu 26. (Chuyên Phan Bội Châu -2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q) : x + 2y + 2z - 3 = 0$, mặt phẳng (P) không qua O , song song với mặt phẳng (Q) và $d((P), (Q)) = 1$. Phương trình mặt phẳng (P) là

- (A) $x + 2y + 2z + 1 = 0$. (B) $x + 2y + 2z = 0$.

(C) $x + 2y + 2z - 6 = 0$.

(D) $x + 2y + 2z + 3 = 0$.

Câu 27. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$, $C(0; 0; 6)$, $D(2; 4; 6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$, (P) cách đều D và mặt phẳng (ABC) . Phương trình của (P) là

(A) $6x + 3y + 2z - 24 = 0$.

(B) $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

(C) $6x + 3y + 2z = 0$.

(D) $6x + 3y + 2z - 36 = 0$.

Câu 28. (Ngô Quyền-Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; -1)$. Phương trình của mặt phẳng (P) qua $D(1; 1; 1)$ và song song với mặt phẳng (ABC) là

(A) $2x + 3y - 6z + 1 = 0$.

(B) $3x + 2y - 6z + 1 = 0$.

(C) $3x + 2y - 5z = 0$.

(D) $6x + 2y - 3z - 5 = 0$.

Câu 29. (Chuyên Nguyễn Đình Triều-Đồng Tháp-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$, $C(1; 0; 2)$, $D(1; 1; 1)$. Mặt phẳng (α) đi qua $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 1)$, (α) song song với đường thẳng CD . Phương trình mặt phẳng (α) là

(A) $x + y + 2 - 3 = 0$.

(B) $2x - y + z - 2 = 0$.

(C) $2x + y + z - 3 = 0$.

(D) $x + y - 2 = 0$.

Câu 30. (THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; 1; 2)$, H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt (P) và mặt phẳng $(Q) : x + y - 11 = 0$

(A) 60° .

(B) 30° .

(C) 45° .

(D) 90° .

Câu 31. (THPT Quang Trung Đống Đa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z - 5 = 0$. Xét mặt phẳng $(Q) : x + (2m - 1)z + 7 = 0$, với m là tham số thực. Tìm tất cả giá trị của m để (P) tạo với (Q) góc $\frac{\pi}{4}$.

(A) $\begin{cases} m = 1 \\ m = 4 \end{cases}$.

(B) $\begin{cases} m = 2 \\ m = -2\sqrt{2} \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} m = 2 \\ m = 4 \end{cases}$.

(D) $\begin{cases} m = 4 \\ m = \sqrt{2} \end{cases}$.

Câu 32. (THPT Ba Đình 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Khi đó $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $(5; 8)$.

(B) $(8; 11)$.

(C) $(0; 3)$.

(D) $(3; 5)$.

Câu 33. (Chuyên Bắc Giang -2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 1 = 0$, $(Q) : x + my + (m - 1)z + 2019 = 0$. Khi hai mặt phẳng (P) , (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

(A) $M(2019; -1; 1)$.

(B) $M(0; -2019; 0)$.

(C) $M(-2019; 1; 1)$.

(D) $M(0; 0; -2019)$.

Câu 34. (THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z + 5 = 0$ và $(Q) : x - y + 2 = 0$. Trên (P) có tam giác ABC ; Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên (Q) . Biết tam giác ABC có diện tích bằng 4, tính diện tích tam giác $A'B'C'$.

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 2. (D) $4\sqrt{2}$.

Câu 35. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019) Trong không gian $Oxyz$, biết hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) là $H(2; -1; -2)$. Số đo góc giữa mặt phẳng (P) với mặt phẳng $(Q) : x - y - 5 = 0$ là

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

Câu 36. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(2; 1; 2)$. Điểm H là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O xuống mặt phẳng (P) , số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q) : x + y - 11 = 0$ là

- (A) 90° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 45° .

Câu 37. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 0; 1), B(6; -2; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và tạo với mặt phẳng (Oyz) một góc α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{2}{7}$ là

- (A) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z = 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6z = 0 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} 2x - 3y + 6z - 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6z + 1 = 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z + 12 = 0 \\ 2x + 3y - 6z - 1 = 0 \end{cases}$.

Câu 38. (Toán Học Tuổi Trẻ 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$ với $c < 0$ đi qua hai điểm $A(0; 1; 0), B(1; 0; 0)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 60° . Khi đó giá trị $a + b + c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

- (A) $(0; 3)$. (B) $(3; 5)$. (C) $(5; 8)$. (D) $(8; 11)$.

Câu 39. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; -1)$ và đi qua điểm $A(2; 1; 2)$. Mặt phẳng nào dưới đây tiếp xúc với (S) tại A ?

- (A) $x + y + 3z - 9 = 0$. (B) $x + y - 3z + 3 = 0$.
(C) $x + y - 3z - 8 = 0$. (D) $x - y - 3z + 3 = 0$.

Câu 40. (Chuyên Quốc Học Huế -2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (α) có phương trình $2x + y - z - 1 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$. Xác định bán kính r của đường tròn là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) .

- (A) $r = \frac{2\sqrt{42}}{3}$. (B) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. (C) $r = \frac{2\sqrt{15}}{3}$. (D) $r = \frac{2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 41. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(2; 1; -4)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + 2z - 7 = 0$.

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 8z - 4 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 8z - 4 = 0$.
 (C) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z - 4 = 0$. (D) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z - 4 = 0$.

Câu 42. (SGD Bình Phước-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z + 3 = 0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(0; -2; 1)$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích 2π . Mặt cầu (S) có phương trình là

- (A) $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 2$. (B) $x^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$.
 (C) $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 3$. (D) $x^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$.

Câu 43. (Bình Giang-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

- (A) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$. (B) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16$.
 (C) $(S) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 34$. (D) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 34$.

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 2 = 0$ có phương trình là

- (A) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$. (B) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$.
 (C) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$. (D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 3$.

Câu 45. (Chuyên Nguyễn Huệ- 2019) Phương trình mặt cầu tâm $I(3; -2; 4)$ và tiếp xúc với $(P) : 2x - y + 2z + 4 = 0$ là:

- (A) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = \frac{20}{3}$. (B) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = \frac{400}{9}$.
 (C) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = \frac{20}{3}$. (D) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = \frac{400}{9}$.

Câu 46. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3; 1; -1)$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z + 3 = 0$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) là

- (A) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 4$. (B) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 16$.
 (C) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$. (D) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 16$.

Câu 47. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$ và cắt mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z + 7 = 0$ theo một đường tròn có đường kính bằng 8. Phương trình mặt cầu (S) là

- (A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 81$. (B) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 5$.
 (C) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$. (D) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 25$.

Câu 48. (Thpt Vĩnh Lộc-Thanh Hóa 2019) Cho mặt cầu (S) có phương trình $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x - 2y - z + 9 = 0$. Tính bán kính của đường

tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S).

- (A) 8. (B) $4\sqrt{6}$. (C) 10. (D) 6.

Câu 49. (chuyên Hùng Vương Gia Lai -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z - 10 = 0$, mặt phẳng (P) : $x + 2y - 2z + 10 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) (P) tiếp xúc với (S).
 (B) (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn khác đường tròn lớn.
 (C) (P) và (S) không có điểm chung.
 (D) (P) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn.

Câu 50. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và mặt phẳng (P) : $x + 2y - 2z + 1 = 0$. Tìm bán kính r đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

- (A) $r = \frac{1}{3}$. (B) $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. (C) $r = \frac{1}{2}$. (D) $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51. (Kinh Môn-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(3; 1; 0)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P) : $2x + 2y - z + 1 = 0$?

- (A) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 3$. (B) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9$.
 (C) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$. (D) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.

Câu 52. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Đường tròn giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy) có bán kính là

- (A) $r = 3$. (B) $r = \sqrt{5}$. (C) $r = \sqrt{6}$. (D) $r = \sqrt{14}$.

Câu 53. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2; 1; 1)$ và mặt phẳng (P) : $2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

- (A) (S) : $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 8$. (B) (S) : $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 10$.
 (C) (S) : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 8$. (D) (S) : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 10$.

Câu 54. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt cầu đi qua ba điểm $M(2; 3; 3)$, $N(2; -1; -1)$, $P(-2; -1; 3)$ và có tâm thuộc mặt phẳng (α) : $2x + 3y - z + 2 = 0$.

- (A) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 6z + 2 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 2 = 0$.
 (C) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 10 = 0$. (D) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 2 = 0$.

Câu 55. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0; 0; 1)$, $B(m; 0; 0)$, $C(0; n; 0)$, $D(1; 1; 1)$ với $m > 0; n > 0$ và $m + n = 1$ Biết rằng khi m, n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố

định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D . Tính bán kính R của mặt cầu đó?

- Ⓐ $R = 1$. Ⓑ $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $R = \frac{3}{2}$. Ⓓ $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 56. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x + my + z - 3m - 1 = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có đường kính bằng 2.

- Ⓐ $m = 1$. Ⓑ $m = -1$ hoặc $m = -2$.
 Ⓒ $m = 1$ hoặc $m = 2$. Ⓓ $m = -1$.

Câu 57. (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương -2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$ bán kính bằng 1, tiếp xúc mặt phẳng (Oxz) Khẳng định nào sau đây luôn đúng?

- Ⓐ $|a| = 1$. Ⓑ $a + b + c = 1$. Ⓒ $|b| = 1$. Ⓓ $|c| = 1$.

Câu 58. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z - 11 = 0$ có phương trình là:

- Ⓐ $2x - y + 2z - 7 = 0$. Ⓑ $2x - y + 2z + 9 = 0$.
 Ⓒ $2x - y + 2z + 7 = 0$. Ⓓ $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Câu 59. (Sở Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 2 = 0$ và $(Q) : 2x - y + z + 1 = 0$. Số mặt cầu đi qua $A(1; -2; 1)$ và tiếp xúc với hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là

- Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ Vô số. Ⓓ 2.

Câu 60. Trong không gian tọa độ 0, cho mặt cầu (S) có đường kính AB với $A(6; 2; -5)$, $B(-4; 0; 7)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A .

- Ⓐ $(P) : 5x + y - 6z + 62 = 0$. Ⓑ $(P) : 5x + y - 6z - 62 = 0$.
 Ⓒ $(P) : 5x - y - 6z - 62 = 0$. Ⓓ $(P) : 5x + y + 6z + 62 = 0$.

Câu 61. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0$ và mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) tiếp xúc với (S) .

- Ⓐ $\begin{cases} m = -2 \\ m = 5 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases}$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = -5$.

Câu 62. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $0xyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25$ có tâm I và mặt phẳng $(P) : x + 2y + 2z + 7 = 0$. Thể tích của khối nón đỉnh I và đường tròn đáy là giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) bằng

- Ⓐ 12π . Ⓑ 48π . Ⓒ 36π . Ⓓ 24π .

Câu 63. (Chuyên Ngữ Hà Nội 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ lần lượt có phương trình là $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 2z + 5 = 0$. Xét các mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc cả hai mặt cầu đã cho. Gọi $A(a; b; c)$ là điểm mà tất cả các mặt phẳng (P) đi qua. Tính tổng $S = a + b + c$.

(A) $S = \frac{5}{2}$.
 (B) $S = -\frac{5}{2}$.
 (C) $S = \frac{9}{2}$.
 (D) $S = -\frac{9}{2}$.

Câu 64. (Sở Kon Tum-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 45$ và mặt phẳng $(P) : x + y - z - 13 = 0$. Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có tâm $I(a; b; c)$ thì giá trị của $a + b + c$ bằng

(A) -11 .
 (B) 5 .
 (C) 2 .
 (D) 1 .

Câu 65. (Sở Hà Nam-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + z + 7 = 0$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 10 = 0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π . Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

(A) $(6; 0; 1)$.
 (B) $(-3; 1; 4)$.
 (C) $(-2; -1; 5)$.
 (D) $(4; -1; -2)$.

Câu 66. (Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha) : 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S) ; song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

(A) $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.
 (B) $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.
 (C) $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.
 (D) $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Câu 67. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y - 2z - 1 = 0$ và điểm $M(1; -2; 0)$. Mặt cầu tâm M , bán kính bằng $\sqrt{3}$ cắt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

(A) 2 .
 (B) $\sqrt{2}$.
 (C) $2\sqrt{2}$.
 (D) $\sqrt{3} - 1$.

Câu 68. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(Q) : x - 2y + z - 5 = 0$ và mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 15$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có chu vi bằng 6π đi qua điểm nào sau đây?

(A) $(2; -2; 1)$.
 (B) $(1; -2; 0)$.
 (C) $(0; -1; -5)$.
 (D) $(-2; 2; -1)$.

Câu 69. (Việt Đức Hà Nội 2019) Cho mặt cầu $(S) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 9$. Phương trình mặt phẳng (β) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm $M(0; 4; -2)$ là

(A) $x + 6y - 6z + 37 = 0$.
 (B) $x - 2y - 2z - 4 = 0$.
 (C) $x - 2y - 2z + 4 = 0$.
 (D) $x + 6y - 6z - 37 = 0$.

Câu 70. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 2)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3y - m = 0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có đúng 1 điểm chung.

- (A) $m = 1$. (B) $m = -1$ hoặc $m = -21$.
 (C) $m = 1$ hoặc $m = 21$. (D) $m = -9$ hoặc $m = 31$.

Câu 71. (THPT Ba Đình -2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): mx + 2y - z + 1 = 0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m ?

- (A) $m = \pm 1$. (B) $m = \pm 2 + \sqrt{5}$. (C) $m = \pm 4$. (D) $m = 6 \pm 2\sqrt{5}$.

Câu 72. (Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn bán kính bằng 3.

- (A) $(Q): y + 3z = 0$. (B) $(Q): x + y - 2z = 0$.
 (C) $(Q): y - z = 0$. (D) $(Q): y - 2z = 0$.

Câu 73. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-1; 2; 1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x + 2y - 2z + 8 = 0$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) :

- (A) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$. (B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 3$.
 (C) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 4$. (D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$.

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu có tâm $I(0; 1; 3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 2 = 0$?

- (A) $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$. (B) $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 9$.
 (C) $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 3$. (D) $x^2 + (y + 1)^2 + (z + 3)^2 = 3$.

Câu 75. (Sở Bắc Giang 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt cầu (S) tâm $I(-1; 2; 5)$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 4 = 0$ là

- (A) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 10z + 21 = 0$.
 (B) $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 10z + 21 = 0$.
 (C) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 10z - 21 = 0$.
 (D) $(S): x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y - 5z - 21 = 0$.

Câu 76. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $I(1; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$. Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc với (P) có phương trình là:

- (A) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$. (B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 3$.
 (C) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 3$. (D) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$.

Câu 77. (THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(-3; 0; 1)$. Mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng $(P) : x - 2y - 2z - 1 = 0$ theo một thiết diện là một hình tròn. Diện tích của hình tròn này bằng π . Phương trình mặt cầu (S) là

- (A) $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4.$
 (B) $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 25.$
 (C) $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 5.$
 (D) $(x + 3)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2.$

Câu 78. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 2 = 0$ và điểm $I(-1; 2; -1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5

- (A) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25.$
 (B) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 16.$
 (C) $(S) : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 34.$
 (D) $(S) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 34.$

Câu 79. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2z - 2 = 0$ và điểm $K(2; 2; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng chứa tất cả các tiếp điểm của các tiếp tuyến vẽ từ K đến mặt cầu (S) .

- (A) $2x + 2y + z - 4 = 0.$
 (B) $6x + 6y + 3z - 8 = 0.$
 (C) $2x + 2y + z + 2 = 0.$
 (D) $6x + 6y + 3z - 3 = 0.$

Câu 80. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + m - 3 = 0$. Tìm số thực của tham số m để mặt phẳng $(\beta) : 2x - y + 2z - 8 = 0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π .

- (A) $m = -3.$
 (B) $m = -1.$
 (C) $m = -2.$
 (D) $m = -4.$

Câu 81. (THPT Kinh Môn-HD-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + 4y + z - 11 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) , biết (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$, vuông góc với (α) và tiếp xúc với (S) .

- (A) $\begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0 \\ x - 2y + z - 21 = 0 \end{cases}$
 (B) $\begin{cases} 3x + y + 4z + 1 = 0 \\ 3x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} 4x - 3y - z + 5 = 0 \\ 4x - 3y - z - 27 = 0 \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y + 2z - 21 = 0 \end{cases}$

Câu 82. (SGD-Đà Nẵng-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y - 2z - 5 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z + 3)^2 = 4$. Tìm phương trình mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và đồng thời tiếp xúc với mặt cầu (S) .

- (A) $x - 2y - 2z + 1 = 0.$
 (B) $-x + 2y + 2z + 5 = 0.$
 (C) $x - 2y - 2z - 23 = 0.$
 (D) $-x + 2y + 2z + 17 = 0.$

Câu 83. (Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha) : x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của vectơ $\vec{v} = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

- A $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.
 B $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.
 C $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.
 D $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Câu 84. (Hồng Linh-Hà Tĩnh-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 2)$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 1 = 0$. Số mặt phẳng chứa hai điểm A, B và tiếp xúc với mặt cầu (S) là

- A 1 mặt phẳng. B 2 mặt phẳng. C 0 mặt phẳng. D Vô số mặt phẳng.

Câu 85. (THPT Nam Trực-Nam Định-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (Q) song với mặt phẳng $(P) : 2x - 2y + z - 7 = 0$. Biết $mp(Q)$ cắt mặt cầu $(S) : x^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$ theo một đường tròn có bán kính $r = 3$. Khi đó mặt phẳng (Q) có phương trình là:

- A $x - y + 2z - 7 = 0$. B $2x - 2y + z - 7 = 0$.
 C $2x - 2y + z - 17 = 0$. D $2x - 2y + z + 17 = 0$.

Câu 86. (THPT-Yên Định Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : 2x + my + 3z - 5 = 0$ và $(Q) : nx - 8y - 6z + 2 = 0$, với $m, n \in \mathbb{R}$. Xác định m, n để (P) song song với (Q) .

- A $m = n = -4$. B $m = 4; n = -4$. C $m = -4; n = 4$. D $m = n = 4$.

Câu 87. (Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x^2y + 2z^3 = 0$ và $(Q) : mx + y^2z + 1 = 0$. Với giá trị nào của m thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau?

- A $m = 1$. B $m = -1$. C $m = -6$. D $m = 6$.

Câu 88. (THPT Hai Bà Trưng-Huế-2018) Trong không gian $Oxyz$, tìm tập hợp các điểm cách đều cặp mặt phẳng sau đây: $4x - y - 2z - 3 = 0$, $4x - y - 2z - 5 = 0$.

- A $4x - y - 2z - 6 = 0$. B $4x - y - 2z - 4 = 0$.
 C $4x - y - 2z - 1 = 0$. D $4x - y - 2z - 2 = 0$.

Câu 89. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P) : x - 2y - z + 3 = 0$; $(Q) : 2x + y + z - 1 = 0$. Mặt phẳng (R) đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ chứa giao tuyến của (P) và (Q) ; phương trình của $(R) : m(x - 2y - z + 3) + (2x + y + z - 1) = 0$. Khi đó giá trị của m là

A) 3. B) $\frac{1}{3}$. C) $-\frac{1}{3}$. D) -3.

Câu 90. (THPT Gia Lộc Hải Dương 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P) : 2x + y + z - 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A) $2x - y - z - 2 = 0$. B) $x - y - z - 2 = 0$.
 C) $x + y + z - 2 = 0$. D) $2x + y + z - 2 = 0$.

Câu 91. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ trong đó $b, c \neq 0$ và mặt phẳng $(P) : y - z + 1 = 0$. Mối liên hệ giữa b, c để mặt phẳng (ABC) vuông góc với mặt phẳng (P) là

A) $2b = c$. B) $b = 2c$. C) $b = c$. D) $b = 3c$.

Câu 92. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $(P) : x + y - 2z + 5 = 0$ và $(Q) : 4x + (2 - m)y + mz - 3 = 0$, m là tham số thực. Tìm tham số m sao cho mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P) .

A) $m = -3$. B) $m = -2$. C) $m = 3$. D) $m = 2$.

Câu 93. (Chuyên Lê Quý Đôn-Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : ax - y + 2z + b = 0$ đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P) : x - y - z + 1 = 0$ và $(Q) : x + 2y + z - 1 = 0$. Tính $a + 4b$.

A) -16. B) -8. C) 0. D) 8.

Câu 94. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta) : 2x + 4y - mz - 2 = 0$ Tìm m để hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau.

A) $m = 1$. B) Không tồn tại m . C) $m = -2$. D) $m = 2$.

Câu 95. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định-2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y - 2z - 1 = 0$, mặt phẳng nào dưới đây song song với (P) và cách (P) một khoảng bằng 3.

A) $(Q) : x + 2y - 2z + 8 = 0$. B) $(Q) : x + 2y - 2z + 5 = 0$.
 C) $(Q) : x + 2y - 2z + 1 = 0$. D) $(Q) : x + 2y - 2z + 2 = 0$.

Câu 96. (Cụm 5 Trường Chuyên-ĐBSH-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có bao nhiêu mặt phẳng song song với mặt phẳng $(Q) : x + y + z + 3 = 0$, cách điểm $M(3; 2; 1)$ một khoảng bằng $3\sqrt{3}$ biết rằng tồn tại một điểm $X(a; b; c)$ trên mặt phẳng đó thỏa mãn $a + b + c < -2$?

A) 1. B) Vô số. C) 2. D) 0.

Câu 97. (Chuyên Thái Bình-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(Q_1) : 3x - y + 4z + 2 = 0$ và $(Q_2) : 3x - y + 4z + 8 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng (Q_1) và (Q_2) là:

(A) $(P) : 3x - y + 4z + 10 = 0.$

(B) $(P) : 3x - y + 4z + 5 = 0.$

(C) $(P) : 3x - y + 4z - 10 = 0.$

(D) $(P) : 3x - y + 4z - 5 = 0.$

Câu 98. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Gọi m, n là hai giá trị thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m) : mx + 2y + nz + 1 = 0$ và $(Q_m) : x - my + nz + 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 4x - y - 6z + 3 = 0$. Tính $m + n$.

(A) $m + n = 0.$

(B) $m + n = 2.$

(C) $m + n = 1.$

(D) $m + n = 3.$

Câu 99. (Chuyên KHTN 2019) Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1; 1; 1)$ và $B(0; -2; 2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O . Giả sử (P) có phương trình $x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ và (Q) có phương trình $x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2 + c_1c_2$.

(A) 7.

(B) -9.

(C) -7.

(D) 9.

Câu 100. (Toán Học Và Tuổi Trẻ 2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; 1)$. Mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C không trùng với gốc tọa độ sao cho M là trực tâm tam giác ABC . Trong các mặt phẳng sau, tìm mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) .

(A) $3x + 2y + z + 14 = 0.$

(B) $2x + y + 3z + 9 = 0.$

(C) $3x + 2y + z - 14 = 0.$

(D) $2x + y + z - 9 = 0.$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

1 Phương trình đường thẳng

- Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương (VTCP) $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$

$$\text{có phương trình tham số } \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}).$$

- Điểm M thuộc đường thẳng $d \Leftrightarrow M(x_0 + at_1; y_0 + at_2; z_0 + at_3)$.

- Nếu $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \neq 0$ thì $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ được gọi là phương trình chính tắc của d .

Đặc biệt:

$$\bullet \text{ Trục } Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{i} = (1; 0; 0).$$

$$\bullet \text{ Trục } Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{j} = (0; 1; 0).$$

$$\bullet \text{ Trục } Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ có VTCP } \vec{k} = (0; 0; 1).$$

2 Vị trí tương đối

$$\text{a. Vị trí tương đối của hai đường thẳng } d: \begin{cases} x_0 + a_1t = 0 \\ y_0 + a_2t = 0 \\ z_0 + a_3t = 0 \end{cases} \text{ và } d': \begin{cases} x'_0 + a'_1t' = 0 \\ y'_0 + a'_2t' = 0 \\ z'_0 + a'_3t' = 0. \end{cases}$$

$$\text{PP 1 : Xét hệ phương trình với hai ẩn là } t \text{ và } t' \text{ tức xét } \begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t'. \end{cases}$$

* Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì d và d' cắt nhau.

* Nếu hệ có vô số nghiệm thì $d \equiv d'$.

* Nếu hệ vô nghiệm thì $d \parallel d'$ hoặc d, d' chéo nhau.

· \vec{u}_d và $\vec{u}_{d'}$ cùng phương thì $d \parallel d'$.

· \vec{u}_d và $\vec{u}_{d'}$ không cùng phương thì d, d' chéo nhau.

PP 2 : Xét điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d, M'(x'_0; y'_0; z'_0) \in d'$ và $\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}$.

$$* d \parallel d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d = k\vec{u}_{d'} \\ M \notin d'. \end{cases}$$

$$* d \equiv d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d = k\vec{u}_{d'} \\ M \in d'. \end{cases}$$

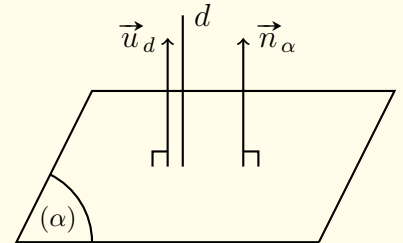
$$* d \text{ cắt } d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_d \text{ không cùng phương với } \vec{u}_{d'} \\ [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases}.$$

$$* d \text{ chéo } d' \Leftrightarrow [\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0.$$

b. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

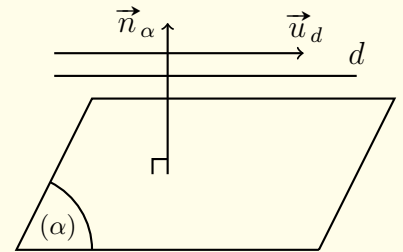
Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = x_0 + a_1t & (1) \\ y = y_0 + a_2t & (2) \\ z = z_0 + a_3t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} (*)$



Lấy (1), (2), (3) thế vào (4)

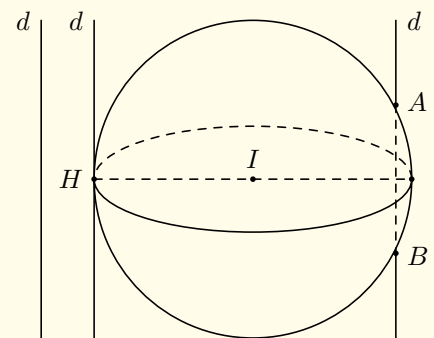
- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α) .
- Nếu (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Nếu (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$.



c. Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S)

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ . Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .

- Nếu $d(I, \Delta) > R$ thì Δ không cắt (S) .
- Nếu $d(I, \Delta) = R$ thì Δ tiếp xúc với (S) tại điểm H .
- Nếu $d(I, \Delta) < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm A, B .



3 Khoảng cách

a. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $d: d(M, d) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}_d]|}{|\vec{u}_d|}$ với $A \in d$ và \vec{u}_d là véc-tơ pháp tuyến của d .

b. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau: $d(d, d') = \frac{|[\vec{u}, \vec{u}'] \cdot \overrightarrow{AB}|}{|[\vec{u}, \vec{u}']|}$ với $A \in d$ và $B \in d'$.

4 Góc

a. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 có VTCP lần lượt là $\vec{u}_1(a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2(a_2; b_2; c_2)$.


$$\cos(d_1, d_2) = \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

b. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng


Cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u}_d = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$ thì

$$\sin \alpha = |\cos(\vec{n}_{(P)}; \vec{u}_d)| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d| |\vec{n}_{(P)}|} = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$


Dạng 3.29. Xác định các yếu tố cơ bản của đường thẳng

 **Ví dụ 1.** Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- (A) $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. (B) $\vec{u} = (2; 1; 0)$. (C) $\vec{u} = (2; 1; 1)$. (D) $\vec{u} = (-1; 2; 0)$.
-
-
-

 **Ví dụ 2.** Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: \frac{x}{2} = y = \frac{z-1}{2}$. Tìm một véc-tơ chỉ phương của d

- (A) $\vec{u} = (1; 6; 0)$. (B) $\vec{u} = (2; 6; 2)$. (C) $\vec{u} = (2; 2; 0)$. (D) $\vec{u} = (2; 1; 2)$.
-
-
-

 **Ví dụ 3.** Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- (A) $\vec{u} = (1; 2; 0)$. (B) $\vec{u} = (1; 0; -2)$. (C) $\vec{u} = (1; 2; -2)$. (D) $\vec{u} = (-1; 2; 0)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 4. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 3t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 5 - t \end{cases}$$
 Đường thẳng d

có một véc-tơ chỉ phương là

- A $\vec{u} = (0; 3; -1)$. B $\vec{u} = (1; 3; -1)$. C $\vec{u} = (1; -3; -1)$. D $\vec{u} = (1; 2; 5)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 5. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng d đi qua $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 2; 3)$. Đường thẳng d có một véc-tơ chỉ phương là

- A $\vec{u} = (-1; 2; 1)$. B $\vec{u} = (2; 1; 0)$. C $\vec{u} = (2; -1; -1)$. D $\vec{u} = (-1; 2; 0)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 6. Trong hệ tọa độ Oxy hai điểm $A(5; -3; 6)$, $B(5; -1; -5)$. Tìm một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB .

- A $\vec{u} = (5; -2; -1)$. B $\vec{u} = (10; -4; 1)$. C $\vec{u} = (0; 2; -11)$. D $\vec{u} = (0; 2; 11)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox, Oy . Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 .

- A** $\vec{u} = (1; 2; 0)$.
 B $\vec{u} = (1; 0; 0)$.
 C $\vec{u} = (-1; 2; 0)$.
 D $\vec{u} = (0; 2; 0)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 8. Trong hệ tọa độ Oxy cho điểm $M(-2; 3; 4)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng $(Oxy), (Oyz)$. Véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 .

- A** $\vec{u} = (2; 3; 0)$.
 B $\vec{u} = (1; 0; 2)$.
 C $\vec{u} = (0; -3; 4)$.
 D $\vec{u} = (-2; 0; 4)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 9. Trong hệ tọa độ Oxy cho hai mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 3 = 0$ và $(Q): x + y - 1 = 0$. Giao tuyến d của (P) và (Q) có một véc-tơ chỉ phương là

- A** $\vec{u} = (1; -1; -3)$.
 B $\vec{u} = (1; 1; 0)$.
 C $\vec{u} = (1; -2; 1)$.
 D $\vec{u} = (1; 1; -3)$.
-
-
-

✍ Ví dụ 10. Trong hệ tọa độ Oxy cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 1 = 0$ và $(Q): x - 2y + z - 5 = 0$. Giao tuyến của (P) và (Q) có một véc-tơ chỉ phương là

- A** $\vec{u} = (1; 3; 5)$.
 B $\vec{u} = (1; -2; 1)$.
 C $\vec{u} = (2; 1; -1)$.
 D $\vec{u} = (-1; 3; -5)$.
-
-
-

.....

✎ Ví dụ 11. Trong hệ tọa độ Oxy đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): 4x - z + 3 = 0$. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

- A $\vec{u} = (4; 1; 3)$.
 B $\vec{u} = (4; 0; -1)$.
 C $\vec{u} = (4; 1; -1)$.
 D $\vec{u} = (4; -1; 3)$.
-
-
-

✎ Ví dụ 12. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(P): -2x + y - z + 1 = 0$. Tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

- A $\vec{u} = (-2; -1; -1)$.
 B $\vec{u} = (2; -1; 1)$.
 C $\vec{u} = (-2; 1; 1)$.
 D $\vec{u} = (-2; -1; 1)$.
-
-
-

✎ Ví dụ 13. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc d ?

- A $N(4; 0; -1)$.
 B $M(1; -2; 3)$.
 C $P(7; 2; 1)$.
 D $N(-2; -4; 7)$.
-
-
-

✎ Ví dụ 14. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d ?

- A $Q(1; 0; 2)$.
 B $N(1; -2; 0)$.
 C $P(1; -1; 3)$.
 D $M(-1; 2; 0)$.
-

.....

Ví dụ 15. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 - 11t \end{cases}$. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d

(A) $M(1; -4; 2)$. (B) $N(1; -4; -9)$. (C) $P(1; 2; 7)$. (D) $Q(2; -2; 7)$.

.....

Ví dụ 16. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases}$. Biết điểm $A(m; m + 2; 1) \in d$, m thuộc khoảng nào dưới đây?

(A) $m \in (-\infty; -4)$. (B) $m \in [-4; 2)$. (C) $m \in (6; +\infty)$. (D) $m \in [-2; 6]$.

.....

Ví dụ 17. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4t \\ z = 0 \end{cases}$. Gọi \vec{u} là một VTCP của d thỏa mãn $|\vec{u}| = 10$. Tọa độ \vec{u} bằng

(A) $\vec{u} = (-3; 4; 0)$. (B) $\vec{u} = (-6; 8; 0)$. (C) $\vec{u} = (6; 8; 0)$. (D) $\vec{u} = (6; -8; 0)$.

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. (Mã 101-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z+1}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- (A) $\vec{u}_2(2; 4; -1)$. (B) $\vec{u}_1(2; -5; 3)$. (C) $\vec{u}_3(2; 5; 3)$. (D) $\vec{u}_4(3; 4; 1)$.

Câu 2. (Mã 102-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{-1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- (A) $\vec{u}_2 = (3; 4; -1)$. (B) $\vec{u}_1 = (2; -5; 2)$. (C) $\vec{u}_3 = (2; 5; -2)$. (D) $\vec{u}_4 = (3; 4; 1)$.

Câu 3. (Mã 103-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- (A) $\vec{u}_3 = (3; -1; -2)$. (B) $\vec{u}_4 = (4; 2; 3)$. (C) $\vec{u}_2 = (4; -2; 3)$. (D) $\vec{u}_1 = (3; 1; 2)$.

Câu 4. (Mã 104-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-4}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- (A) $\vec{u}_2 = (4; -2; 3)$. (B) $\vec{u}_4 = (4; 2; -3)$. (C) $\vec{u}_3 = (3; -1; -2)$. (D) $\vec{u}_1 = (3; 1; 2)$.

Câu 5. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là:

- (A) $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$. (B) $\vec{u}_3 = (2; 1; 3)$. (C) $\vec{u}_4 = (-1; 2; 1)$. (D) $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$.

Câu 6. (Mã 102-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-5} = \frac{z+2}{3}$. Vectơ nào dưới đây là vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

- (A) $\vec{u} = (1; 3; -2)$. (B) $\vec{u} = (2; 5; 3)$. (C) $\vec{u} = (2; -5; 3)$. (D) $\vec{u} = (1; 3; 2)$.

Câu 7. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$ và $B(0; 1; 2)$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB .

- (A) $\vec{d} = (-1; 1; 2)$. (B) $\vec{a} = (-1; 0; -2)$. (C) $\vec{b} = (-1; 0; 2)$. (D) $\vec{c} = (1; 2; 2)$.

Câu 8. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ có một vectơ chỉ phương là

- (A) $\vec{u}_1 = (3; -1; 5)$. (B) $\vec{u}_4 = (1; -1; 2)$. (C) $\vec{u}_2 = (-3; 1; 5)$. (D) $\vec{u}_3 = (1; -1; -2)$.

Câu 9. (Mã 103-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{2}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

- (A) $\vec{u}_4 = (1; 3; 2)$. (B) $\vec{u}_3 = (-2; 1; 3)$. (C) $\vec{u}_1 = (-2; 1; 2)$. (D) $\vec{u}_2 = (1; -3; 2)$.

Câu 10. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là

(A) $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$. (B) $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$. (C) $\vec{u}_3 = (2; 1; 1)$. (D) $\vec{u}_1 = (-1; 2; 1)$.

Câu 11. (Mã 104-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{3}$. Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d ?

(A) $\vec{u}_2 = (1; -2; 3)$. (B) $\vec{u}_3 = (2; 6; -4)$. (C) $\vec{u}_4 = (-2; -4; 6)$. (D) $\vec{u}_1 = (3; -1; 5)$.

Câu 12. (Mã 101-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{1}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d ?

(A) $\vec{u}_4 = (1; 2; -3)$. (B) $\vec{u}_3 = (-1; 2; 1)$. (C) $\vec{u}_1 = (2; 1; -3)$. (D) $\vec{u}_2 = (2; 1; 1)$.

Câu 13. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

(A) $Q(2; -1; 2)$. (B) $M(-1; -2; -3)$. (C) $P(1; 2; 3)$. (D) $N(-2; 1; -2)$.

Câu 14. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi M_1, M_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy . Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng M_1M_2 ?

(A) $\vec{u}_4 = (-1; 2; 0)$. (B) $\vec{u}_1 = (0; 2; 0)$. (C) $\vec{u}_2 = (1; 2; 0)$. (D) $\vec{u}_3 = (1; 0; 0)$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$. Hỏi trong các vectơ sau, đâu không phải là vectơ chỉ phương của d ?

(A) $\vec{u}_1 = (-1; 2; 3)$. (B) $\vec{u}_2 = (3; -6; -9)$. (C) $\vec{u}_3 = (1; -2; -3)$. (D) $\vec{u}_4 = (-2; 4; 3)$.

Câu 16. (Sở Bình Phước 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng nào sau đây nhận $\vec{u} = (2; 1; 1)$ là một vectơ chỉ phương?

(A) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. (B) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$.
(C) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$. (D) $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{1}$.

Câu 17. (Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ nhận véc tơ $\vec{u}(a; 2; b)$ làm véc tơ chỉ phương. Tính $a + b$.

(A) -8 . (B) 8 . (C) 4 . (D) -4 .

Câu 18. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ nào sau đây là tọa

độ của một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 - 6t, (t \in \mathbb{R})? \\ z = 9t \end{cases}$

(A) $\left(\frac{1}{3}; \frac{-1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. (B) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. (C) $(2; 1; 0)$. (D) $(4; -6; 0)$.

Câu 19. (Chuyên KHTN 2019) Vectơ nào sau đây là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$

- (A) $(-2; 1; -3)$. (B) $(-3; 2; 1)$. (C) $(3; -2; 1)$. (D) $(2; 1; 3)$.

Câu 20. (Chuyên Thái Bình 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng $(d) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-7}{1}$ nhận vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương?

- (A) $(-2; -4; 1)$. (B) $(2; 4; 1)$. (C) $(1; -4; 2)$. (D) $(2; -4; 1)$.

Câu 21. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$ véc tơ nào dưới đây là một

véc tơ chỉ phương của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$,

- (A) $\vec{u} = (1; 4; 3)$. (B) $\vec{u} = (1; 4; -2)$. (C) $\vec{u} = (1; 0; -2)$. (D) $\vec{u} = (1; 0; 2)$.

Dạng 3.30. Góc

1. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 có VTCP $\vec{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$ và $\vec{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$ là

$$\cos(d_1, d_2) = \cos \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} \text{ với } 0 < \alpha < 90^\circ.$$

2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng d có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; c)$ và mặt phẳng (P) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$ được xác định bởi công thức

$$\sin \alpha = \left| \cos(\vec{n}_{(P)}, \vec{u}_d) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_{(P)}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_{(P)}|} \text{ với } 0 < \alpha < 90^\circ.$$

Ví dụ 1. Tính góc α giữa hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x+1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-3}$.

- (A) $\alpha = 45^\circ$. (B) $\alpha = 30^\circ$. (C) $\alpha = 60^\circ$. (D) $\alpha = 90^\circ$.

.....

✎ Ví dụ 2. Tính góc α giữa hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = -3t \\ y = -\sqrt{2}t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} =$

$$\frac{z-3}{-1}.$$

(A) $\alpha = 45^\circ.$

(B) $\alpha = 30^\circ.$

(C) $\alpha = 60^\circ.$

(D) $\alpha = 90^\circ.$

.....

✎ Ví dụ 3. Tính góc α tạo bởi hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 \\ z = -2 + t' \end{cases}$.

(A) $\alpha = 45^\circ.$

(B) $\alpha = 30^\circ.$

(C) $\alpha = 60^\circ.$

(D) $\alpha = 90^\circ.$

.....

✎ Ví dụ 4. Gọi d là đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$ và $(Q): x + y - z - 1 = 0$. Tính góc α giữa đường thẳng d và trục Ox .

(A) $\alpha = 45^\circ.$

(B) $\alpha = 30^\circ.$

(C) $\alpha = 60^\circ.$

(D) $\alpha = 90^\circ.$

.....

✎ Ví dụ 5. Hãy tìm tham số thực m để góc giữa hai đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -\sqrt{2}t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

và d' :
$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 1 + \sqrt{2}t' \\ z = 1 + mt' \end{cases}, t' \in \mathbb{R} \text{ bằng } 60^\circ.$$

- (A) 1. (B) -1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{1}{2}$.
-
-
-

✎ Ví dụ 6. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z = 1$.

- (A) $\alpha = 30^\circ$. (B) $\alpha = 120^\circ$. (C) $\alpha = 45^\circ$. (D) $\alpha = 60^\circ$.
-
-
-

✎ Ví dụ 7. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$ và mặt phẳng

$(P): 3x + 4y + 5z - 8 = 0$.

- (A) $\alpha = 30^\circ$. (B) $\alpha = 45^\circ$. (C) $\alpha = 60^\circ$. (D) $\alpha = 90^\circ$.
-
-
-

✎ Ví dụ 8. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng

$(P): 5x + 11y + 2z - 4 = 0$.

- (A) $\alpha = -30^\circ$. (B) $\alpha = 30^\circ$. (C) $\alpha = 60^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

✍ Ví dụ 9. Trong hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z - 4 = 0$.

- (A) $\alpha = 90^\circ$. (B) $\alpha = 30^\circ$. (C) $\alpha = 60^\circ$. (D) $\alpha = 45^\circ$.

✍ Ví dụ 10. Trong hệ tọa độ Oxy cho mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 5z + 2 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x - 2y + 1 = 0$ và $(\beta): x - 2y - 3z = 0$. Hãy tính số đo góc α giữa d và (P) .

- (A) $\alpha = 30^\circ$. (B) $\alpha = 45^\circ$. (C) $\alpha = 60^\circ$. (D) $\alpha = 90^\circ$.

✍ Ví dụ 11. Trong hệ tọa độ Oxy gọi d_1, d_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ trên các mặt phẳng (Oyz) và (Oxz) . Hãy tính số đo góc α giữa d_1 và d_2 .

- (A) $\alpha = 30^\circ$. (B) $\alpha = 45^\circ$. (C) $\alpha = 60^\circ$. (D) $\alpha = 90^\circ$.

✎ Ví dụ 12. Tính số đo góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 1 = 0$ và $(Q): x - y + 2z + 1 = 0$.

- A $\alpha = 30^\circ$.
 B $\alpha = 45^\circ$.
 C $\alpha = 60^\circ$.
 D $\alpha = 90^\circ$.
-
-
-

📄 Dạng 3.31. Khoảng cách

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến một đường thẳng d đi qua điểm A có một véc-tơ chỉ phương \vec{u}_d được xác định bởi công thức

$$d(M, d) = \frac{|[\vec{AM}, \vec{u}_d]|}{|\vec{u}_d|}.$$

- **Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song** là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- **Khoảng cách giữa đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)** là khoảng cách từ một điểm M thuộc đường thẳng d đến mặt phẳng (P) . Cụ thể

Vì $d \parallel (P) \Rightarrow d(M; (P)) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$

với $\begin{cases} M \in d \\ (P): ax + by + cz + d = 0. \end{cases}$

2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Đường thẳng d đi qua điểm A và có véc-tơ \vec{u}_d và d' và đi qua điểm B và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_{d'}$ là $d(d, d') = \frac{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}] \cdot \vec{AB}|}{|[\vec{u}_d, \vec{u}_{d'}]|}.$

✎ Ví dụ 1. Khoảng cách từ điểm $M(2; 0; 1)$ đến đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ bằng

- A $2\sqrt{3}$.
 B $\sqrt{3}$.
 C $\sqrt{2}$.
 D $2\sqrt{5}$.
-

✎ Ví dụ 2. Khoảng cách từ điểm $M(-2; 1; -1)$ đến đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$ bằng

(A) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$.
 (B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.
 (C) 2.
 (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

✎ Ví dụ 3. Khoảng cách từ điểm $M(0; -1; 3)$ đến đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 \\ z = -t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ bằng

(A) $\sqrt{3}$.
 (B) $\sqrt{14}$.
 (C) $\sqrt{6}$.
 (D) $2\sqrt{8}$.

✎ Ví dụ 4. Khoảng cách từ điểm M với $\overrightarrow{OM} = \vec{k}$ đến đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ bằng

(A) $\sqrt{2}$.
 (B) $\sqrt{3}$.
 (C) $\sqrt{6}$.
 (D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

✎ Ví dụ 5. Khoảng cách từ điểm $A(1; -1; 0)$ đến đường thẳng BC với $B(1; 0; -2)$, $C(3; -1; -1)$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{21}}{6}$.
 (B) $\sqrt{7}$.
 (C) $2\sqrt{2}$.
 (D) $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

.....

✎ Ví dụ 6. Cho đường thẳng $d: \frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$ và điểm $A(3; -2; 4)$. Biết điểm $M(a; b; c) \in d$ thỏa mãn $b > 0$ và độ dài đoạn $MA = \sqrt{17}$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) 12.
 (B) 8.
 (C) 2.
 (D) 20.

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tính khoảng cách d giữa Δ và (P) .

- (A) $d = 2$.
 (B) $d = \frac{5}{3}$.
 (C) $d = \frac{2}{3}$.
 (D) $d = \frac{1}{3}$.

Câu 2. (Chuyên Sơn La 2019) Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 2 = 0$ bằng:

- (A) $2\sqrt{3}$.
 (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
 (D) $\sqrt{3}$.

Câu 3. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách

giữa đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 4t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 + t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z = 0$ bằng

- (A) 1.
 (B) 0.
 (C) 2.
 (D) 3.

Câu 4. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng d :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ và mặt phẳng } (P): x - y + 3 = 0. \text{ Tính số đo góc giữa đường thẳng } d \text{ và mặt phẳng } (P).$$

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 120° . (D) 45° .

Câu 5. (Chuyên Trần Đại Nghĩa-TPHCM-2018) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 :

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ và } d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$$

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{12}{5}$. (C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. (D) 3.

Câu 6. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P) : 4x + 3y - z + 1 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+4}{1}$, sin của góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

- (A) $\frac{5}{13}$. (B) $\frac{8}{13}$. (C) $\frac{1}{13}$. (D) $\frac{12}{13}$.

Câu 7. (Chuyên ĐH Vinh -2019) Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha) : x - y + 2z = 0$. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) bằng

- (A) 30° . (B) 60° . (C) 150° . (D) 120° .

Câu 8. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): -\sqrt{3}x + y + 1 = 0$. Tính góc tạo bởi (P) với trục Ox?

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 120° . (D) 150° .

Câu 9. (Bình Phước-2019) Trong không gian Oxyz, khoảng cách từ điểm $M(2; -4; -1)$ tới đường

$$\text{thẳng } \Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \text{ bằng}$$

- (A) $\sqrt{14}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $2\sqrt{14}$. (D) $2\sqrt{6}$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $(d) : \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ và điểm $A(2; -1; 0)$. Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) bằng

- (A) $\sqrt{7}$. (B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{21}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Câu 11. (Chuyên Bắc Giang -2019) Cho $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$, $d' : \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Khi đó

khoảng cách giữa d và d' là

- (A) $\frac{13\sqrt{30}}{30}$. (B) $\frac{\sqrt{30}}{3}$. (C) $\frac{9\sqrt{30}}{10}$. (D) 0.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z + 2 = 0$ bằng

- (A) $2\sqrt{3}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 13. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, khoảng cách giữa đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z + 4 = 0$

- (A) 1. (B) 0. (C) 3. (D) 2.

Dạng 3.32. Viết phương trình đường thẳng

Loại 1. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d , biết d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$.

Ta có: $d: \begin{cases} \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTCP: } \vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases}$.

• Tham số $d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \quad (t \in \mathbb{R}). \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}$

• Chính tắc $d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ với $(a_1 a_2 a_3 \neq 0)$.

Loại 2. Viết phương trình tham số và chính tắc (nếu có) của đường thẳng d đi qua A và B .

Phương pháp. Đường thẳng $d: \begin{cases} \cdot \text{Qua } A \text{ (hay } B) \\ \cdot \text{VTCP: } \vec{u}_d = \vec{AB} \end{cases}$ (dạng 1)

Loại 3. Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và song song với đường thẳng Δ .

Phương pháp. Ta có $d: \begin{cases} \cdot \text{Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \cdot \text{VTCP: } \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta \end{cases}$ (dạng 1).


Loại 4. Viết phương trình đường thẳng d dạng tham số và chính tắc (nếu có), biết d đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Phương pháp. Ta có $d: \begin{cases} \cdot \text{Qua } M \\ \cdot \text{VTCP: } \vec{u}_d = \vec{n}_{(P)} = (a; b; c) \end{cases}$ (dạng 1).

Loại 5. Viết phương trình đường thẳng d qua M và song song với hai mặt phẳng $(P), (Q)$.

Phương pháp. Ta có $d: \begin{cases} \cdot \text{Qua } M \\ \cdot \text{VTCP: } \vec{u}_d = [\vec{n}_P, \vec{n}_Q] \end{cases}$ (dạng 1).

3.15.1 Xác định phương trình đường thẳng cơ bản

 **Ví dụ 1 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2).** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 0; 1)$ và $N(3; 2; -1)$. Đường thẳng MN có phương trình tham số là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 2. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian tọa độ $Oxyz$ phương trình nào dưới

đây là phương trình chính tắc của đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -2 + t \end{cases} ?$$

$$\textcircled{A} \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\textcircled{B} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-2}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}.$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; -2; 1)$, $N(0; 1; 3)$.

Phương trình đường thẳng qua hai điểm M, N là

$$\textcircled{A} \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}.$$

$$\textcircled{B} \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}.$$

$$\textcircled{D} \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}.$$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 1)$ là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -6t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 5. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Phương trình đường thẳng EF là

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7} \quad \textcircled{B} \frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$$

$$\textcircled{C} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3} \quad \textcircled{D} \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 6. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; -6; 2)$. Phương trình tham số của Δ là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 6t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -6 \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 7. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $P(1; 1; -1)$ và $Q(2; 3; 2)$

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{2} \quad \textcircled{B} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}$$

$$\textcircled{C} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1} \quad \textcircled{D} \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$$

.....

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 8. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương

trình đường thẳng đi qua hai điểm $A(1; 2; 3)$ và $B(5; 4; -1)$ là

Ⓐ $\frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Ⓑ $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+3}{-4}$.

Ⓒ $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{4}$.

Ⓓ $\frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

.....

✎ Ví dụ 9. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

Ⓐ $\begin{cases} x = t \\ y = t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = t \end{cases}$

Ⓑ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 0 \end{cases}$

Ⓒ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = t \end{cases}$

Ⓓ $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = 0 \end{cases}$

.....

✎ Ví dụ 10. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$ có đường thẳng có

phương trình tham số là $(d) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + t \end{cases}$. Khi đó phương trình chính tắc của đường thẳng

d là

Ⓐ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

Ⓑ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

Ⓒ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{1}$.

Ⓓ $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

.....

✍ Ví dụ 11. (Chuyên Đại học Vinh-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $E(-1; 0; 2)$ và $F(2; 1; -5)$. Phương trình đường thẳng EF là

(A) $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-7}$.

(B) $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-7}$.

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$.

(D) $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$.

✍ Ví dụ 12. (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số trục Oz là

(A) $z = 0$.

(B) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

✍ Ví dụ 13. (THPT Cẩm Bình 2019) Trong không gian $Oxyz$, trục Ox có phương trình tham số

(A) $x = 0$.

(B) $y + z = 0$.

(C) $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

✎ Ví dụ 14. (Ngô Quyền-Hải Phòng 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}(1; -4; -5)$ là

(A) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$.

(B) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+5}{3}$.

(D) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$

.....

✎ Ví dụ 15. (Chuyên Nguyễn Huệ 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình tham số của đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 3; 2)$ là

(A) $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$

(B) $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

(C) $d: \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$

(D) $d: \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = -3t \end{cases}$

.....

✎ Ví dụ 16. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -1; -2)$.

(A) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$.

(B) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$.

(C) $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

(D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-2}$.

.....

✍ Ví dụ 17. (Sở Bình Thuận 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d đi qua điểm $M(0; -1; 4)$ và nhận vectơ $\vec{u} = (3; -1; 5)$ làm vectơ chỉ phương. Hệ phương trình nào sau đây là phương trình tham số của d ?

- Ⓐ $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$
 Ⓑ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 - t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$
 Ⓒ $\begin{cases} x = 3t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$
 Ⓓ $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = -4 + 5t \end{cases}$

✍ Ví dụ 18. (Sở GD Nam Định-2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua $M(1; 2; -3)$ nhận vectơ $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là

- Ⓐ $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$
 Ⓑ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{1}$
 Ⓒ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$
 Ⓓ $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{1}$

3.15.2 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

✍ Ví dụ 19 (Mã 101 2020 Lần 2). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + 3z + 1 = 0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là

- Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$
 Ⓑ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$
 Ⓒ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$
 Ⓓ $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

✎ Ví dụ 20. (Mã 102-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho $M(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y + 3z - 1 = 0$. Phương trình của đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với (P) là

Ⓐ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$
 Ⓑ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$
 Ⓒ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$
 Ⓓ $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 21. (Mã 103-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -2; 2)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y - 3z + 1 = 0$. Phương trình của đường thẳng qua M và vuông góc với mặt phẳng (P) là

Ⓐ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
 Ⓑ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$
 Ⓒ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$
 Ⓓ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 22. (Mã 104-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; -2)$ và mặt phẳng $(P) : 2x + y - 3z + 1 = 0$. Phương trình của đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) là:

Ⓐ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
 Ⓑ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$
 Ⓒ $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$
 Ⓓ $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 23. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua $A(2; 3; 0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x + 3y - z + 5 = 0$?

- (A)** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
 (B) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - t \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$

.....

✍ Ví dụ 24. (THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : x - y + 2z = 1$. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào vuông góc với (α) .

- (A)** $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$
 (B) $d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$
- (C)** $d_3 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$
 (D) $d_4 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$

.....

✍ Ví dụ 25. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng tọa độ (Oxy) có phương trình tham số là:

- (A)** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
 (B) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$
 (C) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$
 (D) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$

.....

✍ Ví dụ 26. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 2)$ và mặt phẳng $(P) : x - 3y + 2z - 1 = 0$. Tìm phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P) .

(A) $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+2}{2}$.

(B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

(C) $\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}$.

(D) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

.....

✍ Ví dụ 27. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d có phương trình là

(A) $\Delta : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

(B) $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

(C) $\Delta : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

(D) $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

.....

✍ Ví dụ 28. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng đi qua điểm $A(3; 1; 2)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + y + 3z + 5 = 0$ có phương trình là

(A) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$.

(B) $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$.

(C) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{2}$.

(D) $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{3}$.

.....

✍ Ví dụ 29. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P) : x + z - 2 = 0$. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với (P) có phương trình là

- A** $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$
-
-
-

✍ Ví dụ 30. (SGD Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x - 2y + z - 1 = 0$ có dạng

- A** $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{1}$
 B $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{1}$
- C** $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$
 D $d : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z-2}{2}$
-
-
-

✍ Ví dụ 31. (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P) : 2x - 5y + z - 1 = 0$ và $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P) có phương trình là

- A** $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = -t \end{cases}$
-
-
-

✍ Ví dụ 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - y + z + 3 = 0$ và điểm $A(1; -2; 1)$ Phương trình đường thẳng d đi qua A và vuông góc với (P) là

(A) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$

(B) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 4t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

(C) $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$

(D) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$

.....

✍ Ví dụ 33. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1; 2; 1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(P) : x - 2y - z - 1 = 0$ có dạng

(A) $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$

(B) $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$

(C) $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$

(D) $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{-2}$

.....

✍ Ví dụ 34. (Chu Văn An-Hà Nội-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đường thẳng Δ đi qua điểm $A(-2; 4; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có phương trình là

(A) $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-6}{3}$

(B) $\frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{6}$

(C) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+6}{3}$

(D) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+3}{6}$

.....

3.15.3 Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

✍ Ví dụ 35 (Mã 101-2020 Lần 1). Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 1)$, $B(1; 1; 0)$ và $C(3; 4; -1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{-1}$.

B $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

C $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

D $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-1}$.

.....

✍ Ví dụ 36. (Mã 102-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(3; 4; 0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A $\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{1}$.

B $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{1}$.

C $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$.

D $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+3}{-1}$.

.....

✍ Ví dụ 37. (Mã 103-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; 1; 2)$ và $C(2; 3; 1)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là

A $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$.

B $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$.

C $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{3}$.

D $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$.

.....

✍ Ví dụ 38. (Mã 104-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(3; 1; 0)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC có phương trình là:

(A) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$.

(B) $\frac{32}{3}$.

(C) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1}$.

(D) $\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

.....

✍ Ví dụ 39. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

(A) $x - 2y + z = 0$.

(B) $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$

(C) $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

(D) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.

.....

✍ Ví dụ 40. (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -2; -3)$; $B(-1; 4; 1)$ và đường thẳng $d : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn AB và song song với d ?

(A) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$.

(B) $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

(D) $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{2}$.

.....

✍ Ví dụ 41. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P) : x + y + z + 1 = 0$, $(Q) : x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

A $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 42. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; 1; 2)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua A và song song với đường thẳng BC ?

A $\begin{cases} x = -2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$
 B $\frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

C $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$.
 D $x - 2y + z = 0$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 43. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y - 1 = 0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

A $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$

.....

.....

✎ Ví dụ 44. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-2; 3; -1)$, $N(-1; 2; 3)$ và $P(2; -1; 1)$. Phương trình đường thẳng d đi qua M và song song với NP là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

.....

✎ Ví dụ 45. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng đi qua điểm $M(2; 1; -1)$ và song song với đường thẳng d có phương trình là

$$\textcircled{A} \frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \textcircled{B} \frac{x}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+3}{1}$$

$$\textcircled{C} \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \textcircled{D} \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

.....

✎ Ví dụ 46. (Nho Quan A-Ninh Bình-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 0; 1)$, $B(-1; -2; 0)$, $C(2; 1; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua C và song song với AB có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t, (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t, (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

$$\textcircled{C} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t, (t \in R) \\ z = -1 - t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t, (t \in R) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

.....

✍ Ví dụ 47. (Chu Văn An-Hà Nội-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + z - 1 = 0$, $(\beta) : 2x + y - z = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ có phương trình là

(A) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-2}$.

(B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}$.

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

(D) $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}$.

Dạng 3 Bài toán liên quan điểm (hình chiếu) thuộc đường, giao điểm đường với mặt phẳng

✍ Ví dụ 48. (Đề Minh Họa 2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{3}$?

(A) $P(-1; 2; 1)$.

(B) $Q(1; -2; -1)$.

(C) $N(-1; 3; 2)$.

(D) $P(1; 2; 1)$.

✍ Ví dụ 49. (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$. Điểm nào sau đây thuộc d ?

(A) $P(1; 2; -1)$.

(B) $M(-1; -2; 1)$.

(C) $N(2; 3; -1)$.

(D) $Q(-2; -3; 1)$.

✍ Ví dụ 50. (Mã 101 2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

(A) $Q(4; -2; 1)$.

(B) $N(4; 2; 1)$.

(C) $P(2; 1; -3)$.

(D) $M(2; 1; 3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 51. (Mã 102-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-4}{2} = \frac{z-2}{-5} = \frac{z+1}{1}$. Điểm nào sau đây thuộc d ?

(A) $N(4; 2; -1)$. (B) $Q(2; 5; 1)$. (C) $M(4; 2; 1)$. (D) $P(2; -5; 1)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 52. (Mã 103-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+2}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

(A) $N(3; -1; -2)$. (B) $Q(2; 4; 1)$. (C) $P(2; 4; -1)$. (D) $M(3; 1; 2)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 53. (Mã 104-2020 Lần 2) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+5}{-1}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

(A) $M(3; 1; 5)$. (B) $N(3; 1; -5)$. (C) $P(2; 2; -1)$. (D) $Q(2; 2; 1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 54. (Mã đề 104 BGD & ĐT NĂM 2018) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới

đây thuộc đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases} ?$

A $N(1; 5; 2)$.

B $Q(-1; 1; 3)$.

C $M(1; 1; 3)$.

D $P(1; 2; 5)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 55. (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng

$d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2}$.

A $N(2; -1; 2)$.

B $Q(-2; 1; -2)$.

C $M(-2; -2; 1)$.

D $P(1; 1; 2)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 56. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ đi qua điểm nào dưới đây?

A $M(1; 3; -1)$.

B $M(-3; 5; 3)$.

C $M(3; 5; 3)$.

D $M(1; 2; -3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 57. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$.

Đường thẳng $d \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases}$ đi qua điểm nào sau đây?

- Ⓐ $K(1; -1; 1)$. Ⓑ $E(1; 1; 2)$. Ⓒ $H(1; 2; 0)$. Ⓓ $F(0; 1; 2)$.
-
-
-

✎ Ví dụ 58. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$?

- Ⓐ $Q(-2; 1; -3)$. Ⓑ $P(2; -1; 3)$. Ⓒ $M(-1; 1; -2)$. Ⓓ $N(1; -1; 2)$.
-
-
-

✎ Ví dụ 59. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1; 0; 2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- Ⓐ $P(2; -1; 1)$. Ⓑ $Q(0; -1; 1)$. Ⓒ $N(0; -1; 2)$. Ⓓ $M(-1; -1; 1)$.
-
-
-

✎ Ví dụ 60. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

- Ⓐ $Q(-1; 1; 3)$. Ⓑ $P(1; 2; 5)$. Ⓒ $N(1; 5; 2)$. Ⓓ $M(1; 1; 3)$.

.....

✍ Ví dụ 61. Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}$ đi qua điểm nào dưới đây?

- (A)** $Q(2; -1; -2)$. **(B)** $M(1; -2; -3)$. **(C)** $P(-1; 2; -3)$. **(D)** $N(2; -1; -2)$.

.....

✍ Ví dụ 62. (KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-3}{-5}$. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau:

- (A)** $C(-3; 4; 5)$. **(B)** $D(3; -4; -5)$. **(C)** $B(-1; 2; -3)$. **(D)** $A(1; -2; 3)$.

.....

✍ Ví dụ 63. (Sở Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; -2; 1)$. Đường thẳng nào sau đây đi qua A ?

(A) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

(C) $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$.

(B) $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$.

(D) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

.....

✎ Ví dụ 64. Trong không gian $Oxyz$, điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$?

- A $Q(-1; 1; 3)$.
 B $P(1; 2; 5)$.
 C $N(1; 5; 2)$.
 D $M(1; 1; 3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 65. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-4}$. Điểm nào sau đây không thuộc đường thẳng d ?

- A $P(7; 2; 1)$.
 B $Q(-2; -4; 7)$.
 C $N(4; 0; -1)$.
 D $M(1; -2; 3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 66. (THPT Cẩm Bình 2019) Giao điểm của mặt phẳng $(P) : x + y - z - 2 = 0$

và đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$

- A $(1; 1; 0)$.
 B $(0; 2; 4)$.
 C $(0; 4; 2)$.
 D $(2; 0; 3)$.

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 67. (Thpt Vĩnh Lộc-Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng

$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y - 3z + 2 = 0$. Tìm tọa độ của điểm A là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- A $A(3; 5; 3)$.
 B $A(1; 3; 1)$.
 C $A(-3; 5; 3)$.
 D $A(1; 2; -3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 68. (Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x - 12}{4} = \frac{y - 9}{3} = \frac{z - 1}{1}$ là điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Giá trị tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- A 1.
 B 2.
 C 5.
 D -2.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 69. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(-4; 5; 2)$ lên mặt phẳng $(P) : y + 1 = 0$ là điểm có tọa độ

- A $(-4; -1; 2)$.
 B $(-4; 1; 2)$.
 C $(0; -1; 0)$.
 D $(0; 1; 0)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 70. (Chuyên Bắc Giang 19) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x - 12}{4} = \frac{y - 9}{3} = \frac{z - 1}{1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) .

- A $(1; 0; 1)$.
 B $(0; 0; -2)$.
 C $(1; 1; 6)$.
 D $(12; 9; 1)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 71. (Kon Tum-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -3 + t, \\ z = 1 - t \end{cases}$$

giao điểm của d với mặt phẳng (Oxy) có tọa độ là

- (A)** $(4; -3; 0)$. **(B)** $(2; -2; 0)$. **(C)** $(0; -1; -1)$. **(D)** $(-2; 0; -2)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 72. (Kinh Môn-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 + t. \\ z = 3 + t \end{cases}$$

độ giao điểm của đường thẳng d với mặt phẳng (ABC) . Tính tổng $S = a + b - c$.

- (A)** 6. **(B)** 5. **(C)** -7. **(D)** 11.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 73. (Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d : $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 5 = 0$. Tìm tọa độ giao điểm M của đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

- (A)** $M(-1; 0; 4)$. **(B)** $M(-5; -2; 2)$. **(C)** $M(0; 0; 5)$. **(D)** $M(-3; -1; 3)$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 74. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 3; 5)$ Tìm tọa độ điểm A' là hình chiếu vuông góc của A lên trục Oy

- A $A'(2; 0; 0)$.
 B $A'(0; 3; 0)$.
 C $A'(2; 0; 5)$.
 D $A'(0; 3; 5)$.

.....

.....

.....

📄 Dạng 3.33. Xác định phương trình mặt phẳng có yếu tố đường thẳng

Loại 1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với đường thẳng $d \equiv AB$.

Phương pháp. $(P) : \begin{cases} \cdot \text{ Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \cdot \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \end{cases}$

Loại 2. Viết phương trình mặt phẳng qua M và chứa đường thẳng d với $M \notin d$.

- Bước 1: Chọn điểm $A \in d$ và một VTCP \vec{u}_d Tính $[\overrightarrow{AM}, \vec{u}_d]$.

- Bước 2: Phương trình $mp(P) \begin{cases} \text{qua } M \\ \text{VTPT } \vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_d] \end{cases}$

✍ Ví dụ 1 (Mã 101-2020 Lần 1). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-1}$. Mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng d có phương trình là

- A $3x + 2y - z + 1 = 0$.
 B $2x - 2y + 3z - 17 = 0$.
 C $3x + 2y - z - 1 = 0$.
 D $2x - 2y + 3z + 17 = 0$.

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 2 (Đề Minh Họa 2020 Lần 1). Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $M(1; 1; -1)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ có phương trình là

(A) $2x + 2y + z + 3 = 0.$

(B) $x - 2y - z = 0.$

(C) $2x + 2y + z - 3 = 0.$

(D) $x - 2y - z - 2 = 0.$

.....

✍ Ví dụ 3 (Đề Tham Khảo 2020 Lần 2). Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ có phương trình là

(A) $3x + y - z - 7 = 0.$

(B) $x + 4y - 2z + 6 = 0.$

(C) $x + 4y - 2z - 6 = 0.$

(D) $3x + y - z + 7 = 0.$

.....

✍ Ví dụ 4 (Mã 102-2020 Lần 1). Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(1; 1; -2)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

(A) $x + 2y - 3z - 9 = 0.$

(B) $x + y - 2z - 6 = 0.$

(C) $x + 2y - 3z + 9 = 0.$

(D) $x + y - 2z + 6 = 0.$

.....

✍ Ví dụ 5. (Mã 103-2020 Lần 1) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2; -1; 2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{1}$. Mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với d có phương trình là

(A) $2x + 3y + z - 3 = 0$.

(B) $2x - y + 2z - 9 = 0$.

(C) $2x + 3y + z + 3 = 0$.

(D) $2x - y + 2z + 9 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 6. (Mã 104-2020 Lần 1) Trong gian gian $Oxyz$, cho điểm $M(3; -2; 2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$. Mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d có phương trình là

(A) $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

(B) $3x - 2y + 2z - 17 = 0$.

(C) $3x - 2y + 2z + 17 = 0$.

(D) $x + 2y - 2z - 5 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 7. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1; 2; -2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{3}$ có phương trình là

(A) $2x + y + 3z + 2 = 0$.

(B) $x + 2y + 3z + 1 = 0$.

(C) $2x + y + 3z - 2 = 0$.

(D) $3x + 2y + z - 5 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 8. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3; -1; 1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}$?

(A) $3x + 2y + z - 8 = 0$.

(B) $3x - 2y + z + 12 = 0$.

(C) $3x - 2y + z - 12 = 0$.

(D) $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 9. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua $M(1; -1; 2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$.

(A) $2x - y + 3z + 9 = 0$.

(B) $2x + y + 3z - 9 = 0$.

(C) $2x - y + 3z - 9 = 0$.

(D) $2x - y + 3z - 6$.

.....

✍ Ví dụ 10. (THPT Yên Khánh-Ninh Bình-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Mặt phẳng (P) vuông góc với d có một vectơ pháp tuyến là:

(A) $\vec{n} = (1; 2; 3)$.

(B) $\vec{n} = (2; -1; 2)$.

(C) $\vec{n} = (1; 4; 1)$.

(D) $\vec{n} = (2; 1; 2)$.

.....

✍ Ví dụ 11. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ và vuông góc với đường thẳng $(d): \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ là:

(A) $x + y + z + 1 = 0$.

(B) $x - y - z = 1$.

(C) $x + y + z = 1$.

(D) $x + y + z = 0$.

✎ Ví dụ 12. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(0; 1; 0)$ và chứa đường thẳng $(\Delta) : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ có phương trình là:

(A) $x - y + z + 1 = 0.$

(B) $3x - y + 2z + 1 = 0.$

(C) $x + y + z - 1 = 0.$

(D) $3x + y - 2z - 1 = 0.$

✎ Ví dụ 13. (Chuyên Hưng Yên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{1}$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng d .

(A) $(T) : x + y + 2z + 1 = 0.$

(B) $(P) : x - 2y + z + 1 = 0.$

(C) $(Q) : x - 2y - z + 1 = 0.$

(D) $(R) : x + y + z + 1 = 0.$

✎ Ví dụ 14. (Đề Thi Công Bằng KHTN 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0; -3; 1)$ và đường thẳng $d : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là:

(A) $3x - 2y + z + 5 = 0.$

(B) $3x - 2y + z - 7 = 0.$

(C) $3x - 2y + z - 10 = 0.$

(D) $3x - 2y + z - 5 = 0.$

.....

✎ Ví dụ 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(3; -1; 1)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng

$$\Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-3}{1}?$$

(A) $x - 2y + 3z + 3 = 0.$

(B) $3x + 2y + z - 8 = 0.$

(C) $3x - 2y + z + 12 = 0.$

(D) $3x - 2y + z - 12 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 16. (Chuyên-KHTN-Hà Nội-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(0; -3; 1)$ và đường thẳng $d : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng d là

(A) $3x - 2y + z + 5 = 0.$

(B) $3x - 2y + z - 7 = 0.$

(C) $3x - 2y + z - 10 = 0.$

(D) $3x - 2y + z - 5 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 17. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 3; 2)$ và đường

thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có

phương trình nào dưới đây?

(A) $2x - y + 2z + 1 = 0.$

(B) $x + y - z = 0.$

(C) $-3x - 2y - 10z + 23 = 0.$

(D) $2x - y + 3z + 4 = 0.$

.....

.....

.....

✍ Ví dụ 18. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 0)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Tìm phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm A và vuông góc với d

(A) $2x + y + z - 4 = 0$.

(B) $x + 2y - z + 4 = 0$.

(C) $2x - y - z + 4 = 0$.

(D) $2x + y - z - 4 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 19. (THPT Thuận Thành 3-Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ

$Oxyz$, cho điểm $A(-1; 3; 2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Mặt phẳng (P)

chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

(A) $2x - y + 2z + 1 = 0$.

(B) $x + y - z = 0$.

(C) $-3x - 2y - 10z + 23 = 0$.

(D) $2x - y + 3z + 4 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 20. Trong không gian $T = 4$, mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1; 2; 0)$ và vuông góc với đường thẳng $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ có phương trình là

(A) $2x + y - z - 4 = 0$.

(B) $2x - y - z + 4 = 0$.

(C) $2x + y + z - 4 = 0$.

(D) $2x + y - z + 4 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 21. Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(2; -3; 0)$ và vuông góc với đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-3}{1} = \frac{4-y}{2} = \frac{z-7}{5}$.

(A) $x - 2y + 5z - 10 = 0$.

(B) $x - 2y + 5z - 8 = 0$.

(C) $2x - 3y + 4 = 0$.

(D) $x + 2y + 5z + 4 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 22. (Bắc Giang-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với d có phương trình là?

(A) $(P) : x + y + 2z = 0$.

(B) $(P) : x - y - 2z = 0$.

(C) $(P) : x - y + 2z = 0$.

(D) $(P) : x - 2y - 2 = 0$.

.....

✍ Ví dụ 23. (Chuyên Vĩnh Phúc-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2; 0; -1)$ và vuông góc với d .

(A) $(P) : x - y - 2z = 0$.

(B) $(P) : x - 2y - 2 = 0$.

(C) $(P) : x + y + 2z = 0$.

(D) $(P) : x - y + 2z = 0$.

.....

✍ Ví dụ 24. (SGD&ĐT Đồng Tháp-2018) Trong không gian với hệ tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d) : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2}$ và điểm $A(1; -2; 3)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng (d) có phương trình là:

Ⓐ $x - y + 2z - 9 = 0.$

Ⓑ $x - 2y + 3z - 14 = 0.$

Ⓒ $x - y + 2z + 9 = 0.$

Ⓓ $x - 2y + 3z - 9 = 0.$

.....

.....

.....

✎ Ví dụ 25. (THPT Thái Phiên-Hải Phòng 2018) Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(0; 0; 3)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$. Phương trình mặt phẳng đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d là

Ⓐ $2x - y + z - 3 = 0.$

Ⓑ $2x - y + 2z - 6 = 0.$

Ⓒ $2x - y + z + 3 = 0.$

Ⓓ $2x - y - z + 3 = 0.$

.....

.....

.....

5 CÁC DẠNG BÀI TẬP VẬN DỤNG (MỨC 7-8 ĐIỂM)

Dạng 3.34. Xác định phương trình đường thẳng

Loại 1: Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố vuông góc

Câu 1. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; 3)$ và đường thẳng $d : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Ox có phương trình là

Ⓐ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$. Ⓒ $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$.

Câu 2. (Mã 102-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(3; 2; 0)$ và $D(1; 1; 3)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (BCD) có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 4t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

Câu 3. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$; $d_2 : \frac{x-5}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 5 = 0$. Đường thẳng vuông góc với (P) , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \textcircled{B} \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3} \\ \textcircled{C} \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+2}{3} \quad \textcircled{D} \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$$

Câu 4. (Mã 101-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 0)$, $B(2; 0; 2)$, $C(2; -1; 3)$, $D(1; 1; 3)$. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với mặt phẳng (ABD) có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = -4 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = -2 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 + 3t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Câu 5. (Mã 104-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -1; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(3; -2; 0)$, $D(1; 1; -3)$. Đường thẳng đi qua D và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Câu 6. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 3)$ và đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{2}$. Đường thẳng đi qua A , vuông góc với d và cắt trục Oy có phương trình là.

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 3t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Câu 7. (Mã 103-2019) Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(1; 2; -1)$ và $D(2; 0; -2)$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với (BCD) có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Câu 8. (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

$$\textcircled{\text{A}} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\textcircled{\text{C}} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\textcircled{\text{B}} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}.$$

$$\textcircled{\text{D}} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Câu 9. (Đề Tham Khảo 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$. Đường thẳng qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) có phương trình là:

$$\textcircled{\text{A}} \frac{x+\frac{2}{9}}{1} = \frac{y-\frac{2}{9}}{-2} = \frac{z+\frac{5}{9}}{2}.$$

$$\textcircled{\text{B}} \frac{x+1}{1} = \frac{y-8}{-2} = \frac{z-4}{2}.$$

$$\textcircled{\text{C}} \frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y-\frac{5}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{11}{6}}{2}.$$

$$\textcircled{\text{D}} \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{2}.$$

Câu 10. (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{2}$ và mặt phẳng $(P) : x + y - z + 1 = 0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đồng thời cắt và vuông góc với d có phương trình là:

$$\textcircled{\text{A}} \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4t \\ z = -3t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{B}} \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{C}} \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{D}} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + 6t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Câu 11. (Mã 123 2017) Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $M(-1; 1; 3)$ và hai đường thẳng $\Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta' : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M và vuông góc với Δ và Δ' .

$$\textcircled{\text{A}} \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{B}} \begin{cases} x = -t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{C}} \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{D}} \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}.$$

Câu 12. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P) : x - 2y - z + 3 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) đồng thời cắt và vuông góc với Δ có phương trình là

$$\textcircled{\text{A}} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{B}} \begin{cases} x = -3 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{C}} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 + 3t \end{cases}.$$

$$\textcircled{\text{D}} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases}.$$

Câu 13. (Mã 123 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 :$

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}, d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2} \text{ và mặt phẳng } (P) : 2x + 2y - 3z = 0$$

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng đi qua giao điểm của d_1 và (P) , đồng thời vuông góc với d_2 ?

(A) $2x - y + 2z + 13 = 0.$

(B) $2x + y + 2z - 22 = 0.$

(C) $2x - y + 2z - 13 = 0.$

(D) $2x - y + 2z + 22 = 0.$

Câu 14. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai -2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$, $d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Phương trình đường thẳng qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 là

(A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}.$

(B) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{4}.$

(C) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}.$

(D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$

Câu 15. (Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 1)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M , vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

(A) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}.$

(B) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}.$

(C) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}.$

(D) $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}.$

Câu 16. (Kinh Môn-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-1}$, $d_2 : \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{2}$. Phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt thẳng d_2 .

(A) $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{2}.$

(B) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{3}.$

(C) $\frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-3}{3}.$

(D) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}.$

Câu 17. (Hội 8 trường chuyên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; -1; 2)$ và hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 4t \\ z = 6 + 6t \end{cases}$, $d' : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-5}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M , vuông góc với d và d' ?

(A) $\frac{x-1}{17} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-2}{9}.$

(B) $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z+2}{9}.$

(C) $\frac{x-1}{17} = \frac{y+1}{9} = \frac{z-2}{14}.$

(D) $\frac{x-1}{14} = \frac{y+1}{17} = \frac{z-2}{9}.$

Câu 18. Cho hai đường thẳng $(d_1) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ và $(d_2) : \frac{x}{1} = \frac{y-7}{-3} = \frac{z}{-1}$. Đường thẳng (Δ) là đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) . Phương trình nào sau đây là phương trình của (Δ)

(A) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}.$

(B) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-2}.$

(D) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+3}{-2}.$

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 3x + y + z = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+3}{2}$. Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) , cắt và vuông góc với d . Phương trình nào sau đây là phương trình tham số của Δ ?

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 3 - 5t \\ z = 3 - 7t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 5 - 5t \\ z = 4 - 7t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 - 5t \\ z = -4 - 7t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - 5t \\ z = 2 - 7t \end{cases}$$

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -1; 3)$ và hai đường thẳng: $d_1 : \frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}$, $d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A , vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 .

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{-1} \quad \textcircled{B} \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5} \\ \textcircled{C} \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1} \quad \textcircled{D} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{3}$$

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-3}$ và mặt phẳng $(P) : x - y + 2z - 6 = 0$. Đường thẳng nằm trong (P) cắt và vuông góc với d có phương trình là?

$$\textcircled{A} \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{7} = \frac{z+5}{3} \quad \textcircled{B} \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-5}{3} \\ \textcircled{C} \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{7} = \frac{z+1}{3} \quad \textcircled{D} \frac{x+2}{1} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-1}{3}$$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + 3z - 7 = 0$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+2}{-4}$; $d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng $d_1; d_2$ có phương trình là

$$\textcircled{A} \frac{x+7}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{3} \quad \textcircled{B} \frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \\ \textcircled{C} \frac{x+4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3} \quad \textcircled{D} \frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và $d_2 :$

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases} \quad \text{và mặt phẳng } (P) : x + y + z - 1 = 0. \text{ Đường thẳng vuông góc với } (P) \text{ cắt } d_1$$

và d_2 có phương trình là

$$\textcircled{A} \frac{x + \frac{13}{5}}{1} = \frac{y - \frac{9}{5}}{1} = \frac{z - \frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} \quad \textcircled{B} \frac{x - \frac{1}{5}}{1} = \frac{y + \frac{3}{5}}{1} = \frac{z + \frac{2}{5}}{1} \\ \textcircled{C} \frac{x - \frac{7}{5}}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - \frac{2}{5}}{1} \quad \textcircled{D} \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

Câu 24. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(0; 1; 1)$,

vuông góc với đường thẳng $(d_1) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \ (t \in \mathbb{R}) \end{cases}$ và cắt đường thẳng $(d_2) : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

Phương trình của (Δ) là?

A $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(1; 0; 2)$ và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt d .

A $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$
 B $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$

C $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$
 D $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$

Câu 26. (Chuyên Lê Quý Đôn-Điện Biên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 0; 1)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$. Đường thẳng đi qua M , vuông góc với d và cắt Oz có phương trình là

A $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases}$

Câu 27. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ có phương trình

A $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{4}$
 B $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$

C $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}$
 D $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$

Câu 28. (Chuyên Nguyễn Huệ- 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x + y - 2z + 9 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$. Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $A(0; -1; 4)$, vuông góc với d và nằm trong (P) là:

A $\Delta : \begin{cases} x = 5t \\ y = -1 + t \\ z = 4 + 5t \end{cases}$
 B $\Delta : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$
 C $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \\ z = 4 + t \end{cases}$
 D $\Delta : \begin{cases} x = -t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$

Câu 29. (Đại học Hồng Đức -Thanh Hóa 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + 2y + z - 4 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{3}$. Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , đồng thời cắt và vuông góc với đường thẳng d là

A $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2}$
 B $\frac{x+1}{5} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{3}$

C $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}$
 D $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$

Câu 30. (Sở Hà Nam-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : x + y - 3z - 2 = 0$. Gọi d' là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) , cắt và vuông góc với d . Đường thẳng d' có phương trình là

- A** $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{1}$. **B** $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{1}$.
 C $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{1}$. **D** $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 31. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$ và $\Delta_2 : \frac{x+2}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$. Đường thẳng chứa đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2 đi qua điểm nào sau đây?

- A** $M(0; -2; -5)$. **B** $N(1; -1; -4)$. **C** $P(2; 0; 1)$. **D** $Q(3; 1; -4)$.

Loại 2: Xác định phương trình đường thẳng khi biết yếu tố song song

Câu 32. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng $(P) : x + y + z + 1 = 0$, $(Q) : x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q) ?

- A** $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$. **B** $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases}$. **C** $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. **D** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$.

Câu 33. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P) .

- A** $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. **B** $\Delta : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-4}{-2}$.
 C $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{-2}$. **D** $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+4}{2}$.

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z + 3 = 0$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$; $d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$. Xét các điểm A, B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P) . Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

- A** Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-9; 8; -5)$.
 B Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-5; 9; 8)$.
 C Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -5)$.
 D Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 5; -2)$.

Câu 35. (THPT Lương Văn Can-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(3; 2; -4)$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 2y - 3z - 7 = 0$, đường thẳng $d : \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Phương trình nào sau

đây là phương trình đường thẳng Δ đi qua A , song song (P) và cắt đường thẳng d ?

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 3 + 11t \\ y = 2 - 54t \\ z = -4 + 47t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 3 + 54t \\ y = 2 + 11t \\ z = -4 - 47t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 3 + 47t \\ y = 2 + 54t \\ z = -4 + 11t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 3 - 11t \\ y = 2 - 47t \\ z = -4 + 54t \end{cases}$$

Câu 36. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; -3; 4)$, đường thẳng $d: \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng (P): $2x + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M vuông góc với d và song song với (P).

$$\textcircled{A} \Delta: \frac{x}{11} = \frac{y}{3} - 1 = \frac{z}{4} - 2. \quad \textcircled{B} \Delta: \frac{x}{1} - 1 = \frac{y}{3} - 1 = \frac{z}{4} - 2.$$

$$\textcircled{C} \Delta: \frac{x}{-11} = \frac{y}{31} = \frac{z}{-4} - 2. \quad \textcircled{D} \Delta: \frac{x}{-11} = \frac{y}{3} - 1 = \frac{z}{42}.$$

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; -2; 3)$ và hai mặt phẳng (P): $x + y + z + 1 = 0$, (Q): $x - y + z - 2 = 0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua A , song song với (P) và (Q)?

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3 - t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Câu 38. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 0; -1)$ và mặt phẳng (P): $x + y - 1 = 0$. Đường thẳng đi qua A đồng thời song song với (P) và mặt phẳng (Oxy) có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -t \\ z = -1 \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

Câu 39. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, viết phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(3; -1; 5)$ và cùng song song với hai mặt phẳng (P): $x - y + z - 4 = 0$, (Q): $2x + y + z + 4 = 0$.

$$\textcircled{A} d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-3}. \quad \textcircled{B} \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{-3}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{-3}. \quad \textcircled{D} \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-3}.$$

Câu 40. (Chu Văn An-Hà Nội-2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng (α): $x - 2y + z - 1 = 0$, (β): $2x + y - z = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với cả hai mặt phẳng (α), (β) có phương trình là

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-2}. \quad \textcircled{B} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}.$$

$$\textcircled{C} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}. \quad \textcircled{D} \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

Câu 41. Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$. Đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , song song với mặt phẳng (Oxy) và vuông góc với

AB.

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = \frac{13}{98} - t \\ y = -\frac{40}{49} + 2t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = \frac{13}{98} - 2t \\ y = \frac{40}{49} + t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = \frac{13}{98} + 2t \\ y = \frac{40}{49} + t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = -\frac{13}{98} - t \\ y = \frac{40}{49} + 2t \\ z = \frac{135}{98} \end{cases}$$

Câu 42. (THPT Cẩm Bình 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) :

$$x - 2z - 6 = 0 \text{ và đường thẳng } d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 - t \end{cases}. \text{Viết phương trình đường thẳng } \Delta \text{ nằm trong}$$

mặt phẳng (α) cắt đồng thời vuông góc với d

$$\textcircled{A} \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+2}{1}. \quad \textcircled{B} \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{1}. \\ \textcircled{C} \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{1}. \quad \textcircled{D} \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$; $d_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+4}{-1}$ và $d_3 : \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}$. Đường thẳng song song với d_3 , cắt d_1 và d_2 có phương trình là

$$\textcircled{A} \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}. \quad \textcircled{B} \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}. \\ \textcircled{C} \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}. \quad \textcircled{D} \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}.$$

Câu 44. (SGD Cần Thơ 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $d_1 : \frac{x-3}{2} =$

$$\frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}, d_2 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -2t \\ z = -4 - t \end{cases}, d_3 : \frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{6}. \text{ Đường thẳng song song với } d_3 \text{ và cắt}$$

đồng thời d_1 và d_2 có phương trình là:

$$\textcircled{A} \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{6}. \quad \textcircled{B} \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{6}. \\ \textcircled{C} \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{6}. \quad \textcircled{D} \frac{x-3}{-4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-6}.$$

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $M(1; 3; -2)$, đồng thời song song với giao tuyến của hai mặt phẳng $(P) : x + y - 3 = 0$ và $(Q) : 2x - y + z - 3 = 0$.

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = -2 - 3t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -2 - 3t \end{cases}$$

Câu 46. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{2}$, mặt phẳng $(P) : 2x + y + 2z - 5 = 0$ và điểm $A(1; 1; -2)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

đi qua điểm A song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với d là:

(A) $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

(B) $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$.

(C) $\Delta : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-3}$.

(D) $\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{2}$.

Câu 47. (SP Đồng Nai-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y - z + 9 = 0$, đường thẳng $d : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 2; -1)$ Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A cắt d và song song với mặt phẳng (P) .

(A) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

(B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

(C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$.

(D) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.

Câu 48. (THPT Thăng Long-Hà Nội- 2019) Trong không gian, cho mặt phẳng $(P) : x + y - z - 4 = 0$ và điểm $A(2; -1; 3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P) , biết Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b; c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz . Tính $\frac{a}{c}$.

(A) $\frac{a}{c} = 2$.

(B) $\frac{a}{c} = -2$.

(C) $\frac{a}{c} = -\frac{1}{2}$.

(D) $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$.

Loại 3: Phương trình đường thẳng hình chiếu, đối xứng

Câu 49. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-3}{4}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng $x + 3 = 0$?

(A) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -6 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 - t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x = -3 \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

Câu 50. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

(A) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$.

(B) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

(C) $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

(D) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 51. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha) : 2x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x+4}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-2}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng d' đối xứng với đường thẳng d qua mặt phẳng (α) .

(A) $\frac{x}{11} = \frac{y+5}{-17} = \frac{z-4}{-2}$.

(B) $\frac{x}{11} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z+4}{-2}$.

(C) $\frac{x}{11} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-4}{-2}$.

(D) $\frac{x}{11} = \frac{y-5}{-17} = \frac{z-4}{2}$.

Câu 52. (Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P) , d' nhận $\vec{u} = (a; b; 2019)$ là một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b)$

- (A) 2019. (B) -2019. (C) 2018. (D) -2020.

Câu 53. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+6=0$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (α) có phương trình là

- (A) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{5}$. (B) $\frac{x}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{5}$.
 (C) $\frac{x+5}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$. (D) $\frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-1}{5}$.

Câu 54. (KTNL GV Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên (P) .

- (A) $d': \frac{x+2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{2}$. (B) $d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{-5} = \frac{z-1}{2}$.
 (C) $d': \frac{x+2}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$. (D) $d': \frac{x-2}{7} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{2}$.

Câu 55. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P) ; d' nhận $\vec{u} = (a; b; 2019)$ làm một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $a+b$.

- (A) 2019. (B) -2019. (C) 2018. (D) -2020.

Câu 56. (THPT Đông Sơn 1-Thanh Hóa 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu của d trên (P) có phương trình là đường thẳng d' . Trong các điểm sau điểm nào thuộc đường thẳng d' :

- (A) $M(2; 5; -4)$. (B) $P(1; 3; -1)$. (C) $N(1; -1; 3)$. (D) $Q(2; 7; -6)$.

Câu 57. (THPT Phan Bội Châu-Nghệ An-2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$. Đường thẳng d' là hình chiếu của d theo phương Ox lên (P) , d' nhận $\vec{u} = (a; b; 2019)$ là một vectơ chỉ phương. Xác định tổng $(a+b) /$

- (A) 2019. (B) -2019. (C) 2018. (D) -2020.

Câu 58. (SGD Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x+y+2z-1=0$. Gọi d' là hình chiếu của đường thẳng d lên mặt phẳng (P) , vectơ chỉ phương của đường thẳng d' là

- (A) $\vec{u}_3 = (5; -6; -13)$. (B) $\vec{u}_2 = (5; -4; -3)$. (C) $\vec{u}_4 = (5; 16; 13)$. (D) $\vec{u}_1 = (5; 16; -13)$.

Câu 59. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) $x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên (P) có phương trình là

- (A) $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{5}$. (B) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.
 (C) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$. (D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{1}$.

Loại 4: Xác định một số PT đường thẳng đặc biệt (phân giác, trung tuyến, giao tuyến...)

Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $A(x_0; y_0; z_0)$ và có véc-tơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}_1(a_1; b_1; c_1), \vec{u}_2(a_2; b_2; c_2)$.

Đường thẳng phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng này có véc-tơ chỉ phương được xác định theo công thức

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 \pm \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} (a_1; b_1; c_1) \pm \frac{1}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} (a_2; b_2; c_2).$$

Chi tiết có hai phân giác:

Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 > 0 \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là véc-tơ chỉ phương của phân giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng và $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 - \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là véc-tơ chỉ phương của phân giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng.

Nếu $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 < 0 \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 + \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là véc-tơ chỉ phương của phân giác tạo bởi góc tù giữa hai đường thẳng và $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{u}_1|} \cdot \vec{u}_1 - \frac{1}{|\vec{u}_2|} \cdot \vec{u}_2$ là véc-tơ chỉ phương của phân giác tạo bởi góc nhọn giữa hai đường thẳng.

Câu 60. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

- (A) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 + 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$.

Câu 61. (Mã 101 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; 2)$. Đường phân giác của

góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = -6 - 5t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -10 + 11t \\ z = 6 - 5t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 5t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + 5t \end{cases}$$

Câu 62. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 \end{cases}$. Gọi Δ là

đường thẳng đi qua điểm $A(1; 1; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; 1; 2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là.

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + 27t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = 11 - 10t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = -18 + 19t \\ y = -6 + 7t \\ z = -11 - 10t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 17t \\ z = 1 + 10t \end{cases}$$

Câu 63. (Mã 103 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}$. Gọi Δ là đường

thẳng đi qua điểm $A(1; 2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; -7; -1)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 2 + 11t \\ z = 3 + 8t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = -10 + 12t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Câu 64. (THPT An Lão Hải Phòng 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(-1; 3; 2)$, $B(2; 0; 5)$, $C(0; -2; 1)$. Viết phương trình đường trung tuyến AM của tam giác ABC .

$$\textcircled{A} AM : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-2}{1} \quad \textcircled{B} AM : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+2}{1}$$

$$\textcircled{C} AM : \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{-1} \quad \textcircled{D} AM : \frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+1}{3}$$

Câu 65. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$$

Câu 66. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2; 2; 1)$, $B(\frac{-8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3})$. Đường phân giác trong

của tam giác OAB có phương trình là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 4t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 14t \\ y = 2t \\ z = -5t \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2t \\ y = 14t \\ z = 13t \end{cases}$$

Câu 67. (Chuyên Hạ Long 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$d_1 \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -4 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}; d_2 : \frac{x - 5}{2} = \frac{y - 11}{4} = \frac{z - 5}{2}. \text{ Đường thẳng } d \text{ đi qua } A(5; -3; 5) \text{ cắt } d_1; d_2 \text{ lần}$$

lượt ở B, C . Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

$$\textcircled{A} 2. \quad \textcircled{B} 3. \quad \textcircled{C} \frac{1}{2}. \quad \textcircled{D} \frac{1}{3}.$$

Câu 68. (THPT Gang Thép Thái Nguyên -2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1; 2; 3)$, $A(2; 4; 4)$ và hai mặt phẳng $(P) : x + y - 2z + 1 = 0$, $(Q) : x - 2y - z + 4 = 0$ Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M , cắt $(P), (Q)$ lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}. \quad \textcircled{B} \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}. \\ \textcircled{C} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}. \quad \textcircled{D} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

Câu 69. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2; 1; 0), B(3; 0; 2), C(4; 3; -4)$. Viết phương trình đường phân giác trong góc A .

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

Câu 70. (Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P) : x + y - 2z + 5 = 0$ và $A(1; -1; 2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN . Một vectơ chỉ phương của Δ là

$$\textcircled{A} \vec{u} = (4; 5; -13). \quad \textcircled{B} \vec{u} = (2; 3; 2). \quad \textcircled{C} \vec{u} = (1; -1; 2). \quad \textcircled{D} \vec{u} = (-3; 5; 1).$$

Câu 71. (THPT Phan Đình Phùng-Hà Tĩnh-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A(1; 0; 1), B(1; 0; -3)$ và điểm D có hoành độ âm. Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua gốc tọa độ O . Khi đó đường thẳng d là trục đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình

$$\textcircled{A} d : \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad \textcircled{B} d : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases} \quad \textcircled{C} d : \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases} \quad \textcircled{D} d : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

Câu 72. (THPT Nghèn-Hà Tĩnh-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$ và $\Delta_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ cắt nhau và cùng nằm trong mặt phẳng (P) . Lập phương trình đường phân giác d của góc nhọn tạo bởi Δ_1, Δ_2 và nằm trong mặt phẳng (P) .

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} d : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -1 + t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}). & \text{(B)} d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}). \\ \text{(C)} d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 - t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}). & \text{(D)} d : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}). \end{array}$$

Câu 73. (Quảng Xương-Thanh Hóa-2018) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1; 0; -1), B(2; 3; -1), C(-2; 1; 1)$. Phương trình đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là:

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{5}. & \text{(B)} \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}. \\ \text{(C)} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}. & \text{(D)} \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{5}. \end{array}$$

Câu 74. (SGD Bắc Giang-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2; 2; 1), K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, O lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, AC, AB . Đường thẳng d qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} d : \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}. & \text{(B)} d : \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}. \\ \text{(C)} d : \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{19}{9}}{2}. & \text{(D)} d : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-6}{2}. \end{array}$$

Câu 75. (Chuyên Vinh-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; 3; 3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véc-tơ chỉ phương là

$$\text{(A)} \vec{u}_3 = (2; 1; -1). \quad \text{(B)} \vec{u}_2 = (1; -1; 0). \quad \text{(C)} \vec{u}_4 = (0; 1; -1). \quad \text{(D)} \vec{u}_1 = (1; 2; 1).$$

Câu 76. (Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x + y + z - 3 = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

$$\begin{array}{ll} \text{(A)} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{7}. & \text{(B)} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{7}. \\ \text{(C)} \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{7}. & \text{(D)} \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{7}. \end{array}$$

Câu 77. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 \\ z = 5 + 4t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(1; -3; 5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 2; -2)$. Đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d và Δ có phương trình là

A $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = 6 + 11t \end{cases}$
 B $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 5t \\ z = -6 + 11t \end{cases}$
 C $\begin{cases} x = 1 + 7t \\ y = -3 + 5t \\ z = 5 + t \end{cases}$
 D $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 \\ z = 5 + 7t \end{cases}$

Câu 78. (THPT Ninh Bình-Bạc Liêu-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + z - 10 = 0$, điểm $A(1; 3; 2)$ và đường thẳng $d : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của đoạn MN .

A $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$
 B $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$

C $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$
 D $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 79. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha) : x + 3y - z + 1 = 0$, $(\beta) : 2x - y + z - 7 = 0$.

A $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+3}{-7}$
 B $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-7}$

C $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-10}{7}$
 D $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{7}$

Câu 80. Đường thẳng Δ là giao tuyến của 2 mặt phẳng: $x + z - 5 = 0$ và $x - 2y - z + 3 = 0$ thì có phương trình là

A $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$
 B $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$

C $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$
 D $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 81. (Chuyên KHTN 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng $(d) : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) : x + y - 2z + 1 = 0$. Hỏi giao tuyến của (α) và (β) đi qua điểm nào?

A $(0; 1; 3)$.
 B $(2; 3; 3)$.
 C $(5; 6; 8)$.
 D $(1; -2; 0)$.

Câu 82. (Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019) Đường thẳng Δ là giao của hai mặt phẳng $x + z - 5 = 0$ và $x - 2y - z + 3 = 0$ thì có phương trình là

A $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$
 B $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$

C $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$
 D $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$

Câu 83. (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$

và $d' : \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' , đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

(A) $\frac{x-3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

(B) $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.

(C) $\frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-2}$.

(D) $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-2}$.

Câu 84. (THPT Nghen-Hà Tĩnh-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$d : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ và $d' : \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{2}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường

thẳng thuộc mặt phẳng chứa d và d' đồng thời cách đều hai đường thẳng đó.

(A) $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-2}$.

(B) $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{2}$.

(C) $\frac{x-3}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{2}$.

(D) $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

Câu 85. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$ và $x + y - 2z + 8 = 0$, điểm $A(2; -1; 3)$. Phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN là:

(A) $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-5}{2}$.

(B) $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$.

(C) $\frac{x-5}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-5}{2}$.

(D) $\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{2}$.

Loại 5: Bài toán tìm điểm

Tìm hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng $(P) : ax + by + cz + d = 0$.

Viết phương trình đường thẳng MH qua M và vuông góc với (P) , khi đó:

$$H = d \cap (P) \text{ thỏa } \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow H.$$

Lưu ý: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $(P) \Rightarrow H$ là trung điểm MM'

Tìm hình chiếu H của điểm M lên đường thẳng d Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d , khi đó:

$$H = d \cap (P) \text{ thỏa } \begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} \Rightarrow t \Rightarrow \begin{cases} x = ? \\ y = ? \\ z = ? \end{cases} \Rightarrow H.$$

Lưu ý: Để tìm điểm đối xứng M' của điểm M qua $d \Rightarrow H$ là trung điểm MM' .

Câu 86. (Mã 104 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Tìm điểm $M(a; b; c)$ thuộc d sao cho $MA^2 + MB^2 = 28$, biết $c < 0$.

- (A) $M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$. (B) $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}\right)$. (C) $M(-1; 0; -3)$. (D) $M(2; 3; 3)$.

Câu 87. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của $M(1; 0; 1)$ lên đường thẳng $(\Delta): \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ là

- (A) $(2; 4; 6)$. (B) $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. (C) $(0; 0; 0)$. (D) $\left(\frac{2}{7}; \frac{4}{7}; \frac{6}{7}\right)$.

Câu 88. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-4; 0; 0)$ và đường thẳng $\Delta:$

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 3t \\ z = -2t \end{cases}$$

Gọi $H(a; b; c)$ là hình chiếu của M lên Δ . Tính $a+b+c$.

- (A) 5. (B) -1. (C) -3. (D) 7.

Câu 89. (THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019) Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ hình chiếu H

của $A(1; 1; 1)$ lên đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}$

- (A) $H\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$. (B) $H(1; 1; 1)$. (C) $H(0; 0; -1)$. (D) $H(1; 1; 0)$.

Câu 90. (THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 6 - 4t \\ y = -2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$. Tìm tọa độ hình chiếu A' của A trên (d) .

- (A) $A'(2; 3; 1)$. (B) $A'(-2; 3; 1)$. (C) $A'(2; -3; 1)$. (D) $A'(2; -3; -1)$.

Câu 91. Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có đáy là AB và CD . Biết $A(3; 1; -2)$, $B(-1; 3; 2)$, $C(-6; 3; 6)$ và $D(a; b; c)$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) -3. (B) 1. (C) 3. (D) -1.

Câu 92. (THPT Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và hai điểm $A(-1; 3; 1); B(0; 2; -1)$. Gọi $C(m; n; p)$ là điểm thuộc đường thẳng d sao cho diện tích tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m + n + p$ bằng

- (A) -1. (B) 2. (C) 3. (D) -5.

Câu 93. (Chuyên Hà Tĩnh-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{2}$ và điểm $A(3; 2; 0)$. Điểm đối xứng của điểm A qua đường thẳng d có tọa độ là

- (A) $(-1; 0; 4)$. (B) $(7; 1; -1)$. (C) $(2; 1; -2)$. (D) $(0; 2; -5)$.

Câu 94. (Sở Bình Phước -2019) Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(2; -4; -1)$ tới

đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ bằng

- (A) $\sqrt{14}$. (B) $\sqrt{6}$. (C) $2\sqrt{14}$. (D) $2\sqrt{6}$.

Câu 95. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Gọi $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$. Biết điểm M có tung độ âm và cách mặt phẳng (Oyz) một khoảng bằng 2. Xác định giá trị $T = a + b + c$.

- (A) $T = -1$. (B) $T = 11$. (C) $T = -13$. (D) $T = 1$.

Câu 96. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, đường thẳng d đi qua A cắt chiều âm trục Oy tại điểm B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 1. Phương trình tham số đường thẳng d là

- (A) $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

Câu 97. (Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x-2}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Gọi M là giao điểm của Δ với mặt phẳng $(P) : x + 2y - 3z + 2 = 0$. Tọa độ điểm M là

- (A) $M(2; 0; -1)$. (B) $M(5; -1; -3)$. (C) $M(1; 0; 1)$. (D) $M(-1; 1; 1)$.

Câu 98. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(3; 2; -1)$ lên mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z = 0$ là:

- (A) $(-2; 1; 1)$. (B) $(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{7}{3})$. (C) $(1; 1; -2)$. (D) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$.

Câu 99. (THCS-THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(-1; 0; 3)$ theo phương vectơ $\vec{v} = (1; -2; 1)$ trên mặt phẳng $(P) : x - y + z + 2 = 0$ có tọa độ là

- (A) $(2; -2; -2)$. (B) $(-1; 0; 1)$. (C) $(-2; 2; 2)$. (D) $(1; 0; -1)$.

Câu 100. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, giao điểm của mặt phẳng $(P) : 3x + 5y - z - 2 = 0$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x - 12}{4} = \frac{y - 9}{3} = \frac{z - 1}{1}$ là điểm $M(x_0; y_0; z_0)$. Giá trị tổng $x_0 + y_0 + z_0$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) 5. (D) -2.

Câu 101. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$ và /Gọi $M(a; b; c)$ là tọa độ giao điểm của d và mặt phẳng /. Tổng $S = a + b + c$ là:

- (A) -7. (B) 11. (C) 5. (D) 6.

Câu 102. (Đề Tham Khảo 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 6x - 2y + z - 35 = 0$ và điểm $A(-1; 3; 6)$ Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , tính OA'

- (A) $OA' = 5\sqrt{3}$. (B) $OA' = \sqrt{46}$. (C) $OA' = \sqrt{186}$. (D) $OA' = 3\sqrt{26}$.

Câu 103. (KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xác định tọa độ điểm M' là hình chiếu vuông góc của điểm $M(2; 3; 1)$ lên mặt phẳng $(\alpha) : x - 2y + z = 0$.

- (A) $M' \left(2; \frac{5}{2}; 3 \right)$. (B) $M'(1; 3; 5)$. (C) $M' \left(\frac{5}{2}; 2; \frac{3}{2} \right)$. (D) $M'(3; 1; 2)$.

Câu 104. (Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019) Trong không gian $Oxyz$, điểm M' đối xứng với điểm $M(1; 2; 4)$ qua mặt phẳng $(\alpha) : 2x + y + 2z - 3 = 0$ có tọa độ là

- (A) $(-3; 0; 0)$. (B) $(-1; 1; 2)$. (C) $(-1; -2; -4)$. (D) $(2; 1; 2)$.

Câu 105. (KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + 2z + 1 = 0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là

- (A) $(6; -7; 0)$. (B) $(3; -2; -1)$. (C) $(-3; 8; -3)$. (D) $(0; 3; -2)$.

Câu 106. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d là đường thẳng qua $A(1; 0; 2)$, cắt và vuông góc với đường thẳng $d_1 : \frac{x - 1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z - 5}{-2}$. Điểm nào dưới đây thuộc d ?

- (A) $P(2; -1; 1)$. (B) $Q(0; -1; 1)$. (C) $N(0; -1; 2)$. (D) $M(-1; -1; 1)$.

Câu 107. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác đều ABC với $A(6; 3; 5)$ và đường thẳng BC có

phương trình tham số $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác ABC và

vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ ?

- (A) $M(-1; -12; 3)$. (B) $N(3; -2; 1)$. (C) $P(0; -7; 3)$. (D) $Q(1; -2; 5)$.

Câu 108. (Chuyên Đại học Vinh-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x + 1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{-1}$ và hai điểm $A(-1; 3; 1)$, $B(0; 2; -1)$. Gọi $C(m; n; p)$ là điểm thuộc d sao cho diện tích

tam giác ABC bằng $2\sqrt{2}$. Giá trị của tổng $m + n + p$ bằng

- (A) -1. (B) 2. (C) 3. (D) -5.

Câu 109. (Đà Nẵng 2019) Trong không gian $(Oxyz)$ cho hai đường thẳng $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{-2}$ và $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$. Gọi M là trung điểm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng trên. Tính đoạn OM .

- (A) $OM = \frac{\sqrt{14}}{2}$. (B) $OM = \sqrt{5}$. (C) $OM = 2\sqrt{35}$. (D) $OM = \sqrt{35}$.

Câu 110. (Kinh Môn-Hải Dương 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P) : x - 2y + z = 0$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$. Đường thẳng d cắt (P) tại điểm A . Điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng d và có hoành độ dương sao cho $AM = \sqrt{6}$. Khi đó tổng $S = 2016a + b - c$ là

- (A) 2018. (B) 2019. (C) 2017. (D) 2020.

Câu 111. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$, $d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng d đi qua $A(5; -3; 5)$ lần lượt cắt d_1, d_2 tại B và C . Độ dài BC là

- (A) $\sqrt{19}$. (B) 19. (C) $3\sqrt{2}$. (D) $2\sqrt{5}$.

Câu 112. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3; 3; -2)$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}$; $d_2 : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{4}$. Đường thẳng d đi qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- (A) 3. (B) $\sqrt{6}$. (C) 4. (D) 2.

Câu 113. Cho ba điểm $A(1; 1; 1)$, $B(0; 0; 2)$, $C(2; 3; -2)$ và đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$.

Biết điểm $M(a; b; c)$ với $a > 0$ thuộc mặt phẳng (ABC) sao cho $AM \perp \Delta$ và $AM = \sqrt{14}$. Tính giá trị của biểu thức $T = a + b + c$.

- (A) $T = -1$. (B) $T = 5$. (C) $T = 7$. (D) $T = -6$.

Câu 114. (Chuyên ĐH Vinh-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$, đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : x + y + 2z + 1 = 0$. Điểm B thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn đường thẳng AB vuông góc và cắt đường thẳng d . Tọa độ điểm B là

- (A) $(3; -2; -1)$. (B) $(-3; 8; -3)$. (C) $(0; 3; -2)$. (D) $(6; -7; 0)$.

Câu 115. (SGD Bạc Liêu-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng

$\Delta : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $(t \in \mathbb{R})$, điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$.

Gọi Δ' là đường thẳng đi qua M cắt đường thẳng Δ tại A , cắt mặt cầu tại B sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Mặt phẳng trung trực đoạn AB có phương trình là

- (A) $2x + 4y - 4z - 19 = 0$. (B) $3x - 6y - 6z - 62 = 0$.
 (C) $2x - 4y - 4z - 43 = 0$. (D) $3x + 6y - 6z - 31 = 0$.

Loại 6: Các bài toán liên quan đến góc- khoảng cách

Câu 116. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 4x = 7y + z + 25 = 0$ và đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi d_1' là hình chiếu vuông góc của d_1 lên mặt phẳng (P) . Đường thẳng d_2 nằm trên (P) tạo với d_1, d_1' các góc bằng nhau, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2(a; b; c)$. Tính $\frac{a+2b}{c}$.

- (A) $\frac{a+2b}{c} = \frac{2}{3}$. (B) $\frac{a+2b}{c} = 0$. (C) $\frac{a+2b}{c} = \frac{1}{3}$. (D) $\frac{a+2b}{c} = 1$.

Câu 117. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; 7), B(5; 5; 1)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - y - z + 4 = 0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = \sqrt{35}$ Biết M có hoành độ nguyên, ta có OM bằng

- (A) $2\sqrt{2}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $3\sqrt{2}$. (D) 4.

Câu 118. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho

hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}, d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$ Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một

góc 45° và nhận vectơ $\vec{n} = (1; b; c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc

- (A) -4 hoặc 0 . (B) 4 hoặc 0 . (C) -4 . (D) 4.

Câu 119. (Chuyên Phan Bội Châu 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường

thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 tạo với d_2 một góc 45°

và nhận vectơ $\vec{n} (1; b; c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích bc .

- (A) -4 hoặc 0 . (B) 4 hoặc 0 . (C) -4 . (D) 4.

Câu 120. (Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1 , tạo với d_2 một góc 45° và

nhận vectơ $\vec{n} (1; b; c)$ làm một vectơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

- (A) -4 . (B) 4. (C) 4 hoặc 0. (D) -4 hoặc 0.

Câu 121. Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$, mặt phẳng $(P) : x + y + z + 2 = 0$. Gọi M là giao điểm của d và (P) . Gọi Δ là đường thẳng nằm trong (P) vuông góc với d và cách M một khoảng $\sqrt{42}$. Phương trình đường thẳng Δ là

- (A) $\frac{x}{-5} = \frac{y}{2} - 3 = \frac{z}{41}$. (B) $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+1}{1}$.
 (C) $\frac{x}{-3} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z+5}{1}$. (D) Đáp án khác.

Câu 122. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019) Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng $d : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \in \mathbb{R}$, cắt mặt phẳng $(P) : x + y + z - 3 = 0$ tại điểm I . Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $\Delta \perp d$ và khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$. Tìm tọa độ hình chiếu $M(a; b; c)$ (với $a + b > c$) của điểm I trên đường thẳng Δ .

- (A) $M(2; 5; -4)$. (B) $M(6; -3; 0)$. (C) $M(5; 2; -4)$. (D) $M(-3; 6; 0)$.

Câu 123. (Chuyên Đại Học Vinh 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho ba đường thẳng $d : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, $\Delta_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $\Delta_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$. Đường thẳng Δ vuông góc với d đồng thời cắt Δ_1, Δ_2 tương ứng tại H, K sao cho độ dài HK nhỏ nhất. Biết rằng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u}(h; k; 1)$ Giá trị $h - k$ bằng

- (A) 0. (B) 4. (C) 6. (D) -2.

Câu 124. (Hội 8 trường chuyên 2019) Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua O , thuộc mặt phẳng (Oyz) và cách điểm $M(1; -2; 1)$ một khoảng nhỏ nhất. Côsin của góc giữa d và trục tung bằng

- (A) $\frac{2}{5}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. (D) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 125. (Sở Cần Thơ-2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2; 1; 1)$, mặt phẳng $(P) : x - z - 1 = 0$ và đường thẳng $(d) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$. Gọi $d_1; d_2$ là các đường thẳng đi qua A , nằm

trong (P) và đều có khoảng cách đến đường thẳng d bằng $\sqrt{6}$. Côsin của góc giữa d_1 và d_2 bằng

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 126. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d) : \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mặt phẳng $(P) : x + y - z + 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; -1)$. Cho đường thẳng (Δ) đi qua A , cắt (d) và song song với mặt phẳng (P) . Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (Δ)

- Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\frac{16}{3}$. Ⓒ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 127. (Kim Liên-Hà Nội 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} =$

$$\frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1} \text{ và } d_2 : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng đã cho bằng?

- Ⓐ $\frac{\sqrt{87}}{6}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{174}}{6}$. Ⓒ $\frac{\sqrt{174}}{3}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{87}}{3}$.

Câu 128. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; 2)$, $B(-3; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + 3z - 14 = 0$. Điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho ΔMAB vuông tại M . Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (Oxy) .

- Ⓐ 5. Ⓑ 4. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 129. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 6)$ và $D(1; 1; 1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào dưới đây?

- Ⓐ $(4; 3; 7)$. Ⓑ $(-1; -2; 1)$. Ⓒ $(7; 5; 3)$. Ⓓ $(3; 4; 3)$.

Câu 130. (Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019) Tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng $d_1; d_2$ tới mặt phẳng (P) trong đó: $d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}; d_2 : \frac{-x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}; (P) : 2x + 4y - 4z - 3 = 0$.

- Ⓐ $\frac{4}{3}$. Ⓑ $\frac{7}{6}$. Ⓒ $\frac{13}{6}$. Ⓓ $\frac{5}{3}$.

Câu 131. (THPT Hậu Lộc 2 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : 2x - y + 2z - 3 = 0$ và đường thẳng $(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Khoảng cách giữa (Δ) và (P) là

- Ⓐ $\frac{2}{3}$. Ⓑ $\frac{8}{3}$. Ⓒ $\frac{2}{9}$. Ⓓ 1.

Câu 132. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$. Gọi (P) là mặt

phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 45° . Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P) ?

- Ⓐ $M(3; 2; 1)$. Ⓑ $N(3; 2; -1)$. Ⓒ $P(3; -1; 2)$. Ⓓ $M(3; -1; -2)$.

Câu 133. (Chuyên Hà Tĩnh 2019)) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x-5}{2} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-12}{-1}$ và mặt phẳng $(\alpha) : x + 2y - 3z - 3 = 0$. Gọi M là giao điểm của d và (α) , A thuộc d sao cho $AM = \sqrt{14}$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (α) .

- Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 6. Ⓓ $\sqrt{14}$.

Câu 134. (Hội 8 trường chuyên 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$ và $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$. Mặt phẳng $(P) : x + ay + bz + c = 0$ ($c > 0$) song song với d_1, d_2 và khoảng cách từ d_1 đến (P) bằng 2 lần khoảng cách từ d_2 đến (P) . Giá trị của $a + b + c$ bằng

- (A) 14. (B) 6. (C) -4. (D) -6.

Câu 135. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 3; 1)$, $B(0; 2; 1)$ và mặt phẳng $(P) : x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trong (P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

- (A) $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 4t \end{cases}$

Câu 136. (Chuyên ĐH Vinh- 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $BC = 3\sqrt{2}$, đường thẳng BC có phương trình $\frac{x-4}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z+7}{-4}$, đường thẳng AB nằm trong mặt phẳng $(\alpha) : x + z - 3 = 0$. Biết đỉnh C có cao độ âm. Tính hoành độ đỉnh A .

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) 3. (C) $\frac{9}{2}$. (D) $\frac{5}{2}$.

Loại 7: Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến đường thẳng

Dạng 1. Viết phương trình mp (P) đi qua M , vuông góc mặt phẳng (Q)

và mặt phẳng $(P) \parallel \Delta : \xrightarrow{PP} \text{mp}(P) : \begin{cases} \bullet \text{ đi qua } M(x_0, y_0, z_0) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(Q)}, \vec{u}_\Delta] \end{cases}$

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với đường thẳng d đi

qua hai điểm A và B , với: $\xrightarrow{PP} \text{mp}(P) : \begin{cases} \bullet \text{ đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \end{cases}$

Dạng 3. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng

$\Delta : \xrightarrow{PP}$ Trên đường thẳng Δ lấy điểm A và xác định VTCP \vec{u}_Δ . Khi đó mp $(P) :$

$\begin{cases} \bullet \text{ đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\overrightarrow{AM}, \vec{u}_\Delta] \end{cases}$

Dạng 4. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng song song $\Delta_1, \Delta_2 :$

$\xrightarrow{PP} \text{mp}(P) : \begin{cases} \bullet \text{ đi qua } M \in \Delta_1, (\text{hay } M \in \Delta_2) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] \end{cases}$

Dạng 5. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1, \Delta_2 :$

$$\xrightarrow{PP} \text{mp } (P) : \begin{cases} \bullet \text{ đi qua } M \in \Delta_1, (\text{hay } M \in \Delta_2) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] \end{cases}$$

Dạng 6. Cho 2 đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2 . Hãy viết phương trình (P) chứa Δ_1 và song

song $\Delta_2 \xrightarrow{PP} \text{mp } (P) : \begin{cases} \bullet \text{ đi qua } M \in \Delta_1, (\text{hay } M \in \Delta_2) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] \end{cases}$

Dạng 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta) \xrightarrow{PP}$ Chọn A, B thuộc giao tuyến hai mặt phẳng (α) và $(\beta) \Rightarrow A, B \in (P)$. Cụ thể:

Cho: $z = z_o \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -(C_1z_o + D_1) \\ A_2x + B_2y = -(C_2z_o + D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \Rightarrow A(\dots; \dots; \dots) \in (P).$

Cho: $x = x_o \Rightarrow \begin{cases} B_1y + C_1z = -(A_1x_o + D_1) \\ B_2y + C_2z = -(A_2x_o + D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dots \\ z = \dots \end{cases} \Rightarrow B(\dots; \dots; \dots) \in (P).$

Khi đó $\text{mp } (P) : \begin{cases} \bullet \text{ đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{AB}, \vec{AM}] \end{cases}$

Câu 137. (Đề Minh Họa 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có phương trình: $\frac{x-10}{5} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{1}$. Xét mặt phẳng $(P) : 10x + 2y + mz + 11 = 0$, m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng Δ .

- (A) $m = 2$. (B) $m = -52$. (C) $m = 52$. (D) $m = -2$.

Câu 138. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-3}$ và mặt phẳng $(P) : x - y + z - 3 = 0$. Phương trình mặt phẳng (α) đi qua O , song song với Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) là

- (A) $x + 2y + z = 0$. (B) $x - 2y + z = 0$.
(C) $x + 2y + z - 4 = 0$. (D) $x - 2y + z + 4 = 0$.

Câu 139. (Toán Học Tuổi Trẻ 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; -2)$ và đi qua điểm $M(1; -3; 2)$, $d_2 : \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{3}$. Phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2 có dạng $ax + by + cz + 11 = 0$. Giá trị $a + 2b + 3c$ bằng

- (A) -42 . (B) -32 . (C) 11 . (D) 20 .

Câu 140. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-1}$

- (A) $(P) : 2x - 2z + 1 = 0$. (B) $(P) : 2y - 2z + 1 = 0$.
(C) $(P) : 2x - 2y + 1 = 0$. (D) $(P) : 2y - 2z - 1 = 0$.

Câu 141. (SGD Cần Thơ-2018) Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{3}$ và $\frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$ có phương trình là

- (A) $-2x - y + 9z - 36 = 0$. (B) $2x - y - z = 0$.
 (C) $6x + 9y + z + 8 = 0$. (D) $6x + 9y + z - 8 = 0$.

Câu 142. (Hồng Bàng-Hải Phòng-2018) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0; 1; 0)$, mặt

phẳng $(Q): x + y - 4z - 6 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$. Phương trình mặt phẳng (P) qua

A , song song với d và vuông góc với (Q) là:

- (A) $3x + y + z - 1 = 0$. (B) $3x - y - z + 1 = 0$.
 (C) $x + 3y + z - 3 = 0$. (D) $x + y + z - 1 = 0$.

Câu 143. (Toán Học Tuổi Trẻ-2018) Trong không gian với hệ tọa độ Descartes $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

- (A) $x + y - z = 0$. (B) $x + y - z - 2 = 0$.
 (C) $x + y - z + 1 = 0$. (D) $-x + 2y + z + 5 = 0$.

Câu 144. (SGD&ĐT BRVT-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và (P) song song với đường thẳng d_2 là

- (A) $(P): x + 5y + 8z - 16 = 0$. (B) $(P): x + 5y + 8z + 16 = 0$.
 (C) $(P): x + 4y + 6z - 12 = 0$. (D) $(P): 2x + y - 6 = 0$.

Câu 145. (Chuyên Thăng Long-Đà Lạt-2018) Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng

chứa hai đường thẳng: $(d): \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t - 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$ và $(\Delta): \begin{cases} x = m + 3 \\ y = 3m - 2 \\ z = 2m + 1 \end{cases}$ có dạng $x + ay + bz + c = 0$. Tính

$P = a + 2b + 3c$.

- (A) $P = -10$. (B) $P = 4$. (C) $P = -8$. (D) $P = 0$.

Câu 146. (Chuyên Trần Đại Nghĩa-2018) Tìm tất cả các mặt phẳng (α) chứa đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$ và tạo với mặt phẳng $(P): 2x - z + 1 = 0$ góc 45° .

- (A) $(\alpha): 3x + z = 0$. (B) $(\alpha): x - y - 3z = 0$.
 (C) $(\alpha): x + 3z = 0$. (D) $(\alpha): 3x + z = 0$ hay $(\alpha): 8x + 5y + z = 0$.

Câu 147. (Quảng Nam-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; -1; 2)$. Biết rằng có hai mặt phẳng cùng đi qua hai điểm A, O và cùng cách B một khoảng

bằng $\sqrt{3}$. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây là một vectơ pháp tuyến của một trong hai mặt phẳng đó.

(A) $\vec{n} = (1; -1; -1)$. (B) $\vec{n} = (1; -1; -3)$. (C) $\vec{n} = (1; -1; 5)$. (D) $\vec{n} = (1; -1; -5)$.

Câu 148. (Sở Bình Phước-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{4}$. Mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 có phương trình là

(A) $14x - 4y - 8z + 1 = 0$. (B) $14x - 4y - 8z + 3 = 0$.
 (C) $14x - 4y - 8z - 3 = 0$. (D) $14x - 4y - 8z - 1 = 0$.

Câu 149. (THPT Thực Hành-TPHCM-2018) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; 0)$ và đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng chứa điểm A và đường thẳng d ?

(A) $(P) : 5x + 2y + 4z - 5 = 0$. (B) $(P) : 2x + 1y + 2z - 1 = 0$.
 (C) $(P) : 5x - 2y - 4z - 5 = 0$. (D) $(P) : 2x + 1y + 2z - 2 = 0$.

Câu 150. (Chuyên Nguyễn Đình Triều-Đồng Tháp-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$, $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{4}$. Viết phương trình mặt phẳng cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 .

(A) $14x + 4y + 8z + 13 = 0$. (B) $14x - 4y - 8z - 17 = 0$.
 (C) $14x - 4y - 8z - 13 = 0$. (D) $14x - 4y + 8z - 17 = 0$.

Câu 151. (Chuyên KHTN-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ và $d_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1; d_2$ là:

(A) $2y - 2z + 1 = 0$. (B) $2y - 2z - 1 = 0$. (C) $2x - 2z + 1 = 0$. (D) $2x - 2z - 1 = 0$.

Loại 8: Bài toán liên quan đến vị trí tương đối

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt cầu (S) Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ .

Để xét vị trí tương đối giữa Δ và (S) ta tính $d(I, \Delta)$ rồi so sánh với bán kính R .

- Nếu $d(I, \Delta) > R$: Δ không cắt (S) .
- Nếu $d(I, \Delta) = R$: Δ tiếp xúc với (S) tại H .
- Nếu $d(I, \Delta) < R$: Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt A, B .
- $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$. • $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

Cho đường thẳng d :
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$
 và mặt phẳng (α) : $Ax + By + Cz + D = 0$.

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t & (1) \\ y = y_0 + a_2t & (2) \\ z = z_0 + a_3t & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases} (*)$$

- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d$ cắt (α) .
- Nếu (*) có vô nghiệm $\Leftrightarrow d \parallel (\alpha)$.
- Nếu (*) vô số nghiệm $\Leftrightarrow d \subset (\alpha)$.

3. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng d và d'

Cho hai đường thẳng: d :
$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t \\ y = y_0 + a_2t \\ z = z_0 + a_3t \end{cases}$$
 và d' :
$$\begin{cases} x = x'_0 + a'_1t' \\ y = y'_0 + a'_2t' \\ z = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$$
 lần lượt qua điểm hai điểm M, N và có vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}$.

• d song song $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \notin d' \end{cases}$

• d trùng $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d = k\vec{a}_{d'} \\ M \in d' \end{cases}$.

• d cắt $d' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}_d \text{ ko } \uparrow\uparrow \vec{a}_{d'} \\ [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}] \cdot \vec{MN} = 0 \end{cases}$.

• d chéo $d' \Leftrightarrow [\vec{a}_d, \vec{a}_{d'}] \cdot \vec{MN} \neq 0$.

Lưu ý: Nếu d cắt d' ta tìm tọa độ giao điểm bằng giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_0 + a_1t = x'_0 + a'_1t' \\ y_0 + a_2t = y'_0 + a'_2t' \\ z_0 + a_3t = z'_0 + a'_3t' \end{cases}$$

Câu 152. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$, $d_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng đã cho.

- (A) Chéo nhau. (B) Trùng nhau. (C) Song song. (D) Cắt nhau.

Câu 153. (Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019) Trong không gian tọa độ $Oxyz$, xét vị trí

tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}, \Delta_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$

- (A) Δ_1 song song với Δ_2 . (B) Δ_1 chéo với Δ_2 .
 (C) Δ_1 cắt Δ_2 . (D) Δ_1 trùng với Δ_2 .

Câu 154. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x - 3y + 2z + 6 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) d cắt và không vuông góc với (P) . (B) d vuông góc với (P) .
 (C) d song song với (P) . (D) d nằm trong (P) .

Câu 155. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P) : 11x + my + nz - 16 = 0$. Biết $\Delta \subset (P)$, tính giá trị của $T = m + n$.

- (A) $T = 2$. (B) $T = -2$. (C) $T = 14$. (D) $T = -14$.

Câu 156. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-9}{-1}$ và mặt phẳng (α) có phương trình $m^2x - my - 2z + 19 = 0$ với m là tham số. Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d \parallel (\alpha)$ là

- (A) $\{1\}$. (B) \emptyset . (C) $\{1; 2\}$. (D) $\{2\}$.

Câu 157. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ song song với mặt phẳng $(P) : 2x + y - m^2z + m = 0$

- (A) $m = 1$. (B) $m \in \emptyset$. (C) $m \in \{-1; 1\}$. (D) $m = -1$.

Câu 158. Gọi m, n là hai giá trị thực thỏa mãn: giao tuyến của hai mặt phẳng $(P_m) : mx + 2y + nz + 1 = 0$ và $(Q_m) : x - my + nz + 2 = 0$ vuông góc với mặt phẳng $(\alpha) : 4x - y - 6z + 3 = 0$.

- (A) $m + n = 0$. (B) $m + n = 2$. (C) $m + n = 1$. (D) $m + n = 3$.

Câu 159. (THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai

đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}; d_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = m \end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2

chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\frac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S .

- (A) -11 . (B) 12 . (C) -12 . (D) 11 .

Câu 160. (Chuyên Vĩnh Phúc-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho bốn đường thẳng: $(d_1) : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}, (d_2) : \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}, (d_3) : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}, (d_4) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là

- (A) 0 . (B) 2 . (C) Vô số. (D) 1 .

Câu 161. (Mã 105 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1; 2; 3)$ và mặt phẳng $(P) : 2x - 2y - z - 4 = 0$. Mặt cầu tâm I tiếp xúc với (P) tại điểm H . Tìm tọa độ điểm H .

(A) $H(1; -1; 0)$. (B) $H(-3; 0; -2)$. (C) $H(-1; 4; 4)$. (D) $H(3; 0; 2)$.

Câu 162. Trong không gian $Oxyz$, biết mặt cầu (S) có tâm O và tiếp xúc với mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z + 9 = 0$ tại điểm $H(a; b; c)$. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng

(A) 2. (B) -1. (C) 1. (D) -2.

Câu 163. (Chuyên Lê Hồng Phong-Nam Định- 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1; 0; 2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I , tiếp xúc với đường thẳng d . Bán kính của (S) bằng

(A) $\frac{5}{3}$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{30}}{3}$. (D) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Câu 164. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1$, đường thẳng $\Delta : \frac{x-6}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$ và điểm $M(4; 3; 1)$. Trong các mặt phẳng sau mặt phẳng nào đi qua M , song song với Δ và tiếp xúc với mặt cầu (S) ?

(A) $2x - 2y + 5z - 22 = 0$. (B) $2x + y + 2z - 13 = 0$.
(C) $2x + y - 2z - 1 = 0$. (D) $2x - y + 2z - 7 = 0$.

Câu 165. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ và điểm $A(-1; -1; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) . M luôn thuộc một mặt phẳng cố định có phương trình là

(A) $6x + 8y + 11 = 0$. (B) $6x + 8y - 11 = 0$. (C) $3x + 4y - 2 = 0$. (D) $3x + 4y + 2 = 0$.

Câu 166. (Mã 110 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2$ và hai đường thẳng $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$; $\Delta : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) , song song với d và Δ ?

(A) $y + z + 3 = 0$. (B) $x + z + 1 = 0$. (C) $x + y + 1 = 0$. (D) $x + z - 1 = 0$.

Câu 167. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng $d : \frac{x-4}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+4}{-4}$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S) : (x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$. Khi đó (P) song song với mặt phẳng nào sau đây?

(A) $3x - y + 2z = 0$. (B) $-2x + 2y - z + 4 = 0$.
(C) $x + y + z = 0$. (D) Đáp án khác.

Câu 168. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$, $d_2 : \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

(A) $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0 \\ x - y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x + y + 2z - 3 = 0 \\ x + y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$.
(C) $x + y + 2z + 9 = 0$. (D) $x - y + 2z + 9 = 0$.

Câu 169. (Đề Tham Khảo 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P) : 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S) : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

$$\textcircled{A} \begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases} \quad \textcircled{B} \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases} \quad \textcircled{C} \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases} \quad \textcircled{D} \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$

Câu 170. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ có phương trình lần lượt là $(S_1) : x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2) : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d ?

$$\textcircled{A} \vec{u}_1 = (1; 1; \sqrt{3}). \quad \textcircled{B} \vec{u}_2 = (1; 1; \sqrt{6}). \quad \textcircled{C} \vec{u}_3 = (1; 1; 0). \quad \textcircled{D} \vec{u}_4 = (1; 1; -\sqrt{3}).$$

Câu 171. (Chuyên Bắc Giang 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1; 1; 1)$, mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P) : x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của đường thẳng Δ là

$$\textcircled{A} \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}. \quad \textcircled{B} \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}. \\ \textcircled{C} \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}. \quad \textcircled{D} \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Câu 172. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ và điểm $A(1; 0; -1)$. Gọi d_2 là đường thẳng đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{v} = (a; 1; 2)$. Giá trị của a sao cho đường thẳng d_1 cắt đường thẳng d_2 là

$$\textcircled{A} a = -1. \quad \textcircled{B} a = 2. \quad \textcircled{C} a = 0. \quad \textcircled{D} a = 1.$$

Câu 173. Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt cầu $(S_1) : (x + 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 1$, $(S_2) : x^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 = 4$ và $(S_3) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y - 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với cả ba mặt cầu $(S_1), (S_2), (S_3)$?

$$\textcircled{A} 2. \quad \textcircled{B} 4. \quad \textcircled{C} 6. \quad \textcircled{D} 8.$$

Câu 174. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R = 5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy . Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S) ?

$$\textcircled{A} M(-1; -2; 1). \quad \textcircled{B} N(1; 2; -1). \quad \textcircled{C} P(-5; 2; -7). \quad \textcircled{D} Q(5; -2; 7).$$

Câu 175. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ (m là tham

số) và đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$
. Biết đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt

A, B sao cho $AB = 8$. Giá trị của m là

- Ⓐ $m = 5$. Ⓑ $m = 12$. Ⓒ $m = -12$. Ⓓ $m = -10$.

Câu 176. (SGD Bến Tre 2019) Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 :

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases}, (t \in \mathbb{R}), d_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t' \\ z = -t' \end{cases}, (t' \in \mathbb{R}).$$

Phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là:

- Ⓐ $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{9}{4}$. Ⓑ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{3}{2}$.
 Ⓒ $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = \frac{9}{4}$. Ⓓ $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = \frac{3}{2}$.

Câu 177. Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2 :$

$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 . Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

- Ⓐ $\sqrt{12}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\sqrt{24}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.

§4. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NHỚ

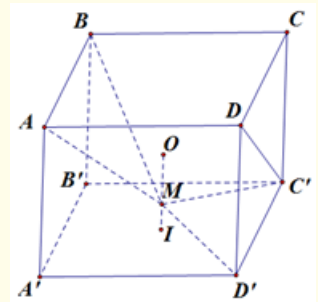
Ở dạng bài tập này chúng ta tiến hành gắn hệ trục tọa độ vào bài toán hình học không gian thuần túy.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

📖 Dạng 4.35. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để tìm GÓC

Câu 1. (Mã 103 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và điểm M thuộc đoạn OI sao cho $MO = 2MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó sin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

- Ⓐ $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. Ⓑ $\frac{17\sqrt{13}}{65}$. Ⓒ $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. Ⓓ $\frac{6\sqrt{13}}{65}$.



Câu 2. (Mã 102 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = \frac{1}{2}MI$ (tham khảo hình vẽ). Khi đó cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) bằng

- Ⓐ $\frac{6\sqrt{13}}{65}$. Ⓑ $\frac{7\sqrt{85}}{85}$. Ⓒ $\frac{6\sqrt{85}}{85}$. Ⓓ $\frac{17\sqrt{13}}{65}$.

Câu 3. (THPT Hùng Vương Bình Phước 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$, góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên $A'B$ và K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'D$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (AHK) và $(ABB'A')$.

- Ⓐ 60° . Ⓑ 45° . Ⓒ 90° . Ⓓ 30° .

Câu 4. (THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAB là tam giác đều và (SAB) vuông góc với $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$ với φ là góc tạo bởi (SAC) và (SCD) .

- Ⓐ $\frac{\sqrt{3}}{7}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{6}}{7}$. Ⓒ $\frac{5}{7}$. Ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Câu 5. (Chuyên Sơn La 2019) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC , biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

(A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(D) $\sqrt{3}$.

Câu 6. (THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng -2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Góc giữa hai mặt phẳng $(A'B'CD)$ và $(ACC'A')$ bằng

(A) 60° .

(B) 30° .

(C) 45° .

(D) 75° .

Câu 7. (Sở Bắc Ninh -2019) Cho hình chóp $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AB . Góc tạo bởi hai vectơ \vec{BC} và \vec{OM} bằng

(A) 135° .

(B) 150° .

(C) 120° .

(D) 60° .

Câu 8. (THPT Trần Phú-Đà Nẵng-2018) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng

(A) 30° .

(B) 60° .

(C) 45° .

(D) 90° .

Câu 9. (THPT Nam Trực-Nam Định-2018) Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $AB = a, SA = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Góc giữa đường thẳng BG với đường thẳng SA bằng:

(A) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{5}$.

(B) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$.

(C) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{3}$.

(D) $\arccos \frac{\sqrt{15}}{5}$.

Câu 10. (Chuyên Hà Tĩnh-2018) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là tứ diện đều cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AA' và BB' . Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (CMN) .

(A) $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

(B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

(C) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

(D) $\frac{4\sqrt{2}}{13}$.

Câu 11.

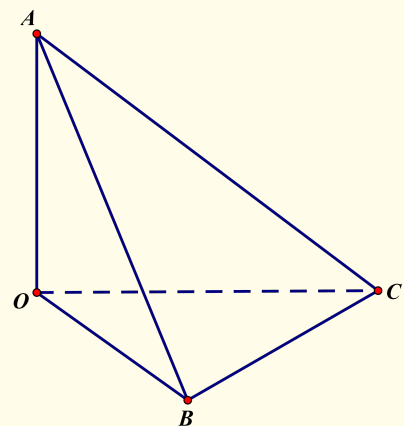
(Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-2018) Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) (hình vẽ bên). Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha) \cdot (3 + \cot^2 \beta) \cdot (3 + \cot^2 \gamma)$ là

(A) 48.

(B) 125.

(C) Số khác.

(D) $48\sqrt{3}$.



Câu 12. (Kinh Môn-Hải Dương 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD . Tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính sin góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) .

- (A) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{\sqrt{55}}{10}$.

Câu 14. (Chuyên Lê Quý Đôn-Điện Biên 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD Tính tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

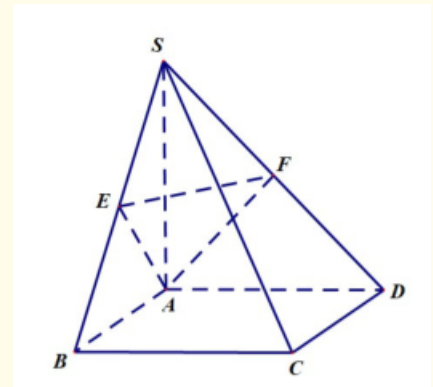
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$. (D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 15. Cho khối tứ diện $ABCD$ có $BC = 3$, $CD = 4$, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Góc giữa đường thẳng AD và BC bằng 60° . Côsin góc giữa hai phẳng (ABC) và (ACD) bằng

- (A) $\frac{\sqrt{43}}{86}$. (B) $\frac{4\sqrt{43}}{43}$. (C) $\frac{2\sqrt{43}}{43}$. (D) $\frac{\sqrt{43}}{43}$.

Câu 16.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SB , SD . Côsin của góc hợp bởi hai mặt phẳng (AEF) và $(ABCD)$ là.



- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi α là góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$ Tính sin α .

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC , $A'H = a\sqrt{5}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$. Tính $\cos \varphi$.

- (A) $\cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{48}$. (B) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. (D) $\cos \varphi = \frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Câu 19. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó $\cos \alpha$ bằng:

- (A) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (B) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. (D) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Dạng 4.36. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để tìm KHOẢNG CÁCH

Câu 1. (Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các kích thước $AB = 4, AD = 3, AA' = 5$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC' và $B'C$ bằng

- (A) $\frac{3}{2}$. (B) 2. (C) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{30}{19}$.

Câu 2. (Việt Đức Hà Nội 2019) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $A(0;0;0), D(2;0;0), B(0;4;0), S(0;0;4)$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (CDM) .

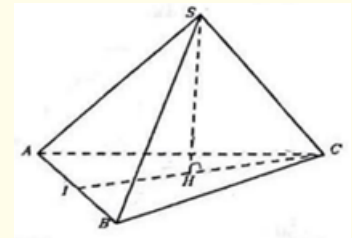
- (A) $d(B, (CDM)) = 2$. (B) $d(B, (CDM)) = 2\sqrt{2}$.
(C) $d(B, (CDM)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $d(B, (CDM)) = \sqrt{2}$.

Câu 3. (HSG Bắc Ninh 2019) Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân, $AB = AC = a, AA' = h$ ($a, h > 0$). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' theo a, h .

- (A) $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 5h^2}}$. (B) $\frac{ah}{\sqrt{5a^2 + h^2}}$. (C) $\frac{ah}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$. (D) $\frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$.

Câu 4.

(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AB , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° (hình vẽ bên). Gọi G là trọng tâm tam giác SBC .



Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng

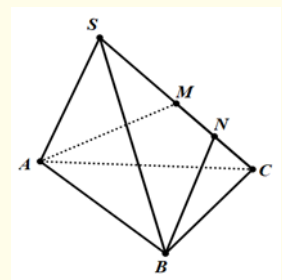
- (A) $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. (B) $\frac{a\sqrt{14}}{8}$. (C) $\frac{a\sqrt{77}}{22}$. (D) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Câu 5. (Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng 2018) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

- (A) $\frac{4a}{3}$. (B) $\frac{a}{3}$. (C) $\frac{2a}{3}$. (D) $\frac{3a}{4}$.

Câu 6.

(THPT Hoàng Hoa Thám-Hưng Yên 2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a\sqrt{3}$, mặt bên SAB là tam giác cân với $\widehat{ASB} = 120^\circ$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SC và N là trung điểm của MC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, BN .

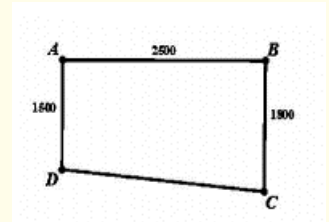


- (A) $\frac{2\sqrt{327}a}{79}$. (B) $\frac{\sqrt{237}a}{79}$. (C) $\frac{2\sqrt{237}a}{79}$. (D) $\frac{5\sqrt{237}a}{316}$.

Câu 7. (Chuyên-Vĩnh Phúc-2019) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 1\text{cm}$, $AC = \sqrt{3}\text{cm}$. Tam giác SAB , SAC lần lượt vuông tại B và C . Khối cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ có thể tích bằng $\frac{5\sqrt{5}\pi}{6}\text{cm}^3$. Tính khoảng cách từ C tới (SAB) .

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$. (B) $\frac{\sqrt{5}}{4}\text{cm}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{4}\text{cm}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm}$.

Câu 8. (Chuyên Lam Sơn 2019) Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ bên. Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\text{m}$, $AD = 15\text{m}$, $BC = 18\text{m}$. Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10cm , $a\text{cm}$, 6cm tương ứng. Giá trị của a là số nào sau đây?



- (A) 15,7cm. (B) 17,2cm. (C) 18,1cm. (D) 17,5cm.

Câu 9. (Chuyên Bắc Giang 2019) Cho tứ diện $OABC$, có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = 5, OB = 2, OC = 4$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (AMN) là:

- (A) $\frac{20}{3\sqrt{129}}$. (B) $\frac{20}{\sqrt{129}}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 10. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , gọi M là trung điểm của AB , $\Delta A'CM$ cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CC'

- (A) $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. (B) $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. (C) $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. (D) $\frac{2a\sqrt{39}}{3}$.

Câu 11. (Sở Nam Định 2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và D , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SB và mặt phẳng đáy bằng 45° , E là trung điểm của SD , $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (ACE) .

- (A) $\frac{2a}{3}$. (B) $\frac{4a}{3}$. (C) a . (D) $\frac{3a}{4}$.

Dạng 4.37. Ứng dụng hình học giải tích OXYZ để tìm THỂ TÍCH, BÁN KÍNH

Câu 1. (Mã 102 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và đi qua điểm $A(1; 0; -1)$ Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- (A) 64. (B) $\frac{32}{3}$. (C) $\frac{64}{3}$. (D) 32.

Câu 2. (Mã 104 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 0; 2)$ và đi qua điểm $A(0; 1; 1)$. Xét các điểm B, C, D thuộc (S) sao cho AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

- (A) $\frac{8}{3}$. (B) 4. (C) $\frac{4}{3}$. (D) 8.

Câu 3. (Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O , các đỉnh $B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b)$ với $a, b > 0$ và $a + b = 2$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Thể tích của khối tứ diện $BDA'M$ có giá trị lớn nhất bằng

- (A) $\frac{64}{27}$. (B) $\frac{32}{27}$. (C) $\frac{8}{27}$. (D) $\frac{4}{27}$.

Câu 4. (THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (MND') chia khối lập phương thành hai khối đa diện, trong đó khối chứa điểm C gọi là (H) . Tính thể tích khối (H) .

- (A) $\frac{55a^3}{72}$. (B) $\frac{55a^3}{144}$. (C) $\frac{181a^3}{486}$. (D) $\frac{55a^3}{48}$.

Câu 5. (Chuyên Thăng Long-Đà Lạt-2018) Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O các đỉnh $B(m; 0; 0), D(0; m; 0), A'(0; 0; n)$ với $m, n > 0$ và $m + n = 4$ Gọi M là trung điểm của cạnh CC' Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

- (A) $\frac{9}{4}$. (B) $\frac{64}{27}$. (C) $\frac{75}{32}$. (D) $\frac{245}{108}$.

Câu 6. (Nho Quan A-Ninh Bình-2019) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của $AB, BC, C'D', DD'$. Gọi thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là phân số tối giản $\frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $a + b$.

- (A) 9. (B) 25. (C) 13. (D) 11.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, tập hợp tất cả các điểm thỏa mãn $|x| + |y| + |z| \leq 2$ và $|x - 2| + |y| + |z| \leq 2$ là một khối đa diện có thể tích bằng

- (A) 3. (B) 2. (C) $\frac{8}{3}$. (D) $\frac{4}{3}$.

Câu 8. (Thi thử cụm Vũng Tàu-2019) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1; AD = 2; AA' = 3$. Mặt phẳng (P) đi qua C' và cắt các tia $AB; AD; AA'$ lần lượt tại $E; F; G$ (khác A) sao cho thể tích khối tứ diện $AEFG$ nhỏ nhất. Tổng của $AE + AF + AG$ bằng.

- (A) 18. (B) 17. (C) 15. (D) 16.

Câu 9. (Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019) Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm AB , gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của K lên AD, AC . Tính theo a bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $K.CDMN$.

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. (C) $\frac{3a\sqrt{3}}{8}$. (D) $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$.

Câu 10. (Chuyên Thái Bình -2019) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD . Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{93}}{12}$. (B) $\frac{a\sqrt{29}}{8}$. (C) $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. (D) $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

Câu 11. (Chuyên KHTN-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(5; 0; 0)$ và $B(3; 4; 0)$. Với C là điểm nằm trên trục Oz , gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khi C di động trên trục Oz thì H luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. (D) $\sqrt{3}$.

Câu 12. (Chuyên Vinh-2018) Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm A, B, C (không trùng O) lần lượt thay đổi trên các trục Ox, Oy, Oz và luôn thỏa mãn điều kiện: tỉ số giữa diện tích của tam giác ABC và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng $\frac{3}{2}$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định, bán kính của mặt cầu đó bằng

- (A) 3. (B) 2. (C) 4. (D) 1.

Câu 13. (Chuyên Lê Hồng Phong-TPHCM-2018) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$, $(d_2) : \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$, $(d_3) : \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a; b; c)$, tiếp xúc với 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$. Tính $S = a + 2b + 3c$.

- (A) $S = 10$. (B) $S = 11$. (C) $S = 12$. (D) $S = 13$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = 2a$. Gọi E là trung điểm cạnh AD . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDE$.

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{11}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.