

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

§1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

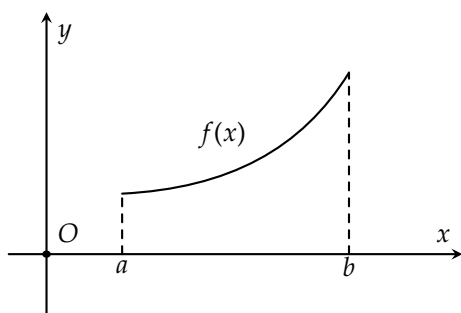
1. Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa 1.1. Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

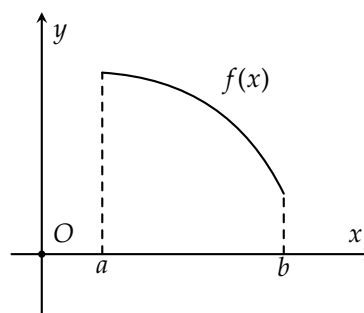
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- ☑ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Lưu ý

- ☑ Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.1.3a). Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.1.3b).



a) Hàm số đồng biến trên $(a; b)$



b) Hàm số nghịch biến trên $(a; b)$

- ☑ Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K còn được gọi chung là đơn điệu trên K . Việc tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số còn được gọi là tìm các khoảng đơn điệu (hay xét tính đơn điệu) của hàm số.
- ☑ Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

Định lý 1.1. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên K . Khi đó:

- ☑ Nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- ☑ Nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

⚠ Chiều ngược lại của các khẳng định trên cũng đúng, nghĩa là nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên K thì $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) với mọi $x \in K$.

2. Cực trị của hàm số

Định nghĩa 1.2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- ☑ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- ☑ Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h, x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

- ⚠**
- ☑ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại của hàm số $f(x)$** . Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại của hàm số $f(x)$** và kí hiệu là f_{CD} hay y_{CD} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại của đồ thị hàm số**.
 - ☑ Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$** . Khi đó, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu của hàm số $f(x)$** và kí hiệu là f_{CT} hay y_{CT} . Điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực tiểu của đồ thị hàm số**.
 - ☑ Các điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số**.

Phương pháp 1.1. Các bước xét tính đơn điệu và tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$

- ☑ Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$;
- ☑ Tính $f'(x)$. Tìm các điểm mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không tồn tại;
- ☑ Lập bảng biến thiên của hàm số và suy ra tính đơn điệu, cực trị của hàm số.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm các khoảng đơn điệu và các điểm cực trị của hàm số sau (hàm đa thức)

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| a) $y = -x^3 + 3x^2 - 4$; | b) $y = x^3 - 3x^2 + 1$; | c) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$; |
| d) $y = -2x^4 + 4x^2$; | e) $y = x^4 + 4x^3 - 1$; | f) $y = -16x^4 + x - 1$. |

📌 Lời giải.

Ví dụ 2

Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số sau

a) $y = \frac{2x+1}{x+1};$

b) $y = \frac{3x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{x^2+2x+2}{x+1};$

d) $y = x + \frac{4}{x};$

e) $y = \sqrt{x^2-2x};$

f) $y = \frac{-2x^2+2x+1}{-2x+3}.$

 **Lời giải.**

Ví dụ 3

Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$) được tính bởi công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$

Hỏi thể tích $V(T)$, $0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?

 **Lời giải.**

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số cho trước

- ① Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y = f(x)$.
- ② Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) thuộc $\mathcal{D}$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- ③ Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần, xét dấu y' và lập bảng biến thiên. Từ đây, nêu các khoảng đồng biến, nghịch biến và các điểm cực trị.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = 7x^3 + 5x^2 + x - 1$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(-\infty, +\infty).$
 Ⓑ $\left(-\frac{1}{7}, +\infty\right).$
 Ⓒ $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ và $\left(-\frac{1}{7}, +\infty\right).$
 Ⓓ $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}\right).$

 **Lời giải.**

Câu 2

Cho hàm số $y = 3x^4 - 6x^2 + 3$. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- Ⓐ $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. Ⓑ $(0, +\infty)$. Ⓒ $(-1; 1)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

 **Lời giải.**

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{-x-1}$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- Ⓐ $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. Ⓑ $(-\infty; +\infty)$.
Ⓒ $(-1, +\infty)$. Ⓓ $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

 **Lời giải.**

Câu 4

Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 2$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

- Ⓐ $(0; -2)$. Ⓑ $x = 0$.
Ⓒ $x = \pm 1$. Ⓓ $(-1; -1)$ và $(1; -1)$.

 **Lời giải.**

Câu 5

Tìm điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$.

- Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = 3$. Ⓒ $A(3; 30)$. Ⓓ $B(1; 34)$.

 **Lời giải.**

Câu 6

Tìm điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

- (A) $x = -1$. (B) $x = 5$. (C) $A(-1; -4)$. (D) $B(5; 8)$.

 Lời giải.

Câu 7

Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

- (A) 2. (B) 1. (C) 3. (D) 0.

 Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - x - 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và trên $(1; +\infty)$.
 (B) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 (C) Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.
 (D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

 Lời giải.

Câu 9

Gọi x_1 là điểm cực đại và x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- (A) 2. (B) 1. (C) -1. (D) 0.

 Lời giải.

Câu 10

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 2. (D) 4.

 **Lời giải.**

Câu 11

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- (A) $(-1; 0)$. (B) $(-1; +\infty)$. (C) $(-3; 8)$. (D) $(-\infty; -1)$.

 **Lời giải.**

Câu 12

Cho hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- (A) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
(C) Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$. (D) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

 **Lời giải.**

Câu 13

Cho hàm số $y = \frac{3x - 1}{x - 2}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
(B) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
(C) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.
(D) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

 **Lời giải.**

Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.
 (B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
 (C) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.
 (D) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$.

👉 Lời giải.

Câu 15

Cho hàm số $y = x^2 + 4 \ln(3-x)$. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số đã cho.

- (A) $y_{CD} = 2$. (B) $y_{CD} = 4$. (C) $y_{CD} = 1 + 4 \ln 2$. (D) $y_{CD} = 1$.

👉 Lời giải.

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = 3x^3 - 3x^2$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- (A) Trên khoảng $(1; +\infty)$ hàm số đồng biến. (B) Trên khoảng $(-1; 1)$ hàm số nghịch biến.
 (C) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị. (D) Đồ thị hàm số có một điểm cực tiểu.

👉 Lời giải.

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

👉 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$. Khi đó

- a) $f'(x) = \frac{-x+2}{\sqrt{x^2-4x}}$. b) Hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$.
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$. d) $f(x) \geq \sqrt{3}$ với mọi $x \in [3; 4]$.

 **Lời giải.**

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x - 2x$. Khi đó

- a) $f'(x) = \cos 2x - 2$.
b) Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
c) $\sin 2a - \sin 2b < 2a - 2b \Leftrightarrow a < b$ với mọi $a, b \in \mathbb{R}$.
d) $\sin 2x < 2x$ với mọi $x > 0$.

 **Lời giải.**

Câu 3

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm cực trị của (C) .

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
c) Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $2x + y - 4 = 0$.
d) Diện tích của tam giác OAB bằng 4, với O là gốc tọa độ.

 **Lời giải.**

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B lần lượt là điểm cực tiểu và điểm cực đại của (C) .

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
 c) Tọa độ điểm $A(-2; -2)$, $B(0; 2)$.
 d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là $AB = 2\sqrt{5}$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$.
 b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.
 c) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$.
 d) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x) = 6x^4 - 3x^2 + 4$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Ta có $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$.
 b) Ta có $f'(x) = 24x^3 - 6x$.
 c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 d) Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm \frac{1}{2}$.

📌 Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
y	1	$+\infty$	1
		$-\infty$	

b) Bảng biến thiên của hàm số là

c) Đạo hàm $y' = \frac{-1}{(x-2)^2}$.

d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

📌 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 8

Gọi y_{CD} , y_{CT} lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Giá trị của biểu thức $y_{\text{CD}}^2 - 2y_{\text{CT}}^2$ bằng

📌 Lời giải.

Câu 9

Tìm điểm cực tiểu của hàm số $f(x) = (x - 3)e^x$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị là $(-1; 18)$ và $(3; -16)$. Tính tổng $P = a + b + c + d$.

📌 Lời giải.

Câu 11

Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Biết khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng $AB = \frac{a\sqrt{b}}{b}$. Khi đó $30 \cdot a - b$ bằng

👉 **Lời giải.**

Câu 12

Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích S bằng bao nhiêu?

👉 **Lời giải.**

Câu 13

Goi A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC gần bằng bao nhiêu (làm tròn tròn đến phần mười)?

👉 **Lời giải.**

Câu 14

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$ đạt cực tiểu tại $x = a$, cực đại tại $x = b$. Khi đó $3 \cdot a + 6 \cdot b$ bằng bao nhiêu?

👉 **Lời giải.**

Dạng ② Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên

- ① Nắm vững các khái niệm liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số.
- ② Dựa vào bảng biến thiên để kết luận tính đơn điệu và cực trị của hàm số.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới. Đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm nào sau đây?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{35}{9}$		$\frac{73}{9}$		$-\infty$

A $\left(\frac{5}{3}; \frac{73}{9}\right)$.

B $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{35}{9}\right)$.

C $x = -\frac{1}{3}$.

D $x = \frac{5}{3}$.

 **Lời giải.**

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Điểm cực tiểu của hàm số là

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			6		5		6	

$-\infty \nearrow \quad \searrow 5 \nearrow \quad \searrow -\infty$

A $x = 5$.

B $x = 0$.

C $x = 6$.

D $x = \pm 1$.

 **Lời giải.**

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như bên dưới. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			10		$\frac{145}{27}$		$+\infty$
	$-\infty$						

Ⓐ 10.

Ⓑ -2 .Ⓒ $\frac{145}{27}$.Ⓓ $-\frac{1}{3}$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
 Ⓑ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
 Ⓒ Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
 Ⓓ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			3		0		$+\infty$
	$-\infty$						

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			-4		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$				4	

Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- Ⓐ Hàm số có hai điểm cực trị.
 Ⓑ Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
 Ⓒ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
 Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- d) Hàm số có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$

 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên bên dưới

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2; -4)$.
- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		-1		$+\infty$	
	$-\infty$		-3		

Khi đó

- a) $f(x) < 0, \forall x < -2$.
c) $b > 0$.

- b) $f'(-2) < f'(1)$.
d) $c > 0$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số có 2 điểm cực trị.
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
d) Hàm số $f(1 - x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	-3	-2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	0	5	$-\infty$	

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -2)$.
b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

- c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = x - \ln(1 + x)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số có tập xác định là $(-1; +\infty)$. b) Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.
c) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$. d) Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$.

 Lời giải.

Dạng 3 Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số

- ① Nắm vững các khái niệm liên quan đến đơn điệu và cực trị của hàm số.
② Dựa vào đồ thị cùng kiến thức đã học để suy ra tính đơn điệu và cực trị của hàm số

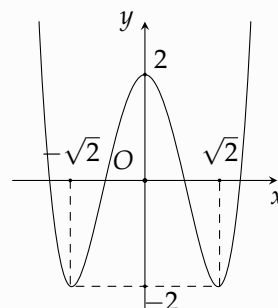
2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

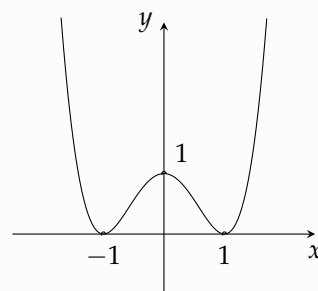
- A** $(\sqrt{2}; +\infty)$. **B** $(-2; 2)$.
C $(-\infty; 0)$. **D** $(0; \sqrt{2})$.



 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khi đó nhận xét nào sau đây đúng?

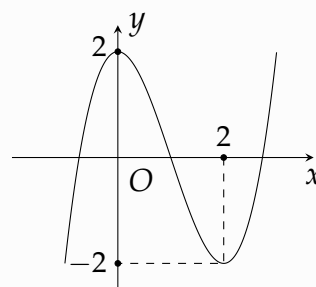


- ☐ A Hàm số $f(x)$ không có cực trị.
- ☐ B Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng 2 điểm cực tiểu.
- ☐ C Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một cực đại.
- ☐ D Hàm số $f(x)$ có 3 cực trị.

📌 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề sai?

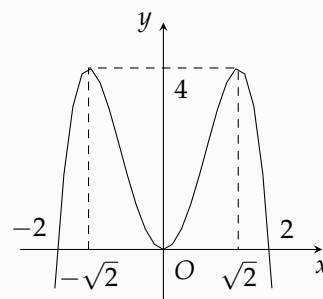


- ☐ A Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.
- ☐ B Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -2 .
- ☐ C Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$.
- ☐ D Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?



- ☐ A $x = 2$.
- ☐ B $x = 0$.
- ☐ C $x = -2$.
- ☐ D $x = 4$.

📌 Lời giải.

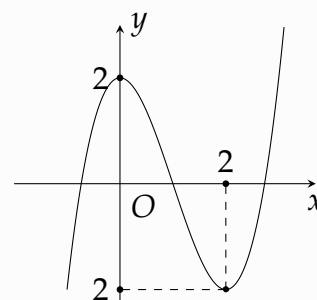
PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng

hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là 0 và 2.
- b) Giá trị b bằng 0.
- c) Giá trị $c = -2$.
- d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$.

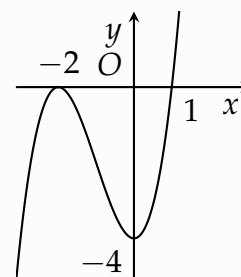


📌 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

- a) Hàm số có hai điểm cực trị.
- b) $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
- c) $f'(x) < 0$ trên $(0; 1)$.
- d) $f'(-3) < f'(-1)$.



📌 Lời giải.

Câu 3

Cho bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) như sau.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

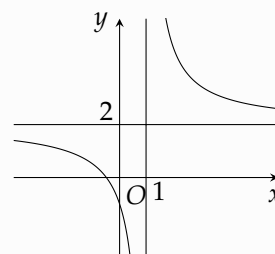
- a) $a > 0$.
- b) $b < 0$.
- c) $c \geq 0$.
- d) $d = 0$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- Hàm số xác định với mọi $x \neq 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.
- Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.
- Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.



📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
y'		+	+	0	-
y	-2	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

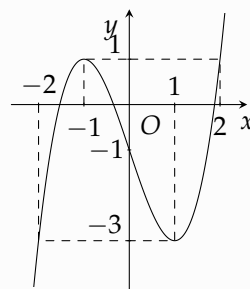
- Hàm số đã cho không xác định tại $x = -2$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$.
- Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

- $d = -1$.
- $a < 0$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
- $y'(2) < 0$.

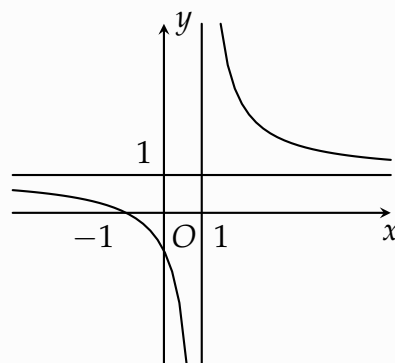


👉 Lời giải.

Câu 7

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- Hàm số nghịch biến trên tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.
- Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- $f(2024) < f(2025)$.

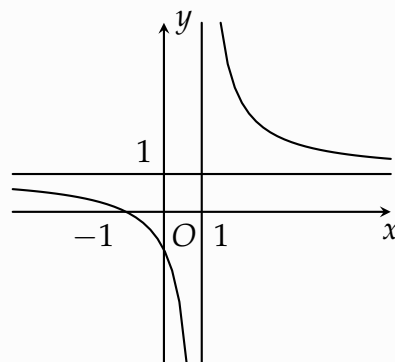


👉 Lời giải.

Câu 8

Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ với $c \neq 0, ad - bc \neq 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm.
- $f'(2) > 0$.
- $f'(x) < 0$ trên $(0; 1)$.
- $f'(-3) < f'(-1)$.



👉 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Cho $a \neq 0, b^2 - 3ac > 0$. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

📌 Lời giải.

Câu 2

Gọi (P) là parabol qua 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - mx^2 + m^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để (P) qua $A(2; 24)$.

📌 Lời giải.

Dạng 4

Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$

- ① Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ để xác định dấu của $f'(x)$.
- ② Từ dấu của $f'(x)$ để suy ra tính đơn điệu và cực trị của hàm số $y = f(x)$.

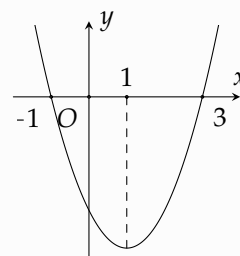
3. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ là parabol như hình vẽ bên. khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng

- Ⓐ $(-\infty; 1)$. Ⓑ $(1; +\infty)$. Ⓒ $(-1; 3)$. Ⓓ $(-\infty; -1)$.

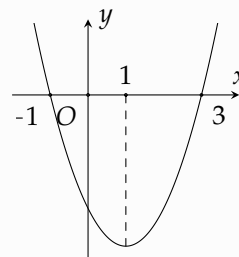


📌 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ là parabol như hình vẽ bên. Khi đó hàm số đạt cực tiểu tại điểm

- Ⓐ $x = 1$. Ⓑ $x = -1$. Ⓒ $x = 3$. Ⓓ $x = 2$.



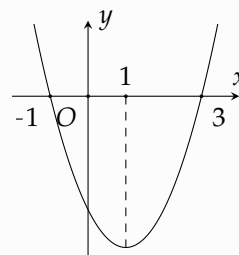
📌 **Lời giải.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ là parabol như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của mỗi khẳng định sau

- a) $f'(-1) = 0$.
b) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.
c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.
d) Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

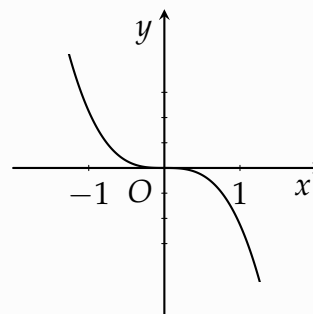


📌 **Lời giải.**

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
b) Hàm số $f(x)$ có một cực trị.
c) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
d) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

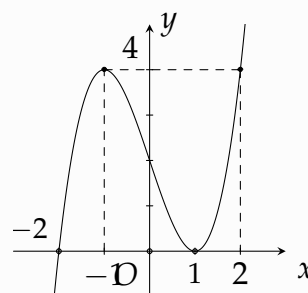


📌 **Lời giải.**

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, và đồ thị của $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

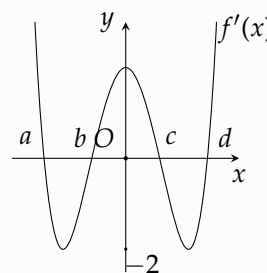


📌 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(0; d)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; a)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(b; d)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

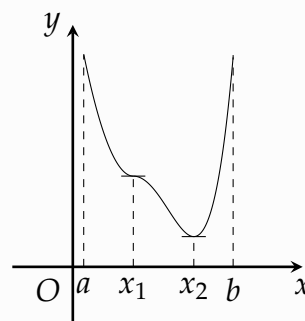


📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

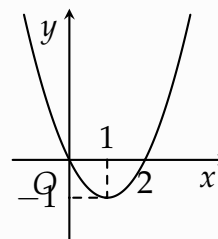
- a) Hàm số nghịch biến trong khoảng $(x_1; x_2)$.
- b) $f'(x) > 0, \forall x \in (x_2; b)$.
- c) Hàm số nghịch biến trong khoảng $(a; x_2)$.
- d) $f'(x) < 0, \forall x \in (a; x_2)$.



📌 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với a, b, c, d là các số thực và $a \neq 0$) có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên. Khi đó



- Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.
- Điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là $x = 1$.
- Điểm cực đại của hàm số $f(x)$ là $x = 0$.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; 2)$.

📌 Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C) và A, B là hai điểm cực trị của (C).

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.
- A và B nằm về hai phía của trục tung.
- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x + 1$.

📌 Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$

- $y' = 3x^2 + 6x - m$.
- Với $m = 9$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- Với $m = -3$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi $m \leq -3$.

📌 Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx + 9}$

- $m = 0$ hàm số không có cực trị.
- $m = 1$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

c) $y' = \frac{x - m}{\sqrt{x^2 - 2mx + 9}}.$

d) Có 7 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị.

📌 Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}.$

- a) Với $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- b) Với $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi $m \in [a; b]$. Khi đó $a + 5b = 0$.
- d) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \in \left(-\frac{1}{5}; -1\right).$

📌 Lời giải.

4. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 11

Một vật có chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t > 0$, t tính bằng giây và s tính bằng mét. Bắt đầu từ thời điểm nào (giây) thì vận tốc của vật tăng?

📌 Lời giải.

Câu 12

Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu thì năng lượng tiêu hao của cá bắt đầu tăng dần?

📌 Lời giải.

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

📌 Lời giải.

Câu 14

Thể tích V (cm³) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0 \leq T \leq 30$) đơn vị °C được tính theo công thức

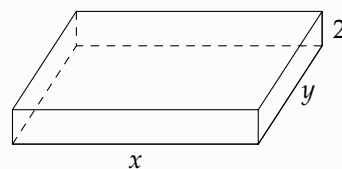
$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

Thể tích nước $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ $(a; b)$ với b làm tròn đến hàng đơn vị. Tính tổng $a + b$.

📌 Lời giải.

Câu 15

Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích 1 800 m³ và chiều sâu 2 m (tham khảo hình vẽ). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi x và y là kích thước bể như hình vẽ. Khảo sát mối quan hệ giữa chi phí xây dựng bể $f(x)$ và kích thước x ta thu được bảng biến thiên như sau:



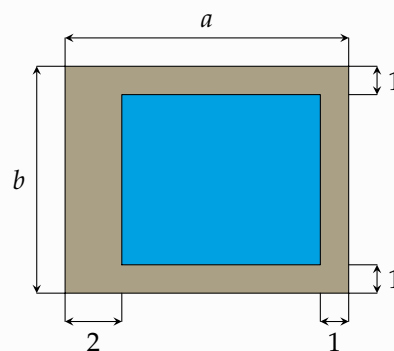
x	0	a	$+\infty$	
$f'(x)$		–	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$f(a)$	$+\infty$

Tính giá trị $2a$.

📌 Lời giải.

Câu 16

Người ta muốn thiết kế một lồng nuôi cá có bề mặt hình chữ nhật bao gồm phần mặt nước có diện tích bằng 54 m^2 và phần đường đi xung quanh có thiết kế như hình vẽ (đơn vị: mét). Khi kích thước a thay đổi trong khoảng $(3; +\infty)$ thì giá trị hàm số mô tả diện tích lối đi theo kích thước a sẽ giảm đến giá trị S_0 rồi tăng lên. Xác định giá trị S_0 .



👉 Lời giải.

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{8 - 5x}{-4x - 9}$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- Ⓐ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{37}{4})$.
- Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{9}{4})$.
- Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\frac{9}{4}; +\infty)$.
- Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{37}{4})$.

👉 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{218}{27}$	$\searrow$	$-\frac{17}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

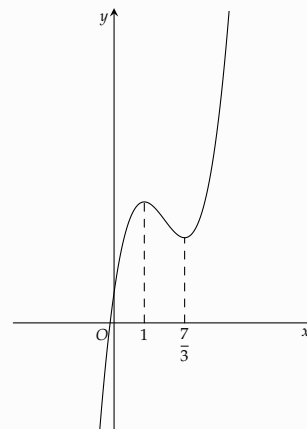
- A** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{4}{3})$.
- B** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\frac{4}{3}; \frac{1}{2})$.
- C** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{7}{2}; +\infty)$.
- D** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\frac{7}{3})$.

Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- C** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(\frac{7}{3}; +\infty)$.
- D** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.



Lời giải.

Câu 4

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - m + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- A** $m \leq -3, m \geq 1$.
- B** $-3 < m < 1$.
- C** $-3 \leq m \leq 1$.
- D** $m \leq 1$.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m + 9)x + 5$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- (A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 4.

📌 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = 7x^3 + 9x^2 - 3x - 4$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) Giá trị cực đại $y = 1$. (B) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{7}$.
 (C) Giá trị cực tiểu $y = \frac{1}{7}$. (D) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

📌 Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau

x	$-\infty$	10	12	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			-3		3		$-\infty$
	$-\infty$						

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại

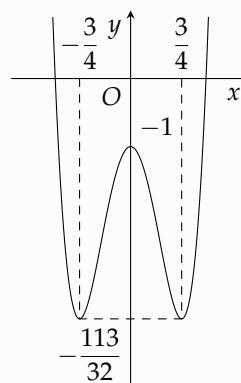
- (A) $x = 10$. (B) $x = 8$. (C) $x = 12$. (D) $x = 17$.

📌 Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào **sai**?

- ☐ A Hàm số có một cực tiểu tại $x = \frac{3}{4}$ và đạt cực đại tại $x = 0$.
- ☐ B Giá trị cực đại $y = -1$ và giá trị cực tiểu $y = -\frac{113}{32}$.
- ☐ C Hàm số có một cực tiểu tại $x = -\frac{3}{4}$.
- ☐ D Hàm số có một cực đại tại $x = -\frac{3}{4}$.



Lời giải.

Câu 9

Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 - 8x^2 - 4$ là

- ☐ A $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$.
- ☐ B $(-2; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- ☐ C $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.
- ☐ D $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải.

Câu 10

Hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ nghịch biến trên các khoảng nào sau đây?

- ☐ A $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
- ☐ B $(-\infty; -1)$ và $(0; +\infty)$.
- ☐ C $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- ☐ D $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-3}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- ☐ A Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.
- ☐ B Hàm số nghịch biến trên tập xác định của nó.
- ☐ C Hàm số nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

📌 Lời giải.

Câu 12

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.
- Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.
- Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 4)$.
- Ⓓ Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

📌 Lời giải.

Câu 13

Hàm số nào sau đây **không** đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

- Ⓐ $y = x^5 + x^3 - 1$.
- Ⓑ $y = x^3 + 2$.
- Ⓒ $y = \frac{x-1}{x+2}$.
- Ⓓ $y = x + 1$.

📌 Lời giải.

Câu 14

Cho hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Ⓑ Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- Ⓒ Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Ⓓ Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

📌 Lời giải.

Câu 15

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định liên tục và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘		↗	
			0		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây đúng?

- ☐ A Hàm số có 2 cực trị.
 ☐ B Hàm số có giá trị cực đại bằng 2.
 ☐ C Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 0.
 ☐ D Hàm số có giá trị cực đại tại $x = 0$.

 **Lời giải.**

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau. Mệnh đề nào dưới đây là **sai**?

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	
			3		0		$+\infty$

- ☐ A Hàm số **không** đạt cực tiểu tại điểm $x = 2$.
 ☐ B Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 0$.
 ☐ C Giá trị cực đại của hàm số là $y = 3$.
 ☐ D Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = 0$.

 **Lời giải.**

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		↗ 3		↘ 0		↗ $+\infty$

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- ☐ A $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 2$.
 ☐ B $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$.
 ☐ C $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 3$.
 ☐ D $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

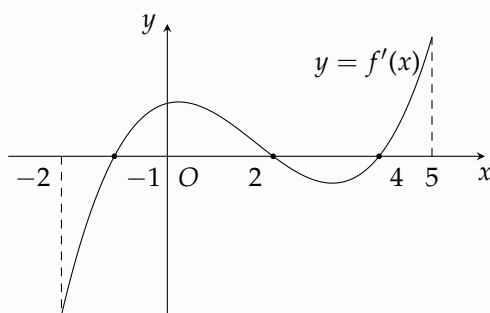
📌 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
 b) Hàm số đồng biến trên $(-1; 2)$ và $(4; 5)$.
 c) Hàm số nghịch biến trên $(2; 4)$.
 d) Hàm số $f(x + 2)$ đạt cực đại tại $x = 0$.



📌 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau.

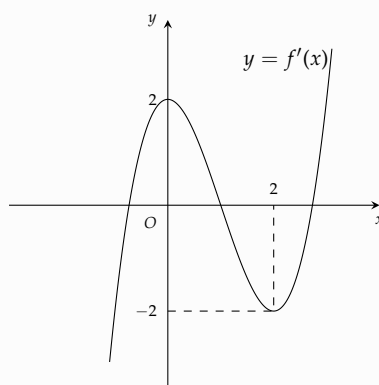
- Hàm số có 2 cực trị.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Hàm số $f(1 - x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ là đường cong ở hình vẽ dưới.

- Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0; 2)$.
- Hàm số $f(x)$ có 2 khoảng đồng biến và 2 khoảng nghịch biến.
- Hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

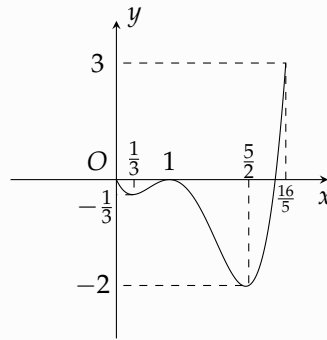


 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{16}{5}\right]$ thoả mãn

$f'(\frac{1}{3}) = f'(1) = f'(\frac{5}{2}) = 0$ và có đồ thị là đường cong như hình dưới.



- a) $x = 1$ là điểm cực đại của hàm số.
- b) $x = \frac{1}{3}, x = \frac{5}{2}$ là điểm cực tiểu của hàm số.
- c) Hàm số đã cho nghịch biến trên $(\frac{1}{3}; 1)$ và $(\frac{5}{2}; +\infty)$.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 3.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

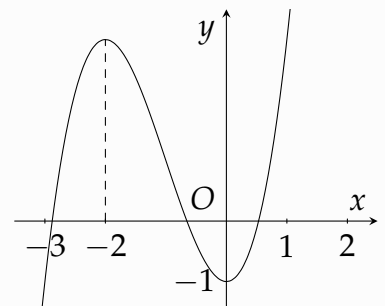
- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên $(3; +\infty)$.
- c) Hàm số đã cho nghịch biến trên $(1; 2)$.
- d) Hàm số $g(x) = f(x) + 2$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2, 0)$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- d) Hàm số $f = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-2, 0)$.



Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

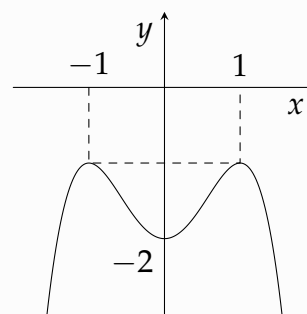
- a) Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 0$.
- b) Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -3$.
- c) Hàm số đã cho có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là $-4, -3$.
- d) Đồ thị hàm số $g(x) = f(x) + 3$ có điểm cực đại là $(0; 0)$.

👉 Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

- a) Hàm số đã cho chỉ có 2 cực trị.
- b) Hàm số đã cho có giá trị cực tiểu $x = -2$.
- c) Hàm số đã cho có giá trị cực đại $y = -1$.
- d) Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có điểm cực đại là $(0, 2)$.



👉 Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị (C) và A, B là hai điểm cực trị của (C).

- a) Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- b) $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.
- c) A và B nằm về hai phía của trục tung.
- d) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = 2x + 1$.

👉 Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$

- a) $y' = 3x^2 + 6x - m$.
- b) Với $m = 9$, hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- c) Với $m = -3$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ khi $m \leq -3$.

 **Lời giải.**

Câu 11

Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2mx + 9}$

- a) $m = 0$ hàm số không có cực trị.
- b) $m = 1$ hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- c) $y' = \frac{x - m}{\sqrt{x^2 - 2mx + 9}}$.
- d) Có 7 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có cực trị.

 **Lời giải.**

Câu 12

Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$.

- a) Với $m = -1$ thì hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$.
- b) Với $m = 0$ thì hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi $m \in [a; b]$. Khi đó $a + 5b = 0$.
- d) Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m \in \left(-\frac{1}{5}; -1\right)$.

 **Lời giải.**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Một vật có chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$ với $t > 0$, t tính bằng giây và s tính bằng mét. Bắt đầu từ thời điểm nào (giây) thì vận tốc của vật tăng?

 Lời giải.

Câu 2

Một con cá hồi bơi ngược dòng để vượt khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Nếu vận tốc bơi của cá khi nước yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$, trong đó c là hằng số và E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu thì năng lượng tiêu hao của cá bắt đầu tăng dần?

 Lời giải.

Câu 3

Thể tích V (cm³) của 1 kg nước tại nhiệt độ T ($0 \leq T \leq 30$) đơn vị °C được tính theo công thức

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

Thể tích nước $V(T)$ giảm trong khoảng nhiệt độ $(a; b)$ với b làm tròn đến hàng đơn vị. Tính tổng $a + b$.

 Lời giải.

Câu 4

Hàng ngày mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tại thời điểm t (giờ) ($0 \leq t \leq 24$) trong ngày được xác định bởi công thức $h = 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$. Gọi $(a; b)$ là khoảng thời gian lớn nhất trong ngày mà độ sâu của mực nước trong kênh tăng dần. Tính giá trị của $a + b$.

 Lời giải.

Câu 5

Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi

nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

📌 Lời giải.

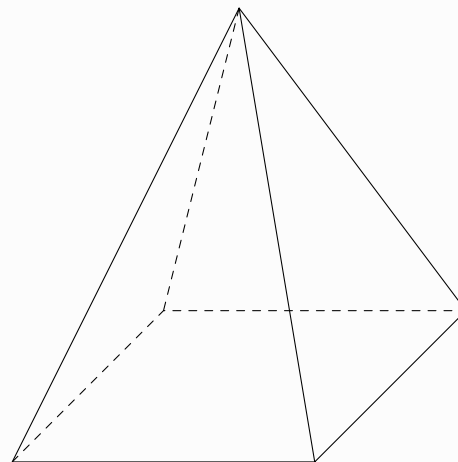
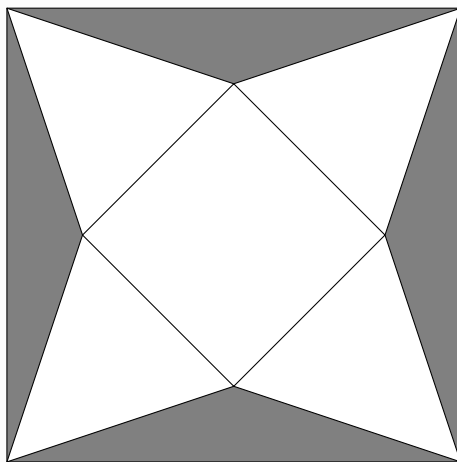
Câu 6

Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ mg/l của thuốc trong máu sau x phút được xác định bởi công thức $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$. Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (làm tròn đến hàng phần mười)?

📌 Lời giải.

Câu 7

Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gập và may lại, nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí để tránh hư hại tháp khi trời mưa.



Biết khối chóp hình thành sau khi gập và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên?

📌 Lời giải.

Câu 8

Người ta thấy rằng trong vòng 3 năm tính từ đầu năm 2020, giá thành P của một loại sản phẩm vào tháng thứ t thay đổi theo công thức

$$P(t) = 80t^3 - 3\,600t^2 + 48\,000t + 100\,000 \text{ (đồng)} \text{ với } 0 \leq t \leq 36.$$

Biết giá thành đạt cực đại vào thời điểm t_1 và giá thành đạt cực tiểu vào thời điểm t_2 . Khi đó, giá trị của $2t_1 + t_2$ bằng bao nhiêu?

📌 **Lời giải.**

Câu 9

Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

📌 **Lời giải.**

§2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT - NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

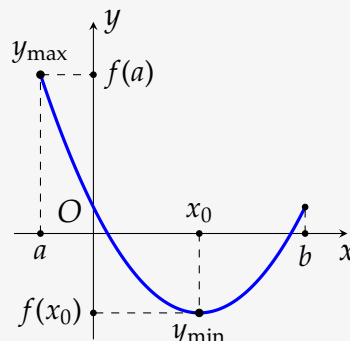
Định nghĩa 2.1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$. Ta có

- ① M là giá trị lớn nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = M. \end{cases}$

Kí hiệu $\max_{x \in \mathcal{D}} f(x) = M$

- ② n là giá trị nhỏ nhất của hàm số nếu $\begin{cases} f(x) \geq n, \forall x \in \mathcal{D} \\ \exists x_0 \in \mathcal{D} : f(x_0) = n. \end{cases}$

Kí hiệu $\min_{x \in \mathcal{D}} f(x) = n$



- ① Khi yêu cầu tìm max min của hàm số mà không nói rõ xét trên tập nào, thì ta hiểu là tìm max min trên miền xác định của hàm số đó.
- ② Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên miền $\mathcal{D}$, ta thường lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên $\mathcal{D}$. Từ bảng biến thiên, ta kết luận:
- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.
- ③ Để tìm max min của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ ($f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a; b)$), thì ta có thể giải như sau:
- Giải $f'(x) = 0$ tìm các nghiệm $x_0 \in (a; b)$;
 - Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó đạo hàm không xác định (nếu có).
 - Tính toán $f(a), f(x_0), f(x_i), f(b)$ (*)
 - Gọi M, n lần lượt là số lớn nhất và số nhỏ nhất của các kết quả tính toán ở bước (*) thì

$$M = \max_{[a; b]} f(x); \quad n = \min_{[a; b]} f(x)$$

- ④ Ta có thể dùng các bất đẳng thức có sẵn để đánh giá biểu thức cần tìm max, min. Bất đẳng thức Cô-si cho n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 10$ trên $[-3; 1]$.

b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên $[-3; 2]$.

c) $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên $[0; 2]$

d) $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ trên $[0; 4]$.

📌 Lời giải.

Ví dụ 2

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên đoạn đã chỉ ra.

a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên $(0; +\infty)$;

b) $f(x) = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên $(0; +\infty)$.

c) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ trên $\mathbb{R}$.

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ trên miền xác định.

📌 Lời giải.

Ví dụ 3

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $y = x - \sin 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

b) $y = e^{x^3-3x+3}$ trên đoạn $[0; 2]$

c) $y = e^x(x^2 - 3)$ trên đoạn $[-2; 2]$

d) $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^5]$

📌 Lời giải.

Ví dụ 4

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của hàm số sau trên miền đã chỉ ra.

a) $f(x) = \frac{5 \sin x + 1}{\sin x + 2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

b) $y = \cos^3 x + 2 \sin^2 x + \cos x$.

📌 Lời giải.

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ trên miền cho bởi công thức $\mathcal{D}$

- ① Tính y' . Giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm $x_i \in \mathcal{D}$ và tìm các điểm $x_j \in \mathcal{D}$ mà tại đó y' không xác định.
- ② Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\mathcal{D}$.
- ③ Từ bảng biến thiên, kết luận:
 - Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-2; 3]$ lần lượt là

- ☐ A 17, -15.
 ☐ B 10, -26.
 ☐ C -15, 17.
 ☐ D 6, -26.

Lời giải.

Câu 2

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên $[-4; 4]$. Tính tổng $M + m$.

- ☐ A 12.
 ☐ B 98.
 ☐ C 17.
 ☐ D 73.

Lời giải.

Câu 3

Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^4 + 12x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

- ☐ A 33.
 ☐ B 37.
 ☐ C 12.
 ☐ D 1.

Lời giải.

Câu 4

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$ bằng

- (A) 57. (B) 56. (C) 54. (D) 55.

 **Lời giải.**

Câu 5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là

- (A) $\min_{[0;3]} y = \frac{1}{2}$. (B) $\min_{[0;3]} y = -3$. (C) $\min_{[0;3]} y = 1$. (D) $\min_{[0;3]} y = -1$.

 **Lời giải.**

Câu 6

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[0; 4]$ là

- (A) 2. (B) $\frac{7}{5}$. (C) 3. (D) $\frac{11}{5}$.

 **Lời giải.**

Câu 7

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ bằng

- (A) 4. (B) -3. (C) $-\frac{7}{2}$. (D) $-\frac{13}{3}$.

 **Lời giải.**

Câu 8

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ là

- (A) $M = -2$. (B) $M = 2$. (C) $M = 4$. (D) $M = 0$.

📌 Lời giải.

Câu 9

Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{7 + 6x - x^2}$.

- (A) $M = 4$. (B) $M = \sqrt{7}$. (C) $M = 7$. (D) $M = 3$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Tính giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên $\left[\frac{1}{2}; e\right]$.

- (A) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = 1$. (B) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e - 1$.
 (C) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = e$. (D) $\max_{x \in \left[\frac{1}{2}; e\right]} y = \frac{1}{2} + \ln 2$.

📌 Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{x - 1}$. Khi đó giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-5, 0]$ lần lượt bằng

- (A) $\max_{[-5, 0]} f(x) = \frac{37}{6}, \min_{[-5, 0]} f(x) = 2$. (B) $\max_{[-5, 0]} f(x) = \frac{37}{6}, \min_{[-5, 0]} f(x) = 11$.
 (C) $\max_{[-5, 0]} f(x) = 0, \min_{[-5, 0]} f(x) = 2$. (D) $\max_{[2, 0]} f(x) = \frac{37}{6}, \min_{[-5, 0]} f(x) = -2$.

📌 Lời giải.

Câu 12

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \sqrt{13 - x^2}$

- Ⓐ $\max_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = 0; \min_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = -\sqrt{13}.$
- Ⓑ $\max_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = \sqrt{26}; \min_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = 0.$
- Ⓒ $\max_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = \sqrt{26}; \min_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = -\sqrt{13}.$
- Ⓓ $\max_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = 15; \min_{[-\sqrt{13}; \sqrt{13}]} f(x) = 2.$

📌 Lời giải.

Câu 13

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x\sqrt{81 - x^2}$

- Ⓐ $\max_{[-9; 9]} f(x) = 0; \min_{[-9; 9]} f(x) = -\frac{81}{2}.$
- Ⓑ $\max_{[-9; 9]} f(x) = 15; \min_{[-9; 9]} f(x) = 2.$
- Ⓒ $\max_{[-9; 9]} f(x) = \frac{81}{2}; \min_{[-9; 9]} f(x) = 0.$
- Ⓓ $\max_{[-9; 9]} f(x) = \frac{81}{2}; \min_{[-9; 9]} f(x) = -\frac{81}{2}.$

📌 Lời giải.

Câu 14

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 1 + 2x - e^x$ trên đoạn $[0; 2]$

- Ⓐ $\max_{[0; 2]} f(x) = 15.$
- Ⓑ $\max_{[0; 2]} f(x) = 5 - e^2.$
- Ⓒ $\max_{[0; 2]} f(x) = 3\sqrt{5}.$
- Ⓓ $\max_{[0; 2]} f(x) = -1 + \ln(4).$

📌 Lời giải.

Câu 15

Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4\ln(1 - x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tính $M - N$.

- ☐ A $M - N = 4\ln 2$.
 ☐ B $M - N = -1$.
 ☐ C $M - N = 4\ln 2 - 1$.
 ☐ D $M - N = 4\ln 3 - 4$.

 Lời giải.

Câu 16

Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = e^{3x^2 - 2x^3} - f(x)$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng

- ☐ A $e - f(1)$.
 ☐ B $f(1)$.
 ☐ C $f(0)$.
 ☐ D $1 - f(0)$.

 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
 b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -3$.
 c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
 d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $I(1; -1)$.

 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-26; +\infty)$.
 b) Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
 c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1; +\infty)$ là -26 .
 d) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $4\sqrt{65}$.

 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Cho hàm số $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ thoả mãn $\min_{[0;5]} f(x) = 5$. Khi đó giá trị của m bằng

👉 Lời giải.

Câu 2

Tìm m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2(m - 10)$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng -5 .

👉 Lời giải.

Câu 3

Có bao nhiêu giá trị m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x - m^2 + m}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 1]$ bằng -2 .

👉 Lời giải.

Câu 4

Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 3\sin^2 x + 2$ lần lượt là M, m . Tổng $M + m$ bằng

👉 Lời giải.

Câu 5

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 2019$ là

👉 Lời giải.

Dạng 2 Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào bảng biến thiên

② Dựa vào bảng biến thiên của hàm số trên $[a; b]$.

③ Từ bảng biến thiên, kết luận:

- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
- Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP**Câu 1**

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau.

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y			5		1	4

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- Ⓐ $M = f(0)$. Ⓑ $M = f(-1)$. Ⓒ $M = f(3)$. Ⓓ $M = f(2)$.

Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-2; 3]$ như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-	+
$f(x)$				1		5

Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của biểu thức $M - m$ là

- Ⓐ 5. Ⓑ 7. Ⓒ -1. Ⓓ 3.

Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Cực đại của hàm số là 4. b) Cực tiểu của hàm số là 3.
 c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4$. d) $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-4	-3	-4	$+\infty$

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$. b) Giá trị cực tiểu của hàm số là -3 .
 c) $\min_{\mathbb{R}} y = -4$. d) $\max_{\mathbb{R}} y = -3$.

Lời giải.

Câu 3

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có bảng biến thiên như sau. Khi đó ta có

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y			5		4	
	0			1		

- a) Trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5.
b) Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.
c) Trên đoạn $[-1; 3]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.
d) $f(2) = 1$.

📌 Lời giải.

Dạng 3 Tìm max, min của hàm số $y = f(x)$ dựa vào đồ thị hàm số

- ② Dựa vào đồ thị của hàm số trên $[a; b]$.
③ Từ đồ thị, kết luận:
- Điểm ở vị trí cao nhất $\rightarrow$ Kết luận max;
 - Điểm ở vị trí thấp nhất $\rightarrow$ Kết luận min.

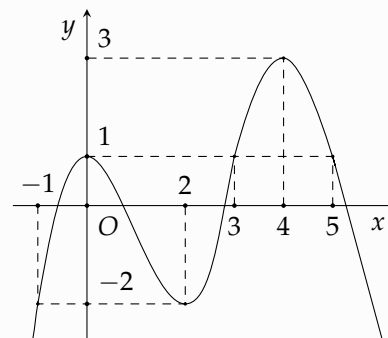
3. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 5]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1; 5]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 1.

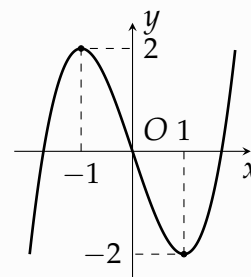


📌 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong ở hình bên. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

- ☐ A $m = 2$. ☐ B $m = -2$.
☐ C $m = 1$. ☐ D $m = -1$.

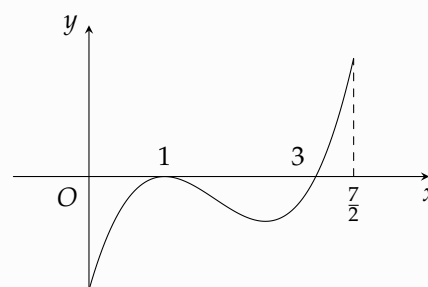


Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$, có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0; \frac{7}{2}\right]$ tại điểm x_0 nào dưới đây?

- ☐ A $x_0 = 3$. ☐ B $x_0 = 2$. ☐ C $x_0 = 1$. ☐ D $x_0 = 0$.

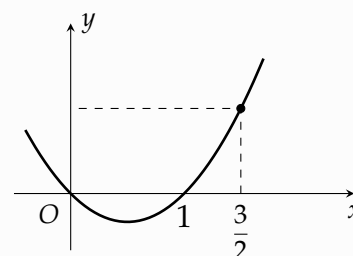


Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$, biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ tại điểm nào sau đây?

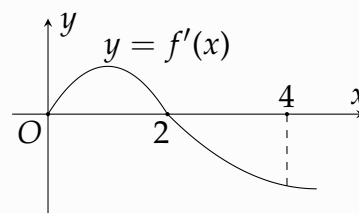
- ☐ A $x = \frac{3}{2}$. ☐ B $x = \frac{1}{2}$. ☐ C $x = 1$. ☐ D $x = 0$.



Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Biết $f(0) + f(1) - 2f(2) = f(4) - f(3)$. Giá trị nhỏ nhất m , giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 4]$ là



- ☐ A $m = f(4), M = f(1)$. ☐ B $m = f(4), M = f(2)$.
☐ C $m = f(1), M = f(2)$. ☐ D $m = f(0), M = f(2)$.

👉 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

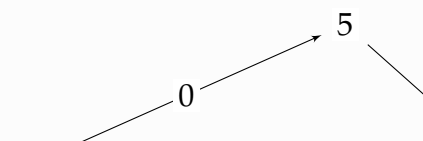
Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ và một số thực M . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Nếu $f(x) \leq M, \forall x \in \mathcal{D}$ thì $\max_{\mathcal{D}} f(x) = M$.
 b) Nếu $f(x) \geq M, \forall x \in \mathcal{D}$ thì $\min_{\mathcal{D}} f(x) = M$.
 c) Nếu $f(x) = M, \forall x \in \mathcal{D}$ thì $\max_{\mathcal{D}} f(x) = M$.
 d) Nếu $f(x) = M, \forall x \in \mathcal{D}$ thì $\min_{\mathcal{D}} f(x) = M$.

👉 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

x	$-\infty$	-3		-2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	-
$f(x)$						

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 5)$. b) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = -2$.
 c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2 . d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 .

Lời giải.

Câu 3

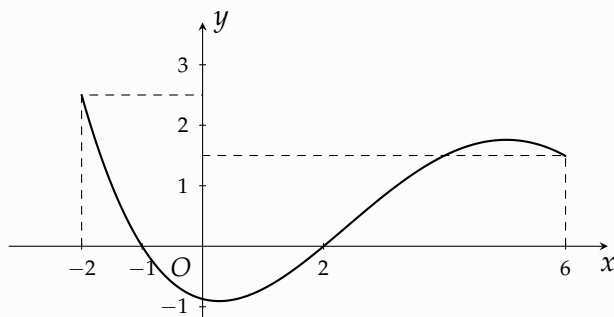
Cho hàm số $y = x^2 - 4 \ln(1 - x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = (1; +\infty)$.
- b) Đạo hàm của hàm số là $y' = \frac{-2x^2 + 2x + 4}{1 - x}$.
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 0]$ là 2.
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 0]$ là $1 - 4 \ln 2$.

Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên dưới. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau

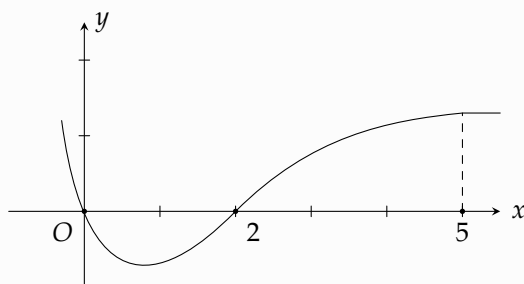


- a) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$.
- b) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$.
- c) $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$.
- d) $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max \{f(-1), f(6)\}$.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ. Biết rằng $f(0) + f(3) = f(2) + f(5)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau



- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
 c) $\min_{[0;5]} f(x) = f(0)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$. d) $\min_{[0;5]} f(x) = f(2)$ và $\max_{[0;5]} f(x) = f(5)$.

📌 Lời giải.

Dạng 4 Tìm max, min của bài toán thực tế liên môn

- ② Phân tích dữ liệu của bài toán và quy yêu cầu bài toán về hàm số.
 ③ Tìm *max*, *min* của hàm số để từ đó trả lời bài toán.

4. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Một trang trại mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau, nếu giá bán cứ tăng thêm 1000 đồng/kg thì số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được bán để làm thức ăn cho gia súc với giá 2000 đồng/kg. Hỏi số tiền bán rau nhiều nhất mà trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

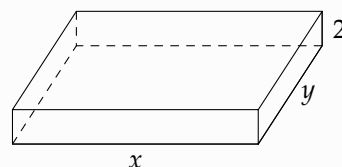
- Ⓐ 32420000 đồng. Ⓑ 32400000 đồng. Ⓒ 34400000 đồng. Ⓓ 32240000 đồng.

📌 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 2

Người ta muốn xây một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật, thể tích 1800 m^3 và chiều sâu 2 m (hình bên). Biết rằng chi phí xây mỗi đơn vị diện tích của đáy bể gấp hai lần so với thành bể. Gọi $x \text{ (m)}$ và $y \text{ (m)}$ là hai kích thước của mặt đáy.



- Thể tích bể bơi được tính theo công thức $V = 2x^2y$.
- Mối liên hệ giữa x và y là $y = \frac{900}{x}$.
- Tổng diện tích mặt bên của bể tính theo x, y là $S = 4(x + y)$.
- Để tổng chi phí xây dựng (bao gồm mặt đáy và mặt bên) nhỏ nhất thì cần chọn chiều dài là 40 m .

📌 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $f(x) = x - \sqrt{1 - x^2}$.

- Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $\mathcal{D} = [-1; 1]$.
- $\max_{x \in [-1; 1]} f(x) = f(-1)$.
- Bất phương trình $f(x) - m \leq 0$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq -1$.
- Có đúng 1 giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $f(x) \geq mx$ có nghiệm $x \in (0; 1]$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Xét hàm số $f(x) = e^{2x} - 4e^x + m$ trên $\mathcal{D} = [0; \ln 4]$.

- Khi $m = 1$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathcal{D}$ bằng -3 .
- Khi $m = 1$ giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathcal{D}$ bằng -2 .
- Để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathcal{D}$ bằng 5 thì $m = 9$.
- Có hai giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $\mathcal{D}$ bằng 6 .

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = \log_2 (x^2 - 3x + 2)$.

- Tập xác định của hàm số là $(2; +\infty)$.
- Hàm số luôn có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 0]$.
- Trên đoạn $[-1; 0]$ hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1.
- Gọi m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $g(x) = 2^{f(x)} + m$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[3; 4]$ bằng -3 . Khi đó $m_0 \in (-5; 0)$.

👉 Lời giải.

Câu 6

Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $x \in [27; 31]$.

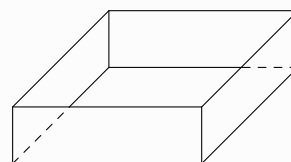
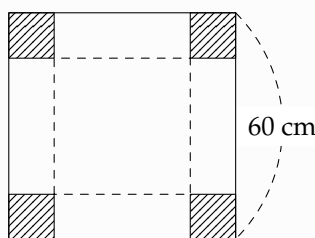
- Với giá bán mới là 30 triệu thì số xe bán ra là 200 chiếc.
- Lợi nhuận thu được biểu thị qua hàm số $f(x) = -200x^2 + 12\,200x - 183\,600$.
- Với giá bán mới là 30 triệu thì lợi nhuận thu được là 24 000 (triệu đồng).
- Giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

👉 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gập thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (H.1.14). Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Hình 1.14

👉 Lời giải.

Câu 2

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

📌 Lời giải.

Câu 3

Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần). Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

📌 Lời giải.

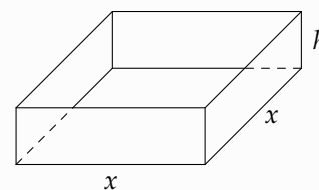
Câu 4

Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

📌 Lời giải.

Câu 5

Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

📌 Lời giải.

Câu 6

Hộp sữa 1 lít được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

 **Lời giải.**

Câu 7

Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m (Hình 6). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

 **Lời giải.**

D **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Một chất điểm chuyển động với quãng đường $s(t)$ cho bởi công thức $s(t) = 6t^2 - t^3$, t (giây) là thời gian. Hỏi trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giây, vận tốc tức thời của chất điểm đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm t (giây) bằng bao nhiêu?

- ☐ **A** $t = 3$ s.
 ☐ **B** $t = 4$ s.
 ☐ **C** $t = 2$ s.
 ☐ **D** $t = 6$ s.

 **Lời giải.**

Câu 2

Trong 3 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 3 giây đầu tiên đó?

- ☐ **A** 13 m/s.
 ☐ **B** 10 m/s.
 ☐ **C** 9 m/s.
 ☐ **D** 12 m/s.

 **Lời giải.**

Câu 3

Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

- (A) 25 cm^2 . (B) $\frac{125}{4} \text{ cm}^2$. (C) $\frac{625}{4} \text{ cm}^2$. (D) 125 cm^2 .

 Lời giải.

Câu 4

Ông Bình dự định sử dụng hết $5,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

- (A) $1,01 \text{ m}^3$. (B) $1,17 \text{ m}^3$. (C) $1,51 \text{ m}^3$. (D) $1,40 \text{ m}^3$.

 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức:

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4, \quad \text{với } 0 \leq t \leq 0,5$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$

- a) Lượng xăng ban đầu trong bình ban đầu là 1 lít.
- b) Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.
- c) $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$.
- d) Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.

 Lời giải.

Câu 2

Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất $x(\text{m}^3)$ sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu

đồng chi phí mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa $100m^3$ sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí (triệu đồng) sản xuất $x(m^3)$ sản phẩm trong một ngày và $\bar{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

- $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$.
- Tổng chi phí sản xuất $100m^3$ sản phẩm là 34 triệu đồng.
- $\bar{C} = \frac{0,001x^2 + 4}{x} + 0,2$ với $0 \leq x \leq 100$.
- $\bar{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân).

📌 Lời giải.

Câu 3

Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,013x^3 + 15x - 100$.
- A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

📌 Lời giải.

Câu 4

Khi nuôi tôm trong một hồ tự nhiên, một nhà khoa học đã thống kê được rằng: Nếu trên mỗi mét vuông mặt hồ thả x con tôm giống thì cuối vụ mỗi con tôm có cân nặng trung bình là $108 - x^2$ (gam).

- Điều kiện xác định là $x \geq 0$.
- Sau một vụ lượng tôm trung bình trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên nặng $x(108 - x^2)$.
- Để cuối vụ thu hoạch được nhiều tôm nhất trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên thì cần thả 16 con tôm giống.
- Lượng tôm nhiều nhất cuối vụ có thể thu hoạch được trên mỗi mét vuông mặt hồ tự nhiên là 432 (gam)..

📌 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao nhiêu giây thì số vi khuẩn lớn nhất?

 **Lời giải.**

Câu 2

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$.

 **Lời giải.**

Câu 3

Cho hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$, gọi $M = \frac{a}{e^b}$ ($a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$) là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5; -2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

 **Lời giải.**

Câu 4

Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - 2 \cos^2 x + 3 \sin x + 6$ trên $[0; \pi]$ lần lượt là M, m . Tính tổng $M + m$.

 **Lời giải.**

Câu 5

Người ta cần làm một cái bể cá có hai ngăn, không có nắp ở phía trên với thể tích $1,296 \text{ m}^3$. Người ta cắt các tấm kính ghép lại một bể cá có dạng hình hộp chữ nhật (hình vẽ minh họa) với

ba kích thước là a, b, c . Người ta phải thiết kế các kích thước là bao nhiêu để tốn kính nhất (giả sử độ dày của kính không đáng kể). Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$.

 Lời giải.

Câu 6

Một cửa hàng bán vải Thanh Hà với giá bán mỗi kg là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 25 kg. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm 4.000 đồng cho một kg thì số vải bán được tăng thêm là 50 kg. Xác định giá bán (đơn vị nghìn đồng) để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập vải mỗi kg là 30.000 đồng.

 Lời giải.

Câu 7

Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

 Lời giải.

Câu 8

Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Sau bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

 Lời giải.

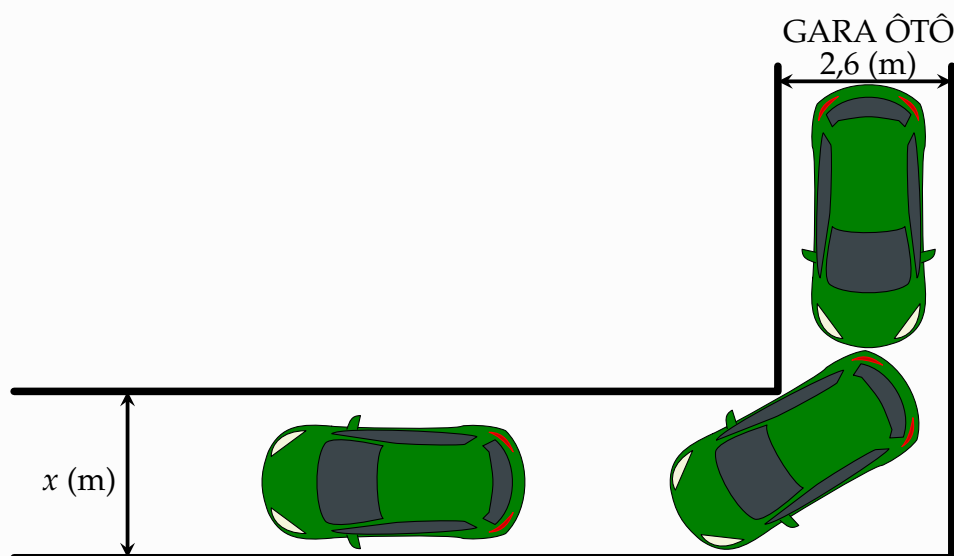
Câu 9

Ông Nam cần xây dựng một bể nước mưa có thể tích $V = 8 (m^3)$ dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài gấp $\frac{4}{3}$ lần chiều rộng, đáy và nắp đổ bê tông, cốt thép; xung quanh xây bằng gạch và xi măng. Biết rằng chi phí trung bình là $980.000 \text{ đồng}/m^2$ và ở nắp đổ bê tông là một khoảng hình vuông có diện tích bằng $\frac{2}{9}$ diện tích nắp bể. Tính chi phí thấp nhất (triệu đồng) mà ông Nam phải chi trả (làm tròn đến hàng triệu đồng).

 Lời giải.

Câu 10

Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào gara ô tô nhà cô Hiền.



Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x m, đoạn đường thẳng vào cổng gara có chiều rộng 2,6 m. Biết kích thước xe ô tô là $5 \text{ m} \times 1,9 \text{ m}$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 m, chiều rộng 1,9 m. Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên bằng bao nhiêu mét để ô tô có thể đi vào gara được (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

 Lời giải.

§3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

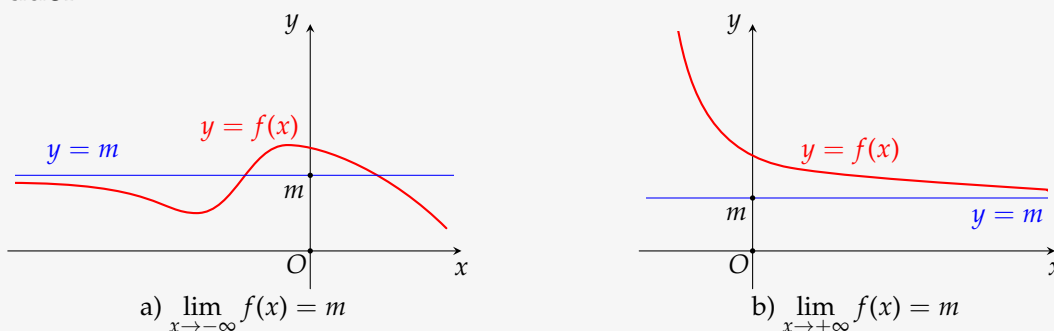
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Đường tiệm cận ngang (TCN):

Định nghĩa 3.1. Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới



Phương pháp 3.1. Các bước tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

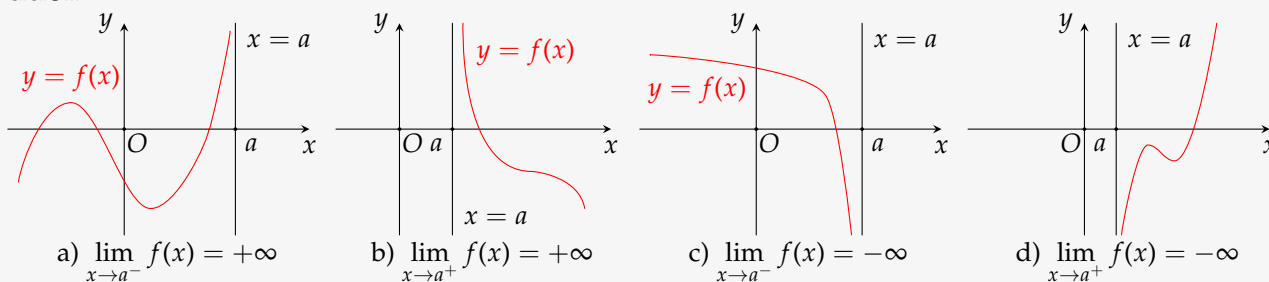
- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

2. Đường tiệm cận đứng (TCD)

Định nghĩa 3.2. Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như hình bên dưới.



Phương pháp 3.2. Các bước tìm đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là x_0 .
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận

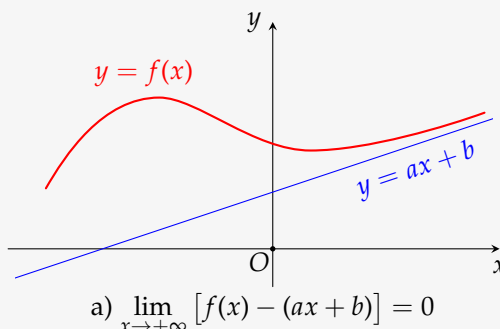
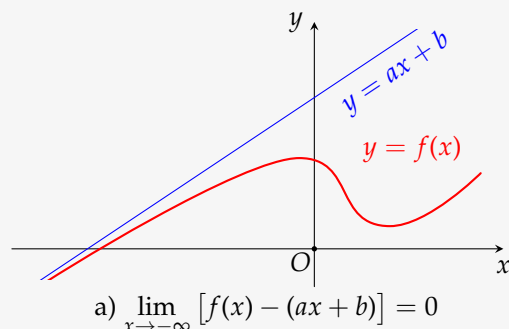
$x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

3. Đường tiệm cận xiên

Định nghĩa 3.3. Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$, được gọi là đường tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình bên dưới:



Phương pháp 3.3.

Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

B VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Xác định tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cho bởi công thức sau:

a) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$;

b) $y = \frac{2x - 3}{1 - 2x}$;

c) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$;

d) $y = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Lời giải.

Ví dụ 2

Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$;

b) $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$;

c) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$.

Lời giải.

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$. Để tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, ta làm như sau:

a) Các bước tìm tiệm cận đứng:

- ① Tìm nghiệm của mẫu, giả sử nghiệm đó là $x = x_0$.
- ② Tính giới hạn một bên tại x_0 . Nếu xảy ra $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ thì ta kết luận $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng.

b) Các bước tìm tiệm cận ngang:

- ① Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ② Xem ở "vị trí" nào ra kết quả hữu hạn thì ta kết luận có tiệm cận ngang ở "vị trí" đó.

c) Lưu ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ luôn có TCD $x = -\frac{d}{c}$ và TCN: $y = \frac{a}{c}$.

1. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$. Hàm số có có đường tiệm cận đứng là

- ☐ A $y = 0$.
 ☐ B $x = 2$.
 ☐ C $y = 2$.
 ☐ D $x = 0$.

 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{4x-1}$. Hàm số có có đường tiệm cận đứng là

- ☐ A $x = \frac{3}{4}$.
 ☐ B $y = \frac{3}{4}$.
 ☐ C $x = \frac{1}{4}$.
 ☐ D $y = \frac{1}{4}$.

 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{x-1}$. Hàm số có đường tiệm cận ngang là

- (A) $y = 3$. (B) $y = 1$. (C) $x = 1$. (D) $x = 3$.

 **Lời giải.**

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{2x}$. Hàm số có đường tiệm cận ngang là

- (A) $x = 0$. (B) $y = 0$. (C) $x = \frac{3}{2}$. (D) $y = \frac{3}{2}$.

 **Lời giải.**

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{-4x^2-2x-5}{-x+2}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là

- (A) $y = 4x + 10$. (B) $y = 4x + 10$. (C) $y = 4x + 10$. (D) $y = 4x + 10$.

 **Lời giải.**

Câu 6

Cho hàm số $y = \frac{3x^2+5x-4}{-5x+4}$. Đường tiệm cận xiên của hàm số là

- (A) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$. (B) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$. (C) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$. (D) $y = -\frac{3}{5}x - \frac{37}{25}$.

 **Lời giải.**

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{-x-4}{3x+2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận đứng là

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$	$-\frac{1}{3}$

Ⓐ $y = -\frac{2}{3}$.

Ⓑ $x = -\frac{2}{3}$.

Ⓒ $y = -\frac{2}{3}$.

Ⓓ $x = -\frac{1}{3}$.

👉 Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{5x-2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận đứng là

x	$-\infty$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
y'		-	-
y	$\frac{1}{5}$	$+\infty$	$\frac{1}{5}$

Ⓐ $x = \frac{2}{5}$.

Ⓑ $x = \frac{1}{5}$.

Ⓒ $y = \frac{2}{5}$.

Ⓓ $y = \frac{2}{5}$.

👉 Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{4x+3}{-3x+2}$ có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận ngang là

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	+
y	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$	$-\frac{4}{3}$

Ⓐ $y = \frac{2}{3}$.

Ⓑ $x = -\frac{4}{3}$.

Ⓒ $y = -\frac{4}{3}$.

Ⓓ $x = -\frac{4}{3}$.

📖 Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{-x+5}{4x+1}$. có bảng biến thiên bên dưới. Hàm số có tiệm cận ngang là

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
y'		-	-
y	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$

Ⓐ $x = -\frac{1}{4}$.

Ⓑ $x = -\frac{1}{4}$.

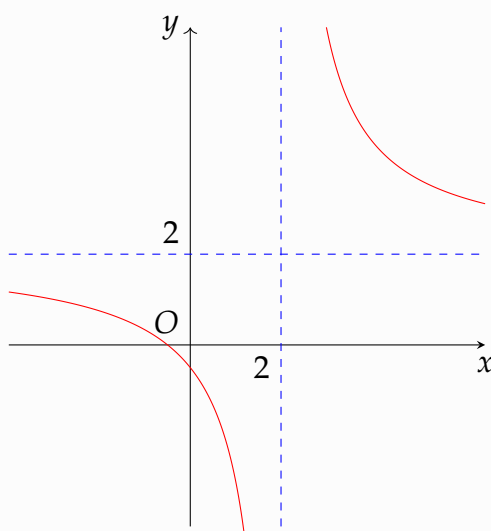
Ⓒ $y = -\frac{1}{4}$.

Ⓓ $y = -\frac{1}{4}$.

📖 Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là



Ⓐ $y = -2$.

Ⓑ $y = 2$.

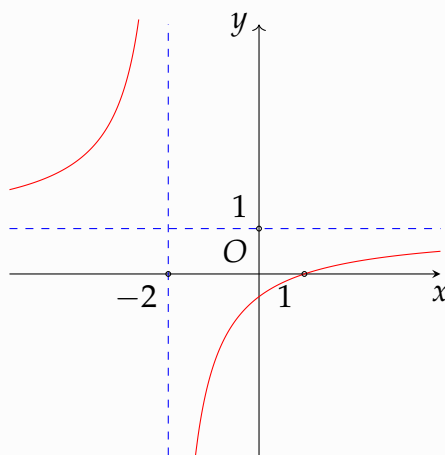
Ⓒ $x = -2$.

Ⓓ $x = 2$.

📌 Lời giải.

Câu 12

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



Ⓐ $x = 1$.

Ⓑ $y = -2$.

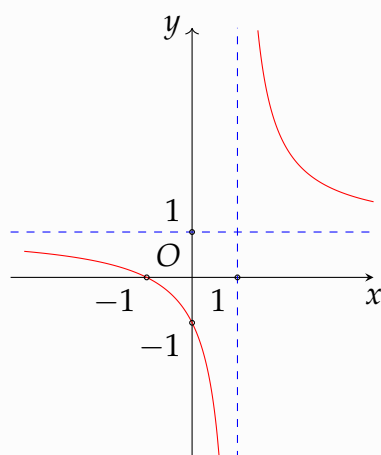
Ⓒ $x = -2$.

Ⓓ $y = 1$.

📌 Lời giải.

Câu 13

Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là



- Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $y = 1$. Ⓒ $y = -1$. Ⓓ $x = 1$.

Lời giải.

Câu 14

Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 4}{x + 2}$ là

- Ⓐ $y = 2$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $x = -2$. Ⓓ $y = -2$.

Lời giải.

Câu 15

Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$.

- Ⓐ $y = -2$. Ⓑ $x = -2$. Ⓒ $y = 2$. Ⓓ $x = 1$.

Lời giải.

Câu 16

Đường thẳng $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây?

- Ⓐ $y = \frac{1-3x}{2+x}$. Ⓑ $y = \frac{x^2+3x+2}{x-2}$. Ⓒ $y = \frac{1+3x}{1+x}$. Ⓓ $y = \frac{3x^2+2}{2-x}$.

🔑 Lời giải.

Câu 17

Hàm số nào có đồ thị nhận đường thẳng $x = 2$ làm đường tiệm cận đứng?

- Ⓐ $y = x - 2 + \frac{1}{x+1}$. Ⓑ $y = \frac{1}{x+1}$.
 Ⓒ $y = \frac{2}{x+2}$. Ⓓ $y = \frac{5x}{2-x}$.

🔑 Lời giải.

Câu 18

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ là đường thẳng

- Ⓐ $x = -2$. Ⓑ $x = 2$. Ⓒ $y = 3$. Ⓓ $y = -\frac{1}{2}$.

🔑 Lời giải.

Câu 19

Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+4x-5}$ có phương trình là

- Ⓐ $x = -1$. Ⓑ $y = 1; y = -5$. Ⓒ $x = 1; x = -5$. Ⓓ $x = \pm 5$.

🔑 Lời giải.

Câu 20

Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

- (A) 1. (B) 0. (C) 2. (D) 3.

 **Lời giải.**

Câu 21

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x-2}$ là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

 **Lời giải.**

Câu 22

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong (C) và các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
 (B) Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của (C).
 (C) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận ngang của (C).
 (D) Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của (C).

 **Lời giải.**

Câu 23

Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

 **Lời giải.**

Câu 24

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	-2	$+\infty$	1	$+\infty$	-2

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- ☐ A 1. ☐ B 2. ☐ C 3. ☐ D 4.

Lời giải.

Câu 25

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

Chọn khẳng định đúng.

- ☐ A Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
☐ B Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
☐ C Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận đứng.
☐ D Đồ thị hàm số không có tiệm đứng và tiệm cận ngang.

Lời giải.

Câu 26

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'			+	-
y			$-\infty$ $\nearrow$ 2 $\nwarrow$ 1 $\searrow$ 0	

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

- ☐ A 2. ☐ B 3. ☐ C 4. ☐ D 1.

 **Lời giải.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	2 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 2 $\nearrow$ $+\infty$		

Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $f(-5) < f(4)$. b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
 c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 0$. d) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

 **Lời giải.**

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-4x + 5}{2x + 3}$ có đồ thị (C). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số không có cực trị.
 b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -3$.

- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = -2$.
 d) Các đường tiệm cận của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 3.

 **Lời giải.**

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{-x-2}{-x-1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

- a) Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
y	1	$+\infty$	1
		$-\infty$	

- b) Đạo hàm $y' = \frac{1}{(-x-1)^2}$.
 c) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 d) Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của hàm số là $x = -1$; $y = 1$.

 **Lời giải.**

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{-x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? khẳng định nào sai?

- a) Bảng biến thiên của hàm số là

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$-$	$-$	
y	-2	$+\infty$	-2
		$-\infty$	

- b) Tâm đối xứng của hàm số là $I(1; -2)$.
 c) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -2$.
 d) Đường tiệm cận ngang của hàm số là $y = 1$.

 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{mx^2 + 6x - 2}{x + 2}$, với m là tham số.

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang khi $m > 0$.
- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng khi $m \neq 0$.
- d) Tập hợp tất cả giá trị của m để đồ thị có hai đường tiệm cận là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Dạng 2 Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

a) Các bước tìm TCX $y = ax + b$: Ta xác định hệ số của a và b trong 2 trường hợp sau:

① Tính $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$.

② Tính $a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$.

b) Lưu ý:

① Nếu $a = 0$ thì tiệm cận xiên chính là tiệm cận ngang.

② Đối với hàm số phân thức $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$, ta có thể chia đa thức, biến đổi về dạng

$$f(x) = a'x + b' + \frac{e}{mx + n}, \text{ với } e \neq 0$$

Suy ra $y = a'x + b'$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

2. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ có phương trình là

- Ⓐ $y = x + 1$.
- Ⓑ $y = 2x - 1$.
- Ⓒ $y = x - 1$.
- Ⓓ $y = 2x + 1$.

📌 Lời giải.

Câu 2

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

- Ⓐ $y = 2x + 1$. Ⓑ $y = x - 3$. Ⓒ $y = x + 3$. Ⓓ $y = 2x - 1$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

- Ⓐ $y = 2x - 5$. Ⓑ $y = x - 2$. Ⓒ $y = x + 5$. Ⓓ $y = x - 5$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x + 2}$ là

- Ⓐ $y = -2$. Ⓑ $y = 1$. Ⓒ $y = x + 2$. Ⓓ $y = x$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

- Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = -3x + 1$. Ⓒ $y = x - 2$. Ⓓ $y = x - 1$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

- Ⓐ (5; 3). Ⓑ (-4; -5). Ⓒ (6; -1). Ⓓ (2; -10).

 **Lời giải.**

Câu 7

Giao điểm của đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ là

- Ⓐ (1; 2). Ⓑ (1; 1). Ⓒ (1; -1). Ⓓ (1; 0).

 **Lời giải.**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả

Câu 1

Biết rằng hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - m}$ (với m là tham số) tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng 2. Hỏi có bao nhiêu giá trị m thỏa mãn điều kiện?

 **Lời giải.**

Câu 2

Có bao nhiêu giá trị m nguyên dương thuộc $[0; 2024]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 5x + m}{x - m}$ có tiệm cận đứng?

 **Lời giải.**

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để (C) không có tiệm cận đứng

👉 Lời giải.

Câu 4

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-4; 4]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 - mx + 1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

👉 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{ax + 1}{bx - 2}$, khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu để đồ thị của hàm số trên nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng và đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ làm tiệm cận ngang.

👉 Lời giải.

Câu 6

Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng).

Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

👉 Lời giải.

Câu 7

Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là

$$C(p) = \frac{45p}{100 - p} \text{ (triệu đồng), với } 0 \leq p < 100.$$

Biết rằng tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ có dạng $p = a$. Khi đó a bằng bao nhiêu?

 **Lời giải.**

D BÀI TẬP TỰ LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 3}$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = ax + b$. Tính $a^2 + 2b$.

(A) 4.

(B) 2.

(C) 5.

(D) 3.

 **Lời giải.**

Câu 2

Biết tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và B . Khi đó diện tích tam giác OAB là:

(A) 2.

(B) 4.

(C) 8.

(D) 3.

 **Lời giải.**

Câu 3

Đường thẳng $y = x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

(A) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$.

(B) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.

(C) $y = \frac{x^2 + 1}{x - 2}$.

(D) $y = \frac{x^2 + x + 1}{2x + 1}$.

 **Lời giải.**

Câu 4

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x+1}$ có phương trình là:

- Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = 2x - 1$. Ⓒ $y = x - 1$. Ⓓ $y = 2x + 1$.

👉 Lời giải.

Câu 5

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = x + 3 + \frac{1}{2x+1}$ có phương trình là

- Ⓐ $y = 2x + 1$. Ⓑ $y = x - 3$. Ⓒ $y = x + 3$. Ⓓ $y = 2x - 1$.

👉 Lời giải.

Câu 6

Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$

- Ⓐ $y = 2x - 5$. Ⓑ $y = x - 2$. Ⓒ $y = x + 5$. Ⓓ $y = x - 5$.

👉 Lời giải.

Câu 7

Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

- Ⓐ $y = x + 1$. Ⓑ $y = -3x + 1$. Ⓒ $y = x - 1$. Ⓓ $y = x - 2$.

👉 Lời giải.

Câu 8

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$ đi qua điểm nào sau đây?

- Ⓐ (5; 3). Ⓑ (-4; -5). Ⓒ (6; -1). Ⓓ (2; -10).

📌 **Lời giải.**

Câu 9

Số các giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025; 2025]$ để đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 4}{x - m}$ có tiệm cận đứng nằm bên trái trục tung là

- Ⓐ 2020. Ⓑ 2025. Ⓒ 4041. Ⓓ 4042.

📌 **Lời giải.**

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có hai đường tiệm cận.
b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2; -6)$.
c) Khoảng cách từ O đến đường tiệm cận xiên bằng $4\sqrt{2}$.
d) Tiệm cận xiên của hàm số đi qua điểm $M(0; -4)$.

📌 **Lời giải.**

Câu 2

Cho hàm số (C): $y = \frac{x + 3}{x - 1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

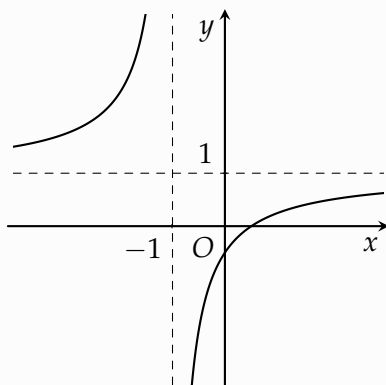
- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.
c) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số (C) có tọa độ là $I(1; 1)$.

d) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại điểm $A(-3;0)$ có phương trình là $y = -\frac{1}{4}x - 1$.

📌 Lời giải.

Câu 3

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình bên dưới



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $A(1;1)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' > 0, \forall x \neq -1$.
- d) Hàm số nghịch biến trên tập xác định.

📌 Lời giải.

Câu 4

Cho các phát biểu sau

- a) Nếu chỉ có điều kiện $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ thì đường thẳng $x = a$ không được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x)$.
- b) Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$.
- c) Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
- d) Tiệm cận xiên $y = ax + b, a \neq 0$ của $f(x)$ với hệ số $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

📌 Lời giải.

Câu 5

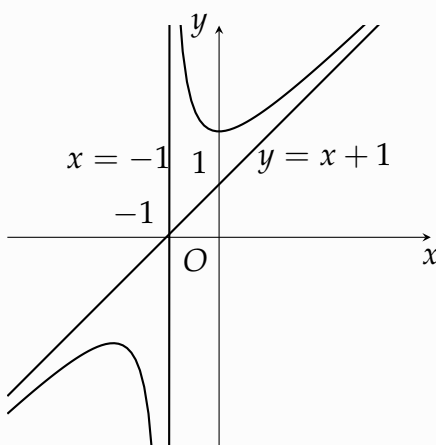
Cho hàm số $y = \frac{3(x^2 + 1)(x - 3)}{(x + 1)^3}$

- a) Hàm số không có tiệm cận ngang.
- b) Hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- c) Hàm số có một tiệm cận xiên.
- d) Hàm số không có tiệm cận đứng.

Lời giải.

Câu 6

Cho đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình sau

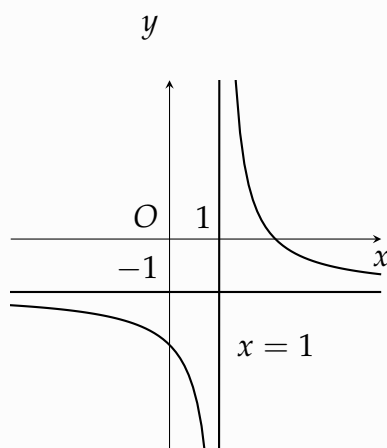


- a) $y = x + 1$ là đường tiệm cận ngang của hàm số $f(x)$.
- b) hàm số $f(x)$ có một đường tiệm cận đứng và một đường tiệm cận xiên.
- c) đồ thị hàm số có phương trình là $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.
- d) hàm số $f(x)$ có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

Lời giải.

Câu 7

Đồ thị trong hình là của hàm số $y = \frac{ax + b}{x + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Khi đó tổng $a + b + c$ bằng



- a) Hàm số có tiệm cận ngang là $y = -1$.
- b) Hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- c) $a + b + c = 0$.
- d) Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định.

📌 Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 + 2x - 1}{x-1}$ với m là tham số.

- a) Với $m = -1$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Với $m = 0$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên $y = x - 1$.
- c) Với $m = 2$ thì đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.
- d) Với $m = 1$, tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên đồ thị đến các đường tiệm cận bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

📌 Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x-3}$ có đồ thị (C).

- a) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x = \frac{3}{2}$.
- b) Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận thuộc đường thẳng $x - y - 1 = 0$.

- c) Đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ cắt tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại các điểm A và B . Diện tích của tam giác IAB bằng $\frac{25}{4}$, với I là giao điểm hai đường tiệm cận.
- d) Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 4x + 3 + m}{x - 2}$ có đồ thị (C).

- a) Khi $m = 0$, tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = 2$.
- b) Khi $m = 0$, giao điểm của tiệm cận đứng đồ thị và đường thẳng $x - y - 1 = 0$ thuộc parabol $y = x^2$.
- c) Khi $m = 0$, lấy M là điểm bất kỳ trên đồ thị (C), gọi d_1 là khoảng cách từ M đến đường tiệm cận đứng, gọi d_2 là khoảng cách từ M đến đường thẳng $y = -x + 2$. Tích $d_1 \cdot d_2 = 7$.
- d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số không có tiệm cận đứng. Số phần tử của S là 1.

📌 Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + m}$ có đồ thị (C).

- a) Khi $m = 0$, đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$.
- b) Khi $m = 0$, đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.
- c) Có hai giá trị của m để đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng.
- d) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của $m \in [-8; 8]$ để hàm số có ba đường tiệm cận. Số phần tử của S là 7.

📌 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x - 2}{x^2 - 2mx - m - 2}$. Biết với $m = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b}$ tối giản) thì đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận. Tính $a + b$.

📌 Lời giải.

Câu 2

Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+2mx+3m+4}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là

📌 Lời giải.

Câu 3

Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2+mx+1}{x^2+mx+n-6}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành và trục tung làm hai đường tiệm cận. Tính $m+n$.

📌 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{(2m+1)x^2+3}{\sqrt{x^4+1}}$, m là tham số. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1; -3)$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

 **Lời giải.**

Câu 7

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*), m là tham số. Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

 **Lời giải.**

Câu 8

Tìm hệ số góc k của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^2 - x + 1}$.

 **Lời giải.**

Câu 9

Tính tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 4}$.

 **Lời giải.**

Câu 10

Chi phí xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in...) được cho bởi $C(x) = x^2 - 2000x + 10^8$ đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Hàm số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là

chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi số lượng cuốn tạp chí phát hành cực lớn thì chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ sẽ tiệm cận với đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

📌 Lời giải.

.....
.....
.....

§4. KHẢO SÁT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

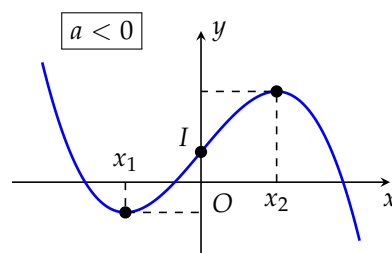
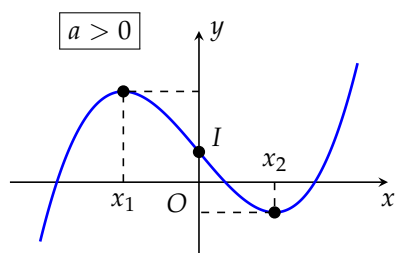
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Sơ đồ khảo sát hàm số $y = f(x)$

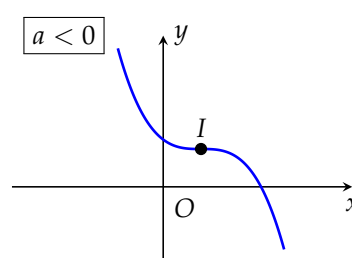
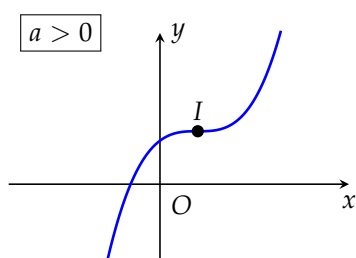
- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm y' . Tìm các điểm mà tại đó y' bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

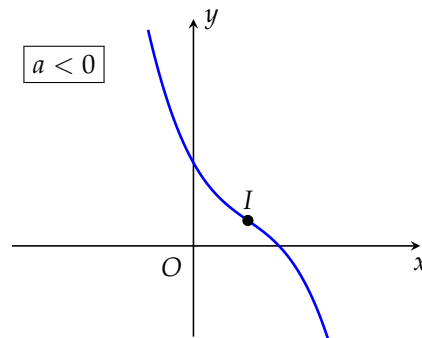
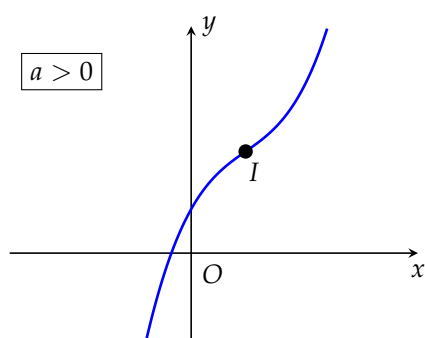
- a) TH1. $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



- b) TH2. $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.



- c) TH3. $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



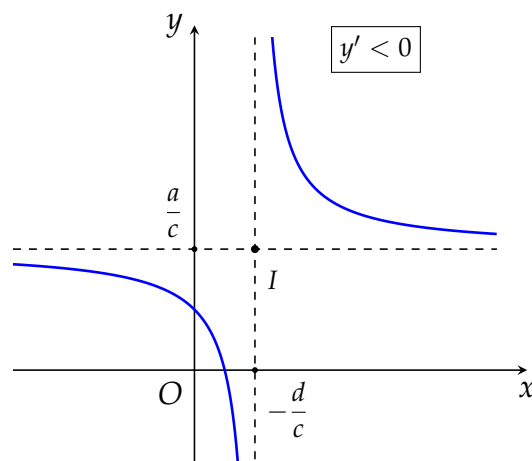
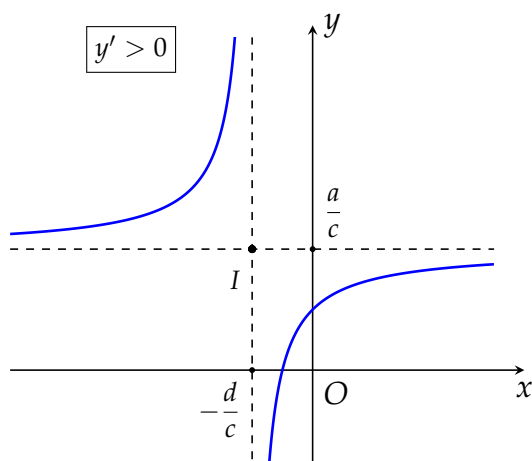
3. Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

a) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$;

b) Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

c) Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

d) Hình dạng đồ thị:



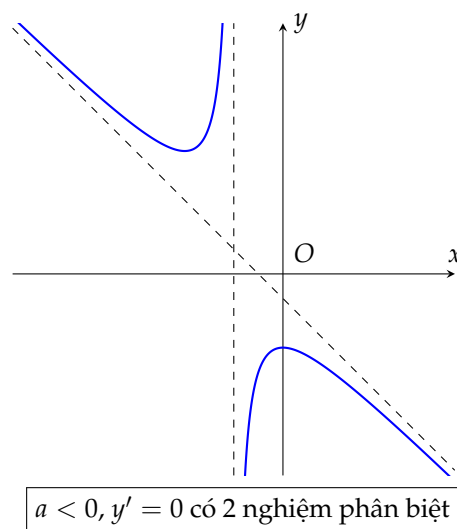
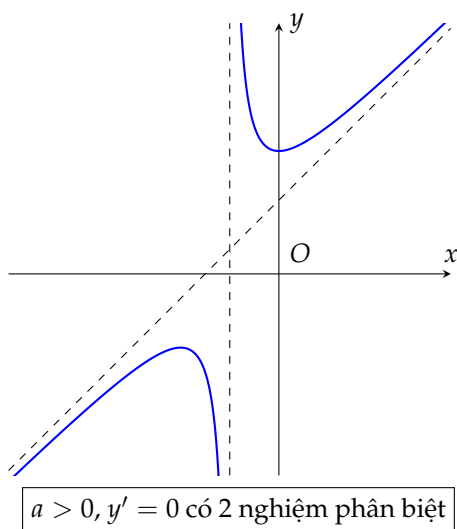
4. Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

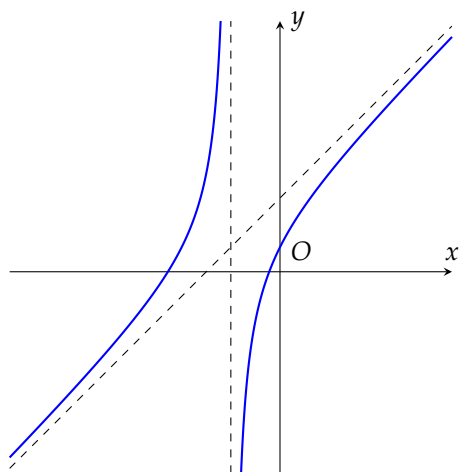
a) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.

b) Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.

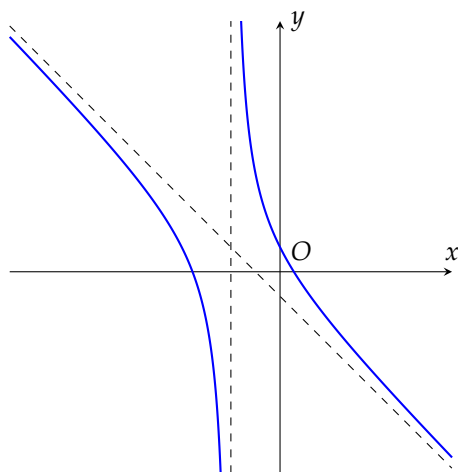
c) Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.

d) Hình dạng đồ thị:





$a > 0, y' = 0$ vô nghiệm



$a < 0, y' = 0$ vô nghiệm

B VÍ DỤ MINH HỌA

1. Hàm bậc $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$;

Lời giải.

C PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = -x^3 - 2x^2 + 5.$

Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 + 5.$

Ⓒ $y = -x^3 - 3x + 5.$

Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5.$

📌 Lời giải.

Câu 2

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	5	$-\infty$	

Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = -x^3 + 3x^2.$

Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 - 1.$

Ⓒ $y = x^4 + 2x^2 + 1.$

Ⓓ $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

📌 Lời giải.

Câu 3

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	2	$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 + x + 3.$

Ⓑ $y = x^3 - 3x + 4.$

Ⓒ $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$

Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5.$

Lời giải.

Câu 4

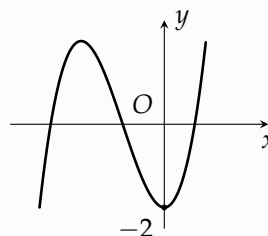
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + x^2 - 2.$

(B) $y = x^3 + 3x^2 - 2.$

(C) $y = x^3 - 3x + 2.$

(D) $y = x^2 - 3x - 2.$



Lời giải.

Câu 5

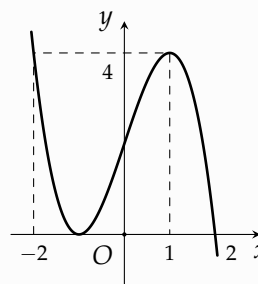
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = x^3 + 3x - 2.$

(B) $y = x^3 - 3x + 2.$

(C) $y = -x^3 + 3x + 2.$

(D) $y = -x^3 - 3x - 2.$



Lời giải.

Câu 6

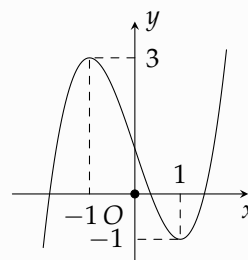
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

(B) $y = -x^2 - 3x - 1.$

(C) $y = x^4 + 2x^2 - 1.$

(D) $y = x^3 - 3x + 1.$



Lời giải.

Câu 7

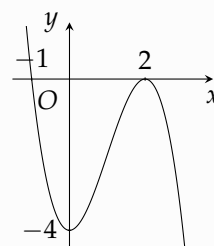
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = x^3 - 3x^2 - 4.$

Ⓑ $y = -x^3 - 4.$

Ⓒ $y = -x^3 + 3x^2 - 2.$

Ⓓ $y = -x^3 + 3x^2 - 4.$



👉 Lời giải.

Câu 8

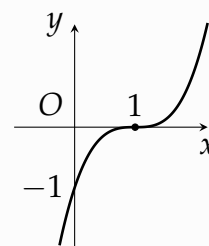
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = x^3 - 1.$

Ⓑ $y = (x + 1)^3.$

Ⓒ $y = (x - 1)^3.$

Ⓓ $y = x^3 + 1.$



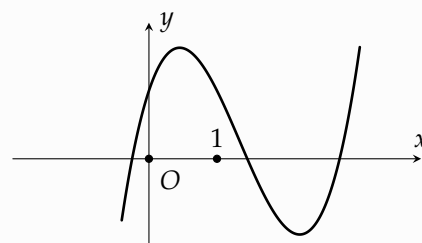
👉 Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0.$ Ⓑ $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0.$

Ⓒ $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0.$ Ⓓ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0.$

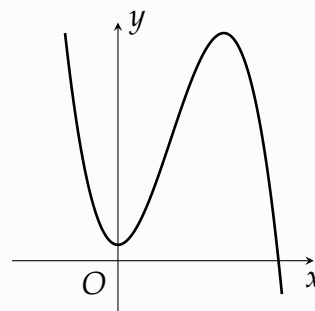


👉 Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$. Ⓑ $a < 0, b < 0, c = 0, d > 0$.
 Ⓒ $a < 0, b > 0, c = 0, d > 0$. Ⓓ $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.



Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

Trong các hệ số a, b, c và d có bao nhiêu số âm?

- Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

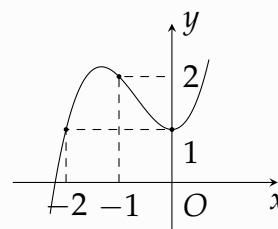
Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0; 1)$.
 c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
 d) $2a + 3b + c = 9$.

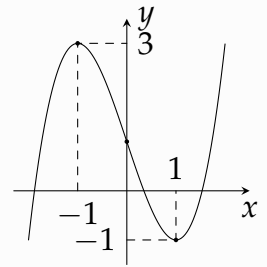


Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính tổng $T = ?$.

- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $(0; 1)$.
- Đường thẳng đi qua điểm $(0; 1)$ luôn cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành 1 cấp số cộng.
- $a - b + c + d = -1$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 18)$.



Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như hình bên.

- Hàm số đạt giá trị lớn nhất là 4.
- Đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt.
- Trong bốn hệ số a, b, c, d có đúng hai số âm.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $(-4; 20)$.

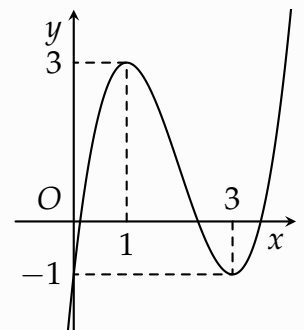
x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		4		$-\infty$

Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khi đó

- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- Điểm cực tiểu của hàm số là $y = -1$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0; 3]$ là 3.
- $f'(2) > 0$.



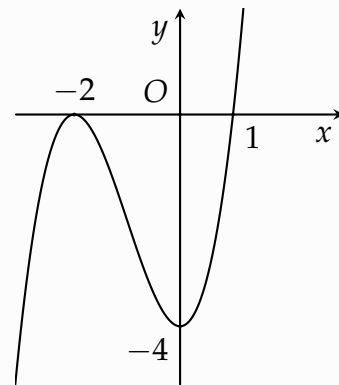
Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Khi đó

- a) Hàm số có hai điểm cực trị. b) $f(x) < 0$ trên $(-\infty; 0)$.
c) $f'(x) < 0$ trên $(0; 1)$. d) $f'(-3) < f'(-1)$.



Lời giải.

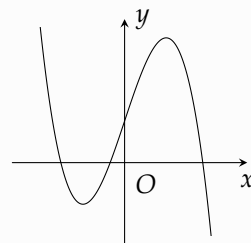
D BÀI TẬP RÈN LUYỆN

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình bên?

- (A) $y = x^3 - 3x + 1$. (B) $y = x^4 + 4x^2 + 1$.
(C) $y = -x^3 + 3x + 1$. (D) $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

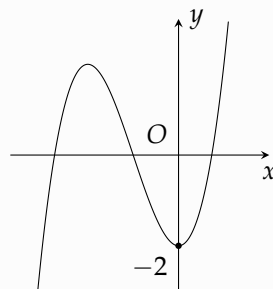


Lời giải.

Câu 2

Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- (A) $y = -x^3 + x^2 - 2$. (B) $y = x^3 + 3x^2 - 2$.
(C) $y = x^3 - 3x + 2$. (D) $y = x^2 - 3x - 2$.



Lời giải.

Câu 3

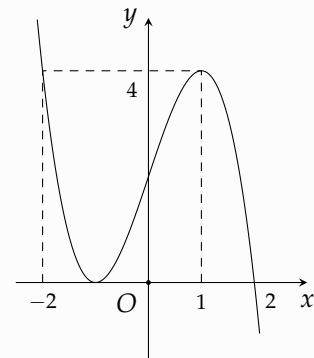
Đường cong bên là đồ thị của một trong bốn hàm số đã cho sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = x^3 + 3x - 2.$

Ⓑ $y = x^3 - 3x + 2.$

Ⓒ $y = -x^3 + 3x + 2.$

Ⓓ $y = -x^3 - 3x - 2.$



📌 Lời giải.

Câu 4

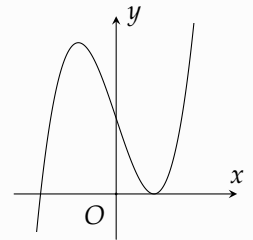
Đường cong hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = x^3 - 3x + 2.$

Ⓑ $y = x^4 - x^2 + 1.$

Ⓒ $y = x^4 + x^2 + 1.$

Ⓓ $y = -x^3 + 3x + 2.$



📌 Lời giải.

Câu 5

Bảng biến thiên ở hình bên là của một trong bốn hàm số sau đây. Hỏi đó là hàm số nào?

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Ⓐ $y = -x^3 - 2x^2 + 5.$

Ⓑ $y = x^3 - 3x^2 + 5.$

Ⓒ $y = -x^3 - 3x + 5.$

Ⓓ $y = x^3 + 3x^2 + 5.$

 Lời giải.

Câu 6

Hàm số nào dưới đây có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				2		$-\infty$
			-2				

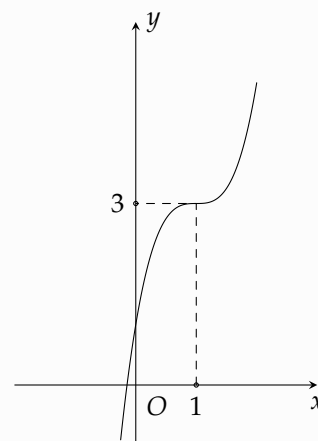
- ☐ A $y = x^3 - 3x$.
 ☐ B $y = -x^3 + 3x$.
 ☐ C $y = x^2 - 2x$.
 ☐ D $y = -x^2 + 2x$.

 Lời giải.

Câu 7

Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số ở dưới đây.
Hàm số đó là hàm số nào?

- ☐ A $y = 2x^3 - x^2 + 6x + 1$.
 ☐ B $y = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.
☐ C $y = 2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$.
 ☐ D $y = -2x^3 - 6x^2 - 6x + 1$.



 Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		-5		$+\infty$

$-\infty \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow +\infty$
 $\quad \quad \quad -5$

(A) 2.

(B) 4.

(C) 1.

(D) 3.

📌 Lời giải.

Câu 9

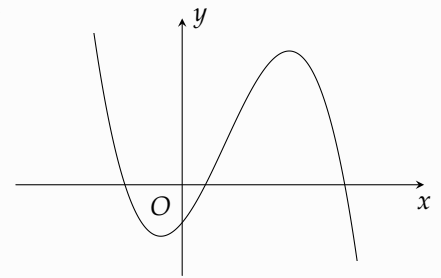
Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị âm?

(A) 3.

(B) 1.

(C) 4.

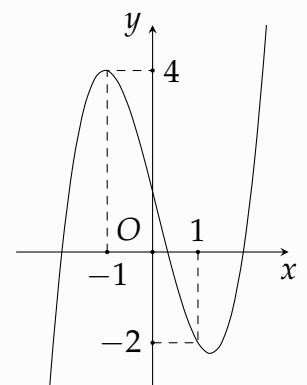
(D) 2.



📌 Lời giải.

Câu 10

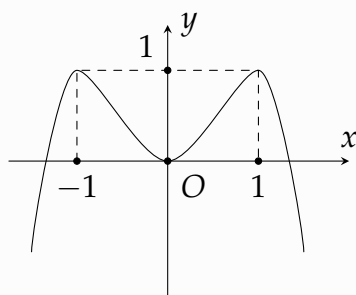
Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Tính giá trị của biểu thức $T = f(a - b + c - d + 5) + f(f(a + b + c + d + 3) + 3)$.

(A) $T = 2$.(B) $T = -4$.(C) $T = 8$.(D) $T = -6$.

📌 Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của phương trình $4f(x) - 3 = 0$.

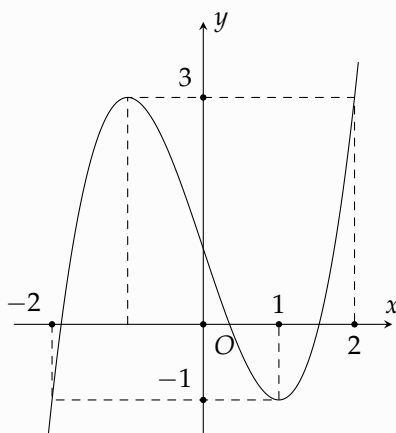


- Ⓐ 4. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 0.

Lời giải.

Câu 12

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của phương trình $3f(x) - 4 = 0$.

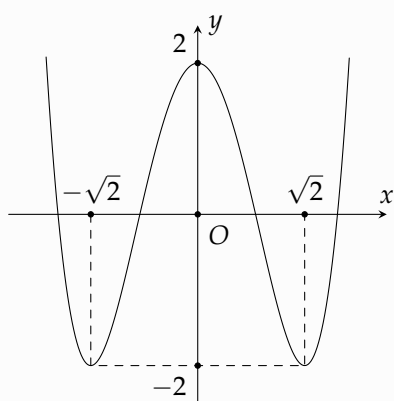


- Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Lời giải.

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Tìm số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$.



(A) 4.

(B) 2.

(C) 0.

(D) 3.

📌 Lời giải.

Câu 14

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		4		-2		$+\infty$

Số nghiệm phương trình $f(x) + 2 = 0$ là

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 0.

📌 Lời giải.

Câu 15

Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	-2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	1	-2	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) + 3 = 0$ là

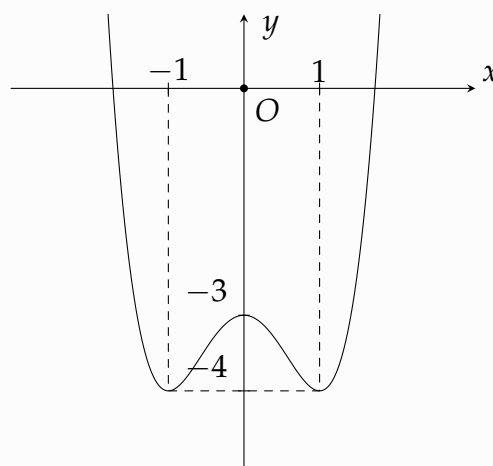
- (A) 3. (B) 1. (C) 4. (D) 2.

Lời giải.

Câu 16

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên cạnh. Tìm m để phương trình $f(x) = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

- (A) $-4 < m \leq -3$. (B) $-4 < m < -3$.
(C) $-4 \leq m < -3$. (D) $m > -4$.



Lời giải.

Câu 17

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	0	-1	$-\infty$

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(x) - 1 = m$ có đúng hai nghiệm.

- (A) $m = -2, m > -1$. (B) $m = -2, m \geq -1$. (C) $-2 < m < -1$. (D) $m > 0, m = -1$.

 Lời giải.

Câu 18

Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d : y = -m$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

- Ⓐ $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$. Ⓑ $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$. Ⓒ $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. Ⓓ $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$.

 Lời giải.

Câu 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình $f(x) + 3 = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-3	$+\infty$	

- Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

 Lời giải.

Câu 20

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình $f^2(x) - 4 = 0$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

- Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

 Lời giải.

Câu 21

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Tìm số nghiệm của phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			3		$\frac{1}{3}$	1

$1 \nearrow \quad \searrow \frac{1}{3} \nearrow$

(A) 6.

(B) 0.

(C) 3.

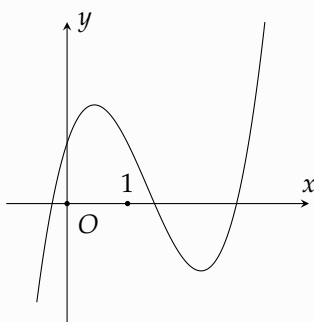
(D) 2.

 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ sau.



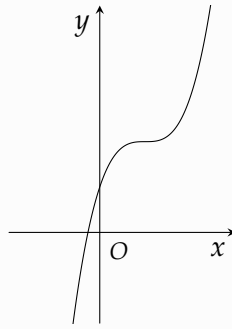
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm.
- b) $f(1) = 0$.
- c) $ad > 0$.
- d) $bc < 0$.

 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới.



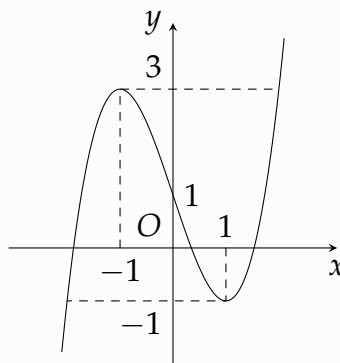
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có một điểm cực trị.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.
- c) Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại duy nhất một điểm.
- d) Hàm số có $\begin{cases} a < 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

🔑 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị (C).



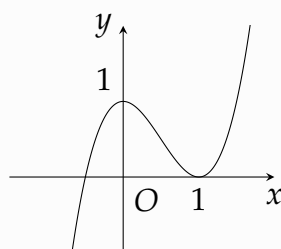
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1 \leq m \leq 3$.
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- c) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.
- d) $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

🔑 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a > 0$.
- b) $d < 0$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là 1.
- d) $f(a + b + c + d) = 1$.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	x_1	4	$+\infty$	
y'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1	$-\frac{5}{6}$	$\frac{11}{3}$	$-\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $a > 0$.
- b) $d > 0$.
- c) $bc < 0$.
- d) $f\left(16a + 8b + 3c + d + \frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{6}$.

Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên dưới. Hãy xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	
y			3		$\frac{1}{3}$	1

$1 \nearrow \quad \searrow \quad \nearrow$

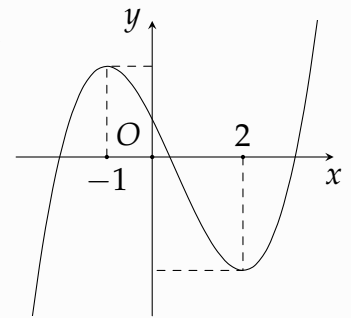
- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
b) Hàm số có giá trị nhỏ nhất là 1.
c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 1$.
d) Phương trình $2f^2(x) - 3f(x) + 1 = 0$ có 3 nghiệm.

📌 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Giá trị của biểu thức $T = 3[f(4) - f(0)]$ bằng



📌 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 7$, $(a; b; c; d \in \mathbb{R})$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$f(2)$		$-\infty$

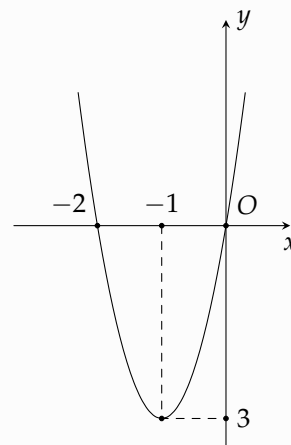
$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow$

Giá trị $a + b + c$ bằng

📌 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đạo hàm là hàm số với đồ thị như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ âm. Khi đó đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ là bao nhiêu?



Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 1$, ($a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y					$+\infty$
	$-\infty$		1		

Tổng $3a + 2b + c$ bằng

Lời giải.

Câu 5

Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$, $f(-3) = 28$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1. Tính $S = a^2 + b^2 - c^2$.

Lời giải.

Dạng 2**Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax + b}{cx + d}$**

Ta khảo sát theo sơ đồ

- ✔ Bước 1. Tìm tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.
- ✔ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ✔ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

1. VÍ DỤ MINH HỌA HÀM SỐ NHẤT BIẾN**Ví dụ 1**

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x-1}{x+1};$

b) $y = \frac{2x+1}{x-1};$

c) $y = \frac{5+x}{2-x}.$

 **Lời giải.**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$1 \rightarrow -\infty$		$+\infty \rightarrow 1$

Ⓐ $y = \frac{2x-1}{x+3}.$

Ⓑ $y = \frac{4x-6}{x-2}.$

Ⓒ $y = \frac{3-x}{2-x}.$

Ⓓ $y = \frac{x+5}{x-2}.$

 **Lời giải.**

Câu 7

Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây có bảng biến thiên như hình bên dưới?

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		+		+	
y	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	-1
			$-\infty$		

A $y = \frac{x-1}{x-3}$.

B $y = \frac{x-1}{-x-3}$.

C $y = \frac{x+5}{-x+3}$.

D $y = \frac{1}{x-3}$.

Lời giải.

Câu 8

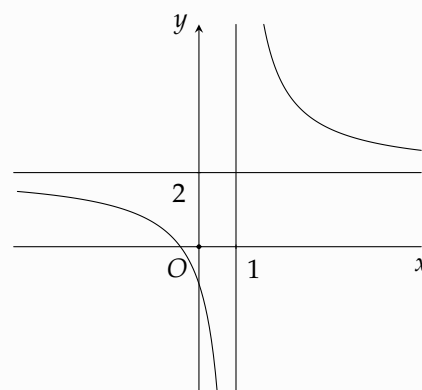
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

A $y = \frac{x-1}{x-2}$.

B $y = x+2$.

C $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

D $y = \frac{2x+1}{x-1}$.



Lời giải.

Câu 9

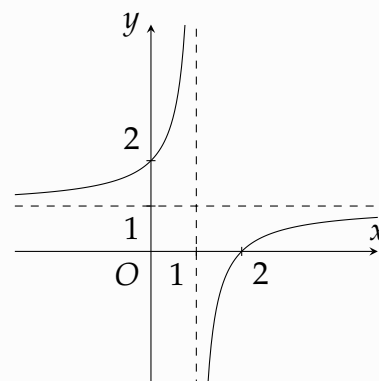
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào?

A $y = \frac{x-2}{x+1}$.

B $y = \frac{x+2}{x-2}$.

C $y = \frac{x-2}{x-1}$.

D $y = \frac{x+2}{x-1}$.

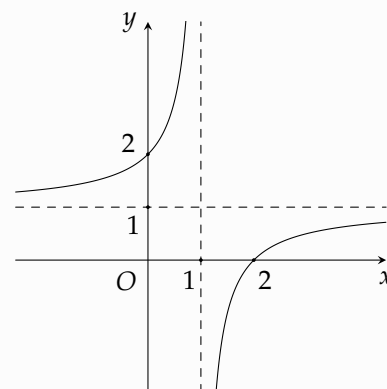


📌 Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{x + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $2a + b - 3c$ bằng

- ☐ A -3. ☐ B 4.
☐ C 7. ☐ D -5.

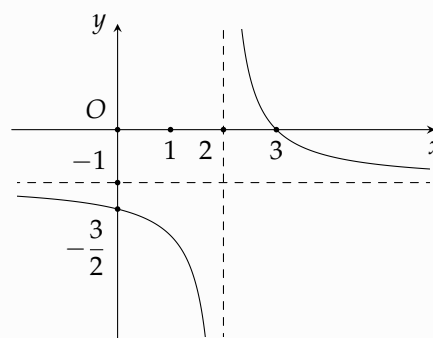


📌 Lời giải.

Câu 11

Cho hàm số $y = \frac{ax - b}{cx + 2}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Giá trị của biểu thức $a + b + c$ bằng

- ☐ A -3. ☐ B 5. ☐ C -4. ☐ D 3.

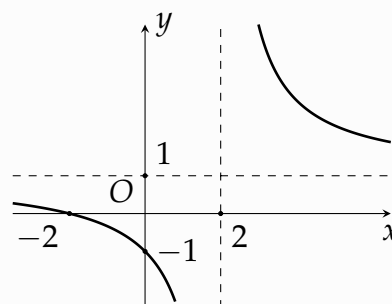


📌 Lời giải.

Câu 12

Hãy xác định a, b để hàm số $y = \frac{2 - ax}{x + b}$ có đồ thị như hình vẽ?

- ☐ A $a = 1; b = -2$. ☐ B $a = b = 2$.
☐ C $a = -1; b = -2$. ☐ D $a = b = -2$.

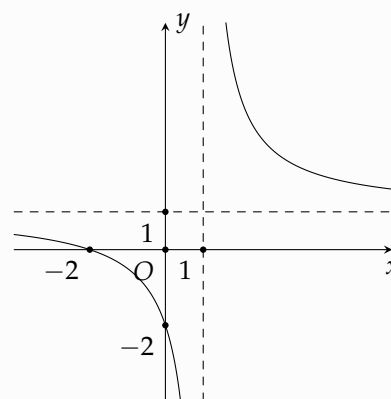


Lời giải.

Câu 13

Cho đồ thị hàm số $y = \frac{ax - b}{x - 1}$ như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng?

- ☐ A $a < 0, b < 0$. ☐ B $0 < b < a$.
☐ C $b < 0 < a$. ☐ D $a < b < 0$.



Lời giải.

Câu 14

Cho hàm số $y = \frac{ax + 4}{bx + c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	3	$+\infty$	3

Trong các số a, b, c có bao nhiêu số dương?

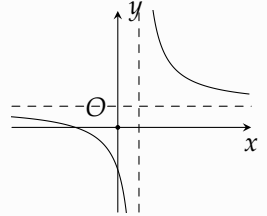
- ☐ A 0. ☐ B 1. ☐ C 2. ☐ D 3.

Lời giải.

Câu 15

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $b < 0, c < 0, d < 0.$
☐ B $b > 0, c < 0, d < 0.$
☐ C $b < 0, c > 0, d < 0.$
☐ D $b > 0, c > 0, d < 0.$

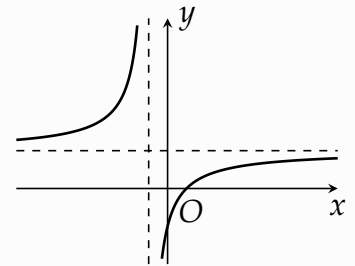


📌 Lời giải.

Câu 16

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- ☐ A $ab > 0, bd < 0.$
☐ B $ab < 0, ad > 0.$
☐ C $ab < 0, ad < 0.$
☐ D $bd > 0, ad > 0.$

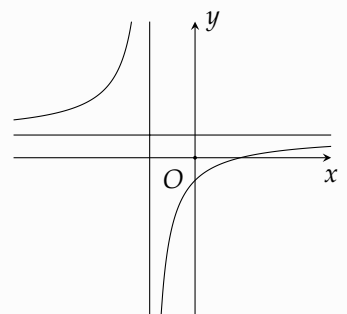


📌 Lời giải.

Câu 17

Hình vẽ dưới đây là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $ac \neq 0, ad - cb \neq 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- ☐ A $ad > 0$ và $ab < 0.$
☐ B $bd < 0$ và $ab > 0.$
☐ C $ad < 0$ và $ab < 0.$
☐ D $ad > 0$ và $bd > 0.$



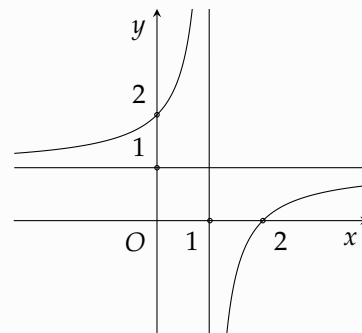
📌 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x+a}{bx+c}$, ($a, b, c \in \mathbb{Z}$).

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 0$.
- c) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) $a - 3b - 2c = -3$.



Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax-1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2}$
	$\searrow$		$\searrow$
	$-\infty$		

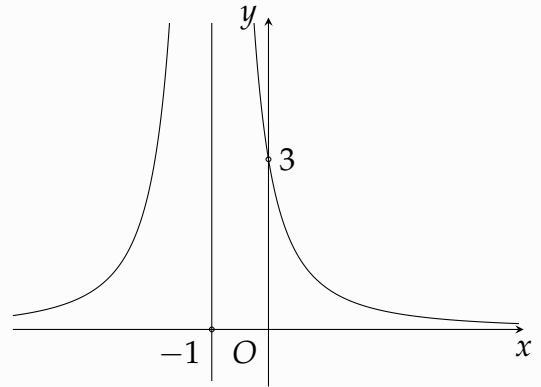
- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = \frac{1}{2}$.
- c) Đồ thị giao với trục hoành tại điểm có hoành độ nhỏ hơn 3.
- d) $b > \frac{2}{3}$ hoặc $b < 0$.

Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nhận $x = -1$ làm tiệm cận đứng như hình vẽ bên. Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; -2]$ bằng 8.

- $f'(0) = 3$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- Giá trị của $f(-3)$ bằng 8.
- Giá trị của $f(2)$ bằng 4.



Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$. Khi đó

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $x = -1$.
- Tâm đối xứng của đồ thị là $I(-1; 2)$.

Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Khi đó

- Hàm số có đạo hàm là $y' = \frac{3}{(x-1)^2}$.
- Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 4)$.
- Đồ thị hàm số và đường thẳng $d: y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ có 2 điểm chung.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hành độ bằng 2 là $y = -3x + 10$.

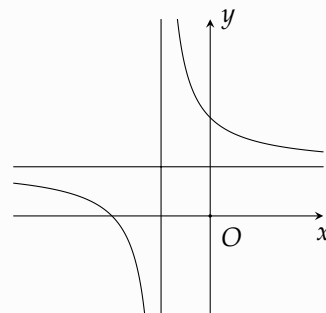
Lời giải.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là các số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- ☐ A $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 ☐ B $y' > 0, \forall x \neq -1$.
 ☐ C $y' < 0, \forall x \neq -1$.
 ☐ D $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.



Lời giải.

Câu 2

Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x-2}$ (a là các số thực cho trước, $a \neq -2$) có bảng biến thiên như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	1
			$-\infty$		

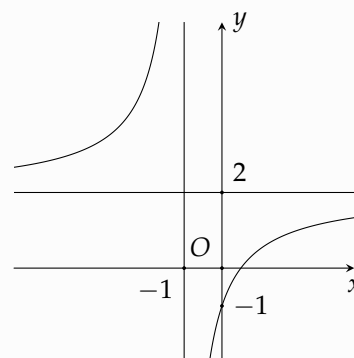
- ☐ A $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 ☐ B $y' > 0, \forall x \neq 2$.
 ☐ C $y' < 0, \forall x \neq 2$.
 ☐ D $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải.

Câu 3

Cho đường cong hình vẽ dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi đó là hàm số nào?

- ☐ A $y = \frac{2x+1}{x-1}$.
 ☐ B $y = \frac{2x+3}{x+1}$.
 ☐ C $y = \frac{2x-1}{x+1}$.
 ☐ D $y = \frac{2x-2}{x-1}$.

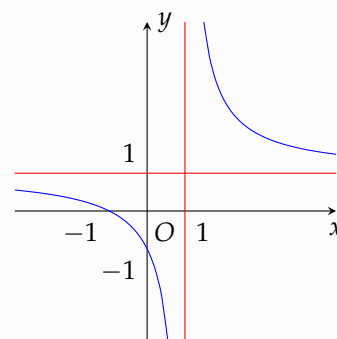


Lời giải.

Câu 4

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

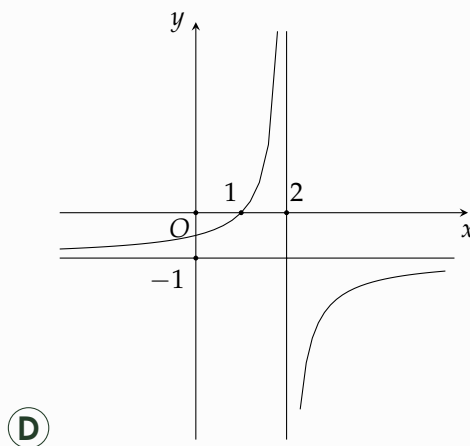
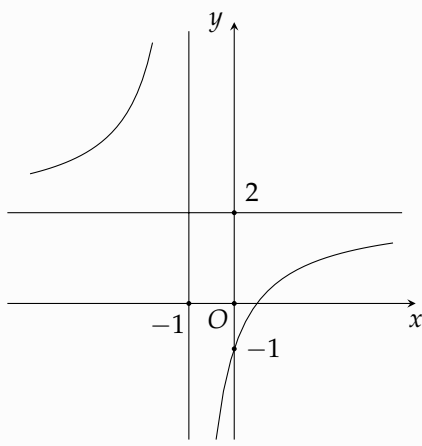
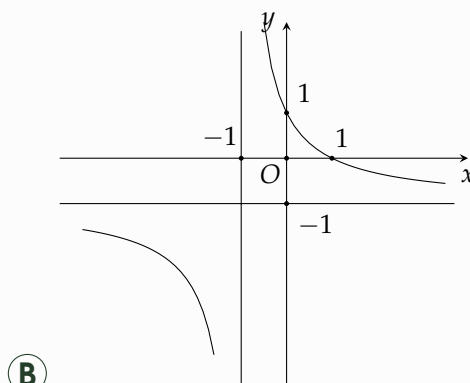
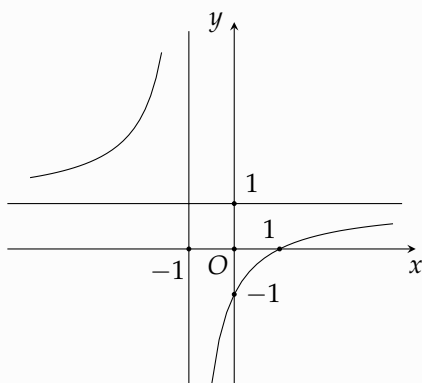
- Ⓐ $y = \frac{2x+1}{2x-2}$. Ⓑ $y = \frac{x+1}{x-1}$. Ⓒ $y = \frac{-x}{1-x}$. Ⓓ $y = \frac{x-1}{x+1}$.



📌 Lời giải.

Câu 5

Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \frac{1-x}{x+1}$?



📌 Lời giải.

Câu 6

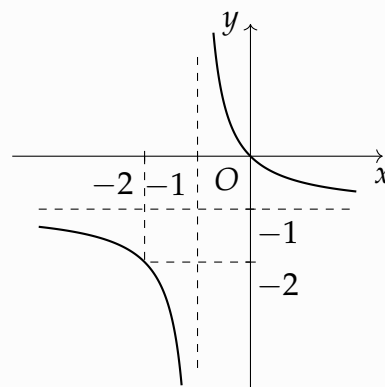
Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

A $y = \frac{x+1}{x-1}$.

B $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

C $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D $y = \frac{-x}{x+1}$.



Lời giải.

Câu 7

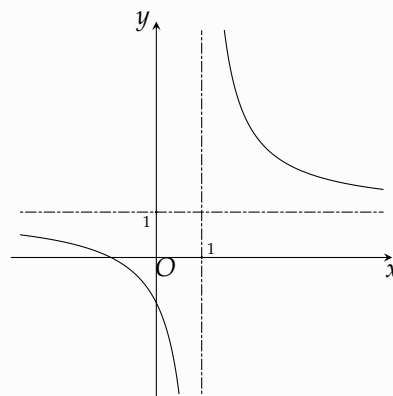
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

B $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C $y = x^4 + x^2 + 1$.

D $y = x^3 - 3x - 1$.



Lời giải.

Câu 8

Bảng biến thiên trong hình bên là của hàm số nào trong các hàm số đã cho?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	-1	$+\infty$	-1

Ⓐ $y = \frac{-x-3}{-x+1}$.

Ⓑ $y = \frac{-x-2}{x-1}$.

Ⓒ $y = \frac{x+3}{x-1}$.

Ⓓ $y = \frac{x-2}{-x+1}$.

👉 Lời giải.

Câu 9

Bảng biến thiên ở hình vẽ bên là của hàm số nào trong các hàm số sau?

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

Ⓐ $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Ⓑ $y = \frac{x+2}{x-1}$.

Ⓒ $y = \frac{x+1}{1-x}$.

Ⓓ $y = \frac{2x+1}{2x+3}$.

👉 Lời giải.

Câu 10

Cho hàm số $f(x) = \frac{ax+1}{bx+c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Trong các số a, b và c có bao nhiêu số dương?

Ⓐ 2.

Ⓑ 3.

Ⓒ 1.

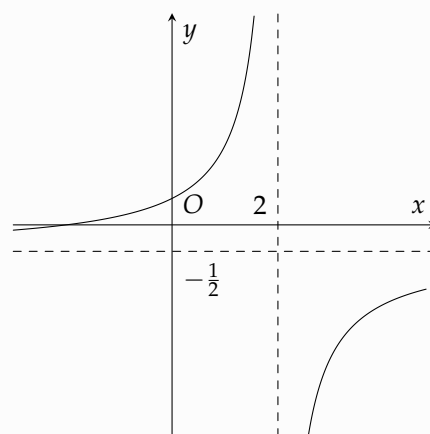
Ⓓ 0.

👉 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x+2}{ax+b}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.



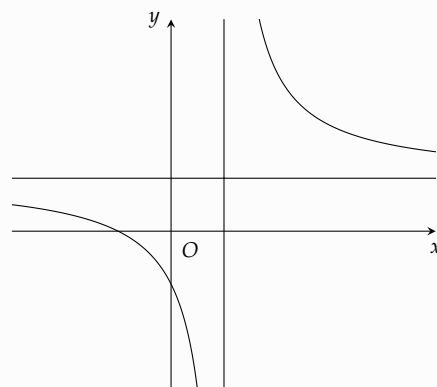
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Tiệm cận đứng là $x = 2$; tiệm cận ngang là $y = -\frac{1}{2}$.
- b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ dương.
- c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ dương.
- d) Hàm số đã cho là $y = \frac{x+2}{-2x-1}$.

Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{bx-c}{x-a}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên.



Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- b) Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ dương.
- c) Giao điểm với trục hoành là điểm có hoành độ âm.
- d) Trong các số a, b, c có hai số âm.

Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		—		—	
y	-2		$+\infty$		-2

$\swarrow$ $\searrow$
 $-\infty$ $-\infty$

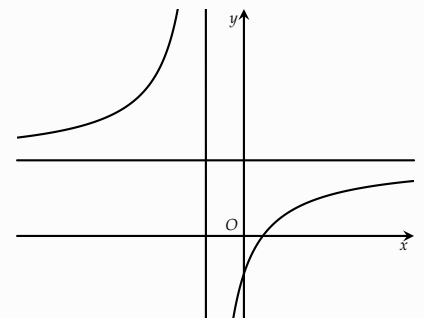
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
- Tiệm cận ngang $y = 2$.
- Giao điểm với trục tung là điểm có tung độ âm.
- Trong các số a, b, c, d có hai số dương.

📌 Lời giải.

Câu 4

Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.



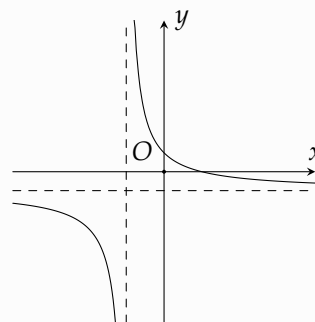
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- $\frac{a}{c} > 0$.
- $\frac{d}{c} > 0$.
- $ad > 0$.
- $ab < 0, bd > 0$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



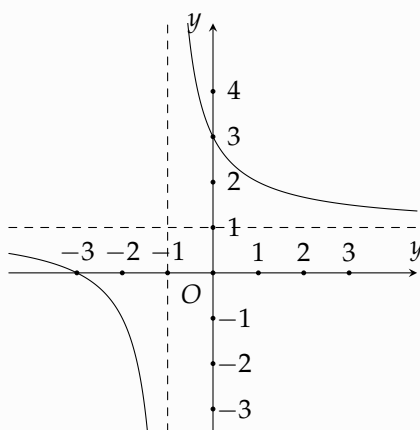
Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- Đồ thị hàm số cắt trục hoành tại điểm có hoành độ âm.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.
- Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị cùng dấu.
- Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ nằm bên phải trục tung.

Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x+3}{x+1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Hãy xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau



- Hàm số có đường tiệm cận đứng là $y = 1$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng là $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.
- Phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm phân biệt.
- Đường thẳng $d: y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB khi $m = 4$.

Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$
y	1	-5	$+\infty$	-1

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- Đồ thị hàm số chỉ có hai đường tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- Phương trình $f(x) = -1$ có ba nghiệm phân biệt.
- Phương trình $f^2(x) + 4f(x) = 0$ có 5 nghiệm phân biệt.

 **Lời giải.**

Câu 8

Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Hãy xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

x	$-\infty$	-1	0	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$	$+$
y	1	2	$-\infty$	-4	1

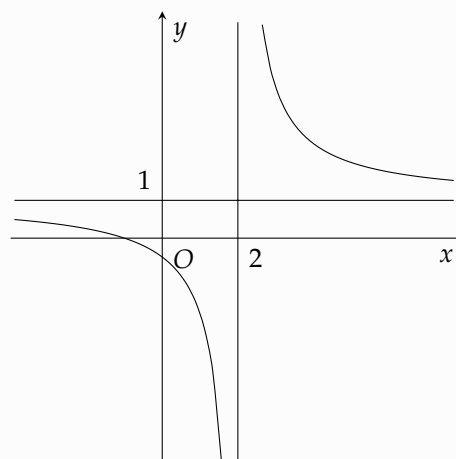
- Đồ thị hàm số có 1 điểm cực trị.
- Hàm số có 3 đường tiệm cận.
- Phương trình $f(x) = 1$ có đúng một nghiệm.
- Phương trình $f(x) = m - 2$ hai nghiệm khi $3 < m < 4$ hoặc $-2 < m < 3$.

 **Lời giải.**

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

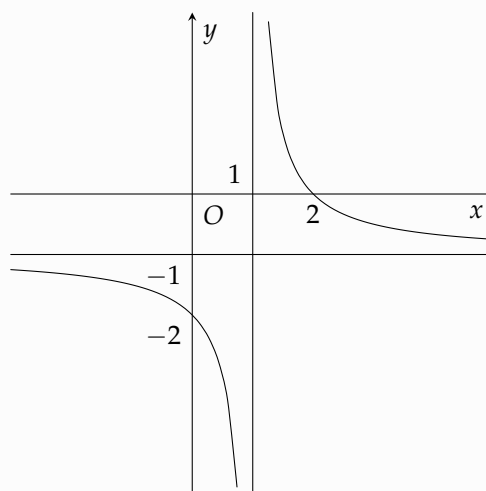
Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tính $T = a + b$.



Lời giải.

Câu 2

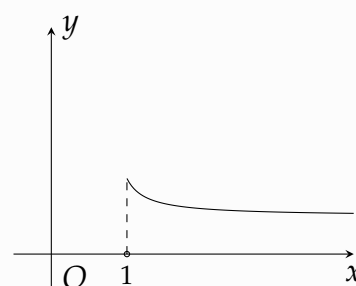
Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x+c}$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Tính $T = a - 3b + 2c$.



Lời giải.

Câu 3

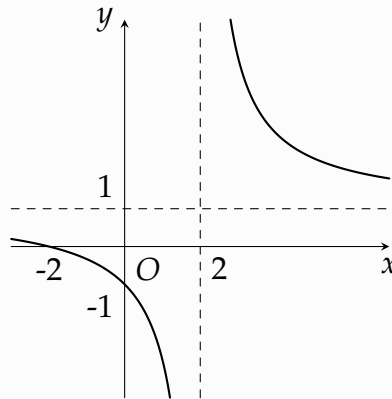
Biết có một cặp số nguyên dương ($a; b$) để hàm số $y = \frac{2x-a}{4x-b}$ có đồ thị trên $(1; +\infty)$ như hình vẽ bên. Tính $a + b$.



📌 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+d}$ có đồ thị (C) như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$.



📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $f(x) = \frac{2-ax}{bx-c}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	3	$+\infty$	3

Tổng $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng $\left(0; \frac{4}{n}\right)$. Tìm n .

📌 Lời giải.

Dạng 3

Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$

- ☑ Bước 1. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{n}{m} \right\}$.
- ☑ Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số
 - Tính đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.
 - Giải $y' = 0 \Leftrightarrow am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c = 0$, tìm nghiệm.
 - Tìm các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tìm tiệm cận của đồ thị hàm số.
 - Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên và cực trị của hàm số.
- ☑ Bước 3. Cho thêm điểm và vẽ đồ thị của hàm số dựa vào bảng biến thiên.

2. VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$; b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x + 1}$;

 **Lời giải.**

3. HỆ THỐNG BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 6

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	-10	-4	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$-$
y	$+\infty$		$+\infty$	0	$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			24		
				$-\infty$	

Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$. Ⓑ $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x - 4}$. Ⓒ $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 4}$. Ⓓ $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x + 4}$.

 **Lời giải.**

Câu 7

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		$+\infty$		
		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			-1	-9	
				$-\infty$	$-\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

Ⓐ $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 3}$. Ⓑ $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 3}$. Ⓒ $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x - 3}$. Ⓓ $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{-x + 3}$.

🔓 **Lời giải.**

Câu 8

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$	-9	-4	1	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y			-20		
	$-\infty$			0	$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 4}$.
(B) $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x + 4}$.
(C) $y = \frac{x^2 - x + 2}{-x - 4}$.
(D) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{-x - 4}$.

 **Lời giải.**

Câu 9

Bảng biến thiên sau là của một trong bốn hàm số sau.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

(B) $y = \frac{x^2 - 4x + 2}{x - 2}$.

(C) $y = \frac{x^2 - x}{x - 2}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$.

Lời giải.

Câu 10

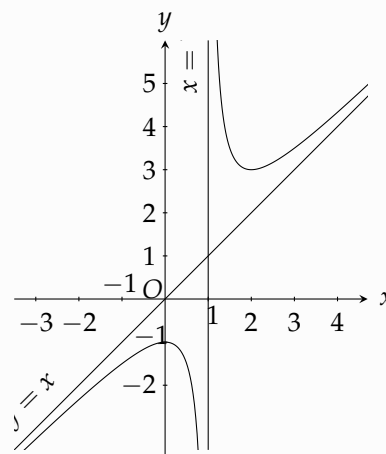
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

(B) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

(C) $y = \frac{x^2 - 4x - 1}{-x + 1}$.

(D) $y = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x + 1}$.



Lời giải.

Câu 11

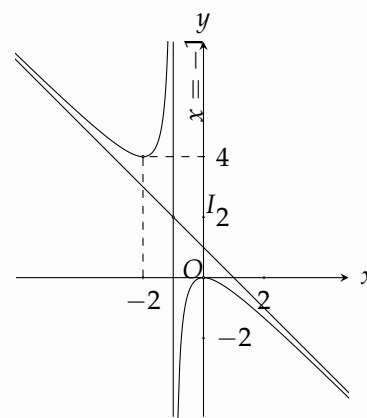
Đồ thị hình bên là của một trong bốn hàm số sau. Hỏi đó là hàm số nào?

(A) $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$.

(B) $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1}$.

(C) $y = \frac{x^2 + 1x + 2}{x + 1}$.

(D) $y = \frac{-x^2}{x + 1}$.



 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$. Khi đó

- a) Hàm số có tập xác định: $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cap (-2; +\infty)$.
- b) Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 2 + \frac{1}{x + 2} \right) = +\infty$ nên hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$.
- c) Vì $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
- d) Đồ thị hàm số nhận $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng.

 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x + 1}$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- b) Hàm số có 2 điểm cực trị.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 1$.
- d) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.

 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = \frac{2x^2 - 2x + 2}{-x + 1}$. Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1, 5; 2, 5]$ là $-\frac{19}{3}$.
- d) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $2x + y = 0$.

 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x}$. Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- b) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[1; 3]$ tại $x = 2$.
- d) Đồ thị hàm số đối xứng qua điểm $O(0; 0)$.

 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 3}{x - 1}$. Khi đó

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- b) Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
- c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 0]$ tại $x = 0$.
- d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = \frac{1 - x^2}{x}$. Khi đó

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 0$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x$.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là O .

 Lời giải.

Câu 7

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x}{x - 1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

- a) Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- c) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(1; 1)$.

 **Lời giải.**

Câu 8

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ có đồ thị (C). Khi đó

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3, -1)$.
- b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = -1$.
- c) Đồ thị (C) nhận $I(-2; 0)$ làm tâm đối xứng.
- d) Đồ thị (C) có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(1; 2)$.

 **Lời giải.**

Câu 9

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$. Khi đó

- a) Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là $3x - 4y + 2 = 0$.
- c) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm 2 phía đối với Oy .
- d) Đồ thị không cắt trục Ox .

 **Lời giải.**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ cắt trục tung tại điểm có tọa độ

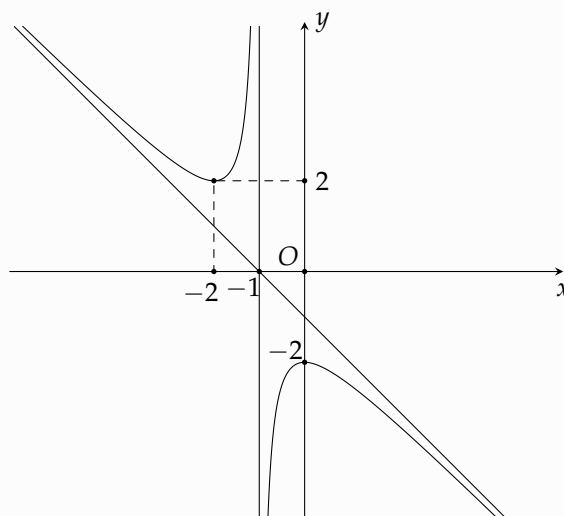
- Ⓐ $(-2; 0)$. Ⓑ $(0; 2)$. Ⓒ $(2; 0)$. Ⓓ $(0; -2)$.

🔑 Lời giải.

Câu 2

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- Ⓐ $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}$. Ⓑ $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.
 Ⓒ $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. Ⓓ $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x + 1}$.

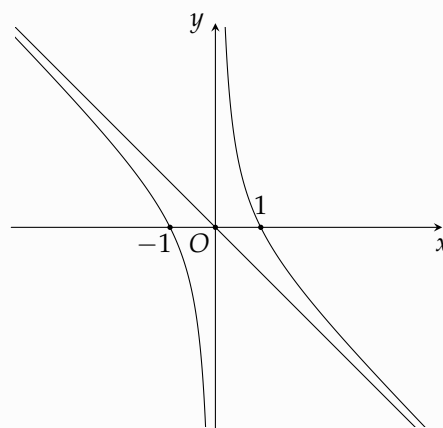


🔑 Lời giải.

Câu 3

Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

- Ⓐ $y = \frac{-2x + 1}{2x + 2}$. Ⓑ $y = x^3 - 3x^2$.
 Ⓒ $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$. Ⓓ $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$.



🔑 Lời giải.

Câu 4

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có tiệm cận xiên là

- (A) $y = -x$. (B) $y = x + 1$. (C) $y = x$. (D) $y = -x + 1$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ bằng

- (A) $2\sqrt{5}$. (B) $2\sqrt{3}$. (C) $3\sqrt{2}$. (D) $5\sqrt{2}$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ có đồ thị là (C). Có bao nhiêu điểm trên đồ thị (C) có tọa độ là các số nguyên?

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 0.

📌 Lời giải.

Câu 7

Cho M là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2}$. Ký hiệu p, q lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C). Tính pq .

- (A) $pq = \frac{3}{2}$. (B) $pq = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. (C) $pq = 3$. (D) $pq = 3\sqrt{2}$.

📌 Lời giải.

Câu 8

Cho M là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{\sqrt{3}x^2 + (1 - \sqrt{3})x + 1}{x - 1}$. Ký hiệu p, q lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị (C). Giá trị nhỏ nhất của $p + q$ bằng

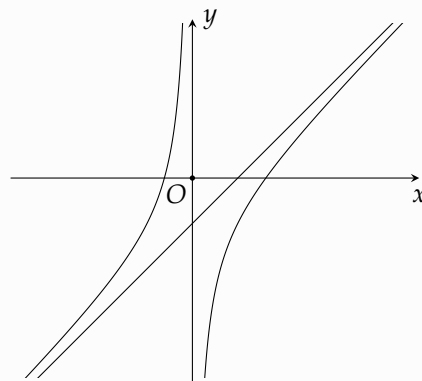
- (A) $2\sqrt{2}$. (B) 1. (C) 2. (D) $3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Câu 9

Cho hàm số $y = ax + b - \frac{r}{x}$ ($abr \neq 0$) và có đồ thị là (C) có dạng như hình vẽ bên. Các hệ số a, b, r phải thỏa mãn điều kiện nào dưới đây?

- (A) $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \\ r > 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r < 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \\ r > 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ r > 0 \end{cases}$



Lời giải.

Câu 10

Tìm được trên đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ hai điểm $M(a; b)$ và $N(c; d)$ có khoảng cách đến đường thẳng $\Delta: 3x + y + 6 = 0$ nhỏ nhất. Khi đó $a + b + c + d$ bằng

- (A) 4. (B) 9. (C) -9. (D) -4.

Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ có đồ thị là (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Giao điểm giữa (C) và trục tung là điểm $A(0; -1)$.
- b) Đồ thị (C) có tiệm cận đứng là $x = -1$.
- c) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.
- d) Đồ thị (C) có 2 điểm cực trị nằm về 2 phía của trục hoành.

👉 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 3}{x - 2}$ có đồ thị là (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Đồ thị hàm số $y = f(x + 1)$ có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) Đồ thị hàm số $y = f(x) + 1$ có tiệm cận xiên là $y = 2x + 1$.
- c) Đồ thị hàm số $y = f(x - 2024)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.
- d) Hàm số $y = f(x + 2) - 3$ là hàm số lẻ.

👉 Lời giải.

Câu 3

Cho hàm số $y = x - \frac{1}{x + 1}$ có đồ thị là (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Đồ thị của hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$.
- b) Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại M . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y = 2x - 1$.
- c) Tồn tại hai tiếp tuyến của đồ thị vuông góc với nhau.
- d) Để đường thẳng $y = k$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $OA \perp OB$ thì k là nghiệm của phương trình $k^2 - k - 1 = 0$.

👉 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 2(m + 1)x - 5}{x - 1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = -x + 1$.

- b) Khi $m = 0$ thì đồ thị hàm số không cắt Ox .
 c) Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m > 2$.
 d) Khi $m = 0$ thì hàm số có đồ thị là (C). Biết rằng tồn tại điểm M thuộc đồ thị (C) sao cho $x_M > 1$ và IM ngắn nhất (I là tâm đối xứng của (C)), khi đó $y_M < -4$.

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$ có đồ thị là (C). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

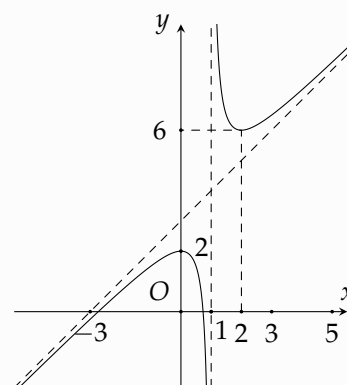
- a) Biết hàm số có 2 điểm cực trị khi đó tổng của giá trị cực đại và giá trị cực tiểu bằng -4 .
 b) Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0; 1)$.
 c) Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) và vuông góc với đường thẳng $x - 3y - 6 = 0$. Khi đó Δ đi qua điểm $B\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
 d) Để phương trình $x^2 + 3x + 3 = m|x + 2|$ có 4 nghiệm phân biệt thì $m > 2$.

📌 Lời giải.

Câu 6

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = x + 2$.
 b) Đồ thị hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
 c) Phương trình $f(x) = m$ có nghiệm duy nhất khi bằng $m = 2$ hoặc $m = 6$.
 d) Phương trình $f^2(x) - 8f(x) + 7 = 0$ có đúng hai nghiệm.

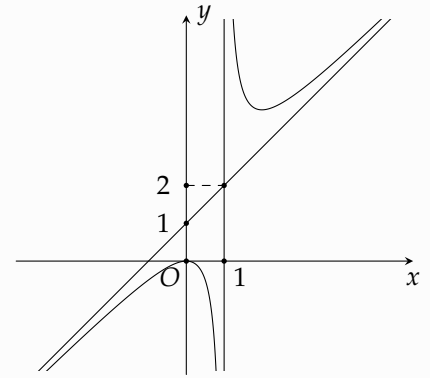


📌 Lời giải.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số $y = ax + b + \frac{1}{x+c}$. Khi đó tổng $a + b + c$ bằng



📌 Lời giải.

Câu 2

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ có đồ thị (C). Hỏi có bao nhiêu cặp điểm thuộc (C) và đối xứng nhau qua điểm $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$? KQ:

📌 Lời giải.

Câu 3

Tìm m để đường thẳng $y = -2x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$ tại hai điểm A, B sao cho trung điểm đoạn AB thuộc Oy .

📌 Lời giải.

Câu 4

Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2}{2x + 1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $2021f(\sqrt{3x^2 - 18x + 28}) - m\sqrt{3x^2 - 18x + 28} \geq m + 4042$ nghiệm đúng với mọi x thuộc đoạn $[2; 4]$?

📌 Lời giải.

Câu 5

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2 - 2m - 4}{x - 2}$ có đồ thị (C). Tìm m để đồ thị (C) có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: 2x + y + 1 = 0$.

 **Lời giải.**

§5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM VÀ KHẢO SÁT HÀM SỐ ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ta có đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lý, hoá học, sinh học và kinh tế:

- ✔ Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- ✔ Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- ✔ Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
- ✔ Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
- ✔ Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống).

2. Bài toán tối ưu hóa

Một trong những ứng dụng phổ biến nhất của đạo hàm là cung cấp một phương pháp tổng quát, hiệu quả để giải những bài toán tối ưu hoá. Trong mục này, chúng ta sẽ giải quyết những vấn đề thường gặp như tối đa hoá diện tích, khối lượng, lợi nhuận, cũng như tối thiểu hoá khoảng cách, thời gian, chi phí.

Khi giải những bài toán như vậy, khó khăn lớn nhất thường là việc chuyển đổi bài toán thực tế cho bằng lời thành bài toán tối ưu hoá toán học bằng cách thiết lập một hàm số phù hợp mà ta cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của nó, trên miền biến thiên phù hợp của biến số.

Quy trình giải một số bài toán tối ưu hoá đơn giản:

- ✔ Bước 1. Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ✔ Bước 2. Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- ✔ Bước 3. Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1 Bài toán về tốc độ thay đổi của một đại lượng

Ví dụ 1

Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo Vật lý đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

 Lời giải.

Ví dụ 2

Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B: $A + B \rightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 Kt}{aKt + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

(Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

 Lời giải.

Ví dụ 3

Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

 Lời giải.

Ví dụ 4

Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

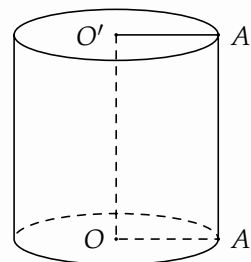
🔑 Lời giải.

Dạng 2

Bài toán tối ưu hoá đơn giản

Ví dụ 1

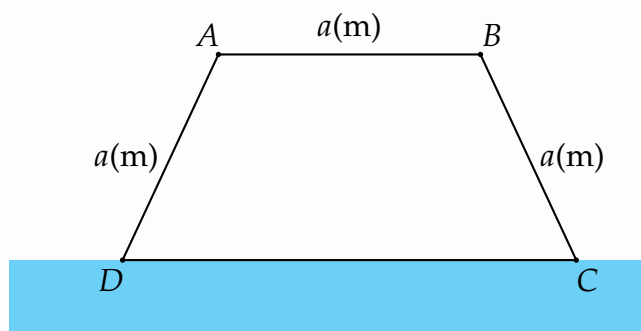
Một nhà sản xuất cần làm những hộp đựng hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimet và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



🔑 Lời giải.

Ví dụ 2

Một bác nông dân có ba tấm lưới B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân $ABCD$ như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?

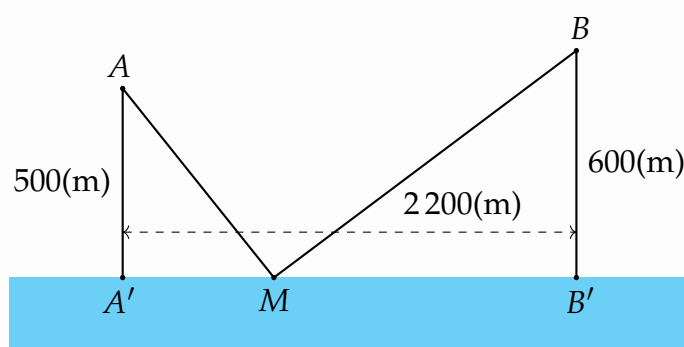


Hình 36

Lời giải.

Ví dụ 3

Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2\,200$ m Hình 37. Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Hình 37

Lời giải.

C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng.

Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm $h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét.

(Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-1*, Cornelsen 2016).

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $(0 \leq t \leq 50)$. Xác định hàm số $v(t)$.
- Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?
- Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- Tìm thời điểm t ($0 \leq t \leq 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

📌 **Lời giải.**

Bài 2

Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là

$$C(x) = \frac{300x}{100 - x} \text{ (triệu đồng)}, 0 \leq x < 100.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

- Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?
- Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

📌 **Lời giải.**

Bài 3

Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số

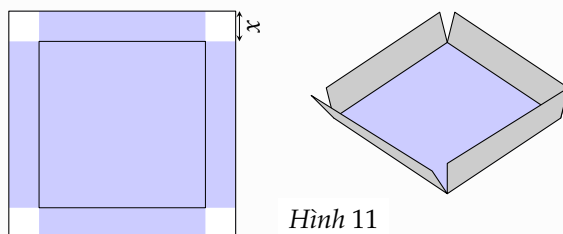
$$P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10,$$

trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

📌 **Lời giải.**

Bài 4

Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình 11).



Hình 11

Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.
Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

📌 Lời giải.

Bài 5

Xét phản ứng hóa học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A + B \rightarrow C$. Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương.

(Nguồn: Đỗ Đức Thái (Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

📌 Lời giải.

Bài 6

((Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng)) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

- ☑ Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau t tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong bảng bên dưới. (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e*, Cengage 2014).

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

- ☑ Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở bảng trên, tức là ở hệ trục tọa độ Oty , đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ “gần” với các điểm $A(5;38)$, $B(10;56)$, $C(15;79)$, $D(20;90)$, $E(25;93)$, $G(30;94)$. Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}$, $M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1) không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở bảng trên. Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ ($ac \neq 0$) cho mục đích đó. Dựa vào bảng trên, ta chọn hàm số $f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2}$ ($t > 0$).
- a) Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút).
- b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- c) Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

📌 Lời giải.

Bài 7

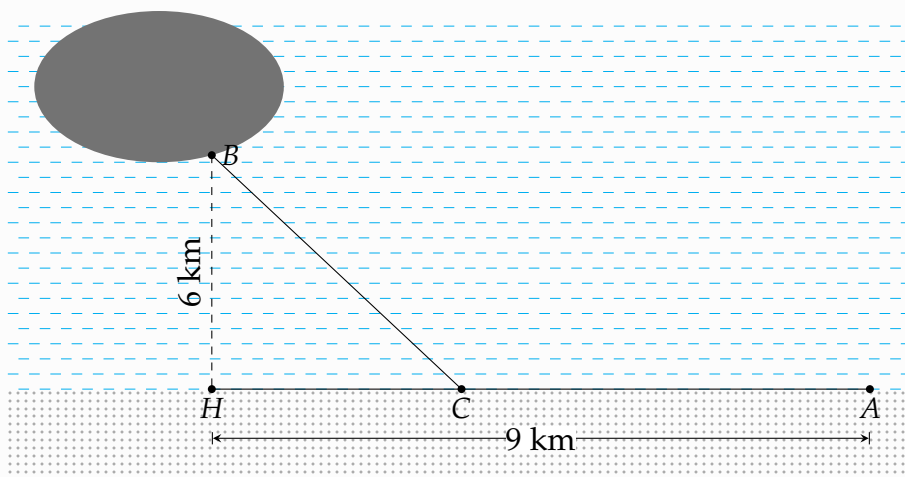
Trong Vật lý, điện trở tương đương R_{td} của hai điện trở R_1, R_2 mắc song song được xác định bởi công thức $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, biết rằng $R_2 = 3(\Omega)$. Đặt $R_1 = x(\Omega)$, $x > 0$.

- a) Tính R_{td} theo x , xem biểu thức tính được này là một hàm số $y = f(x)$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ với $x > 0$.
- b) Khi x tăng, điện trở R_{td} thay đổi như thế nào? R_{td} không thể vượt qua giá trị bao nhiêu?

📌 Lời giải.

Bài 8

Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình 1.42). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.

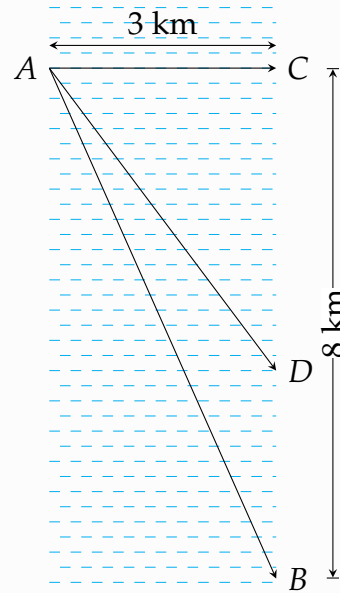


Hình 1.42

 Lời giải.

Bài 9

Một người chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng, rộng 3 km và muốn đến điểm B , cách bờ đối diện 8 km về phía hạ lưu, càng nhanh càng tốt như Hình 1.39. Người ấy có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến B , hoặc có thể chèo thuyền đến điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B . Biết rằng tốc độ chèo thuyền của người này là 6 km/h và tốc độ chạy bộ là 8 km/h. Tìm thời gian ngắn nhất mà người này có thể đi từ A đến B (bỏ qua vận tốc của nước và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.39

📌 Lời giải.

Bài 10

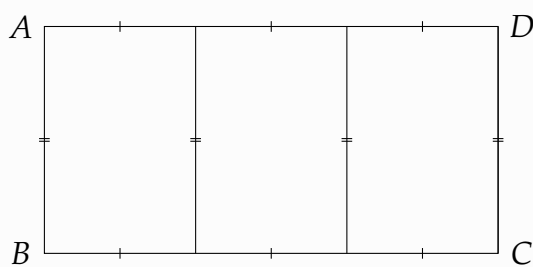
Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$, với t (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $s = s(t)$ trên hệ trục tọa độ tOs .
- Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

📌 Lời giải.

Bài 11

Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 600 m^2 . Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (Hình 1.40). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật $ABCD$ không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

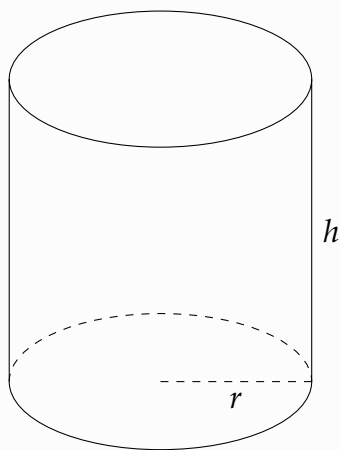


Hình 1.40

Lời giải.

Bài 12

Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít (Hình 1.41). Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.



Lời giải.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1

Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó tốc độ v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

(A) $t = 2,5$.

(B) $t = 1$.

(C) $t = 2$.

(D) $t = 0,5$.

Lời giải.

Câu 2

Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, tốc độ lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- Ⓐ 109 (m/s). Ⓑ 89 (m/s). Ⓒ $\frac{25}{3}$ (m/s). Ⓓ 71 (m/s).

📌 **Lời giải.**

Câu 3

Trong một môi trường dinh dưỡng có 1 000 vi khuẩn được cấy vào. Bằng thực nghiệm xác định được số lượng vi khuẩn tăng theo thời gian bởi quy luật $N(t) = 1\,000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con vi khuẩn), trong đó t là thời gian (đơn vị giây). Hãy xác định thời điểm sau khi thực hiện cấy vi khuẩn vào, số lượng vi khuẩn tăng lên lớn nhất?

- Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ -10. Ⓓ 10.

📌 **Lời giải.**

Câu 4

Mỗi đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 60 ngày. Người ta nhận thấy lượng gạo xuất khẩu tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức: $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ (tấn) ($1 \leq t \leq 60$). Hỏi trong 60 ngày đó, ngày thứ mấy có lượng gạo xuất khẩu cao nhất?

- Ⓐ 60. Ⓑ 45. Ⓒ 30. Ⓓ 25.

📌 **Lời giải.**

Câu 5

Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

- Ⓐ 36. Ⓑ 24. Ⓒ 48. Ⓓ 72.

📌 **Lời giải.**

Câu 6

Độ giảm huyết áp của một bệnh $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là

- (A) $x = 15$ (mg). (B) $x = 20$ (mg). (C) $x = 20$ (mg). (D) $x = 25$ (mg).

Lời giải.

Câu 7

Sự ảnh hưởng khi sử dụng một loại độc tố với vi khuẩn X được một nhà sinh học mô tả bởi hàm số $P(t) = \frac{t+1}{t^2+t+4}$, trong đó $P(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ sử dụng độc tố. Vào thời điểm nào thì số lượng vi khuẩn X bắt đầu giảm?

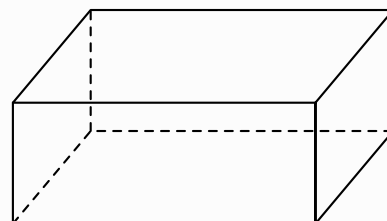
- (A) Ngay từ lúc bắt đầu sử dụng độc tố. (B) Sau 0,5 giờ.
(C) Sau 2 giờ. (D) Sau 1 giờ.

Lời giải.

Câu 8

Một người thợ gò làm một cái hòm dạng hình hộp chữ nhật có nắp bằng tôn. Biết rằng độ dài đường chéo hình hộp bằng $3\sqrt{2}$ dm và chỉ được sử dụng vừa đủ 18 dm^2 tôn. Với yêu cầu như trên người thợ có thể làm được cái hòm có thể tích lớn nhất bằng

- (A) 8 dm^3 . (B) $2\sqrt{2} \text{ dm}^3$. (C) 6 dm^3 . (D) 4 dm^3 .



Lời giải.

Câu 9

Cho mạch điện xoay chiều RLC mắc nối tiếp có R thay đổi. Biết điện trở cuộn cảm $Z_L = 80(\Omega)$, điện trở của tụ điện là $Z_C = 200(\Omega)$ và hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = U_0 \cos 100\pi t$ (V). Để công suất tiêu thụ của mạch cực đại thì giá trị của R bằng

- Ⓐ $120(\Omega)$. Ⓑ $50(\Omega)$. Ⓒ $100(\Omega)$. Ⓓ $200(\Omega)$.

📌 Lời giải.

Câu 10

Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4 000 bản in khổ giấy A4 trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50 000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n + 5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50 000 bản in khổ giấy A4 thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

- Ⓐ 4 máy. Ⓑ 7 máy. Ⓒ 6 máy. Ⓓ 5 máy.

📌 Lời giải.

Câu 11

Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $Q(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

- Ⓐ 12. Ⓑ 14. Ⓒ 10. Ⓓ 18.

📌 Lời giải.

Câu 12

Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nhiên liệu làm vỏ lon là thấp nhất, tức là diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất. Muốn thể tích của khối trụ đó bằng V và diện tích toàn phần của hình trụ nhỏ nhất thì nhà thiết kế phải thiết kế hình trụ có bán kính bằng bao nhiêu?

- Ⓐ $\sqrt{\frac{V}{2\pi}}$. Ⓑ $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Ⓒ $\sqrt{\frac{V}{\pi}}$. Ⓓ $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

📌 Lời giải.

Câu 13

Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, tốc độ lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- (A) 24 m/s. (B) 36 m/s. (C) 180 m/s. (D) 144 m/s.

 **Lời giải.**

Câu 14

Một đoàn tàu chuyển động thẳng khởi hành từ một nhà ga. Quãng đường (theo đơn vị mét (m)) đi được của đoàn tàu là một hàm số của thời gian t (theo đơn vị giây (s)) cho bởi phương trình là $S = 6t^2 - t^3$. Tìm thời điểm t mà tại đó tốc độ v (m/s) của đoàn tàu là lớn nhất?

- (A) $t = 4$ s. (B) $t = 1$ s. (C) $t = 2$ s. (D) $t = 6$ s.

 **Lời giải.**

Câu 15

Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 15t^2 - t^3$ (theo kết quả khảo sát các năm vừa qua). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì vào ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn nhất, số người nhiễm bệnh là bao nhiêu?

- (A) 500. (B) 250. (C) 600. (D) 75.

 **Lời giải.**

Câu 16

Một công ty bất động sản có 40 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3 000 000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá mỗi căn hộ 100 000 đồng một tháng (theo quy định trong hợp đồng) thì sẽ có một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu một tháng?

- (A) 3 500 000 đồng. (B) 4 000 000 đồng. (C) 3 700.000 đồng. (D) 3 900 000 đồng.

📌 Lời giải.

Câu 17

Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 24t^2 + 500$ (m/s). Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ (s) đến $t = 10$ (s) chất điểm đạt tốc độ lớn nhất tại thời điểm nào (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

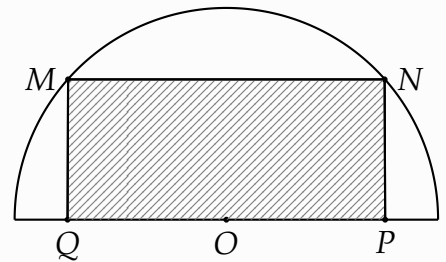
- Ⓐ $t = 2$. Ⓑ $t = 4$. Ⓒ $t = 0$. Ⓓ $t = 1$.

📌 Lời giải.

Câu 18

Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là

- Ⓐ $\frac{9}{2}$. Ⓑ $6\sqrt{2}$. Ⓒ $9\sqrt{2}$. Ⓓ 9.



📌 Lời giải.

Câu 19

Một xưởng sản xuất những thùng hình hộp chữ nhật bằng nhôm không nắp và có các kích thước x, y, z (dm). Biết tỉ số hai cạnh đáy là $x : y = 1 : 3$, thể tích khối hộp bằng 18 dm^3 . Để tốn ít vật liệu nhất thì tổng $x + y + z$ bằng

- Ⓐ 10 dm. Ⓑ $\frac{26}{3}$ dm. Ⓒ 26 dm. Ⓓ $\frac{19}{2}$ dm.

📌 Lời giải.

Câu 20

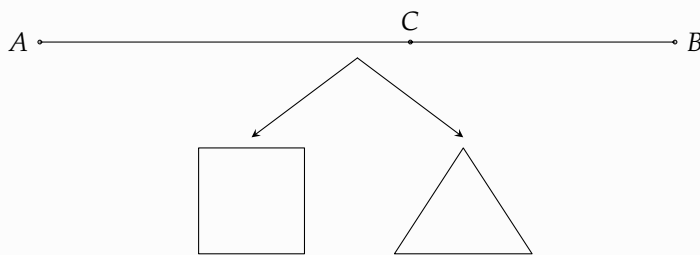
Ông An muốn xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp với dung tích 3000 lít. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây hồ là 500 000 đồng cho mỗi mét vuông. Hỏi chi phí thấp nhất ông An cần bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu?

- (A) 6 490 123 đồng. (B) 5 151 214 đồng. (C) 7 500 000 đồng. (D) 6 500 000 đồng.

Lời giải.

Câu 21

Một thanh sắt chiều dài $AB = 100$ m được cắt thành hai phần AC và CB với $AC = x$ (m). Đoạn AC được uốn thành một hình vuông có chu vi bằng AC và đoạn CB uốn thành tam giác đều có chu vi bằng CB . Khi tổng diện tích của hình vuông và tam giác nhỏ nhất, mệnh đề nào dưới đây đúng?



- (A) $x \in (52; 58)$. (B) $x \in (48; 52)$. (C) $x \in (40; 48)$. (D) $x \in (30; 40)$.

Lời giải.

Câu 22

Một người bán buôn Thanh Long Đỏ nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20 000 đồng/kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2 000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó mỗi khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2 000 đồng/kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó mỗi khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2 200 đồng/kg (kết quả làm tròn đến hàng nghìn).

- (A) 16 000 đ. (B) 12 000 đ. (C) 24 000 đ. (D) 22 000 đ.

Lời giải.

Câu 23

Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 70$ km, chiều rộng $AD = 10$ km. Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là 20 km/h, riêng đi trên cạnh CD thì vận tốc là 40 km/h. Một người đi xe máy xuất phát từ A muốn đến B thì cần ít nhất bao nhiêu giờ?

Ⓐ $\frac{7}{2}$.

Ⓑ $\frac{2\sqrt{3} + 7}{4}$.

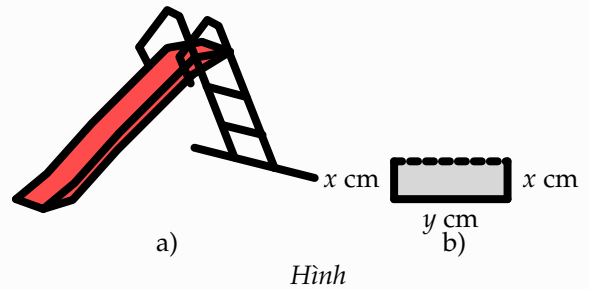
Ⓒ $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Ⓓ $\frac{20}{\sqrt{3}}$.

📌 Lời giải.

Câu 24

Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình b. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Ⓐ $x = 16$ cm.

Ⓑ $x = 18$ cm.

Ⓒ $x = 22$ cm.

Ⓓ $x = 20$ cm.

📌 Lời giải.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1

Số dân của một thị trấn sau năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$ với ($f(t)$ được tính bằng nghìn người).

- Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.
- Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.
- Xem f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.
- Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

Lời giải.

Câu 2

Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t) = 100e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$).

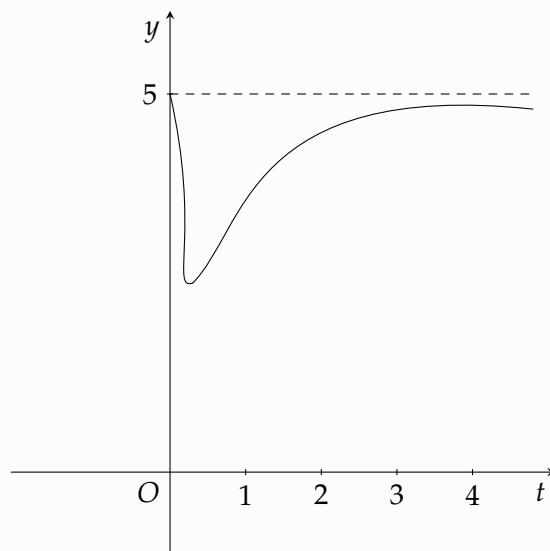
- Dân số của quốc gia vào năm 2030 là 108,763 (triệu người).
- Dân số của quốc gia vào năm 2035 là 125,488 (triệu người).
- Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Khi đó hàm số $N(t)$ đồng biến trên đoạn $[0; 50]$.
- Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vậy vào năm 2040 thì tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm.

Lời giải.

Câu 3

Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số (có đồ thị như đường màu đỏ ở hình bên) $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$.

- Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong nước là 3,5(mg/l).
- Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước không vượt quá 5(mg/l).
- Vào thời điểm $t = 0$ thì nồng độ oxygen trong nước cao nhất.
- Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước thấp nhất là 3,5(mg/l).



Lời giải.

Câu 4

Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox . Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

- Hàm $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$.
- Hàm $a(t) = 6t - 12$.
- Trong khoảng từ $t = 0$ đến $t = 2$ thì vận tốc của chất điểm tăng.
- Từ $t = 2$ trở đi thì vận tốc của chất điểm giảm.

 **Lời giải.**

Câu 5

Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

- Hàm số vận tốc là $v(t) = 3t^2 - 12, t \geq 0$.
- Hạt chuyển động xuống dưới khi $t > 2$.
- Quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ là 9 m.
- Khi $t > 0$ thì hạt tăng tốc.

 **Lời giải.**

Câu 6

Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi ti vi, x là số ti vi.

- Hàm cầu là $p(x) = -\frac{1}{200}x + 19$.
- Công ty giảm giá 4,5 (triệu đồng)/1 tivi cho người mua thì doanh thu của công ty là lớn nhất.
- Nếu hàm chi phí hàng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), khi đó có 2300 ti vi được bán ra thì lợi nhuận là cao nhất.
- Nếu hàm chi phí hàng tuần là $C(x) = 12000 - 3x$ (triệu đồng), thì nhà sản xuất nên đặt giá bán 8,5 triệu đồng/1 ti vi để lợi nhuận là lớn nhất.

 **Lời giải.**

Câu 7

Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

- Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).
- Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$ (nghìn đồng).
- Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa.
- Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được là 1000 nghìn đồng.

 **Lời giải.**

Câu 8

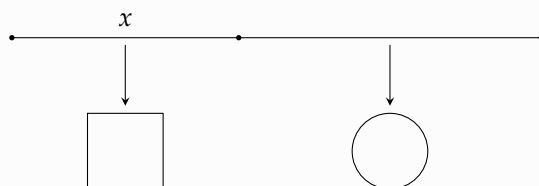
Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $P = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$, trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (P và $\bar{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

- $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa.
- Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400 \$.
- Lợi nhuận tối đa là 17420 \$.
- Nếu chính phủ đánh thuế 22 \$/một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390 \$ để lợi nhuận thu được tối đa.

 **Lời giải.**

Câu 9

Một sợi dây kim loại dài a (cm). Người ta cắt đoạn dây đó thành hai đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($a > x > 0$).



- Bán kính đường tròn là $r = \frac{x}{\pi}$.
- Diện tích hình vuông là $\left(\frac{a-x}{4}\right)^2$.
- Tổng diện tích hai hình là $\frac{(4 + \pi) \cdot x^2 - 2a\pi x + \pi a^2}{16\pi}$.

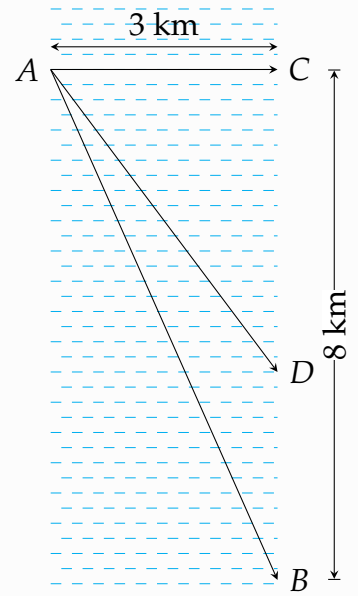
d) Khi $x = \frac{a\pi}{2 + \pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

📌 Lời giải.

Câu 10

Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện trong thời gian sớm nhất, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Gọi x (km) là độ dài quãng đường BD .

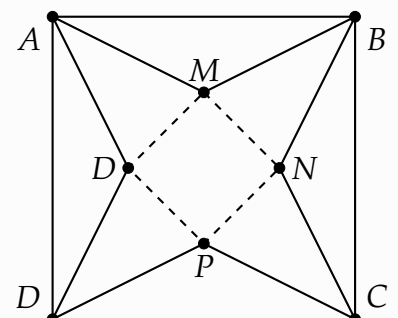
- $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường CD .
- Thời gian chèo thuyền trên quãng đường AD là $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3}$ (giờ).
- Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{3} + \frac{8 - x}{8}$.
- Khoảng 1 giờ 20 phút là khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B .



📌 Lời giải.

Câu 11

Từ một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 50 cm, người ta cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau là AMB , BNC , CPD và DQA . Với phần còn lại, người ta gấp lên và ghép lại để thành hình chóp tứ giác đều. Gọi cạnh đáy của mô hình là x (cm) với $x > 0$. Khi đó

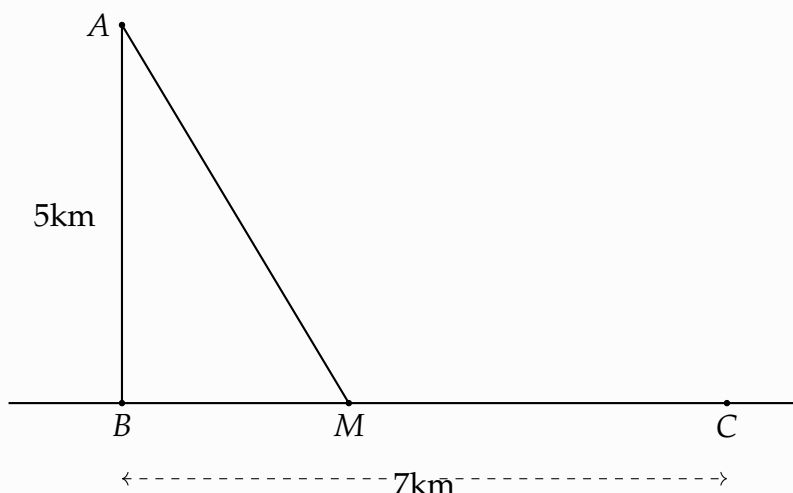


- Chiều cao của hình chóp là $\sqrt{1250 - 25\sqrt{2}x}$.
- Điều kiện của x là $0 < x < 25\sqrt{2}$.
- Thể tích của khối chóp bằng $\frac{1}{3}\sqrt{1250x^3 - 25\sqrt{2}x^4}$.
- Khi cạnh đáy của khối chóp bằng $3\sqrt{2}\text{dm}$ thì thể tích của khối chóp là lớn nhất.

📌 Lời giải.

Câu 12

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5 \text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7 \text{ km}$ (tham khảo hình vẽ)



Người canh hải đăng có thể chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h và đi bộ đến kho C với vận tốc 6 km/h .

Đặt $BM = x$ với $0 < x < 7$. Khi đó

- Thời gian đi từ A đến M là $\frac{\sqrt{25 + x^2}}{4}$.
- Thời gian đi từ A đến C là $\frac{\sqrt{25 + x^2}}{4} + \frac{7 - x}{6}$.
- Thời gian ngắn nhất đi từ A đến C là khoảng $3\text{h}06 \text{ phút}$.
- Muộn nhất $3\text{h}54 \text{ phút}$ người đó phải xuất phát từ vị trí A để có mặt tại kho C lúc 7h sáng.

📌 Lời giải.

Câu 13

Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đáy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là $36m^3$, đáy bể có chiều dài gấp 2 lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4m, biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau.

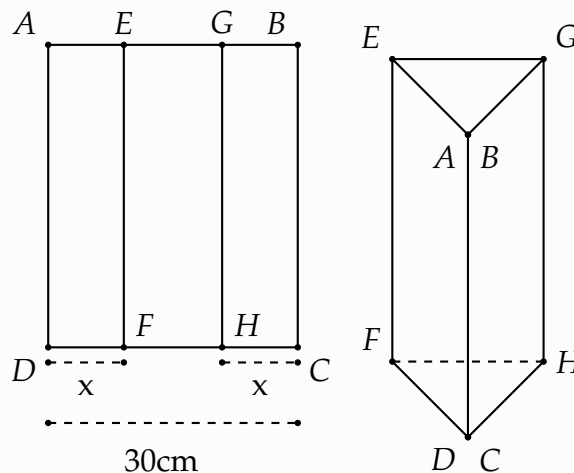
Gọi $x(m)$ là chiều rộng của bể, ta có $0 < x \leq 4$. Khi đó

- Chiều dài của bể là $2x$ (m).
- Chiều cao của bể là $\frac{18}{x^2}$.
- Tổng diện tích các mặt cần xây là: $2x^2 + \frac{108}{x}$.
- Chiều cao bể nước bằng 3(m) thì tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất.

📌 Lời giải.

Câu 14

Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy.



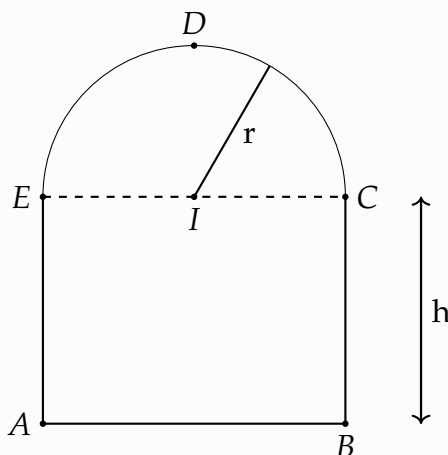
Khi đó:

- Thể tích khối trụ được tính bằng công thức $V = 30S$ trong đó S là diện tích của tam giác AEG .
- Diện tích của tam giác AEG bằng: $\sqrt{30} \cdot \sqrt{(15-x)^2(2x-15)}$.
- Giá trị của x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $x = 10$ (cm).
- Thể tích khối lăng trụ lớn nhất bằng 1250.

📌 Lời giải.

Câu 15

Bác thợ hàn dùng một thanh kim loại dài 250cm để uốn thành khung cửa sổ có dạng như hình vẽ. Gọi r là bán kính của nửa đường tròn,



khi đó:

- Diện tích của nửa hình tròn là $S_1 = \frac{1}{2}\pi r^2$.
- Diện tích của hình chữ nhật là $S_2 = 250r - \pi r^2 - 2r^2$.
- Khi $r = 10$ thì giá trị diện tích của khung cửa sổ nằm trong khoảng (2000; 2140).
- Biết $r = r_0$ thì diện tích tạo thành đạt giá trị lớn nhất khi đó $r_0 \in (35; 36)$.

📌 Lời giải.

Câu 16

Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho tọa độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3, t \geq 0$.

Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau

- Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 2$ là 12 m/s^2 .
- Hạt chuyển động xuống dưới khi $t \leq 0$.
- Trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$ hạt đi được quãng đường 9 m.
- Hạt tăng tốc khi $t \geq 0$, hạt giảm tốc khi $t \leq 0$.

📌 Lời giải.

Câu 17

Giả sử hàm cầu của một sản phẩm độc quyền được cho bởi $p = 400 - 2Q$ và hàm chi phí trung bình $\bar{C} = 0,2Q + 4 + \frac{400}{Q}$ trong đó Q là số đơn vị sản phẩm (p và $\bar{C}$ được tính bằng \$ đối với mỗi đơn vị sản phẩm).

Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau

- a) $Q = 90$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa.
- b) Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 400\$.
- c) Lợi nhuận tối đa là 17420\$.
- d) Nếu chính phủ đánh thuế 22\$/ một đơn vị sản phẩm thì giá bán 390\$ để lợi nhuận thu được tối đa.

 **Lời giải.**

Câu 18

Một nhà sản xuất trung bình bán được 1 000 laptop mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng laptop bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 chiếc mỗi tuần. Biết rằng hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12\,000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số laptop bán ra trong tuần.

Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau

- a) Hàm cầu là $p = -\frac{1}{200}x + 19$, trong đó p (triệu đồng) là giá của mỗi laptop, x là số laptop bán ra.
- b) Để doanh thu đạt được là lớn nhất thì nên giảm giá bán laptop là 5 triệu đồng cho một chiếc.
- c) Để công ty không bị lỗ vốn thì mỗi tuần cần bán được ít nhất 600 chiếc laptop.
- d) Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là 12 200 (triệu đồng).

 **Lời giải.**

Câu 19

Một bể bơi chứa 5 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

- a) Sau t phút khối lượng muối trong bể là $750t$ (gam).
- b) Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200 - t}$.
- c) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó có phương trình là $y = 30$.
- d) Khi t ngày càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít).

Lời giải.

Câu 20

Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức

$$G(x) = 0,025x^2(30 - x)$$

trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam, $0 < x < 30$).

- Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân là $G(x) = 0,75x^2 - 0,025x^3$.
- Đạo hàm của $G(x)$ là $G'(x) = 1,5x + 0,075x^2$.
- Phương trình $G'(t) = 0$ có nghiệm duy nhất.
- Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là 20 mg.

Lời giải.

Câu 21

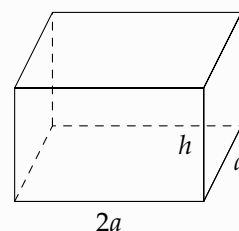
Một công ty bất động sản có 120 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 3 triệu đồng thì mỗi tháng mọi căn hộ đều có người thuê và cứ tăng thêm giá cho thuê mỗi căn hộ 100 nghìn đồng một tháng thì sẽ có 3 căn hộ bị bỏ trống. Gọi x (trăm nghìn) là số tiền tăng thêm.

- Số căn hộ còn lại sau khi tăng giá là $120 - 3x$.
- Giá một căn hộ sau khi tăng là $30 - x$ (trăm nghìn).
- Tổng số tiền công ty thu được là $S(x) = -3x^2 + 30x + 3600$ (trăm nghìn).
- Công ty thu được nhiều tiền nhất khi giá thuê mỗi căn hộ là 4 (triệu đồng).

Lời giải.

Câu 22

Ông A dự định sử dụng hết $5,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép nối không đáng kể). Gọi a và h lần lượt là kích thước chiều rộng và chiều cao (theo đơn vị mét).



- Tổng diện tích 5 mặt của bể là $S = 2a^2 + 2ah + 4ah = 2a^2 + 6ah$.

b) Ta có $h = \frac{5,5 + 2a^2}{6a}$.

c) Thể tích của bể là $V = \frac{5,5a}{3} + \frac{2a^3}{3}$.

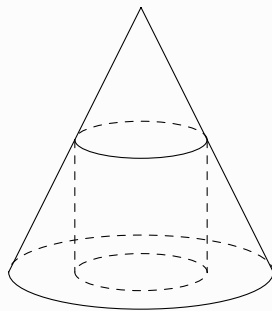
d) Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $\frac{11\sqrt{33}}{54}$.

📌 Lời giải.

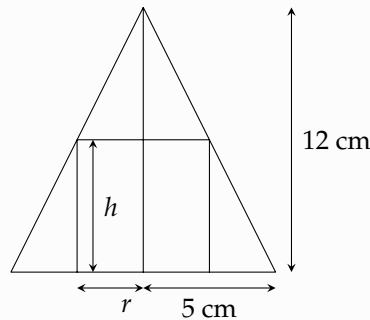
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời vào ô kết quả.

Câu 1

Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình 1). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình 2.



Hình 1



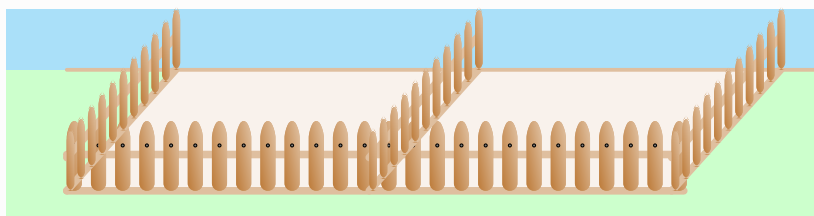
Hình 2

Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

📌 Lời giải.

Câu 2

Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



📌 Lời giải.

Câu 3

Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2024 được ước tính bởi công thức $N(t) = 100e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$).

Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm?

📌 Lời giải.

Câu 4

Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ mg/L. Sau khi tiêm thuốc bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

📌 Lời giải.

Câu 5

Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B . Máy A làm việc trong x ngày cho số tiền lãi là $x^2 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày cho số tiền lãi là $-27y^2 + 326y$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A làm việc trong bao nhiêu ngày để số tiền lãi thu được nhiều nhất? Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc và máy B làm việc không quá 6 ngày.

📌 Lời giải.

Câu 6

Bác Tôm có một cái ao có diện tích 50 m^2 để nuôi cá. Vụ vừa qua bác nuôi với mật độ 20 con/m^2 và thu được tất cả $1,5$ tấn cá thành phẩm. Theo kinh nghiệm nuôi cá thu được, bác thấy cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì tương ứng sẽ có mỗi con cá thành phẩm thu được tăng thêm $0,5 \text{ kg}$. Hỏi vụ tới bác phải mua bao nhiêu con cá giống để đạt được tổng khối lượng cá thành phẩm cao nhất? (Giả sử không có hao hụt trong quá trình nuôi).

📌 **Lời giải.**

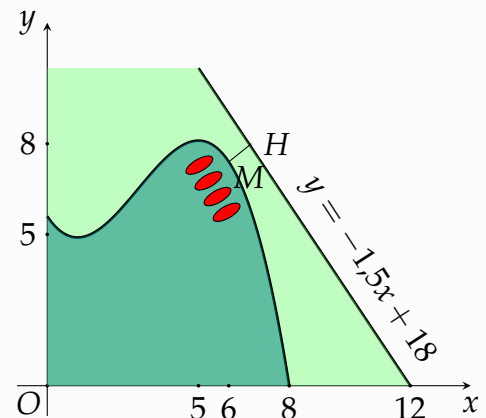
Câu 7

Một cửa hàng cà phê sắp khai trương đang nghiên cứu thị trường để định giá bán cho mỗi cốc cà phê. Sau khi nghiên cứu, người quản lý thấy rằng nếu bán với giá $20\,000$ đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình sẽ bán được $2\,000$ cốc, còn từ mức giá $20\,000$ đồng mà cứ tăng giá thêm $1\,000$ đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc cà phê không thay đổi là $18\,000$ đồng. Hỏi cửa hàng phải bán mỗi cốc cà phê với giá bao nhiêu nghìn đồng để đạt lợi nhuận lớn nhất?

📌 **Lời giải.**

Câu 8

Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa bên, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$. Đơn vị độ dài trên mỗi trục là 100 m (Nguồn: A. Bigalke et al, Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelsen 2016).

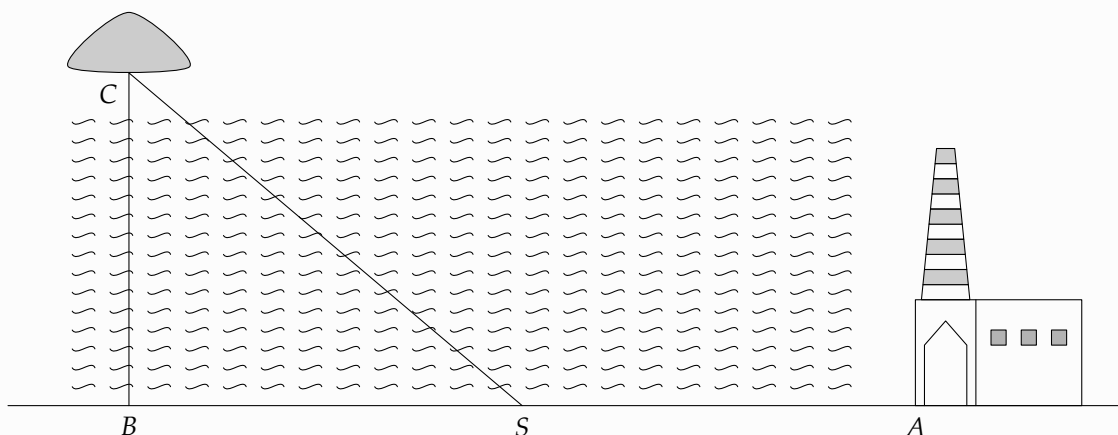


Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng trên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Hoàn cảnh của điểm để xây dựng bến thuyền này bằng bao nhiêu?

📌 **Lời giải.**

Câu 9

Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A (nằm tại bờ biển là đường thẳng AB) đến một hòn đảo C , khoảng cách ngắn nhất từ đảo về bờ biển là đoạn BC dài 1 km, khoảng cách từ B đến A là 4 km được minh họa bằng hình vẽ dưới đây.



Biết rằng mỗi km dây điện đặt dưới nước chi phí mất 5000 USD, còn đặt dưới đất chi phí mất 3000 USD. Hỏi điểm S trên bờ cách A bao nhiêu km để khi mắc dây điện từ A qua S rồi đến C có chi phí là ít nhất?

Lời giải.

Câu 10

Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu m/s?

Lời giải.

Câu 11

Thể tích V của 1 kg nước (tính bằng cm^3) ở nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}\text{C}$) khi T thay đổi từ $^{\circ}\text{C}$ đến 30°C được cho xấp xỉ bởi công thức

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000769T^3.$$

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning 8th edition, p.284)

Tìm nhiệt độ $T_0 \in (0; 30)$ để kể từ nhiệt độ T_0 trở lên thì thể tích V tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

 Lời giải.

Câu 12

Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ với $(0 \leq t \leq 25)$. Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.

 Lời giải.

Câu 13

Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

 Lời giải.

Câu 14

Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $s(t)$ (km) là hàm phụ thuộc theo biến t (giây) tuân theo biểu thức $s(t) = e^{t^2+3} + 2te^{3t+1}$ (km). Hỏi vận tốc của tên lửa sau 1 giây là bao nhiêu (biết hàm biểu thị vận tốc là đạo hàm cấp một của hàm biểu thị quãng đường theo thời gian)?

 Lời giải.

Câu 15

Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi sau bao nhiêu giây thì vật đạt độ cao lớn nhất?

 Lời giải.

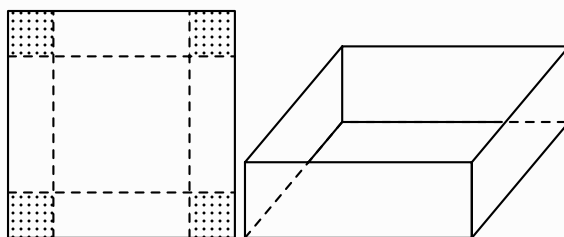
Câu 16

Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}$, $t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

📌 Lời giải.

Câu 17

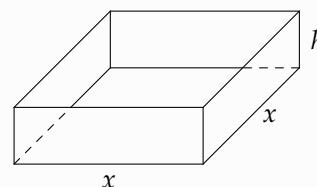
Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp. Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



📌 Lời giải.

Câu 18

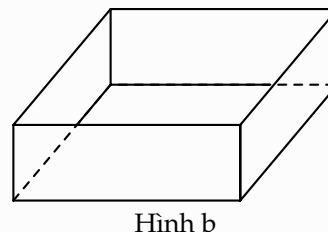
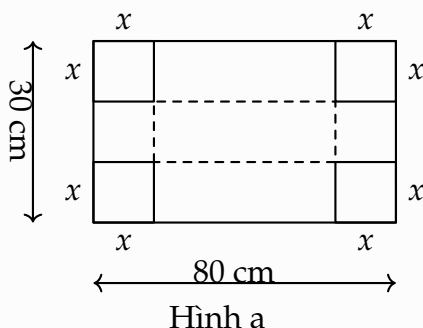
Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như hình vẽ. Biết khi $x = x_0$; $h = h_0$ thì thể tích của hộp là lớn nhất. Khi đó $x_0 + h_0$ bằng



📌 Lời giải.

Câu 19

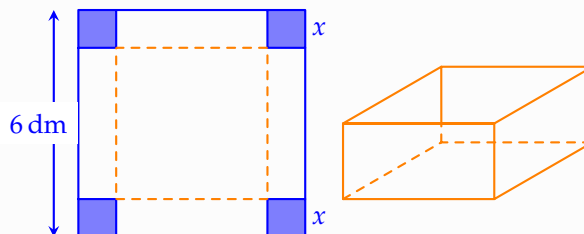
Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (hình a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp (hình b), tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



📌 Lời giải.

Câu 20

Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm. Bác Ánh cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài bằng x (dm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x . Tìm x (dm) để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.



📌 Lời giải.

Câu 21

Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức: $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ (con), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

📌 Lời giải.

Câu 22

Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho được cho bởi công thức $V = k(R - r)r^2$; $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu so với bán kính khí quản lúc bình thường thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất? (Độ chính xác đến hàng phần trăm).

📌 Lời giải.

Câu 23

Người quản lí của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lí nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất (đơn vị triệu đồng)?

📌 Lời giải.

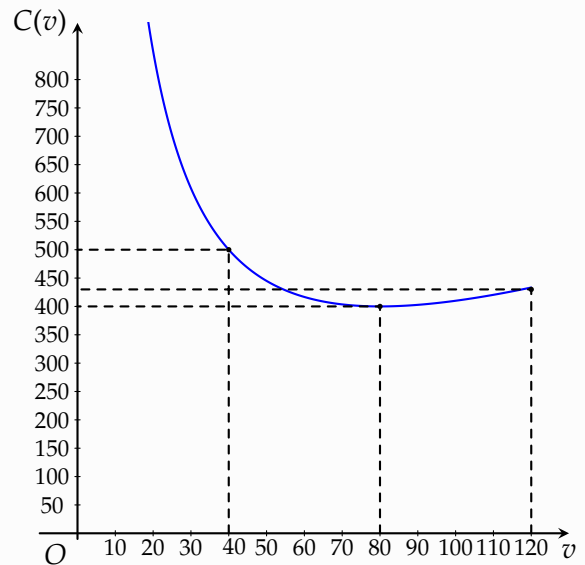
Câu 24

Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích 200 m² để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn. Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m, hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?

📌 Lời giải.

Câu 25

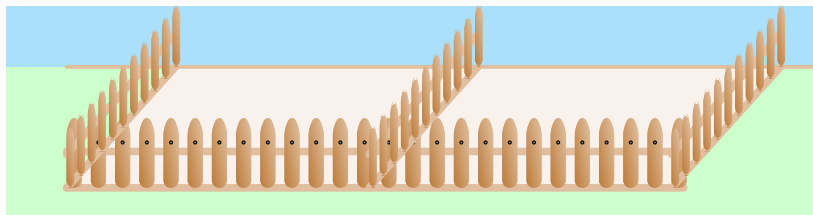
Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức: $C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v$ ($0 < v \leq 120$). Để biểu diễn trực quan sự thay đổi của $C(v)$ theo v , người ta đã vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ như hình bên. Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?



📌 Lời giải.

Câu 26

Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



📌 Lời giải.

Câu 27

Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng (đơn vị: triệu đồng) để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

 Lời giải.

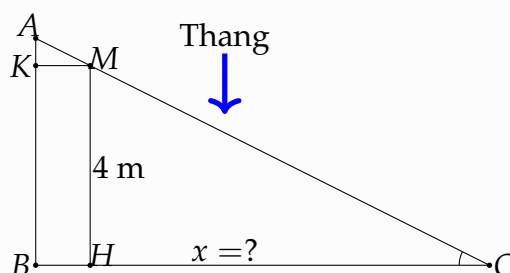
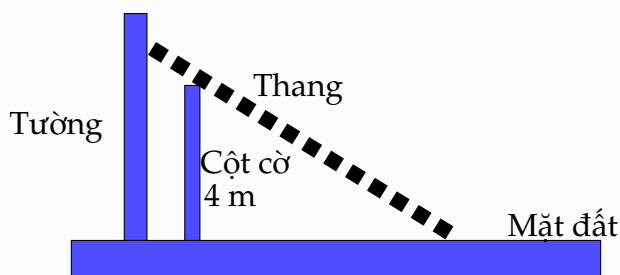
Câu 28

Hàm cầu của một sản phẩm có dạng $P = \frac{80 - Q}{4}$, $0 \leq Q \leq 80$, trong đó Q là số lượng sản phẩm và P là giá bán của mỗi sản phẩm. Doanh thu tối đa bằng bao nhiêu?

 Lời giải.

Câu 29

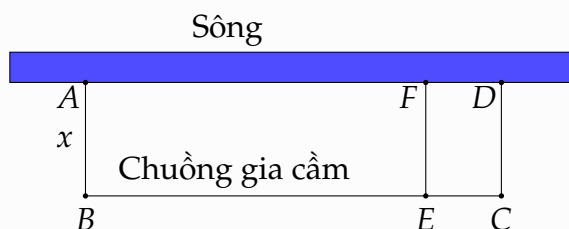
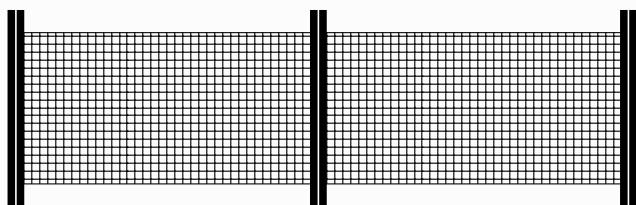
Tìm chiều dài bé nhất (m) của cái thang để nó có thể tựa vào tường và mặt đất, ngang qua cột đỡ cao 4 m, song song và cách tường 0,5 m kể từ góc của cột đỡ như hình vẽ. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2).



 Lời giải.

Câu 30

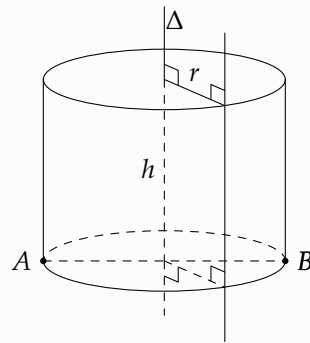
Một chủ trang trại nuôi gia cầm muốn rào thành 2 chuồng hình chữ nhật sát nhau và sát một con sông, một chuồng nuôi gà và một chuồng nuôi vịt. Biết rằng đã có sẵn 240 m hàng rào và cạnh bờ sông thì không phải rào. Hỏi diện tích lớn nhất có thể bao quanh chuồng là bao nhiêu m^2 ?



 Lời giải.

Câu 31

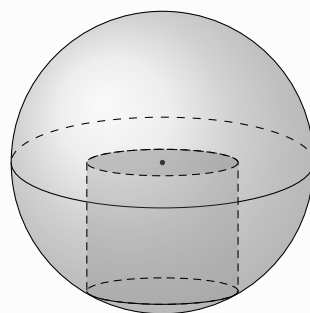
Giả sử bạn là chủ của một xưởng cơ khí vừa nhận được một đơn đặt hàng là thiết kế một bồn chứa nước hình trụ có nắp với dung tích 20 lít. Để tốn ít nguyên vật liệu nhất thì chiều cao bồn nước lúc đó bằng bao nhiêu m? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2).



📌 Lời giải.

Câu 32

Công ty mỹ phẩm chuẩn bị cho ra một mẫu sản phẩm dưỡng da mới mang tên Ngọc Trai với thiết kế là một khối cầu như viên ngọc trai khổng lồ, bên trong là một khối trụ nằm trong nửa khối cầu để đựng kem dưỡng da như hình vẽ.



Theo dữ kiện, nhà sản xuất dự định thiết kế khối cầu có bán kính là $R = 3\sqrt{3}$ cm. Tìm thể tích cm^3 lớn nhất của khối trụ đựng kem sao cho thể tích thực ghi trên bìa hộp là lớn nhất.

📌 Lời giải.

Câu 33

Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu (km/h) để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

Lời giải.

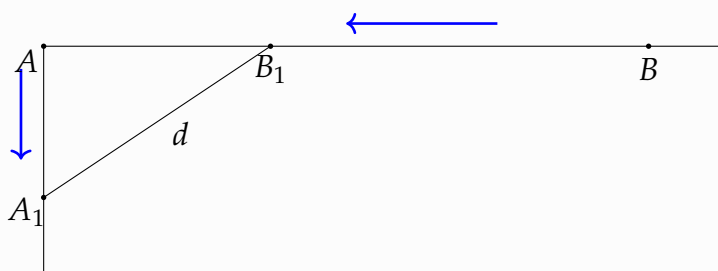
Câu 34

Thể tích V của 1 kg nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa 0°C và 30°C) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3$ (m^3). Ở nhiệt độ bao nhiêu độ C thì nước có khối lượng riêng lớn nhất?

Lời giải.

Câu 35

Hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lí. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với 6 hải lí/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 7 hải lí/giờ. Hỏi khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải.

Câu 36

Một công ty đánh giá rằng sẽ bán được N lô hàng nếu chi hết số tiền là x (triệu đồng) vào việc quảng cáo. Biết rằng N và x liên hệ với nhau bằng biểu thức $N(x) = -x^2 + 30x + 6$, $0 \leq x \leq 30$. Hãy tìm số lô hàng lớn nhất mà công ty có thể bán sau đợt quảng cáo?

📌 Lời giải.

Câu 37

Công ty truyền hình cáp Vista hiện có 100 000 thuê bao. Mỗi thuê bao đang trả cước thuê bao 40 \$/tháng. Một cuộc khảo sát cho thấy cứ mỗi lần giảm 0,25 \$ cước thuê bao thì công ty sẽ có thêm 1 000 thuê bao. Để doanh thu được tối đa, công ty cần xác định mức cước thuê bao mỗi tháng là bao nhiêu?

📌 Lời giải.

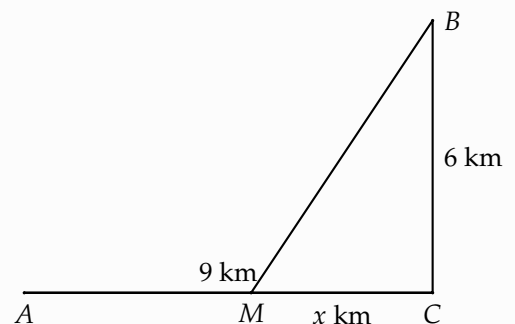
Câu 38

Một bài báo trong tạp chí xã hội học phát biểu rằng nếu một chương trình chăm sóc sức khỏe đặc biệt cho người già được khởi xướng, thì t năm sau khi nó được khởi động, n ngàn người già có thể trực tiếp nhận được các phúc lợi, trong đó $n = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t$, ($0 \leq t \leq 12$). Với giá trị nào của t thì số người nhận phúc lợi tối đa là bao nhiêu?

📌 Lời giải.

Câu 39

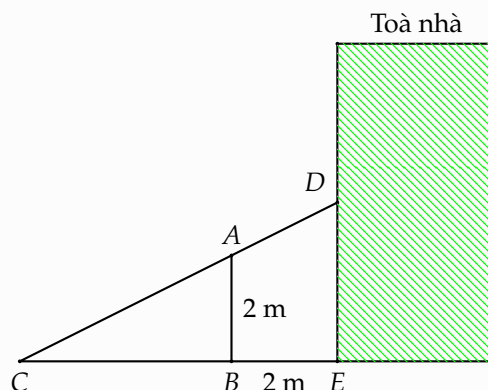
Một công ty muốn xây một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ biển đến một điểm B trên một hòn đảo. Giá để xây đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi km và 130 000 USD để xây mỗi km dưới nước. Gọi C là điểm trên bờ biển sao cho BC vuông góc với bờ biển, $BC = 6$ km, $AC = 9$ km. Gọi M là vị trí trên đoạn AC sao cho khi làm ống dẫn theo đường gấp khúc AMB thì chi phí ít nhất. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành việc xây dựng đường ống dẫn là bao nhiêu?



📌 Lời giải.

Câu 40

Một bức tường cao 2 m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2 m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang CD bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải.

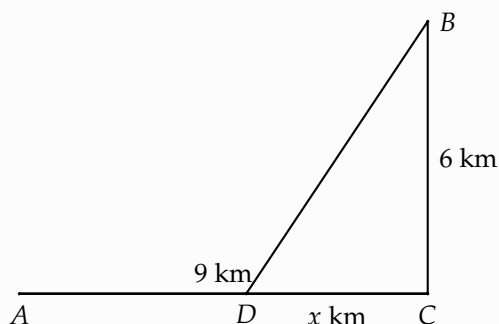
Câu 41

Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t (s) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc v (m/s) của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng?

Lời giải.

Câu 42

Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một vị trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB . Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100 000 000 đồng và dưới nước là 260 000 000 đồng.



Lời giải.

Câu 43

Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là $100\,000 \text{ đồng/m}^2$. Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công là bao nhiêu triệu đồng?

📌 Lời giải.

Câu 44

Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

📌 Lời giải.

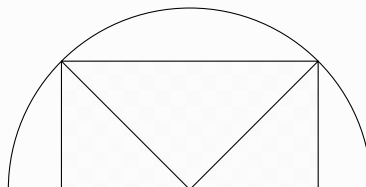
Câu 45

Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là $300 \text{ nghìn đồng/m}^2$ (chi phí được tính theo diện tích xây dựng, bao gồm diện tích đáy và diện tích xung quanh, không tính chiều dày của đáy và thành bể). Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể (đơn vị triệu đồng, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

📌 Lời giải.

Câu 46

Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6 \text{ cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



📌 Lời giải.

Câu 47

Một sợi dây kim loại dài 60 cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng?

📌 Lời giải.

Câu 48

Ông A sử dụng hết 5 m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

📌 Lời giải.

Câu 49

Đợt nộp hồ sơ dự thi tốt nghiệp THPT quốc gia thường kéo dài 1 tháng (30 ngày). Nhà trường nhận thấy số lượng hồ sơ mà học sinh nộp tính theo ngày thứ t được cho công thức $S(t) = \frac{1}{50}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 36t - 270$ (hồ sơ) với $1 \leq t \leq 30$. Hỏi trong 30 ngày đó thì ngày thứ mấy có số lượng hồ sơ nộp nhiều nhất?

📌 Lời giải.

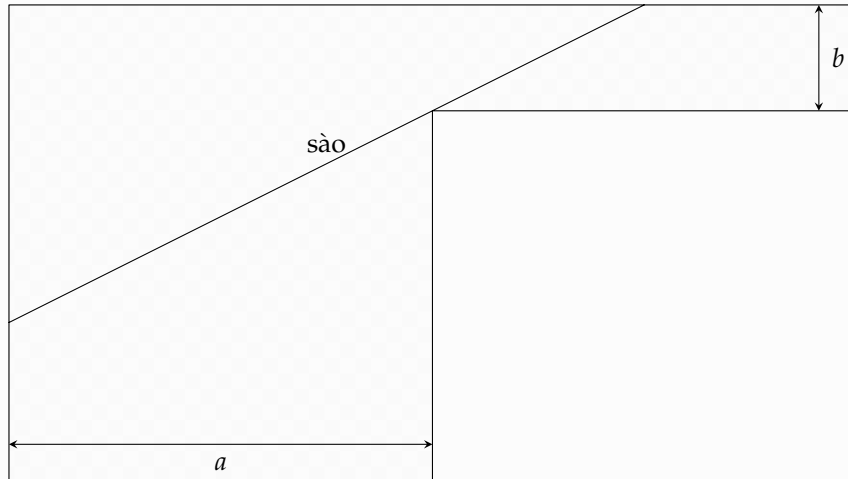
Câu 50

Một viên đá được ném lên từ gốc tọa độ O trong mặt phẳng Oxy (Ox nằm ngang) chuyển động theo đường (quỹ đạo) có phương trình $y = -(1 + m^2)x^2 + mx$. Tìm giá trị của tham số thực, dương m để viên đá rơi xuống tại điểm cách O xa nhất.

📌 Lời giải.

Câu 51

Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$, hỏi cái sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



🔑 Lời giải.

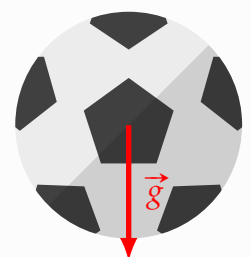
Câu 52

Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 8000 quả bóng tennis. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất 30 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập các máy này là 200 nghìn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 192 nghìn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

🔑 Lời giải.

Câu 53

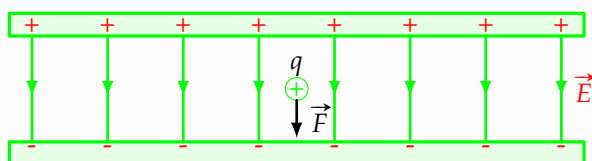
Trọng lực $\vec{P}$ là lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một vật được tính bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó m là khối lượng của vật (đơn vị: kg), $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do, có hướng đi xuống và có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Xác định độ lớn của trọng lực (đơn vị: N) tác dụng lên quả bóng có khối lượng 450 gam.



 Lời giải.

Câu 54

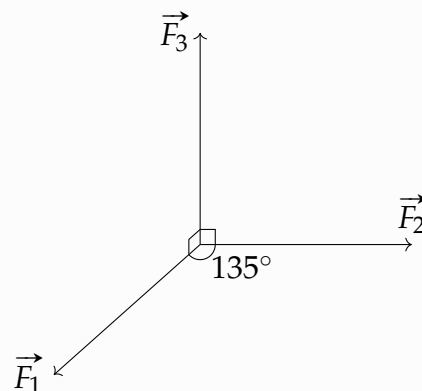
Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}\text{C}$ và độ lớn điện trường $E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ có dạng $a \cdot 10^{-4}\text{N}$. Khi đó giá trị của a là



 Lời giải.

Câu 55

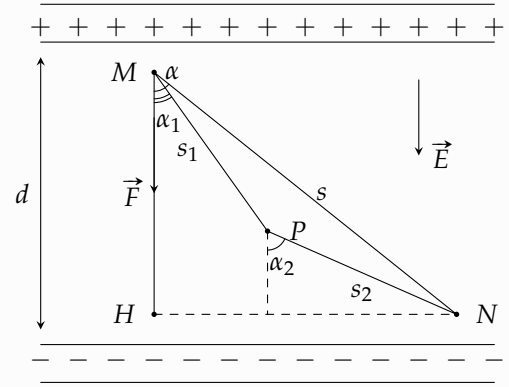
Một chất điểm A nằm trên mặt phẳng nằm ngang (α), chịu tác động bởi ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. Các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trong (α) và $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 135^\circ$, còn lực $\vec{F}_3$ có giá vuông góc với (α) và hướng lên trên. Xác định tổng hợp lực của các lực trên, biết rằng độ lớn của ba lực đó lần lượt là 20 N, 15 N và 10 N. (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



 Lời giải.

Câu 56

Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}$, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ và $d = MH = 5 \text{ mm}$. Biết công sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$ bằng $a \cdot 10^{-9} \text{ J}$. Tính a .



Lời giải.