

Nguyễn Hoàng Vinh

Toán thực tế và kì thi TNTHPT 2025

Mục lục

I – Các bài tập có lời giải chi tiết

1. Phần trả lời đúng sai

a. Sử dụng tích phân nguyên hàm.	2
b. Phương pháp tọa độ Oxyz.	14
c. Xác suất và thống kê.	33

2. Phần trả lời ngắn

a. Sử dụng tích phân nguyên hàm.	43
b. Phương pháp tọa độ Oxyz.	58
c. Xác suất và thống kê	70
d. Các bài toán tìm giá trị tối ưu	80
e. Các bài toán nội dung khác	93

II – Các bài tập tự luyện có đáp án

1. Phần trả lời đúng sai

a. Sử dụng tích phân nguyên hàm – Đạo hàm	106
b. Phương pháp tọa độ Oxyz	114
c. Xác suất và thống kê	119

2. Phần trả lời ngắn

a. Sử dụng tích phân nguyên hàm.	123
b. Phương pháp tọa độ Oxyz.	127
c. Xác suất và thống kê	128
d. Các bài toán thuộc nội dung khác	130

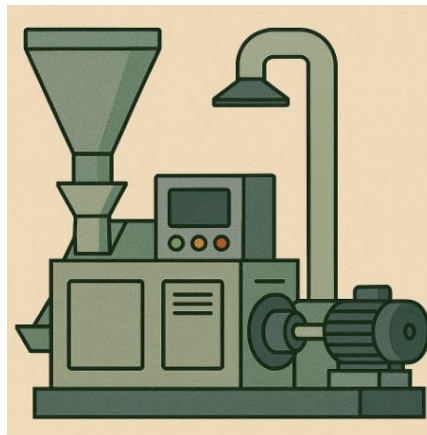
TÀI LIỆU THAM KHẢO

I – Các bài tập có lời giải chi tiết

1. Phần trả lời đúng sai

CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍCH PHÂN

Bài toán 1: Giả sử rằng khi được t năm tuổi, một máy công nghiệp A tạo ra doanh thu với tốc độ $R'(t) = 650 - 4t^2$ (triệu đồng/năm), thời điểm $t = 0$ tính từ lúc máy A bắt đầu hoạt động. Biết rằng chi phí biên cho vận hành và bảo trì là $C'(t) = 48 + 13t^2$ (triệu đồng / năm), ở đây $C(t)$ là chi phí vận hành và bảo trì của máy A khi nó được t năm tuổi.



- a) Doanh thu sau 10 năm của máy A là $\int_0^{10} (650 - 4t^2) dt$ (triệu đồng).
- b) Tổng chi phí vận hành và bảo trì của máy A trong 6 năm là 1224 (triệu đồng).
- c) Tuổi thọ hữu ích của một máy là số năm T trước khi lợi nhuận (bằng doanh thu trừ chi phí) mà nó tạo ra bắt đầu giảm. Tuổi thọ hữu ích của máy A này là 7 năm.
- d) Lợi nhuận do máy A tạo ra trong suốt thời gian tuổi thọ hữu ích của nó là 2440 (triệu đồng).

Lời giải

Nhận xét rằng trên đoạn $[0;10]$ hàm $R'(t) > 0$, do đó doanh thu sau 10 năm của máy công nghiệp A

là $\int_0^{10} (650 - 4t^2) dt = \int_0^{10} (650 - 4t^2) dt$. **Do đó ý a) Đúng.**

Tổng chi phí vận hành và bảo trì của máy A trong 6 năm là $\int_0^6 (48 + 13t^2) dt = \int_0^6 (48 + 13t^2) dt = 1224$ (triệu đồng). **Do đó ý b) Đúng.**

Lợi nhuận biên của máy A là $P'(t) = R'(t) - C'(t) = 602 - 17t^2$ (triệu đồng/năm).

Lợi nhuận bắt đầu giảm, có nghĩa là lợi nhuận biên âm, hay $P'(t) < 0 \Leftrightarrow 602 - 17t^2 < 0 \Rightarrow t > 6$

Vậy tuổi thọ hữu ích của máy A là 6 năm. **Do đó ý c) Sai.**

Lợi nhuận do máy A tạo ra trong suốt thời gian tuổi thọ hữu ích của nó là $\int_0^6 (R'(t) - C'(t)) dt = \int_0^6 (602 - 17t^2) dt = 2388$ (triệu đồng). **Do đó ý d) Sai.**

Bài toán 3: Giả sử rằng khi tăng t năm tuổi, một máy công nghiệp A tạo ra doanh thu với tốc độ $R'(t) = 650 - 3t^2$ (triệu đồng/năm), thời điểm $t = 0$ tính từ lúc máy A bắt đầu hoạt động. Biết rằng chi phí biên cho vận hành và bảo trì là $C'(t) = 48 + 12t^2$ (triệu đồng/năm), ở đây $C(t)$ là chi phí vận hành và bảo trì của máy A khi nó được t năm tuổi.

a) Doanh thu sau 12 năm của máy A là $\int_0^{12} (650 - 3t^2) dt$ (triệu đồng).

b) Tổng chi phí vận hành và bảo trì của máy A trong 6 năm là 1152 (triệu đồng).

c) Tuổi thọ hữu ích của một máy là số năm T trước khi lợi nhuận (bằng doanh thu trừ chi phí) mà nó tạo ra bắt đầu giảm. Tuổi thọ hữu ích của máy A này là 8 năm.

d) Lợi nhuận do máy A tạo ra trong suốt thời gian tuổi thọ hữu ích của nó là 2 532 (triệu đồng).

Lời giải

a) Chọn đúng. Doanh thu sau 12 năm của máy A là $R(t) = \int_0^{12} (650 - 3t^2) dt$ (triệu đồng).

b) Chọn đúng. Chi phí vận hành và bảo trì của máy A là $C(t) = \int (48 + 12t^2) dt = 48t + 4t^3 + b$.

Chi phí ban đầu là 0, tức là $C(0) = 0 \Rightarrow b = 0$. Tổng chi phí trong 6 năm là $C(6) = 48 \cdot 6 + 4 \cdot 6^3 = 1152$ (triệu đồng).

c) Chọn sai.

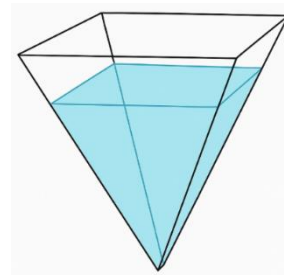
Lợi nhuận do máy A tạo ra là $P'(t) = R'(t) - C'(t) = 650 - 3t^2 - (48 + 12t^2) = -15t^2 + 602$.

$P'(t) = 0 \rightarrow t = \sqrt{\frac{602}{15}} \approx 6,33$ năm. Lợi nhuận đạt cực đại tại $t = \sqrt{\frac{602}{15}}$ và sẽ bắt đầu giảm ngay sau đó nên tuổi thọ hữu ích không thể là 8

d) Chọn sai. Lợi nhuận do máy A tạo ra trong suốt thời gian tuổi thọ hữu ích của nó là

$$\int_0^{\sqrt{\frac{602}{15}}} (-15t^2 + 602) dt = 2542,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Bài toán 4: Một cái bể nước có dạng khối chóp tứ giác đều ngược với cạnh đáy bằng $3\sqrt{2}$ dm và chiều cao bằng 6 dm (tham khảo hình vẽ bên – các kích thước được nêu ra là phần bên trong hình). Nước được bơm vào bể với tốc độ không đổi là 2 lít/phút và ban đầu bể không chứa nước (các kết quả bên dưới được làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy).



a) Bể nước được bơm đầy sau 18 phút.

b) Tốc độ dâng lên của nước là $0,23 \text{ dm/phút}$ khi thể tích nước trong bể bằng $\frac{1}{3}$ thể tích của bể.

c) Khi mực nước cách miệng bể $0,5 \text{ dm}$, người ta ngừng bơm và bắt đầu xả ra với ước lượng tốc độ giảm chiều cao của mực nước trong bể theo thời gian t (phút) được mô hình hóa bởi hàm số:

$$h'(t) = \frac{1}{350}t - \frac{193}{700} \text{ (dm/phút)}. \text{ Sau 5 phút, thể tích nước trong bể là } 11,97 \text{ dm}^3.$$

d) Cùng với dữ kiện của c) thì sau $23,59 \text{ phút}$ nước trong bể vừa được xả hết.

Lời giải:

a) Mệnh đề đúng.

Thể tích chậu nước hình chóp tứ giác đều là $V_{chậu} = \frac{1}{3} \cdot (3\sqrt{2})^2 \cdot 6 = 36 \text{ dm}^3 = 36 \text{ lít}$.

Thời gian bơm nước đầy bể là $\frac{36}{2} = 18 \text{ phút}$.

b) Mệnh đề đúng.

Gọi $V(t)$, $h(t)$ lần lượt là thể tích và chiều cao của nước sau t phút.

Ta có $\frac{V(t)}{V_{chậu}} = \left(\frac{h(t)}{6}\right)^3 \Rightarrow V(t) = \left(\frac{h(t)}{6}\right)^3 \cdot 36$ hay $\boxed{V(t) = \frac{(h(t))^3}{6}}$ (*).

Đạo hàm hai vế của (*) theo biến t ta được: $\boxed{\frac{dV(t)}{dt} = \frac{(h(t))^2}{2} \cdot \frac{dh(t)}{dt}}$ (**).

Thời điểm thể tích nước bằng $\frac{1}{3}$ thể tích chậu thì: $\left(\frac{h(t)}{6}\right)^3 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{h(t)}{6} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \Rightarrow h(t) = 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \approx 4,16 \text{ dm}$.

Thay $\frac{dV(t)}{dt} = 2 \text{ lít/phút} = 2 \text{ dm/phút}$; $h(t) \approx 4,16 \text{ dm}$ vào (**), thì: $\frac{dh(t)}{dt} \approx \boxed{0,23} \text{ dm/phút}$.

c) Mệnh đề đúng.

Mực nước cách miệng bể $0,5 \text{ dm}$ nên chiều cao ban đầu bằng $5,5 \text{ dm}$.

Chiều cao của nước trong chậu sau 5 phút là $h(5) = 5,5 + \int_0^5 \left(\frac{1}{350}t - \frac{193}{700}\right) dt = \frac{291}{70} \approx 4,16 \text{ dm}$.

Thể tích nước còn lại trong bể là $V(5) = \left(\frac{h(5)}{6}\right)^3 \cdot 36 \approx 11,97 \text{ dm}^3$.

d) Mệnh đề sai.

Thời gian để mực nước trong chậu đang là 5,5 dm trở về 0 dm thỏa mãn phương trình

$$5,5 + \int_0^t \left(\frac{1}{350}t - \frac{193}{700} \right) dt = 0 \Rightarrow t \approx 22,59 \text{ phút.}$$

Với khoảng thời gian 22,59 phút thì nước trong bể vừa được xả hết.

Bài toán 5: Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn và chúng cùng chạy trên một đường thẳng. Ngựa vằn đã nhận ra sư tử khi sư tử cách nó khoảng 40 m. Từ thời điểm này, sư tử đuổi theo ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15e^{-0,1t}$ m/s và ngựa vằn bỏ chạy với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20e^{-0,1t}$ m/s (t được tính bằng giây với $0 \leq t \leq 60$).

a) Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây, vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.

b) Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) Sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1'(t) = v_2'(t)$ và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,72 mét (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

d) Sư tử sẽ không bắt được ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,92 mét (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

Lời giải:

a) Mệnh đề sai.

Vận tốc ban đầu của con ngựa vằn là $v_2(0) = 20 - 20e^0 = 0$ m/s.

b) Mệnh đề đúng.

Ta có: $v_1'(t) = -0,1 \cdot 15e^{-0,1t} < 0, \forall t \in [0; 60]$. Suy ra tốc độ sư tử giảm dần theo thời gian.

Ta có: $v_2'(t) = -0,1 \cdot (-20)e^{-0,1t} = 2e^{-0,1t} > 0, \forall t \in [0; 60]$. Suy ra tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.

c) Mệnh đề sai.

Khoảng cách giữa sư tử và ngựa vằn là

$$d(t) = 40 + \int_0^t [v_2(t) - v_1(t)] dt.$$

Ta có $d'(t) = v_2(t) - v_1(t)$; $d'(t) = 0 \Rightarrow v_2(t) = v_1(t)$.

Giải phương trình này, ta có: $20 - 20e^{-0,1t} = 15e^{-0,1t} \Leftrightarrow 20 = 35e^{-0,1t}$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{35} = e^{-0,1t} \Leftrightarrow \ln \frac{20}{35} = -0,1t \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{20}{35}}{-0,1} \approx 5,6 \text{ (s)}.$$

Bảng biến thiên:

Vậy sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1(t) = v_2(t)$, và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,92 mét.

t	0	5,6	60
$d'(t)$	—	0	+
$d(t)$	40	1,92	890,87

d) Mệnh đề đúng.

Từ bảng biến thiên, ta thấy khoảng cách ngắn nhất giữa hai con vật là 1,92 mét; kể từ thời điểm gần nhất đó, sư tử dần bị bỏ lại phía sau và sư tử không thể bắt được ngựa vằn.

Bài toán 6: (Chuyên Lê Quý Đôn – Đà Nẵng 2025) Một người đang điều khiển xe máy với vận tốc là 36km/h thì phát hiện đèn tín hiệu giao thông chuyển đỏ cách vị trí xe 80m. Ba giây sau đó, xe máy bắt đầu giảm tốc với vận tốc được cho bởi $v_1(t) = at + b$ (m/s), ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$), trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi xe bắt đầu giảm tốc. Khi xe máy đến vị trí đèn tín hiệu, đèn vẫn còn đỏ và xe dừng hẳn. Sau khi đèn chuyển xanh, xe tiếp tục di chuyển với vận tốc được cho bởi $v_2(t) = mt^2 + nt$ (m/s), ($m, n \in \mathbb{R}$, $m < 0$), trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ lúc đèn bắt đầu chuyển xanh. Cuối cùng, xe máy dừng lại tại một quán ăn trên đường. Biết rằng thời gian xe máy đi từ vị trí đèn tín hiệu đến quán ăn là 30 giây và vận tốc lớn nhất trên đoạn đường này là 54km/h.

a) Quãng đường xe máy đi được từ lúc bắt đầu giảm tốc lần thứ nhất đến khi dừng hẳn tại vị trí đèn tín hiệu là 80 m.

b) Giá trị của hệ số b là 10.

c) Xe máy dừng hẳn tại vị trí đèn tín hiệu sau 10 giây kể từ khi bắt đầu giảm tốc lần thứ nhất.

d) Khoảng cách từ vị trí đèn tín hiệu đến vị trí quán ăn là 200 m.

Lời giải

Đổi: 36km/h = 10m/s ; 54km/h = 15m/s.

a) Sai, Sau 3 giây xe máy đi được quãng đường là: $10 \cdot 3 = 30$ m. Khi đó xe máy bắt đầu giảm tốc và quãng đường xe máy đi được từ lúc bắt đầu giảm tốc lần thứ nhất đến khi dừng hẳn tại vị trí đèn tín hiệu là: $80 - 30 = 50$ m

b) Đúng, Khi xe bắt đầu giảm tốc lần thứ nhất ta có: $v_1(0) = a \cdot 0 + b = 10$ m/s $\Rightarrow b = 10$

c) Đúng, Ta có: $s(t) = \int v_1(t) dt = \int (at + b) dt = \frac{at^2}{2} + bt + C_1$ (m),

Theo đề: $s_1(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow s_1(t) = \frac{at^2}{2} + bt$ (m). Khi xe dừng tại vị trí đèn tín hiệu thì thời gian đi

được của xe kể từ khi giảm tốc lần thứ nhất là: $v(t) = 0 \Rightarrow at + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{-10}{a}$ (s). Từ câu a ta có:

$$s_1\left(\frac{-10}{a}\right) = 50 \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{-10}{a}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{-10}{a}\right) = 50 \Rightarrow a = -1 \text{ (thỏa)}. \text{ Do đó } t = \frac{-10}{-1} = 10 \text{ (s)}$$

d) Sai, Khi xe dừng lại quán ăn khi xe máy bắt đầu đi tại vị trí đèn tín hiệu thì $v_2(30) = m \cdot 30^2 + n \cdot 30 = 0$
 $\Rightarrow 30m = -n \Rightarrow 60m = -2n$

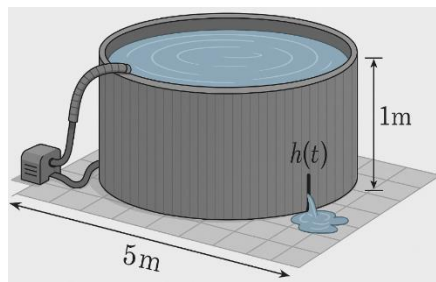
Theo đề $v_{2\max}\left(\frac{-n}{2m}\right) = m \cdot \left(\frac{-n}{2m}\right)^2 + n \cdot \frac{-n}{2m} = 15 \Rightarrow n^2 + 60m = 0 \Rightarrow n^2 - 2n = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ (l)} \\ n = 2(n) \Rightarrow m = \frac{-1}{15}(n) \end{cases} \Rightarrow v_2(t) = \frac{-1}{15}t^2 + 2t \text{ (m/s)} \Rightarrow s_2(t) = \int v_2(t) dt = \frac{-t^3}{45} + t^2 + C_2$$

Theo đề: $s_2(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow s_2(t) = \frac{-t^3}{45} + t^2 \text{ (m)}$

Do đó khoảng cách từ vị trí đèn tín hiệu đến vị trí quán ăn là: $s_2(30) = 300 \text{ m}$.

Bài toán 7: Một bể bơi hình trụ có đường kính 5 m và chiều cao 1 m; bể được bơm nước vào với tốc độ không đổi v_0 . Sau khi nước được bơm đầy, bể bơi bị thủng một lỗ ở đáy và nước chảy ra ngoài; bể bơi chảy hết nước trong 8 giờ. Biết tốc độ giảm chiều cao của bể bơi khi nước chảy ra ngoài vào thời điểm t giờ (tính từ lúc nước đầy bể và ngừng bơm) được cho bởi hàm số $h'(t) = at + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Lúc nước chảy hết ra ngoài thì tốc độ giảm chiều cao bằng 0.



- a)** Thể tích của bể bơi sau khi nước được làm đầy là $6,25\pi \text{ m}^3$.
- b)** $32a + 1 = 0$ và $4b - 1 = 0$.
- c)** Sau 4 giờ kể từ lúc bể bị rò, lượng nước bị mất đi bằng $\frac{75\pi}{16} \text{ m}^3$.
- d)** Lượng nước bị rò rỉ ra ngoài một nửa sau $8 - 4\sqrt{2}$ giờ.

Lời giải:

a) Mệnh đề đúng.

Bể ước hình trụ có bán kính đáy $r = 2,5 \text{ m}$, chiều cao $h = 1 \text{ m}$

Thể tích khi đầy $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 1 = \boxed{6,25\pi} \text{ m}^3$.

b) Mệnh đề sai.

Ta có $h'(8) = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \text{ (1)}$.

Chiều cao của nước thời điểm t là $h(t) = \int (at + b) dt = \frac{a}{2}t^2 + bt + c$.

$$\text{Vì } \begin{cases} h(0)=1 \\ h(8)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ 32a+8b+1=0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{1}{32}$, $b = -\frac{1}{4}$. Khi đó $\boxed{32a-1=0; 4b+1=0}$ và $\boxed{h(t) = \frac{1}{64}t^2 - \frac{1}{4}t + 1}$.

c) Mệnh đề đúng.

Chiều cao mực nước trong bể sau 4 giờ là: $h(4) = \frac{1}{64} \cdot 4^2 - \frac{1}{4} \cdot 4 + 1 = 0,25 \text{ m}$.

Lượng nước còn lại trong bể sau 4 giờ là $\pi r^2 \cdot h(4) = \pi \cdot 2,5^2 \cdot 0,25 = \frac{25\pi}{16} \text{ m}^3$.

Lượng nước đã thoát ra sau 4 giờ là $6,25\pi - \frac{25\pi}{16} = \boxed{\frac{75\pi}{16}} \text{ m}^3$.

d) Mệnh đề đúng.

Lượng nước còn lại khi đã mất một nửa là $\frac{6,25\pi}{2} = \frac{25\pi}{8} \text{ m}^3$.

Chiều cao tương ứng $h(t_1)$ của bể thỏa mãn $\pi \cdot 2,5^2 \cdot h(t_1) = \frac{25\pi}{8} \Rightarrow h(t_1) = 0,5 \text{ m}$.

Ta có $h(t_1) = \frac{1}{64}t_1^2 - \frac{1}{4}t_1 + 1 = 0,5 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 8 + 4\sqrt{2} \approx 13,7 > 8 \\ t_1 = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2,3 \in (0; 8) \end{cases}$.

Ta thấy $\boxed{t_1 = 8 - 4\sqrt{2}}$ (giờ) thỏa mãn đề bài.

Bài toán 8: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$

(lít) với $(0 \leq t \leq 90)$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi công thức $f(t) = V'(t)$.

a) Thể tích nước của bể bơi sau 20 phút bơm là 2000 lít

b) Tốc độ bơm nước tại thời điểm t là $f(t) = 90t^2 - t^3$

c) Tốc độ bơm giảm từ phút thứ 70 đến phút thứ 90

d) Tốc độ bơm lớn nhất tại thời điểm $t = 60$ phút

Lời giải

a) Đúng: $V(20) = \frac{1}{100} \left(30 \cdot 20^3 - \frac{20^4}{4} \right) = 2000$.

b) Sai: $V'(t) = \frac{1}{100} (90t^2 - t^3) \Rightarrow f(t) = \frac{1}{100} (90t^2 - t^3)$.

c) Đúng: $V''(t) = \frac{1}{100} (180t - 3t^2) \Leftrightarrow V''(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 60 \\ t = 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số:

t	0	60	90	
$V''(t)$		+	0	–
$V'(t)$	0	1080		0

Suy ra tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60 đến phút thứ 90.

d) Đúng: Từ bảng biến thiên ta có tốc độ lớn nhất khi $t = 60$ phút.

Bài toán 9: Một quần thể vi khuẩn A có số lượng cá thể là $P(t)$ sau t phút quan sát được phát hiện thay đổi với tốc độ là: $P'(t) = ae^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$ (vi khuẩn/phút) ($a \in \mathbb{R}$). Biết rằng lúc bắt đầu quan sát, quần thể có 200 000 vi khuẩn và đạt tốc độ tăng trưởng là 350 vi khuẩn/phút.

a) Giá trị của $a = 200$.

b) $P(t) = 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + 200000$.

c) Sau 12 phút số lượng vi khuẩn trong quần thể là 206152 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Sau 12 phút, một quần thể vi khuẩn B có tốc độ tăng trưởng là $G'(t) = 500e^{0.2t}$ (vi khuẩn/phút) bắt đầu cạnh tranh nguồn thức ăn trực tiếp với quần thể A. Một cá thể tại quần thể B triệt tiêu một cá thể tại quần thể A. Sau 5 phút cạnh tranh quần thể A bị triệt tiêu hoàn toàn. Số lượng vi khuẩn của quần thể B ở thời điểm bắt đầu cạnh tranh là 191967 con. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Đúng: $P'(0) = a + 150 = 350 \Leftrightarrow a = 200$

b) Sai: $P(t) = \int P'(t) dt = 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + C$ mà $P(0) = 200000$ nên $C = 203000$

Vậy hàm số cần tìm là $P(t) = 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + 203000$

c) Đúng: $P(12) = 2000e^{0.1 \cdot 12} - 5000e^{-0.03 \cdot 12} + 203000 = 206152$

d) Sai: Sau 5 phút cạnh tranh thì quần thể A bị triệt tiêu hoàn toàn mà quần thể A mà quần thể A quan sát trước quần thể B 12 phút nên số lượng quần thể A ở phút thứ 17 bằng số lượng quần thể B ở phút thứ 5, tức là $P(17) = G(5)$ (*)

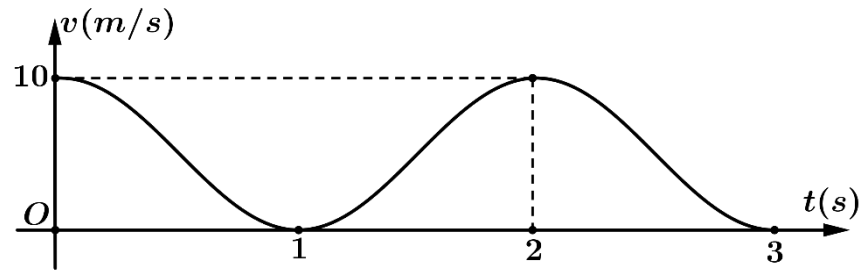
Khi đó: $P(17) = 2000e^{0.1 \cdot 17} - 5000e^{-0.03 \cdot 17} + 203000 = 210945$

Mặt khác: $G(t) = \int G'(t) dt = 2500e^{0.2t} + C \Rightarrow G(5) = 2500e + C$

Từ phương trình (*) ta có: $P(17) = G(5) \Leftrightarrow 210945 = 2500e + C \Rightarrow C = 204149$

Vậy hàm $G(t) = 2500e^{0.2t} + 204149 \Rightarrow G(0) = 206649$.

Bài toán 10: Một chất điểm chuyển động trong 3 giây với vận tốc $v(t) = m \cos(\pi t) + n$ (đơn vị: m/s) trong đó t (giây) là biến thời gian và m, n là các hằng số có đồ thị như hình sin vẽ dưới đây:



- a) Vận tốc của vật ở thời điểm $t = 2$ giây là 10 (m/s)
 b) $m = 5$
 c) $n = 10$
 d) Tổng quãng đường vật đi được sau 3 giây là 27,93m

Lời giải

a) Đúng: Dựa vào đồ thị ta thấy tại thời điểm $t = 2$ giây thì vận tốc của chất điểm bằng 10m/s.

b) Đúng: Dựa vào đồ thị ta có
$$\begin{cases} v(1) = 0 \\ v(2) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cos(\pi) + n = 0 \\ m \cos(2\pi) + n = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + n = 0 \\ m + n = 10 \end{cases} \Leftrightarrow m = n = 5 \text{ suy ra } v(t) = 5 \cos(\pi t) + 5$$

c) Sai: Từ kết quả trên thì $n = 5$

d) Sai: Quãng đường vật đi được sau 3 giây là: $s(t) = \int_0^3 v(t) dt = \int_0^3 [5 \cos(\pi t) + 5] dt = 15 \text{ m}$

Bài toán 11: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị “sự bất bình đẳng về thu nhập” của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số:

$$y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2, 0 \leq x \leq 100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất

Theo R.Larson, *Brief Calculus: An Applied Approach*, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng 8,56% tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100} \left[x - (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2 \right] dx$$

d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Lời giải

a) Đúng: Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập của 60% các gia đình của đầu tiên chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập là: $f(60) = 27,321529(\%)$.

b) Sai: Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo đến giàu, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau, mỗi nhóm chiếm 10% số gia đình của Hoa Kỳ.

Tổng thu nhập của 30% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm 1,2,3) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f(30) = 8,561476(\%)$.

Tổng thu nhập của 20% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm 1,2) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f(20) = 5,774409(\%)$.

Tỷ lệ của tổng thu nhập các gia đình nhóm thứ 3 so với toàn bộ các gia đình là:

$$f(30) - f(20) = 2,787067(\%).$$

c) Sai: Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ vào năm 2005 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y = x \\ y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2 \\ x = 0; x = 100 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^{100} \left| (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2 - x \right| dx.$$

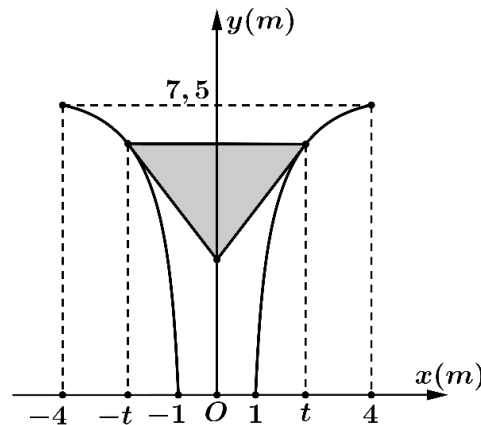
Sử dụng máy tính cầm tay ta được: $S = \int_0^{100} \left| (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2 - x \right| dx \approx 2068,9$.

Kiểm tra phép tính của đề bài, ta có: $\int_0^{100} \left[x - (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2 \right] dx = 2059,3131$.

d) Đúng: Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 là:

$$S = \int_0^{100} \left| (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2 - x \right| dx \approx 2068,9.$$

Bài toán 12: Hình vẽ dưới đây mô tả mặt cắt ngang của ngọn đuốc bằng kim loại được thiết kế cho một đại hội thể thao lớn. Ngọn đuốc có chiều cao 7,5m; mặt trên có chiều rộng 8m; mặt dưới có chiều rộng 2m; hai đường biên của ngọn đuốc đối xứng nhau qua trục Oy và được cho bởi đường cong có phương trình $y = f(x) = a - \frac{b}{x^2}$ (đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là mét)



a) $48a + 50b = 780$

b) Khoảng bên trong của ngọn đuốc là một hình nón được minh họa bởi phần đuốc tô đậm trong hình vẽ có độ dài đáy là $2t$ (mét), hai cạnh bên lần lượt nằm trên hai tiếp tuyến của đường cong cho bởi phương trình trên. Khi đó tiếp tuyến cắt trục Oy tại tung độ theo t là $\frac{8t^3 - 8t + 16}{t^3}$

c) Thể tích của khối nón theo t là $\frac{16\pi}{3t}$

d) Nhằm đảm bảo duy trì sức cháy của ngọn lửa trên ngọn đuốc đó, trên bề mặt hình nón người ta phủ lớp than sao cho toàn bộ không gian từ bề mặt hình nón đến đỉnh ngọn đuốc lấp kín và thể tích phần than được sử dụng bằng thể tích khối nón. Khi đó, đỉnh khối nón cách đáy ngọn đuốc một khoảng bằng 8,4 mét.

Lời giải

a) Sai: Ta có $y = f(x) = a - \frac{b}{x^2}$ với đồ thị $f(x)$ đi qua 2 điểm $(4; 7,5)$ và $(1; 0)$.

Để dàng giải ra được $a = b = 8$ tức $48a + 50b = 784$.

b) Sai: Do hình nón có độ dài đáy là $2t(m)$ nên hình nón có bán kính đáy R bằng $t(m)$ (1)

Đường sinh hình nón trùng với tiếp tuyến của $f(x)$ tại điểm $x = t$ nên ta có phương trình là:

$$y = f'(t)(x - t) + f(t) = \frac{16}{t^3}(x - t) + \left(8 - \frac{8}{t^2}\right) = \frac{16}{t^3}x + 8 - \frac{24}{t^2}.$$

Thế $x=0$ ta suy ra tiếp tuyến cắt trục Oy tại tung độ theo t là: $8 - \frac{24}{t^2}$.

c) Sai: Từ hình vẽ ta suy ra chiều cao hình nón là $h = \left| f(t) - \left(8 - \frac{24}{t^2} \right) \right| = \frac{16}{t^2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra thể tích khối nón bằng $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi t^2 \left(\frac{16}{t^2} \right) = \frac{16\pi}{3}$.

d) Sai: Trước hết ta cần biểu diễn lại hàm số $y = f(x)$ về lại hàm số $x = g(y)$.

Ta có: $y = 8 - \frac{8}{x^2} \Leftrightarrow \frac{8}{x^2} = 8 - y \Rightarrow x = g(y) = \sqrt{\frac{8}{8-y}}$ với $y < 8$.

Khi đó thể tích phần chứa than là: $V_t = \pi \int_t^{7,5} g^2(y) dy = \pi \int_t^{7,5} \left(\frac{8}{8-y} \right) dy = \frac{16\pi}{3}$.

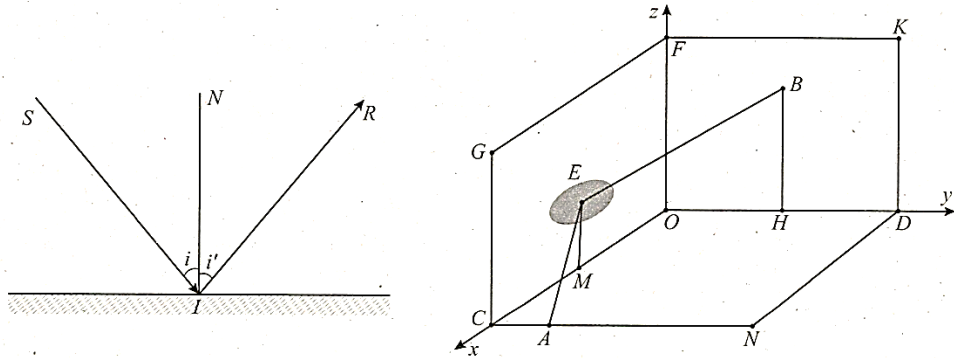
Phương trình tương đương với: $\int_t^{7,5} \left(\frac{8}{8-x} \right) dx = \frac{16}{3} \xrightarrow{SOLVE} t = 8 \pm \frac{1}{2}e^{\frac{2}{3}} = t_0$.

Suy ra khoảng cách cần tìm là: $8 - \frac{24}{t^2} \Big|_{t=t_0} \approx 7,07 \text{ (m)}$

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG OXYZ

Bài toán 1: Nguyên lí phản xạ ánh sáng: Khi ánh sáng bị phản xạ, tia phản xạ sẽ nằm trong mặt phẳng chứa tia tới và pháp tuyến của gương ở điểm tới. Góc phản xạ cũng sẽ bằng góc tới, tức là $i = i'$.

Chú ý. Khi ta lấy đối xứng tia SI qua gương thì tia IS' là tia đối của tia IR .



Trong căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật, có gương phẳng tròn tâm E với độ dày không đáng kể, được treo trên tường là mặt phẳng (FOC) . Biết rằng $OCGF, OCND, OFKD$ là các hình chữ nhật; $OC = 5m; OD = OF = 4m; OM = 3m; EM = 1,5m; CA = 1m$. Một tia sáng được chiếu từ vị trí điểm A tới E , tia sáng phản xạ qua gương phẳng tới điểm B trên tường (tham khảo hình vẽ). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, mỗi đơn vị có độ dài 1 m.

a) Phương trình mặt phẳng (ACE) là $3x + 4z - 15 = 0$.

b) Đường thẳng AE đi qua điểm $J(1; 3; 3)$.

c) Gọi (d) là đường thẳng đối xứng với đường thẳng AE qua mặt phẳng $(OCGF)$. Góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng $(OCGF)$ là 41° (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Gọi tọa độ điểm B là $B(x_0; y_0; z_0)$ thì $2y_0 + 4z_0 = 18$.

Lời giải

Ta có $O(0; 0; 0), A(5; 1; 0), C(5; 0; 0), D(0; 4; 0), E(3; 0; 1,5), F(0; 0; 4), M(3; 0; 0)$

Ta có $\overrightarrow{CA} = (0; 1; 0), \overrightarrow{CE} = (-2; 0; 1,5), [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CE}] = (1,5; 0; 2)$.

Phương trình mặt phẳng $(ACE): 3x + 4z - 15 = 0$. **Do đó ý a)** Đúng.

Ta có $\overrightarrow{AE} = (-2; -1; 1,5)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng AE .

Phương trình đường thẳng $AE: \frac{x-5}{-4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$. Kiểm tra đường thẳng AE không đi qua điểm

$J(1; 3; 3)$. **Do đó ý b)** Sai.

Do đường thẳng (d) đối xứng với đường thẳng AE qua mặt phẳng $(OCGF)$ nên góc giữa đường thẳng (d) và mặt phẳng $(OCGF)$ bằng góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng $(OCGF)$.

Khi đó: $\vec{n} = (0; 1; 0)$, $\overrightarrow{AE} = (-2; -1; 5)$,

$$\sin(AE, (OFGC)) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AE}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{AE}|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow (AE, (OFGC)) \approx 22^\circ. \text{ Do đó ý c) Sai.}$$

Ta có tia AE nằm trong mặt (ECA) vuông góc với mặt phẳng chứa gương.

Khi đó tia EB thuộc mặt phẳng (ACE) .

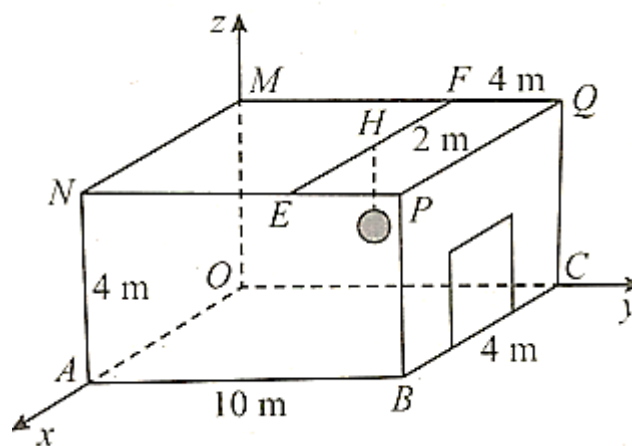
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua C , ta có A' thuộc đường thẳng EB , đồng thời có tọa độ

$$A'(5; -1; 0). \text{ Khi đó, } \overrightarrow{A'E} = (-2; 1; 5). \text{ Phương trình đường thẳng } A'E: \frac{x-5}{-4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}.$$

Do B là giao điểm của $A'E$ và mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm $B\left(0; \frac{3}{2}; \frac{15}{4}\right)$.

Vậy $2y_0 + 4z_0 = 18$. Do đó ý d) Đúng.

Bài toán 2: Một căn phòng khách có hình dạng là một hình hộp chữ nhật được gắn trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ với các thông số như hình bên (đơn vị trên mỗi trục là mét). Coi mặt sàn nằm trên mặt phẳng (Oxy) . Theo thiết kế, chủ nhà muốn trang trí một đèn pha lê hình cầu có bán kính 15 cm được nối với trần nhà ở vị trí điểm H bởi một dây dài 1 m (H là trung điểm của EF , biết $EF \parallel PQ$ và $QF = 4m$, hình bên).



a) Cao độ tâm I của đèn pha lê hình cầu là 3.

b) Phương trình mặt cầu của đèn pha lê là $(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-3)^2 = 0,0225$.

c) Một người cao 1,8m thì khi đi ngang qua phía dưới sẽ cách đèn ít nhất là 60 cm.

d) Tia sáng từ tâm đèn chiếu ra cắt sàn nhà tại K . Khoảng cách xa nhất từ K tới B là khoảng 10,77m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Khoảng cách từ mỗi nối sợi dây và đèn pha lê đến sàn nhà là: $4 - 1 = 3(m)$.

Đèn pha lê có bán kính $15cm = 0,15m$ nên khoảng cách từ tâm đèn đến sàn nhà là: $3 - 0,15 = 2,85(m)$

Vậy cao độ tâm I của đèn hình cầu là 2,85. **Do đó ý a) Sai.**

Ta có $MF = 10 - 4 = 6(m)$ nên tâm I của đèn hình cầu có toạ độ là $I(2; 6; 2,85)$.

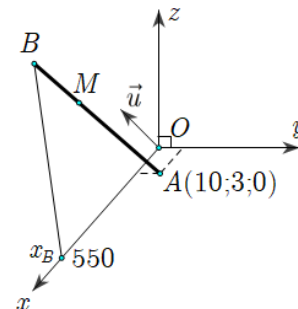
Do đó phương trình mặt cầu của đèn pha lê là: $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 + (z - 2,85)^2 = 0,0225$. **Do đó ý b) Sai.**

Vị trí thấp nhất của đèn cách sàn nhà là: $3 - 0,15 \cdot 2 = 2,7(m)$.

Ta có: $2,7 - 1,8 = 0,9(m) = 90(cm)$ nên một người cao $1,8m$ khi đi ngang qua phía dưới sẽ cách đèn ít nhất 90 cm. **Do đó ý c) Sai.**

Khoảng cách xa nhất từ $K \equiv O$ tới B là: $\sqrt{10^2 + 4^2} = 2\sqrt{29} \approx 10,77(m)$. **Do đó ý d) Đúng.**

Bài toán 3: Một cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương $\vec{u} = 2; -2; 1$ với tốc độ là $4,5(m/s)$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) được mô hình hoá như các hình vẽ sau:



a) Phương trình chính tắc của đường cáp là $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$.

b) Giả sử sau t giây kể từ lúc xuất phát $t > 0$, cabin đến vị trí điểm M . Khi đó toạ độ của điểm M là $\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$. Quãng đường AB có độ dài bằng 810(m).

d) Đường cáp AB tạo với mặt Oxy một góc 22° (làm tròn đến hàng đơn vị theo độ).

Lời giải

a) Vì đường cáp đi qua điểm $A(10; 3; 0)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = 2; -2; 1$ nên có phương trình chính

tắc là $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1}$. **Do đó ý a) đúng.**

b) Sau t giây kể từ lúc xuất phát $t > 0$, cabin đến vị trí điểm M . Khi đó cabin đi được đoạn đường

có độ dài bằng đoạn $AM = 4,5t$. Đặt $\frac{x-10}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1} = u \Rightarrow \begin{cases} x = 10 + 2u \\ y = 3 - 2u \\ z = u \end{cases}$. Suy ra tọa độ điểm M

là $M(10 + 2u; 3 - 2u; u)$ $u > 0$. Khi đó $AM = 4,5t \Leftrightarrow 2u^2 + -2u^2 + u^2 = 4,5t^2 \Leftrightarrow 9u^2 = \frac{81}{4}t^2$. Vì

$u > 0 \Rightarrow u = \frac{3}{2}t \Rightarrow M\left(10 + 3t; 3 - 3t; \frac{3}{2}t\right)$. **Do đó ý b) đúng.**

c) Ta có: $B(10 + 2u; 3 - 2u; u)$ $u > 0$. B có hoành độ $x_B = 550 \Rightarrow 10 + 2u = 550 \Rightarrow u = 270$.

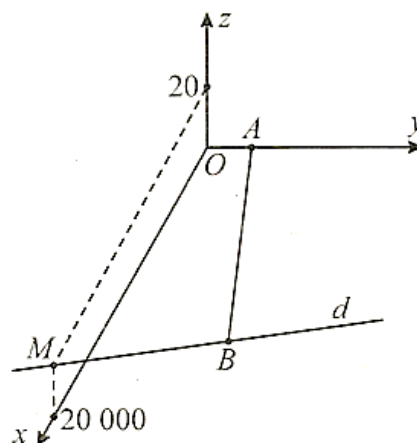
$\Rightarrow B(550; -537; 270) \Rightarrow AB = 810$. **Do đó ý c) đúng.**

d) Đường cáp AB có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$, mặt phẳng Oxy có một vectơ pháp tuyến

là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Suy ra góc giữa đường cáp AB và mặt phẳng Oxy là φ với

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{k}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi \approx 19^\circ. \text{ Do đó ý d) sai.}$$

Bài toán 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mô hình phòng không như sau: Radar đặt tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$, tên lửa phòng không đặt tại điểm $A(0;100;0)$; mỗi đơn vị tương ứng với 10m; mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất; giả sử mọi UAV (phương tiện bay không người lái) và tên lửa đều chuyển động thẳng đều. Tại thời điểm $t = 0$, radar phát hiện ra UAV M ở tọa độ $M_0(20000;0;20)$; tại thời điểm $t = 1$ radar theo dõi thấy UAV M ở tọa độ $M_1(19995;1;19,5)$ trên đường thẳng d .



a) Góc nghiêng của đường thẳng d và mặt đất là $0,02rad$.

b) Khoảng cách giữa UAV M và gốc O tại thời điểm 6 giây là 19970m.

c) Khoảng cách ngắn nhất từ điểm A tới đường thẳng d xấp xỉ 42684m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).

d) Tại thời điểm $t = 6s$, một tên lửa được phóng lên và chuyển động thẳng đều với vận tốc $3400m/s$, va chạm và phá huỷ UAV M tại điểm B trên d . Khi đó, sau 57,88 giây kể từ lúc phóng thì tên lửa va chạm với UAV (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của giây).



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{M_0M_1} = (-5; 1; -0,5)$ là một vector chỉ phương của d và một vector pháp tuyến của mặt phẳng (Oxy) là $\vec{k} = (0; 0; 1)$. Khi đó $\sin(d, (Oxy)) = \frac{|-0,5|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 0,5^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{105}} \Rightarrow (d, (Oxy)) \approx 0,098(rad)$. **Do đó**

ý a) Sai.

Phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 20000 - 5t \\ y = t \\ z = 20 - 0,5t \end{cases}$$

(Do UAV chuyển động thẳng đều nên ta có thể đồng nhất t với số giây bay được của UAV, tính từ lúc nó bị radar phát hiện). Toạ độ của UAV lúc 6 giây là $M_6(19970; 6; 17)$.

Suy ra $OM_6 \approx 19970$. Vậy khoảng cách thực tế là 199700m (do quy đơn vị 1 đơn vị bằng 10m). **Do đó ý b) Sai.**

Ta có: $MA = \sqrt{(20000 - 5t)^2 + (100 - t)^2 + (20 - 0,5t)^2} = \sqrt{26,25t^2 - 200220t + 400010400} \geq 4268,4$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ A tới d là 42684m. **Do đó ý c) Đúng.**

Tốc độ (10m/s) của UAV là $v_1 = \frac{M_1M_0}{1} = \sqrt{26,25}$;

Tốc độ của tên lửa (10m/s) là $v_2 = 340$.

Mặt khác, toạ độ B có dạng $B(19970 - 5a; 6 + a; 17 - 0,5a)$ ($a \geq 0, a = 0$ tính từ lúc UAV đi qua điểm M_6). Tên lửa va chạm và phá huỷ UAV tại B , tức là

$$\frac{M_6 B}{v_1} = \frac{AB}{v_2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(5a)^2 + a^2 + (0,5a)^2}}{\sqrt{26,25}} = \frac{\sqrt{(19970-5a)^2 + (a-94)^2 + (17-0,5a)^2}}{340}$$

$$340a = \sqrt{(19970-5a)^2 + (a-94)^2 + (17-0,5a)^2}$$

$$\Leftrightarrow 115573,75a^2 + 199905a - 398810025 = 0 \Leftrightarrow a \approx 57,88.$$

Vậy sau 57,88 giây kể từ lúc phóng thì tên lửa va chạm với UAV. **Do đó ý d) Đúng.**

Bài toán 5: Sao Thủy gần như **không có khí quyển thật sự** như Trái Đất hay sao Kim. Tuy nhiên, nó có một lớp khí rất mỏng gọi là **exosphere** – tức là **thượng quyển loãng**, gồm các hạt khí cực kỳ thưa thớt như hydro, heli, oxy, natri... Trong không gian Oxyz, **đơn vị trên mỗi trục là nghìn km**, vùng thượng quyển loãng của sao Thủy được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Các nhà khoa học không gian đang quan sát các tiểu hành tinh ở các vị trí có tọa độ $A(4; 2; 4)$, $B(1; 4; 2)$ và xem xét sự di chuyển của chúng. Nếu tiểu hành tinh nằm trong vùng thượng quyển loãng thì nó sẽ bị hút xuống bề mặt sao Thủy.

a) Vùng thượng quyển loãng của sao Thủy có tâm $(1; 2; 0)$, bán kính bằng 3.

b) Hai tiểu hành tinh ở các vị trí A, B sẽ bị hút xuống bề mặt sao Thủy.

c) Các nhà quan sát cho rằng có một sao chổi mang tên Haxen di chuyển theo quỹ đạo đường thẳng với vận tốc $51,5 \text{ km/s}$; khoảng cách ngắn nhất từ tâm sao Thủy đến sao chổi bằng $\frac{\sqrt{871}}{10}$ nghìn km .

Thời gian sao chổi đi trong vùng thượng quyển loãng của sao Thủy bằng 20 giây (làm tròn đến hàng đơn vị của giây).

d) Sao chổi Haxen di chuyển theo phương vector $\vec{u} = (0; 5; 2)$. Giả sử M, N là điểm đầu và điểm cuối mà sao chổi này đi qua thuộc vùng thượng quyển loãng của sao Thủy. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + BN$ bằng 3970 km (làm tròn đến hàng đơn vị của km).

Lời giải:

a) Mệnh đề đúng.

Vùng thượng quyển loãng của sao Thủy có tâm $I(1; 2; 0)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + 4} = 3$.

b) Mệnh đề sai.

Ta có $IA = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2 + (4-0)^2} = 5$; $IB = \sqrt{(1-1)^2 + (4-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$.

Vì $IA > R$; $IB < R$ nên tiểu hành tinh A nằm ngoài vùng thượng quyển loãng, còn tiểu hành tinh B thì nằm trong vùng thượng quyển loãng của sao Thủy và nó sẽ bị hút xuống bề mặt sao Thủy.

c) Mệnh đề sai.

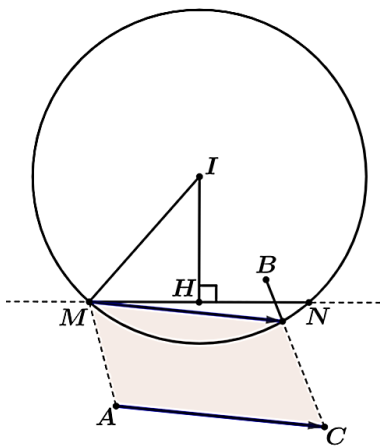
Gọi d là quỹ đạo đường thẳng của sao chổi và H là hình chiếu vuông góc của tâm I trên d .

Gọi M, N là điểm đầu và điểm cuối của sao chổi trong vùng thượng quyển loãng của sao Thủy.

Ta có $IH = \frac{\sqrt{871}}{10}$; suy ra $MN = 2MH = 2\sqrt{R^2 - IH^2} = 2\sqrt{9 - \frac{871}{100}} = \frac{\sqrt{29}}{5}$ (nghìn km).

Thời gian sao chổi di chuyển trong vùng thượng quyển loãng: $\frac{\sqrt{29}}{5} \times 1000 : 51,5 \approx \boxed{21}$ (giây).

d) Mệnh đề đúng.



Đặt $\overrightarrow{MN} = (0; 5k; 2k)$; ta có $MN^2 = 25k^2 + 4k^2 = \frac{29}{25} \Rightarrow k = \frac{1}{5}$; suy ra

$$\overrightarrow{MN} = \left(0; 1; \frac{2}{5}\right).$$

Chọn C sao cho $AMNC$ là hình bình hành; suy ra $C \left(4; 3; \frac{22}{5}\right)$.

Khi đó $AM = CN$ và $AM + BN = CN + BN \geq BC = \frac{\sqrt{394}}{5} \approx 3,97$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AM + BN$ là khoảng $\boxed{3970}$ km.

Bài toán 6: Xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ được cho sẵn, đơn vị trên mỗi trục là dm , mặt ngoài của một quả bóng được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$, quả bóng nằm yên trên sàn nhà. Người ta nhìn thấy một tấm ván ngã xuống đè lên quả bóng, phần giao của tấm ván và sàn nhà là đường thẳng d có phương trình $\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$. Gọi A, B lần lượt là hai tiếp điểm của tấm ván, sàn nhà với quả bóng và I là tâm quả bóng.

a) Quả bóng có tâm $I(2; -1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{6}$.

b) Khoảng cách từ tâm quả bóng đến đường thẳng d bằng $2\sqrt{6}$.

c) Nếu $\cos AIB$ bằng $\frac{a}{b}$ (phân số tối giản) thì giá trị $a^2 + b^2 = 82$.

d) Một con kiến bò từ vị trí A đến vị trí B trên quả bóng với tốc độ 2 cm/s ; thời gian ngắn nhất cho chuyển đi này là 21 giây (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải:

a) Mệnh đề đúng.

Mặt ngoài quả bóng là mặt cầu (S) có tâm $I(2; -1; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{6}$.

b) Mệnh đề sai.

b) Mệnh đề đúng.

Ta có $d(I, (P)) = \frac{|-1-4+2-3|}{\sqrt{1+4+4}} = \boxed{2 > R}$; do đó (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.

c) Mệnh đề đúng.

Giao điểm của (P) và Ox là điểm $M_0(3; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (4; -2; -1)$; $[\overrightarrow{IM}, \vec{u}] = (-2; -5; 2)$.

Khoảng cách từ I đến đường bay viên đạn là $d = \frac{[\overrightarrow{IM}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{4+25+4}}{\sqrt{1+0+1}} = \boxed{\frac{\sqrt{66}}{2}}$.

d) Mệnh đề đúng.

Gọi M thuộc (P) , N thuộc (S) theo thứ tự là vị trí người chơi và vị trí mục tiêu đang bắn; H là hình chiếu của điểm N trên (P) .

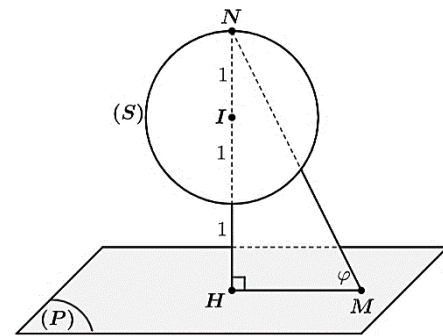
MN hợp với (P) một góc φ thỏa mãn $\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_p|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_p|} = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{1+0+1} \cdot \sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Xét tam giác MNH vuông tại H , ta có

$$\sin \varphi = \frac{NH}{MN} \Rightarrow MN = \frac{NH}{\sin \varphi} \text{ hay } \boxed{MN = \sqrt{2}NH}.$$

Dễ thấy MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất; mà $NH \leq d(I, (P)) + R = 2 + 1 = 3$.

Do đó MN lớn nhất bằng $\boxed{3\sqrt{2}}$; khi đó N, I, H nằm trên đường thẳng vuông góc với (P) .



Bài toán 8: Vệ tinh hoạt động dựa trên nguyên lý của vật lý Newton. Một vật thể bị kéo bởi một lực hấp dẫn từ một vật thể khác sẽ chuyển động theo một quỹ đạo elip xung quanh vật thể đó. Để đưa vệ tinh lên quỹ đạo, người ta sử dụng các loại tên lửa đẩy khác nhau để cung cấp cho vệ tinh động lượng cần thiết để thoát khỏi trọng lực của Trái Đất và duy trì quỹ đạo ổn định. Để thuận tiện ta quy ước một quỹ đạo gần tròn thành một đường tròn. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, gốc tọa độ là tâm trái đất, một vệ tinh nhân tạo có quỹ đạo được coi như một đường tròn có bán kính 13440km có điểm xuất phát là điểm $B(4032; 0; -5376)$ và đây cũng là điểm gần Trái Đất nhất của vệ tinh. Quỹ đạo của vệ tinh này nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục tung và có tâm nằm trên đường thẳng OB . Coi trái đất là hình cầu hoàn hảo có bán kính bằng 6400 km.

a) Phương trình mặt phẳng chứa quỹ đạo của vệ tinh là $x + z = 0$.

b) Khi xuất phát tại điểm B vệ tinh đang ở độ cao 320km so với mặt đất.

c) Quỹ đạo của tên lửa là đường tròn có tâm $I(-4032; 0; 5736)$.

d) Khi Trái Đất quay, điểm cực Nam và cực Bắc của Trái Đất không thay đổi vị trí. Biết rằng điểm cực Nam của Trái Đất có tọa độ là $M(0; 3840; 5120)$. Khoảng cách gần nhất giữa vệ tinh và điểm cực Nam bằng 10112 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Sai: Quỹ đạo của vệ tinh này nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục tung nên một vectơ chỉ phương của mặt phẳng chứa quỹ đạo của vệ tinh là $(0; 1; 0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng chứa quỹ đạo của vệ tinh có dạng $y + a = 0$

Quỹ đạo đi qua điểm $B(4032; 0; -5376)$ nên $0 + a = 0 \Rightarrow a = 0$

Vậy phương trình mặt phẳng chứa quỹ đạo của vệ tinh là $y = 0$.

b) Đúng: Khoảng cách ngắn nhất từ Trái Đất đến vệ tinh là:

$$OB - R = \sqrt{4032^2 + 0^2 + (-5376)^2} - 6400 = 320 \text{ km}$$

Vậy khi xuất phát tại điểm B thì vệ tinh đang ở độ cao 320 km so với mặt đất

c) Sai: Quỹ đạo của vệ tinh có tâm nằm trên đường thẳng OB nên tâm I nằm trên đường thẳng OB .

Mặt khác: $IB = R_{qd} = 13440 = 2.OB$ nên O là trung điểm của IB

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_I = 2x_O - x_B \\ y_I = 2y_O - y_B \\ z_I = 2z_O - z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -4032 \\ y_I = 0 \\ z_I = 5376 \end{cases} \text{ nên tọa độ điểm } I(-4032; 0; 5376)$$

d) Sai: Gọi H là hình chiếu của K lên mặt phẳng quỹ đạo $y = 0 \Rightarrow H(0; 0; 5120)$

$$\text{Khi đó: } KH = d(K, (y = 0)) = 3840; \quad IH = \sqrt{4032^2 + (5376 - 5120)^2} = 64\sqrt{3985}$$

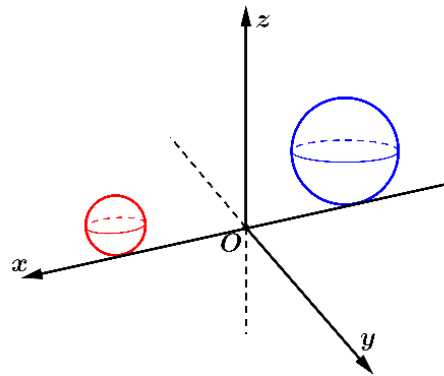
$$\text{Từ đó suy ra: } NH = IN - IH = 13440 - 64\sqrt{3985}$$

Nói I và H cắt vệ tinh tại N thì khi đó:

$$KN_{\min} = \sqrt{KH^2 + NH^2} = \sqrt{3840^2 + (13440 - 64\sqrt{3985})^2} \approx 10154 \text{ (km)}$$

Bài toán 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai viên bi xanh và đỏ ban đầu dạng hai mặt cầu lần lượt là $(S_{do}): (x-10)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$ và $(S_{xanh}): (x+12)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 16$. Biết mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy và hai mặt cầu này tiếp xúc với mặt phẳng Oxy với điểm tiếp xúc nằm trên trục Ox . Truyền cho hai viên bi đỏ và xanh lần lượt các tốc độ không đổi $v_d = 5$ (m/s) và $v_x = 3$ (m/s) thì hai viên bi lăn thẳng về phía nhau dọc theo trục Ox (Điểm tiếp xúc luôn nằm trên Ox). Sau

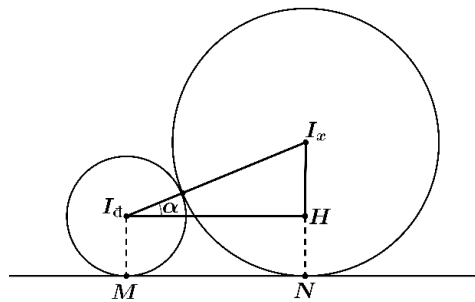
khoảng thời gian bằng bao nhiêu giây thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên (Đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét và kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



Lời giải

Gọi M, N lần lượt là vị trí tiếp xúc của bi xanh và bi đỏ với trục Ox

Dựa vào phương trình mặt cầu thì khoảng cách giữa hai viên bi ban đầu là 22 m



Khi hai viên bi va chạm nhau tức là hai mặt cầu này sẽ tiếp xúc với nhau và bán kính hai mặt cầu này hơn kém nhau 1m.

Khi đó: $\sin \alpha = \frac{1}{7}$ suy ra $MN = 7 \cdot \cos \alpha = 4\sqrt{3}$ nên hai viên va chạm nhau khi $MN = 4\sqrt{3}$.

Phương trình tọa độ điểm M theo trục Ox : $10 - 5t$

Phương trình tọa độ điểm N theo trục Ox : $-12 + 3t$

$$\text{Do } MN = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow |10 - 5t + 12 - 3t| = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} 8t - 22 = 4\sqrt{3} \\ 8t - 22 = -4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 1,88 (\text{nhan}) \\ t \approx 3,61 (\text{loai}) \end{cases}$$

Vậy sau khoảng 1,88 giây thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên.

Bài toán 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một con chim bồ câu xuất phát từ $O(0;0;0)$ di chuyển với vector vận tốc $\vec{v}_1 = (1;2;2)$. Cùng lúc đó, một con chim én cũng bắt đầu di chuyển từ $A(0;0;5)$ với vector vận tốc $\vec{v}_2 = (0;3;4)$. Tồn tại một vùng không gian nguy hiểm, nơi mà ở đó thường xuyên xuất hiện những người săn bắt chim có dạng mặt cầu $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 16$. Biết

rằng mỗi đơn vị trên các trục tọa độ trong không gian tương đương 1m và đơn vị đo thời gian tính bằng giây.

- a)** Tốc độ di chuyển của chim bồ câu là 3m/s
b) Chim én có di chuyển vào vùng nguy hiểm trong quá trình bay
c) Thời gian mà chim bồ câu di chuyển trong vùng nguy hiểm nhỏ hơn 5 giây
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng quỹ đạo của hai con chim bằng $\frac{2}{3}$ m.

Lời giải:

a) Đúng: Vận tốc của chim bồ câu: $v_1 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \text{ m/s}$.

b) Đúng: Phương trình quỹ đạo bay của chim én là $d_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$ nên $M(0; 3t; 5 + 4t) \in d_1$

Thay tọa độ điểm $M(0; 3t; 5 + 4t)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$$4 + (3t - 2)^2 + (4t + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow$$

Vậy chim én có bay vào vùng nguy hiểm

c) Đúng: Phương trình quỹ đạo bay của chim bồ câu là: $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases}$ nên $N(t; 2t; 2t) \in d_2$

Thay tọa độ điểm $N(t; 2t; 2t)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta được:

$$(t - 2)^2 + (2t - 4)^2 + (2t - 4)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \\ t = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Khi đó $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ và $B\left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}; \frac{20}{3}\right)$ nên $AB = \sqrt{\left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{20}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{20}{3} - \frac{4}{3}\right)^2} = 8 \text{ m}$

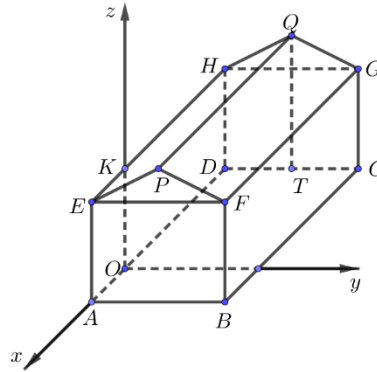
Thời gian chim bồ câu bay trong vùng nguy hiểm là: $t_1 = \frac{8}{3} \approx 2,66 \text{ m/s}$ nhỏ hơn 5 m/s.

d) Sai: Đường thẳng d_1 đi qua $M_1(0; 0; 5)$ và d_2 đi qua $M_2(0; 0; 0)$ nên $\overrightarrow{M_1M_2} = (0; 0; -5)$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng quỹ đạo bay của hai con chim:

$$d(d_1; d_2) = \frac{\left| \left[\begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{M_1M_2} \right] \right|}{\left| \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \end{pmatrix} \right|} \approx 2,78 \text{ m}.$$

Bài toán 11: Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $ABFPE.DCGQH$ với $ABFE$ là hình chữ nhật và EFP là tam giác cân tại P . Gọi T là trung điểm của DC . Các kích thước của kho chứa lần lượt là $AB = 6\text{m}$; $AE = 5\text{m}$; $AD = 8\text{m}$; $QT = 7\text{m}$. Người ta mô hình hoá nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA = 2\text{m}$ và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây. Khi đó:



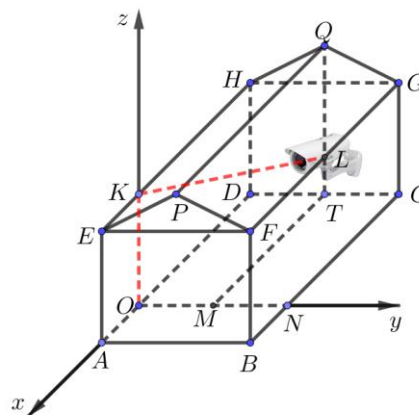
a) Tọa độ điểm Q là $(-6; 3; 5)$.

b) Véc tơ $\overrightarrow{OC}$ có tọa độ là $(-6; 6; 0)$.

c) Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của FG và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến K sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $5 + 2\sqrt{10}\text{ m}$.

d) Mái nhà được lợp bằng tôn Hoa Sen, giá tiền mỗi mét vuông tôn là 130.000 đồng. Số tiền cần bỏ ra để mua tôn lợp mái nhà là 3.750.000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các miếng tôn, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

Lời giải :



(a) Kẻ $TM \perp Oy$, $CN \perp Oy$. Vì T là hình chiếu của Q lên (Oxy) nên

$$\begin{cases} x_Q = x_T = -OD = -(AD - OA) = -6 \\ y_Q = y_T = OH = \frac{AB}{2} = 3 \end{cases} \quad . \text{Và } z_Q = QT = 7. \text{ Suy ra } Q(-6; 3; 7).$$

(b) Vì $C \in (Oxy)$ nên $z_C = 0$. Ta có $\begin{cases} x_C = -OD = -6 \\ y_C = ON = AB = 6 \end{cases}$, suy ra $C(-6; 6; 0)$. Vậy $\overrightarrow{OC} = (-6; 6; 0)$.

(c) Gọi L là trung điểm của FG . Ta có: $z_K = OK = AE = 5$. Suy ra $K(0; 0; 5) \Rightarrow OK = 5$.

B, C lần lượt là hình chiếu của F, G lên (Oxy) . Suy ra $F(2; 6; 5), G(-6; 6; 5)$.

Mà L là trung điểm của FG nên $L(-2; 6; 5) \Rightarrow KL = 2\sqrt{10}$.

Vậy độ dài đoạn cáp tối thiểu từ O đến K sau đó nối thẳng đến camera là

$$OK + KL = 5 + 2\sqrt{10} \text{ (m)}$$

(d) $FG = \sqrt{(-6-2)^2 + (6-6)^2 + (5-5)^2} = 8 \text{ (m)}$.

$$GQ = \sqrt{(-6+6)^2 + (3-6)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{13} \text{ (m)}. \text{ Suy ra } S_{FGQP} = FG \cdot GQ = 8\sqrt{13} \text{ (m}^2\text{)}.$$

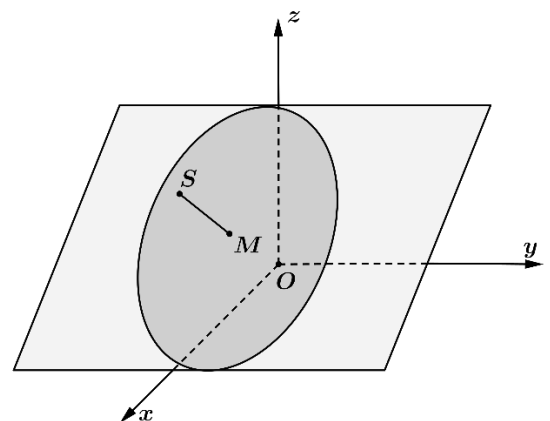
Diện tích lợp tôn mái nhà là $2S_{FGQP} = 16\sqrt{13} \text{ (m}^2\text{)}$.

Số tiền cần bỏ ra để mua tôn lợp mái nhà là $16\sqrt{13} \cdot 130000 \approx 7500000$ (đồng).

Bài toán 12 : Hình 1 mô tả một chiếc đồng hồ mặt trời với một mặt đáy hình chữ nhật nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang, trên đó có một mặt đồng hồ hình tròn. Trên mặt đáy này có gắn một chiếc cọc, bóng của cọc khi chiếu sáng sẽ chi giờ trên mặt đồng hồ. Chiếc đồng hồ mặt trời như vậy được mô hình hóa trong một hệ tọa độ $Oxyz$ như hình 2. Ở đây, hình chữ nhật $ABCD$ với $A(5; -4; 0)$ và $B(5; 4; 0)$ mô tả mặt đáy của đồng hồ mặt trời. Điểm gắn cọc trên mặt đáy trong mô hình được biểu diễn bởi tâm $M(2, 5; 0; 2)$ của hình chữ nhật $ABCD$. Một đơn vị độ dài trong hệ tọa độ tương ứng 10 cm trong thực tế. Mặt phẳng ngang trong mô hình được biểu diễn bởi mặt phẳng (Oxy)



Hình 1



Hình 2

- a) Mặt phẳng (E) chứa hình chữ nhật $ABCD$ có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (4; 0; 5)$.
- b) Mặt đáy của đồng hồ nghiêng một góc α so với mặt phẳng ngang. Để đồng hồ hiển thị thời gian chính xác tại vĩ độ ϕ thì $\alpha + \phi = 90^\circ$. Vậy chiếc đồng hồ này được thiết kế tại nơi có vĩ độ nhỏ hơn 51° .
- c) Trong mô hình, cọc đồng hồ được biểu diễn bởi đoạn thẳng MS với $S(4, 5; 0; 4, 5)$. Ánh sáng mặt trời chiếu vào đồng hồ mặt trời tại thời điểm t_0 nhất định trong một ngày hè được mô hình hóa bằng các đường thẳng song song có vector chỉ phương $\vec{u} = (6; 6; -13)$ thì bóng của đỉnh cọc nằm trong hình chữ nhật $ABCD$.
- d) Lúc 6 giờ, bóng của cọc đồng hồ đi qua trung điểm cạnh BC . Lúc 12 giờ, bóng đi qua trung điểm cạnh AB và lúc 18 giờ, bóng đi qua trung điểm cạnh AD thì thời điểm t_0 mà ta đang xét xảy ra trước 12 giờ.

Lời giải

a) Đúng: $\vec{MA} = \left(\frac{5}{2}; -4; -2\right); \vec{MB} = \left(\frac{5}{2}; 4; -2\right)$ suy ra $\vec{n} \parallel [\vec{MA}; \vec{MB}] \parallel (4; 0; 5)$

b) Sai: $\vec{n}_{(Oxy)} = \vec{k} = (0; 0; 1)$ nên $\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{5}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{41}} \Rightarrow \alpha \approx 38,66^\circ \Rightarrow \phi \approx 51,34^\circ$

c) Sai: Tọa độ điểm $S\left(\frac{9}{2}; 0; \frac{9}{2}\right)$

Ánh sáng mặt trời đi qua S tại thời điểm t_0 là đường thẳng d đi qua S và có $\vec{u}_d = (6; 6; -13)$

$$\text{Phương trình đường thẳng } d : \begin{cases} x = \frac{9}{2} + 6t \\ y = 6t \\ z = \frac{9}{2} - 13t \end{cases}$$

Mặt phẳng $(ABCD)$ đi qua $A(5; 4; 0)$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (4; 0; 5)$ nên có phương trình là:

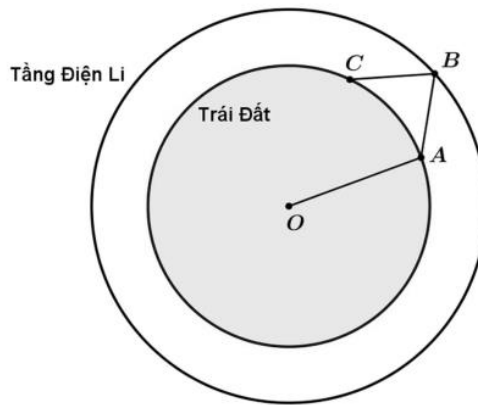
$$4(x - 5) + 5(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 4x + 5z - 20 = 0$$

Vậy $S' = d \cap (ABCD) \Rightarrow S'\left(\frac{15}{2}; 3; -2\right)$ mà $x_{S'} = \frac{15}{2} > 5$ nên điểm S' nằm ngoài miền hình chữ nhật $ABCD$.

d) Đúng: Gọi $I; J$ lần lượt là trung điểm của AB và BC , ta có $I\left(\frac{5}{2}; 4; 2\right) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = (0; 4; 0)$

Khi đó $\overrightarrow{MS'} = (5; 3; -4) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = 64,9^\circ$

Bài toán 13: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, coi Trái Đất là một hình cầu có tâm là gốc tọa độ và có bán kính bằng 16 (đơn vị dài trên mỗi hệ trục tọa độ là 400 km). Coi tầng điện ly luôn cách bề mặt Trái Đất 400km, tức là tầng điện ly là một mặt cầu có tâm là gốc tọa độ O . Từ một đài phát A đặt tại điểm $A(16; 0; 0)$ có phát một sóng điện từ với tần số 10MHz lên trên cao (với tốc độ không đổi bằng $3 \cdot 10^8$ m/s) hướng theo vectơ $\vec{u} = (1; 2; 0)$, sóng điện từ này gặp tầng điện ly tại điểm B , sau đó bị phản xạ và truyền trả lại gặp bề mặt Trái Đất tại điểm C . Biết rằng tính chất phản xạ cho ta kết quả là: bốn điểm O, A, B, C thẳng hàng và $ABO = OBC, AOB = BOC$



a) Tầng điện ly là một mặt cầu có tâm O và bán kính 16

b) Phương trình tham số của đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = 16 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

c) Nếu tọa độ điểm B là $(a; b; c)$ thì ta có $(a + 2b + c)^2 = 256$

d) Tính theo đơn vị km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) thì quãng đường thực tế lớn nhất đi được giữa A và C ở bề mặt Trái Đất khoảng 1361km.

Lời giải

a) Đúng: Ta có tầng điện ly luôn cách bề mặt Trái Đất 400 km tương ứng với 1 đơn vị độ dài trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ nên khi đó:

Tầng điện ly là một mặt cầu tâm O và bán kính bằng $R = 16 + 1 = 17$.

Khi ấy ta có phương trình mặt cầu tầng điện ly (S'): $x^2 + y^2 + z^2 = 17^2$

b) Đúng: Đường thẳng AB đi qua $A(16;0;0)$ với vector chỉ phương là $\vec{u} = (1;2;0)$ nên ta suy ra phương

trình tham số của đường thẳng tương ứng là $\begin{cases} x = 16 + t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

c) Sai: Ta có $B = AB \cap (S')$ thì khi đó ta có tọa độ $B(16+t; 2t; 0)$, từ đó ta có phương trình:

$$(16+t)^2 + (2t)^2 + 0^2 = 17^2 \Leftrightarrow t = \frac{-16 - \sqrt{421}}{5} \text{ hoặc } t = \frac{-16 + \sqrt{421}}{5}.$$

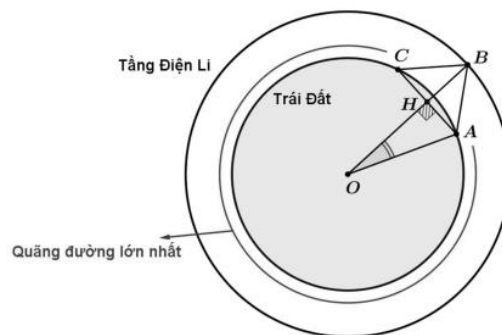
Do $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$ nên $y_B - y_A = k > 0 \Rightarrow y_B = 2t > 0 \Rightarrow t > 0$ tức ta nhận $t = t_0 = \frac{-16 + \sqrt{421}}{5}$

Suy ra $T = (a + 2b + c)^2 = (x_B + 2y_B + z_B)^2 = (5t + 16)^2$, thế vào ta có được $T = 421$

d) Sai: Trước hết từ hình vẽ dưới, ta có:

$$\cos \alpha = \cos AOB = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{OA \cdot OB} = \frac{t_0 + 16}{17} \Rightarrow AOC = 2AOB = 2 \frac{\pi}{180} \arccos \left(\frac{t_0 + 16}{17} \right) \text{ (radian)}$$

Gọi (C) là đường tròn giao tuyến tạo bởi mặt phẳng $(OABC)$ cắt mặt cầu (S) tức Trái Đất.



Khi ấy quãng đường lớn nhất giữa hai điểm A và C chính là cung lớn AC (kí hiệu là L) thuộc đường tròn (C) như hình vẽ trên.

Ta có chu vi đường tròn (C) là $C = 2\pi R_{td} = 32\pi$

Và độ dài cung nhỏ AC là $l = AOC.R_{td} = \frac{8\pi}{45} \arccos\left(\frac{t_0 + 16}{17}\right)$ (công thức độ dài cung tròn)

Suy ra quãng đường cần tìm là: $L = C - l = 32\pi - \frac{8\pi}{45} \arccos\left(\frac{t_0 + 16}{17}\right)$

Với $t_0 = \frac{-16 + \sqrt{421}}{5}$ và 1 đơn vị dài = 400 km thực tế, ta suy ra quãng đường thực tế lớn nhất cần

tìm bằng $L_{tt} = 400 \text{ L} \approx 40189 \text{ km}.$

Bài toán 14: (Sở Phú Thọ 2025) Đường ống dẫn dầu trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến

nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm..., những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi.



Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, mặt đất là mặt phẳng (Oxy), đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta

thiết lập một đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng $d : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 20 \end{cases}$ (t là tham số). Vì địa

hình phức tạp, người ta chọn điểm $A(15;10;15)$ để làm điểm trung chuyển dầu từ mặt đất đến đường ống này.

a) Đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Oyz).

b) Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $A'(-15;-10;15)$.

c) Do thực tế công việc, người ta cần xác định vị trí điểm $B(0;b;20)$ thuộc đường ống và vị trí điểm $C(m;n;0)$ thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC nhỏ nhất. Ta có $m+n+b = \frac{200}{7}$.

d) Giá trị nhỏ nhất của tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC làm tròn đến hàng phần chục bằng 45,5m.

Lời giải

a) Đúng. Ta có $M(0;1;20)$ và $N(0;2;20)$ thuộc đường thẳng d . Mà $M(0;1;20)$ và $N(0;2;20)$ cũng thuộc mặt phẳng (Oyz): $x = 0$ nên đường thẳng d nằm trên mặt phẳng (Oyz).

b) Sai. Nếu điểm $I(a;b;c)$ thì điểm đối xứng với I qua mặt phẳng (Oxy) là $I'(a;b;-c)$

Do đó điểm đối xứng với $A(15;10;15)$ qua mặt phẳng (Oxy) là $A'(15;10;-15)$.

c) Đúng. Ta có $AB + AC + BC = AB + A'C + BC \geq AB + A'B$

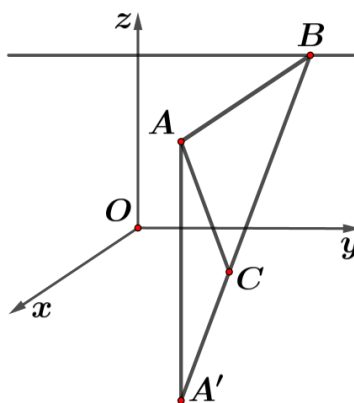
$$= \sqrt{15^2 + (t-10)^2 + 5^2} + \sqrt{15^2 + (t-10)^2 + 35^2} \geq \sqrt{15^2 + 5^2} + \sqrt{15^2 + 35^2} = 5\sqrt{58} + 5\sqrt{10}$$

$$\text{Đầu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} t=10 \\ C = A'B \cap (Oxy) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B(0;10;20) \\ C = A'B \cap (Oxy) \end{cases}.$$

Ta có $A'B$ đi qua $B(0;10;20)$ và có 1 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{A'B} = (-15; 0; 35) = -5(3; 0; -7)$ nên phương

$$\text{trình } A'B \text{ là } \begin{cases} x=3t \\ y=10 \\ z=20-7t \end{cases}. \text{ Vì } C = A'B \cap (Oxy) \Rightarrow z_C = 0 \Rightarrow t = \frac{20}{7} \Rightarrow C\left(\frac{60}{7}; 10; 0\right)$$

$$\text{Do đó } m+n+b = \frac{60}{7} + 10 + 10 = \frac{200}{7}.$$



d) Sai. Ta có $5\sqrt{58} + 5\sqrt{10} \approx 53,9$

CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT – THỐNG KÊ

Bài toán 1: Kết quả 40 lần nhảy xa của hai vận động viên (VĐV) Hùng và Đạt được lần lượt thống kê trong bảng 1 và bảng 2 dưới đây (đơn vị: mét):



Bảng 1 (VĐV Hùng):

Nhóm	[6, 22; 6, 46)	[6, 46; 6, 70)	[6, 70; 6, 94)	[6, 94; 7, 18)	[7, 18; 7, 42)
Tần số	3	7	5	20	5

Bảng 2 (VĐV Đạt):

Nhóm	[6, 22; 6, 46)	[6, 46; 6, 70)	[6, 70; 6, 94)	[6, 94; 7, 18)	[7, 18; 7, 42)
Tần số	2	5	8	19	6

- a) Trung bình kết quả 40 lần nhảy xa của vận động viên Hùng tốt hơn vận động viên Đạt.
- b) Phương sai của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của vận động viên Hùng khoảng 0,08. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- c) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của vận động viên Đạt khoảng 0,06. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì vận động viên Đạt có kết quả nhảy xa ổn định hơn vận động viên Hùng.

Lời giải

Xét bảng sau:

Nhóm	[6, 22; 6, 46)	[6, 46; 6, 70)	[6, 70; 6, 94)	[6, 94; 7, 18)	[7, 18; 7, 42)
Giá trị đại diện	6,34	6,58	6,82	7,06	7,3
Tần số của VĐV Hùng	3	7	5	20	5
Tần số của VĐV Đạt	2	5	8	19	6

- Với thống kê kết quả nhảy xa của VĐV Hùng:

Giá trị trung bình của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của Hùng là $\overline{x_H} = 6,922$.

Phương sai của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của Hùng là $s_H^2 \approx 0,07$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của Hùng là $s_H \approx 0,27$.

- Với thống kê kết quả nhảy xa của VĐV Đạt:

Giá trị trung bình của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của Đạt là $\overline{x_D} = 6,952$.

Phương sai của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của Đạt là $s_D^2 \approx 0,06$.

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của Đạt là $S_D \approx 0,25$.

a) Sai.

b) Sai.

c) Sai.

d) Đúng. Do độ lệch chuẩn của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của vận động viên Đạt thấp hơn độ lệch chuẩn của mẫu số liệu biểu thị kết quả nhảy xa của vận động viên Hùng.

Bài toán 2. Một xí nghiệp sản xuất sản phẩm có tỉ lệ phế phẩm là 5%. Mỗi sản phẩm sau khi sản xuất đều phải trải qua hai trạm kiểm tra độc lập. Cho biết ở trạm thứ nhất, xác suất nhận biết đúng với chính phẩm là 0,9; xác suất không nhận biết được phế phẩm là 0,03. Còn ở trạm thứ hai, xác suất nhận biết đúng chính phẩm là 0,95; xác suất không nhận biết được phế phẩm là 0,02. Nếu cả hai trạm kiểm tra đều coi là chính phẩm thì sản phẩm được đưa ra thị trường.



a) Xác suất một phế phẩm được đưa ra thị trường bằng 0,006.

b) Xác suất một chính phẩm bị loại trong quá trình kiểm tra bằng 0,145.

c) Xác suất một sản phẩm được đưa ra thị trường là 0,81228.

d) Xác suất một sản phẩm của xí nghiệp đã đưa ra thị trường là phế phẩm xấp xỉ $3,7 \cdot 10^{-5}$.

Lời giải

Gọi H là biến cố: "Sản phẩm là chính phẩm"; A là biến cố: "Sản phẩm được đưa ra thị trường".

Theo đề bài, ta có: $P(H) = 1 - 0,05 = 0,95$; $P(A|H) = 0,9 \cdot 0,95 = 0,855$;

$$P(A|\bar{H}) = 0,03 \cdot 0,02 = 0,0006$$

Xác suất một phế phẩm được đưa ra thị trường là $P(A|\bar{H}) = 0,0006$.

Do đó ý a) Sai.

Xác suất một chính phẩm bị loại trong quá trình kiểm tra là

$$P(\bar{A} | H) = 1 - P(A | H) = 1 - 0,855 = 0,145.$$

Do đó ý b) Đúng.

Xác suất một sản phẩm được chọn ngẫu nhiên trong số các sản phẩm chưa kiểm tra của xí nghiệp sẽ được đưa ra thị trường là

$$P(A) = P(H) \cdot P(A | H) + P(\bar{H}) \cdot P(A | \bar{H}) = 0,95 \cdot 0,855 + 0,05 \cdot 0,0006 = 0,81228.$$

Do đó ý c) Đúng.

Xác suất một sản phẩm của xí nghiệp đã đưa ra thị trường là phế phẩm bằng

$$P(\bar{H} | A) = \frac{P(\bar{H}) \cdot P(A | \bar{H})}{P(A)} = \frac{0,05 \cdot 0,0006}{0,81228} \approx 3,7 \cdot 10^{-5}.$$

Do đó ý d) Đúng.

Bài toán 3: Có hai hộp bút, hộp thứ nhất đựng 5 chiếc bút đỏ và 4 chiếc bút xanh, hộp thứ hai đựng 4 chiếc bút đỏ và 6 chiếc bút xanh, tất cả những chiếc bút đều có cùng hình dạng, kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên một chiếc bút từ hộp thứ nhất chuyển sang hộp thứ hai, sau đó lấy ngẫu nhiên một chiếc bút từ hộp thứ hai.



a) Xác suất để chiếc bút lấy từ hộp thứ nhất có màu đỏ là $\frac{5}{9}$.

b) Xác suất để chiếc bút được lấy ra từ hộp thứ hai là chiếc bút chuyển từ hộp thứ nhất sang là $\frac{1}{10}$.

c) Xác suất để chiếc bút được lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ và là chiếc bút được chuyển từ hộp thứ nhất sang là $\frac{5}{99}$.

d) Xác suất để chiếc bút được lấy ra từ hộp thứ hai là chiếc bút được chuyển từ hộp thứ nhất sang, biết rằng chiếc bút đó có màu đỏ là $\frac{5}{41}$.

Lời giải

Hộp thứ nhất có tất cả 9 chiếc bút, trong đó có 5 chiếc bút đỏ. Do đó xác suất để chiếc bút lấy từ hộp thứ nhất có màu đỏ là $\frac{5}{9}$. **Do đó ý a) đúng**

Khi chuyển 1 chiếc bút từ hộp thứ nhất sang hộp thứ hai thì hộp thứ hai có tất cả 11 chiếc bút. Do đó xác suất để chọn được đúng chiếc bút chuyển từ hộp thứ nhất sang là $\frac{1}{11}$. **Do đó ý b) sai**

Gọi A là biến cố "Chiếc bút lấy từ hộp thứ hai là chiếc bút chuyển từ hộp thứ nhất sang". Theo lập luận trên ta có $P(A) = \frac{1}{11}$.

Gọi B là biến cố "Chiếc bút lấy từ hộp thứ hai có màu đỏ".

Khi đó biến cố "Chiếc bút được lấy ra từ hộp thứ hai có màu đỏ và là chiếc bút được chuyển từ hộp thứ nhất sang" là $A \cap B$. Ta có $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{11} = \frac{5}{99}$. **Do đó ý c) đúng**

Xác suất để chiếc bút được lấy ra từ hộp thứ hai là chiếc bút được chuyển từ hộp thứ nhất sang, biết rằng chiếc bút đó có màu đỏ, là $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Để tính $P(B)$ ta lập luận như sau: nếu chiếc bút

được chuyển từ hộp thứ nhất sang có màu xanh (với xác suất là $\frac{4}{9}$) thì khi đó xác suất để chiếc bút

được chọn từ hộp thứ hai có màu đỏ là $\frac{4}{11}$; nếu chiếc bút được chuyển từ hộp thứ nhất sang có màu

đỏ (với xác suất là $\frac{5}{9}$) thì khi đó xác suất để chiếc bút được chọn từ hộp thứ hai có màu đỏ là $\frac{5}{11}$;

suy ra $P(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{11} + \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{11} = \frac{41}{99}$.

Vậy $P(A|B) = \frac{5}{99} : \frac{41}{99} = \frac{5}{41}$. **Do đó ý d) đúng**

Bài toán 4: Có hai hộp bóng A và B chỉ đựng các quả bóng đỏ và trắng, trong đó hộp B đựng 4 quả bóng đỏ và 5 quả bóng trắng; tổng số bóng hai hộp không qua 20. Xét hai phép thử ngẫu nhiên sau:

Phép thử thứ nhất: Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp A bỏ vào hộp B rồi lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp B. Bằng thực nghiệm người ta biết được rằng khả năng lấy được quả bóng đỏ từ hộp thứ hai bằng $\frac{33}{70}$.

Phép thử thứ hai: Lấy ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp A bỏ vào hộp B. Sau đó tiếp tục lấy ngẫu nhiên 2 quả bóng từ hộp B.

a) Trong phép thử thứ nhất, nếu lấy được quả bóng đỏ từ hộp A bỏ sang hộp B thì xác suất lấy được quả bóng trắng từ hộp B bằng 0,4.

b) Hộp thứ nhất đựng 4 quả bóng đỏ và 3 quả bóng trắng.

c) Xác suất để lấy được 2 quả bóng đỏ từ hộp B bằng $\frac{166}{1155}$.

d) Nếu biết rằng hai quả bóng lấy được từ hộp B cùng có màu đỏ, xác suất để có ít nhất 1 quả là từ hộp A chuyển sang bằng $\frac{67}{128}$.

Lời giải:

a) Mệnh đề sai.

Trong phép thử thứ nhất, nếu lấy được quả bóng đỏ từ hộp A bỏ sang hộp B thì khi đó hộp B có 5 quả bóng đỏ, 5 quả bóng trắng. Do đó xác suất lấy được quả bóng trắng từ hộp B bằng 0,5.

b) Mệnh đề sai.

Trong phép thử thứ nhất, gọi các biến cố X : “Lấy được quả bóng đỏ từ hộp A” và Y : “Lấy được quả bóng đỏ từ hộp thứ hai”. Đặt $P(X) = x \in (0; 1)$; suy ra $P(\bar{X}) = 1 - x$.

Ta có sơ đồ hình cây sau đây:

$$\text{Theo giả thiết ta có } P(Y) = 0,5x + 0,6(1 - x) = \frac{33}{70} \Rightarrow x = \frac{5}{7}.$$

Vì tổng số bóng hai hộp bóng không quá 20 mà hộp B có 9 quả bóng nên hộp A có không quá 11 quả bóng, mà xác suất để lấy được quả bóng đỏ bằng $\frac{5}{7}$ nên hộp A có

5 quả bóng đỏ và 2 quả bóng trắng.

c) Mệnh đề sai.

Trong phép thử thứ hai, ta gọi 2Đ là biến cố “Lấy đúng 2 quả bóng đỏ từ hộp B”.

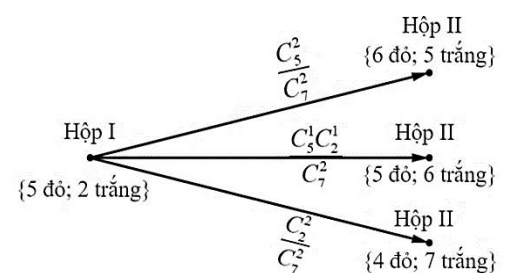
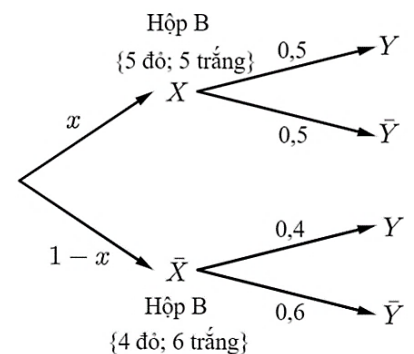
Với thông tin có được, ta có sơ đồ hình cây cho phép thử ngẫu nhiên thứ hai:

$$\text{Từ đó suy ra } P(2Đ) = \frac{C_5^2}{C_7^2} \cdot \frac{C_6^2}{C_{11}^2} + \frac{C_5^1 C_2^1}{C_7^2} \cdot \frac{C_5^2}{C_{11}^2} + \frac{C_2^2}{C_7^2} \cdot \frac{C_4^2}{C_{11}^2} = \frac{256}{1155}.$$

d) Mệnh đề sai.

Gọi X là biến cố lấy được ít nhất 1 quả là từ hộp A chuyển sang, ta có:

$$P(X | 2Đ) = \frac{\frac{C_5^2}{C_7^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4}{C_{11}^2} + \frac{1}{C_{11}^2} \right) + \frac{5 \cdot 2}{C_7^2} \cdot \frac{1 \cdot 4}{C_{11}^2}}{P(2Đ)} = \frac{65}{128}.$$



Bài toán 5: Một lô hạt giống được thu gom từ ba nguồn khác nhau. Nguồn I chiếm $\frac{1}{2}$ số hạt của lô, nguồn II chiếm $\frac{1}{3}$ số hạt của lô, còn lại là nguồn III. Tỷ lệ hạt nảy mầm đối với các hạt thuộc các nguồn I, II, III tương ứng là 90%, 80%, 70%. Lấy ngẫu nhiên 1 hạt.

a) Hạt lấy ra là hạt nảy mầm với xác suất là 80%.

b) Giả sử hạt lấy ra không nảy mầm, ta nói rằng "Nhiều khả năng hạt đó thuộc nguồn III".

c) Ta nói rằng "Xác suất để hạt lấy ra là không nảy mầm" là như nhau với cả ba nguồn.

d) "Xác suất để hạt không nảy mầm" nhiều khả năng thuộc vào hạt giống lấy ra từ nguồn II.

Lời giải

Gọi N_1, N_2, N_3 lần lượt là các biến cố "Hạt lấy ra từ nguồn I", "Lấy ra từ nguồn II", "Lấy ra từ nguồn III". Ta có $P(N_1) = \frac{1}{2}; P(N_2) = \frac{1}{3}; P(N_3) = \frac{1}{6}$

Gọi K là biến cố "Hạt lấy ra nảy mầm"

a) Sai. Theo công thức xác suất đầy đủ, ta có

$$\begin{aligned} P(K) &= P(N_1)P(K|N_1) + P(N_2)P(K|N_2) + P(N_3)P(K|N_3) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{10} = \frac{27+16+7}{60} = \frac{5}{6} \approx 83,33\%. \\ \Rightarrow \text{a) sai. } \left(\Rightarrow P(\bar{K}) = \frac{1}{6} \right) \end{aligned}$$

Theo công thức Bayes ta có

$$\begin{aligned} P(N_1|\bar{K}) &= \frac{P(N_1)P(\bar{K}|N_1)}{P(\bar{K})} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{20}; \quad P(N_2|\bar{K}) = \frac{P(N_2)P(\bar{K}|N_2)}{P(\bar{K})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{8}{20}; \\ P(N_3|\bar{K}) &= \frac{P(N_3)P(\bar{K}|N_3)}{P(\bar{K})} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Vậy $P(N_2|\bar{K}) > P(N_1|\bar{K}) = P(N_3|\bar{K})$ (1). Từ (1) suy ra b) sai; c) sai; d) đúng.

Bài toán 6: Song sinh có thể là cùng trứng (identical) hoặc khác trứng (fraternal). Biết rằng 1/3 số cặp song sinh là cùng trứng. Hiển nhiên, song sinh cùng trứng phải cùng giới tính; song sinh khác trứng có thể cùng hoặc khác giới tính. Giả sử song sinh cùng trứng có xác suất là hai bé trai hoặc hai bé gái như nhau, trong khi với song sinh khác trứng thì tất cả bốn khả năng đều có xác suất như nhau. Một nhà khảo sát tìm gặp ngẫu nhiên một người phụ nữ đang mang thai đôi.

a) Xác suất để người phụ nữ mang thai đôi là bé gái bằng 0,5 biết rằng đây là cặp song sinh cùng trứng.

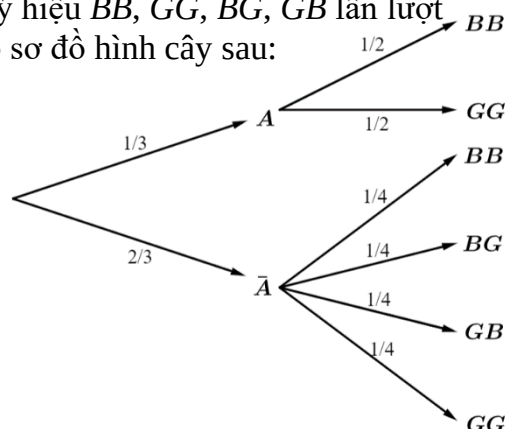
b) Xác suất để thai đôi của người phụ nữ là một cặp trai gái bằng 0,3

c) Xác suất để thai đôi không cùng trứng và cũng không phải con trai bằng $\frac{1}{3}$.

d) Xác suất để người phụ nữ mang thai đôi là cùng trứng bằng 0,5 biết rằng cô ấy hạ sinh được hai bé gái.

Lời giải:

Gọi A là biến cố: “Người phụ nữ mang thai đôi cùng trứng”, các ký hiệu BB, GG, BG, GB lần lượt chỉ các biến cố thai đôi là trai-trai, gái-gái, trai-gái, gái-trai. Ta có sơ đồ hình cây sau:



a) **Mệnh đề đúng.**

Ta có $P(GG|A) = \frac{1}{2}$.

b) **Mệnh đề sai.**

Ta có $P(BG \cup GB) = P(BG \cup GB | \bar{A}) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}$.

c) **Mệnh đề sai.**

Ta có $P(\bar{A} \cap GG) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

d) **Mệnh đề đúng.**

Ta có $P(GG) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

Do đó $P(A|GG) = \frac{P(A) \cdot P(GG|A)}{P(GG)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = 0,5$.

Bài toán 7: Có hai đội tham gia một cuộc thi bơi lội. Đội I có 7 vận động viên, đội II có 9 vận động viên. Xác suất giành huy chương vàng của mỗi vận động viên đội I và đội II lần lượt là 0.07 và 0.06. Chọn ngẫu nhiên một vận động viên (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

a) Xác suất để vận động viên được chọn thuộc đội I là 0,56

b) Xác suất để vận động viên này không giành được huy chương vàng nếu thuộc đội II là 0,94

c) Xác suất để vận động viên này giành được huy chương vàng là 0,1

d) Giả sử vận động viên được chọn giành huy chương vàng. Xác suất để vận động viên này thuộc đội I là 0,48

Lời giải

a) Sai: Xác suất để vận động viên chọn ra thuộc đội I là $\frac{7}{16} \approx 0,43$.

b) Đúng: Xác suất không đạt huy chương vàng của mỗi vận động viên đội II là $1 - 0,06 = 0,94$

c) Sai: Gọi A là biến cố: “Vận động viên đạt huy chương vàng”, B là biến cố: “Thành viên đội I” thì biến cố đối của B là $\bar{B}$: “Thành viên đội II”.

Do đó: $P(B) = \frac{7}{16}$; $P(\bar{B}) = \frac{9}{16}$; $P(A|B) = 0,07$; $P(A|\bar{B}) = 0,06$

Theo công thức xác suất toàn phần ta có

$$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\bar{B}).P(A|\bar{B}) = \frac{7}{16}.0,07 + \frac{9}{16}.0,06 = \frac{103}{1600} \approx 0,06$$

d) Đúng : Ta có $P(B|A) = \frac{P(B).P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{16}.0,07}{\frac{103}{1600}} = \frac{49}{103} \approx 0,48$

Bài toán 8: Cho một hộp bi thứ nhất đựng 6 viên bi đôi một khác nhau gồm: 2 viên bi màu xanh, 2 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Các viên bi được xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang.

a) Tổng số cách xếp 6 viên bi khác nhau thành một hàng ngang là 720 cách

b) Xác suất để hai viên bi màu xanh đứng cạnh nhau khi xếp ngẫu nhiên 6 viên bi là $\frac{1}{3}$

c) Xác suất để hai viên bi màu vàng đứng cạnh nhau, biết rằng hai viên bi màu đỏ đứng cạnh nhau khi xếp ngẫu nhiên 6 viên bi là $\frac{2}{5}$

d) Người ta lấy thêm một hộp bi thứ hai gồm 6 viên bi đôi một khác nhau (2 viên bi màu xanh, 2 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng) và sắp xếp theo cách sau: Đầu tiên xếp hai viên bi xanh cạnh nhau, sau đó xếp ngẫu nhiên 4 viên bi còn lại vào các vị trí có thể. Một hộp được chọn (hộp thứ nhất hoặc hộp thứ hai) ngẫu nhiên với xác suất bằng nhau và từ hộp đó lấy ra một cách xếp. Nếu quan sát thấy hai viên bi màu vàng đứng cạnh nhau thì xác suất đó là cách xếp từ hộp thứ hai là $\frac{3}{11}$.

Lời giải

a) Đúng: Số cách xếp 6 viên bi khác nhau là $6! = 720$ cách

b) Đúng: Xác suất để hai viên bi màu xanh đứng cạnh nhau là: $P = \frac{2!.5!}{6!} = \frac{1}{3}$

c) Đúng: Gọi A là biến cố hai bi vàng đứng cạnh nhau, B là biến cố hai bi đỏ đứng cạnh nhau

Khi $P(B) = \frac{1}{3}$ (tương tự ý trên) và $P(AB) = \frac{4!.2!.2!}{6!} = \frac{2}{15}$. Vậy xác suất cần tính là:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

d) Sai: Gọi H_1 là biến cố chọn được hộp thứ nhất; H_2 là biến cố chọn được hộp thứ hai

Theo giả thiết, ta có: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

Xác suất quan sát thấy hai viên bi màu vàng cạnh nhau khi chọn hộp thứ hai

$$P(A|H_2) = \frac{4!.2!.2!}{5.2!.4!} = \frac{2}{5}$$

Ta có: $P(A) = P(A|H_1).P(H_1) + P(A|H_2).P(H_2)$ mà $P(A|H_1) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{11}{30}$

Vậy xác suất đó là cách xếp từ hộp thứ hai nếu quan sát thấy hai viên bi màu vàng đứng cạnh nhau là:

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2).P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{6}{11}$$

Bài toán 9: Cho một hộp bi thứ nhất đựng 6 viên bi đôi một khác nhau gồm: 2 viên bi màu xanh, 2 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng. Các viên bi được xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang.

a) Tổng số cách xếp 6 viên bi khác nhau thành một hàng ngang là 720 cách

b) Xác suất để hai viên bi màu xanh đứng cạnh nhau khi xếp ngẫu nhiên 6 viên bi là $\frac{1}{3}$

c) Xác suất để hai viên bi màu vàng đứng cạnh nhau, biết rằng hai viên bi màu đỏ đứng cạnh nhau khi xếp ngẫu nhiên 6 viên bi là $\frac{2}{5}$

d) Người ta lấy thêm một hộp bi thứ hai gồm 6 viên bi đôi một khác nhau (2 viên bi màu xanh, 2 viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu vàng) và sắp xếp theo cách sau: Đầu tiên xếp hai viên bi xanh cạnh nhau, sau đó xếp ngẫu nhiên 4 viên bi còn lại vào các vị trí có thể. Một hộp được chọn (hộp thứ nhất hoặc hộp thứ hai) ngẫu nhiên với xác suất bằng nhau và từ hộp đó lấy ra một cách xếp. Nếu quan sát thấy hai viên bi màu vàng đứng cạnh nhau thì xác suất đó là cách xếp từ hộp thứ hai là $\frac{3}{11}$.

Lời giải

a) Đúng: Số cách xếp 6 viên bi khác nhau là $6! = 720$ cách

b) Đúng: Xác suất để hai viên bi màu xanh đứng cạnh nhau là: $P = \frac{2!.5!}{6!} = \frac{1}{3}$

c) Đúng: Gọi A là biến cố hai bi vàng đứng cạnh nhau, B là biến cố hai bi đỏ đứng cạnh nhau

Khi $P(B) = \frac{1}{3}$ (tương tự ý trên) và $P(AB) = \frac{4!.2!.2!}{6!} = \frac{2}{15}$

Vậy xác suất cần tính là: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$

d) Sai: Gọi H_1 là biến cố chọn được hộp thứ nhất; H_2 là biến cố chọn được hộp thứ hai

Theo giả thiết, ta có: $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$

Xác suất quan sát thấy hai viên bi màu vàng cạnh nhau khi chọn hộp thứ hai

$$P(A|H_2) = \frac{4!.2!.2!}{5.2!.4!} = \frac{2}{5}$$

Ta có: $P(A) = P(A|H_1).P(H_1) + P(A|H_2).P(H_2)$ mà $P(A|H_1) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A) = \frac{11}{30}$

Vậy xác suất đó là cách xếp từ hộp thứ hai nếu quan sát thấy hai viên bi màu vàng đứng cạnh nhau là:

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2).P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{6}{11}$$

Bài toán 10: (Chuyên KHTN Hà Nội 2025) Một nhà máy có hai phân xưởng A và B tương ứng làm ra 60% và 40% sản phẩm của nhà máy. Tỷ lệ phế phẩm của hai phân xưởng A và B lần lượt là 1% và 2%. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy.

a) Nếu sản phẩm chọn ra thuộc phân xưởng A thì xác suất để nó không là phế phẩm là 0,98.

b) Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm và thuộc phân xưởng A là 0,006.

c) Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm là 0,014.

d) Nếu sản phẩm chọn ra là phế phẩm thì xác suất để nó thuộc phân xưởng A là $\frac{4}{7}$.

Lời giải

Gọi A, B lần lượt là biến cố chọn được sản phẩm thuộc phân xưởng A, B . Ta có $P(A) = 0,6$;
 $P(B) = 0,4$

Gọi P là biến cố chọn phải một sản phẩm là phế phẩm.

Tỉ lệ phế phẩm của phân xưởng A là 1% $\Rightarrow P(P|A) = 0,01$.

Tỉ lệ phế phẩm của phân xưởng B là 2% $\Rightarrow P(P|B) = 0,02$.

a) **Sai:** Nếu sản phẩm chọn ra thuộc phân xưởng A thì xác suất để nó không là phế phẩm là $P(\bar{P}|A) = 1 - P(P|A) = 0,99$.

b) **Đúng:** Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm và thuộc phân xưởng A là $P(A \cap P) = P(A) \cdot P(P|A) = 0,6 \cdot 0,01 = 0,006$.

c) **Đúng:** Xác suất để sản phẩm chọn ra là phế phẩm là tổng xác suất chọn được phế phẩm từ phân xưởng A và từ phân xưởng B: $P(P) = P(A) \cdot P(P|A) + P(B) \cdot P(P|B) = 0,6 \cdot 0,01 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,014$

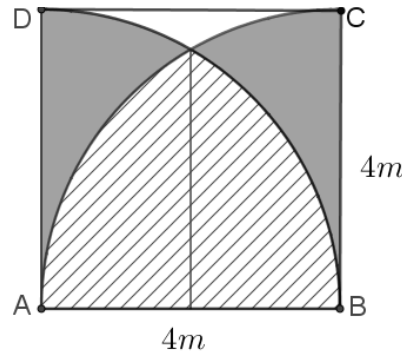
d) **Sai:** Áp dụng công thức Bayes

Nếu sản phẩm chọn ra là phế phẩm thì xác suất để nó thuộc phân xưởng A là
$$P(A|P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{0,006}{0,014} = \frac{3}{7}.$$

2. Phần trả lời ngắn

CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍCH PHÂN

Bài toán 1: Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4m$. Trên tám biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4m$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ. Chi phí để sơn phần gạch chéo là $150\,000$ đồng/ m^2 , chi phí sơn phần màu đen là $100\,000$ đồng/ m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là $250\,000$ đồng/ m^2



Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên (Đơn vị: triệu đồng và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)?

Lời giải

Gọi I là giao điểm của 2 cung tròn $AC; BD$. Chọn gốc tọa độ $A(0;0) \Rightarrow B(4,0)$

Xét cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$

$$\text{Phần diện tích gạch chéo } S = 2 \cdot \int_2^4 \sqrt{16 - x^2} dx = 16 \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

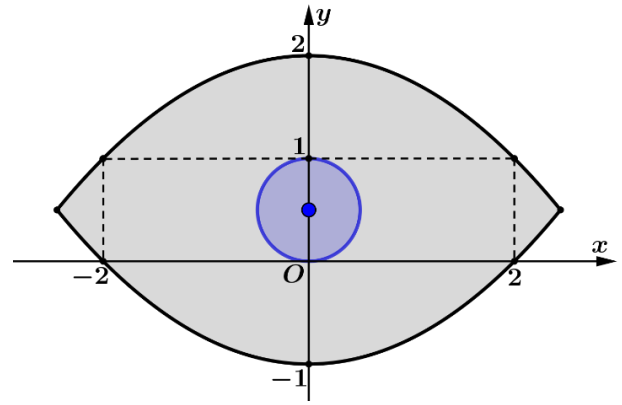
$$\text{Phần diện tích màu đen: } 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \pi \cdot 4^2 - \frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3} \right) = \frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3}$$

$$\text{Phần diện tích còn lại: } 16 - \left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} + \frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3} \right) = 16 - \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

Số tiền để sơn biển quảng cáo:

$$\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) \cdot 150\,000 + \left(\frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3} \right) \cdot 100\,000 + \left(16 - \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right) \cdot 250\,000 \approx 2,2 \text{ triệu đồng.}$$

Bài toán 2: Bạn An thực hiện thiết kế một logo hình con mắt cho một phòng khám nhãn khoa. Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các kích thước như hình vẽ dưới đây (phần được tô màu đen) và một hình tròn có bán kính bằng 0,5dm ở giữa là phần con ngươi (phần được tô màu xanh), đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet.



Biết rằng chi phí để sơn phần con ngươi hình tròn màu xanh là 25000 đồng/dm² và chi phí để sơn phần còn lại màu đen là 20000 đồng/dm². Chi phí để sơn logo trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Gọi phương trình parabol $y = f(x)$ là $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(2;1), (0;2), (-2;1)$.

Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases} \text{ nên } f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$$

Gọi phương trình parabol $y = g(x)$ là $g(x) = mx^2 + nx + p$ với $m \neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(-2;0), (0;-1), (2;0)$.

Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được
$$\begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ n = 0 \\ p = -1 \end{cases} \text{ nên } g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + 2 = \frac{1}{4}x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$

Diện tích hình tròn được sơn màu xanh là: $S_1 = \pi r^2 = \pi (0,5)^2 = 0,25\pi \text{ (dm}^2\text{)}$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là:

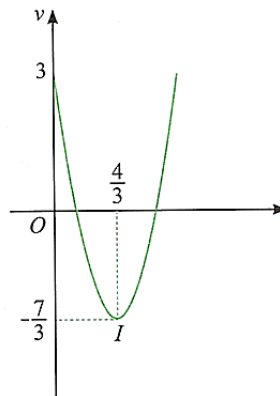
$$S_2 = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} |f(x) - g(x)| dx = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx$$

Diện tích phần sơn được tô màu đen là: $S_3 = S_2 - S_1 = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx - 0,25\pi$

Chi phí để sơn logo là:

$$T = 0,25\pi \cdot 25000 + \left(\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} \left| \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{4}x^2 - 1 \right) \right| dx - 0,25\pi \right) \cdot 20.000 = 200 \text{ nghìn đồng.}$$

Bài toán 3: Một vật chuyển động thẳng. Khi vật bắt đầu qua điểm O , người ta bắt đầu quan sát, đo đạc chuyển động của vật thì thấy vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t(s)$ là $v(t)(m/s)$, hàm vận tốc $v(t)$ có đồ thị phụ thuộc thời gian là một phần của đường parabol đỉnh $I\left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ như hình bên (với $t \geq 0$ và mốc tính thời gian là lúc bắt đầu quan sát chuyển động). Tính tổng quãng đường vật đi được từ lúc đầu đến lúc vật trở lại điểm O lần cuối cùng (kết quả tính bằng mét và làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 5,49.

Dựa vào đồ thị ta thấy

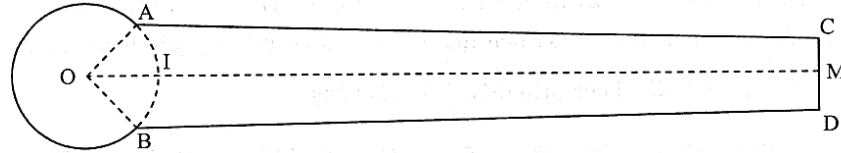
$$v(t) = at^2 + bt + c ; \begin{cases} c = 3 \\ \frac{-b}{2a} = \left(\frac{4}{3}\right) \\ a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + c = -\frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -8 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 8t + 3(m/s)$$

$$\Rightarrow \int v(t)dt = t^3 - 4t^2 + 3t + C \Rightarrow s(t) = t^3 - 4t^2 + 3t + C \text{ với } s(0) = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 - 4t^2 + 3t.$$

Tại các thời điểm vật qua O ứng với t thỏa mãn $s(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$

Do đó thời điểm cuối vật qua O là $t = 3(s)$. Nên tổng quãng đường vật đi được từ lúc đầu đến lúc vật trở lại điểm O lần cuối cùng $S = \int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^3 |3t^2 - 8t + 3| dt \approx 5,49(m)$.

Bài toán 4: Hoà sĩ thiết kế một micro có dạng khối tròn xoay, mặt cắt đứng chứa trục của khối tròn xoay có dạng như hình sau, trong đó $OA = OB = OI = 2cm$, $MC = MD = 1cm$, đường thẳng OM là đường trung trực của đoạn thẳng CD , $OM = 20cm$, $AOB = 90^\circ$.



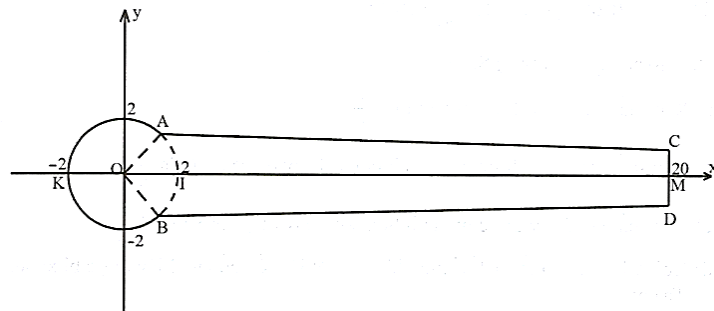
Thể tích của micro này là bao nhiêu cm^3 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 117.

Đặt hệ trục Oxy như hình vẽ, đơn vị của mỗi trục là 1 cm. Gọi $y = f(x)$ là đồ thị bao gồm cung nhỏ

KA và đoạn thẳng AC , trong đó $A(\sqrt{2}; \sqrt{2})$. $V = \pi \int_{-2}^{20} (f(x))^2 dx = \pi \int_{-2}^{\sqrt{2}} (f(x))^2 dx + \pi \int_{\sqrt{2}}^{20} (f(x))^2 dx$



Vì $A(\sqrt{2}; \sqrt{2}), C(20;1)$ nên phương trình đường thẳng AC là

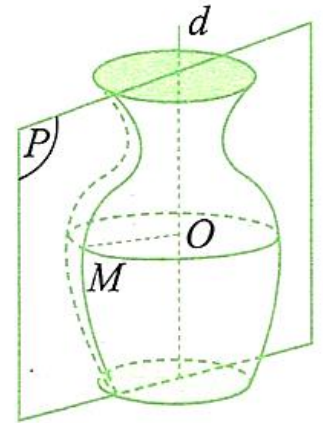
$$\frac{x-20}{\sqrt{2}-20} = \frac{y-1}{\sqrt{2}-1} \Leftrightarrow y-1 = (\sqrt{2}-1) \frac{x-20}{\sqrt{2}-20} \Leftrightarrow y = \frac{(1-\sqrt{2})x+19\sqrt{2}}{20-\sqrt{2}}$$

Phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 = 4$, hàm số có đồ thị cung nhỏ KA là

$$y = \sqrt{4-x^2}, x \in [-2; \sqrt{2}].$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-x^2})^2 dx + \pi \int_{\sqrt{2}}^{20} \left[\frac{(1-\sqrt{2})x + 19\sqrt{2}}{20-\sqrt{2}} \right]^2 dx \\ &= \pi \int_{-2}^{\sqrt{2}} (4-x^2) dx + \pi \int_{\sqrt{2}}^{20} \left[\frac{(1-\sqrt{2})x + 19\sqrt{2}}{20-\sqrt{2}} \right]^2 dx \approx 117 \text{ (cm}^3\text{)}. \end{aligned}$$

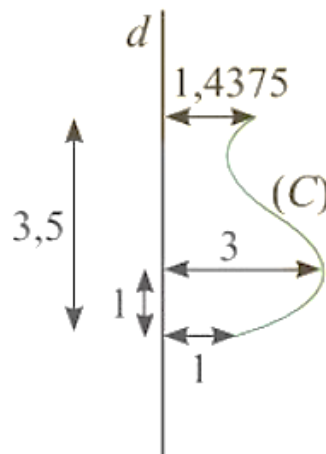
Bài toán 5: Xét phần đựng nước bên trong một lục bình có dạng mặt tròn xoay trong đó đường sinh là đường cong (C) quay quanh trục (d) như hình bên. Biết rằng (C) là đường cong bậc ba; chiều cao phần đựng nước là 35 cm ; bán kính đáy phần đựng nước là 10 cm ; bán kính miệng phần đựng nước là 14,375 cm ; chỗ rộng nhất của phần đựng nước có bán kính 30 cm ; độ cao của phần đựng nước tính từ đáy đến chỗ rộng nhất là 10 cm. Thể tích tối đa mà chiếc bình này đựng được là bao nhiêu lít? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)



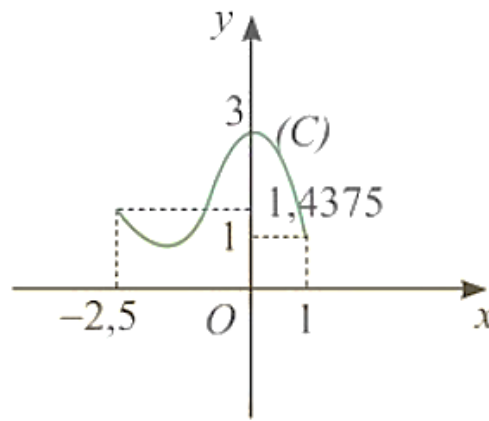
Lời giải

Trả lời: 49,1.

Đổi đơn vị về đềximét. Ta có thể minh hoạ đường sinh(C) và trục quay d như hình bên.



Gắn hệ trục như hình vẽ (trục quay d là trục hoành, trục tung cắt đường sinh tại điểm thuộc phần rộng nhất).



Đặt (C): $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dựa vào đồ thị ta thấy

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f(0) = 3 \\ f(1) = 1 \\ f(-2,5) = 1,4375 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 3 \\ a + b + c + d = 1 \\ -15,625a + 6,25b - 2,5c + d = 1,4375 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -0,5 \\ b = -1,5 \\ c = 0 \\ d = 3. \end{cases}$$

$$y = f(x) = -0,5x^3 - 1,5x^2 + 3.$$

Khi đó thể tích phần chứa nước chính là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay phần hình phẳng bị giới hạn bởi (C): $y = f(x)$, trục hoành, các đường thẳng $x = -2,5$; $x = 1$ quanh trục hoành. Do đó thể tích này bằng $V = \pi \int_{-2,5}^1 (-0,5x^3 - 1,5x^2 + 3)^2 dx \approx 49,1(l)$

Bài toán 6: Hệ thống lọc nước bể bơi vô cùng quan trọng khi tiến hành xây dựng công trình bơi lội để nguồn nước được làm sạch thường xuyên và giữ vệ sinh cho người bơi. Trong quá trình vận hành lọc nước thì lượng nước trong bể sẽ thay đổi theo thời gian. Lượng nước trong bể giảm nếu hệ thống đang xả nước bẩn ra khỏi bể và tăng nếu hệ thống đang cấp thêm nước sạch cho bể. Biết rằng 1 gallon gần bằng 3,785 lít, dung tích của bể là 1000 gallon và thời điểm 6 giờ sáng bể chứa 250 gallon nước. Hàm số $f(t)$ biểu thị cho tốc độ thay đổi lượng nước trong bể theo thời gian t giờ, từ

$$\text{thời điểm 6 giờ sáng đến 6 giờ chiều được cho bởi } f(t) = \begin{cases} 100t & \text{khi } 0 \leq t \leq 3 \\ 900 - 200t & \text{khi } 3 \leq t \leq 6 \\ 100t - 900 & \text{khi } 6 \leq t \leq 12 \end{cases} \text{ với mốc thời gian}$$

$t = 0$ tại thời điểm 6 giờ sáng. Hỏi ở thời điểm 6 giờ chiều thì trong bể chứa nhiều gallon nước ?

Lời giải

Đáp án: 700.

+) Gọi $F(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t)$

Vì $f(t)$ biểu thị cho tốc độ thay đổi lượng nước trong bể theo thời gian t nên $F(t)$ chính là lượng nước có trong bể theo thời gian t .

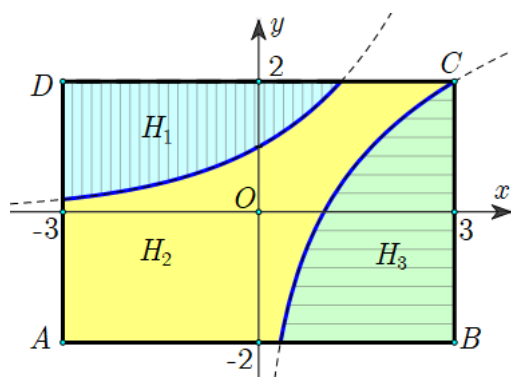
+) Lượng nước trong bể lúc 6 giờ sáng (ứng với $t=0$) là $F(0)=250$.

Lượng nước trong bể lúc 6 giờ chiều (ứng với $t=12$) là $F(12)$. Ta có

$$\int_0^{12} f(t)dt = F(12) - F(0) \Rightarrow F(12) = F(0) + \int_0^{12} f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow F(12) = 250 + \int_0^3 100t dt + \int_3^6 (900 - 200t)dt + \int_6^{12} (100t - 900)dt = 700 \text{ gallon.}$$

Bài toán 7: Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $6(m)$, $4(m)$ được bạn Hà trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y=x$ và chia thành ba phần (tham khảo hình vẽ bên). Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 được sơn màu vàng, phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Biết rằng mỗi hộp sơn các màu chỉ sơn được $3(m^2)$ tường, đồng thời giá của hộp sơn màu xanh da trời là 100.000 đồng/hộp, hộp sơn vàng là 140.000 đồng/hộp, hộp sơn xanh lá cây là 130.000 đồng/hộp. Tính giá tiền bạn Hà mua để sơn bức tường này? (đơn vị là triệu đồng và cửa hàng sơn chỉ bán số nguyên của hộp).



Lời giải

Đáp án: 1,15.

Do đồ thị của $f(x)=a^x$ và $g(x)=\log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x \Rightarrow a=b$

Mặt khác đồ thị của $y=\log_b x$ đi qua điểm $C(3;2) \Rightarrow b=\sqrt{3}$. Hai hàm số là $f(x)=(\sqrt{3})^x$ và $g(x)=\log_{\sqrt{3}} x$

Đồ thị của $f(x)$ cắt $y=2$ tại điểm $(\log_{\sqrt{3}} 2; 2)$ và đồ thị của $g(x)$ cắt $y=-2$ tại $(\frac{1}{3}; -2)$.

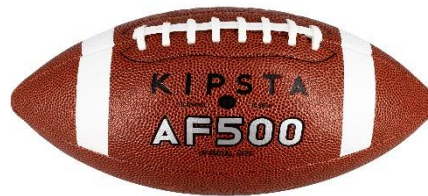
Diện tích của miền H_1 là: $S_1 = \int_{-3}^{\log_{\sqrt{3}} 2} (2 - \sqrt{3}^x) dx \approx 5,233$. Diện tích của miền H_3 là:

$S_3 = \int_{\frac{1}{3}}^3 (\log_{\sqrt{3}} x + 2) dx \approx 7,145$. Diện tích của miền H_2 là: $S_2 = 6 \times 4 - 5,233 - 7,145 = 11,622$.

Vậy cần dùng 2 hộp sơn màu xanh da trời, 3 hộp sơn màu xanh lá cây và 4 hộp sơn màu vàng.

Số tiền bạn Hà cần dùng mua sơn là: $T = 100.000 \times 2 + 130.000 \times 3 + 140.000 \times 4 = 1.150.000$ (đồng).

Bài toán 8: Một quả bóng bầu dục theo quy định được sử dụng trong giải bầu dục quốc gia có kích thước $28(cm)$ từ đầu này đến đầu kia và đường kính $17(cm)$ ở phần dày nhất (quy định có phép thay đổi một chút về các kích thước này) (*Nguồn: NFL*).



Hình dạng của một quả bóng bầu dục có kích thước nói trên có thể được tạo thành khi quay phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, trục hoành và các đường thẳng $x = -4$; $x = 24$, trong đó x tính bằng centimet (cm). Thể tích (đơn vị: cm^3 , kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) của quả bóng bầu dục có kích thước nói trên bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 3390



Ta thấy đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đi qua các điểm $(-4; 0)$, $(24; 0)$ và $\left(10; \frac{17}{2}\right)$ nên ta có hệ phương trình :

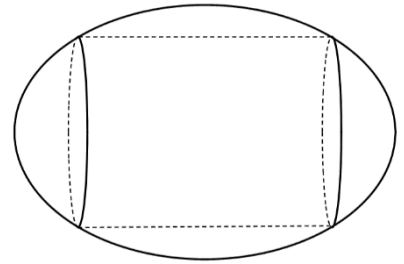
$$\begin{cases} (-4)^2 a + (-4)b + c = 0 \\ 24^2 a + 24b + c = 0 \\ 10^2 a + 10b + c = \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{17}{392} \\ b = \frac{85}{98} \\ c = \frac{204}{49} \end{cases}$$

Vậy thể tích của quả bóng bầu dục trên là:

$$V = \pi \int_{-4}^{24} \left(-\frac{17}{392}x^2 + \frac{85}{98}x + \frac{204}{49} \right)^2 dx = \frac{16284}{15} \pi \approx 3390 (cm^3)$$

Bài toán 9: Một quả trứng khủng long đồ chơi bằng nhựa có thiết diện qua trục lớn là một đường elip. Biết độ dài mỗi trục là 12 cm và 8 cm.

Bên trong quả trứng người ta cần thiết kế một chiếc hộp hình trụ để đựng các đồ chơi trẻ con như bóng đèn xanh đỏ, kẹo v.v...



Hỏi khối trụ như thế có thể tích tối đa bao nhiêu cm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải:

Gắn elip lên hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, elip có $2a = 12 \Rightarrow a = 6$; $2b = 8 \Rightarrow b = 4$.

Phương trình chính tắc elip (E) : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Đặt chiều cao và bán kính đáy hình trụ nội tiếp elip là h , r thì điểm tiếp

xúc $M\left(\frac{h}{2}; r\right)$ với $0 < h < 12$; $0 < r < 4$.

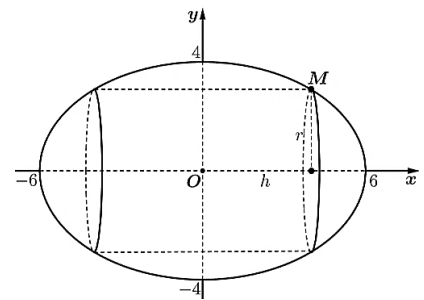
Điểm M thuộc (E) : $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{h}{2}\right)^2}{36} + \frac{r^2}{16} = 1$

$$\Rightarrow \frac{h^2}{144} + \frac{r^2}{16} = 1 \Rightarrow r^2 = 16 \left(1 - \frac{h^2}{144} \right).$$

Thể tích khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi 16 \left(1 - \frac{h^2}{144} \right) \cdot h = \pi \left(16h - \frac{h^3}{9} \right)$ hay $V = \pi \left(16h - \frac{h^3}{9} \right)$.

Ta có $V' = \pi \left(16 - \frac{h^2}{3} \right)$; $V' = 0 \Rightarrow 16 - \frac{h^2}{3} = 0 \Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \in (0; 12)$.

Giá trị lớn nhất của thể tích khối trụ là $V_{\max} = V(4\sqrt{3}) = \pi \left(16 \cdot 4\sqrt{3} - \frac{(4\sqrt{3})^3}{9} \right) \approx \boxed{232} \text{ cm}^3$



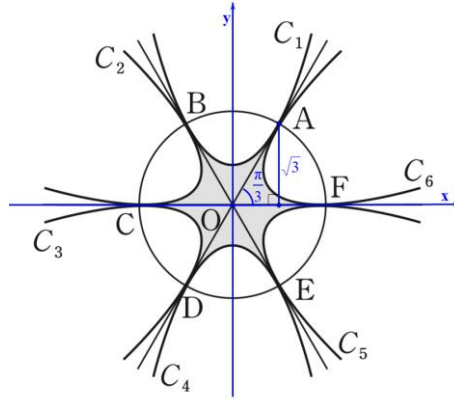
Bài toán 10: Cho đường tròn tâm O , bán kính bằng 2. Trên đường tròn, lấy 6 điểm chia đều đường tròn, lần lượt là A, B, C, D, E, F . Vẽ cung tròn C_1 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OA và OB , đi qua hai điểm A và B . Tương tự, vẽ cung tròn C_2 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OB và OC , đi qua hai điểm B và C . Tiếp tục bằng cách tương tự, ta vẽ các cung tròn C_3, C_4, C_5, C_6 tiếp xúc với các cặp đoạn thẳng liên tiếp tạo bởi các điểm trên.

Hỏi: Diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

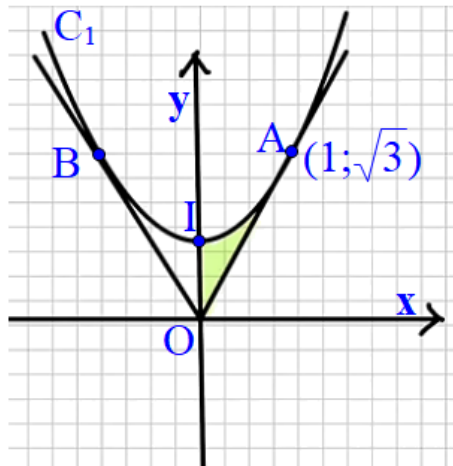
Trả lời: 3,46

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Ta dễ có được góc $AOF = \frac{\pi}{3}$ suy ra đường thẳng $OA: y = \sqrt{3}x$ do đó điểm $A(1; \sqrt{3})$

Để tiện tính toán: Ta xét riêng diện tích tô đậm được tạo bởi cung tròn C_1 với hai đoạn thẳng $OA; OB$



Dễ thấy được đường cong C_1 là đồ thị hàm số parabol đối xứng qua trục Oy . Do đó hàm số parabol đó có dạng: $y = ax^2 + b$ và đồ thị hàm số này đi qua điểm A, B .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ 2a=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ b=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } (C_1): y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

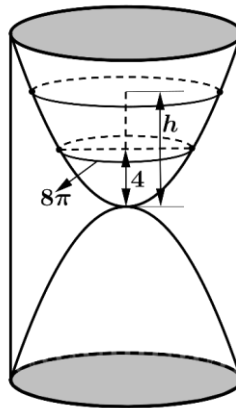
Khi đó diện tích tô đậm được tạo bởi cung tròn C_1 với hai đoạn thẳng $OA; OB$ là:

$$S_1 = 2 \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx$$

Suy ra diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là

$$S = 6S_1 = 12 \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x^2 - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx = 2\sqrt{3} \approx 3,46$$

Bài toán 11: Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với tốc độ $v(t) = 0,2t + 13$ (cm³/phút). Khi chiều cao của cát còn 4cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Gọi (P) là parabol phía trên. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho đỉnh O trùng với đỉnh của parabol và trục Oy là trục đối xứng của parabol. Khi chiều cao của cát là 4cm, chu vi đường tròn bề mặt cát

là 8π cm nên bán kính đường tròn là $r = \frac{8\pi}{2\pi} = 4$ cm

Vậy parabol (P) đi qua điểm $A(4;4)$, thay vào phương trình $y = ax^2 \Leftrightarrow 4 = a \cdot 4^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

Khi đó phương trình của parabol $(P): y = \frac{x^2}{4}$

Thể tích cát ban đầu bằng thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay nhánh phải của parabol (P) quanh trục Oy . Thể tích này cũng bằng lượng cát chảy xuống trong 20 phút.

Thể tích ban đầu là: $V = \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h 4y dy = 2\pi h^2$

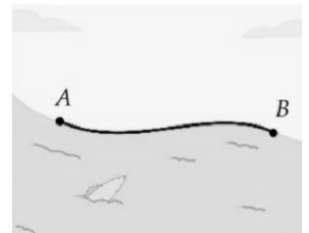
Lượng cát chảy ra trong 20 phút bằng: $V = \int_0^{20} v(t) dt = \int_0^{20} (0,2t + 13) dt = 300$

$$\text{Do đó } 2\pi h^2 = 300 \Leftrightarrow h^2 = \frac{300}{2\pi} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{150}{\pi}}$$

Chiều cao của mực cát ban đầu bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của một bên parabol, tức là $h = \frac{2}{3}H$ với H là chiều cao một bên của parabol.

Vậy chiều cao của khối trụ bên ngoài là: $l = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{150}{\pi}} = 21 \text{ cm.}$

Bài toán 12: Một phần của bề mặt phía trên của các gợn sóng của nước biển có hình dạng đồ thị hàm số bậc ba khi gắn hệ trục tọa độ Oxy . Biết rằng đồ thị hàm số bậc ba có các điểm cực trị lần lượt là $M(-2;1)$ và $N(0;1,2)$, đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét. Hai vị trí A và B có hoành độ lần lượt là -3 và 1 nằm trên đường cong của các gợn sóng đó. Tính độ dài đường cong AB (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). Biết rằng độ dài đường cong có phương trình $y = f(x)$ từ điểm $C(c; f(c))$ tới



điểm $D(d; f(d))$ với $c < d$ được tính bởi công thức $T = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Lời giải

Gọi hàm số bậc ba là $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Do $M(-2;1)$ và $N(0;1,2)$ là hai điểm cực trị nên $\begin{cases} f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} f(-2) = 1 \\ f(0) = 1,2 \end{cases}$

Thay vào tìm được $a = -0,05; b = -0,15; c = 0; d = 1,2$ suy ra $f'(x) = -0,15x^2 - 0,3x$

Vậy độ dài đường cong AB là: $l_{AB} = \int_{-3}^1 \sqrt{1 + (-0,15x^2 - 0,3)^2} dx \approx 4,07$ mét.

Bài toán 13: Một công viên sinh thái muốn bố trí một **mảnh vườn hoa** nhỏ. Cụ thể bối cảnh của công viên đã được đo đạc như sau: Đường đi lát gạch chạy thẳng, lấy làm ranh dưới của mảnh vườn.

Hàng rào uốn cong là đồ thị parabol $y = \frac{1}{2}x^2$, biết đồ thị parabol này tiếp xúc với đường đi tại tọa độ

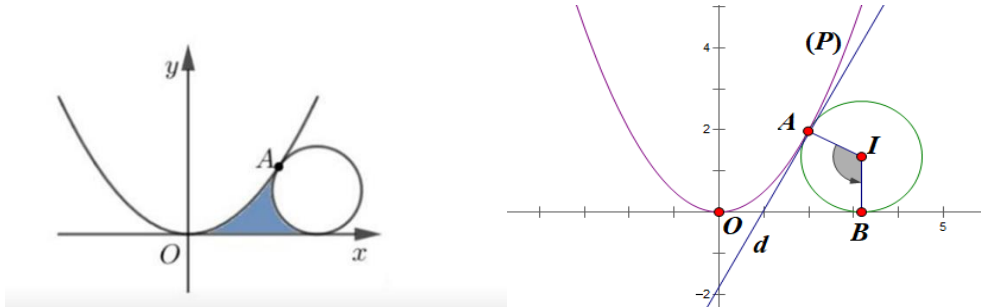
đỉnh của nó. Ao cá là đường tròn có bán kính bằng 1m tiếp xúc với đường đi đồng thời có chung một điểm duy nhất với hàng rào. Khu vực **mảnh vườn hoa** nằm giữa hàng rào, lối đi và ao cá (màu xanh trong hình minh họa). Để hỗ trợ cho việc chuẩn bị vật tư trang trí, hãy tính diện tích mảnh vườn hoa đó bằng bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 0,9

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Gọi $A\left(a; \frac{a^2}{2}\right) \in (P)$, $I(b;1)$ là tâm của (C) , $(b > a > 0)$.

$B(b;0) = (C) \cap Ox$, (d) là tiếp tuyến của (P) tại A .

$\overline{AI} = \left(b-a; \frac{2-a^2}{2}\right)$, hệ số góc của AI là: $k_1 = \frac{2-a^2}{2(b-a)}$, hệ số góc của (d) là: $k_2 = a$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AI = 1 \\ k_1 k_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-a)^2 + \left(\frac{2-a^2}{2}\right)^2 = 1 \\ a \cdot \frac{2-a^2}{2(b-a)} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

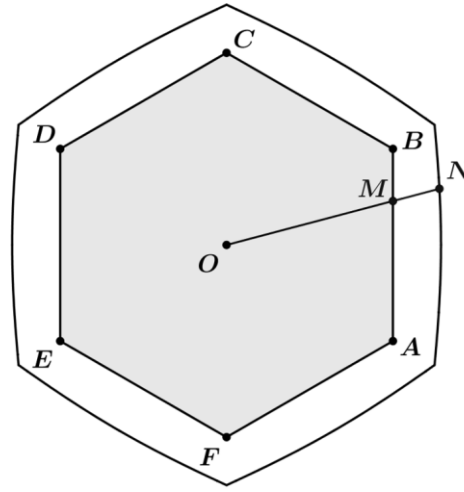
Do đó AI có phương trình là: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2}$. Mà $AB = \sqrt{3} \Rightarrow AIB = \frac{2\pi}{3}$. Diện

tích hình phẳng giới hạn bởi (P) , (C) , Ox là: $S = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{2} dx + \int_{\sqrt{3}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5}{2}\right) dx - S_{\text{quat } AIB}$

$$= \frac{x^3}{6} \Big|_0^{\sqrt{3}} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{5}{2}x\right) \Big|_{\sqrt{3}}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{3} = \frac{27\sqrt{3}-8\pi}{24} \approx 0,9 \text{ m}^2.$$

Bài toán 14: Người ta tạo một lối đi xung quanh một sân chơi hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O giới hạn bởi các cạnh của lục giác và một đường cong kín (L) (như hình vẽ). Nếu điểm M thuộc

cạnh của lục giác và tia OM cắt (L) tại điểm N thì ta luôn có $MN = 2\text{m}$. Biết rằng $OA = 8\text{m}$. Diện tích của lối đi đó bằng bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Độ dài lục giác đều là $a = OA = 8\text{m}$ nên suy ra $S_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} (\text{m}^2)$.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho tọa độ các đỉnh là $O(0;0), A(4\sqrt{3};-4), B(4\sqrt{3};4)$ và đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là mét. Xét điểm M thuộc đoạn thẳng AB (vì tính đối xứng ta sẽ nhân lên sáu lần kết quả này)

Ta có: $M(4\sqrt{3};m) \in [AB], N(x;y)$, trong đó $-4 \leq m \leq 4, x > 4\sqrt{3}$, suy ra $ON = \sqrt{x^2 + y^2}$

Khi đó: $OM = ON - MN = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên trục hoành.

Theo định lí Thales, ta có: $\frac{ON}{OM} = \frac{OK}{OH} = \frac{NK}{MH} \Rightarrow \frac{x}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2} = \frac{t}{t - 2}$, đặt $t = \sqrt{x^2 + y^2}$

Phương trình tương đương: $4\sqrt{3}t = x(t - 2) \Leftrightarrow t(x - 4\sqrt{3}) = 2x \Leftrightarrow t = \frac{2x}{x - 4\sqrt{3}}$

Mà $t = \sqrt{x^2 + y^2}$ nên suy ra $(L): y = \pm \sqrt{t^2 - x^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{2x}{x - 4\sqrt{3}}\right)^2 - x^2}$

Khi đó: $OA: y = -\frac{x}{\sqrt{3}} \cap (L) = P(5\sqrt{3}; -5)$ và $OB: y = \frac{x}{\sqrt{3}} \cap (L) = Q(5\sqrt{3}; 5)$.

Và $(L) \cap Ox \Leftrightarrow \frac{2x}{x - 4\sqrt{3}} = \pm x \Leftrightarrow x = 2 + 4\sqrt{3} \Rightarrow (L) \cap Ox = R(2 + 4\sqrt{3}; 0)$.

Ta có: $S_{\triangle OPQ} = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot OP^2 \cdot \sin 60^\circ = 25\sqrt{3} (\text{m}^2)$.

Diện tích của lối đi là: $6 \left[25\sqrt{3} + \int_{5\sqrt{3}}^{2+4\sqrt{3}} 2\sqrt{\left(\frac{2x}{x-4\sqrt{3}}\right)^2 - x^2} dx \right] - 96\sqrt{3} \approx 103,903 \approx 104 \text{ (m}^2\text{)}$

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG OXYZ

Bài toán 1: Hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System) là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian $Oxyz$, tỉ lệ dài trên các trục là 10km tính cho một đơn vị tỉ lệ trên mỗi trục, cho bốn vệ tinh có tọa độ lần lượt là $A(-1; 2; -1), B(1; 4; 0), C(3; 0; 9), D(7; 10; -1)$ đang tiến hành theo dõi vật thể M (coi là một chất điểm). Các vệ tinh dùng sóng điện từ có tần số 1MHz. Ở một thời điểm cả 4 vệ tinh bắn tín hiệu về M thì sau nhận được tín hiệu trả về ngay sau đó trong những khoảng thời gian là $t_A = 0,4 \text{ ms}, t_B = 0,2 \text{ ms}, t_C = \frac{2}{3} \text{ ms}, t_D = 0,4 \text{ ms}$. Tính khoảng cách từ M đến O (Biết rằng vận tốc của sóng điện từ bằng vận tốc ánh sáng $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ và kết quả tính được làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Từ vệ tinh A sẽ phát tín hiệu đến điểm M và sẽ thu tín hiệu quay về A

Từ đó ta có thể suy ra được: $2AM = c \cdot t_A \Rightarrow AM = \frac{c \cdot t_A}{2}$. Do đó $AM = \frac{c \cdot t_A}{2} = \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{2} = 60000 \text{ m} = 60 \text{ km}$ và ta quy đổi trong hệ trục $Oxyz$ thì ta có $AM = 6$.

Tương tự: $BM = 3, CM = 10, DM = 6$.

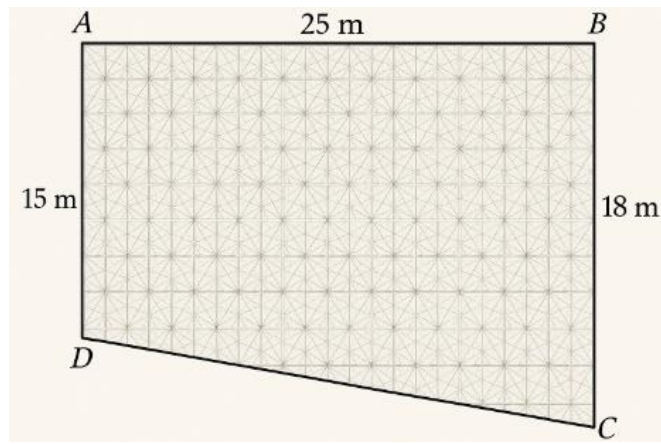
Tại thời điểm bốn vệ tinh bắn tín hiệu về điểm M . Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 + (b-2)^2 + (c+1)^2 = 36 & (1) \\ (a-1)^2 + (b-4)^2 + c^2 = 9 & (2) \\ (a-3)^2 + b^2 + (c-9)^2 = 100 & (3) \\ (a-7)^2 + (b-10)^2 + (c+1)^2 = 36 & (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2)-(1): -4a - 4b - 2c = -38 \\ (3)-(1): -8a + 4b - 20c = -20 \\ (4)-(1): -14a - 14b = -144 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta tìm được $a=3, b=6, c=1 \Rightarrow M(3; 6; 1)$

Vậy khoảng cách từ M đến O là: $\sqrt{(3-0)^2 + (6-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{46} \approx 6,78$.

Bài toán 2: Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ.

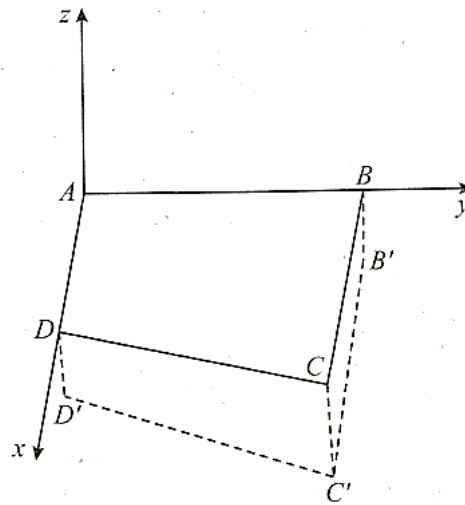


Bước đầu chúng được lấy "thăng bằng" để có cùng độ cao so với mặt đất, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25m, AD = 15m, BC = 18m$. Do yêu cầu kỹ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D lần lượt xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10cm, a\text{ cm}, 6\text{ cm}$ tương ứng sao cho bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng. Tìm giá trị của a .

Lời giải

Đáp án: 17,2.

Đổi: $25m = 2500cm; 15m = 1500cm; 18m = 1800cm$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: O trùng A , tia Ox trùng AD ; tia Oy trùng AB .

Khi đó: $A(0;0;0), B(0;2500;0), C(1800;2500;0), D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D lần lượt xuống thấp hơn so với độ cao ở A là: $10cm, a\text{ cm}, 6\text{ cm}$ tương ứng thì ta có các điểm mới: $B'(0;2500;-10), C'(1800;2500;-a), D'(1500;0;-6)$.

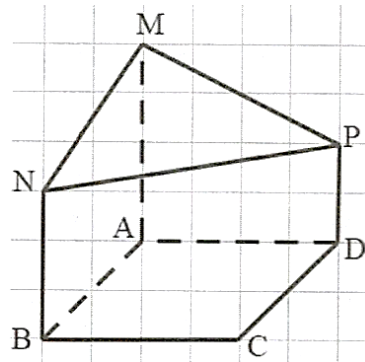
Theo bài ra có bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng.

Vector pháp tuyến của mặt phẳng $(AB'D')$ là $\vec{n} = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (1;1;250)$.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D')$ là: $x + y + 250z = 0$.

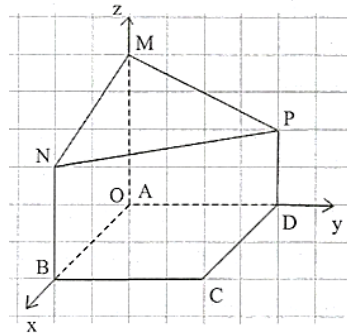
Vì $C'(1800; 2500; -a) \in (AB'D')$ nên ta có: $1800 + 2500 - 250a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$. Vậy $a = 17,2$.

Bài toán 3: Một phần thiết kế của một công trình đang xây dựng có dạng như hình bên, trong đó $ABCD$ là hình vuông cạnh $6m$, AM, BN, DP cùng vuông góc với $(ABCD)$, $AM = 4m$, $BN = 3m, DP = 2m$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (MNP) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ) là n° với n là số nguyên dương. Giá trị của n là bao nhiêu?



Lời giải

Trả lời: 20.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ với đơn vị của mỗi trục là mét, $A(0;0;0), B(6;0;0), D(0;6;0), M(0;0;4), N(6;0;3), P(0;6;2)$. Phương trình mặt phẳng (MNP) là $x + 2y + 6z - 24 = 0$, vector pháp tuyến của (MNP) là $\vec{n} = (1; 2; 6)$. $(ABCD)$ có vector pháp tuyến $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\cos n^\circ = \cos((ABCD), (MNP)) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{6\sqrt{41}}{41}. \text{ Suy ra } n = 20.$$

Bài toán 4: Một bể cá đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB = 6$ (dm), $AD = 8$ (dm) và cạnh bên bằng 10 (dm). Một chú cá con bơi theo những đoạn thẳng từ điểm G đến chạm mặt đáy của hồ, rồi từ điểm đó bơi đến vị trí điểm M là trung điểm của AF được mô hình hóa như hình vẽ sau:

giây, độ cao của máy bay so với mặt đất giảm 400 m. Hỏi sau 25 giây nữa, khoảng cách từ sân bay tới máy bay là bao nhiêu km, biết rằng trong suốt quá trình bay này, máy bay có đi qua điểm có tọa độ $(80;105;113)$?

Lời giải

Đáp án: 16,8

Do máy bay bay trên đường thẳng đi qua hai điểm $(200;70;118)$ và $(80;105;113)$ nên quỹ đạo bay

$$\text{của máy bay là đường thẳng có phương trình: } \begin{cases} x = 200 - 24t \\ y = 70 + 7t \\ z = 118 - t \end{cases}$$

Sau 50 giây, độ cao của máy bay giảm 400 m, tức là cao độ của máy bay giảm đi 4. Do máy bay bay với vận tốc không đổi nên sau 25 giây, độ cao của máy bay sẽ giảm đi thêm 200 m, tức là cao độ giảm đi thêm 2. Khi đó, tại thời điểm này, cao độ của máy bay là $118 - 4 - 2 = 112$.

Xét phương trình $118 - t = 112 \Leftrightarrow t = 6$. Khi đó, sau 75 giây, tọa độ của máy bay là:

$$\begin{cases} x_0 = 200 - 24.6 = 56 \\ y_0 = 70 + 7.6 = 112 \\ z_0 = 118 - 6 = 112 \end{cases}$$

Khoảng cách từ sân bay đến máy bay khi đó là $S = \sqrt{5600^2 + 11200^2 + 11200^2} = 16800(\text{m})$

Bài toán 6: Một đội kỹ thuật đang triển khai hệ thống **khảo sát tại khu vực địa hình có nhiệm vụ phóng xạ**. Để duy trì kết nối giữa trạm chỉ huy $A(-1;0;0)$ và robot tự hành $B(2;3;4)$, người ta cần đặt hai thiết bị tiếp sóng nhỏ tại các điểm M và N để truyền tín hiệu trung gian. Khu vực cho phép đặt thiết bị tiếp sóng phải nằm trong vùng giao thoa tín hiệu giữa hai trạm phát sóng vệ tinh, mỗi trạm phát tín hiệu theo dạng cầu:

- Trạm 1 phủ vùng tín hiệu theo mặt cầu: $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$

- Trạm 2 phủ vùng tín hiệu theo mặt cầu: $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$

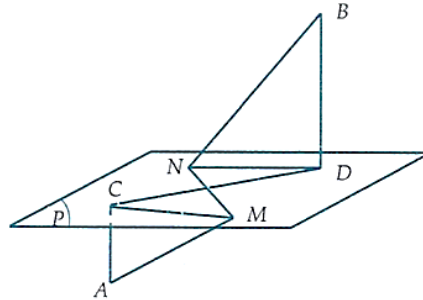
Hai thiết bị tiếp sóng M, N phải được đặt trong mặt phẳng chứa giao tuyến của hai vùng phủ sóng này để đảm bảo tín hiệu mạnh nhất. Để tối ưu hóa chi phí và thiết bị, khoảng cách giữa hai điểm tiếp sóng $MN = 1$ (đơn vị độ dài). Khi đó tổng quãng đường truyền tín hiệu $AM + BN$ nhỏ nhất bằng bao nhiêu (đơn vị độ dài)?

Lời giải

Trả lời: 5

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$ và $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0$. Xét M, N là hai điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ bằng bao nhiêu?"

Khi đó ta giải quyết bài toán như sau:



$$\text{Xét hệ } \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $x = 0$ ((P) chính là mặt phẳng Oyz).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P) .

Suy ra $AC = 1, BD = 2, CD = 5$.

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$,

ta được $AM + BN = \sqrt{AC^2 + CM^2} + \sqrt{BD^2 + DN^2} \geq \sqrt{(AC + BD)^2 + (CM + DN)^2} \geq \sqrt{9 + (CM + DN)^2}$.

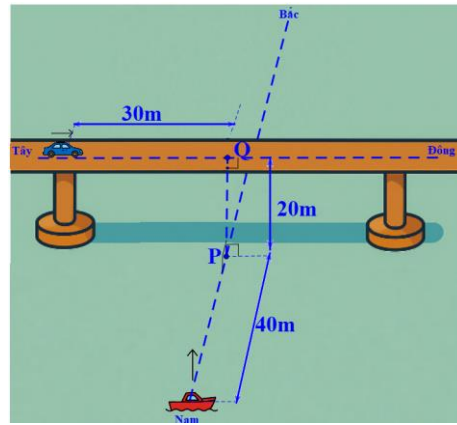
Lại có $CM + MN + ND \geq CD = 5$ nên suy ra $CM + ND \geq 4$

Do đó $AM + BN \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM} = \frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0; \frac{4}{5}; \frac{16}{15}\right)$ và

$N\left(0; \frac{7}{5}; \frac{28}{15}\right)$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là 5.

Bài toán 7: Một chiếc thuyền đang chuyển động đều với vận tốc 10 m/s theo hướng từ Nam lên Bắc trên mặt hồ. Trên cây cầu nằm cách mặt hồ 20m theo phương thẳng đứng, có một chiếc ô tô chuyển động đều với vận tốc 20m/s theo hướng từ Tây sang Đông.



Như hình vẽ, tại thời điểm hiện tại, thuyền ở vị trí cách điểm P (nằm dưới cầu) 40 m theo phương Nam, còn ô tô ở vị trí cách Q (trên cầu) 30 m theo phương Tây.

(Bỏ qua kích thước của thuyền và ô tô; đoạn thẳng PQ luôn vuông góc với hướng chuyển động của cả thuyền và ô tô)

Hỏi: Khoảng cách giữa thuyền và ô tô đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Trả lời: 30

Chọn hệ tọa độ như sau trên mặt phẳng ngang (trục x hướng Đông, trục y hướng Bắc, gốc O tại điểm P ngay trên mặt nước, bên dưới điểm Q trên cầu):

- Điểm B_1 là vị trí thuyền lúc $t = 0$ có tọa độ $(0; -40; 0)$ vì thuyền cách P 40m theo phương Nam
- Điểm C_1 vị trí ô tô lúc $t = 0$ có tọa độ $(-30; 0; 20)$ vì ô tô cách Q 30m về phía Tây và cao 20m so với mặt nước.

Khi t giây trôi qua:

- Thuyền đi lên Bắc với vận tốc $10m/s \Rightarrow$ vị trí $B(t) = (0; -40 + 10t; 0)$
- Ô tô chạy về Đông với vận tốc $20m/s \Rightarrow$ vị trí $C(t) = (-30 + 20t; 0; 20)$.

Khoảng cách bình phương giữa thuyền và ô tô là

$$D^2(t) = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = (-30 + 20t)^2 + (0 - (-40 + 10t))^2 + (20 - 0)^2.$$

$$\text{Do đó } D^2(t) = 400t^2 - 1200t + 900 + 100t^2 - 800t + 1600 + 400 = 500t^2 - 2000t + 2900.$$

$$\text{Hàm } D^2(t) \text{ là hàm bậc hai nên đạt cực tiểu tại } t_0 = \frac{-(-2000)}{2 \cdot 500} = \frac{2000}{1000} = 2 \text{ (giây).}$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất: } D_{\min}^2 = 500 \cdot (2)^2 - 2000 \cdot 2 + 2900 = 2000 - 4000 + 2900 = 900 \rightarrow D_{\min} = \sqrt{900} = 30(m).$$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất là 30m.

Bài toán 8: (Sở Hà Tĩnh 2025) Trạm tàu cứu hộ được đặt tại vị trí $A(5; 0; 0)$ trên một hòn đảo nhỏ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục được tính bằng km), được sử dụng làm trạm cứu hộ,

cứu nạn trên biển. Tàu du lịch B đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường được mô tả

bởi đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=3-2t \\ z=0 \end{cases}$. Tàu chở hàng C đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến

đường vận tải được mô tả bởi đường thẳng $d_2: \begin{cases} x=2-s \\ y=9+s \\ z=0 \end{cases}$. Do thời tiết xấu, nên hai tàu B và C gặp

sự cố và cần được tiếp cận khẩn cấp. Trạm cứu hộ điều một tàu cứu hộ xuất phát từ A để lần lượt tiếp cận tàu du lịch B trước, sau đó đến tàu chở hàng C . Xét vị trí tối ưu của tàu du lịch B dừng lại và tàu chở hàng C dừng lại sao cho tổng quãng đường tàu cứu hộ cần đi $P = AB + BC + CA$ là nhỏ nhất. Khi đó $P_{\min} = \sqrt{a}(km)$, hãy tính $a + 2025$?

Lời giải

Trả lời: 2189

Nhận xét: Đối với các bài toán thực tế này, trước khi giải ta nên chuyển bài toán về thuần Oxyz sau đó giải cho đơn giản và đỡ rối hơn!

Xét bài toán trong mặt phẳng Oxy (do tất cả các điểm, đường đều có $z=0$). Gọi

$$A(5,0), \quad d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=3-2t \end{cases}, \quad d_2: \begin{cases} x=2-s \\ y=9+s \end{cases}$$

Ta cần tìm hai điểm $B \in d_1$ và $C \in d_2$ sao cho $P = AB + BC + CA$ nhỏ nhất.

Gọi $A_1; A_2$ lần lượt là điểm đối xứng của A qua đường thẳng $d_1; d_2$.

Dễ dàng tìm được tọa độ điểm $A_1; A_2$ lần lượt là: $(1; -2); (11; 6)$. Khi đó vì tính chất đối xứng cho nên:

$$AB = A_1B; AC = A_2C, \text{ như vậy: } P = AB + BC + CA = A_1B + BC + A_2C \geq A_1A_2 = \sqrt{164}$$

Do đó $a = 164$ và $a + 2025 = 164 + 2025 = 2189$.

Bài toán 9: (Cụm chuyên môn số 3 - Đắc Lắc 2025) Trong không gian ba chiều Oxyz, tọa độ các khu vực được xác định như sau:

Khu vực $A(20;30;0)$ nằm trên mặt đất, cách trung tâm thành phố 2 km ;

Khu vực $B(70;50;40)$ nằm trên tòa nhà cao tầng và ở độ cao 40 m ;

Khu vực $C(50;80;70)$ nằm trên một đỉnh đồi ở độ cao 70 m.

Gọi vị trí lắp đặt trạm phát sóng là $D(a;b;c)$ sao cho khoảng cách từ D đến ba khu vực kể trên là bằng nhau và có khoảng cách đến chúng là nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$. (Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải**Trả lời: 120**

Thông qua bài toán ta hiểu được $A, B, C \in (P)$ và $A, B, C \in (D, R)$ (đường tròn tâm D)

$$\text{Ta có } \begin{cases} (a-20)^2 + (b-30)^2 + (c-0)^2 = R^2 \\ (a-70)^2 + (b-50)^2 + (c-40)^2 = R^2 \\ (a-50)^2 + (b-80)^2 + (c-70)^2 = R^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + 2b + 4c = 385 \\ 3a + 5b + 7c = 625 \end{cases} (*)$$

$$\overrightarrow{AB} = (50; 20; 40), \overrightarrow{AC} = (30; 50; 70) \Rightarrow \overrightarrow{n_{(P)}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-6; -23; 19)$$

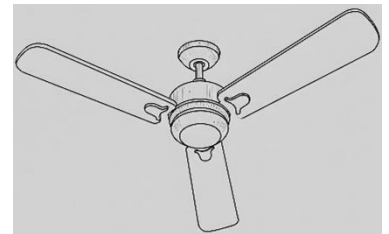
Vậy phương trình mặt phẳng (P) qua $A(20; 30; 0)$ là

$$-6(x-20) - 23(y-30) + 19(z-0) = 0 \Leftrightarrow 6x + 23y - 19z - 810 = 0 (**)$$

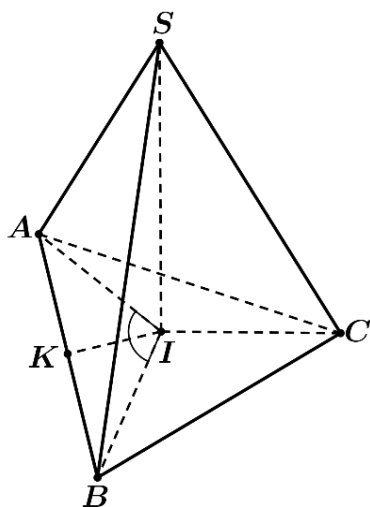
Vì yêu cầu khoảng cách đến các điểm là nhỏ nhất cho nên $D \in (P)$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ ta được hệ: } \begin{cases} 5a + 2b + 4c = 385 \\ 3a + 5b + 7c = 625 \\ 6a + 23b - 19c = 810 \end{cases} \text{ . Vậy: } T = a + b + c \approx 120.$$

Bài toán 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (mỗi đơn vị trên trục tọa độ dài 1cm) được đặt một góc trong một căn phòng. Có một cây quạt trần có ba cánh quạt và mỗi cánh cách đều nhau (minh họa như hình vẽ bên). Gọi $A(-10; -15; 300)$ và $B(12; 20; 300)$ là hai trong ba đỉnh



của cánh quạt trần. Chiều cao của ống treo với hộp điện cánh quạt gắn vào trần nhà là 50 cm và đỉnh $S(a; b; c)$ với $a > 0$ là giao điểm giữa trần nhà và ống treo cánh quạt. Tính $T = a - b + c$. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

So $SI \perp (ABC)$ nên $z_s = 300 + 50 = 350$ nên $S(a; b; 350)$ và $I(a; b; 300)$

Do ba cánh quạt cùng nằm trên một mặt phẳng $z = 300$ nên ta chỉ xét các yếu tố trên cùng mặt phẳng tọa độ (bỏ qua yếu tố cao độ)

Gọi K là trung điểm của AB thì $K\left(1; \frac{5}{2}\right)$ và $\overrightarrow{AB} = (22; 35)$

Vector $\overrightarrow{KI} \parallel (35; -22)$ nên $\overrightarrow{KI} = k(35; -22)$ mà

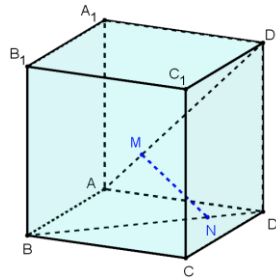
$$KI = AK \cdot \cot 60^\circ = \frac{AK}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1709}{12}}$$

$$\text{Do vậy } |k(35; -22)| = \sqrt{\frac{1709}{12}} \Leftrightarrow |k| = \frac{\sqrt{\frac{1709}{12}}}{\sqrt{35^2 + (-22)^2}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \Rightarrow k = \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_I = a = x_K + 35k \\ y_I = b = y_K - 22k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + 35k \\ b = 2 - 22k \end{cases} \text{ mà do } a > 0 \Leftrightarrow 1 + 35k > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{35} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{12}}$$

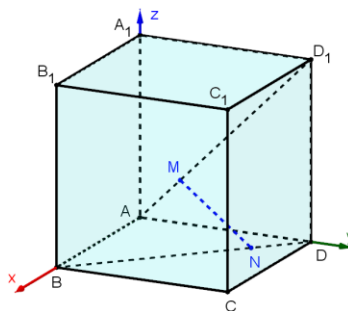
$$\text{Từ đó } \begin{cases} a = 1 + 35k \\ b = 2 - 22k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 + \frac{35}{\sqrt{12}} \\ b = 2 - \frac{22}{\sqrt{12}} \end{cases} \text{ nên } T = a - b + c = \left(1 + \frac{35}{\sqrt{12}}\right) - \left(2 - \frac{22}{\sqrt{12}}\right) + 350 \approx 365.$$

Bài toán 11: Một kỹ sư thiết kế mô hình trang trí cho một sân khấu nổi có dạng hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với độ dài các cạnh bằng 5m. Để tạo ra nét độc đáo cho sân khấu, người kỹ sư muốn thiết kế một dàn đèn ánh sáng nổi từ một điểm M trên đoạn thẳng AD_1 xuống điểm N trên đoạn thẳng BD thỏa mãn $AM = ND$. Dàn đèn ánh sáng có chiều dài ngắn nhất là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp số: 2,89



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với điểm A , B thuộc tia Ox , D thuộc tia Oy , A_1 thuộc tia Oz . Đặt $AM = DN = x\sqrt{2}$ thì $M(0; x; x)$ và $N(x; 5-x; 0)$. Do đó $MN^2 = 6x^2 - 20x + 25$.

$$\text{Từ đó tìm được } \min MN = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Bài toán 12: Trong không gian $Oxyz$, một khinh khí cầu ở tọa độ $A(-16; -10; 10)$ bắt đầu bay với véc tơ vận tốc không đổi $\vec{v}(4; 3; -1)$ (đơn vị vận tốc là km/h) và dự kiến bay trong thời gian 10 giờ. Biết trạm kiểm soát không lưu đặt ở vị trí gốc tọa độ O kiểm soát được các vật thể cách trạm một khoảng tối đa bằng 12 km. Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là bao nhiêu phút?

Lời giải

Trả lời: 240.

$\vec{OA} = (-16; -10; 10) \Rightarrow OA = |\vec{OA}| = 2\sqrt{114} \approx 21,35(km)$. Khinh khí cầu bay theo hướng của véc-tơ $\vec{v}(4; 3; -1)$, do đó vị trí của máy bay ở vị trí M thì $\vec{OM} = t\vec{v}, (0 \leq t \leq 10)$. Suy ra $M(4t-16; 3t-10; -t+10), (0 \leq t \leq 10), t$ (giờ).

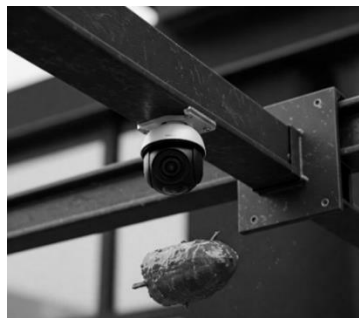
Theo bài ra $OM \leq 12 \Leftrightarrow (4t-16)^2 + (3t-10)^2 + (-t+10)^2 \leq 144 \Leftrightarrow 26t^2 - 208t + 312 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 6$.

Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là 4 (giờ) = 240 (phút).

Bài toán 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một camera an ninh có góc quan sát ngang

là 120° được gắn trên thanh xà là một đường thẳng có phương trình $d: \begin{cases} x = t \\ y = -2t (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 \end{cases}$. Ba thiết bị

được đặt tại các vị trí $A(1; 2; 0), B(1; 8; 0)$ và $C(7; 2; 0)$. Biết rằng có một vị trí trên thanh xà d sao cho tổng bình phương khoảng cách từ vị trí đó đến cả ba thiết bị là nhỏ nhất và camera vẫn quan sát được cả ba thiết bị. Tính tổng bình phương khoảng cách nhỏ nhất đó.



Lời giải

Gọi $M(t; -2t; 0)$ là vị trí gắn camera quan sát trên thanh xà

Các thiết bị được đặt tại $A(1; 2; 0), B(1; 8; 0)$ và $C(7; 2; 0)$. Khoảng cách từ M đến các điểm này là:

$$MA^2 = 5t^2 + 6t + 5; MB^2 = 5t^2 + 30t + 65; MC^2 = 5t^2 - 6t + 53$$

Xét hàm số $d(t)$ là tổng bình phương khoảng cách từ M đến A, B, C , ta có:

$$d(t) = 15t^2 + 30t + 123 \text{ có } d'(t) = 30t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

Khi đó vị trí của camera là $M(-1; 2; 0)$ suy ra $\overrightarrow{MA} = (2; 0; 0); \overrightarrow{MB} = (2; 6; 0); \overrightarrow{MC} = (8; 0; 0)$

$$\cos(\angle AMB) = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle AMB \approx 51^\circ; \cos(\angle BMC) = \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MB}| \cdot |\overrightarrow{MC}|} = \frac{2}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle BMC \approx 51^\circ$$

$$\cos(\angle AMC) = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MC}|} = 1 \Rightarrow \angle AMC = 0^\circ \text{ suy ra } A, M, C \text{ thẳng hàng}$$

Như vậy, góc lớn nhất giữa hai thiết bị quan sát từ M đều gần bằng 51° và luôn nhỏ hơn 120° nên camera có thể quan sát được cả ba thiết bị.

Vậy tổng bình phương khoảng cách nhỏ nhất là: $d(-1) = 15 \cdot (-1)^2 + 30 \cdot (-1) + 123 = 108$.

CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT – THỐNG KÊ

Bài toán 1: Đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia bắt đầu từ năm 2025 sẽ có ba phần, trong đó có phần câu hỏi đúng sai. Một câu hỏi sẽ có bốn ý và mỗi ý hỏi chỉ có thể trả lời đúng hoặc sai. Thí sinh trả lời đúng 1 ý được 0,1 điểm, trả lời đúng 2 ý được 0,25 điểm, trả lời đúng 3 ý được 0,5 điểm và trả lời đúng cả 4 ý được 1,0 điểm. Bạn Nam khi trả lời các ý của câu hỏi này một cách ngẫu nhiên. Biết rằng người ra đề không để đáp án câu này là toàn đúng hoặc toàn sai. Tính xác suất để bạn Nam được ít nhất 0,5 điểm. (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 2^4 - 2 = 14$

Gọi A là biến cố làm được ít nhất 0,5 điểm (làm đúng 3 ý hoặc làm đúng cả 4 ý)

Gọi T_k là biến cố mà đáp án có k ý đúng, suy ra có $4-k$ ý sai.

Trường hợp 1: Nếu $k=1$ thì đáp án có 1 ý đúng và 3 ý sai. Giả sử đáp án là ĐSSS

Xác suất để có 1 ý đúng và 3 ý sai là $\frac{C_4^1}{14}$

Nếu muốn được ít nhất 0,5 điểm thì có 4 cách: ĐSSS; ĐĐSS; ĐSĐS; ĐSSĐ

Vậy xác suất được ít nhất 0,5 điểm sẽ là $\frac{4}{14}$

Trường hợp 2: Nếu $k=2$ thì đáp án có 2 ý đúng và 2 ý sai. Giả sử đáp án là ĐĐSS

Xác suất để có 2 ý đúng và 2 ý sai là $\frac{C_4^2}{14}$

Nếu muốn được ít nhất 0,5 điểm thì có 5 cách: ĐĐSS; SĐSS; ĐSSS; ĐĐĐS; ĐĐSĐ

Vậy xác suất được ít nhất 0,5 điểm sẽ là $\frac{5}{14}$

Trường hợp 3: Nếu $k=3$ thì đáp án có 3 ý đúng và 1 ý sai. Giả sử đáp án là ĐĐĐS

Xác suất để có 3 ý đúng và 1 ý sai là $\frac{C_4^3}{14}$. Nếu muốn được ít nhất 0,5 điểm thì có 4 cách: ĐĐĐS;

SĐĐS; ĐSĐS; ĐĐSS. Vậy xác suất được ít nhất 0,5 điểm sẽ là $\frac{4}{14}$

Khi đó xác suất đề bài cần tính là: $P = \frac{4}{14} \cdot \frac{4}{14} + \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{14} + \frac{4}{14} \cdot \frac{4}{14} = \frac{31}{98} \approx 0,32$

Bài toán 2: Một mẫu ruồi giấm dùng để làm thí nghiệm có hai loại: ruồi mắt đỏ và ruồi mắt trắng. Biết rằng có 65% là ruồi cái và 35% là ruồi đực. Tỷ lệ ruồi cái mắt đỏ là 90%, còn tỷ lệ ruồi đực mắt đỏ là 85%. Chọn ngẫu nhiên một con ruồi mắt trắng. Biết rằng xác suất để đó là ruồi đực bằng

$\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$ và $(a, b) = 1$. Tính $b - a$.

Lời giải

Trả lời: 26.

Gọi A là biến cố: "Ruồi chọn được là ruồi mắt đỏ"; B là biến cố: "Ruồi chọn được là ruồi đực".

Khi đó, ta có: $P(B) = 0,35$; $P(A) = 0,65 \cdot 0,9 + 0,35 \cdot 0,85 = 0,8825$;

$$P(A|B) = 0,85 \Rightarrow P(\bar{A}|B) = 1 - 0,85 = 0,15.$$

$$\text{Áp dụng công thức Bayes, ta có } P(B|\bar{A}) = \frac{P(B) \cdot P(\bar{A}|B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,35 \cdot 0,15}{1 - 0,8825} = \frac{21}{47}.$$

$$\text{Vậy } b - a = 47 - 21 = 26.$$

Bài toán 3: Một công ty tiến hành hai dự án I và II. Biết rằng xác suất thành công của ít nhất một trong hai dự án là 0,76; xác suất thành công của dự án I là 0,4; xác suất để dự án I thành công nhưng dự án II không thành công là 0,26. Tìm xác suất để dự án II thành công nếu biết rằng dự án I không thành công.



Lời giải

Trả lời: 0,6.

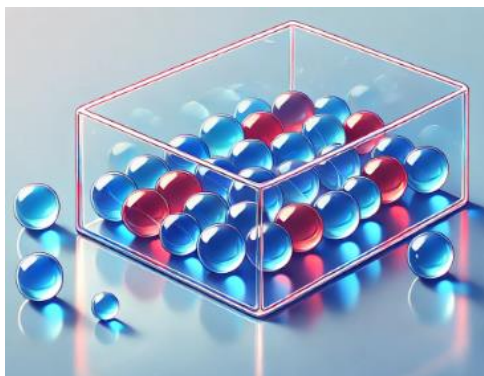
Gọi A là biến cố: "Dự án I thành công"; B : "Dự án II thành công". Theo đề bài, ta có: $P(A \cup B) = 0,76$; $P(A) = 0,4$; $P(\bar{A}B) = 0,26$. Sử dụng biểu đồ Venn, ta có:

$$P(\bar{A}B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,76 - 0,4 = 0,36 \text{ và } P(AB) = P(A) - P(\bar{A}B) = 0,4 - 0,26 = 0,14$$

Hơn nữa: $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) = 0,14 + 0,36 = 0,5$. Vậy xác suất để dự án II thành công nếu biết

$$\text{rằng dự án I không thành công là } P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{0,36}{1 - 0,4} = 0,6$$

Bài toán 4: Một hộp chứa 10 viên bi xanh và 5 viên bi đỏ. Bạn An lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp, xem màu, rồi bỏ ra ngoài. Nếu viên bi An lấy ra có màu xanh, bạn Bình sẽ lấy ra ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp; còn nếu viên bi An lấy ra có màu đỏ, bạn Bình sẽ lấy ra ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Tính xác suất để An lấy được viên bi màu xanh, biết rằng tất cả các viên bi được hai bạn chọn ra đều có đủ cả hai màu.



Lời giải**Đáp án:** 0,55.

Gọi A là biến cố: An lấy ra viên bi màu xanh. Khi đó $\{A, \bar{A}\}$ là một hệ đầy đủ các biến cố với $P(A) = \frac{2}{3}$; $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$. Gọi B là biến cố: Tất cả các viên bi được hai bạn chọn ra đều có đủ cả hai màu

Ta có $P(B|A)$ = Xác suất 2 viên bi Bình lấy ra có ít nhất một viên bi màu đỏ, do đó

$$P(B|A) = \frac{C_{14}^2 - C_9^2}{C_{14}^2} = \frac{55}{91}$$

Tương tự $P(B|\bar{A})$ = Xác suất 3 viên bi Bình lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh, do đó

$$P(B|\bar{A}) = \frac{C_{14}^3 - C_4^3}{C_{14}^3} = \frac{90}{91}. \text{ Áp dụng công thức xác suất Bayes, ta có}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A).P(B|A)}{P(A).P(B|A) + P(\bar{A}).P(B|\bar{A})} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{55}{91}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{55}{91} + \frac{1}{3} \cdot \frac{90}{91}} = \frac{11}{20} = 0,55.$$

Bài toán 5: (Bình Phước lần 1 - 2025) Có ba đồng xu được đựng trong một hộp kín. Đồng xu thứ nhất là một đồng xu cân đối với tỷ lệ mặt ngửa và mặt sấp bằng nhau. Đồng xu thứ hai là một đồng xu bị lỗi có khả năng mặt ngửa xuất hiện là 70%. Đồng xu thứ ba là một đồng xu hai mặt ngửa (khi tung luôn ra mặt ngửa). Bạn An lấy ngẫu nhiên một đồng xu từ hộp và tung nó hai lần. Kết quả của hai lần tung cho thấy xuất hiện một lần mặt sấp và một lần mặt ngửa. Tính xác suất để đồng xu bạn đã chọn là đồng xu thứ hai (đồng xu bị lỗi) (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải**Đáp án:** 0,46

Gọi A là biến cố chọn đồng xu thứ n ($n=1;2;3$). B là biến cố tung hai lần thì thấy xuất hiện một lần mặt sấp và một lần mặt ngửa. Vì chọn ngẫu nhiên nên $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$

Lấy ngẫu nhiên một đồng xu tung hai lần được một mặt sấp và một mặt ngửa thì ta có ba trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Chọn được đồng xu thứ nhất là S-N và N-S nên $P(B|A_1) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Trường hợp 2: Chọn được đồng xu thứ hai là S-N và N-S nên ta có:

$$P(B|A_2) = 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,42$$

Trường hợp 3: Chọn được đồng xu thứ ba là N-N nên $P(B|A_3) = 0$

Áp dụng công thức Bayes ta tính được xác suất chọn được đồng xu thứ hai là:

$$P(A_2 | B) = \frac{P(B | A_2) \cdot P(A_2)}{P(A_1) \cdot P(B | A_1) + P(A_2) \cdot P(B | A_2) + P(A_3) \cdot P(B | A_3)} = \frac{0,42 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0,42 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} \approx 0,46$$

Vậy xác suất chọn được đồng xu thứ hai là 0,46.

Bài toán 6: Kỳ thi tốt nghiệp THPT năm 2025 dự kiến thi ba buổi. Ngày đầu thi chung Văn và Toán, buổi thứ ba tổ chức thi tất cả các môn còn lại theo đúng hai khung giờ. Bạn Hiền và bạn Hoà thi chung một phòng thi nhưng thuộc hai nhóm môn khác nhau. Bạn Hiền học nhóm môn (Sử; Anh; Lý; Hoá; Sinh; Tin) còn bạn Hoà học nhóm môn (Sử; Anh; Địa; KT & PL; Công nghệ). Mỗi bạn chọn ngẫu nhiên theo thứ tự 2 môn trong nhóm môn mình học để thi. Xác suất để bạn Hiền và bạn Hoà thi buổi thứ ba trùng đúng một môn thi trong cùng một khung giờ bằng $\frac{a}{b}$ (tối giản). Tính $a+b$.

Lời giải:

Ta có 2 trường hợp:

TH1: Môn thi đầu của hai bạn trùng nhau

TH2: Môn thi thứ 2 của hai bạn trùng nhau.

Cách giải:

Số cách chọn thứ tự 2 môn thi của Hiền là $6 \cdot 5 = 30$ (cách)

Số cách chọn thứ tự 2 môn thi của Hoà là $5 \cdot 4 = 20$ (cách)

Hai bạn Hiền và Hoà học 2 môn trùng nhau là môn Sử và môn Anh.

+ **TH1:** Môn đầu tiên của hai bạn trùng nhau. Khi đó môn đầu tiên có 2 cách chọn.

Nếu Hiền chọn môn thứ hai là môn còn lại thì Hoà có 3 cách chọn cho môn thứ hai.

Nếu Hiền chọn môn thứ hai không phải môn còn lại của hai bạn học trùng nhau thì Hoà có 4 cách chọn cho môn thứ hai.

Suy ra số cách chọn trong trường hợp 1 là $2(1 \cdot 3 + 4 \cdot 4) = 38$ (cách)

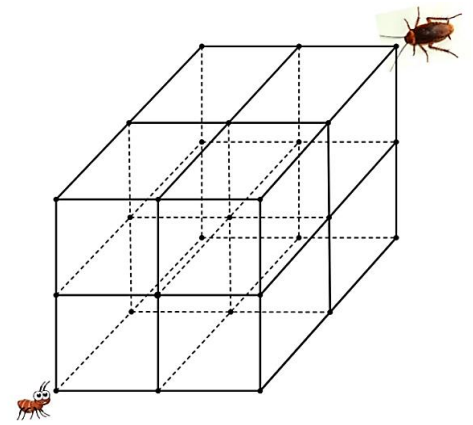
+ **TH2:** Môn thứ hai trùng nhau

Tương tự trường hợp 1, ta có số cách chọn của trường hợp 2 là 38 (cách)

Vậy xác suất để Hiền và Hoà trùng đúng 1 môn thi là

$$\frac{38+38}{30 \cdot 20} = \frac{19}{150} = \frac{a}{b} \Rightarrow a=19, b=150 \Rightarrow a+b=169.$$

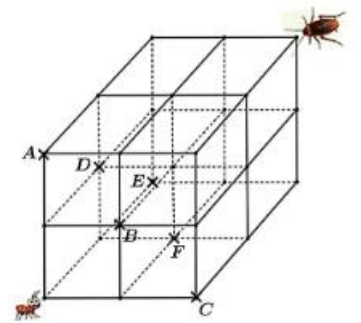
Bài toán 7: Trong công trường xây dựng, có một bộ khung sắt hình lập phương như hình vẽ (ta xem nó là hình lập phương dạng $2 \times 2 \times 2$). Người ta nhìn thấy một con kiến và một con gián xuất phát cùng lúc trên hai đỉnh thuộc đường chéo lớn của khung sắt hình lập phương và di chuyển trên các cạnh của mỗi hình vuông nhỏ. Con kiến cần đến vị trí mà con gián xuất phát và ngược lại, mỗi con ngày càng di chuyển xa vị trí mà nó xuất phát. Tính xác suất để hai con côn trùng này gặp nhau biết rằng vận tốc của gián bằng 4 cm/s , vận tốc của kiến là 2 cm/s . Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm.



Lời giải:

Ta xem mỗi bước di chuyển của mỗi con là 1 đơn vị (ứng với cạnh hình vuông nhỏ).

Để đi hết hành trình của mình thì gián cần đi xuống 2 đơn vị, sang trái 2 đơn vị và đi dọc 2 đơn vị (có tất cả là 6 bước di chuyển) nên số cách đi của gián là $C_6^2 C_4^2$; hoàn toàn tương tự kiến cũng có số cách đi là $C_6^2 C_4^2$. Gọi Ω là không gian mẫu thì $n(\Omega) = (C_6^2 C_4^2)^2$.



Vận tốc của gián gấp đôi vận tốc của kiến nên nếu hai con gặp nhau thì tại vị trí chúng gặp gián đã di chuyển 4 bước, kiến di chuyển 2 bước. Vị trí hai con gặp nhau (nếu có) được đánh dấu ở 6 vị trí trên hình vẽ.

- Tại vị trí A : Gián có 2 lần di chuyển sang trái, 2 lần di chuyển dọc; sau đó đi từ A đến đích thì nó cần 2 lần đi xuống. Số cách đi của gián là $C_4^2 C_2^2 C_2^2$. Hành trình của kiến cũng tương tự mà theo chiều ngược lại nên kiến có $C_4^2 C_2^2 C_2^2$ cách đi. Số cách đi hai con là $(C_4^2 C_2^2 C_2^2)^2$. Tại các vị trí A, C, E thì số cách đi mỗi con là như nhau.

- Tại vị trí B : Số cách đi của hai con là $(C_4^1 C_3^1 C_2^2 C_2^1)^2$.

Tại các vị trí B, D, F thì số cách đi mỗi con là như nhau. Gọi X là biến cố hai con côn trùng gặp

nhau trên đường đi, ta có:
$$P(X) = \frac{3(C_4^2 C_2^2 C_2^2)^2 + 3(C_4^1 C_3^1 C_2^2 C_2^1)^2}{(C_6^2 C_4^2)^2} = \frac{17}{75} \approx 0,27.$$

Bài toán 8: Vào một hội thi thiết kế đèn lồng Trung thu, ban tổ chức nhận được một chiếc đèn lồng đặc biệt có hình một tứ diện đều. Trên mỗi cạnh tứ diện thí sinh thiết kế 3 bóng đèn nằm ở 3 vị trí chia cạnh tứ diện thành 4 đoạn bằng nhau. Cứ mỗi phút trôi qua, sẽ có ngẫu nhiên 3 bóng đèn phát sáng, các bóng còn lại thì tắt. Tính xác suất để ngay phút đầu tiên được ban giám khảo chấm điểm, có 3 bóng đèn phát sáng ứng với 3 điểm tạo nên mặt phẳng song song với đúng một cạnh của tứ

diện, biết rằng 3 bóng đèn không hoàn toàn thuộc về một cạnh tứ diện. (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải:

Tổng số cách chọn ra 3 trong 18 điểm là $C_{18}^3 = 816$. Tuy nhiên, sẽ có các trường hợp ba điểm thẳng hàng, đó là khi ta lấy ba điểm thuộc cùng một cạnh, tổng số cách là $6 \times C_3^3 = 6$. Do đó $n(\Omega) = 816 - 6 = 810$.

Xét các mặt phẳng qua 3 điểm (3 bóng đèn) và song song với đoạn AB.

Trường hợp 1: Chọn 1 cặp điểm thuộc mặt phẳng (ABC) và 1 điểm không thuộc (ABC).

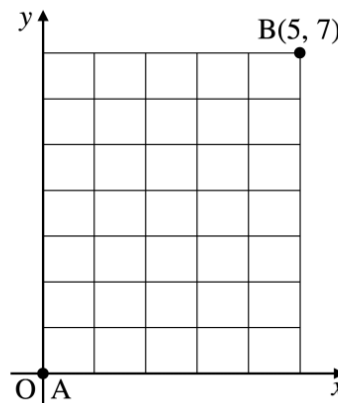
- **Bước 1:** Có 3 cách chọn 1 cặp điểm thuộc (ABC).
- **Bước 2:** Với mỗi cách chọn trong **bước 1** thì sẽ có 9 cách chọn 1 điểm không thuộc mặt phẳng (ABC); tuy nhiên vì **điều kiện mặt phẳng qua 3 điểm chỉ song song đúng 1 cạnh tứ diện** (ở đây là AB) nên ta loại 3 điểm trong số 9 điểm không thuộc (ABC) (ví dụ khi chọn cặp điểm M, N thuộc (ABC) thì ta loại P, Q, R thuộc AD, BD, CD).

Do vậy ta có $3 \times 6 = 18$ cách chọn bộ ba điểm trong trường hợp này.

Trường hợp 2: Chọn 1 cặp điểm thuộc mặt phẳng (ABD) và 1 điểm không thuộc (ABD). Ta cũng có $3 \times 6 = 18$ cách chọn bộ ba điểm thỏa mãn.

Vì tính chất bình đẳng của 6 cạnh trong tứ diện đều, ta có tất cả $6(18+18) = 216$ bộ ba điểm thỏa mãn. Vì vậy xác suất cần tính là $P = \frac{216}{810} = \frac{4}{15} \approx 0,27$.

Bài toán 9: Trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ, hai điểm A và B cùng lúc bắt đầu di chuyển, mỗi bước đi đúng một đơn vị theo lưới.



- Điểm A xuất phát từ $O(0,0)$, mỗi bước có thể đi một ô sang phải hoặc một ô lên trên.

- Điểm B xuất phát từ $B(5,7)$, mỗi bước có thể đi một ô sang trái hoặc một ô xuống dưới.

Giả sử mỗi điểm đều đi đúng 6 bước, và trong số tất cả các đường đi ngắn nhất (đều gồm 6 bước) thì mỗi đường được chọn với xác suất như nhau.

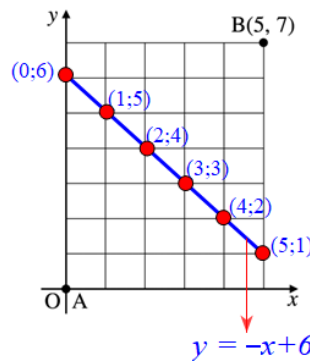
Hỏi: Xác suất để hai điểm gặp nhau trên mặt phẳng tọa độ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 0,2

Tổng số đường đi hợp lệ của mỗi điểm đều là: $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 = 63$

Gọi $M(x; y)$ là điểm gặp nhau sau 6 bước đi của A và B , khi đó: $x + y = 6$ hay M nằm trên đường thẳng $y = -x + 6$ hay chúng gặp nhau tại các điểm: $(0; 6); (1; 5); (2; 4); (3; 3); (4; 2); (5; 1)$



TH1: Gặp nhau tại $(0; 6); (5; 1)$ có $1 \cdot \frac{6!}{5!} \cdot 2 = 12$ cách

TH2: Gặp nhau tại $(1; 5); (4; 2)$ có $\frac{6!}{5!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 2 = 6 \cdot 15 \cdot 2 = 180$ cách

TH3: Gặp nhau tại $(2; 4); (3; 3)$ có $\frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 2 = 15 \cdot 20 \cdot 2 = 600$

Vậy xác suất để hai điểm gặp nhau trên mặt phẳng tọa độ là: $\frac{792}{63 \cdot 63} = \frac{88}{441} \approx 0,2$

Bài toán 10 : Một nhà máy sản xuất sản phẩm A có tỷ lệ sản phẩm bị lỗi là 2%. Nhà máy sử dụng hai hệ thống

kiểm tra chất lượng độc lập để phát hiện lỗi:

Hệ thống 1: Xác suất phát hiện chính xác sản phẩm lỗi là 95%. Xác suất báo lỗi nhầm trên một sản phẩm không lỗi là 1%.

Hệ thống 2: Xác suất phát hiện chính xác sản phẩm lỗi là 90%. Xác suất báo lỗi nhầm trên một sản phẩm không lỗi là 5%.

Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm. Biết rằng sản phẩm này bị cả hai hệ thống kiểm tra đều báo lỗi.

Tính xác suất để sản phẩm này thực tế không bị lỗi. Kết quả xác suất này sau khi đã làm tròn đến hàng phần nghìn là số có dạng $0,0ab$ (ví dụ nếu kết quả là $0,024$ thì $a = 2, b = 4$). Tính giá trị của $a + b$.

Đáp án: 10

Gọi A là biến cố chọn được sản phẩm lỗi.

Gọi M, N lần lượt là biến cố hệ thống 1 kết luận sản phẩm lỗi, hệ thống 2 kết luận sản phẩm lỗi.

Ta cần tính xác suất điều kiện: $P(\bar{A} | MN) = \frac{P(\bar{A}MN)}{P(MN)}$.

Ta có $P(A) = 2\% = 0,02 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,98$ và $P(M | A) = 95\% = 0,95$; $P(M | \bar{A}) = 1\% = 0,01$.

$P(N | AM) = 90\% = 0,9$; $P(N | \bar{A}M) = 5\% = 0,05$. Ta có:

$$P(MN) = P(AMN \cup \bar{A}MN) = P(AMN) + P(\bar{A}MN).$$

Mặt khác: $P(\bar{A}MN) = P(\bar{A}) \cdot P(M | \bar{A}) \cdot P(N | \bar{A}M) = 0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,05$ và

$$P(AMN) = P(A) \cdot P(M | A) \cdot P(N | AM) = 0,02 \cdot 0,95 \cdot 0,9.$$

$$\text{Vậy } P(\bar{A} | MN) = \frac{0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,05}{0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,05 + 0,02 \cdot 0,95 \cdot 0,9} = \frac{49}{1759} \approx 0,028 \Rightarrow a + b = 10.$$

Bài toán 11: Quan sát hai mã cổ phiếu A và B người ta nhận thấy trong mỗi phiên giao dịch, nếu cổ phiếu B không giảm giá thì cổ phiếu A giảm giá với xác suất $\frac{2}{5}$. Ngược lại, nếu cổ phiếu A không giảm giá thì cổ phiếu B giảm giá với xác suất $\frac{4}{7}$. Hơn nữa, xác suất cả hai cổ phiếu A và B giảm giá trong cùng một ngày là $0,1$. Hãy tính xác suất để có ít nhất một trong hai cổ phiếu A và B giảm giá trong một phiên giao dịch.

Lời giải

Gọi A và B lần lượt là biến cố mã cổ phiếu A và B giảm giá trong một phiên giao dịch.

Đặt $a = P(A)$ và $b = P(B)$ với $a, b \in [0; 1]$.

$$\text{Khi đó ta có: } \frac{2}{5} = P(A | \bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} = \frac{a - 0,1}{1 - b} \Rightarrow 5a + 2b = 2,5 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{4}{7} = P(B | \bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(AB)}{1 - P(A)} = \frac{b - 0,1}{1 - a} \Rightarrow 4a + 7b = 4,7 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình } \begin{cases} 5a + 2b = 2,5 \\ 4a + 7b = 4,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,3 \\ b = 0,5 \end{cases}$$

Xác suất để có ít nhất một trong hai cổ phiếu A và B giảm giá trong một phiên giao dịch là:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7$$

Bài toán 12: Hiện nay, nước ta đang trong quá trình tinh gọn bộ máy nhà nước và thực hiện nghị quyết không tổ chức công an cấp huyện. Do vậy, trong đợt điều động cán bộ công an từ huyện về công tác tại cơ sở hoặc công tác tại công an tỉnh, phòng tổ chức cán bộ nhận thấy rằng:

- Có 60% cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa, số còn lại nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh.
- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở thì 70% có trình độ đại học và 30% có trình độ trung cấp.
- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công an tỉnh thì 80% có trình độ đại học và 20% có trình độ trung cấp.

Tuy nhiên, năng lực công tác cũng là một yếu tố quan trọng. Dựa trên hồ sơ đánh giá năng lực:

- Trong số cán bộ có nguyện vọng về cơ sở thì tỷ lệ cán bộ được đánh giá có năng lực “Tốt” trở lên với trình độ đại học là 60% và trình độ trung cấp là 30%.
- Trong số cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh thì tỷ lệ được đánh giá là có năng lực “Tốt” trở lên với trình độ đại học là 85% và với trình độ trung cấp là 25%.

Chọn ngẫu nhiên một cán bộ công an. Biết rằng cán bộ này vừa có trình độ đại học, vừa được đánh giá có năng lực “Tốt” trở lên. Tính xác suất để người này có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Gọi các biến cố như sau:

“ A là biến cố cán bộ có nguyện vọng về công tác tại cơ sở (vùng sâu vùng xa)”

“ B là biến cố cán bộ có nguyện vọng về công tác tại công an tỉnh”

“ C là biến cố cán bộ có trình độ đại học”

“ D là biến cố cán bộ có trình độ trung cấp”

“ E là biến cố cán bộ được đánh giá năng lực “Tốt” trở lên”

Xác suất nguyện vọng về cơ sở và về công an tỉnh là: $P(A) = 0,6$; $P(B) = 1 - P(A) = 0,4$.

Xác suất trình độ đại học có nguyện vọng về cơ sở: $P(C|A) = 0,7$; $P(D|A) = 0,3$

Xác suất trình độ học vấn theo nguyện vọng về tỉnh: $P(C|B) = 0,8$; $P(D|B) = 0,2$

Xác suất năng lực “Tốt” trở lên theo nguyện vọng về cơ sở và trình độ học vấn:

$$P(E|C \cap A) = 0,6 \Rightarrow P(E|D \cap A) = 0,4$$

Xác suất năng lực “Tốt” trở lên theo nguyện vọng về công an tỉnh và trình độ học vấn:

$$P(E|C \cap B) = 0,85 \Rightarrow P(E|D \cap B) = 0,25$$

Xác suất để cán bộ có nguyện vọng về công tác tại các xã vùng sâu vùng xa, biết rằng cán bộ này vừa có trình độ đại học, vừa được đánh giá năng lực “Tốt” trở lên là: $P(A|C \cap E)$

Sử dụng công thức Bayes:

$$P(A|C \cap E) = \frac{P(C \cap E|A).P(A)}{P(A \cap E)} = \frac{0,6.0,7.0,6}{0,6.0,7.0,6 + 0,85.0,8.0,4} = \frac{63}{131} \approx 0,48$$

Vậy xác suất để cán bộ này có trình độ đại học, được đánh giá có năng lực “Tốt” và có nguyện vọng về công tác tại cơ sở là các xã vùng sâu vùng xa là 0,48.

CÁC BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ TỐI ƯU

Bài toán 1: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc 2025) Theo thống kê tại một nhà máy Z , nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 tổ công nhân đi làm và mỗi tổ công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 tổ công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 tổ/1 giờ. Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 36.

Gọi số giờ làm tăng thêm mỗi tuần là t , $t \in \mathbb{R}$. Số tổ công nhân bỏ việc là $\frac{t}{2}$ nên số tổ công nhân làm việc là $100 - \frac{t}{2}$ (tổ). Năng suất của tổ công nhân còn $120 - \frac{5t}{2}$ sản phẩm một giờ. Số thời gian làm việc một tuần là $40 + t = x$ (giờ).

Để nhà máy hoạt động được thì
$$\begin{cases} 40 + t > 0 \\ 120 - \frac{5t}{2} > 0 \\ 100 - \frac{t}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow t \in (-40; 48).$$
 Số sản phẩm trong một tuần làm được:

$S = \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40 + t)$. Số sản phẩm thu được là:

$$f(t) = \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40 + t) - \frac{95(40 + t)^2 + 120(40 + t)}{4}$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{2} \left(120 - \frac{5t}{2}\right) (40 + t) - \frac{5}{2} \left(100 - \frac{t}{2}\right) (40 + t) + \left(100 - \frac{t}{2}\right) \left(120 - \frac{5t}{2}\right) - \frac{95}{2} (40 + t) - 30 \\ &= \frac{15}{4} t^2 - \frac{1135}{2} t - 2330 \end{aligned}$$

Ta có $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = \frac{466}{3} (L) \end{cases}$. Ta có BXD:

x	-40	-4	48
y'	+	0	-
y			

Dựa vào bảng biến thiên ta có số lượng sản phẩm thu được lớn nhất thì thời gian làm việc trong một tuần là $40 + -4 = 36$

Bài toán 2: (Bình Phước lần 1 - 2025) Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm T được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm T là x (\$) thì số sản phẩm T các nhà máy sản xuất sẽ là $R(x) = x - 200$ và số sản phẩm T mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là $Q(x) = 4200 - x$. Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là $x_0 = 3200$ \$. Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là a (\$) và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là 4:1. Hãy xác định giá trị của a biết lãi mà doanh nghiệp thu được do xuất khẩu là nhiều nhất.

Lời giải

Đáp án: 100.

Điều kiện: $R(x) = x - 200 > 0; Q(x) = 4200 - x > 0 \Rightarrow 200 < x < 4200$.

Số sản phẩm xuất khẩu là: $R(x) - Q(x) = x - 200 - (4200 - x) = 2x - 4400$

Lãi xuất khẩu của doanh nghiệp là: $L(x) = (R(x) - Q(x))(3200 - x - a) = (2x - 4400)(3200 - x - a)$.

Thuế thu được của nhà nước là: $T(x) = (2x - 4400)a$.

Ta có $L(x):T(x) = 4:1$, suy ra $(2x - 4400)(3200 - x - a) = 4(2x - 4400)a \Rightarrow a = \frac{3200 - x}{5}$

Khi đó

$$\begin{aligned} L(x) &= (2x - 4400) \left(3200 - x - \frac{3200 - x}{5} \right) \\ &= (2x - 4400) \frac{12800 - 4x}{5} = \frac{1}{5} (-8x^2 + 43200x - 56320000) \end{aligned}$$

Bài toán đưa về tìm x để $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $L'(x) = \frac{1}{5} (-16x + 43200) = 0 \Leftrightarrow x = 2700 \in (200; 4200)$ Lập bảng biến thiên ta thấy $L(x)$ đạt giá

trị lớn nhất khi $x = 2700$, suy ra $a = \frac{3200 - 2700}{5} = 100$.

Bài toán 3: Trên một khúc sông có dòng nước lặng, một chiếc tàu chạy với tốc độ không đổi, chi phí nhiên liệu được tính bởi hai phần: Phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và mất chi phí 630 nghìn đồng/giờ; Phần thứ hai tỉ lệ thuận với bình phương của tốc độ, khi $v = 10(km/h)$ thì chi phí

phần thứ hai là 70 nghìn đồng/giờ. Tìm tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu khi tàu chạy 1 km trên sông là ít nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 9,49.

Gọi $x(km/h)$ là tốc độ của tàu ($x > 0$). Thời gian để tàu chạy 1 km trên sông là $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí cho phần thứ nhất để tàu chạy 1 km là: $p_1 = 630 \cdot \frac{1}{x} = \frac{630}{x}$ (nghìn đồng/giờ).

Chi phí cho phần thứ hai để tàu chạy 1 km có dạng: $p_2 = kx^2 \cdot \frac{1}{x} = kx$ (nghìn đồng/giờ).

Khi $x=10$ thì $p_2 = 70$ nên $k=7$. Do đó $p_2 = 7x$ (nghìn đồng/giờ).

Vậy tổng chi phí để tàu chạy 1 km trên khúc sông đó là: $f(x) = \frac{630}{x} + 7x$ (nghìn đồng/giờ). Ta có:

$$f'(x) = -\frac{630}{x^2} + 7. \text{ Giải phương trình: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{10} \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -3\sqrt{10} \text{ (loại vì } x > 0$$

). Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ với $x > 0$, ta tìm được $\min_{x \in (0; +\infty)} f(x) = f(3\sqrt{10}) = 42\sqrt{10}$.

Vậy tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu khi tàu chạy 1 km trên sông ít nhất là $3\sqrt{10} \approx 9,49(km/h)$

Bài toán 4: Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới

cũng là một phần đường cong $(C): y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông

nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2; 3)$ và có đường tiệm cận đứng $x=1$

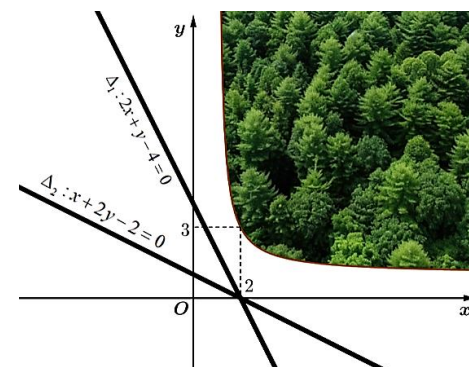
. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ và

$\Delta_2: x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí

$M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng các khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường

Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét

(làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải:

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -b = 1 \Rightarrow b = -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $y = \frac{x+a}{x-1}$ qua $(2;3) \Rightarrow 3 = \frac{2+a}{2-1} \Rightarrow a = 1$; hàm số là

$$y = \frac{x+1}{x-1} \quad (C).$$

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0+1}{x_0-1}\right) \in (C), x_0 > 1$. Tổng khoảng cách từ M đến hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 là

$$d = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = \frac{\left|2x_0 + \frac{x_0+1}{x_0-1} - 4\right|}{\sqrt{5}} + \frac{\left|x_0 + 2 \cdot \frac{x_0+1}{x_0-1} - 2\right|}{\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{5}d = \left|\frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1}\right| + \left|\frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1}\right| = \frac{2x_0^2 - 5x_0 + 5}{x_0 - 1} + \frac{x_0^2 - x_0 + 4}{x_0 - 1} \begin{cases} 2x_0^2 - 5x_0 + 5 > 0 \\ x_0^2 - x_0 + 4 > 0 \end{cases} \text{ vì } \begin{cases} x_0 - 1 > 0 \\ x_0^2 - x_0 + 4 > 0 \end{cases}, \forall x_0 > 1).$$

$$\text{Đặt } \sqrt{5}d = \frac{3x_0^2 - 6x_0 + 9}{x_0 - 1} = g(x) \text{ với } x > 1.$$

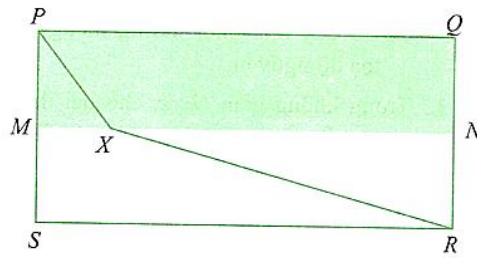
$$\text{Ta có: } g'(x) = \frac{3x_0^2 - 6x_0 - 3}{(x_0 - 1)^2}; g'(x) = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 - 3 = 0 \Rightarrow x_0 = 1 + \sqrt{2} > 1.$$

$$\text{Ta có: } \min_{(1;+\infty)} g(x) = g(1 + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{5}d \geq 6\sqrt{2} \Rightarrow d \geq \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Dấu đẳng thức xảy ra khi } x_0 = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow M(1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}).$$

Khoảng cách OM trên thực tế là $10 \times \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2} = 10 \times (1 + \sqrt{2})\sqrt{2} \approx 34,1$ mét.

Bài toán 5: Một khu rừng phòng hộ hình chữ nhật $PQRS$ có chiều dài $PQ = 50\text{km}$, chiều rộng $PS = 40\text{km}$. Khu rừng được chia thành 2 khu vực và trồng, chăm sóc hai loại cây với độ tuổi khác, đoạn chia khu rừng là MN trong đó M là trung điểm của PS , N là trung điểm của QR . Một máy bay không người lái (drone) quan sát thực hiện bay định kì theo 2 đoạn thẳng ngẫu nhiên, xuất phát từ điểm P và kết thúc tại điểm R tạo thành đường gấp khúc PXR với X là một điểm thuộc MN . Trong khu vực $PMNQ$ máy bay bay với vận tốc 20km/h , trong khu vực còn lại nó bay với vận tốc 20km/h . Để thực hiện được một hành trình bay quan sát khu rừng phòng hộ trên thì máy bay hết ít nhất bao nhiêu phút? (làm tròn đến hàng đơn vị)

**Lời giải****Trả lời: 156.**

Đặt $MX = x (x > 0)$, đơn vị: km. Quãng đường và thời gian drone bay ở khu vực rừng $PMNQ$ là:

$$s_1 = \sqrt{400 + x^2} \text{ và } t_1 = \frac{\sqrt{400 + x^2}}{30}$$

Quãng đường và thời gian drone bay ở khu vực rừng $MNRS$ là:

$$s_2 = \sqrt{400 + (50 - x)^2} \text{ và } t_2 = \frac{\sqrt{(50 - x)^2 + 400}}{20}.$$

$$\text{Tổng thời gian bay của drone là } t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{(50 - x)^2 + 400}}{20} + \frac{\sqrt{x^2 + 400}}{30}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{\sqrt{(50 - x)^2 + 400}}{20} + \frac{\sqrt{x^2 + 400}}{30} \text{ trên } [0; 50].$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{x - 50}{20\sqrt{(50 - x)^2 + 400}} + \frac{x}{30\sqrt{x^2 + 400}} = 0 \Leftrightarrow x \approx 35,7$$

Suy ra $\min_{[0; 50]} f(x) = f(35,7) = 2,59$. Đổi 2,59 giờ thành 156 phút.

Bài toán 6: (Anh Sơn - Nghệ An 2025) Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm. Thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x) = 90 - 0,01x^2$ (đơn vị triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = \frac{1}{2}(200 + 27x)$ (đơn vị: triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Hỏi nhà máy A bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để thu được lợi nhuận (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng) cao nhất?

Lời giải**Đáp số: 50**

Giả sử số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm $0 \leq x \leq 100$. Doanh thu $B(x) = x \cdot p(x) = x(90 - 0,01x^2)$.

Ta có: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2.OA.OB.\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 60^2 + 50^2 - 2.60.50.\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AB = 10\sqrt{91}$

Xét $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}.OA.OB.\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.AB.OH \Rightarrow OH = \frac{150\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

Có: $BH^2 = OB^2 - OH^2 \Rightarrow BH = \frac{400}{\sqrt{91}} \approx 42$

Bài toán 8: Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .

Đáp án: 6

Gọi hàm chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là $f(x) = \frac{C(x)}{T(x)} = \frac{x^2 + 108}{x + 6}, x > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{x^2 + 12x - 108}{(x + 6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18(L) \\ x = 6 \end{cases}$

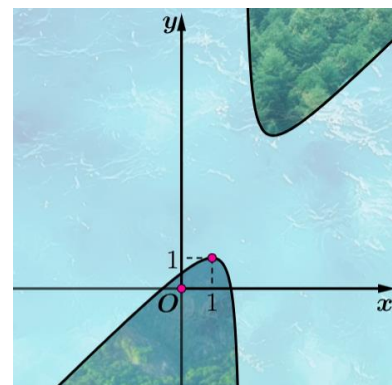
x	0	6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	18	12	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt GTNN bằng 12 khi $x = 6$.

Vậy để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất thì $x = 6$.

Bài toán 9: Hình dáng phần đất liền của hai xã thuộc tỉnh Đồng Tháp được mô hình hóa bởi đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + ax + b}{x - 2}$; biết đồ thị có một điểm cực trị là $(1; 1)$, với hệ

trục tọa độ Oxy như hình vẽ, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét. Để thuận tiện cho giao thông hai xã, lãnh đạo tỉnh đã phê duyệt dự án xây một chiếc cầu nối phần đất liền của hai xã này. Nhằm tiết kiệm chi phí cho công trình, người kỹ sư trưởng thiết kế có nhiệm vụ nghiên cứu để chọn được hai vị trí A, B trên phần đất liền hai xã sao cho độ dài chiếc



cầu (đoạn AB) là ngắn nhất có thể. Hỏi độ dài ngắn nhất của chiếc cầu đó (tính theo đường chim bay) là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải:

Đáp số: 43,9

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x - 2a - b}{(x-2)^2}$. Vì $(1; 1)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số nên $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1+a+b}{1-2} = 1 \\ 1^2 - 4 \cdot 1 - 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -2 \\ 2a+b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Hàm số trở thành $y = \frac{x^2 - x - 1}{x-2} = x + 1 + \frac{1}{x-2}$, $x \neq 2$.

Gọi $A\left(2+a; 3+a+\frac{1}{a}\right)$, $B\left(2-b; 3-b-\frac{1}{b}\right)$ là hai điểm thuộc hai nhánh đồ thị với $a, b > 0$. Ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (a+b)^2 + \left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = (a+b)^2 + \left(a+b+\frac{a+b}{ab}\right)^2 = (a+b)^2 \left[1 + \left(1+\frac{1}{ab}\right)^2\right] \\ &= (a+b)^2 \left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right) \stackrel{AM-GM}{\geq} 4ab \left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2b^2}\right) = 8 + 8ab + \frac{4}{ab} \stackrel{AM-GM}{\geq} 8 + 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Độ dài ngắn nhất của cây cầu (theo đường chim bay) là $AB \times 10 = \sqrt{8+8\sqrt{2}} \times 10 \approx \boxed{43,9} \text{ m}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b$ và $8ab = \frac{4}{ab} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Bài toán 10: (Sở Phú Thọ 2025) Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm ($0 < x \leq 2500$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $f(x) = 2006x - x^2$ và tổng chi phí là $g(x) = x^2 + 1438x - 1209$ (đơn vị: nghìn đồng). Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (nghìn đồng) ($0 < t < 320$). Giá trị của t bằng bao nhiêu nghìn đồng để nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng nhận được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó?

Lời giải

Trả lời: 284.

Ta có hàm lợi nhuận:

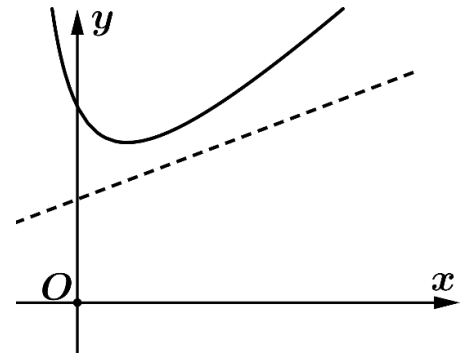
$$\begin{aligned} P(x) &= f(x) - g(x) - xt = 2006x - x^2 - (x^2 + 1438x - 1209) - xt = -2x^2 + 568x - xt + 1209 \\ &= -2x^2 + (568 - t)x + 1209 \end{aligned}$$

Khi lợi nhuận lớn nhất $P(x)$ thì $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{568-t}{2 \cdot (-2)} = \frac{568-t}{4}$

Khi đó, số tiền thuế thu được $xt = \frac{568-t}{4} \cdot t = \frac{1}{4}(568-t) \leq \frac{1}{4}\left(\frac{568-t+t}{2}\right)^2 = 20164$.

Dấu "=" xảy ra khi $568-t=t \Leftrightarrow t=284 \in (0;320)$ (Thỏa mãn).

Bài toán 11: Một doanh nghiệp kinh doanh sản xuất đồng hồ có đồ thị hàm tổng chi phí theo số sản phẩm là một phân đồ thị của hàm số bậc hai trên bậc nhất $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + e}$ như hình vẽ (mỗi đơn vị trên trục hoành tương ứng 100 sản phẩm và mỗi đơn vị trên trục tung tương ứng 1000USD). Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ là $A\left(-1; \frac{2}{3}\right)$ và đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm



số đi qua điểm $B(3; 2)$. Theo khảo sát, tổng doanh thu của doanh nghiệp này được mô tả bởi hàm số $R(x) = x^2 + 2x$ và lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250USD. Khi chi phí theo số sản phẩm đạt giá trị nhỏ nhất thì số sản phẩm sản xuất được là bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Dễ dàng suy ra được $e=1$ và đồ thị có đường tiệm cận đứng là $x=-1$

Gọi đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$ là $y = ax + b$

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} -a+b=\frac{2}{3} \\ 3a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=1 \end{cases}$ nên đường tiệm cận xiên là $y = \frac{1}{3}x + 1$

Hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + e}$ được viết lại dưới dạng $f(x) = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{d}{x+1}$

Lợi nhuận = Doanh thu - Chi phí $\Leftrightarrow P(x) = R(x) - f(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x - \frac{1}{3}x - 1 - \frac{d}{x+1}$

Theo giả thiết lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm bằng 5250USD.

Khi đó $P(2) = 5,25 \Leftrightarrow \frac{19}{3} - \frac{d}{3} = 5,25 \Leftrightarrow d = \frac{13}{4} = 3,25$

Vậy $f(x) = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{3,25}{x+1}$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3,25}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{39}}{2} - 1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{\sqrt{39}}{2} - 1 \text{ (nhận)} \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\sqrt{39}}{2} - 1$	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$\frac{17}{4}$	$\frac{\sqrt{39}}{3} + \frac{2}{3}$	$+\infty$

Vậy số sản phẩm khi chi phí đạt giá trị nhỏ nhất là $\left(\frac{\sqrt{39}}{2} - 1\right) \cdot 100 \approx 25$ sản phẩm.

Bài toán 12: Công ty sản xuất "SmartTech" đang lên kế hoạch sản xuất hai loại sản phẩm A và B. Mỗi sản phẩm A đem lại lợi nhuận 800.000 đồng và mỗi sản phẩm B đem lại lợi nhuận 500.000 đồng. Tuy nhiên, việc sản xuất mỗi sản phẩm đòi hỏi nguyên vật liệu và công nhân khác nhau:

- Để sản xuất một sản phẩm A công ty cần sử dụng 2 kg nguyên vật liệu và 3 giờ lao động.
- Để sản xuất một sản phẩm B công ty cần sử dụng 1 kg nguyên vật liệu và 4 giờ lao động.

Hiện tại, công ty có sẵn 100 kg nguyên vật liệu và có thể sử dụng tối đa 180 giờ lao động. Công ty cần sản xuất m sản phẩm A và n sản phẩm B để tối đa hóa lợi nhuận, đồng thời thỏa mãn các điều kiện về nguyên vật liệu và giờ lao động. Khi đó tổng $m+n$ bằng bao nhiêu?

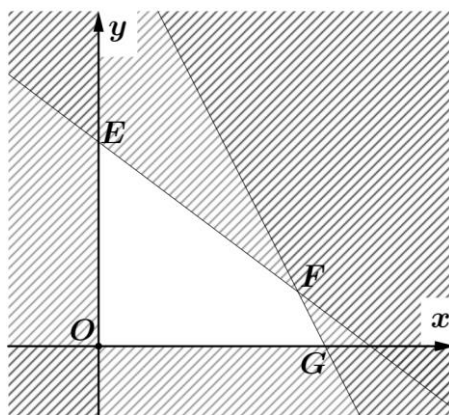
Lời giải

Gọi x là số lượng sản phẩm A và y là số lượng sản phẩm B (Điều kiện: $x \geq 0; y \geq 0$)

Điều kiện về nguyên vật liệu: $2x + y \leq 100$. Điều kiện về giờ lao động: $3x + 4y \leq 180$.

Ta có hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 100 \\ 3x + 4y \leq 180 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền không bị gạch sọc như hình vẽ dưới đây:



Ta có miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền trong của tứ giác $OEFG$

Trong đó, $E(0; 45), F(44; 12), G(50; 0)$.

Tối ưu hóa lợi nhuận: Ta sẽ tính toán lợi nhuận $P = 800.000x + 500.000y$ tại các đỉnh của miền nghiệm ta được:

Tại $E(0; 45)$: $P = 22.500.000$; $F(44; 12)$: $P = 41.200.000$; $G(50; 0)$: $P = 40.000.000$

Vậy để tối đa hóa lợi nhuận thì nhà máy cần sản xuất 44 sản phẩm A và 12 sản phẩm B.

Khi đó tổng số là $44 + 12 = 56$ sản phẩm hay $m + n = 56$.

Bài toán 13: Anh An thành lập một công ty sản xuất in ấn Sách Giáo Khoa chương trình "Chân trời sáng tạo". Nhằm tạo điều kiện cho các nhà sách tiêu thụ giá hợp lý, đơn giá mỗi bộ sách ban đầu được biểu diễn theo hàm $p(x) = 200 - 3x$ (nghìn đồng) với x là số lượng từng bộ sách bán ra và tổng chi phí sản xuất được biểu diễn theo hàm $C(x) = 75 + (80 + T)x - x^2$ (nghìn đồng) với mọi x thỏa $0 \leq x \leq 40$, trong đó T (nghìn đồng) là mức thuế giá trị gia tăng VAT phải đóng trên từng số lượng bộ sách sản xuất ra mà công ty anh An phải chi trả. Xem như công ty anh An sản xuất đều đặn trong điều kiện lí tưởng, khi lợi nhuận của công ty đạt giá trị cao nhất thì tổng mức thuế phải chi trả cũng đồng thời cao nhất. Khi đó mức thuế của mỗi bộ sách mà công ty phải trả là bao nhiêu (Đơn vị: nghìn đồng)?

Lời giải

Trước hết ta có hàm chi phí sản xuất là: $C(x) = 75 + (80 + T)x - x^2$

Doanh thu của công ty anh An biểu diễn theo hàm $R(x) = x \cdot p(x) = x(200 - 3x)$

Lợi nhuận mà công ty anh An có được là: $P(x) = R(x) - C(x) = -2x^2 + (120 - T)x - 75$

Do cần xác định số lượng bộ sách bán ra để lợi nhuận là cao nhất nên ta có:

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 + (120 - T)x = 0 \Leftrightarrow x = 30 - \frac{T}{4}$$

Khi đó với thuế mỗi bộ sách là T thì tổng mức thuế công ty phải trả là $G(T) = T\left(30 - \frac{T}{4}\right)$

Khi lợi nhuận của công ty đạt giá trị cao nhất thì tổng mức thuế phải chi trả cũng đồng thời cao nhất nên ta suy ra $G'(T) = 0 \Leftrightarrow \frac{T}{2} - 30 = 0 \Leftrightarrow T = 60$ (nghìn đồng).

Bài toán 14: Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm T được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm T là x (USD) thì số sản phẩm T các nhà máy sản xuất sẽ là $R(x) = x - 200$ và số sản phẩm T mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là $Q(x) = 4200 - x$. Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là $x_0 = 3200$ (USD). Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là a (USD) và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là 4:1. Hãy xác định giá trị của a biết lãi mà doanh nghiệp thu được do xuất khẩu là nhiều nhất.

Lời giải

Sản phẩm dư xuất khẩu khi số sản phẩm sản xuất lớn hơn số sản phẩm bán trong nước, tức là:

$$R(x) > Q(x) \Leftrightarrow x - 200 > 4200 - x \Leftrightarrow 2x > 4400 \Leftrightarrow x > 2200$$

Số lượng sản phẩm xuất khẩu là: $S_{xk} = R(x) - Q(x) = (x - 200) - (4200 - x) = 2x - 4400$

Giá bán ròng sau thuế mỗi sản phẩm xuất khẩu là: $3200 - a$ (USD)

Tổng doanh thu từ xuất khẩu là: $D_{xk} = S_{xk} \cdot (3200 - a) = (2x - 4400)(3200 - a)$

Tổng chi phí sản xuất cho số sản phẩm xuất khẩu là: $C_{xk} = S_{xk} \cdot x = (2x - 4400)x$

Lợi nhuận từ việc xuất khẩu sản phẩm là:

$$L_{xk} = D_{xk} - C_{xk} = (2x - 4400)(3200 - a) - (2x - 4400)x = (2x - 4400)(3200 - a - x) \quad (1)$$

Thuế thu được từ sản phẩm xuất khẩu là: $T = a \cdot S_{xk} = a(2x - 4400)$

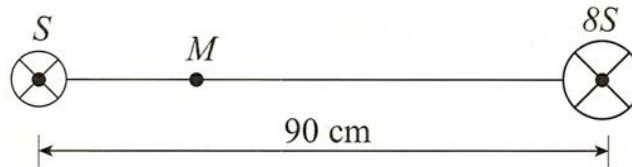
Theo bài ra, tỷ lệ giữa lãi xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là 4:1 nên ta có:

$$\frac{L_{xk}}{T} = \frac{4}{1} \Leftrightarrow L_{xk} = 4T \Leftrightarrow (2x - 4400)(3200 - a - x) = 4a(2x - 4400) \Leftrightarrow a = \frac{3200 - x}{5}$$

Thay vào (1) ta được: $L_{xk} = \frac{8}{5}(x - 2200)(3200 - x)$ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức đạt được tại $x = 2700$.

Khi đó $a = \frac{3200 - 2700}{5} = 100$.

Bài toán 15: Giả sử cường độ ánh sáng của một nguồn điểm tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn sáng đó và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ nguồn sáng. Hai nguồn điểm có cường độ lần lượt là S và $8S$, cách nhau 90 cm. Xét một điểm M nằm trên đoạn thẳng nối hai nguồn, cường độ ánh sáng tại điểm đó nhỏ nhất thì điểm đó cách nguồn có cường độ S bằng bao nhiêu centimet (cho biết cường độ sáng tại điểm M bằng tổng cường độ sáng mỗi nguồn tại điểm đó)?



Lời giải: Trả lời: 30.

Ta có công thức tính cường độ ánh sáng của một nguồn điểm là $I = k \cdot \frac{I_0}{r^2}$, trong đó: I là cường độ ánh sáng của một nguồn điểm, I_0 là cường độ của nguồn sáng, r là khoảng cách của điểm đó đến nguồn sáng.

Gọi x là khoảng cách từ M đến nguồn có cường độ là S .

Vì cường độ sáng tại điểm M bằng tổng cường độ sáng mỗi nguồn tại điểm đó nên suy ra cường độ sáng tại điểm M là

$$I_M = I_{M(S)} + I_{M(8S)} = k \cdot \frac{S}{x^2} + k \cdot \frac{8S}{(90-x)^2}, (0 < x < 90).$$

$$\Rightarrow I_M = k.S \left(\frac{1}{x^2} + \frac{8}{(90-x)^2} \right), (0 < x < 90) \Rightarrow I'_M = k.S \cdot \left(-\frac{2x}{x^4} + \frac{-8 \cdot [(90-x)^2]'}{(90-x)^4} \right) = 0$$

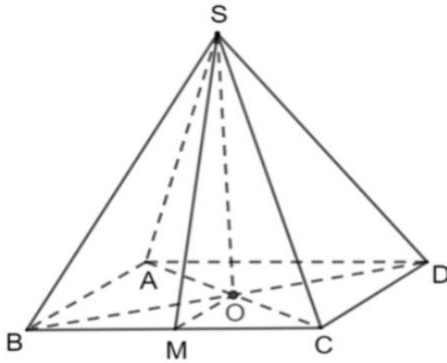
$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^3} + \frac{-8 \cdot [-2 \cdot (90-x)]}{(90-x)^4} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x^3} + \frac{16}{(90-x)^3} = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = (90-x)^3 \Leftrightarrow (2x)^3 = (90-x)^3$$

$$\Leftrightarrow 2x = 90 - x \Leftrightarrow x = 30.$$

Vậy cường độ ánh sáng tại điểm đó nhỏ nhất khi $SM = 30$ (cm).

CÁC BÀI TOÁN THUỘC NỘI DUNG KHÁC

Bài toán 1: (THPT Kinh Môn – Hải Dương 2025) Độ dốc của mái nhà là tang của góc tạo bởi mái nhà đó với mặt phẳng nằm ngang. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều. Biết rằng diện tích để lát tất cả các mặt của kim tự tháp bằng 80300 m^2 (gồm mặt bên và đáy) và biết góc α là góc mặt bên kim tự tháp với mặt đáy khi đó $\tan \alpha = \frac{9}{5}$. Tính chiều cao của kim tự tháp. (Làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 146.

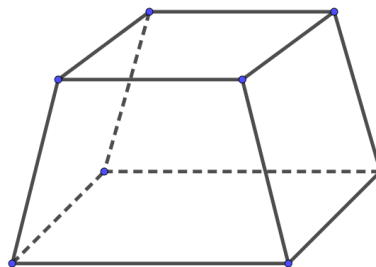
Đặt $AB = BC = CD = AD = a$, $SO = h$. Ta có : $SO \perp (ABCD) \Rightarrow \Delta SOM$ vuông tại O

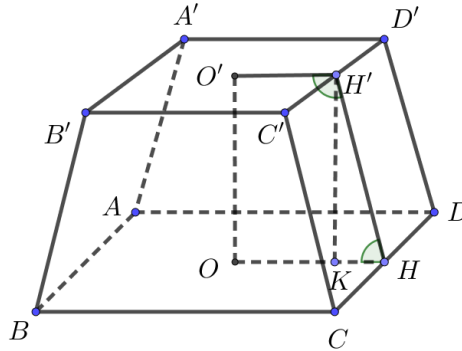
$$\tan SMO = \frac{9}{5} = \frac{SO}{MO} \Rightarrow SO = \frac{9}{5} \cdot \frac{a}{2} = \frac{9}{10}a, \text{ ta có } SO^2 + MO^2 = SM^2 \Rightarrow SM = \frac{\sqrt{106}}{10}a$$

$$S_{\Delta SBC} = S_{\Delta SCD} = S_{\Delta SAD} = S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{\sqrt{106}}{20}a^2$$

$$\text{Tổng diện tích các mặt là } 4 \cdot \frac{\sqrt{106}}{20}a^2 + a^2 = 80300 \Rightarrow a \approx 162 \Rightarrow SO = \frac{9}{10}a \approx 146.$$

Bài toán 2: (Sở Hải Phòng 2025) Người ta dự định làm một hầm rượu có dạng hình chóp cụt đều có hai cạnh đáy là 7 m và 5 m; mặt bên và đáy nhỏ tạo thành góc nhị diện có số đo bằng 120° (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích của hầm rượu trên bằng bao nhiêu mét khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải**Trả lời: 63**

Gọi hình chóp cụt đều là $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' là tâm của hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Gọi H, H' là trung điểm của CD và $C'D'$. Kẻ $H'K \perp OH$.

Ta có $O'H' \perp C'D'$ và $HH' \perp C'D'$. Suy ra $O'H'H$ là góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và đáy nhỏ.

$$\Rightarrow O'H'O = 120^\circ \Rightarrow H'HO = 60^\circ. \Delta H'HK \text{ vuông tại } K \text{ có } \tan H'HK = \frac{H'K}{HK}.$$

$$\Rightarrow H'K = HK \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow OO' = (OH - OK) \cdot \sqrt{3} \Rightarrow OO' = (OH - O'H') \cdot \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OO' = \left(\frac{1}{2} \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 5 \right) \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}. \text{ Thể tích của hàm rượy là:}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot OO' \cdot (S_{ABCD} + S_{A'B'C'D'} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{A'B'C'D'}}) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (7^2 + 5^2 + \sqrt{7^2 \cdot 5^2}) \approx 63 (\text{m}^3).$$

Bài toán 3: Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip (E) mà Trái Đất là một tiêu điểm. (E) có độ dài trục lớn và độ dài trục bé lần lượt là (khoảng) 768800km và 767619km . (Nguồn: Ron Larson (2014), Precalculus: Real Mathematics, Real People, Cengage). Hỏi khoảng cách ngắn nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng bằng bao nhiêu nghìn ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

**Lời giải****Trả lời: 363**

Giả sử (E) có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ trong đó:

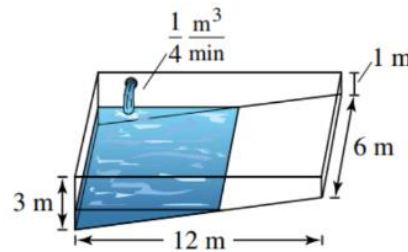
$$a = 768800 : 2 = 384400(\text{km}), b = 767619 : 2 = 383809,5(\text{km}).$$

$$\text{Ta có: } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{384400^2 - 383809,5^2} = \sqrt{453627709,8} \approx 21298,54(\text{km}).$$

Khoảng cách ngắn nhất từ Trái Đất đến Mặt Trăng là:

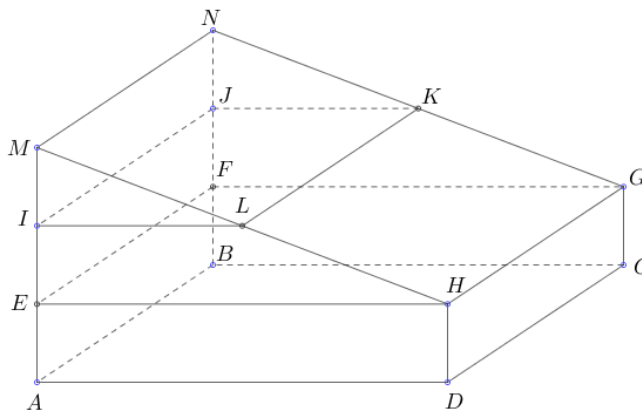
$$a - c \approx 384400 - 21298,54 = 363101,46(\text{km}) \approx 363(\text{nghìn km})$$

Bài toán 4: (Sở Hà Tĩnh 2025) Một hồ bơi được chế tạo từ một khối hộp chữ nhật có chiều dài 12 mét, rộng 6 mét, sâu 1 mét ở đầu nông và sâu 3 mét ở đầu sâu (như hình vẽ). Nước được bơm vào hồ bơi với tốc độ 0,25 mét khối mỗi phút. Biết rằng trong bể có 1 mét nước ở đầu sâu. Để lượng nước đạt 75% dung tích bể bơi thì cần bơm trong thời gian bao lâu? (đơn vị tính bằng phút).



Lời giải

Trả lời: 360



+) Mô hình hoá bể bơi như hình vẽ, với mặt trên của bể là $ABCD$ và mặt đáy bể là $MNGH$

Ta có $AD = BC = 12(\text{m}), AB = CD = 6(\text{m}), AM = 3(\text{m})$ và $DH = 1(\text{m})$

Diện tích của hình thang $ADHM$ là $S_1 = \frac{1}{2}(DH + AM).AD = 24(\text{m}^2)$

+) Thể tích bể bơi bằng thể tích khối lăng trụ đứng có đáy là $ADHM$ và chiều cao $AB = 6(\text{m})$ nên

thể tích bể bơi là: $V_1 = S_1.AB = 24.6 = 144(\text{m}^3)$. Suy ra 75% dung tích bể bơi là $V = \frac{3}{4}.144 = 108 (\text{m}^3)$

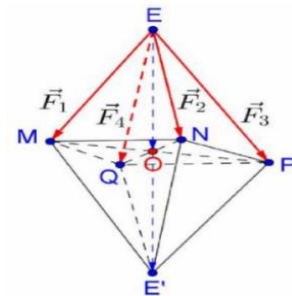
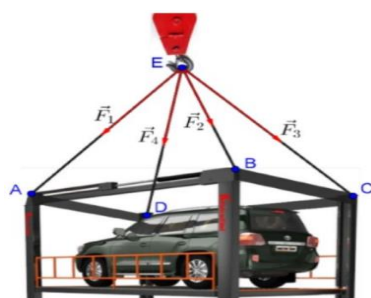
+) Gọi $IJKL$ là bề mặt mực nước ban đầu thì $MI = NJ = 1(m)$ và $IL = \frac{1}{2}EH = 6(m)$ suy ra diện tích của tam giác MIL là $S_2 = \frac{1}{2}MI \cdot IL = 3(m^2)$

Suy ra thể tích phần nước trong bể bơi lúc ban đầu bằng thể tích của khối lăng trụ đứng có đáy là tam giác MIL và chiều cao $AB = 6(m)$ nên thể tích bể bơi là: $V_2 = S_2 \cdot AB = 18(m^3)$.

+) Vì tốc độ bơm nước vào bể là $0,25$ mét khối mỗi phút và cần bơm để lượng nước đạt 75% dung tích bể bơi khi lượng nước trong bể đã có $18(m^3)$ nên thời gian cần để bơm là: $t = \frac{108 - 18}{0,25} = 360$ (phút).

Vậy thời gian bơm nước vào bể bơi là 360 phút.

Bài toán 5: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° (Hình 4). Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là $6000\sqrt{3}(N)$, trọng lượng của khung sắt là $2500(N)$ và gia tốc rơi tự do là $g = 9,8(m/s^2)$. Tính khối lượng của chiếc xe ô tô theo đơn vị kilogam (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp số: 3418.

Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm sao cho $\vec{EM} = \vec{F}_1, \vec{EN} = \vec{F}_2, \vec{EP} = \vec{F}_3, \vec{EQ} = \vec{F}_4$.

Gọi O là giao điểm của MP và NQ , E' là điểm đối xứng của E qua O .

Ta có: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4| = 6000\sqrt{3}(N)$ các mặt bên của hình chóp $E.MNPQ$ là tam giác cân bằng nhau. Vì các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 60° nên các tam giác $\triangle MEP, \triangle NEQ$ là tam giác đều, bằng nhau.

$$\text{Suy ra: } EO = \frac{EM\sqrt{3}}{2} = \frac{6000\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9000 \text{ (N)}$$

$$\text{Mặt khác: } \vec{P} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_3) + (\vec{F}_2 + \vec{F}_4) = \vec{EE'} + \vec{EE'} = 2\vec{EE'} = 4\vec{EO} \text{ suy ra } |\vec{P}| = 4|\vec{EO}| = 4 \cdot 9000 = 36000 \text{ (N)}.$$

Vậy trọng lượng của chiếc xe là: $P_{xe} = P - P_{khung} = 36000 - 2500 = 33500 \text{ (N)}$, suy ra khối lượng của

$$\text{chiếc xe là } m_{xe} = \frac{P_{xe}}{g} \approx 3418 \text{ kg}$$

Bài toán 6: Một cái ly nước hình hình trụ có chiều cao 9 cm. Lượng nước trong

ly chiếm $\frac{2}{3}$ thể tích ly nước. Hoa đặt một viên kim cương hình lập phương vào

miệng ly nước thì thấy một đỉnh của viên kim cương chạm vào mặt nước, đồng

thời mô hình ly nước và kim cương cùng lấy trục ly nước làm trục đối xứng. Nếu

ban đầu Hoa đổ nước đầy ly thì sau khi đặt khối lập phương như trên, lượng

nước tràn ra là bao nhiêu cm khối (làm tròn đến hàng phần chục và bỏ qua độ dày của ly)?



Lời giải:

Xét hình chóp tam giác đều $SABC$ trong đó S là đỉnh của hình lập phương nằm bên trong ly nước

và A, B, C là các điểm chung của kim cương với miệng ly; O là trọng tâm tam giác ABC và H là

trung điểm BC .

$$\text{Đặt } x(\text{cm}) \text{ là cạnh đáy hình chóp thì } AO = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Vì hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC bằng nhau và đôi một vuông góc (tại S) nên $SA = SB = SC = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Từ đó suy ra } SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{3}} = \frac{x\sqrt{6}}{6}.$$

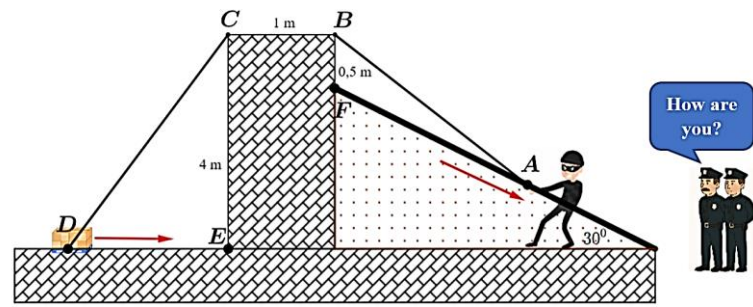
Theo giả thiết thì chiều cao hình chóp $S.ABC$ bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao ly nước, tức là $SO = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$

$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{6}}{6} = 3 \Rightarrow x = 3\sqrt{6} \text{ cm}$$

Ta biết rằng thể tích nước tràn ra bằng với thể tích khối chóp $S.ABC$. Thể tích đó là

$$V = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{(3\sqrt{6})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2} \approx 23,4 \text{ cm}^3.$$

Bài toán 7: Một tên trộm đang cố gắng kéo thùng nữ trang qua một bức tường có độ dày $BC = 1\text{ m}$; biết rằng tường cao 4 m và sợi dây được kéo theo đường gấp khúc $ABCD$ có độ dài không đổi bằng 20 m , đoạn $BF = 0,5\text{ m}$. Trong khi kéo thì tên trộm luôn giữ đầu dây theo một thanh vịn của cầu thang (đầu dây dịch chuyển theo phương AF). Biết rằng thanh vịn cầu thang hợp với phương ngang một góc bằng 30° .



Khi hai chú cảnh sát xuất hiện thì vị trí A cách F khoảng 6 m và thùng D tiến về phía E với tốc độ 1 m/s . Hỏi đầu dây A rời xa điểm F với tốc độ bao nhiêu m/s ? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải:

Đặt $DE = x(\text{m})$, $AF = y(\text{m})$. Ta có $CD = \sqrt{x^2 + 16}$ và $AFB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$; suy ra $AB = \sqrt{y^2 + 0,5^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot y \cos 120^\circ} = \sqrt{y^2 + 0,5y + 0,25}$.

Ta có $AB + CD + 1 = 20 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{y^2 + 0,5y + 0,25} = 19$ (*).

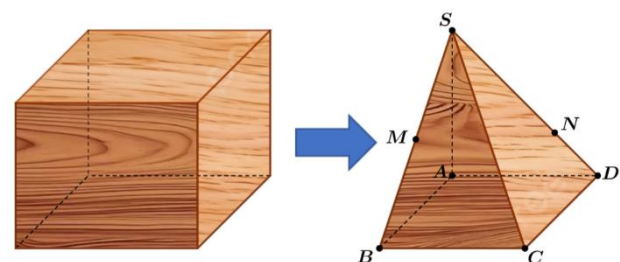
Thay $y = 6$ vào (*) ta được $\sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{6^2 + 0,5 \cdot 6 + 0,25} = 19 \Rightarrow x \approx 12,1$. Đạo hàm hai vế của (*) theo

biến t ta được: $\frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{2y + 0,5}{2\sqrt{y^2 + 0,5y + 0,25}} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$ (**)

Thay $y = 6\text{ m}$; $x = A \approx 12,1\text{ m}$; $\frac{dx}{dt} = -1\text{ m/s}$ (do x ngày càng giảm theo thời gian t) vào (**) ta tính

được $\frac{dy}{dt} \approx 0,95\text{ m/s}$ hay đầu dây A rời xa điểm F với tốc độ khoảng $0,95\text{ m/s}$.

Bài toán 8: Từ một khối gỗ hình lập phương có cạnh bằng 5 dm , người thợ mộc chỉ cần đến hai lát cắt là có thể tạo ra một khối gỗ có dạng hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA = AB = 5\text{ dm}$. Người thợ cần tạo ra một vật để trang trí theo yêu cầu của khách hàng, anh đã chọn M là trung điểm SB , N thuộc cạnh SD sao cho $SN = 2ND$; sau đó anh ta tiếp tục thực hiện các lát cắt để có được vật thể hình tứ diện $ACMN$, thể tích vật thể sau cùng mà người thợ mộc làm ra là bao nhiêu dm^3 (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải: Gọi O là giao điểm của AC và BD trong mặt phẳng đáy.

Ta có $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{5^3}{3} = \frac{125}{3}$.

Vì OM là đường trung bình tam giác SBD nên $OM \parallel SD \Rightarrow SD \parallel (AMC)$.

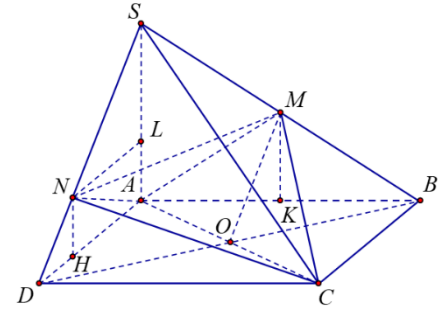
Do đó $d(N, (AMC)) = d(D, (AMC)) = d(B, (AMC))$.

Suy ra: $V_{ACMN} = V_{N,MAC} = V_{D,MAC} = V_{B,MAC} = V_{M,ABC}$.

Ta lại có

$$\frac{V_{M,ABC}}{V_{S,ABC}} = \frac{d(M, (ABCD)) \cdot S_{ABC}}{d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} d(S, (ABCD)) \cdot \frac{1}{2} \cdot S_{ABCD}}{d(S, (ABCD)) \cdot S_{ABCD}} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{M,ABC} = \frac{1}{4} V_{S,ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{125}{3} = \frac{125}{12} \approx 10,4 \text{ dm}^3.$$



Bài toán 9: Cho ba đồng hồ cát A, B, C . Lượng cát ban đầu trong mỗi đồng hồ lần lượt là $3^a; 9^b; 27^c$ và mỗi giây, cát trong mỗi đồng hồ sẽ chảy từ nửa trên xuống nửa dưới với tốc độ cố định lần lượt là $a; b; c$ (đơn vị: khối lượng cát/giây). Các số $a; b; c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân; đồng thời, các số $3^a; 9^b; 27^c$ cũng theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, và hai cấp số nhân này có cùng công bội. Gọi $t_A; t_B; t_C$ (tính theo giây) là thời gian mà từng đồng hồ cát A, B, C đo được (không lật ngược đồng hồ sau khi cát đã chảy hết). Tính giá trị $t_A + t_B + t_C$

Lời giải

Trả lời: 27

$$\text{Ta có: } t_A = \frac{3^a}{a}; t_B = \frac{9^b}{b}; t_C = \frac{27^c}{c} \text{ và } \begin{cases} b^2 = ac \\ 9^{2b} = 3^a \cdot 27^c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ 3^{4b} = 3^{a+3c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ 4b = a + 3c \end{cases}$$

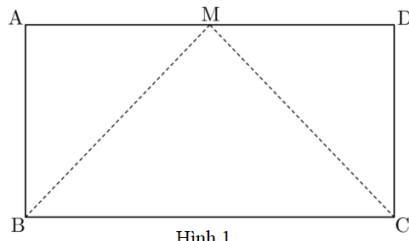
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16b^2 = 16ac \\ 16b^2 = (a+3c)^2 \end{cases} \Rightarrow (a-c)(a-9c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = c (*) \\ a = 9c \end{cases}$$

Xét (*) ta có $ar^2 = c \Rightarrow r^2 = 1$ hay $3^a r^2 = 27^c \Rightarrow 3^a = 27^c \Leftrightarrow 3^a = 27^a$ (vô lý) nên loại

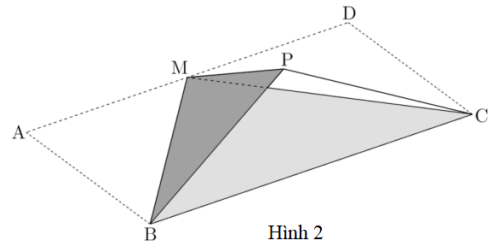
$$\text{Xét } a = 9c \text{ thì } b = 3c \text{ suy ra } r = \frac{b}{a} = \frac{9^b}{3^a} \Leftrightarrow \frac{3c}{9c} = 3^{6c-9c} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = 3^{-3c} \Rightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow b = 1; a = 3$$

$$\text{Vậy } t_A + t_B + t_C = 9 + 9 + 9 = 27$$

Bài toán 10: Cho tờ giấy hình chữ nhật $ABCD$ như Hình 1, với $AB = 3, AD = 2\sqrt{7}$. Gọi M là trung điểm của đoạn AD . Gập tờ giấy theo hai đường thẳng BM và CM sao cho hai điểm A và D trùng nhau tại một điểm P như Hình 2. Khi đó, gọi θ là góc giữa hai mặt phẳng PMB và BCM . (Không xét độ dày của tờ giấy)



Hình 1



Hình 2

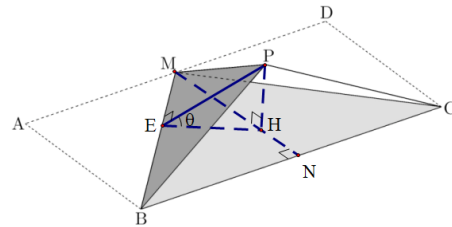
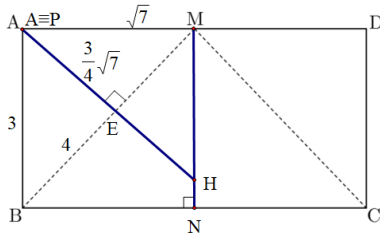
Giá trị của $\cos \theta$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,78

Kẻ $MN \perp BC$ tại N . Khi đó kẻ $PH \perp MN$ (dễ chứng minh được $PH \perp (MBC)$)

Kẻ $PE \perp MB$ tại E , suy ra $\begin{cases} MB \perp PE \\ MB \perp PH \end{cases} \Rightarrow MB \perp (EPH) \rightarrow \cos \theta = \frac{HE}{PE} (*)$



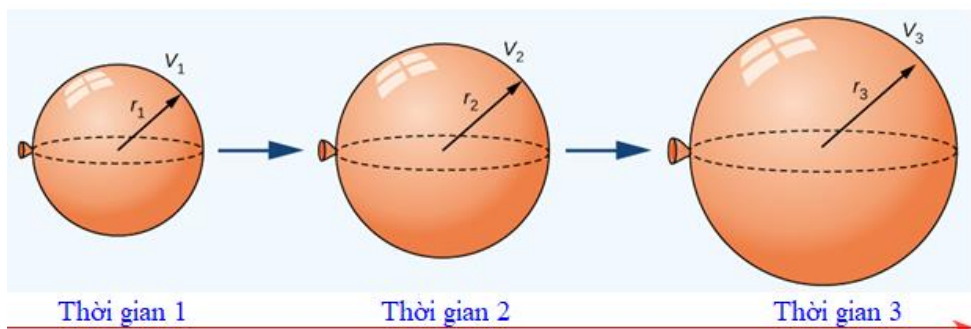
Xét tam giác vuông AMB có: $AB \cdot AM = BM \cdot AE \Leftrightarrow 3 \cdot \sqrt{7} = 4AE \Rightarrow AE = \frac{3}{4}\sqrt{7}$

Ta có $\triangle BAM \sim \triangle AEM$ nên $\frac{BA}{AE} = \frac{BM}{AM} = \frac{AM}{EM} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{EM} \Rightarrow EM = \frac{7}{4}$

Dễ thấy $AHM = AME$ và $HAM = ABM = BMH$ nên $\frac{BA}{AM} = \frac{EM}{EH} \Rightarrow EH = \frac{7}{12}\sqrt{7}$

Từ (*) ta có: $\cos \theta = \frac{HE}{PE} = \frac{\frac{7}{12}\sqrt{7}}{\frac{7\sqrt{7}}{4}} = \frac{12}{3\sqrt{7}} = \frac{7}{9} \approx 0,78$

Bài toán 11: Một quả bóng bay hình cầu đang được bơm khí với tốc độ không đổi $2\text{cm}^3 / \text{giây}$ (hình vẽ tham khảo).



Hỏi: Tốc độ tăng bán kính của quả bóng là bao nhiêu (đơn vị cm/giây) khi bán kính đạt 3cm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,02

Thể tích V của một quả cầu bán kính r (tính bằng cm) được cho bởi công thức: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 (cm^3)$

Vì quả bóng đang được bơm khí, nên cả thể tích và bán kính đều là các hàm số theo thời gian.

Do đó, tại thời điểm t giây sau khi bắt đầu bơm, thể tích khí bên trong quả bóng là:

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3 (cm^3)$$

Lấy đạo hàm hai vế theo thời gian t : $V'(t) = 4\pi[r(t)]^2 r'(t)$

Điều này cho thấy tốc độ thay đổi của thể tích liên quan đến tốc độ thay đổi của bán kính.

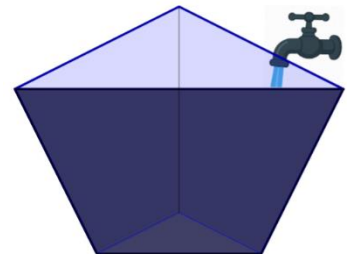
- Quả bóng đang được bơm khí với tốc độ không đổi $2cm^3 /$ giây, nên: $V'(t) = 2cm^3 /$ giây

Do đó: $2 = 4\pi[r(t)]^2 r'(t) \Rightarrow r'(t) = \frac{1}{2\pi[r(t)]^2} cm /$ giây.

Thế $r = 3$ vào công thức: $r'(t) = \frac{1}{2\pi(3)^2} = \frac{1}{18\pi} cm /$ giây.

Vậy tốc độ tăng bán kính của quả bóng tại thời điểm bán kính 3 cm là: $\frac{1}{18\pi} \approx 0,02 cm /$ giây

Bài toán 12: Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều đáy là các tam giác cạnh bằng 1 dm và 3 dm. Chiều cao chậu nước bằng 4 dm. Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi 0,5 lít/phút. Đến phút thứ 10 thì tốc độ dâng lên của nước trong chậu là bao nhiêu dm/phút? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải:

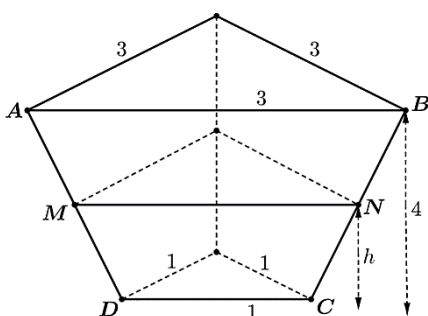
Đáp số: 0,17

Gọi MN là độ dài cạnh tam giác đều theo mực nước tức thời (MN thay đổi).

Đặt $MN = a \times h + b$ (hàm số bậc nhất theo h).

Khi $h = 0$ thì $MN = 1$; khi $h = 4$ thì $MN = 3$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} b = 1 \\ 4a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}; \text{ suy ra } \boxed{MN = \frac{1}{2}h + 1}.$$



Diện tích mặt nước tức thời là $S = \frac{MN^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(0,5h+1)^2 \sqrt{3}}{4}$.

Thể tích nước tức thời là $V = \frac{1}{3}h(S_0 + \sqrt{S_0 S} + S)$; S_0 là diện tích mặt nước ban đầu (đáy nhỏ).

$$V = \frac{1}{3}h \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(0,5h+1)^2 \sqrt{3}}{4}} + \frac{(0,5h+1)^2 \sqrt{3}}{4} \right) = \frac{h\sqrt{3}}{12} [1 + (1+0,5h) + (1+0,5h)^2].$$

$$V = \frac{h\sqrt{3}}{12} (0,25h^2 + 1,5h + 3) = \frac{\sqrt{3}}{12} (0,25h^3 + 1,5h^2 + 3h) \quad (*).$$

Sau 10 phút thì lượng nước trong chậu là $V = 0,5 \times 10 = 5 \text{ dm}^3$.

Do đó $\frac{\sqrt{3}}{12} (0,25h^3 + 1,5h^2 + 3h) = 5 \Rightarrow h \approx 3,27 \text{ dm}$ (**Lưu vào A**).

Từ (*) đạo hàm hai vế theo t ta được: $\frac{dV}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{12} (0,75h^2 + 3h + 3) \cdot \frac{dh}{dt} \quad (**).$

Thay các giá trị $h = A$; $V = 5$; $\frac{dV}{dt} = 0,5$ vào (**) ta được: $\frac{dh}{dt} \approx 0,17 \text{ dm/phút}$.

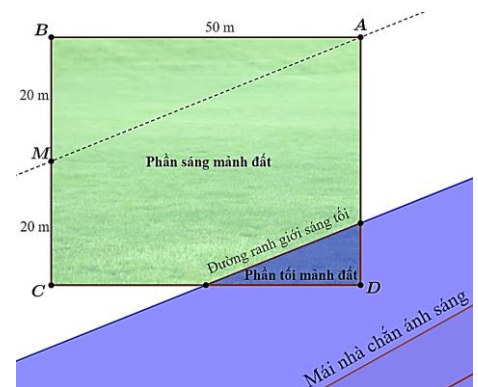
Bài toán 13: Một mảnh đất hình chữ nhật có kích thước $40 \text{ m} \times 50 \text{ m}$ đang được người chủ trồng cỏ tự nhiên. Vào buổi sáng, khi mặt trời vừa lên, mảnh đất này bị một mái nhà xưởng gần đó chắn ánh sáng. Khi mặt trời lên cao hơn, ánh sáng đã chiếu từ từ lên mảnh đất. Ta xem ranh giới giữa phần được chiếu sáng và phần tối là các đường thẳng song song thay đổi.

Có thời điểm đường ranh giới này đi qua hai điểm A, M như hình vẽ (M là trung điểm một cạnh hình chữ nhật).

Khi diện tích phần tối của mảnh đất bằng 75 m^2 , người ta đo được tốc độ giảm cạnh theo phương AD bằng 2 cm/s ; hỏi tốc độ giảm diện tích phần tối của mảnh đất là bao nhiêu cm^2/s ? Kết quả được làm tròn đến hàng phần chục.

Lời giải

Trả lời: 120



Xét tam giác ABM vuông tại B có $\tan BAM = \frac{BM}{AB} = \frac{2}{5}$.

Đặt $x = DF \in [0; 40]$, $y = DE \in [0; 50]$ (x, y thay đổi (giảm) vì ánh sáng ngày càng lan rộng).

Vì $EF \parallel AM$ nên $\tan FED = \tan BAM \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{5x}{2}}$.

Diện tích phần tối tức thời là $S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x \cdot \frac{5x}{2}$ hay $\boxed{S = \frac{5}{4}x^2}$

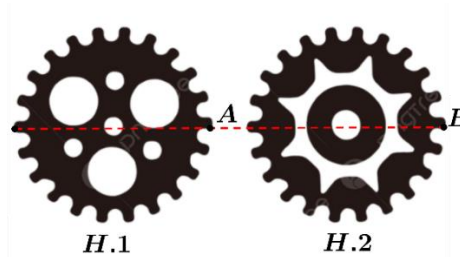
(1).

Khi diện tích phần tối bằng 75 m^2 thì $\frac{5}{4}x^2 = 75 \Rightarrow x^2 = 60 \Rightarrow x = 2\sqrt{15} \text{ m}$.

Đạo hàm hai vế của (1) theo biến t ta được: $\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{5}{2}x \cdot \frac{dx}{dt}}$ (2).

Thay $x = 2\sqrt{15} \text{ m} = 200\sqrt{15} \text{ cm}$ và $\frac{dx}{dt} = 2 \text{ cm/s}$ vào (2), ta được $\frac{dS}{dt} \approx \boxed{3873} \text{ cm}^2/\text{s}$.

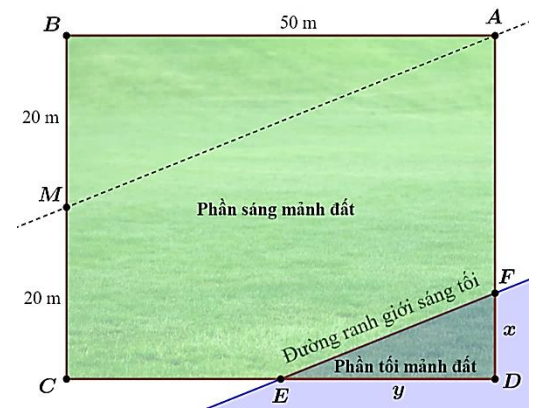
Bài toán 14: Hình vẽ dưới đây là hai bánh răng của một động cơ, chúng có cùng kích thước. Khi động cơ hoạt động, hai bánh răng quay đều cùng chiều. Biết tốc độ quay của bánh răng ở hình 2 gấp đôi tốc độ quay của bánh răng ở hình 1 và phương trình biểu thị độ cao của điểm A ở bánh răng thứ nhất là $h = 2R + R\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ (trong đó R là bán kính bánh răng, t là thời gian tính bằng giây, h là độ cao của điểm A). Giả sử tại thời điểm bắt đầu khởi động, hai điểm A và B có độ cao bằng nhau. Sau bao nhiêu giây kể từ thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động hai điểm A, B có độ cao bằng nhau. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Vì hai bánh răng có cùng kích thước, tốc độ của bánh răng thứ hai gấp đôi tốc độ của bánh răng thứ nhất và tại thời điểm ban đầu, hai điểm A, B có độ cao bằng nhau nên phương trình biểu thị độ cao của điểm B là $h' = 2R + R\sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right)$.

Hai điểm A, B có độ cao bằng nhau khi $h = h'$. Ta có phương trình:



$$2R + R \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = 2R + R \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{5}t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{5}t = \frac{\pi}{5}t + k2\pi \\ \frac{2\pi}{5}t = \pi - \frac{\pi}{5}t + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi t = k10\pi \\ 3\pi t = 5\pi + k10\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10k \\ t = \frac{5}{3} + k\frac{10}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Họ nghiệm thứ nhất có nghiệm dương nhỏ nhất là $t = 10$. Họ nghiệm thứ hai có nghiệm dương nhỏ nhất là $t = \frac{5}{3}$. Vậy, thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động, hai điểm A, B có độ cao bằng nhau là $t = \frac{5}{3} \approx 1,67$ giây.

Bài toán 15: (Chuyên Phan Bội Châu – Chuyên Hà Tĩnh 2025) Trong lần đầu tiên nuôi gà, một trang trại do thiếu kinh nghiệm nên dự tính lượng thức ăn cho gà hằng ngày là không đổi và đã dự trữ thức ăn đủ dùng trong 50 ngày. Nhưng thực tế, theo sự phát triển của gà, để đảm bảo chất lượng thì kể từ ngày thứ 2 trở đi lượng thức ăn nuôi gà mỗi ngày của trang trại đã tăng thêm 1% so với ngày trước đó. Hỏi lượng thức ăn mà trang trại dự trữ đủ dùng cho gà ăn tối đa bao nhiêu ngày mà vẫn đảm bảo chất lượng ăn mỗi ngày? (lấy kết quả số ngày là số nguyên).

Lời giải

Trả lời: 40

Gọi a là lượng thức ăn hằng ngày theo dự kiến thì tổng lượng thức ăn đã dự trữ là $50a$.

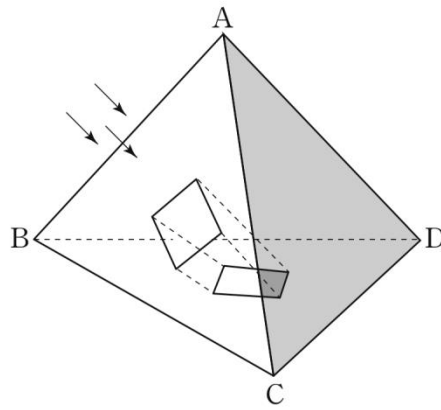
Giả sử lượng thức ăn đủ dùng cho tối đa n ngày.

Ta có lượng thức ăn tiêu thụ trong ngày thứ k ($1 \leq k \leq n$) là $a \cdot 1,01^{k-1}$.

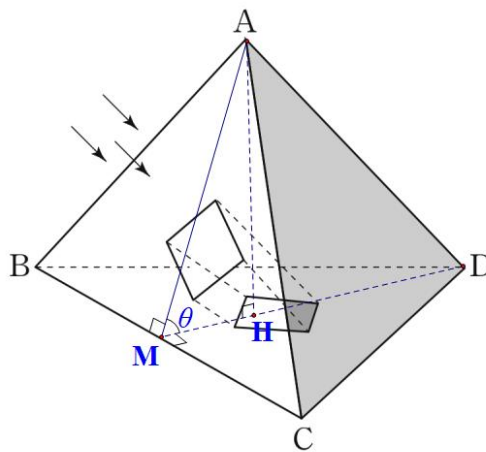
Do đó phải có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{n-1}) \leq 50a \Leftrightarrow \frac{1,01^n - 1}{1,01 - 1} \leq 50 \Leftrightarrow 1,01^n \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow n \leq 40,75$.

Vậy lượng thức ăn đủ dùng cho tối đa 40 ngày.

Bài toán 16: Như hình vẽ, ánh sáng được chiếu vuông góc với mặt ABC của một hình tứ diện đều $ABCD$ được làm bằng giấy đen. Để ánh sáng chỉ chiếu lên mặt đáy BCD , người ta khoét một lỗ hình vuông trên mặt ABC . Biết rằng độ dài một cạnh của hình vuông là 2, hãy tính diện tích của phần được chiếu sáng trên mặt đáy BCD .

**Lời giải****Trả lời: 12**

Vì hình tứ diện đều nên kẻ $AH \perp (BCD)$ ta có được H là trọng tâm tam giác BDC



Kẻ $DH \perp BC$ tại M suy ra M là trung điểm của BC (do tam giác BDC là tam giác đều)

Suy ra $BC \perp (ADM)$ hay góc giữa hai mặt phẳng $(ABC); (BDC)$ bằng góc $AMD = \theta$

Gọi diện tích tích hình vuông đã khoét trên mặt (ABC) là $S_0 = 4$.

Gọi diện tích chiếu trên mặt đáy BDC là S .

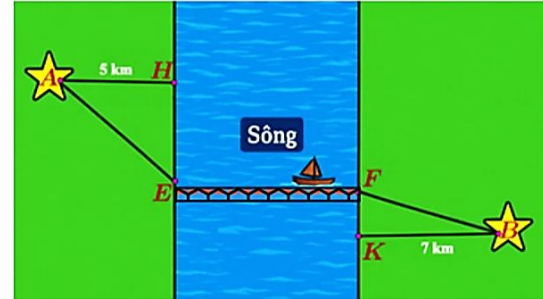
Khi đó ta có: $S_0 = S \cdot \cos \theta = S \cdot \frac{MH}{AM} = S \cdot \frac{1}{3} = 4 \Rightarrow S = 12$

II – Các bài tập có đáp án

1. Phần trả lời đúng sai

CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍCH PHÂN – ĐẠO HÀM

Bài toán 1: Hai thành phố cách nhau một con sông. Lấy A và B lần lượt là hai điểm mốc của hai thành phố trong việc đo đạc, đơn vị là km . Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng vị trí A cách con sông một khoảng $AH = 5 km$ và vị trí B cách con sông một khoảng là $BK = 7 km$ (xem hình vẽ), biết $HE + KF = 24 km$ và độ dài EF không đổi. Đặt $HE = x (km)$, với $x \in (0; 24)$.



a) $AE = \sqrt{25 + x^2} (km)$, $BF = \sqrt{49 + (24 - x)^2} (km)$.

b) Tổng quãng đường đi từ A đến B bằng $\sqrt{25 + x^2} + \sqrt{49 + (24 - x)^2} + EF (km)$.

c) Nếu đặt $f(x) = AE + BF (km)$ thì $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{x - 24}{\sqrt{x^2 - 48x + 625}}$, $\forall x \in (0; 24)$.

d) Người ta muốn đi từ A đến B theo quãng đường ngắn nhất thì họ phải xây cầu sao cho khoảng cách hai điểm E, H bằng $9 km$.

Bài toán 2: Một vật được ném lên từ độ cao $300 m$ với vận tốc được cho bởi công thức

$v(t) = -9,81t + 29,43 (m/s)$. Gọi $h(t) (m)$ là độ cao của vật so với mặt đất tại thời điểm $t (s)$ tính từ lúc bắt đầu ném vật.

a) Vận tốc của vật triệt tiêu tại thời điểm $t = 2s$.

b) Hàm số $h(t) = -\frac{9,81}{2}t^2 + 29,43t$.

c) Sau $11s$ tính từ lúc ném thì vật đó chạm đất (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Vật đạt độ cao lớn nhất là $344 m$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài toán 4: (Sở Hòa Bình 2025) Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5cm$. Tốc độ tăng trưởng chiều cao của cây cà chua khi trồng được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ (tính bằng centimét) là chiều cao của cây cà chua ở tuần thứ $t (t \geq 0)$



a) $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{1}{3}t^3$.

b) Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây cà chua kéo dài 10 tuần.

c) Chiều cao của cây cà chua ở tuần thứ 6 lớn hơn 40cm.

d) Chiều cao tối đa của cây cà chua không vượt quá 90 cm.

Bài toán 5: (Sở Đà Nẵng 2025) Một bể chứa dầu ban đầu có 50.000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t , trong đó t tính theo giờ ($0 \leq t \leq 24$). Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t) = k\sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 58.000 lít.

a) Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k\sqrt{t}$.

b) $V(t) = \frac{2k}{3} \cdot t\sqrt{t} + 50.000$ với $0 \leq t \leq 24$ và k là hằng số.

c) Sau 16 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 148.000 lít.

d) Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 500 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 72.500 lít.

Bài toán 6: (Sở Vĩnh Phúc 2025) Quan sát quá trình sinh trưởng và phát triển của một giống cà chua mới trong 18 tuần kể từ khi trồng, các kĩ sư thuộc một trung tâm giống cây trồng nhận thấy: chiều cao thân cây sau t tuần kể từ khi trồng được tính xấp xỉ bởi hàm số $h(t) = 40\log_3(2t+1) + 12$ (đơn vị: centimet, $0 \leq t \leq 18$). Sau 9 tuần kể từ khi trồng, hoa bắt đầu kết trái. Kể từ đó, đường kính trái cà chua ở tuần thứ t xấp xỉ bởi hàm số $d(t) = 3^{\frac{2t-17}{t-8}} - 3$ (đơn vị: centimet, $9 \leq t \leq 18$).

a) Khi được 4 tuần tuổi, chiều cao của thân cây cà chua là 92 cm.

b) Chiều cao của thân cây cà chua liên tục tăng trong suốt 18 tuần.

c) Sau 4 tuần, kể từ khi kết trái, đường kính trái cà chua lớn hơn 12 cm.

d) Tốc độ tăng trưởng chiều cao của thân cây cà chua ở tuần thứ 7 (làm tròn đến hàng phần trăm)

xấp xỉ bằng 4,85 (cm/tuần).

Bài toán 7: (Sở Yên Bái 2025) Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mặt nước biển) tại thời điểm t là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t) = -0,12t^2 + 1,2t$ với $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát ($t = 0$) khinh khí cầu ở độ cao 520 m.

a) $h(t) = -0,04t^3 + 0,6t^2$ ($0 \leq t \leq 29$).

b) Tại thời điểm $t = 3$ phút độ cao của khinh khí cầu là 524,32 m.

c) Sau 15 phút từ khi xuất phát thì khinh khí cầu trở lại độ cao khi bắt đầu xuất phát.

d) Độ cao tối đa của khinh khí cầu bay là 540 m.

Bài toán 8: (Nghệ An 2025) Trong dây chuyền sản xuất sữa chua hiện đại của một nhà máy thực phẩm, từng giọt sữa chua âm thầm chuyển mình dưới tác động của hàng triệu vi khuẩn Lactic, những “nghệ nhân tí hon” kiến tạo vị chua thanh đặc trưng. Mật độ vi khuẩn (số triệu tế bào trên mỗi ml sữa chua) tại thời điểm t (giờ) được kí hiệu là $N(t)$. Ban đầu ($t = 0$ giờ), mật độ vi khuẩn đo được là $N(0) = 10$ triệu tế bào/ml. Do sự thay đổi về nguồn dinh dưỡng (đường lactose giảm) và độ pH (axit lactic tăng) nên tốc độ thay đổi mật độ vi khuẩn $N'(t)$ (đơn vị: triệu tế bào/ ml mỗi giờ) được mô hình hóa bởi công thức $N'(t) = 18t - 3t^2$ (triệu tế bào/ml mỗi giờ) với t là thời gian tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 7$).

a) $N'(1) = 15$ triệu tế bào/ml giờ.

b) $\int N'(t) dt = 9t^2 - t^3$.

c) So với lúc ban đầu ($t = 0$), mật độ vi khuẩn đã tăng thêm 108 triệu tế bào/ml khi đến thời điểm $t = 6$ giờ.

d) Tại thời điểm $t = 7$ giờ, mật độ vi khuẩn trong 1 ml sữa chua là 108 triệu tế bào/ml.

Bài toán 9: (Nghệ An 2025) Trong một phòng thí nghiệm có máy đo nồng độ khí CO_2 cho thấy: nồng độ khí CO_2 trong phòng thay đổi theo thời gian t (tính bằng giờ) và được thể hiện qua hàm số $f(t) = 400 + \frac{2000t}{t^2 + 5}$ (ppm), với $t \geq 0$ (Khi nói nồng độ khí CO_2 trong không khí là 400 ppm, điều đó có nghĩa là: Trong **một triệu phần thể tích** của không khí, có **400 phần thể tích** là khí CO_2).

Các khẳng định sau đúng hay sai?

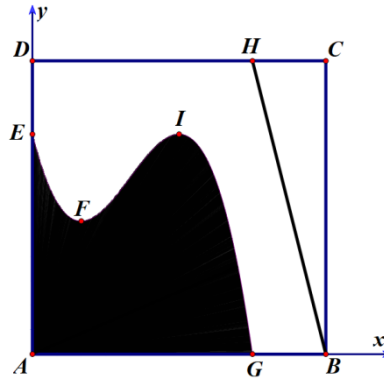
a) Nồng độ khí CO_2 trong phòng tại thời điểm $t = 0$ là 400 (ppm).

b) $f'(t) = \frac{-2000t^2 - 10000}{(t^2 + 5)^2}$ với $t \geq 0$.

c) Nghiệm của phương trình $f'(t) = 0$ là $t = 2$.

d) Nồng độ khí CO_2 cao nhất đo được trong phòng thí nghiệm (làm tròn đến hàng đơn vị) là 947 (ppm).

Bài toán 10: (SGD Huế 2025) Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12m$. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (*phần tô đậm*) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn vị là $1m$, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3m$ và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là $2m$ và $6m$.



a) Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.

b) Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x+2)(x+6)$

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .

d) Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng $2,56m$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài toán 11: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, khi $v = 10$ (km/h) thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng trên một giờ.

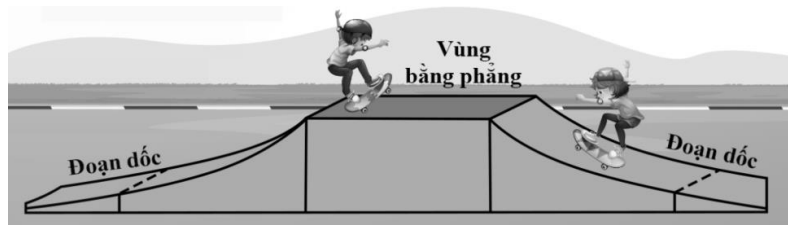
a) Khi vận tốc $v = 10$ (km/h) thì chi phí nguyên liệu cho phần thứ nhất trên một kilomet đường sông là 48000 đồng.

b) Hàm số xác định tổng chi phí nguyên liệu trên một kilomet đường sông với vận tốc x (km/h) là $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^3$.

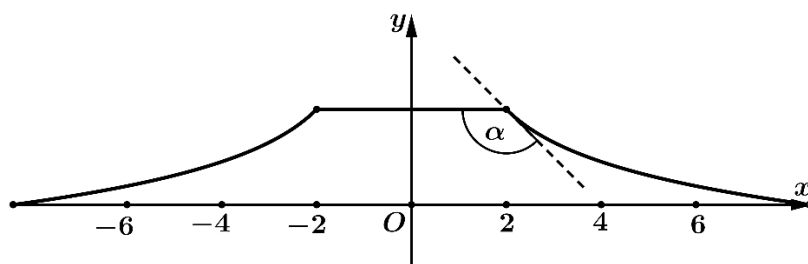
c) Khi vận tốc $v = 30$ (km/h) thì tổng chi phí nguyên liệu trên một km đường sông là 43000 đồng.

d) Vận tốc nhỏ nhất của tàu là $v = 20$ (km/h) thì tổng chi phí nguyên liệu trên một km đường sông là nhỏ nhất

Bài toán 12: Hình vẽ bên dưới minh họa một phần khu vực thiết kế dành cho các hoạt động trượt ván, patin. Đường lên của khu vực này dẫn đến một bề mặt nằm ngang (gọi là vùng bằng phẳng), tiếp theo là đoạn dốc xuống, hai đường đối xứng nhau hai bên. Mặt trước và mặt sau của chương ngại vật vuông góc với mặt đất ngang.



Để mô tả mặt bên phía trước một cách toán học, ta xét mặt phẳng Oxy với trục Ox là phần bên dưới, trục Oy là trục đối xứng của bề mặt đang xét. Vùng bằng phẳng trải dài trong mô hình từ $-2 \leq x \leq 2$. Đường cong mặt cắt ngang của đoạn dốc xuống trong khoảng $2 \leq x \leq 8$ được mô tả bởi đồ thị của hàm số $f(x) = 2 - \ln(x-1)$. Trong hệ tọa độ này, một đơn vị chiều dài tương ứng với một mét trong thực tế.

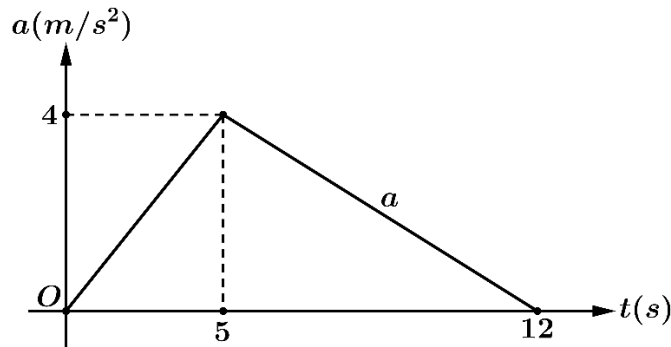


- a)** Chiều cao của vùng bằng phẳng là 2m.
- b)** Trên khoảng $(2;8)$ có một điểm x_0 mà tại đó, tốc độ thay đổi tức thời của hàm $f(x)$ bằng tốc độ thay đổi trung bình của hàm $f(x)$ trên khoảng này. Khi đó $x_0 = 4,3$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
- c)** Trên mô hình thì giá trị của góc $\alpha = 120^\circ$ được xác định bởi mặt phẳng nằm ngang của vùng bằng phẳng và đoạn đường dốc xuống tại cạnh chuyển tiếp (tiếp tuyến tại điểm $x = 2$).
- d)** Mặt bên phía trước của chương ngại vật được sử dụng một phần làm khu vực quảng cáo (xem Hình 1). Trong mô hình, khu vực này bao gồm hai phần diện tích, cụ thể là diện tích giữa đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành trong đoạn $[2;6]$ và một phần đối xứng với nó trong góc phần tư thứ hai. Diện tích của khu vực quảng cáo là $7,91 \text{ m}^2$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài toán 13: Giả sử giá bán cho mỗi sản phẩm độc quyền được cho bởi công thức $P(a) = 500 - 3a$ trên mỗi sản phẩm và hàm chi phí trung bình để sản xuất là $\bar{C}(a) = 0,1a + 4 + \frac{600}{a}$ trong đó a là số đơn vị sản phẩm và đơn vị tính là USD

- a)** $a = 80$ là lượng sản phẩm bán ra để lợi nhuận thu được tối đa
- b)** Giá bán để lợi nhuận thu được tối đa là 260 (USD)
- c)** Lợi nhuận thu được tối đa là 19180 (USD)
- d)** Nếu mỗi sản phẩm phải chịu 12,4 (USD) tiền thuế thì giá bán sản phẩm để thu được lợi nhuận tối đa là 266 (USD)

Bài toán 14: Cho một vật bắt đầu chuyển động thẳng với đồ thị biểu diễn gia tốc theo thời gian như hình vẽ dưới đây



- a)** Tại thời điểm $t_1 = 5$ giây thì vận tốc của vật là 10 m/s
- b)** Tại thời điểm $t_2 = 10$ giây thì vận tốc của vật bằng 20 m/s
- c)** Quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là 10 m
- d)** Quãng đường vật đi được trong 12 giây đầu tiên là 152 m

Bài toán 15: Hiệu ứng Doppler là hiện tượng tần số của sóng âm mà tai thu nhận thay đổi theo vận tốc tương đối giữa người nghe và nguồn âm. Cụ thể hơn, nếu nguồn âm phát ra âm thanh với tần số f_0 có vận tốc tương đối với người nghe là v_0 thì tần số âm thanh người nghe nghe được là

$$f = \frac{a}{a \pm v_0} f_0 \text{ trong đó } a = 343(\text{m/s}) \text{ là vận tốc âm thanh và dấu "}\pm\text{" phụ thuộc vào nguồn âm đang}$$

ra xa hay tiến lại gần người nghe. Một chiếc xe gắn kèm loa phát ra âm thanh với tần số không đổi 432 Hz đi vòng quanh một hồ nước hình tròn có đường kính 1 km với vận tốc không đổi 60 (km/h). Một người cách ở tâm hồ nước 1,5 km nghe thấy tiếng chiếc xe

- a)** Vận tốc góc của chiếc xe với tâm là tâm hồ nước bằng $\frac{1}{30}$ (rad/s)
- b)** Lấy thời điểm $t_0 = 0$ là lúc người đó cách chiếc xe 1000 m thì khoảng cách giữa người nghe và chiếc xe tại thời điểm $t = \frac{\pi}{3}$ (giây) xấp xỉ 1,32 km.
- c)** Tần số âm thanh mà người nghe nghe được tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 30\pi$ là:

$$f(t) = \frac{432at}{at + \sqrt{2,5 - 1,5\cos\frac{t}{30}}} \text{ (Hz)}$$

d) Tai người nghe nghe được tần số âm thanh thấp nhất vào thời điểm $t = 15\pi$ (giây)

Bài toán 16: (Sở Lào Cai 2025) Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$.

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

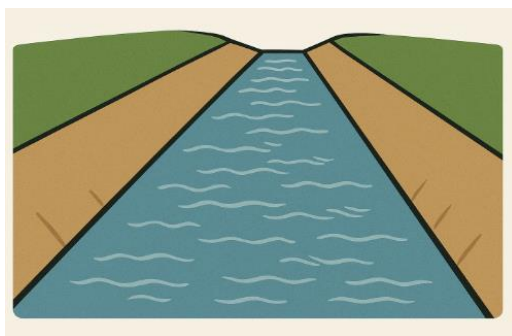
a) Thời điểm 1 phút sau khi tiêm, nồng độ thuốc trong máu là 10 (mg/l).

b) Đạo hàm của hàm số $C(x)$ là $C'(x) = \frac{60 - 30x^2}{(x^2 + 2)^2}$.

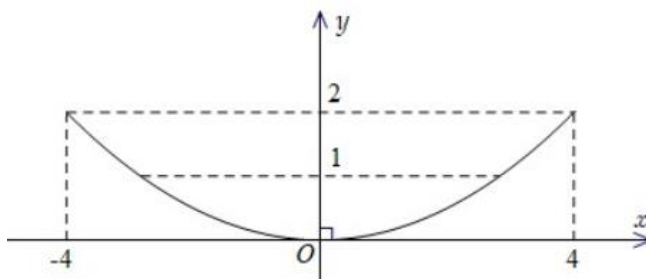
c) Trong khoảng thời gian từ 1 phút sau khi tiêm trở đi, nồng độ thuốc trong máu giảm dần.

d) Nồng độ thuốc trong máu đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm 2 phút sau khi tiêm.

Bài toán 17: Một con kênh dài 200 m, rộng 8 m (là khoảng cách giữa hai mép bờ kênh), sâu 2 m (tính từ điểm thấp nhất của đáy kênh đến mặt đất chứa hai bờ kênh).



Mặt cắt đứng của con kênh được mô hình hóa bởi một phần parabol có phương trình $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (với $a > 0$); xét mặt phẳng chứa parabol đó với hệ trục tọa độ Oxy , đơn vị mỗi trục tọa độ là mét, trục Ox tiếp xúc với parabol đó, trục Oy vuông góc với mặt đất, chứa trục đối xứng của parabol đó và có chiều dương hướng lên trời (xem hình minh họa ở dưới).



a) Parabol đó đi qua điểm $(4; 2)$ và có đỉnh $O(0; 0)$.

b) Parabol đó có phương trình $y = f(x) = \frac{x^2}{8}$.

c) Diện tích mặt cắt của con kênh bằng $\frac{16}{3}m^2$.

d) Vào mùa hè, mực nước trong kênh cao 1 m (tính từ điểm thấp nhất của đáy kênh đến mặt nước).

Lượng nước trong kênh vào mùa hè bằng $754m^3$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG OXYZ

Bài toán 1: Trong Dragon Ball, quả cầu Genki là chiêu thức lợi hại mà Sol Goku thường sử dụng khi gặp những đối thủ lớn. Được biết trong trận đánh với Frieza đại đế, cuộc chiến có liên quan đến vận mệnh vũ trụ, Goku đã dùng quả cầu này để tung đòn tuyệt sát với Frieza. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là mét, mặt phẳng Oxy là mặt đất và tia Oz hướng lên trời, Sol Goku đứng ở vị trí $A(5; 0; 40)$, Frieza đại đế đứng ở vị trí $B(85; 60; 40)$. Trước khi Goku tạo ra quả cầu Genki thì Frieza đã tấn công phủ đầu, hấn lao về phía Goku với vận tốc 50 m/s .

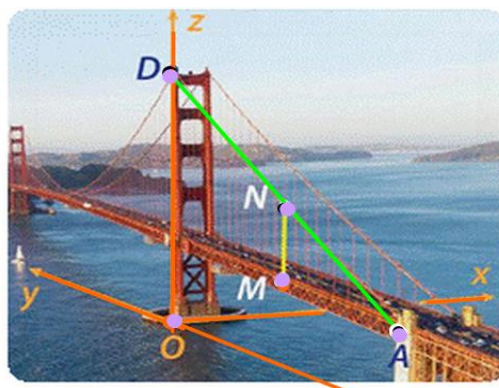
a) Frieza sẽ mất 2 giây để đến được vị trí Goku đang đứng.

b) Vector vận tốc của Frieza là $\vec{v} = (400; 300; 0)$, đơn vị: m/s .

c) Sau khi tránh được đòn hiểm từ Frieza, Goku đứng ở vị trí $C(8; -1; 46)$ đã tạo ra quả cầu Genki được mô hình hóa với phương trình $(x-8)^2 + (y+1)^2 + (z-58)^2 = 100$. Khoảng cách bé nhất từ vị trí $D(-182; 159; 45)$ mà Frieza đang đứng đến quả cầu bằng $238,7 \text{ m}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

d) Quả cầu được Goku ném về phía Frieza với vận tốc lên đến 64 m/s . Cứ sau mỗi giây thì bán kính nó tăng lên 1 mét. Nếu Frieza không di chuyển thì sau 3,67 giây (làm tròn đến hàng phần trăm của giây) quả cầu Genki đến được vị trí của Frieza.

Bài toán 2: (THPT Ngô Sĩ Liên – Bắc Giang 2025) Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ được gắn hệ trục tọa độ Oxyz với O là bộ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (được xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz, biết rằng điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227m , điểm A cách mặt nước 75m và cách trục Oz 343m , biết rằng 1 đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế.



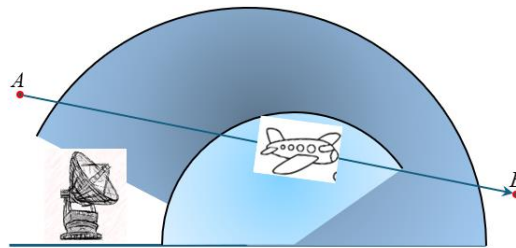
a) Đường thẳng AD có 1 véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AD} = (0; -343; 152)$.

b) Tọa độ điểm A là $(0; -343; 75)$.

c) Độ dài đoạn dây cáp AD là $AD = \sqrt{140753}(m)$.

d) Từ điểm M trên thành cầu, M thuộc mặt phẳng Oyz (như hình vẽ) cách mặt nước $75m$, cách trục Oz $5m$, người ta treo một đèn led trang trí có dạng đoạn thẳng MN (với N thuộc dây cáp AD), biết rằng $1m$ đèn led có giá 125000 đồng, số tiền thấp nhất có thể sử dụng để lắp đèn led (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng) là 17118000 đồng.

Bài toán 3: (Sở Đà Nẵng 2025) Một radar phòng không được đặt tại vị trí gốc tọa độ $O(0;0;0)$ trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tọa độ ứng với $1km$. Radar này có khả năng phát hiện các mục tiêu bay bán kính $250km$. Một máy bay không người lái (UAV) đang bay thẳng đều từ vị trí điểm $A(300;-400;100)$ đến điểm $B(-300;400;100)$. UAV bay với vận tốc không đổi $900km/h$ và mang thiết bị gây nhiễu chủ động có tầm hiệu quả $50km$ tính từ UAV. Radar có thể theo dõi UAV trong khoảng thời gian hơn 30 phút không?



(tham khảo từ *Stimson's Introduction to Airborne Radar, 3rd Edition, George W. Stimson, Hugh D, Griffiths, Christopher Baker, Dave Adamy*)

(Hình ảnh minh họa radar tại gốc tọa độ O và đường bay của UAV từ A đến B)

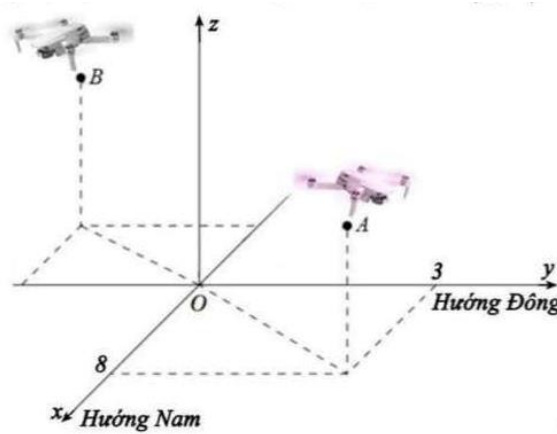
a) Radar không thể phát hiện UAV khi UAV ở vị trí A .

b) Phương trình tham số của đường bay UAV là
$$\begin{cases} x = 300 - 3t \\ y = -400 + 4t \\ z = 0 \end{cases}$$

c) Trong suốt quá trình bay, sẽ có thời điểm UAV gây nhiễu được radar.

d) Radar có thể theo dõi UAV trong khoảng thời gian hơn 30 phút.

Bài toán 4: Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại cùng một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $10m$, cách điểm xuất phát $8m$ về phía nam và $3m$ về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $12m$, cách điểm xuất phát $4m$ về phía bắc và $5m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Khi đó:



a) Tọa độ của điểm $A(8;3;10)$.

b) Phương trình đường thẳng đi qua vị trí của hai chiếc flycam tại A và B là
$$\begin{cases} x = 8 + 12t \\ y = 3 + 8t \\ z = 10 - 2t \end{cases}$$

c) Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $M(1;-2;1)$.

d) Trên mặt đất người ta đặt một thiết bị phá sóng flycam sao cho có thể phá sóng hai chiếc flycam tại hai vị trí A, B cùng một lúc. Tổng khoảng cách ngắn nhất từ thiết bị đó đến hai chiếc flycam tại hai vị trí A và B (làm tròn đến hàng phần trăm) bằng $25,46(m)$.

Bài toán 5: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(1;3;7)$. Trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng là 3 km.



a) Phương trình mặt cầu (S) để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian là

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+7)^2 = 9$$

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí điểm $A(2;2;7)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đ

c) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ thì không thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng đó

d) Tính theo đường chim bay, khoảng cách lớn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $B(5;6;7)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị km là 8 km.

Bài toán 6 : Các kỹ sư điện đang tiến hành lắp đặt cáp điện tại một công trường xây dựng. Tọa độ các điểm $(x; y; z)$ được xác định tương đối so với trạm chuyển mạch chính đặt tại gốc tọa độ $(0;0;0)$, đơn vị là mét. Các đoạn cáp được lắp đặt theo các đường thẳng và coi như không có bề rộng. Một đoạn cáp đã có sẵn, ký hiệu là C , bắt đầu từ trạm chuyển mạch chính và có véc-tơ chỉ phương là: $\vec{u}(3;1;-2)$

Một đoạn cáp mới được lắp đặt, đi qua hai điểm: $P(1;2;-1); Q(5;7;a)$

a) $C: \begin{cases} x = 3t \\ y = t \\ z = -2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$ là phương trình đường thẳng chứa C

b) Khi $a = -\frac{23}{5}$ thì đường cáp mới được lắp đặt, sẽ giao nhau với C

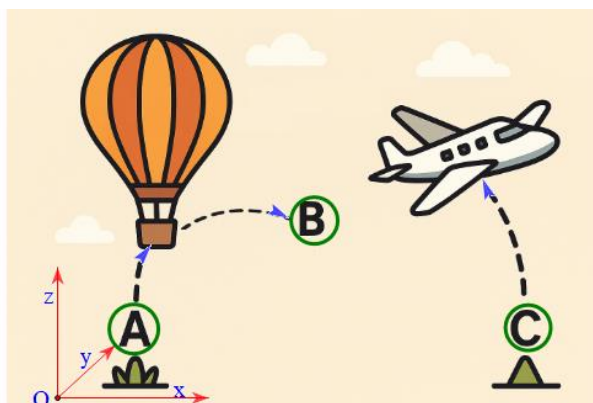
c) Để đảm bảo hai đoạn cáp không giao nhau, các kỹ sư đã chọn $a = -3$. Giờ đây, họ muốn nối mỗi điểm P và Q với một điểm R nằm trên C . Các kỹ sư muốn giảm độ dài cáp cần thiết và cho rằng để làm được điều đó thì góc $PRQ = 90^\circ$.

d) Các kỹ sư phát hiện khu vực giữa P và R có địa hình rất khó thi công. Do đó, họ quyết định giảm độ dài đoạn PR xuống mức nhỏ nhất, khi đó độ dài PR là 1,58m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Bài toán 7: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, chiều dương của trục Oz hướng lên trời, một khinh khí cầu bắt đầu chuyển bay từ điểm $A(-1;18;0,5)$, nó bay theo một đường thẳng với vận tốc không đổi và sau một giờ đến điểm $B(31;42;0,5)$. Tại thời điểm khinh khí cầu bắt đầu bay, một máy bay cỡ nhỏ ở điểm $C(15;18;0,1)$

bắt đầu bay theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = 15 - 80t \\ y = 18 + 60t \\ z = 0,1 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$, trong đó $t \geq 0$ được tính bằng

giờ.



a) $AB = 40$.

b) Đường thẳng AB có phương trình
$$\begin{cases} x = 32 - s \\ y = 24 + 18s (s \in \mathbb{R}). \\ z = 0,5s \end{cases}$$

c) Hai đường thẳng AB và d cắt nhau tại điểm $H(7; 24; 0,5)$.

d) Khi máy bay bay đến điểm H thì máy bay và khinh khí cầu cách nhau 6 km.

CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT – THỐNG KÊ

Bài toán 1: Năm 2025, báo Giáo dục đã có cuộc khảo sát tại một trường đại học và thấy rằng có 40% sinh viên quan tâm đến chương trình học bổng A; có 17% trong số những sinh viên quan tâm đến học bổng A cũng đã quan tâm đến học bổng B. Qua khảo sát họ cũng thấy rằng có 20% sinh viên quan tâm đến chương trình học bổng B. Người ta chọn ngẫu nhiên một sinh viên từ trường đại học này để thăm dò ý kiến.

- a) Xác suất để sinh viên được chọn quan tâm cả hai chương trình học bổng bằng 0,062 .
- b) Xác suất để sinh viên quan tâm học bổng A nếu biết rằng họ đã quan tâm học bổng B bằng 0,4.
- c) Xác suất để sinh viên không quan tâm đến cả chương trình A lẫn học chương trình B bằng 0,41.
- d) Sinh viên được chọn cho rằng mình có quan tâm đến học bổng B; hai hôm sau một nhà báo khác quay lại trường và tiếp tục chọn ngẫu nhiên một sinh viên để thăm dò ý kiến thì gặp được một sinh viên quan tâm đến học bổng B, xác suất để người này không quan tâm đến học bổng A bằng 0,66.

Bài toán 2: Ở cửa ra vào của siêu thị Winmart Hải Lăng có một thiết bị cảnh báo hàng hóa chưa được thanh toán khi qua cửa. Thiết bị phát chuông cảnh báo với 99% các hàng hóa ra cửa mà **chưa** thanh toán và 0,1% các hàng hóa đã thanh toán. Tỷ lệ hàng hóa qua cửa **không** được thanh toán là 0,1% . Chọn ngẫu nhiên một hàng hóa khi đi qua cửa. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

- a) Xác suất để hàng hóa qua cửa đã thanh toán là 0,999.
- b) Biết rằng hàng hóa qua cửa đã thanh toán, xác suất để thiết bị phát chuông cảnh báo là 0,001.
- c) Xác suất để hàng hóa qua cửa chưa thanh toán và thiết bị phát chuông cảnh báo là 0,01.
- d) Xác suất hàng hóa qua cửa chưa thanh toán và thiết bị không phát chuông cảnh báo là 10^{-5} .

Bài toán 3: (Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi 2025) Bạn Hoàng Huy chọn ngẫu nhiên một bóng đèn led trên quầy. Trên quầy có hai loại đèn màu trắng và màu vàng có hình thức và kích thước như nhau. Trong đó màu trắng chiếm 60%. Bóng đèn màu trắng có tỉ lệ hỏng là 3%, bóng đèn màu vàng có tỉ lệ hỏng là 2%. Xác suất để Huy chọn được

- a) Một bóng đèn màu vàng là 0,6.
- b) Một bóng đèn không hỏng, biết nó màu trắng là 0,97.
- c) Một bóng đèn không hỏng, biết nó màu vàng là 0,98.
- d) Một bóng đèn không hỏng là 0,974.

Bài toán 4: Trong khoa Lí của trường đại học Sư phạm có 200 sinh viên trong đó có 95 nam và 105 nữ. Trong kì thi tốt nghiệp có 50 loại học sinh giỏi, gồm 24 nam và 26 nữ. Lấy ngẫu nhiên một sinh viên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Xác suất để sinh viên chọn ngẫu nhiên giỏi là $\frac{1}{4}$.
- b) Xác suất để sinh viên chọn ra là nữ biết rằng sinh viên chọn ra là giỏi là $\frac{13}{25}$.
- c) Xác suất để sinh viên chọn ra là giỏi biết rằng sinh viên chọn ra là nữ là $\frac{26}{105}$.
- d) Giả sử sinh viên chọn ra là giỏi, khi đó nhiều khả năng đó là sinh viên nam.

Bài toán 5: (Sở Hòa Bình 2025) Một doanh nghiệp có 45% nhân viên là nữ. Trong các nhân viên nữ có 30% nhân viên có bằng đại học, tỉ lệ này trong các nhân viên nam là 25%.

- a) Tỉ lệ nhân viên nam trong tổng số nhân viên là 55%.
- b) Tỉ lệ nhân viên nữ không có bằng đại học trong tổng số nhân viên là 13,5%.
- c) Chọn ngẫu nhiên hai nhân viên trong doanh nghiệp, xác suất để chọn được hai người khác giới lớn hơn 24,5%.
- d) Chọn ngẫu nhiên hai nhân viên trong doanh nghiệp, xác suất để trong hai người được có đúng một người có bằng đại học không vượt quá 19,8%.

Bài toán 6: Điểm kiểm tra cuối kì môn Toán của một học sinh phụ thuộc vào việc học sinh đó có chăm chỉ làm bài tập về nhà hay không. Nếu bạn An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là 0,9. Còn nếu bạn An không chăm chỉ làm bài tập về nhà thì xác suất đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là 0,85. Xác suất An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán là 0,75.

- a) Nếu An chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm không tốt kiểm tra cuối kì là 0,1.
- b) Nếu An không chăm chỉ làm bài tập về nhà môn Toán thì xác suất An được điểm tốt kiểm tra cuối kì là 0,2
- c) Xác suất để An đạt điểm không tốt kiểm tra cuối kì là 0,35.
- d) Xác suất để An đạt điểm tốt kiểm tra cuối kì là 0,7125.

Bài toán 7: Một công ty tham gia đấu thầu 2 dự án. Khả năng thắng thầu dự án 1 là 60% và dự án 2 là 50%. Khả năng thắng thầu cả hai dự án là 40%. Gọi A và B lần lượt là biến cố công ty thắng thầu dự án 1 và dự án 2.

- a) A và B là hai biến cố độc lập.
- b) Khả năng công ty thắng thầu đúng 1 dự án là 30%
- c) Xác suất công ty thắng thầu dự án 2 biết công ty đã thắng thầu dự án 1 là $\frac{1}{2}$.

d) Xác suất công ty không thắng thầu dự án 2, biết công ty đã không thắng thầu dự án 1 là $\frac{1}{4}$.

Bài toán 8: Trong quân sự, một máy bay chiến đấu của đối phương có thể xuất hiện ở vị trí X với xác suất 0,55. Nếu máy bay đó không xuất hiện ở vị trí X thì nó xuất hiện ở vị trí Y . Để phòng thủ, các bộ phóng tên lửa được bố trí tại các vị trí X và Y . Khi máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X hoặc Y thì tên lửa sẽ được phóng để hạ máy bay đó. Nếu máy bay xuất hiện tại X thì bắn 2 quả tên lửa và nếu máy bay xuất hiện tại Y thì bắn 1 quả tên lửa. Biết rằng, xác suất bắn trúng máy bay của mỗi quả tên lửa là 0,8 và các bộ phóng tên lửa hoạt động độc lập. Máy bay bị bắn hạ nếu nó trúng ít nhất 1 quả tên lửa.

a) Xác suất để máy bay đối phương bị bắn hạ nếu nó xuất hiện ở vị trí X là 0,64

b) Xác suất để máy bay đối phương bị bắn hạ nếu nó xuất hiện ở vị trí Y là 0,8

c) Xác suất bắn hạ máy bay đối phương là 0,888

d) Biết rằng máy bay đối phương đã bị bắn hạ. Xác suất để máy bay đối phương xuất hiện ở vị trí X là 0,59 (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài toán 9: (Sở Ninh Bình 2025) Aria mua một ngôi nhà với giá bán $P = 290.000\$$ theo hình thức mua trả góp, lãi suất 8,25% một năm, trong vòng 30 năm, với số tiền phải trả mỗi tháng không đổi bằng $M(\$)$. Gọi r là lãi suất một tháng.

a) Số tiền Aria còn nợ sau tháng đầu tiên là $A_1 = P(1+r) - M$ (\$).

b) $r = 0,6875\%$.

c) Tổng số tiền Aria phải trả sau 30 năm gấp hơn 2,5 lần so với giá bán P của ngôi nhà.

d) Mỗi tháng, Aria quyết định trả thêm 250\$ so với số tiền phải trả $M(\$)$. Cô ấy sẽ trả hết tiền mua nhà trong 20 năm.

Bài toán 10: Một nghiên cứu cho thấy có 5% các tin nhắn trên một mạng viễn thông X là tin nhắn quảng cáo. Trong các tin nhắn quảng cáo, 80% tin nhắn có chứa chữ "sale". Trong các tin nhắn không quảng cáo, 2% tin nhắn có chữ "sale". Chọn ngẫu nhiên 1 tin nhắn trên mạng viễn thông X .

Gọi A là biến cố: "tin nhắn là tin nhắn quảng cáo".

Gọi B là biến cố: "tin nhắn chứa chữ "sale".

a) $P(A) = 0,05$ và $P(\bar{A}) = 0,95$.

b) Xác suất có điều kiện $P(B|A) = 0,02$.

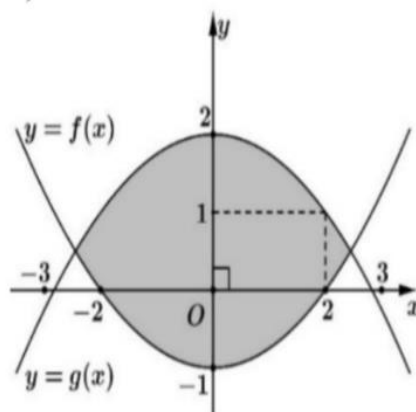
c) Xác suất tin nhắn nhận được có chứa chữ "sale" là 4,1%.

d) Biết rằng tin nhắn nhận được có chứa chữ "sale", xác suất để tin nhắn đó là tin quảng cáo bằng 0,68. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

2. Phần trả lời ngắn

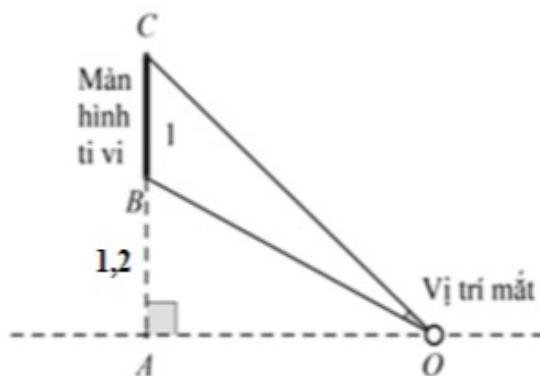
CÁC BÀI TOÁN SỬ DỤNG TÍCH PHÂN – ĐẠO HÀM

Bài toán 1. Anh Định nhận thiết kế logo hình con mắt (phần được tô đậm) cho một cơ sở y tế: Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$, $y = g(x)$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centimét). Chi phí sản xuất mỗi cm^2 trên logo là 1000 đồng. Chi phí sản xuất mỗi logo là bao nhiêu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Đáp số: 9798

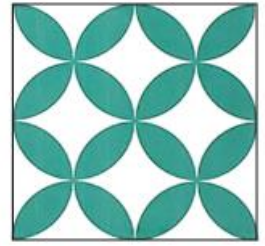
Bài toán 2. Trong lớp học, màn hình tivi hình chữ nhật có chiều cao $1m$ được đặt ở độ cao $1,2m$ so với tầm mắt của học sinh (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí ngồi sao cho góc nhìn lớn nhất (BOC là góc nhìn).



Nếu xét những học sinh ngồi nhìn thẳng màn hình thì học sinh ngồi bàn thứ mấy nhìn được rõ nhất? Biết bàn đầu tiên cách tivi $1,2m$ và mỗi bàn kế tiếp nhau cách nhau $0,4m$.

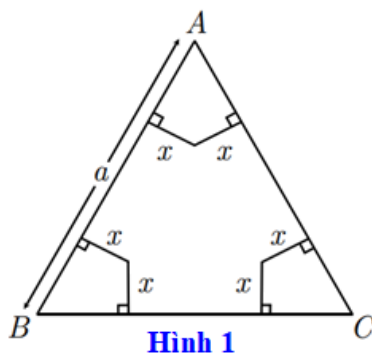
Đáp số: 2

Bài toán 3: Viên gạch men dùng để lát nền nhà là một hình vuông có cạnh bằng 80 cm (xem hình bên dưới). Mỗi viên gạch có 4 bông hoa, mỗi bông hoa gồm 4 cánh hoa. Mỗi cánh hoa (phần màu xanh) là phần giao nhau của hai hình tròn có cùng bán kính và khoảng cách giữa hai tâm là $20\sqrt{2}$ cm. Ước tính ở công đoạn tráng men, phần màu xanh (ở đề của các em là màu đen) có chi phí 50 nghìn đồng trên một mét vuông, còn phần màu trắng có chi phí 30 nghìn đồng trên một mét vuông. Tính chi phí (đơn vị: tỉ đồng) của công đoạn tráng men này, khi cơ sở sản xuất dự định sản xuất 100000 viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

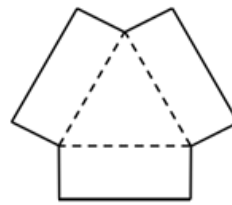


Đáp số: 2,65

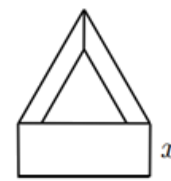
Bài toán 4: Hình 1 vẽ miếng bìa ABC có dạng tam giác đều cạnh a . Tại mỗi đỉnh của tam giác, người ta cắt đi một hình điều như chỉ ra, thu được hình phẳng ở Hình 2. Phần bìa còn lại ở Hình 2 được gập lại theo các đường nét chấm để tạo thành một lăng trụ tam giác hở có chiều cao x , như minh họa ở Hình 3.



Hình 1



Hình 2

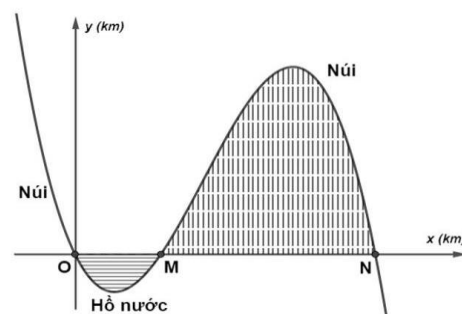


Hình 3

Sau tính toán, người ta tìm được giá trị lớn nhất của thể tích lăng trụ là $V = \frac{a^3}{k}$. Tìm k ?

Đáp số: $k = 54$

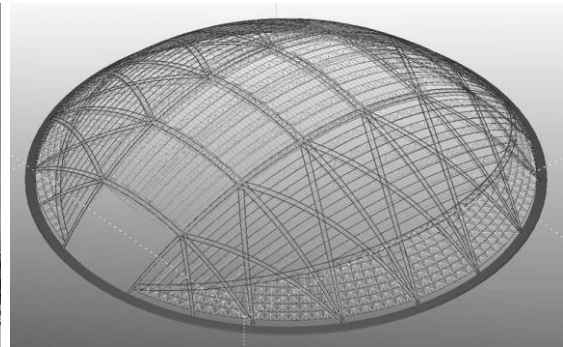
Bài toán 5: (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025) Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2\text{ km}$; độ rộng của núi $MN = 3,5\text{ km}$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).



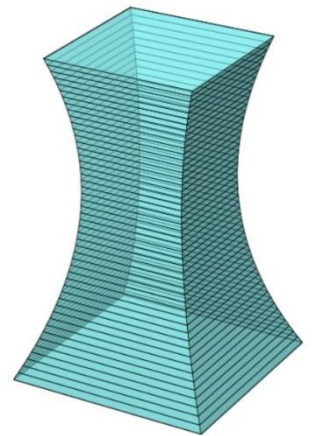
Trả lời: 1191

Đáp số: $k = 54$

Bài toán 6: Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $MIN = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là $200 \text{ BTU} / m^3$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50000 BTU? (**Đáp số 463**)

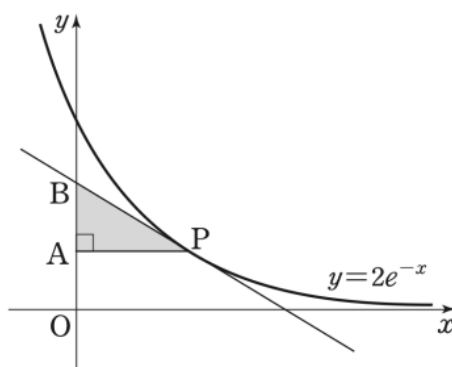


Bài toán 7: Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà cao 30 mét. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình vuông (xem hình vẽ). Mặt đáy tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_0 = 26 \text{ m}$, mặt đỉnh là hình vuông có cạnh $L_{30} = 20 \text{ m}$. Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà: Hình vuông có cạnh $L_{\min} = 13,75 \text{ m}$. Mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong parabol đối xứng nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối).



Đáp án: 8976

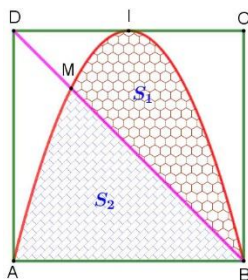
Bài toán 8: Cho đường cong $y = 2e^{-x}$. Tại điểm $P(t, 2e^{-t})$ với $t > 0$ trên đồ thị, gọi A là hình chiếu vuông góc của P lên trục Oy , và gọi B là giao điểm của tiếp tuyến tại P với trục Ox .



Gọi $S(t)$ là diện tích tam giác APB . Hỏi giá trị t nào để $S(t)$ đạt giá trị lớn nhất?

Đáp số: $t = 2$

Bài toán 9: (Sở Hòa Bình 2025) Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4m và I là trung điểm của đoạn thẳng CD . Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A, B và cắt đường chéo BD tại M (tham khảo hình vẽ).



Chi phí sơn phần tô hình tổ ong (có diện tích S_1) là 200 000 đồng/ m^2 , chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là 150 000 đồng/ m^2 và phần còn lại là 120 000 đồng/ m^2 . Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?

Đáp số: 2465 (nghìn đồng)

Bài toán 10: (Cụm trường Nghệ An 2025) Một công ty muốn đầu tư vào hệ thống điện mặt trời có công suất x (đơn vị tính: MW). Theo nghiên cứu cho thấy một số thông tin sau: Chi phí đầu tư ban đầu là $C_1(x) = 1400 + 55x$ (tỷ đồng). Doanh thu hàng năm là $R(x) = 28x - 0,15x^2$ (tỷ đồng/năm). Chi phí vận hành hàng năm là $C_2(x) = 12 + 0,35x + 0,012x^2$ (tỷ đồng/năm). Hãy tìm công suất x (làm tròn đến hàng đơn vị) để tối đa hóa lợi nhuận trên đầu tư, được tính là tỷ lệ lợi nhuận hàng năm trên chi phí đầu tư ban đầu.

Đáp án: 46

PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG OXYZ

Bài toán 1: Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone).

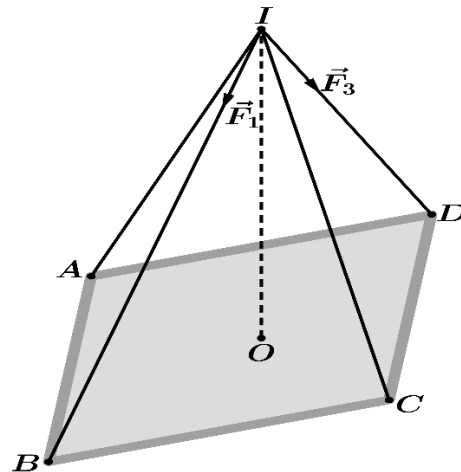
Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của

một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(10;50;0)$ và $D(30;10;0)$. Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng (P) . Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại

gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(30;40;120)$. Từ vị trí A , drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B . Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng đơn vị).

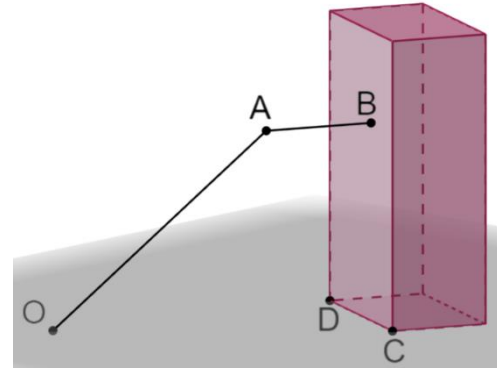
Đáp số : 126

Bài toán 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tấm bảng đồng chất có dạng hình vuông $ABCD$ tâm O được treo nghiêng bởi 4 sợi dây IA, IB, IC, ID gắn cố định tại điểm $I(0;0;9)$ như hình vẽ. Điểm $O(0;0;5)$; $A(-\sqrt{2};\sqrt{2};5)$ và góc OID đạt giá trị lớn nhất. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ lần lượt là lực căng của các sợi dây IB, IC, ID, IA . Biết rằng $|\vec{F}_1| = 50 \text{ N}$ và $|\vec{F}_2| = 40 \text{ N}$



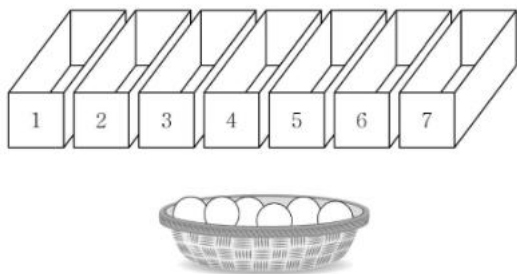
Tính khối lượng m (kg) của tấm bảng (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) (Cho gia tốc trọng trường $g = 9,8(\text{m/s}^2)$ và trọng lượng của tấm bảng được tính bằng công thức $P = m.g$)

Đáp số : 15



CÁC BÀI TOÁN XÁC SUẤT – THỐNG KÊ

Bài toán 1: Cho một giỏ chứa ít nhất 3 viên bi và bảy hộp trống đánh số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.



Thực hiện liên tiếp ba lần thí nghiệm sau, dùng một con súc sắc chuẩn:

1. Tung súc sắc, được mặt $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Nếu hộp số n hiện chưa có viên bi nào thì lấy một viên bi từ giỏ bỏ vào hộp số n .
3. Nếu hộp số n hiện đã có ít nhất một viên bi thì lấy một viên bi từ giỏ bỏ vào hộp số 7.

Kết thúc ba lần, tính xác suất để hộp đánh số 7 có ít nhất một viên bi (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Đáp số: 0,44

Bài toán 2: (Sở Hòa Bình 2025) Trong một đêm thi hát, mỗi thí sinh phải tham gia hát hai bài: Một bài theo phong cách âm nhạc dân gian, một bài theo phong cách âm nhạc nhạc nhẹ. Một đội có 20 người tham gia đêm thi hát đó. Kết quả là 15 người đạt bài thi theo phong cách âm nhạc dân gian, 17 người đạt bài thi theo phong cách âm nhạc nhạc nhẹ; 2 người không đạt cả hai bài. Chọn ngẫu nhiên một người trong đội. Xác suất để người đó đạt cả hai bài thi.

Đáp số: 0,4

Bài toán 3. Một thành phố có ba loại phương tiện giao thông công cộng: xe buýt, tàu điện ngầm và taxi. Tỷ lệ sử dụng một loại phương tiện đối với xe buýt là 40%, tàu điện ngầm là 35%, taxi là 25%. Tỷ lệ trễ giờ của xe buýt, tàu điện ngầm và taxi trong một tháng lần lượt là 20%, 10%, 5%. Anh Hùng là người dân thành phố. Trong tháng đầu tiên, anh Hùng chọn một trong ba phương tiện để đi làm, sao cho xác suất chọn mỗi loại phương tiện đúng bằng tỷ lệ sử dụng phương tiện đó của người dân trong thành phố. Từ tháng thứ hai trở đi, cách anh Hùng chọn phương tiện đi làm phụ thuộc vào việc anh bị trễ giờ trong tháng trước hay không:

- Nếu tháng trước anh không bị trễ, thì anh tiếp tục sử dụng loại phương tiện mà anh đã đi trong tháng đó.

- Nếu tháng trước anh bị trễ, anh sẽ chọn ngẫu nhiên một trong hai loại phương tiện còn lại để đi làm trong tháng tiếp theo, với xác suất chọn mỗi loại là 50%. Xác suất để anh Hùng sử dụng taxi trong tháng thứ ba có dạng $\frac{m}{n}$ (là phân số tối giản). Tính $n - 2m$?

Đáp số: 5354

Bài toán 4: Bạn Tuấn hằng ngày ăn sáng bằng xôi hoặc bún. Nếu hôm nay bạn ăn sáng bằng xôi thì xác suất để hôm sau bạn ăn sáng bằng bún là 0,7. Xét một tuần mà thứ ba bạn ăn sáng bằng xôi. Biết xác suất để thứ năm tuần đó, bạn Tuấn ăn sáng bằng bún là 0,63. Hỏi nếu hôm nay bạn ăn sáng bằng bún thì xác suất để hôm sau bạn ăn sáng bằng xôi là bao nhiêu?

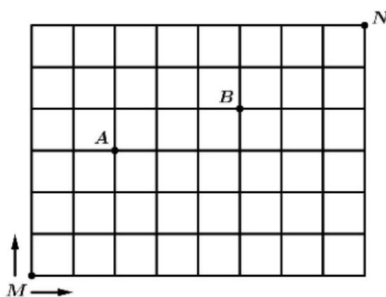
Đáp số: 0,4

Bài toán 5: Trong một đợt dịch sốt xuất huyết, ở mỗi khu phố tiến hành thử nghiệm một thiết bị phát hiện sốt xuất huyết. Có 9000 dân tham gia, trong đó có 1500 nhiễm bệnh và 7500 không nhiễm bệnh. Khi thử với 1500 người nhiễm bệnh cho kết quả 76% dương tính; còn với 7500 người còn lại thiết bị cho kết quả 7% dương tính. Lấy ngẫu nhiên một người, kết quả kiểm tra cho thấy người này dương tính với bệnh. Xác suất để người đó là người bị sốt xuất huyết là bao nhiêu?

Viết kết quả dưới dạng số thập phân (làm tròn đến hàng phần trăm)

Trả lời: 0,68

Bài toán 6: Cho một lưới ô vuông kích thước 6×8 với các kí hiệu như hình vẽ. Với A, B là 2 điểm nằm ở các nút giao (như hình vẽ).



Để đi từ điểm M đến N một con kiến di chuyển ngẫu nhiên sang phải hoặc đi lên theo các đoạn thẳng là cạnh của hình vuông đơn vị.

Gọi A là biến cố: "Con kiến đi từ $M \rightarrow A \rightarrow N$ ".

Gọi B là biến cố: "Con kiến đi từ $M \rightarrow B \rightarrow N$ ".

Tính xác suất có điều kiện $P(A|B)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

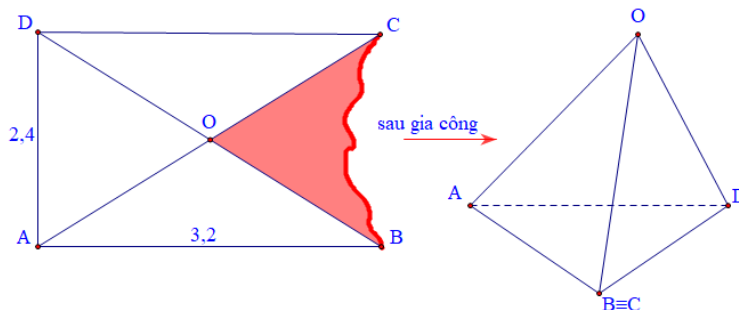
Đáp số: 0,32

CÁC BÀI TOÁN THUỘC NỘI DUNG KHÁC

Bài toán 1: (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2025) Năng lượng giải toả E của một trận động đất tại tâm chấn ở M độ Richter được xác định bởi công thức $\log(E) = 11,4 + 1,5M$. Vào năm 2024, thành phố X xảy ra một trận động đất 7,4 độ Richter và năng lượng giải toả tại tâm chấn của động đất đó gấp 11 lần trận động đất xảy ra ở thành phố Y vào năm 2023. Hỏi khi đó, độ lớn của trận động đất tại thành phố Y là bao nhiêu độ Richter? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Đáp số: 6,7

Bài toán 2: (Sở Thanh Hóa 2025) Trên công trường xây dựng, một công nhân muốn tạo ra một dụng cụ để đựng vật liệu lỏng từ một tấm thép hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có $AB = 3,2m$, $AD = 2,4m$. Do tấm thép bị hỏng một phần (tham khảo hình vẽ) nên người đó cắt bỏ tam giác OBC và hàn ghép OB, OC với nhau để thu được một hình tứ diện $OABD$ (không có mặt ABD). Dụng cụ này sẽ được vùi đất xung quanh sao cho đỉnh O quay xuống và mặt ABD hướng lên trên, khi đựng đầy vật liệu lỏng thì phần không gian trong lòng dụng cụ hoàn toàn bị lấp đầy. Tính thể tích của vật liệu lỏng được đựng đầy trong dụng cụ. (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục của đơn vị m^3 và xem độ dày của tấm thép không đáng kể)



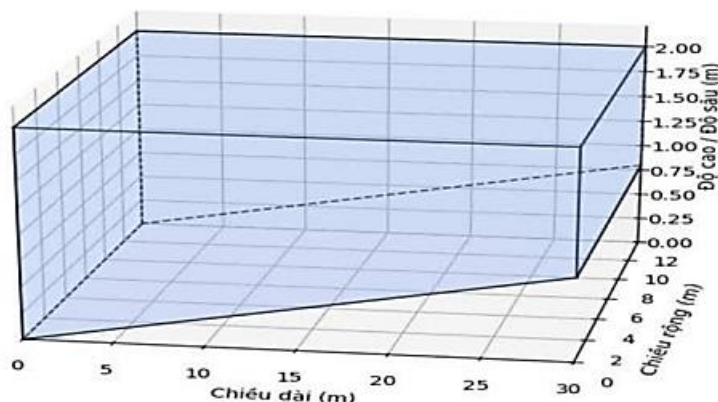
Đáp số: 1,2

Bài toán 3: Một nhà đầu tư có số vốn là 5 tỷ đồng (5000 triệu đồng) để phân bổ vào Quỹ cổ phiếu A và quỹ trái phiếu B. Các thông tin và điều kiện đầu tư được xác định như sau: Quỹ Cổ phiếu A có tỷ suất sinh lời là 17%/năm. Quỹ trái phiếu B có tỷ suất sinh lời là 8%/năm. Tổng số tiền đầu tư không vượt quá 5000 triệu đồng. Phải đầu tư ít nhất 1200 triệu đồng vào quỹ trái phiếu B. Không đầu tư quá 3200 triệu đồng vào quỹ cổ phiếu A. Với các điều kiện trên thì nhà đầu tư có thể đạt được tổng lợi nhuận hàng năm lớn nhất là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Đáp án: 688

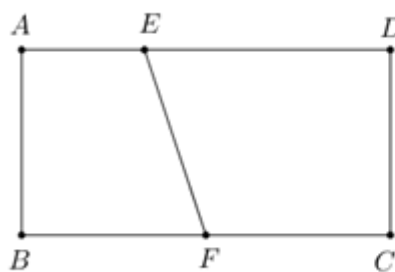
Bài toán 4: Một bể bơi với mặt nước khi đầy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng $14m$ và chiều dài $30m$. Các thành bể xung quanh thẳng đứng và đáy là một mặt phẳng nghiêng. Chiều sâu tại một

đầu bể là $1,2m$ và tăng dần đều đến $2,0m$ ở đầu kia của bể (xem hình vẽ). Ban đầu bể không chứa nước. Người ta sử dụng một máy bơm công suất lớn để bơm nước vào bể với tốc độ không đổi là $42m^3 / \text{giờ}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì máy bơm bơm đầy bể nước?

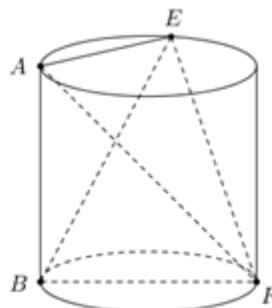


Đáp án: 16

Bài toán 5: Cho một miếng tôn mỏng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 4dm$, $AD = 9dm$. Trên cạnh AD lấy điểm E sao cho $AE = 3dm$, trên cạnh BC lấy điểm F là trung điểm của BC (tham khảo hình 1). Cuộn miếng tôn lại một vòng sao cho cạnh AB và DC trùng khít nhau. Khi đó miếng tôn tạo thành mặt xung quanh của một hình trụ (tham khảo hình 2). Thể tích V của tứ diện $ABEF$ trong hình 2 bằng bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Hình 1



Hình 2

Trả lời: 2,37

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Các đề thi thử của các sở giáo dục năm 2025.**
- [2] 60 đề ôn thi THOTQG 2025, Nguyễn Bảo Vương.**
- [3] 25 đề ôn thi THOTQG 2025, Phan Nhật Linh.**
- [4] Hướng dẫn ôn thi TN THPTQG 2025, nhà xuất bản giáo dục, 2024.**
- [5] Sách giáo khoa toán 12, chân trời Sáng tạo, nhà xuất bản giáo dục.**