GV. LÊ QUỐC BẢO

YouTube: Quoc Bao Le

TRƯỜNG THPT TRẦN HƯNG ĐẠO

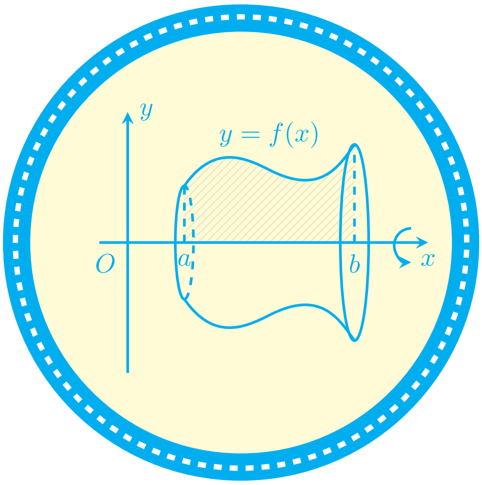
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \ (x > 0, y > 0)$

$S_{\text{mặt cầu}} = 4\pi r^2$

CÔNG THỨC ÔN THI TNTHPT 2023

MÔN TOÁN 12

$i^2 = -1$



$S = \int_a^b |f(x)| \, dx$

Cam Ranh - 9/2023

Bảng đạo hàm cơ bản	
$(k)' = 0$ với k là hằng số	$(x)' = 1$
$(k.x)' = k$ với k là hằng số	$(k.u)' = k.u'$ với k là hằng số
$(x^n)' = n.x^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$	$(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ với $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = u' \cdot (1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = 1 + \cot^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = u' \cdot (1 + \cot^2 u) = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ với $a > 0$ và $a \neq 1$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ với $a > 0$ và $a \neq 1$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$

Bảng nguyên hàm cơ bản	
$\displaystyle\int 0 \, dx = C$	$\displaystyle\int 1 \, dx = x + C$
$\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \; (\alpha \neq -1)$	$\displaystyle\int (kx+b)^\alpha \, dx = \frac{(kx+b)^{\alpha+1}}{k(\alpha+1)} + C \; (k \neq 0, \; \alpha \neq -1)$
$\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{kx+b} \, dx = \frac{1}{k} \cdot \ln\lvert kx+b\rvert + C \; (k \neq 0)$
$\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\displaystyle\int \sin(kx+b) \, dx = -\frac{1}{k} \cdot \cos(kx+b) + C \; (k \neq 0)$
$\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\displaystyle\int \cos(kx+b) \, dx = \frac{1}{k} \cdot \sin(kx+b) + C \; (k \neq 0)$
$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(kx+b)} \, dx = \frac{1}{k} \cdot \tan(kx+b) + C \; (k \neq 0)$
$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(kx+b)} \, dx = -\frac{1}{k} \cdot \cot(kx+b) + C \; (k \neq 0)$
$\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \; (a > 0, a \neq 1)$	$\displaystyle\int a^{kx+b} \, dx = \frac{a^{kx+b}}{k \ln a} + C \; (a > 0, a \neq 1, k \neq 0)$

Phần I. ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

Kênh YouTube: Quoc Bao Le

I. Tổ hợp - Xác suất

1. Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp

Định nghĩa 1. Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$). Ta nói mỗi cách sắp xếp thứ tự của n phần tử tập hợp A là *một hoán vị* của n phần tử này.

Định lí 1. *Số các hoán vị của n phần tử được tính theo công thức:*

$$\mathrm{P}_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Định nghĩa 2. Cho tập hợp S gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập hợp S và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho.

Định lí 2. *Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử* ($1 \leq k \leq n$) *là:*

$$\mathrm{A}_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Định nghĩa 3. Cho tập hợp A có n ($n \geq 1$) phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Định lí 3. *Số tổ hợp chập k của một tập hợp có n phần tử* ($0 \leq k \leq n$) *là*

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

⚠ *Với* $1 \leq k \leq n$*, ta có* $P_n = \mathrm{A}_n^n$ *và* $\mathrm{C}_n^k = \dfrac{\mathrm{A}_n^k}{k!}$.

Tính chất 1. $\mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^{n-k}$ với $0 \leq k \leq n$.

Tính chất 2 (Công thức Pascal). $\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} + \mathrm{C}_{n-1}^k = \mathrm{C}_n^k$ với $1 \leq k < n$.

2. Công thức nhị thức Niu-tơn

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \ldots + \mathrm{C}_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + \mathrm{C}_n^{n-1} a b^{n-1} + \mathrm{C}_n^n b^n.$$

II. Cấp số cộng, cấp số nhân

1. Cấp số cộng (u_n)

$u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$ với d là công sai của cấp số cộng.

$$u_n = u_1 + (n-1)d \text{ với } n \geq 2 \text{ và } u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2.$$

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Khi đó $S_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2} d$.

III. Cấp số nhân (u_n)

$u_{n+1} = u_n.q,\ n \in \mathbb{N}^*$ với q đó được gọi là công bội của cấp số nhân.

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2 \text{ và } {u^2}_k = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2.$$

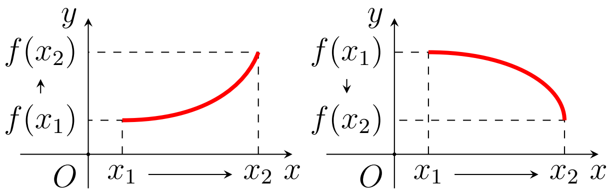
Đặt $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Khi đó $S_n = u_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

IV. Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

1. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

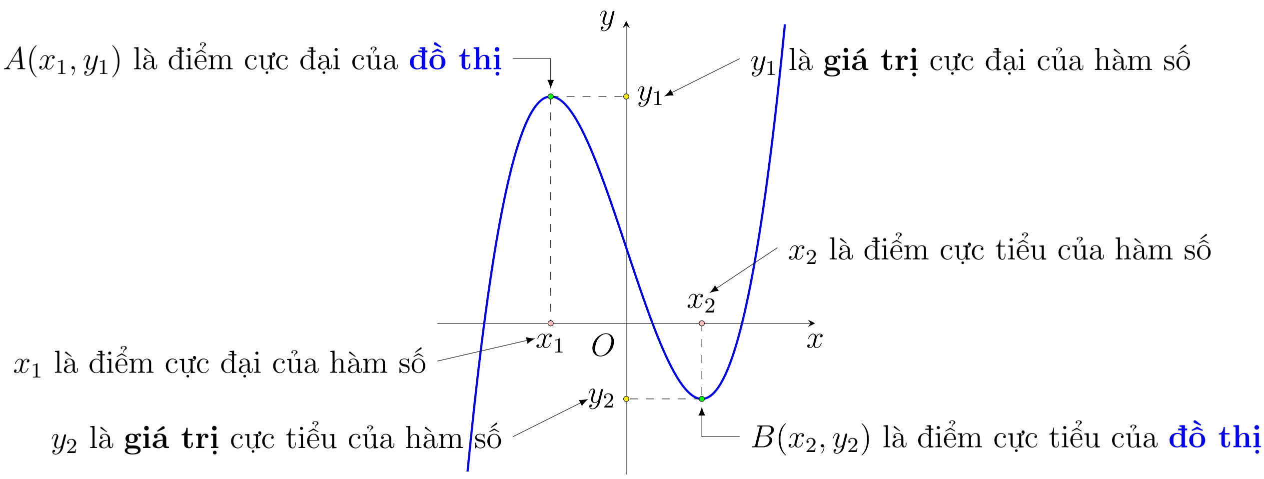
Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$.

- $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b)$, suy ra $f(x)$ **đồng biến** (tăng) trên khoảng $(a;b)$.
- $f'(x) < 0, \forall x \in (a;b)$, suy ra $f(x)$ **nghịch biến** (giảm) trên khoảng $(a;b)$.



Với $x_1 \in (a,b)$, $x_2 \in (a,b)$ và $x_1 < x_2$.

2. Cực trị và tiệm cận



1. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$.
   Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$.
   Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac \leq 0$.

2. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a \neq 0)$.
   Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow ba < 0$.
   Hàm số có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow ba \geq 0$.

3. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad - cb \neq 0)$ không có điểm cực trị
   Đường thẳng $y = \dfrac{a}{c}$ là **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm số.
   Đường thẳng $x = -\dfrac{d}{c}$ là **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm số.

3. Tương giao

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C_1) và hàm số $y = g(x)$ có đồ thị là (C_2). Để tìm hoành độ giao điểm của (C_1) và (C_2), ta giải phương trình

$$\boxed{f(x) = g(x).}$$

Giả sử phương trình trên có các nghiệm x_0, x_1, ... Khi đó, các giao điểm của (C_1) và (C_2) là $M_0\,(x_0; f(x_0))$, $M_1\,(x_1; f(x_1))$, ...

V. Hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số lôgarit

1. Lũy thừa

1. Với $a \neq 0$, thì $a^0 = 1$ và $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$. Chú ý 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.
2. Với $a > 0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ và $n \geq 2$ thì $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ và $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2. Một số tính chất của lũy thừa

Cho a, b là các số thực khác 0 và m, n là các số nguyên, ta có

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

b) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

c) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

d) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

Cho m, n là các số nguyên. Khi đó

1. Với $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$;
2. Với $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

3. Một số tính chất của căn bậc n

Với $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ và $m \geq 2$, ta có

- $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;
- $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$;
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \forall a > 0$;
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}, \forall a > 0$.

4. Lôgarit

Định nghĩa. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **lôgarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\boxed{\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b.}$$

Tính chất. Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Ta có các tính chất sau

1) $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$;

2) $a^{\log_a b} = b$ và $\log_a a^\alpha = \alpha$.

Lôgarit của một tích và lôgarit của một thương.
Cho ba số dương a, b_1, b_2 với $a \neq 1$, ta có

$$\log_a (b_1 \cdot b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2.$$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

Lôgarit của một lũy thừa.
Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Với mọi α, ta có $\boxed{\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b.}$

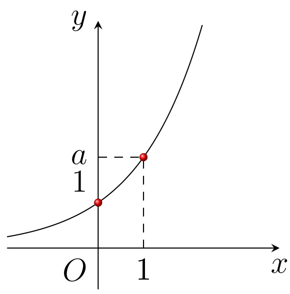
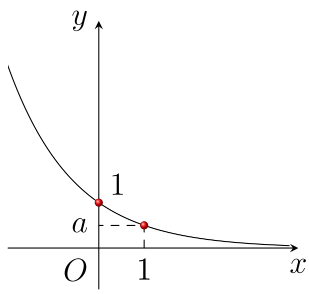
Đặc biệt $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$.

Đổi cơ số. Cho ba số dương a, b, c với $a \neq 1$ và $c \neq 1$, ta có $\boxed{\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}.}$

Đặc biệt $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ với $b \neq 1$ và $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b$ với $\alpha \neq 0$.

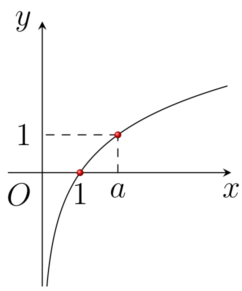
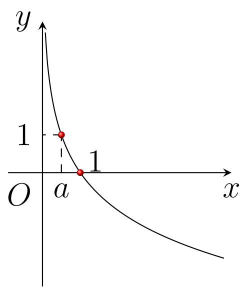
5. Hàm số mũ

$y = a^x \quad (a > 0,\ a \neq 0)$ có tập xác định: $\mathbb{R}$ và $y' = a^x \cdot \ln a$.

$y = a^x$ với $a > 1$	$y = a^x$ với $0 < a < 1$
$\lim\limits_{x \to -\infty} y = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Đường thẳng $y = 0$ (trục Ox) là tiệm cận ngang. 	$\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = 0$. Đường thẳng $y = 0$ (trục Ox) là tiệm cận ngang. 

6. Hàm số lôgarit

$y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 0)$ có tập xác định: $(0; +\infty)$ và $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

$y = \log_a x$ với $a > 1$	$y = \log_a x$ với $0 < a < 1$
$\lim\limits_{x \to 0^+} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$. Đường thẳng $x = 0$ (trục Oy) là tiệm cận đứng. 	$\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$. Đường thẳng $x = 0$ (trục Oy) là tiệm cận đứng. 

7. Hàm số lũy thừa

Hàm số $y = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

1. Tập xác định

   (a) Với α nguyên dương, $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

   (b) Với α nguyên âm hoặc bằng 0, $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   (c) Với α không nguyên, $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.

2. Đạo hàm $(u^\alpha)' = \alpha u' \cdot u^{\alpha-1}$.

3. Xét $x > 0$, ta có

$y = x^\alpha, \alpha > 0.$

1. Sự biến thiên

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} > 0, \forall x > 0.$$

   Giới hạn đặc biệt:

   $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty.$

   Không có tiệm cận.

2. Bảng biến thiên.

x	0	$+\infty$
y'	$+$	
y	0 $\nearrow$	$+\infty$

$y = x^\alpha, \alpha < 0.$

1. Sự biến thiên

   $y' = \alpha x^{\alpha-1} < 0, \forall x > 0.$

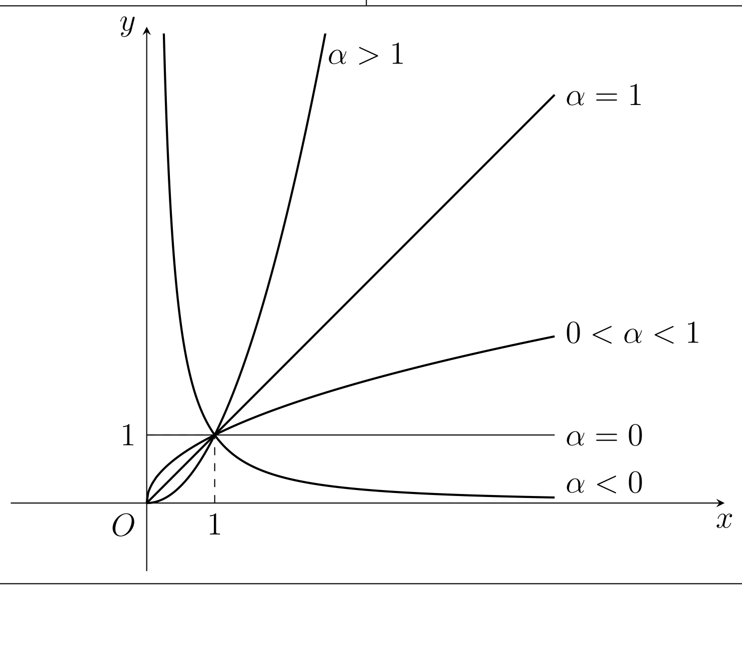
   Giới hạn đặc biệt:

   $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0.$

   Đường thẳng $y = 0$ (trục Ox) là tiệm cận ngang của đồ thị, đường thẳng $x = 0$ (trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị.

2. Bảng biến thiên.

x	0	$+\infty$
y'	$-$	
y	$+\infty$ $\searrow$	0



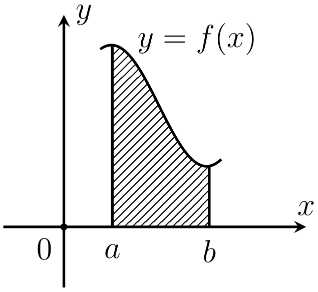
VI. Ứng dụng của tích phân

1. Ứng dụng tích phân để tính diện tích

Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành

Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

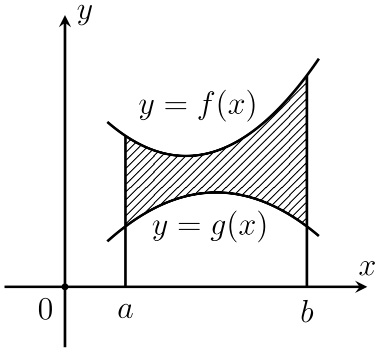
$$\boxed{S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.}$$



Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong

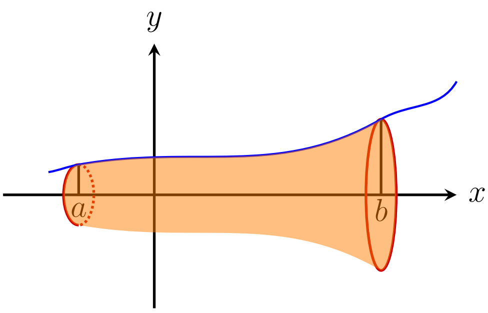
Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và các đường thẳng $x = a$, $x = b$. Khi đó diện tích S của hình D là

$$\boxed{S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.}$$



2. Ứng dụng tích phân để tính thể tích

Giả sử một hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ $(a < b)$ quay xung quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích



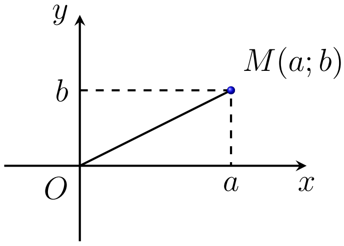
$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.}$$

VII. Số phức

Mỗi biểu thức dạng $a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$ được gọi là một **số phức**.

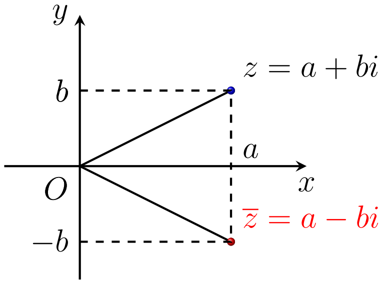
1. Số phức $z = a + bi$ trong đó $a, b \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$.
   i) a: phần thực.
   ii) b: phần ảo.
2. Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.
3. Số phức $0 + bi$ được gọi là số thuần ảo.
4. Số i được gọi là đơn vị ảo.
5. Hai số phức bằng nhau nếu phần thực và phần ảo của chúng tương ứng bằng nhau.

Điểm $M(a; b)$ trong một hệ tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z = a + bi$.



$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.}$$

Cho số phức $z = a + bi$. Ta gọi $a - bi$ là **số phức liên hợp** của z và kí hiệu là $\overline{z} = a - bi$. Trên mặt phẳng tọa độ, các điểm biểu diễn z và $\overline{z}$ đối xứng với nhau qua trục hoành.



Nhận xét. $\overline{\overline{z}} = z$ và $|z| = |\overline{z}|$.
Chia số phức $a' + b'i$ cho số phức $a + bi$ khác 0 là tìm số phức z sao cho

$$a' + b'i = (a + bi)z.$$

Số phức z được gọi là **thương** trong phép chia $a' + b'i$ cho $a + bi$ và kí hiệu là

$$z = \frac{a' + b'i}{a + bi}.$$

Chú ý. $(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.
Các căn bậc hai của số thực a âm là $\pm i\sqrt{|a|}$.
Cho phương trình $az^2 + bz + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$.
Xét biệt số $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$

1. Khi $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm thực $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Khi $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm thực là $z = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ và $z = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Khi $\Delta < 0$, phương trình có hai nghiệm phức là

$$z = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ và } z = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

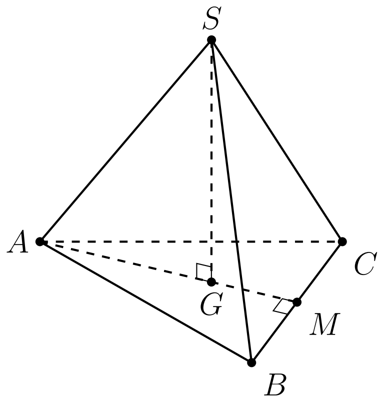
Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$. Khi đó

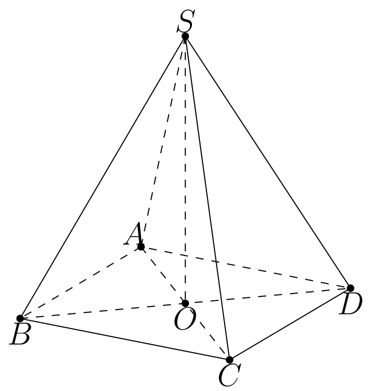
$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}} \text{ và } \boxed{z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}.}$$

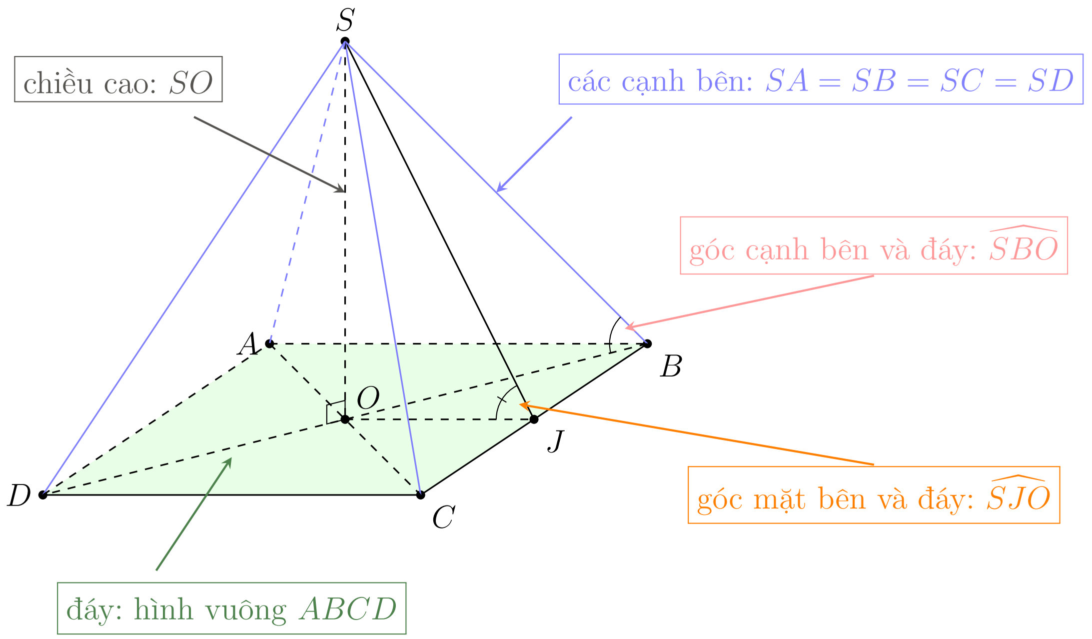
Phần II. HÌNH HỌC

Kênh YouTube: Quoc Bao Le

VIII. Hình chóp đều

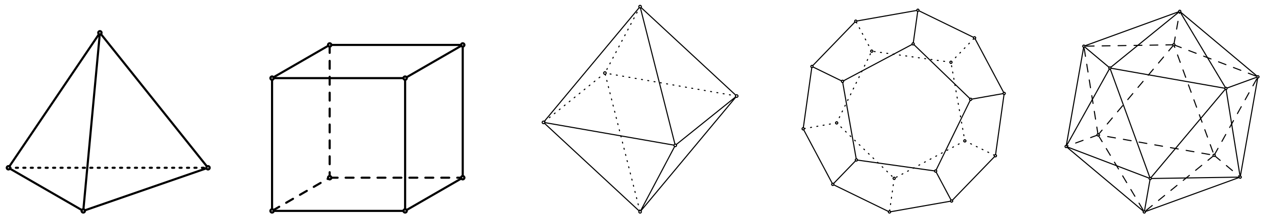






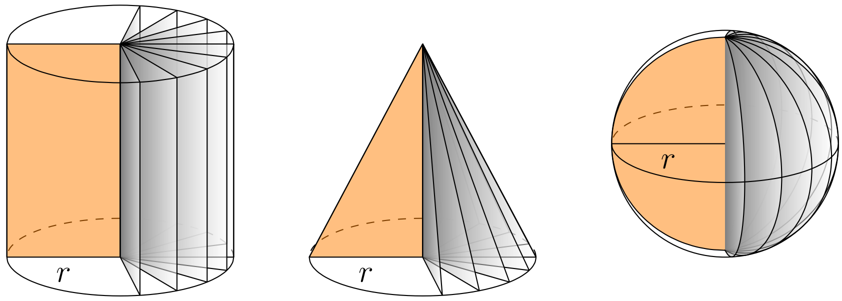
IX. Khối đa diện đều

Chỉ có năm khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\}$, *loại* $\{4;3\}$, *loại* $\{3;4\}$, *loại* $\{5;3\}$ *và loại* $\{3;5\}$.

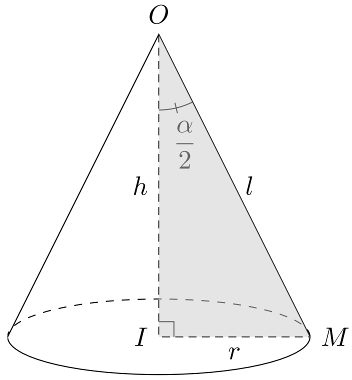


Loại	Tên gọi	Số mặt	Số đỉnh	Số cạnh
$\{3;3\}$	Tứ diện đều	4	4	6
$\{4;3\}$	Lập phương	6	8	12
$\{3;4\}$	Bát diện đều	8	6	12
$\{5;3\}$	Mười hai mặt đều	12	20	30
$\{3;5\}$	Hai mươi mặt đều	20	12	30

X. Khối nón, khối trụ và khối cầu

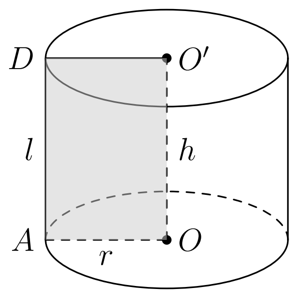


1. Khối nón



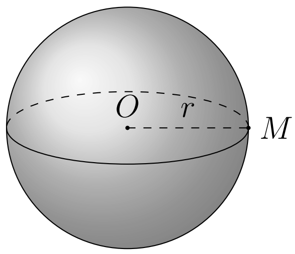
1) Góc ở đỉnh là α và $l^2 = h^2 + r^2$.
2) Chu vi đường tròn đáy là $C = \pi d$ với $d = 2r$.
   Diện tích đáy là $S = \pi r^2$.
3) $S_{xq} = \pi r l$.
4) $S_{tp} = \pi r l + \pi r^2$.
5) $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

2. Khối trụ



1) $l = h$.
2) $S_{xq} = 2\pi r l$.
3) $S_{tp} = 2\pi r l + 2\pi r^2$.
4) $V = Sh = \pi r^2 h$.

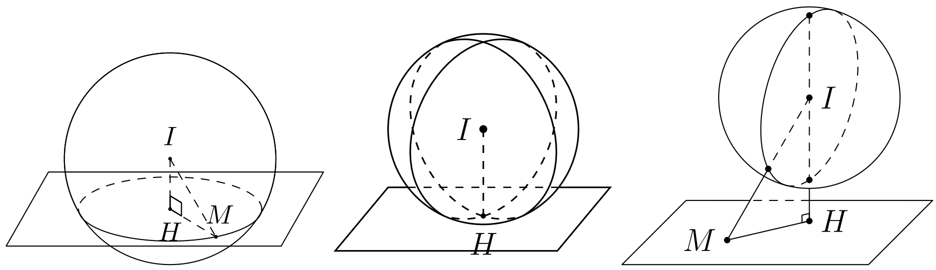
3. Khối cầu



1) Diện tích của mặt cầu có bán kính r là $S = 4\pi r^2$.
2) Thể tích của khối cầu có bán kính r là $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Giao của mặt cầu và mặt phẳng

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P). Khi đó $h = IH = d(I, (P))$.



1) Với $h < r$, ta có $r' = HM = \sqrt{r^2 - h^2}$.

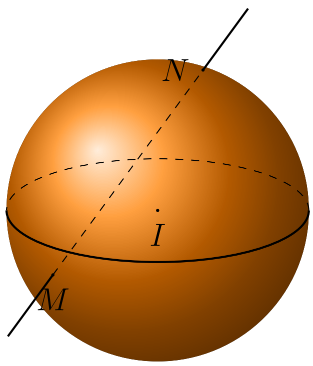
2) Với $h = r$, ta có mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H.
Điểm H gọi là tiếp điểm của mặt cầu và mặt phẳng. Mặt phẳng đó gọi là mặt phẳng tiếp xúc hay tiếp diện của mặt cầu.

3) Với $h > r$, ta có mặt phẳng không có điểm chung với mặt cầu.

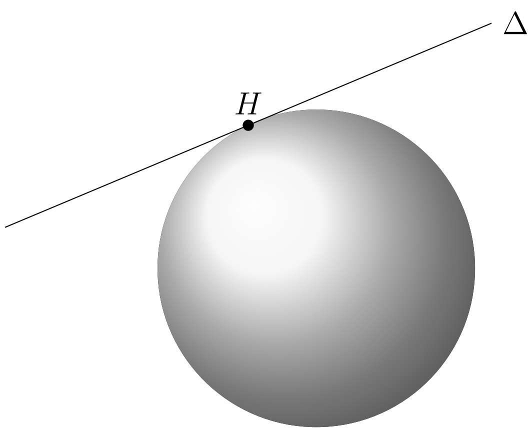
Giao của mặt cầu với đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I;r)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của tâm I trên Δ và $h = IH = d(I,\Delta)$. Tương tự như trong trường hợp mặt cầu và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau

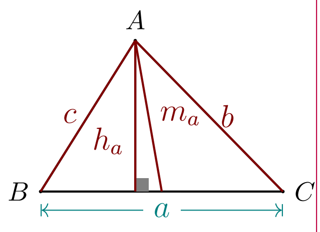
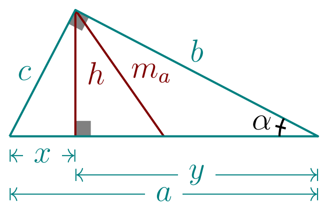
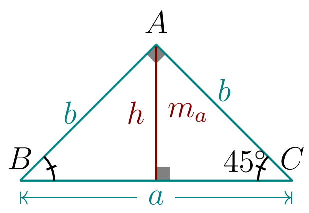
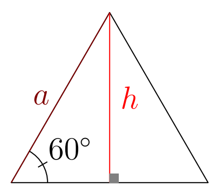
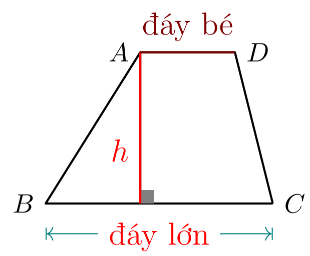
1) Với $h < r$, ta có Δ cắt mặt cầu tại hai điểm M, N phân biệt. Hai điểm đó chính là giao điểm của đường thẳng Δ với đường tròn giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng (I,Δ).

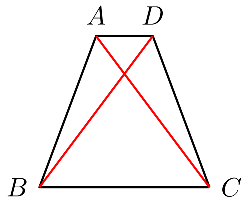
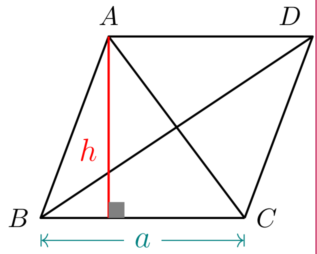
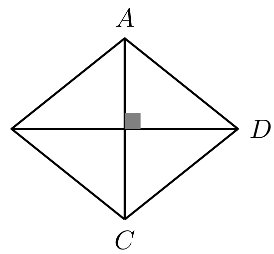
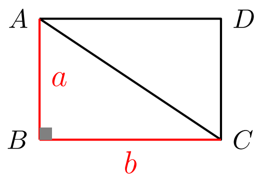
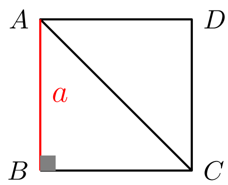
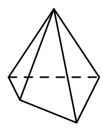
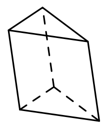
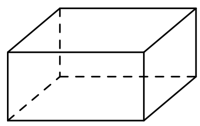
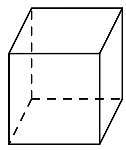
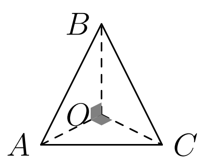


2) Với $h = r$, ta có điểm H thuộc mặt cầu $S(I;r)$ và H là điểm chung duy nhất của mặt cầu và Δ. Khi đó ta nói Δ tiếp xúc với mặt cầu tại H. Điểm H gọi là điểm tiếp xúc (hoặc tiếp điểm) của Δ và mặt cầu. Đường thẳng Δ gọi là tiếp tuyến của mặt cầu.



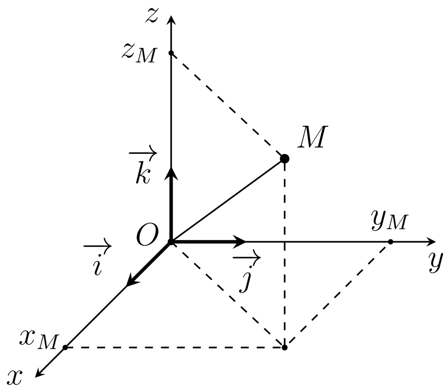
3) Với $h > r$, ta có Δ không cắt mặt cầu $S(I;r)$.

Công thức	*Hình minh họa*
1. Tam giác thường • $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{BAC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $= pr = \dfrac{abc}{4R}$. • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\widehat{BAC}$. • $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$. • $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.	
2. Tam giác vuông • $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}bc$. • $a = \sqrt{b^2+c^2}$; $b = \sqrt{a^2-c^2}$; $m_a = \dfrac{a}{2}$. • $h^2 = xy$; $c^2 = ax$. • $ah = bc$; $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$. • $\sin\alpha = \dfrac{c}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\tan\alpha = \dfrac{c}{b}$.	
3. Tam giác vuông cân • $a = b\sqrt{2}$; $b = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. • $h = m_a$ (vì tam giác ABC cân tại A).	
4. Tam giác đều • $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. • $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.	
5. Hình thang $S_{ABCD} = \dfrac{(\text{đáy bé} + \text{đáy lớn})\cdot h}{2}$	

6. Hình thang cân Hai cạnh bên bằng nhau, hai đường chéo bằng nhau, hai cạnh đáy song song với nhau, hai góc kề một đáy bằng nhau.	
7. Hình bình hành $S_{ABCD} = ah.$ Các cạnh đối bằng nhau, các góc đối bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, các cạnh đối song song với nhau.	
8. Hình thoi $S = \dfrac{\text{tích hai đường chéo}}{2}.$ Bốn cạnh bằng nhau, hai đường chéo vuông góc với nhau, các cạnh đối song song với nhau, các góc đối bằng nhau.	
9. Hình chữ nhật • $S_{ABCD} = ab.$ • $AC = \sqrt{a^2 + b^2}.$	
10. Hình vuông • $S_{ABCD} = a^2.$ • $AC = a\sqrt{2}.$	
11. Thể tích khối chóp $V = \dfrac{1}{3}Sh.$	
12. Thể tích khối lăng trụ $V = Sh.$	
13. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c $V = abc.$	
14. Thể tích khối lập phương cạnh a $V = a^3.$	
15. Thể tích khối chóp có OA, OB, OC đôi một vuông góc $V = \dfrac{OA \cdot OB \cdot OC}{6}.$	

XI. Không gian $Oxyz$

1. Hệ toạ độ



- Trục hoành Ox, trục tung Oy, trục cao Oz với các vectơ đơn vị lần lượt là $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{i}$ thoả mãn $|\overrightarrow{i}| = |\overrightarrow{j}| = |\overrightarrow{k}| = 1$ và $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k} = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{i} = 0$.
- Toạ độ: $\overrightarrow{i} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{j} = (0;1;0)$, $\overrightarrow{k} = (0;0;1)$.

2. Toạ độ của điểm

- $M(x_M; y_M; z_M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x_M \cdot \overrightarrow{i} + y_M \cdot \overrightarrow{j} + z_M \cdot \overrightarrow{k}$.
- $M(x_M; 0; 0) \in Ox$.
- $M(0; y_M; 0) \in Oy$.
- $M(0; 0; z_M) \in Oz$.
- $M(x_M; y_M; 0) \in (Oxy)$.
- $M(0; y_M; z_M) \in (Oyz)$.
- $M(x_M; 0; z_M) \in (Ozx)$.
- Trung điểm I của đoạn thẳng AB

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}.$$

- Trọng tâm G của tam giác ABC

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}.$$

- $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases}.$$

3. Toạ độ của vectơ

- $\overrightarrow{v} = a \cdot \overrightarrow{i} + b \cdot \overrightarrow{j} + c \cdot \overrightarrow{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = (a; b; c)$.
- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
- Cho hai vectơ $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ và số $k \in \mathbb{R}$. Khi đó
  - \+ $\begin{cases} \overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3) \\ k \cdot \overrightarrow{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; k \cdot a_3) \end{cases}$.
  - \+ $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$.
  - \+ Cho $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Khi đó $\overrightarrow{a}$ cùng phương với $\overrightarrow{b} \Leftrightarrow$ tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{a} = t\,\overrightarrow{b}$.
  - \+ Đặc biệt: Với $b_1 b_2 b_3 \neq 0$ thì $\overrightarrow{a}$ cùng phương với $\overrightarrow{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$.

* Lưu ý: Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Khi đó ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{BC}$.

4. Tích vô hướng của hai vectơ (*kết quả là một số*)

Với $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ và $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$. Ta có $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$.

- $\cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$;
- $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$.

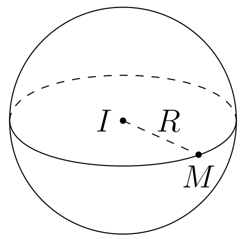
Với $\overrightarrow{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\overrightarrow{b} = (b_1; b_2; b_3)$ thì $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

- $\overrightarrow{a}^2 = |\overrightarrow{a}|^2$ và $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

5. Tích có hướng của hai vectơ (*kết quả là một vectơ*)

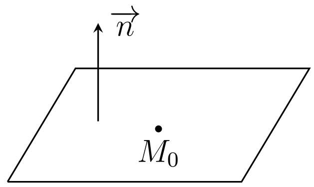
$$\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right) = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2).$$

6. Phương trình mặt cầu

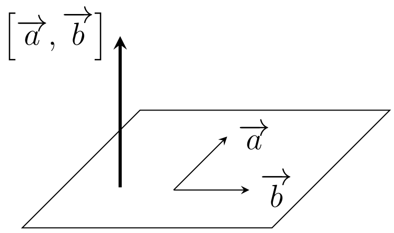


- Mặt cầu (S) tâm $I(a; b; c)$, bán kính R có phương trình
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$
- Với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, phương trình dưới đây
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$
là phương trình của mặt cầu tâm $I(a; b; c)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

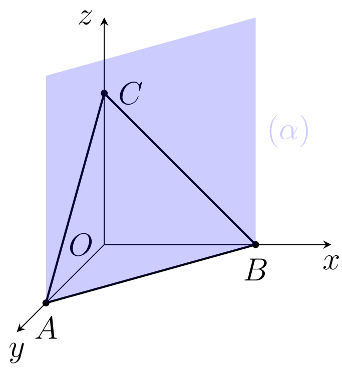
7. Phương trình mặt phẳng



- Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ thì (P) có phương trình
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
hay $Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$.
- Nếu (P) có phương trình $Ax+By+Cz+D = 0$ thì (P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n}_P = (A; B; C)$.
- Nếu $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ không cùng phương đồng thời có giá song song hoặc chứa trong mặt phẳng (P) thì $\left[\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).



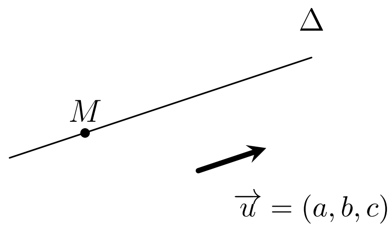
- Nếu $(P) \parallel (Q)$ và $(Q)\colon ax + by + cz + d = 0$ thì $(P)\colon ax + by + cz + d' = 0$ $(d' \neq d)$.
- Nếu (P) đi qua $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với $abc \neq 0$ thì $(P)\colon \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.



XII. Phương trình đường thẳng

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ thì Δ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}.$$



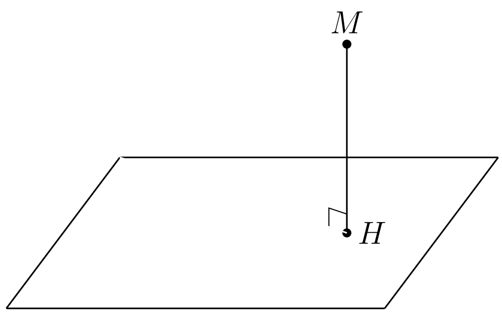
- Nếu $abc \neq 0$ thì phương trình của Δ dưới dạng *chính tắc* là $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha)\colon Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$\mathrm{d}\,(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

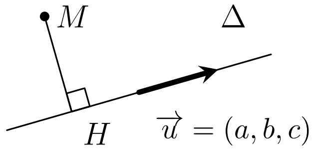
Chú ý. $H(x_0 + At; y_0 + Bt; z_0 + Ct)$
với $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$.



2. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}.$

$$\mathrm{d}\,(M, \Delta) = MH$$

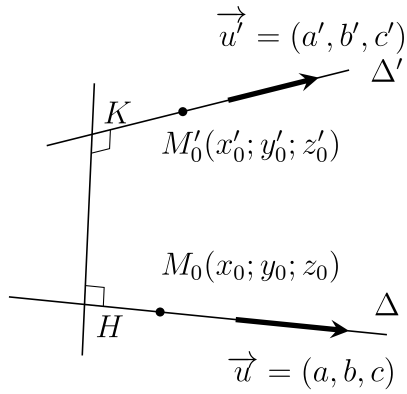


với $H(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$ và $t = \dfrac{a(x_M - x_0) + b(y_M - y_0) + c(z_M - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}$.

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng chéo nhau:

- Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ và đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$.
- Δ' có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u'} = (a'; b'; c')$ và đi qua điểm $M'_0(x'_0; y'_0; z'_0)$.



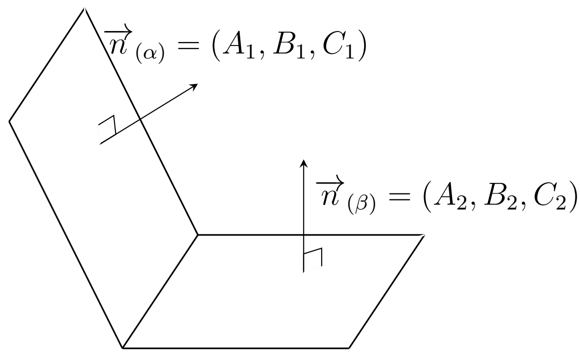
Khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 được tính bởi công thức

$$\mathrm{d}(\Delta; \Delta') = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right] \cdot \overrightarrow{M_0M'_0}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}\right]\right|}.$$

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\beta) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ cắt nhau.
Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β). Ta có

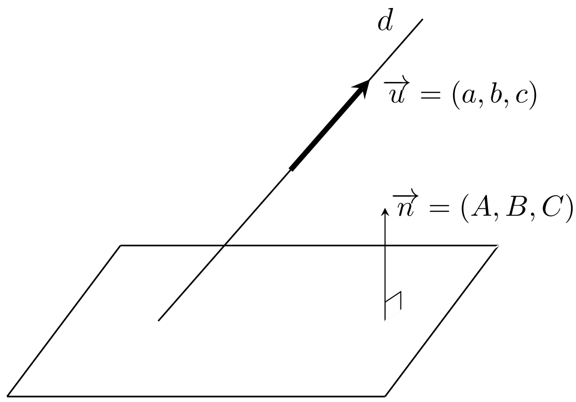
$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$



5. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = (a; b; c)$ và mặt phẳng $(\alpha) : Ax + By + Cz + D = 0$.
Gọi φ là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α). Ta có

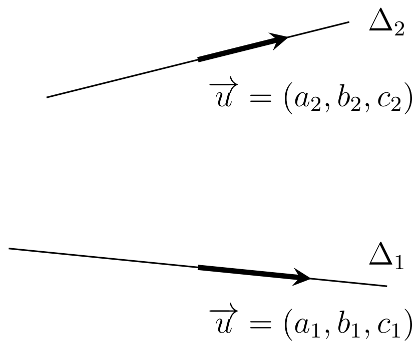
$$\sin\varphi = \frac{|Aa + Bb + Cc|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



6. Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng

- Δ_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_1 = (a_1; b_1; c_1)$.
- Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u}_2 = (a_2; b_2; c_2)$.



Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$